

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր

Д О К Л А Д Ы

Том 89 № 4

1989

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրիկար), Է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԻՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԽԱԼԱԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵՂՈՎԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ քղր. անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՆԻՍԻՍԻՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՏԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

## Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

### ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Մ. Ա. Կիևովյան—Ստացիոնար գաուսյան պրոցեսից քառակուսային ֆունկցիոնալների բաշխման մասին . . . . .	147
Հ. Մ. Հայրապետյան—Համալուծման խնդիրը $LP$ դասերում եզակի դեպքերում	151
Յ. Ա. Շամոյան, Ա. Վ. Կասպարյան—Ֆիքսած բեկոններով պարզ կոտորակների սիստեմների լրիվութունը հոլոմորֆ, ընդհուպ մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների տարածություններում . . . . .	156
Ա. Ա. Իանիելյան—Կոմպակտի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների տարամիտության բազմության մասին . . . . .	161
Ա. Լ. Գրիգորյան—Ֆունկցիայի լավագույն քառակուսային մոտարկման մնացորդի ասիմպտոտիկ գնահատումը . . . . .	164
Է. Ա. Միրզախանյան—Բորսուկի կենտ արտապատկերման աստիճանի կենտության մասին և անշարժ կետի մասին թեորեմների անվերջ շափանի անալոզների մասին	167
Հ. Ս. Ներսիսյան—Նրկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների թվային լուծման նոր ալգորիթմներ . . . . .	171

### ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Մ. Նարիմանյան, Կ. Ա. Օֆսուրյան, Գ. Մ. Սարգսյան—Բարակ պղնձե թիթեղի տատանումները լայնական մագնիսական դաշտում . . . . .	177
Ս. Հ. Սարգսյան—Հաղորդիչ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության վարիացիոն հավասարումը . . . . .	181

### ՖԻԶԻԿԱ

Ռ. Գ. Բաբերցյան, Է. Ս. Բաղալյան, Գ. Ա. Եղիազարյան, Է. Ի. Տեր-Պետրոսյան—Փոփոխվող երկարությամբ պեննինգի պարպման մեջ բարձր հաճախային տատանումների զրգոման և նրանց կողմից անոմալ էլեկտրոնների էներգիայի վրա ունեցած ազդեցության մասին . . . . .	187
---	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- М. С. Гиновян*—О распределении квадратичных функционалов от стационарного гауссовского процесса . . . . . 147
- Г. М. Айрапетян*—Задача сопряжения в классах  $L_p$  в особых случаях 151
- Ф. А. Шамоян, А. В. Гаспарян*—Полнота систем простых дробей с фиксированными полюсами в пространствах голоморфных функций, гладких вплоть до границы . . . . . 156
- А. А. Даниелян*—О множестве расходимости полиномов, равномерно ограниченных на компакте . . . . . 161
- А. Л. Григорян*—Асимптотическая оценка остатка при приближении функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения 164
- Э. А. Мирзаханян*—О бесконечномерных аналогах теорем Борсука о четности степени нечетного отображения и о неподвижной точке . . . . 167
- А. Б. Нерсисян*—Новые алгоритмы численного решения интегральных уравнений второго рода . . . . . 171

### МЕХАНИКА

- С. М. Нариманян, К. А. Оксюзян, Г. М. Саркисян*—Экспериментальные исследования колебаний тонких медных пластин в продольном магнитном поле 177
- С. О. Саркисян*—Вариационное уравнение магнитоупругости проводящих тонких оболочек . . . . . 181

### ФИЗИКА

- Р. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егиазарян, Э. А. Тер-Геворкян*—О стимулировании ВЧ-колебаний и их влияния на энергию аномальных электронов в дециметровом разряде переменной длины . . . . . 187

## C O N T E N T S

### MATHEMATICS

- M. S. Gtnovian*—On the distribution of quadratic functionals from the Gaussian stationary process . . . . . 147
- G. M. Hayrapetian*—Adjoining problem in  $L_p$  classes in special cases . . . . . 151
- F. A. Shamoyan, A. V. Gasparian*—The completeness of systems of partial fractions with fixed poles in spaces of holomorphic functions, smooth up to boundary . . . . . 156
- A. A. Daniellian*—On divergence set of polynomials uniformly bounded on compact. . . . . 161
- A. L. Grigorian*—Asymptotic estimate remainder of the approach of the function least square approximation by polynomials . . . . . 164
- E. A. Mirzachanian*—On infinite-dimensional analogues of Borsuk's theorems on the odd degree mappings and on the fixed point . . . . . 167
- A. B. Nersessian*—New algorithms of numerical solution of the second order integral equations. . . . . 171

### MECHANICS

- S. M. Nartmanian, K. A. Oksuzian, G. M. Sarkisian*—Experimental studies of thin copper plate oscillations in longitudinal magnetic field . . . . . 177
- S. O. Sarkisian*—Variational equation of magnetoelasticity of conducting thin shells . . . . . 181

### PHYSICS

- R. P. Babertsian, E. S. Badallan, G. A. Yegiazarian, E. I. Ter-Gevorkian*—About stimulation HF-oscillations and their influence on anomal electron energy in Penning's discharge . . . . . 187

ISSN 0321—1334. Доклады Академии наук Армянской ССР. 1989. т. 89. № 4. 145—192

Техн. редактор *Азизбекян Л. А.*

Сдано в набор 3.10.89. Подписано к печати 22.01.90. ВФ 02714

Формат 70×108<sup>1/16</sup>. Бумага № 1. сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0.

Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет.-изд. л. 3,13. Тираж 530. Заказ № 1365.

Издат. № 7706. Цена 55 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. I, т. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,  
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

О распределении квадратичных функционалов от стационарного гауссовского процесса

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 28/IV 1989)

В настоящей заметке приводятся результаты исследования асимптотического поведения квадратичных функционалов теплицева типа от гауссовского стационарного процесса с непрерывным временем. В п. 1 указываются условия, при которых нормированный квадратичный функционал имеет асимптотически нормальное распределение. В п. 2 рассматривается задача непараметрического оценивания линейного функционала от спектральной плотности, в частности, указаны оценки сверху для минимаксного среднеквадратичного риска предлагаемых оценок. В п. 3 приводится один новый результат из теории теплицевых операторов. Аналогичные задачи для процессов с дискретным временем рассматривались в работах (1-4), и приводимые ниже результаты являются дальнейшим развитием некоторых исследований этих работ.

1. Пусть  $X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , — стационарный гауссовский процесс со средним нуль ( $E X(t) = 0$ ) и спектральной плотностью (с. п.)  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . Рассмотрим квадратичный функционал теплицева типа от процесса  $X(t)$ , т. е. функционал  $\hat{L}_T$ :

$$\hat{L}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \hat{g}(u-v) X(u) \overline{X(v)} du dv, \quad (1)$$

где  $\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g(\lambda) d\lambda$  — преобразование Фурье некоторой суммируемой функции  $g(\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . Функцию  $g(\lambda)$  будем называть порождающей для функционала (1).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть с. п.  $f(\lambda) \in L_1 \cap L_{p_1}$ , а порождающая функция  $g(\lambda) \in L_1 \cap L_{p_2}$ , причем  $p_k \geq 2$ ,  $k=1, 2$ ,  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{2}$ . Тогда нормированный квадратичный функционал  $T^{1/2} (\hat{L}_T - E(\hat{L}_T))$  имеет асимптотическое (при  $T \rightarrow \infty$ ) нормальное распределение  $N(0, \sigma^2)$ , где

$$\sigma^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda.$$

2. Теперь рассмотрим следующую задачу непараметрического оценивания (ср. (1.1)): пусть с. п.  $f(\lambda)$  неизвестна, но известно, что она принадлежит заданному множеству спектральных плотностей  $\Sigma$ , и требуется по наблюдению  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , оценить значение известного линейного функционала  $L$  в точке  $f$ .

Ниже мы рассматриваем линейные функционалы  $L(f)$ , непрерывные в  $L_p = L_p(-\infty, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Хорошо известно (см. (3)), что всякий такой функционал допускает представление

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(i)g(i)di, \quad (2)$$

где функция  $g(i) \in L_q$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ , и  $\|L\| = \|g\|_q$ ,  $\|\cdot\|_q$  — норма в пространстве  $L_q$ .

В качестве оценки функционала (2) естественно рассматривать квадратичный функционал  $\hat{L}_T$ , определенный формулой (1) (см. (6)), который, как нетрудно убедиться, допускает представление

$$\hat{L}_T = \int_{-\infty}^{\infty} I_T(i)g(i)di, \quad (3)$$

где  $I_T(i) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T X(t)e^{-it}dt \right|^2$  — периодограмма процесса  $X(t)$ .

Обозначим через  $H_p^\beta(C)$ ,  $\beta = \alpha + r$ ,  $r$  — целое,  $0 < \alpha < 1$ ,  $C > 0$ , множество функций  $\varphi(i) \in L_p$ , имеющих в  $L_p$   $r$  производных, причем производная  $\varphi^{(r)}(i)$  удовлетворяет в  $L_p$  условию Гельдера с показателем  $\alpha$  и константой  $C$ , т. е.

$$\|\varphi^{(r)}(\cdot + h) - \varphi^{(r)}(\cdot)\|_p \leq C|h|^\alpha;$$

$\Sigma_p(C, \beta)$  — множество спектральных плотностей, принадлежащих пространству  $H_p^\beta(C)$ ;  $W_1$  — класс всех симметричных и неубывающих функций потерь  $w$  таких, что  $w(0) = 0$  и при некоторых постоянных  $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$   $w(u) \leq C_1 \exp\{C_2|u|\}$ .

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $\Sigma = \Sigma_p(C_1, \beta_1)$ , ( $C_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ), а порождающая функция  $g(i) \in H_q^{\beta_2}(C_2)$ , ( $C_2 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ), причем  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\beta_1 + \beta_2 > \frac{1}{2}$ . Тогда если  $\|fg\|_2 \geq m > 0$ , то для всех  $w \in W_1$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_T\{w(\sqrt{T}(\hat{L}_T - L(f)))\} = Ew(\xi), \quad (4)$$

где  $\xi$  — нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией  $\sigma^2 = 2\pi\|fg\|_2^2$ , и  $E_T\{\cdot\}$  — математическое ожидание по мере порожденной с. п.  $f(i)$ .

Обозначим через  $\Delta_T^2$  минимаксный среднеквадратичный риск оценки  $\hat{L}_T$ , т. е.

$$\Delta_T^2 = \sup_{\|L\|=1} \inf_{\hat{L}_T} \sup_{f \in \Sigma} E_f |\hat{L}_T - L(f)|^2.$$

Следующая теорема дает оценки сверху для величины  $\Delta_T^2$  (ср. (3)).

Теорема 3. Пусть  $\Sigma = \Sigma_p(C, \beta)$ , ( $C > 0, \beta > 0$ ), а линейный функционал  $L$  непрерывен в пространстве  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда

$$\Delta_T^2 \leq \begin{cases} C_1 T^{-\frac{2\beta}{1+2\beta-\frac{2}{p}}}, & \text{если } p \geq 2; \beta \geq \frac{1}{p} \\ C_2 T^{-2\beta}, & \text{если } p \geq 2; \beta \leq \frac{1}{p} \\ C_3 T^{-2\beta}, & \text{если } 1 < p \leq 2; \beta \leq \frac{1}{2} \\ C_4 T^{-1}, & \text{если } 1 < p \leq 2; \beta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

где  $C_k, k = \overline{1, 4}$ , — некоторые постоянные.

Замечания. 1. Аналог теоремы 1 для процессов с дискретным временем доказан в работе (2).

2. Теорема 2 является обобщением теоремы работы (6), в которой доказано соотношение (4) при условиях  $p = q = 2, r = 0$ .

3. Сходимость в (4) равномерна по  $f$  и  $L$  в классе  $\Phi(m, C_1, C_2)$  — всех  $f$  и  $L$  таких, что  $f \in \Sigma_p(C_1, \beta_1), g \in H_q^{\beta_2}(C_2), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \beta_1 + \beta_2 > \frac{1}{2}; \|fg\|_2 \geq m > 0$ .

3. Доказательства теорем 1—3 существенно опираются на следующий результат из теории теплицевых операторов, который, впрочем, представляет и самостоятельный интерес (ср. (7)).

Обозначим через  $H_T$  пространство целых функций степени не выше  $T$ , и пусть  $P_T$  ортопроектор в  $L_2$  на подпространство  $H_T$ . Для функции  $\varphi(\lambda) \in L_1$  определим усеченный оператор Теплица  $A_T(\varphi)$  равенством  $A_T(\varphi) = P_T \varphi P_T$ , где  $\varphi$  — оператор умножения на функцию  $\varphi(\lambda)$ , и пусть  $\text{tr}|A|$  — след оператора  $A$ .

Теорема 4. Пусть функции  $f_k(\lambda) \in L_1 \cap L_{p_k}, 1 \leq p_k \leq \infty, k = \overline{1, n}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\nu = \sum_{k=1}^n p_k^{-1} \leq 1$ , то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{tr} \left| \prod_{k=1}^n A_T(f_k) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n f_k(\lambda) d\lambda;$$

б) если же  $\nu + \varepsilon > 1, \varepsilon > 0$ , то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-(\nu+\varepsilon)} \text{tr} \left| \prod_{k=1}^n A_T(f_k) \right| = 0.$$

Отметим, что аналогичный результат для теплицевых матриц доказывается в работе (2).

Академии наук Армянской ССР  
Институт математики

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Ստացիոնար գաուսյան պրոցեսից բառակուսային ֆունկցիոնալների  
բաշխման մասին

Դիցուք  $X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  գրոյական միջինով և  $f(\cdot)$ ,  $\cdot \in (-\infty, \infty)$  սպեկտրալ խտությունը ստացիոնար գաուսյան պրոցես է, իսկ  $g(\cdot)$ ,  $\cdot \in (-\infty, \infty)$  ինչ-որ հանրագումարելի ֆունկցիա է:

Հոդվածում դիտարկվում է  $X(t)$  պրոցեսով և  $g(\cdot)$  ֆունկցիայով ձևավորված  $\hat{L}_T$  քառակուսային ֆունկցիոնալը, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\hat{L}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \hat{g}(u-v) X(u) \overline{X(v)} du dv,$$

որտեղ  $\hat{g}(t)$ -ն  $g(\cdot)$  ֆունկցիայի ֆուրյեի ձևափոխությունն է: Բերված են պայմաններ, որոնց դեպքում  $T^{1/2}(\hat{L}_T - E(\hat{L}_T))$  նորմալորված քառակուսային ֆունկցիոնալն ունի ասիմպտոտիկ (երբ  $T \rightarrow \infty$ ) նորմալ բաշխում: Դիտարկվում է նաև սպեկտրալ խտությունից դժային ֆունկցիոնալի գնահատման խնդիրը: Ստացված են գնահատականներ միջին քառակուսային շեղումների համար:

#### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> R. Z. Has'minskiĭ, I. A. Ibrag'ımov, Probability Theory and Rel. Fields, v. 73, № 3 (1986). <sup>2</sup> F. Avram, Probability Theory and Rel. Fields, v. 79, № 1 (1988). <sup>3</sup> И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасъминский, Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 153 (1987). <sup>4</sup> М. С. Гиновян, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, в. 2 (1988). <sup>5</sup> Ф. Русс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. <sup>6</sup> М. С. Гиновян, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, в. 4 (1988). <sup>7</sup> У. Гренандер, Г. Сеге, Теплицевы формы и их применения, ИЛ, М., 1961..

УДК 513.53

МАТЕМАТИКА

Г. М. Айрапетян

### Задача сопряжения в классах $L^p$ в особых случаях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/V 1989)

Пусть  $T$  — единичная окружность,  $D^+$  — единичный круг, а  $D^-$  — множество  $|z| > 1$ . Обозначим через  $H(\Omega)$  класс функций, определенных на множестве  $\Omega$  и удовлетворяющих условию Гельдера, а через  $H_0(T; t_1, \dots, t_n)$  — класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках  $t_k \in T$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и принадлежащих классу Гельдера в каждом интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $t_{n+1} = t_1$ ).

Задача сопряжения в классической постановке

$$\Phi^+(t) - D(t)\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in T, \quad (1)$$

где  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  — искомые аналитические функции на  $D^+$  и  $D^-$  соответственно,  $D(t)$  и  $f(t)$  функции, заданные на  $T$ , при различных предположениях на  $D(t)$  и  $f(t)$  изучены многими авторами. Полученные результаты и их приложения подробно изложены в работах (1-7) и др.

Предполагая, что  $D(t) \neq 0$ ,  $D(t) \in H_0(T; t_1, \dots, t_n)$ , положим  $\alpha_k + i\beta_k = (2\pi i)^{-1}(\ln D(t_k - 0) - \ln D(t_k + 0))$ , где  $\ln D(t)$  определенная ветвь логарифма на  $[t_k, t_{k+1}]$ . Если  $p > 1$  произвольное число, то обозначим через  $T(p)$  подмножество множества  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , состоящее из точек  $t_k$  таких, что  $(1 - \{\alpha_k\})p = 1$  ( $\{\alpha_k\}$  — дробная часть числа  $\alpha_k$ ), а через  $T'(p)$  и  $T''(p)$  подмножества таких точек из  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , для которых выполняются неравенства  $(1 - \{\alpha_k\})p < 1$ ,  $(1 - \{\alpha_k\})p > 1$  соответственно.

Далее, обозначим через  $M(D)$  класс непрерывных функций  $f(t) \geq 0$ , обращающихся в нуль только в точках  $t_k \in T(p)$  и допускающих представление  $\rho(t) = \bar{\rho}(t) \prod_{t_k \in T(p)} |\ln|t_k - t||^{-\frac{p}{q}}$ ,  $t \in T$ ,  $\bar{\rho}(t) \neq 0$ ,  $\bar{\rho}(t) \in C(T)$ .

$$q = p(p-1)^{-1}.$$

При исследовании задачи сопряжения (1) в классе  $L^p$  важно иметь факторизацию функции  $D(t)$  вида  $D(t) = X^+(t)(X^-(t))^{-1}$ , где  $X(z) \in \bar{K}_r(T)$ ,  $(X(z))^{-1} \in \bar{K}_q(T)$ ,  $q = p(p-1)^{-1}$  (см. (3,4)).

Когда  $T(p) \neq \emptyset$ , факторизации функции  $D(t)$  в указанном смысле не существует. Этот случай назовем особым. В работе предлагается следующая постановка задачи сопряжения, когда можно провести полное исследование этой задачи, не имея такой факторизации.

**Задача А.** Найти голоморфную в  $D^+ \cup D^-$  функцию  $\Phi(z)$ , обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)|^{\rho} \rho(t) |dt| = 0, \quad (2)$$

где  $\rho(t) \in M(D)$ ,  $f(t) \in L^{\rho}(T)$ ,  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  сужения функции  $\Phi(z)$  на  $D^+$  и  $D^-$  соответственно, а  $\alpha(t)$  — некоторый гомеоморфизм, отображающий  $T$  на себя. Отметим, что в особом случае задачи  $\Lambda$  может обладать решениями, для которых  $\Phi^+(z) \in H^{\rho}(\rho)$  ( $H^{\rho}(\rho)$  — класс Харди с весом  $\rho$ ).

Везде предполагается, что  $\alpha'(t) \in Lip(1)$ .

1. Паре функций  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ , определенных на  $D^+$  и  $D^-$ , сопоставим функцию  $\Phi(z)$  по равенству  $\Phi(z) = \Phi^+(z)$  ( $z \in D^+$ ) и  $\Phi(z) = -\Phi^-(z)$  ( $z \in D^-$ ). Обратное, если  $\Phi(z)$  определена на  $D^+ \cup D^-$ , то через  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  обозначим сужения функции  $\Phi(z)$  на  $D^+$  и  $D^-$  соответственно.

По теореме о конформном склеивании (см. например (1)) существует такое решение  $\lambda(z)$  задачи  $\lambda^+(\alpha(t)) - \lambda^-(t) = 0$ ,  $t \in T$ , что  $\lambda^+(z)$  и  $\lambda^-(z)$  ( $\lambda^-(z) = z + \lambda^-(z)$ ,  $\lambda^-(\infty) = 0$ ) конформно отображают области  $D^+$  и  $D^-$  на некоторые области  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  с общей границей и удовлетворяют условию Липшица в  $D^+ \cup T$  и  $D^- \cap T$  соответственно. Положим

$$\Pi_p^+(z) = \prod_{k=1}^n (\lambda^+(z) - \lambda^+(\alpha(t_k)))^{\lambda_k} \quad (z \in D^+), \quad \Pi_p^-(z) = \prod_{k=1}^n (\lambda^-(z) - \lambda^-(t_k))^{\lambda_k} \quad (z \in D^-),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — целые числа и выбираются так, чтобы имело место  $-1 < \lambda_k + \alpha_k \leq 0$ , если  $t_k \in T(p) \cup T'(p)$  и  $0 < \alpha_k + \lambda_k < 1$ , если  $t_k \in T''(p)$ .

Далее, положим  $S_p^+(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau}$ , ( $z \in D^+$ ),  $S_p^-(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau}$ , ( $z \in D^-$ ), где  $\beta(t)$  — функция, обратная к  $\alpha(t)$ , а  $\varphi(t)$  — решение уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_T \left( \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right) \varphi(\tau) d\tau = \ln D(t).$$

Введем в рассмотрение функцию  $S_p(z) = S(z)\Pi_p(z)$ ,  $z \in D^+ \cup D^-$ .

**Теорема 1.** Если  $\Phi(z)$  удовлетворяет условию (2) и имеет конечный порядок на бесконечности, то ее можно представить в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{S_p^+(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+, \quad (3)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S_p^-(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + S_p^-(z)Q(z), \quad z \in D^-,$$

где  $Q(z)$  — определенный полином, а  $\varphi(t)$  — решение уравнения  $K\varphi = Q(t) + f(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f_r(t) \in H(T)$  и  $f_r(t) \rightarrow f(t)$  по метрике  $L^{\rho}(T)$ . Так как  $S_p^+(\alpha(t)) - D(t)S_p^-(t) = 0$  и  $(S_p^+(t))^{-1} \in L^{\rho}(T)$ , для некото-

рого  $q' > q$  ( $q = p(p-1)^{-1}$ ), то условие (2) можно записать в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S_p^+(z(t))} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S_p^-(t)} - \frac{f_r(t)}{S_p^+(z(t))} \right\|_1 = 0.$$

Обозначив  $\Psi_r(t) = \Phi^+(r\alpha(t))(S_p^+(z(t)))^{-1} - \Phi^-(r^{-1}t)(S_p^-(t))^{-1} - f_r(t)(S_p^+(z(t)))^{-1}$ ,  $F_r^+(z) = \Phi^+(rz)(S_p^+(z))^{-1}$  ( $z \in D^+$ ),  $F_r^-(z) = \Phi^-(r^{-1}z)(S_p^-(z))^{-1}$  ( $z \in D^-$ ), будем иметь  $F_r^+(z(t)) - F_r^-(t) = \Psi_r(t) + f_r(t)(S_p^+(z(t)))^{-1}$ ,  $t \in T$ . Так как функции  $F_r^+(z)$  и  $F_r^-(z)$  представимы в виде интеграла типа Коши с плотностью из класса  $L^q(T)$ , то (см. (3.4))

$$F_r^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi_r(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad (z \in D^+), \quad F_r^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi_r(\tau)}{\tau - z} d\tau + Q_r(z) \quad (z \in D^-),$$

где  $Q_r(z)$  — главная часть функции  $F_r^-(z)$  на бесконечности, а  $\varphi_r(t)$  — решение уравнения  $K\varphi = \Psi_r(t) + Q_r(t) + f_r(t)(S_p^+(z(t)))^{-1}$ . Переходя к пределу, когда  $r \rightarrow 1-0$ , завершаем доказательство теоремы.

**Лемма 1.** Если  $f(t) \in H(T)$ , то функция  $\Phi(z)$  из (3) удовлетворяет условию (2).

**Доказательство.** Не нарушая общности, можно считать, что множество  $T(p)$  состоит из одной точки  $t_1$ . Достаточно рассмотреть случай, когда  $f(t) \equiv 0$  вне некоторой окрестности  $V$  точки  $t_1$ , которая не содержит других точек из множества  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Из (3) имеем  $|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)| \leq C_1(|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t)S_p^-(r^{-1}t)| + |S_p^+(r\alpha(t))|(1-r)^{\delta_1})$ , где  $\delta_1 > 0$ ,  $C_1$  — постоянная. Так как при  $t \in V$

$$|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t)S_p^-(r^{-1}t)| \leq C_2 |S_p^+(r\alpha(t))| \cdot \left( \frac{1-r}{|t_1 - rt|} + (1-r)^{\delta_1} \right) \quad (\delta_1 > 0, C_2 = \text{const}), \quad (4)$$

то 
$$\int_T |\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)|^p \rho(t) dt \leq C_3 \int_T \frac{1-r^2}{|t_1 - rt|^2} \rho(t) dt.$$

Учитывая, что  $\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \frac{1-r^2}{|t_1 - rt|^2} \rho(t) dt = \rho(t_1) = 0$ ,

завершаем доказательство леммы.

2. Положим

$$k_r(\tau, t) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - rt}, \quad k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \quad (\tau, t \in T).$$

Учитывая, что  $\alpha'(t) \in Lip(1)$ , будем иметь

$$|k_r(\tau, t) + k(\tau, t)| \leq C \cdot P_r(\tau, t), \quad (5)$$

где  $P_r(\tau, t)$  — ядро Пуассона,  $C$  — некоторая постоянная.

Далее положим

$$(K_r f)(t) = \frac{S_p^+(r\alpha(t))}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(z(\tau))} (k_r(\tau, t) + k(\tau, t)) d\tau,$$

$$(B_r f)(t) = \frac{S_p^+(ra(t)) - D(t)S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{S_p^+(z(\tau)) \tau - r^{-1}t} d\tau.$$

Применяя оценки (4) и (5), можно доказать:

Лемма 2. Существует число  $C$ , не зависящее от  $r$ , такое, что

$$\|K_r f\|_p \leq C \|f\|_p, \quad \| |(B_r f)(t)|^{p_0} \rho(t) \|_1 \leq C \|f\|_p^p \quad (\rho(t) \in M(D)).$$

Теорема 2. Пусть  $f(t) \in L^p(T)$ . Для того, чтобы голоморфная в  $D^+ \cup D^-$  функция  $\Phi(z)$ , имеющая конечный порядок на бесконечности, удовлетворяла условию (2), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид (3).

Доказательство. Учитывая теорему 1, достаточно доказать, что любая функция вида (3) удовлетворяет условию (2). Пусть  $f_n(t) \in H(T)$  и  $\|f_n(t) - f(t)\|_p \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Положим  $\Phi_n^+(z) =$

$$= \frac{S_p^+(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}_n(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad (z \in D^+), \quad \Phi_n^-(z) = \frac{S_p^-(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}_n(\tau)}{\tau - z} d\tau + S_p^-(z)Q(z)$$

$(z \in D^-)$ ,  $J_n(r, t) = \Phi_n^+(ra(t)) - D(t)\Phi_n^-(r^{-1}t) - f_n(t)$ , где  $\tilde{\varphi}_n(t)$  — решение уравнения  $K\tilde{\varphi} = Q(t) + f_n(t)(S_p^-(z(t)))^{-1}$ . Обозначив  $\Psi_n(t) = \tilde{\varphi}_n(t) - \varphi_n(t)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi^+(ra(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t) &= (K_r(f_n - f))(t) + (B_r(f_n - f))(t) + \\ &+ \frac{S_p^+(ra(t)) - D(t)S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\Psi}_n(\tau)}{\tau - r^{-1}t} d\tau + \frac{S_p^+(ra(t))}{2\pi i} \int_{\Gamma} (k_r(\tau, t) + \\ &+ k(\tau, t))\tilde{\Psi}_n(\tau) d\tau - S_p^-(ra(t))\tilde{\Psi}_n(t) + J_n(r, t) + f_n(t) - f(t), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Psi}_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} k(\tau, t)\tilde{\Psi}_n(\tau) d\tau.$$

Для завершения доказательства теоремы остается учесть, что  $\tilde{\Psi}_n(t) \in H(T)$ , и применить леммы 1 и 2.

3. Для любого  $p (p < 1)$  положим  $\kappa(p) = -(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ . Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_k^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_k(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad (z \in D^+), \quad \Phi_k^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - z} d\tau + z^k$$

$(z \in D^-)$ , где  $\varphi_k(t)$  — решение уравнения  $K\varphi = t^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Теперь из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть  $f(t) \in L^p(T)$ ,  $T(p) \neq \emptyset$ . Тогда общее решение задачи сопряжения  $A$  можно представить в виде:

а) если  $\kappa(p) \geq 0$ , то

$$\Phi^+(z) = \frac{S_p^+(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}(\beta(t))}{t - z} dt + S_p^+(z) \sum_{k=0}^{\kappa(p)-1} C_k \Phi_k^+(z),$$

(6)

$$\Phi^-(z) = \frac{S_p^-(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z} dt + S_p^-(z) \sum_{k=0}^{\nu(p)-1} C_k \Phi_k(z),$$

где  $C_0, C_1, \dots, C_{\nu(p)-1}$  — произвольные комплексные числа при  $\nu(p) \geq 1$  и  $C_0 = C_1 = \dots = C_{\nu(p)-1} = 0$  при  $\nu(p) = 0$ ,  $K\bar{\varphi} = f(t)(S_p^+(z(t)))^{-1}$ ;

б) если  $\nu(p) \leq -1$ , то задача имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_T \bar{\varphi}(t) t^k dt = C, \quad k = 0, 1, \dots, -(\nu(p) + 1),$$

при этом решение определяется по формуле (6), если положить  $C_0 = C_1 = \dots = C_{\nu(p)-1} = 0$ .

Аналогичные результаты можно получить и в случае, когда  $D^*$  — произвольная область, ограниченная контуром типа Ляпунова.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

## Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

### Համալուծման խնդիրը $L^p$ դասերում եզակի դեպքերում

'Ինցուք  $T$ -ն միավոր շրջանագիծն է,  $D^+$ -ը միավոր շրջանը, իսկ  $D^-$ -ը՝  $|z| > 1$  բազմությունը: Աշխատանքում հետազոտվում է համալուծման խնդիրը հետևյալ դրվածքով. գտնել  $D^+ \cup D^-$  բազմության վրա անալիտիկ  $\Phi(z)$  ֆունկցիան այնպես, որ այն բավարարի հետևյալ եզրային պայմանին

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)|^p \rho(t) |dt| = 0,$$

որտեղ  $f(t) \in L^p(T)$ ,  $D(t)$ -ն կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա է,  $\rho(t)$ -ն կշռային ֆունկցիա է,  $\alpha(t)$ -ն ուղղությունը պահպանող հոմոմորֆիզմ է  $T$ -ի վրա, իսկ  $\Phi^+(z)$ -ը և  $\Phi^-(z)$ -ը  $\Phi(z)$  ֆունկցիայի նեղացումներն են համապատասխանաբար  $D^+$  և  $D^-$  բազմությունների վրա:

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Н. И. Мусхелешвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. <sup>2</sup> Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. <sup>3</sup> Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГССР, т. 23 (1956). <sup>4</sup> Н. Б. Симоненко, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 28, № 2 (1964). <sup>5</sup> Г. А. Хускивадзе, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГССР, т. 31 (1966). <sup>6</sup> Н. И. Данилюк, Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975. <sup>7</sup> Г. С. Литвинчук, Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., 1977.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян, А. В. Гаспарян

Полнота систем простых дробей с фиксированными полюсами в пространствах голоморфных функций, гладких вплоть до границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 18/VI 1989)

1°. Пусть  $D$ —единичный круг на комплексной плоскости,  $H(D)$ —множество всех голоморфных в  $D$  функций,  $H^p(D)$ — $(0 < p < +\infty)$ —известные пространства Харди. С произвольной последовательностью  $\{z_k\}_1^\infty$ ,  $z_k \in D$ ,  $k=1, 2, \dots$ , свяжем систему рациональных функций:

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)! z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{z}_k z)^{s_k}}, \quad (1)$$

где  $s_k \geq 1$ —кратность появления числа  $z_k$  в совокупности  $\{z_j\}_{j=1}^k$ . Хорошо известно, что (см. (1,2)) для полноты системы  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  в пространствах  $H^p$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty \quad (2)$$

В том же случае, когда нет полноты, подробное описание замыканий этой системы приведено в работах М. М. Джрбашьяна (3) и Г. Ц. Тумаркина (4).

Отметим, однако, что вопрос о полноте указанной системы в более узких пространствах голоморфных функций, по нашим сведениям, раньше не рассматривался. Цель этой заметки—указать, что в отличие от пространств  $H^p$  такое простое описание в общем случае невозможно.

Для полноты в этом случае важно не только поведение модулей  $\{z_k\}_1^\infty$ , но и их расположение по аргументам.

В конце заметки мы рассмотрим полноту системы Мюнца в весовых  $L^2(0, +\infty)$  пространствах.

Для изложения основных результатов заметки приведем:

Определение 1. Пусть  $E$ —замкнутое множество на  $\Gamma = \partial D$ . Скажем, что  $E$ —множество Карлесона, если  $m(E) = 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} l_k \cdot \lg \frac{1}{l_k} < \infty$ , где  $\{l_k\}$ —последовательность длин дополнительных интервалов множества  $E$ ,  $m$ —линейная мера Лебега на  $\Gamma$ .

Углом Штольца будем называть угол с вершиной на  $\Gamma$ , раствором меньше  $\pi$ , биссектриса которого проходит через центр круга.

Пересечение угла Штольца с  $D$  обозначим через  $S_\alpha(z)$ , где  $z$  — вершина угла, а  $\alpha$  — его раствор.

Определение 2. Пусть  $E \subset D$ . Скажем, что  $E$  удовлетворяет условию  $K(z)$ , если  $E \subset \bigcup_{z \in E} S_\alpha(z)$ , где  $F$  — множество Карлесона на  $\Gamma$ .

Теперь введем в рассмотрение следующие пространства голоморфных в  $D$  функций.

Пусть  $\omega$  — функция типа модуля непрерывности,  $n$  — неотрицательное целое число. Положим:  $\lambda_\omega^{(n)} = \left\{ f \in H(D) : |f^{(n)}(z_1) - f^{(n)}(z_2)| = o(\omega(|z_1 - z_2|)) \right\}$ ,

$$\text{при } |z_1 - z_2| \rightarrow 0, z_1, z_2 \in D, \|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} = \|f\|_\infty + \sup \left\{ \frac{|f^{(n)}(z_1) - f^{(n)}(z_2)|}{\omega(|z_1 - z_2|)} \right\},$$

$$A_n^p = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_n^p} = \sum_{k=0}^n \left( \int_D |f^{(k)}(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p} \right\},$$

где  $m_2(z)$  — мера Лебега на плоскости.

И, наконец, через  $C_A^{(n)}$  обозначим пространство голоморфных в  $D$  функций,  $n$ -ая производная которых принадлежит классу  $C(\bar{D})$ . В  $C_A^{(n)}$  вводится естественная норма.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что  $\omega$  удовлетворяет известному условию А. Зигмунда

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)), \quad (\delta \rightarrow 0).$$

В следующих трех теоремах будем предполагать, что  $X$  совпадает с одним из следующих пространств:  $\lambda_\omega^{(n)}$ ,  $A_n^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ),  $C_A^{(n)}$ .

Теорема 1. Пусть  $\{z_k\}_1^\infty$  — произвольная последовательность, удовлетворяющая  $K(z)$  условию ( $0 < \alpha < 1$ ). Тогда следующие условия равносильны:

1) система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  полна в пространстве  $X$ ;

$$2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty. \quad (3)$$

В следующей теореме устанавливается, что для справедливости утверждений теоремы 1 условие  $K(z)$  существенно.

Теорема 2. Существует последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  из  $D$ , для которой выполняется (3), но в то же время система  $\{r_k(z)\}_{k=1}^\infty$  неполна в пространстве  $X$ .

Следующий результат показывает, что в случае пространства  $X$  возможны и другие явления.

Теорема 3. Пусть, как и прежде,  $X$  совпадает с одним из вышеуказанных пространств, при этом  $n \geq 1$ . Тогда существуют две системы рациональных функций типа (1)  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  и  $\{l_k(z)\}_1^\infty$

такие, что каждая из них неполна в пространстве  $X$  и в то же время их объединение является полным в нем.

Отметим также, что условие полноты существенно зависит от порядка гладкости функций, принадлежащих пространству  $X$ .

Теорема 4. Пусть  $1 \leq p < q$ ,  $n \geq 1$ .

1°. Тогда существует последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  такая, что система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  полна в пространстве  $A_n^p$ , но не полна в пространстве  $A_n^q$ .

2°. Пусть  $m \geq n+1$ . Тогда существует последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  такая, что система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  полна в пространствах  $A_n^p$ ,  $C_A^{(n)}$ , но не полна в пространствах  $A_m^p$ ,  $C_A^{(m)}$ .

В теореме 5 указывается зазор между пространствами  $i_{\omega_1}^{(n)}$  и  $i_{\omega_2}^{(n)}$ , при котором полнота имеет место в одном из них, но ее нет в другом.

Теорема 5. Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — функции типа модуля непрерывности, такие, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\omega_1\left(\frac{1}{k}\right)}{(\ln k \ln \ln k) \omega_2\left(\frac{1}{k}\right)} < +\infty.$$

Тогда существует последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$ ,  $z_k \in D$ ,  $k=1, 2, \dots$  для которой система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  полна в пространстве  $i_{\omega_2}^{(n)}$ , но не полна в пространстве  $i_{\omega_1}^{(n)}$ .

Нетрудно установить аналоги теорем 1—5 для случая пространств голоморфных в полуплоскости функций.

В связи с теоремой Мюнца в весовых  $L^2(0, +\infty)$  пространствах мы приведем один из этих результатов. С этой целью введем сначала обозначения:  $\Pi^+$  — верхняя полуплоскость.

Через  $A_n^p(\Pi^+)$  и  $H_n^p(\Pi^+)$  ( $n \geq 0$ ) обозначим пространства голоморфных в верхней полуплоскости функций  $f$ , для которых  $\|f\|_{A_n^p(\Pi^+)} =$

$$= \sum_{k=0}^n \left( \int_{\Pi^+} |f^{(k)}(x+iy)|^p dx dy \right)^{1/p} < +\infty \text{ и соответственно } \|f\|_{H_n^p(\Pi^+)} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left( \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty. \text{ Как и прежде, с каждой после-}$$

довательностью  $\{s_k\}$  из нижней полуплоскости свяжем систему рациональных дробей

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!}{(i_k-z)^{s_k}} \text{ и систему } \{e^{-i\lambda_k z} x^{s_k-1}\}_1^\infty, \text{ где } s_k \geq 1 \text{ — кратность по-}$$

явления  $i_k$  среди множества  $(i_1, \dots, i_n)$ . Определения, связанные с множеством  $K(x)$ , очевидным образом переносятся на случай полуплоскости.

Ниже будем предполагать, что  $X$  совпадает с одним из пространств  $H_n^p(\Pi^+)$ ,  $A_n^p(\Pi^+)$ .

Теорема 6. Пусть  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  — последовательность из нижней полуплоскости. Тогда

1) Если  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию  $K(z)$ , то следующие условия равносильны:

а) система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  полна в пространстве  $X$ ;

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k|}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty. \quad (4)$$

2) Существует последовательность  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  из нижней полуплоскости, не удовлетворяющая  $K(z)$  условию, для которой выполняется (4). В то же время система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  не полна в  $X$ .

Используя теорему Винера—Пэли (см. (2)), из теоремы 6 легко вывести теорему типа теоремы Мюнца в пространстве функций  $f$ , измеримых на  $(0, +\infty)$ , для которых

$$\|f\|_{L^2(P)} = \left\{ \int_0^{+\infty} P(t) |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad \text{где } P(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad (a_j \geq 0). \quad (5)$$

Теорема 7. Пусть  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  — последовательность из нижней полуплоскости. Тогда

1) Если  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  удовлетворяет  $K(z)$  условию, то следующие утверждения равносильны:

а) Система  $\{e^{-\lambda_k x} x^{\lambda_k - 1}\}_1^\infty$  полна в  $L^2(P)$ ;

б) Последовательность  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (4).

2) Существует последовательность  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  из нижней полуплоскости, для которой ряд (4) расходится, но в то же время  $\{e^{-\lambda_k x} x^{\lambda_k - 1}\}_1^\infty$  не полна в  $L^2(P)$ .

Теорема 8. 1) Существуют последовательности  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  и  $\{\mu_k\}_1^\infty$  из нижней полуплоскости, для которых системы  $\{e^{-\lambda_k x} x^{\lambda_k - 1}\}_1^\infty$  и  $\{e^{-\mu_k x} x^{\mu_k - 1}\}_1^\infty$  по отдельности не полны в  $L^2(P)$ , но их объединение в  $L^2(P)$  полно.

2) Пусть  $Q(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k$ , ( $c_k \geq 0$ ,  $c_m \neq 0$ ,  $m \geq n+1$ ).  $P(t)$  — многочлен (5). Тогда существует последовательность  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  из нижней полуплоскости, для которой система функций  $\{e^{-\lambda_k x} x^{\lambda_k - 1}\}_{k=1}^\infty$  полна в пространстве  $L^2(P)$ , но не полна в  $L^2(Q)$ .

В заключение отметим, что основная идея доказательства теорем сводится к подходящему описанию линейных непрерывных функционалов в указанных пространствах, посредством классов голоморфных в круге или полуплоскости функций, растущих при приближении к их границе (см. (5-6)). После этого используются свойства нулей этих классов функций (см. (7-9)).

Ֆիլսաժ բեևոներո՞լ պարզ կոտորակների սիստեմների լրիվությունը  
հոլոմորֆ, բնդհուպ մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների  
տարածություններում

Հողվածում ուսումնասիրվում են շրջանում (կիսահարթությունում) հո-  
լոմորֆ, բնդհուպ մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների տարածություններում  
ոսցիոնալ ֆունկցիաների լրիվության հարցերը: Ստացված է նաև Մյունցի  
հայտնի թևորեմի անայոգր կշոային  $L^2(0, +\infty)$  տարածությունում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961. <sup>2</sup> Н. Н. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., 1965. <sup>3</sup> М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3, с. 539—541 (1961). <sup>4</sup> Г. Ц. Тумаркин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 1, № 2, с. 89—105 (1966). <sup>5</sup> Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 8, № 6, с. 474—490 (1973). <sup>6</sup> Ф. А. Шамоян, ДАН АрмССР, т. 85, № 1, с. 7—12 (1987). <sup>7</sup> Ch. Horowitz, Duke Math. Journal, v. 41, № 1, p. 201—218 (1974). <sup>8</sup> J. H. Shapiro, Michigan Math. Journal, v. 24, № 2, p. 243—257 (1977). <sup>9</sup> B. Koremblum, Acta Math., v. 135, № 3—4, p. 187—219 (1975).

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

А. А. Даниелян

О множестве расходимости полиномов, равномерно ограниченных на компакте

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелян 25/V 1989)

Известно, что любая последовательность непрерывных функций расходится на множестве типа  $G_{\delta}$ . Обратное, всякое такое множество совпадает со множеством расходимости некоторой последовательности непрерывных функций, которая, кроме того, равномерно ограничена и сходится к нулю на своем множестве точек сходимости (теорема Хаана и Серпинского, (1), с. 261—262).

Пусть  $E$ —компактное множество со связным дополнением на комплексной плоскости,  $\partial E$ —граница  $E$  и  $H \subset \partial E$ . В настоящей заметке доказывается

**Теорема.** Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на  $\partial E$  последовательность полиномов, расходящаяся на  $H$  и сходящаяся к нулю на  $\partial E \setminus H$ , необходимо и достаточно, чтобы  $H$  было множеством типа  $G_{\delta}$ .

Необходимость условия теоремы была отмечена выше.

**Достаточность.** Так как  $H$ —множество типа  $G_{\delta}$ , то существует равномерно ограниченная последовательность непрерывных на  $\partial E$  функций  $\{f_n(z)\}$ , расходящаяся на  $H$  и сходящаяся к нулю на  $\partial E \setminus H$ . Можем считать, что  $|f_n(z)| \leq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Проведем пока рассуждения для фиксированного  $n$ .

Пусть  $\delta_n > 0$  такое, что при  $z \in \partial E$ ,  $z' \in \partial E$ ,  $|z - z'| < \delta_n$  справедливо

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Обозначим  $\varepsilon_n = \min\left(\frac{1}{n}, \delta_n\right)$

Пусть  $A$ —класс функций, аналитических во внутренних точках  $E$  и непрерывных на  $E$ . Так как  $A$ —алгебра Дирихле на  $\partial E$ , то для любой точки  $t \in \partial E$  существует функция  $h_t(z) \in A$  такая, что  $h_t(t) = 1$  и  $|h_t(z)| < 1$ ,  $z \in E \setminus \{t\}$  (см. например (2), с. 37, следствие 2). Пусть натуральное  $N_t$  такое, что когда  $z \in E$  лежит вне  $\varepsilon_n$ -окрестности точки  $t$ , то для функции  $g_t(z) = h_t^{N_t}(z)$  справедливо неравенство

$$|g_t(z)| < \frac{1}{n}, \quad t \in \partial E. \quad (2)$$

Очевидно, что можем найти конечное покрытие для  $\partial E$ , состоя-



шее из замкнутых кругов  $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{k_n}^{(n)}$  с центрами, соответственно, в точках  $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_{k_n}^{(n)}$  множества  $\partial E$  и с радиусами меньше, чем  $\delta_n$ , таких, что

$$|g_{z_m^{(n)}}(z) - 1| < \frac{1}{n}, \quad z \in \Delta_{z_m^{(n)}} \cap E, \quad m = 1, 2, \dots, k_n.$$

Обозначим  $U_m^{(n)}(z) = f_n(z_m^{(n)})g_{z_m^{(n)}}(z)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k_n$  и пока фиксируем  $m$ .

При  $z \in \Delta_{z_m^{(n)}} \cap \partial E$  имеем

$$|U_m^{(n)}(z) - f_n(z)| \leq |f_n(z_m^{(n)})| \cdot |g_{z_m^{(n)}}(z) - 1| + |f_n(z_m^{(n)}) - f_n(z)| < \frac{2}{n} \quad (3)$$

Если  $z \in E$  и  $z$  лежит вне  $\epsilon_n$ -окрестности множества  $\Delta_{z_m^{(n)}} \cap \partial E$ , то очевидно, что  $z$  лежит вне  $\epsilon_n$ -окрестности точки  $z_m^{(n)}$  и согласно (2) имеем

$$|U_m^{(n)}(z)| = |f_n(z_m^{(n)})| \cdot |g_{z_m^{(n)}}(z)| < \frac{1}{n}. \quad (4)$$

На множестве  $\partial E$  справедливо неравенство

$$|U_m^{(n)}(z)| < |f_n(z)| + \frac{2}{n}. \quad (5)$$

Действительно, когда  $z \in \partial E$  лежит вне  $\epsilon_n$ -окрестности множества  $\Delta_{z_m^{(n)}} \cap \partial E$ , то (5) следует из (4). Если  $z \in \partial E$  лежит в  $\epsilon_n$ -окрестности множества  $\Delta_{z_m^{(n)}} \cap \partial E$ , то существует  $z' \in \Delta_{z_m^{(n)}} \cap \partial E$  такое, что  $|z - z'| < \epsilon_n$ . Тогда из определения  $U_m^{(n)}(z)$  и из неравенства (1) получается

$$|U_m^{(n)}(z)| \leq |f_n(z_m^{(n)})| < |f_n(z')| + \frac{1}{n} < |f_n(z)| + \frac{2}{n};$$

т. е. неравенство (5) установлено.

Для функций  $U_m^{(n)}(z)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k_n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , введем нумерацию,  $V_1(z) = U_1^{(1)}(z)$ ,  $V_2(z) = U_2^{(1)}(z)$ ,  $\dots$ ,  $V_{k_1}(z) = U_{k_1}^{(1)}(z)$ ,  $V_{k_1+1}(z) = U_1^{(2)}(z)$ ,  $V_{k_1+2}(z) = U_2^{(2)}(z)$ ,  $\dots$

Как следует из (5), последовательность  $\{V_n(z)\}$  равномерно ограничена на  $\partial E$  и сходится к нулю на  $\partial E \setminus H$ .

Убедимся, что  $\{V_n(z)\}$  расходится на  $H$ . Возьмем любую точку  $z_0 \in H$ . Среди кругов  $\Delta_{z_m^{(n)}}$ ,  $m = 1, 2, \dots, k_n$ , существует некоторый круг  $\Delta_{z_{m_n}^{(n)}}$ , который содержит точку  $z_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Рассмотрим последовательность  $\{U_{m_n}^{(n)}(z_0)\}$ . Так как  $\{f_n(z_0)\}$  расходится, то согласно (3) расходится также  $\{U_{m_n}^{(n)}(z_0)\}$ . Таким образом  $\{V_n(z_0)\}$  имеет расходящуюся подпоследовательность  $\{U_{m_n}^{(n)}(z_0)\}$  и, следовательно, сама расходится.

Равномерно приближая по теореме С. Н. Мергеляна функцию  $V_n(z)$  на  $E$  полиномом  $P_n(z)$  с точностью  $1/n$ , получим последовательность  $\{P_n(z)\}$ , которая имеет сформулированные в теореме свойства. Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что последовательность  $\{P_n(z)\}$  сходится к нулю также на множестве  $E \setminus \partial E$ . Действительно, пусть  $z \in E \setminus \partial E$ . Так как  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , то для всех достаточно больших  $n$  в точке  $z$  справедлива оценка (4), откуда следует наше утверждение.

Кироваканский государственный  
педагогический институт

Ա. Ա. ԳԱՆԻԿՅԱՆ

Կոմպակտի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների  
տարամիտության բազմության մասին

Ենթադրենք  $L$  բազմությունը կապակցված լրացումով կոմպակտ է կոմպակտ հարթության վրա և շխատանքում ապացուցված է, որ որպեսզի  $H \subset \partial E$  բազմությունը հանդիսանա տարամիտության բազմություն  $\partial E$ -ի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների ինչ-որ հաջորդականության համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $H$ -ը լինի  $G_\delta$  տիպի բազմություն:

#### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., ОНТИ, 1937. <sup>2</sup> Дж. Вермер, в кн.: Некоторые вопросы теории приближений, М., ИЛ, с. 9—73, 1963.

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Л. Григорян

Асимптотическая оценка остатка при приближении функций  
 тригонометрическими полиномами наилучшего  
 квадратического приближения

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 8/VI 1989)

Пусть  $m, q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 2m$ ,  $x_l = \frac{2\pi l}{q}$ ,  $l = 0, 1, \dots, q-1$ , и пусть  $f(x)$

$2\pi$ -периодическая функция, определенная на множестве  $\{x_l\}_{l=0}^{q-1}$ . Известно, что среди всех тригонометрических полиномов  $T_m(x)$  порядка не выше  $m$  наименьшее значение сумме

$$\sum_{l=0}^{q-1} |f(x_l) - T_m(x_l)|^2$$

доставляет полином

$$T_m^q(x, f) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) \cdot D_m(x_l - x),$$

где  $D_m(u)$  — ядро Дирихле. Этот полином называют полиномом наилучшего квадратического приближения для функции  $f(x)$  на системе точек  $\{x_l\}_{l=0}^{q-1}$ .

Аппроксимацией функций полиномами наилучшего квадратического приближения занимались С. Н. Бернштейн <sup>(1)</sup>, М. Д. Калашников <sup>(2)</sup>, Г. П. Губанов <sup>(3)</sup> и др.

Совокупность всех функций, определенных на действительной оси с периодом  $2\pi$  и удовлетворяющих условию Липшица степени 1 с константой единица, назовем классом  $H$ .

Обозначим  $C_m^q(x, H) = \sup_{f \in H} |f(x) - T_m^q(x, f)|$ .

Нетрудно проверить, что величина  $C_m^q(x, H)$  имеет по  $x$  период  $2\pi/q$  и поэтому в дальнейшем можно считать, что  $0 \leq x \leq 2\pi/q$ .

Пусть

$$\mu(x) = \begin{cases} \left\| \frac{1}{2} + \frac{xq}{2\pi} \right\|, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{q} \\ -\left\| \frac{1}{2} + \frac{xq}{2\pi} \right\|, & \text{при } \frac{\pi}{q} < x \leq \frac{2\pi}{q}, \end{cases}$$

где  $\| \cdot \|$  — расстояние до ближайшего целого.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. Для всех  $m, q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 2m$  справедливы оценки

$$C_m^q(x, H) \leq |\sqrt{2} \ln \tau(m) + d(m)| / (q \sin \frac{\pi m}{q}) + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$C_m^q(x, H) \geq |\ln \tau(m) + d(m)| / (q \sin \frac{\pi m}{q}) + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

где  $\tau(m) = \min(2m+1, q-2m-1) + 1,$

$$d(m) = \begin{cases} 0, & \text{при } 2m+1 \leq \frac{q}{2} \\ 2 \sin \pi \left( \frac{1}{2} + \mu(x) \right) \ln \frac{q}{\tau(m)}, & \text{при } 2m+1 > \frac{q}{2} \end{cases}$$

В частности, при  $q=2m+1$ ,  $x=\pi/q$

$$C_m^q(x, H) = d(m) / (q \sin \pi m/q) + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

а при  $q=4m+2$ ,  $x=0$ ,

$$C_m^q(x, H) = \frac{\sqrt{2} \ln \tau(m)}{q \cdot \sin \pi m/q} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Теорема 2. Пусть  $m, q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 2m$ ,  $\frac{2m+1}{q} \rightarrow \alpha \in [0, 1]$ ,  $\frac{xq}{2\pi} \rightarrow \beta$

при  $m \rightarrow \infty$ ,

$$Y_m = C_m^q(x, H) / \left( \frac{\pi \alpha / 2}{\sin \pi \alpha / 2} \cdot m^{-1} \cdot \ln m \right).$$

Тогда: а) если  $\alpha$  — иррациональное или  $\alpha=0$ , то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = 4/\pi^2;$$

б) если  $\alpha = s/p$ , где  $s, p \in \mathbb{N}$ ,  $(s, p) = 1$ , то при

$$D_{\mu(x)}(s, p) = \frac{2}{\pi p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} - \left\{s \cdot \mu(x) - \frac{p}{2}\right\}\right) \cdot \pi/p}{\sin \pi/2p} - \frac{4}{\pi^2} \geq 0$$

имеем

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} Y_m \geq \frac{4}{\pi^2},$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} Y_m \leq \frac{4}{\pi^2} + D_r(s, p) = A_r(s, p),$$

а при

$$D_{\mu(x)} < 0$$

имеем

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} Y_m \geq A_r(s, p).$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} Y_m \leq \frac{4}{\pi^2},$$

где

$$r = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu(x).$$

Кроме того, для любого

$$h \in \left[ \frac{4}{\pi^2}, A_r(s, \rho) \right], \quad \left( h \in \left[ A_r(s, \rho), \frac{4}{\pi^2} \right] \right)$$

существуют  $m_n, q_n \in \mathbb{N}$  такие, что  $\frac{2m_n+1}{q_n} \rightarrow \frac{s}{\rho}$  и  $\lim Y_{m_n} = h$ .

Отметим, что остаточный член  $\epsilon_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$  в теореме 1 понимается в том смысле, что существует константа  $K$ , не зависящая от  $m, q, x$ , для которой  $|\epsilon_m| \leq \frac{K}{m}$ .

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ա. Լ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ֆունկցիայի լավագույն բառակուսային մոտարկման մնացորդի ասիմպտոտիկ գնահատումը

Նշանակենք  $H$   $2\pi$ -սլարբերական  $f$  ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են Լիֆշիցի պայմանին  $\alpha=1$  մասիճանով և 1 հաստատունով:

Իրտենք

$$C_m^q(x, H) = \sup_{j \in H} |f(x) - T_m^q(x, f)| -$$

որտեղ  $T_m^q(x, f)$   $f(x)$  ֆունկցիայի լավագույն բառակուսային մոտարկման եռանկյունաչափական բազմանդամն է:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է  $C_m^q(x, H)$  մեծությունների կարգը և ասիմպտոտիկան. երբ  $m, q \rightarrow \infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> С. Н. Бернштейн, ДАН СССР, т. 4, № 1 (1934). <sup>2</sup> М. Д. Калашников, ДАН СССР, т. 105, № 4 (1955). <sup>3</sup> Г. П. Губанов, Изв. высш. уч. заведений. Математика, № 12, 1970.

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

**О бесконечномерных аналогах теорем Борсука о нечетности степени нечетного отображения и о неподвижной точке**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелян 8/VI 1989)

В статье приводятся бесконечномерные аналоги (теоремы 1,7) классических теорем Борсука о нечетности топологической степени нечетного непрерывного отображения <sup>(1)</sup> и о неподвижной точке <sup>(2)</sup>.

Упомянутые теоремы (первая известна под названием теоремы Борсука о антиподальном отображении конечномерных сфер) перестают быть справедливыми в бесконечномерном случае, когда рассматривают класс всех непрерывных отображений.

Вместе с тем оказывается, что справедливы бесконечномерные аналоги этих теорем в вещественном гильбертовом пространстве  $H$ , если, однако, рассматривать лишь отображения, принадлежащие одному допустимому классу  $K_0$  непрерывных отображений.

Определение и ряд основных свойств класса  $K_0$  содержатся в <sup>(3)</sup>.

Приведем (эквивалентное) определение класса  $K_0$ .

Пусть  $G$  — открытое подмножество пространства  $H$  и  $f: G \rightarrow H$  — непрерывное отображение.

Будем говорить, что отображение  $f$  в точке  $x_0 \in G$  принадлежит классу  $K_0$ , если выполнены следующие условия:

1.  $f$  в точке  $x_0$  локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. существуют такие числа  $r > 0$  и  $c > 0$ , что при  $x, y \in G$ ,  $\|x - x_0\| < r$ ,  $\|y - x_0\| < r$  выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|.$$

2. Для любого числа  $\varepsilon > 0$  существуют окрестность  $U \subset G$  точки  $x_0$  в  $H$ , конечномерное подпространство  $L \subset H$  и действительное число  $\lambda$  такие, что если  $x, y \in U$  и вектор  $x - y$  ортогонален подпространству  $L$ , то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Будем говорить, что отображение  $f: G \rightarrow H$  принадлежит классу  $K_0$  на  $G$ , если  $f$  в каждой точке  $x_0 \in G$  принадлежит классу  $K_0$ .

Фигурирующее в приведенном определении действительное число  $\lambda$  можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой  $x_0$  и было пригодно для любого числа  $\varepsilon > 0$ .

Получающаяся таким образом действительная функция  $\lambda(x) = \lambda(x)$ , заданная на  $G$ , непрерывна и единственна; она называется терминальной производной отображения  $f$ .

Пусть теперь  $M$ —произвольное подмножество пространства  $H$  и  $f: M \rightarrow H$ —непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение  $f$  принадлежит классу  $K_0$ , если существуют открытое в  $H$  подмножество  $G \supset M$  и непрерывное отображение  $g: G \rightarrow H$  такие, что  $g \in K_0$  и  $g(x) = f(x)$  для каждой точки  $x \in M$ .

В (\*) построена топологическая степень отображений  $f: G \rightarrow H$ , принадлежащих некоторому подклассу класса  $K_0$ .

В дальнейшем отображения, принадлежащие классу  $K_0$ , мы будем называть  $K_0$ -отображениями.

**Теорема 1.** Пусть  $G$ —открытое подмножество гильбертова пространства  $H$ , содержащее нулевую точку  $0$  и симметричное относительно  $0$ . Пусть, далее,  $f: G \rightarrow H$ —нечетное  $K_0$ -отображение, удовлетворяющее условию:

с) прообраз  $X = f^{-1}(0)$  точки  $0$  компактен и на нем терминальная производная  $i_1(x)$  отображения  $f$  отлична от нуля.

Тогда определена степень  $\deg(f, G, 0)$  отображения  $f$  в точке  $0$  и она нечетна.

Приведем ряд приложений теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $G$ —открытое подмножество пространства  $H$ , симметричное относительно нулевой точки  $0$  и такое, что  $0 \in \bar{G}$ . Пусть, далее,  $f: G \rightarrow H$ —нечетное  $K_0$ -отображение, обладающее тем свойством, что прообраз  $X = f^{-1}(0)$  непуст, компактен и терминальная производная  $i_1(x)$  отображения  $f$  на всем  $X$  отлична от нуля.

Тогда степень  $\deg(f, G, 0)$  отображения  $f$  в точке  $0$  четна.

**Теорема 3.** Пусть  $G$ —открытое подмножество пространства  $H$ , симметричное относительно нулевой точки  $0$ , такое, что  $0 \in G$ . Пусть, далее,  $f: G \rightarrow H$ — $K_0$ -отображение, являющееся нечетным ( $f(-x) = -f(x)$ ).

Тогда, если прообраз  $X = f^{-1}(0)$  компактен и терминальная производная  $i_1(x)$  отображения  $f$  на  $X$  отлична от нуля, то для любого подпространства  $H^{(1)}$  дефекта  $1$  пространства  $H$  имеет место соотношение

$$f(G) \cap (H \setminus H^{(1)}) \neq \emptyset.$$

**Теорема 4.** Не существует нечетного (антиподального)  $K_0$ -отображения  $f: S \rightarrow S^{(2)}$  единичной сферы  $S$  пространства  $H$  в сферу  $S^{(2)}$  дефекта (коразмерности)  $2$  того же пространства  $H$ .

**Предложение 1.** Пусть  $f: S \rightarrow H^{(1)}$ —нечетное  $K_0$ -отображение единичной сферы  $S$  пространства  $H$  в его подпространство  $H^{(1)}$  дефекта  $1$ .

Тогда существует точка  $x^* \in S$  такая, что  $f(x^*) = 0$ .

**Предложение 2.** При любом  $K_0$ -отображении  $f: S \rightarrow H^{(1)}$  сферы  $S$  подпространства  $H^{(1)}$  дефекта  $1$  существует по крайней мере одна точка  $x_0 \in S$  такая, что  $f(x_0) = f(-x_0)$ .

**Следствие 1.** Не существует  $K_0$ -вложения единичной сферы  $S$  пространства  $H$  в его подпространство  $H^{(1)}$  дефекта  $1$ .

**Замечание.** Отметим, что теорема 4 и предложения 1, 2 представляют собой эквивалентные формы обычной формулировки конечной теоремы Борсука о антиподальном отображении конечномерных сфер.

**Теорема 5.** Пусть  $G$  — открытое подмножество пространства  $H$ , симметричное относительно точки  $O$  и такое, что  $O \in H$ . Пусть, далее,  $f: G \rightarrow H - K_0$ -отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1)  $f(0) = 0$ ;

2) для любой точки  $x \in (G \setminus \{0\})$   $f(x) \neq 0$ , причем векторы  $f(x)$  и  $f(-x)$  направлены неодинаково, т. е.  $\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$

3) терминальная производная  $\lambda_1(x)$  отображения  $f$ , в точке  $O$  отлична от нуля.

Тогда степень  $\deg(f, G, O)$  определена и нечетна.

**Теорема 6.** Пусть  $S^{(r)}$  — единичная сфера конечной коразмерности  $r \geq 1$  пространства  $H$ , т. е. единичная сфера подпространства  $H^{(r-1)}$  коразмерности  $r-1$  относительно  $H$ , и пусть  $f: S^{(r)} \rightarrow S^{(r)}$  есть  $K_0$ -отображение, сохраняющее антиподы (т. е.  $f(-x) = -f(x)$  для каждой  $x \in S^{(r)}$ ).

Тогда  $f$  не может быть  $K_0$ -гомотопным постоянному отображению.

**Следствие 2.** Сфера  $S^{(r)}$   $K_0$  нестягиваема по себе в точку. Достаточно применить теорему 6 к отображению  $f = id_{S^{(r)}}$ .

**Замечание.** Другое доказательство следствия 2 было получено автором раньше при помощи бесконечномерных гомотопических групп.

**Теорема 7.** Пусть  $B$  — единичный замкнутый шар в  $H$  и  $f: B \rightarrow H - K_0$ -отображение такое, что  $f(-x) = -f(x)$  для всякой точки  $x$  единичной сферы  $S$  в  $H$ .

Тогда  $f$  имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐՉԱԿԱՆՅԱՆ

Բորսուկի կենտ արտապատկերման աստիճանի կենտուրյան մասին և անշարժ կետի մասին բեռեմների անվերջ շափանի անալոզների մասին

Բորսուկի կենտ արտապատկերման աստիճանի կենտուրյան մասին և անշարժ կետի մասին դասական թեորեմները դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջ շափանի ֆունկցիոնալ տարածություններում բոլոր անընդհատ արտապատկերումների դեպքում:

Հոդվածում բերված են այդ թեորեմների անվերջ շափանի անալոզների

սպացուցները (թեորեմներ 1 և 9) իրական սեպարարելի տարածությունում,  
երբ դիտարկվում են մի թույլատրելի դասին պատկանող արտապատկերում-  
ներ:

Բերված են նաև թեորեմ 1 մի շարք կարևոր կիրառություններ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Л. Ниренберг, Лекции по нелинейному функциональному анализу, Мир, М., 1977. <sup>2</sup> J. Dugundji, A. Granas, Fixed point theory, Warszawa, PWN, 1982. <sup>3</sup> В. Г. Болтянский, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, №2 (1974). <sup>4</sup> В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, №5 (1974).

УДК 519.64

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. Б. Нерсисян

Новые алгоритмы численного решения интегральных уравнений второго рода

(Представлено 10/VII 1989)

В ряде теоретических и прикладных исследований, как классических, так и новейших, возникает задача решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$(I - K)y = y(x) - \int_D^x K(x, t)y(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где  $x \in D \subset R^n$ ;  $y, f$  — вектор-функции размерности  $m \geq 1$ ,  $K$  — матрица-функция  $(m \times m)$ , а оператор  $K$  вполне непрерывен в соответствующем пространстве комплекснозначных функций.

Традиционные численные методы решения уравнения (1) основаны на его непосредственном приближенном сведении к линейной алгебраической системе. Основными путями такого сведения являются проекционный метод и метод квадратур (кубатур), причем этот подход хорошо разработан, вплоть до пакетов соответствующих программ (см. (1)).

С другой стороны, в 1954–56 гг. С. Л. Соболев, Н. П. Сергеев и М. Г. Крейн (2–4) заложили основы нового подхода к решению уравнения (1) при  $n = 1$ , когда  $D$  — отрезок  $(a, b)$ , изучив оператор  $I - K$  на отрезке переменной длины  $(a, \tau)$ ,  $(\tau \leq b)$ . По сути дела речь идет о вольтерровской факторизации Фредгольмова оператора и о соответствующем „континуальном“ аналоге метода Гаусса. Систематическое исследование этой схемы и ее реализацию в важнейших ситуациях провели А. Мак-Набб и А. Шумицки (5,6). Впоследствии этот же путь избрали Н. Б. Енгибарян и др. (см. (7,8)). Более общий подход, включающий многомерный ( $n \geq 2$ ) случай и невольтерровскую факторизацию, был намечен в (9).

В предлагаемой заметке приводятся результаты альтернативного подхода, позволяющего реализовать здесь основные идеи методов типа Рунге-Кутты и Адамса, относящихся, как известно, к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае ядер специальной структуры (см. (10)) на этой основе можно реализовать наиболее экономичные алгоритмы.

1. Основные соотношения. Рассмотрим подробно одномерный вариант уравнения (системы) (1)

$$y(x, \tau) = \int_0^{\tau} K(x, t)y(t, \tau)dt + f(x), \quad (2)$$

где  $\tau > 0$  — пока что свободный параметр.

Всюду в дальнейшем будем считать, что ядро  $K$  и свободный член  $f$  обладают необходимой гладкостью.

Потребовав, чтобы уравнение (2) было однозначно разрешимо при данном  $\tau$ , легко приходим к следующему соотношению для его резольвентного ядра (см. (2-4)):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} R(x, t, \tau) = R(x, \tau, \tau)R(\tau, t, \tau). \quad (3)$$

Заметим теперь, что если ядро  $K$  задано в квадрате  $(0,1) \times (0,1)$ , то для любого  $\tau \in (0,1)$ , исходя из известных уравнений для резольвенты, можно считать и  $R$  определенным в том же квадрате. При таком подходе очевидно, что  $R(x, t, 0) = K(x, t)$ ,  $(x, t) \in (0,1) \times (0,1)$ ,  $y(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in (0,1)$ .

Из этих и аналогичных соображений, рассмотрев значения  $\tau = nh, (n+1)h$ , приходим к соотношениям (ради удобства в третьем аргументе  $R$  множитель  $h$  иногда опущен):

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, s)R(s, t, s)ds. \quad (4)$$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, n)R(s, t, n+1)ds; \quad (5)$$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, n+1)R(s, t, n)ds. \quad (6)$$

Отметим, что в (4) требуется существование обратного оператора (т. е. ядра  $R$ ) при всех  $\tau \in (nh, (n+1)h)$ , в то время как в (5) и (6) — только при двух значениях  $\tau = nh, (n+1)h$ .

Начнем с задачи рекуррентного вычисления  $R(x, t, \tau)$  с указанием сетки по  $x, t$  и  $\tau$  и порядка точности применяемых квадратурных формул.

2. *Одношаговые методы.* Обозначим  $h = N^{-1}$  и условимся индексы  $(x, t)$  и  $\tau$  указывать без множителя  $h$ . Через  $E$  обозначим единицу из  $\mathbb{C}^m$ .

*Алгоритм 1.*  $x, t = 0, 1, \dots, N$ ;  $n = 0, 1, \dots, N-1$ :

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + hR(x, n+1, n)(E - \alpha_n)^{-2}R(n+1, t, n) + O(h^2), \quad (7)$$

где  $\alpha_n$  определяется как решение квадратного уравнения

$$h\alpha_n^2 - \alpha_n + R(n+1, n+1, n) = 0. \quad (7')$$

*Алгоритм 2.*  $x, t = 0, 1, \dots, N$ ;  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + hR(x, n, n)(E - hR(n, n, n))^{-1}R(n, t, n) + O(h^2). \quad (8)$$

Алгоритм 3.  $x, t = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, N-1;$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \frac{h}{2} \left\{ R(x, n, n)R(n, t, n) + R(x, n+1, n) + \right. \\ \left. + \frac{h}{2} R(x, n, n)R(n, n+1, n) \right\} \left( E - \frac{h}{2} z_n \right)^{-2} \left\{ R(n+1, t, n) + \right. \\ \left. + \frac{h}{2} R(n+1, n, n)R(n, t, n) \right\} + O(h^3), \quad z_n = h(n+1, n+1, n+1). \quad (9)$$

Алгоритм 4.  $x, t = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, N-1;$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \frac{h}{2} \left\{ R(x, n, n)R(n, t, n+1) + \right. \\ \left. + R(x, n+1, n)R(n+1, t, n+1) \right\} + O(h^3), \quad (10)$$

где величины  $R(n, t, n+1)$  и  $R(n+1, t, n+1)$  предварительно определяются из системы, получаемой подстановкой в соотношение (10)  $x = n, n+1$ .

Алгоритм 5.  $x, t = 1/2, 3/2, 5/2, \dots, N-1/2; n = 0, 1, \dots, N-1;$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + hR(x, n+1/2, n)(E - hR(n+1/2, n+1/2, n))^{-1}R(n+1/2, t, n) + O(h^3) \quad (11)$$

Алгоритм 6.  $x, t = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N-1/2, N; n = 0, 1, \dots, N-1.$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \frac{h}{6} \left\{ R(x, n, n)R(n, t, n+1) + 4R(x, n+1/2, n)R(n+1/2, t, n+1) + \right. \\ \left. + R(x, n+1, n)R(n+1, t, n+1) \right\} + O(h^5). \quad (12)$$

3. Многошаговые методы. Остановимся на использовании (4).

Алгоритм 7. Предварительно, скажем, по алгоритму 6, определяется  $R(x, t, 1)$ ,  $x, t = 0, 1, 2, \dots, N$ . Далее, при  $n = 1, 2, \dots, N-1$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n-1) + \frac{h}{3} \left\{ R(x, n-1, n-1)R(n-1, t, n-1) + \right. \\ \left. + 4R(x, n, n)R(n, t, n) + R(x, n+1, n+1)R(n+1, t, n+1) \right\} + O(h^5). \quad (13)$$

Алгоритм 8.  $x, t = 0, 1, \dots, N$ . Значения  $R(x, t, k)$ ,  $k = 1, 2, 3$  предварительно вычисляются с точностью  $O(h^7)$ . Далее, при  $n = 3, 4, \dots, N-1$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n-3) + \frac{4h}{90} \left\{ 7R(x, n-3, n-3)R(n-3, t, n-3) + \right. \\ \left. + 32R(x, n-2, n-2)R(n-2, t, n-2) + 12R(x, n-1, n-1)R(n-1, \right. \\ \left. t, n-1) + 32R(x, n, n)R(n, t, n) + 7R(x, n+1, n+1)R(n+1, \right. \\ \left. t, n+1) \right\} + O(h^7). \quad (14)$$

Здесь приведены, в основном, неявные методы, в которых надо предварительно (как в алгоритме 4) найти решение системы небольшого порядка, либо (как в алгоритме 1) найти  $\alpha_n$  в качестве корня.

ограниченного при  $h \rightarrow 0$ . В последнем случае (особенно при  $m \geq 2$ ) решение уравнения для  $\varphi_n$  разумно проводить методом последовательных приближений или разложением по степеням  $h$  до требуемого порядка точности. В случае действительных ядер необходимо учитывать только действительные части решения уравнений типа (7').

Сочетание формул типа (4) — (6) приводит к новым алгоритмам. Предлагаемый подход в большей степени учитывает специфику гладких ядер, чем (см. выше) классический, однако в некоторых случаях преимуществом последнего является наличие возможности применения метода выбора ведущего элемента.

Алгоритмы 1—8 позволяют приближенно находить при  $\tau=1$  обратный оператор  $(I-K)^{-1}$ . Другой путь решения уравнения (2) при  $\tau=1$  основан на аналогичных формулам (1) — (6) соотношениях, например

$$y(x, n+1) = y(x, n-k) + \int_{(n-k)h}^{(n+1)h} K(x, s, s) y(x, s) ds, \quad k \geq 0. \quad (15)$$

Это обстоятельство позволяет при реализации алгоритмов изучаемого типа в том же вычислительном процессе находить приближенно и  $y(x, 1)$ .

Подчеркнем также, что для обоснования указанного в алгоритмах 1—8 порядка точности достаточно потребовать, чтобы  $K, f \in C^p$ , где  $p=1; 2; 4; 6$  соответственно в алгоритмах 1,2; 3,4,5; 6,7; 8.

4. *Многомерный случай.* Алгоритмы указанного типа могут быть построены и для решения многомерного уравнения (1). Рассмотрим, например, случай  $D = D_\tau = (0, \tau) \times (0, 1)$ . Можно показать, что резольвентное ядро  $R(x; t; \tau)$  ( $x, t \in D_1, 0 \leq \tau \leq 1$ ) удовлетворяет условию  $R(x; t; 0) = K(x, t)$  и интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} R(x; t; \tau) = \int_0^1 R(x; \tau, s_2; \tau) R(\tau, s_2; t; \tau) ds_2, \quad x, t \in D_1. \quad (16)$$

откуда нетрудно выписать соотношение типа (4). Соотношения типа (5) — (6) также могут быть легко получены. Для получения алгоритмов того или иного порядка остается применить соответствующие кубатурные формулы.

5. *Автоматический выбор шага и порядка.* Важным достоинством предложенного подхода является возможность выбора в процессе счета удобного шага или алгоритма приемлемого порядка. Поясним это.

В алгоритмах 1—6 допускается выбор сколь угодно густой сети по  $x, t$ , без изменения шага по  $\tau$ . Контролируя на каждом  $n$ -том этапе величину соответствующей производной функции  $R(x, s, n)R(s, t, n+1)$  по  $s$  при  $nh \leq s \leq (n+1)h$ , можно менять величину шага  $h$  или порядок алгоритма исходя из желательной величины ошибки. Сравнивая данную ситуацию с классическим случаем задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , приходим к выводу, что, с одной стороны, здесь эта идея осуществима сложнее вследствие контроля производных не в отдельных точках, а на от-

резках (на достаточно густом множестве точек), но, с другой стороны, ситуация значительно проще из-за квадратичного вида нелинейности.

6. *Экономичные алгоритмы.* Приведенные алгоритмы полностью векторизованы и, при наличии  $O(N^2)$  процессоров, допускают эффективное распараллеливание. На однопроцессорных системах они легко могут быть преобразованы в алгоритмы минимальной сложности, если счет в них вести для индексов  $x, t \geq n$ , а решение  $y(x, 1)$  находить не по (15), а посредством прямого и обратного ходов метода Гаусса.

Разумеется, приведенные здесь алгоритмы для уравнения (2) имеют сложность  $O(N^3)$  при  $N \rightarrow \infty$ , однако широкий класс ядер, выделенный в (10), допускает преобразование алгоритмов 1—8 в алгоритмы сложности  $O(N^2)$ , к тому же эффективно распараллеливаемые при наличии  $O(N)$  процессоров.

7. *Численные результаты.* Хорошо известны прикладные характеристики классических подходов к решению уравнения (2) (см. (1)). Из упомянутых во введении работ, рекомендующих метод факторизации, лишь в работе (5) содержатся серьезные численные результаты, подтверждающие эффективность этого подхода.

Алгоритмы 1—8 были всесторонне апробированы численным экспериментом. Приведем некоторые результаты.

Изучалось скалярное уравнение (2) с ядрами  $K_i$  и решениями  $f_i (i=1, 2)$

$$K_1 = 0, 5e^{-xt}, y_1 \equiv 1; K_2 = 0, 1 \exp 5(x-t)^2, y_2 = \exp(-5x^2). \quad (17)$$

Результаты сведены в таблице.

A	$A_1(h)$		$A_2(h)$		$A_4(h^2)$		$A_6(h^4)$		$A_7(h^4)$	
	$\delta_1$	$\delta_2$								
4	$4,9 \cdot 10^{-2}$	1,3	$3,7 \cdot 10^{-2}$	1,43	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$
8	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$5,7 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	1,76	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$
16	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$6,8 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
32	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
64	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$		$8,7 \cdot 10^{-5}$

Здесь  $A_p (p=1, 2, 4, 6, 7)$  — алгоритм  $p$  с указанием порядка его точности,  $\delta_i$  — абсолютная среднеквадратичная ошибка в случае ядра  $K_i (i=1, 2)$ ,  $N (= 4, 8, 16, 32, 64)$  — число отрезков равномерного разбиения интервала  $(0, 1)$  ( $h = \frac{1}{N}$ ).

Сравнительный анализ с этими и другими результатами показывает, что алгоритмы 1—8 не уступают соответствующим классическим (см. (1)). Алгоритм 4 несколько точнее алгоритма того же порядка точности из (5), где рассматривалось и ядро  $K_1$ .  $A_7$  хорошо согла-

սյուսնային համակարգի համարում (5), քիչ քան  $A_6$ ։ Բարձրացնելու ճշգրտությունը ըստ Րունգեի մեթոդի ընդհանուր կետերում արդեն բավականին բարձր է։

Վերջում օգտագործվել է Վ. Գարիբյանի և Ա. Գ. Գառնիկյանի կողմից կազմակերպված համալսարանական խումբի օգնությունը։

Институт математики  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ԽՍՀ ԳԱ լոգիկայի և մաթեմատիկայի ինստիտուտ

### Երկրորդ սերիայի ինտեգրալ հավասարումների թվային լուծման հարցերի մասին

Այս աշխատանքում դուրս են բերվում և քննարկվում են (2) հավասարման մոտավոր լուծման նոր եղանակներ։ Այս մոտեցումը թույլ է տալիս հաշվման ընթացքում ավտոմատ ձևով փոփոխել քայլը, ինչպես նաև (10) աշխատանքում ուսումնասիրված կորիզների դեպքում կառուցել բարձր ճշտության ինտեգրալային ալգորիթմներ։

Նման տիպի եղանակներ կարելի է մշակել և բնագծային ռադիալային (1) հավասարման դեպքում (տե՛ս § 4)։

Հիմնական ալգորիթմները ենթարկվել են հաշվողական լայն փորձարկման տարրեր հավասարումների համար։

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, «Наукова Думка», 1986.
- 2 С. Л. Соболев. УМН, IX, вып. 3 61, 1954.
- 3 Н. П. Сергеев. Записки Ленингр. горного ин-та. XXXIII, вып. 3, 1956.
- 4 М. Г. Крейн. ДАН СССР, т. 100, 1955.
- 5 А. McNabb, A. Schumitzky, J. Comput. Syst. Scien.: v. 4, 1970.
- 6 А. McNabb, A. Schumitzky, J. Math. Anal. Appl., v. 31, 1970.
- 7 Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, ДАН СССР, т. 206, № 4, 1972.
- 8 Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян. ДАН СССР, т. 235, № 2, 1977.
- 9 А. Б. Нерсисян. В сб. «Корректные краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики», Новосибирск, 1981.
- 10 А. Б. Нерсисян. Известия АН Арм. ССР, математика, т. XVII, № 6, 1982.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. М. Нариманян, К. А. Оксюзян, Г. М. Саркисян

Экспериментальные исследования колебаний тонких медных пластин в продольном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 30/1 1989)

В настоящее время с развитием теоретических исследований магнитоупругости тонких оболочек и пластин наблюдается значительное отставание по экспериментальным работам, что, на наш взгляд, обусловлено как сложностью экспериментальной установки, так и трудоемкостью проведения самих исследований.

Целью настоящей работы является экспериментальное изучение особенностей колебания тонких медных пластин в продольном магнитном поле в случае жесткого заземления одной из кромок (<sup>1</sup>).

В исследовании использовался электромагнит ФЛ—07 производства СКБ ИРЭ АН СССР, что позволило в зазоре 30 мм получить однородное магнитное поле в пространстве колебания пластины и варьировать магнитную индукцию в диапазоне от 0 до 1,6 Тл. Для проведения исследований была разработана и изготовлена специальная ячейка из диамагнитного материала, конструкция которой показана на рис. 1.

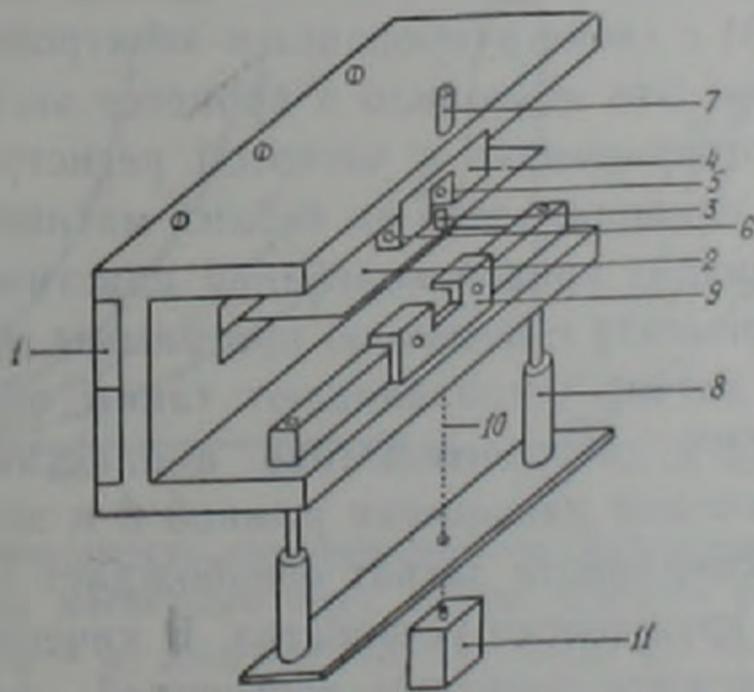


Рис. 1 Измерительная ячейка: 1—зажим для образца; 2—образец; 3—флажок; 4—кронштейн; 5—светодиод; 6—фотодиод; 7—регулирующий винт; 8—рамка; 9—захват; 10—трос электромагнита; 11—электромагнит

Ячейка представляет полый параллелепипед с отшлифованными гранями для плотного прилегания к полюсам электромагнита.

На одной грани ячейки находится зажимное устройство 1 для

закрепления исследуемой пластины 2. На противоположной грани расположены кронштейн 4 с датчиком системы регистрации 5,6 и устройство возбуждения механических колебаний, состоящее из рамки 8, захвата 9, троса 10 и электромагнита 11. Кронштейн имеет возможность перемещаться в плоскости колебания пластины при помощи регулировочного винта 7.

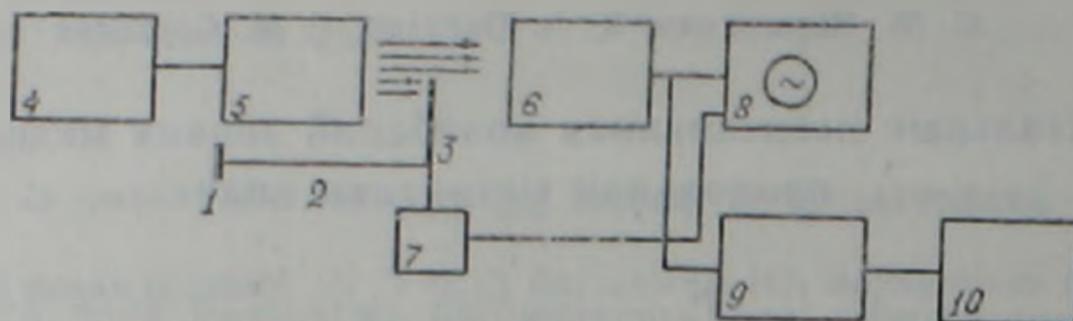


Рис. 2. Блок-схема системы регистрации: 1—зажим; 2—образец; 3—флажок; 4—источник питания; 5—светодиод АЛ—107; 6—фотодиод ФД—25; 7—система синхронного запуска; 8—осциллограф; 9—блок стыковки с ЭВМ; 10—ЭВМ

Блок-схема системы регистрации изображена на рис. 2. Датчик состоит из источника АЛ-107 (5) и ИК-приемника ФД—25 (6). Применение датчика в ИК области позволяет проводить измерения без затемнения установки. В зазоре между источником и приемником расположен непрозрачный флажок, жестко зафиксированный на свободном конце исследуемой пластины. При колебании пластины световой поток перекрывается пропорционально отклонению. Для визуального контроля затухающих колебаний пластины сигнал фотоприемника подается на вход запоминающего осциллографа С8—13, пуск развертки которого осуществляется в момент начала колебаний пластины. В состав экспериментальной установки был включен диалоговый вычислительный комплекс ДВК—2М с сконструированным электронным блоком стыковки с экспериментом. Это позволило в процессе эксперимента вводить в ЭВМ сигнал с фотоприемника с частотой регистрации данных до 5 кГц. Информация накапливалась на гибких магнитных дисках. Амплитудно-частотный анализ кривой колебания пластины проводился после завершения эксперимента с помощью программы обработки. Перед началом измерения датчик устанавливали таким образом, чтобы флажок перекрывал 50% светового потока, а пластина механически отклонялась от положения равновесия рамкой 8 и захватом 9 (рис. 1). В момент начала эксперимента захват освобождает пластину с помощью электромагнита и пружинного устройства. В качестве образцов использовались тонкие медные пластины постоянной длины  $l=20,5$  мм. В процессе эксперимента варьировалась толщина  $h$  (от 12 до 80 мкм) и ширина  $a$  (от 5 до 40 мкм) пластины. Характеристики образцов приведены в таблице.

В качестве примера на рис. 3, а приведены временные зависимости амплитуды колебаний свободного конца тонкой медной пластины в магнитном поле и без него. Как видно на рисунке, имеет место значительное изменение характера кривой колебаний при наличии магнитного поля. В слабых полях для пластины шириной 40 мм (рис. 3, б)

№ образца	1	2	3	1	2	3	4
$h = 10^{-6}$ м	12	42	80	80	30	30	30
$a = 10^{-3}$ м	30	30	30	5	8	11	13
$\nu_0$ , Гц	32	38	110	53	44	42	46

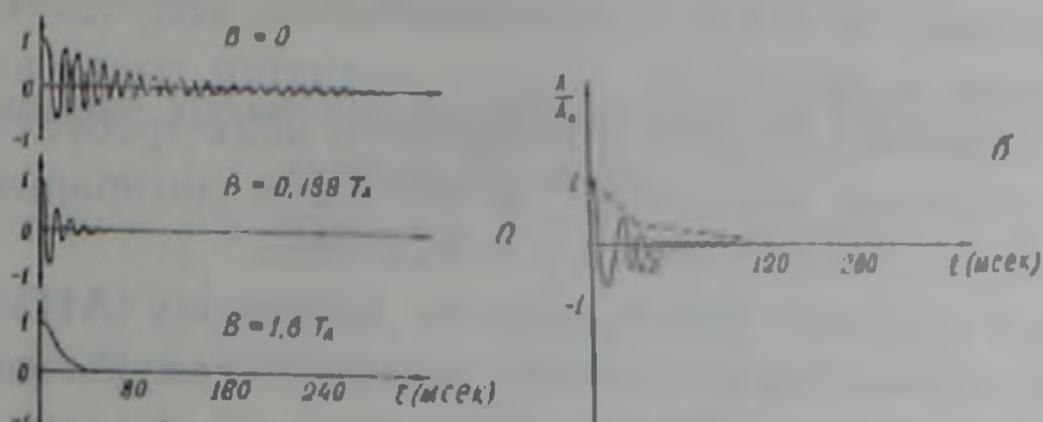


Рис. 3. Временная зависимость амплитуды колебаний пластины: а—при различных значениях индукции магнитного поля (В); б—при  $a=40$  мм

кривая зависимости амплитуды от времени имеет два участка: первый участок с большим логарифмическим декрементом затухания и малой частотой собственных колебаний; второй участок с малым декрементом затухания и большой частотой собственных колебаний. Количественные данные и зависимости декремента затухания от индукции магнитного поля для пластин с различными геометрическими параметрами представлены на рис. 4, а, б.

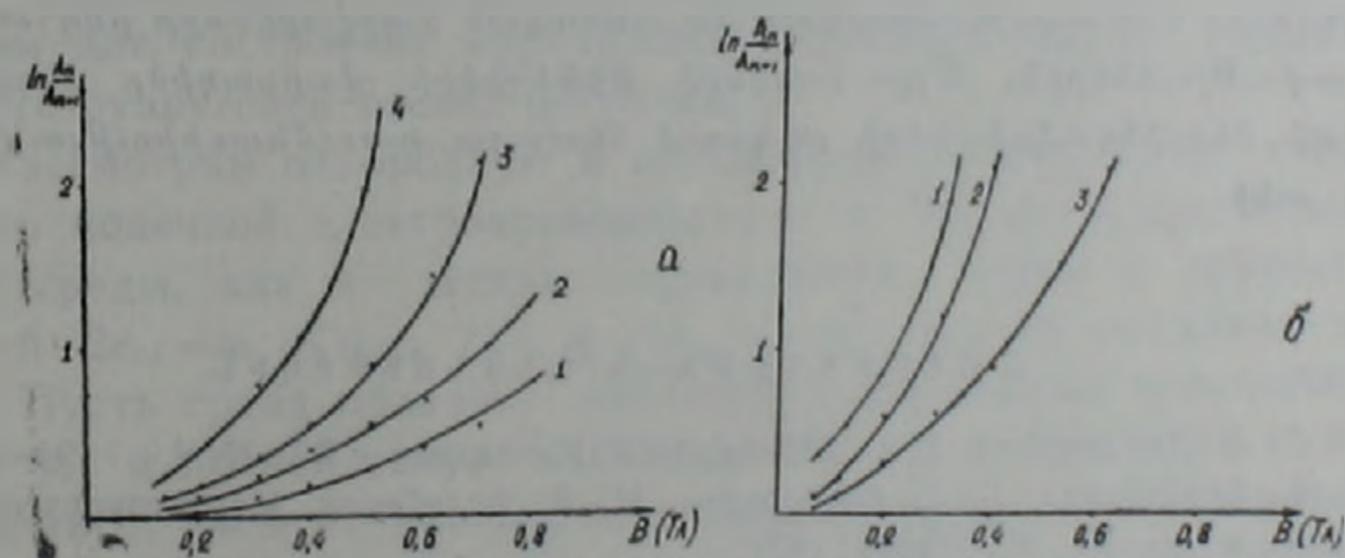


Рис. 4. Зависимость логарифмического декремента затухания от величины индукции магнитного поля: а—для образцов разной толщины ( $h$ ) при  $l=20,5 \cdot 10^{-3}$  м; 1— $h=20,5 \cdot 10^{-6}$  м; 2— $h=32 \cdot 10^{-6}$  м; 3— $h=80 \cdot 10^{-6}$  м; б—для образцов с различной шириной ( $a$ ) при  $l=20,5 \cdot 10^{-3}$  м и  $h=30 \cdot 10^{-6}$  м; 1— $a=5 \cdot 10^{-3}$  м; 2— $a=8 \cdot 10^{-3}$  м; 3— $a=11 \cdot 10^{-3}$  м; 4— $a=13 \cdot 10^{-3}$  м

Как видно из рис. 4, а, логарифмический декремент затухания (ЛДЗ) при отсутствии магнитного поля уменьшается с увеличением толщины пластины, и эти отличия существенно возрастают с увеличением индукции магнитного поля. Из рис. 4, б видно, что значения ЛДЗ в отсутствие магнитного поля для пластин различной ширины практически совпадают, что естественно, поскольку могут быть отличия, обусловленные только краевыми эффектами. Однако при увеличении ин-

дукции магнитного поля ЛДЗ существенно увеличивается с увеличением ширины пластины. Во всех экспериментах колебания пластинок относительно положения равновесия имели место до определенной величины индукции магнитного поля. Дальнейшее увеличение магнитного поля качественно изменяло характер движения пластин, т. е. наблюдался процесс медленного возвращения пластинки к положению равновесия (рис. 3, б). Экспериментальные результаты по изменению колебаний тонких пластин при воздействии продольного магнитного поля подчиняются общим закономерностям, полученным теоретическими расчетами в работе (2). Однако характер поведения пластин при больших значениях индукции магнитного поля требует дальнейшего детального изучения временной зависимости возвращения свободного конца пластины к равновесному положению.

Авторы приносят благодарность академику АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяну за постановку задачи и консультации.

Ереванский государственный  
университет

Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ, Կ. Ա. ՕՔՍՈՒԶՅԱՆ, Կ. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բարակ պղնձե թիթեղի տատանումների լայնական մագնիսական դաշտում

Ուսումնասիրվել են բարակ պղնձե թիթեղի տատանման տոնանձնահատկությունները լայնական մագնիսական դաշտում թիթեղի եզրերից մեկի կոշտ սեղմման պայմաններում: Կատարվել է թիթեղի տատանումների լայնույթահաճախային կորի անալիզը: Փոքր ինդուկցիաների դեպքում փորձարարական տվյալները համապատասխանում են տեսական հաշվարկների ընդհանուր օրինաչափություններին: Այդուհանդերձ թիթեղների վարքագիծը մագնիսական դաշտի մեծ ինդուկցիաների դեպքում հետազոտ ուսումնասիրությունների կարիք ունի:

#### ЛИТЕРАТУРА—ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> С. А. Амбарцумян. Изв. АН АрмССР. Механика, т. 36, № 4, с. 194—200 (1983).  
<sup>2</sup> С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М., Наука, 1977.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

**Вариационное уравнение магнитоупругости проводящих тонких оболочек**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18/IV 1989)

В работах (1-6) на основе вариационного уравнения механики сплошных сред (7-8) получены динамические уравнения, уравнения состояния, соотношения на поверхности разрыва и граничные условия, описывающие электромагнитное поле и сплошную среду.

В работах (9-12) на основе гипотез магнитоупругости тонких тел или асимптотического метода интегрирования всех групп уравнений трехмерной магнитоупругости построена математическая теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин. В работах (10, 13, 14) изучена энергетика явления и доказаны некоторые энергетические теоремы двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

В данной работе впервые формулируется вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек. Оно позволяет довольно простым путем получить основные соотношения и граничные условия теории магнитоупругости тонких оболочек, а также является исходным для построения вариационных методов решения задач теории магнитоупругости тонких оболочек.

1. Рассмотрим однородную и изотропную упругую среду, характеризующую конечной электропроводностью  $\sigma$ . Механическое состояние упругой среды, как и всегда, определяется тензором упругих деформаций  $2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ , где  $u = \{u_1, u_2, u_3\}$  — вектор смещения точек среды. Пусть среда обладает плотностью свободных электрических зарядов  $\rho_e$  и по ней текут электрические токи, плотность которых  $J$ , кроме того, следует учитывать электромагнитное поле, определяемое векторным  $A$  и скалярным  $\varphi$  потенциалами, которые связаны с напряженностью электрического поля  $E$  и магнитной индукцией  $B$  соотношениями (15):

$$E = -\nabla\varphi - c^{-1} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \text{rot} A. \quad (1.1)$$

Для получения уравнений движения, описывающих динамическое поведение магнитоупругой среды, воспользуемся вариационным принципом (уравнением) Гамильтона

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} L dv dt = 0, \quad (1.2)$$

где для плотности функции Лагранжа выбирается следующее выражение (1):

$$L = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 - \rho \cdot U(e_{ij}) + \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + c^{-1} j \cdot A - \rho_e \cdot \varphi, \quad (1.3)$$

Варьирование действия  $S$  по  $u$  при постоянных  $A$  и  $\varphi$  дает динамические уравнения теории упругости

$$\rho a_i = \nabla_j \sigma_j^i + R_i, \quad R_i = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j^j \cdot B^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

где  $a_i$  — компоненты вектора ускорения среды,  $\sigma_j^i$  — компоненты тензора упругих напряжений,  $R_i$  — компоненты объемной ponderomotorной силы,  $\varepsilon_{ijk}$  — компоненты антисимметричного тензора Леви—Чивита.

Варьирование действия  $S$  по  $A$  и  $\varphi$  при постоянных  $u$  с учетом (1.1) дает уравнения электродинамики

$$\varepsilon^{ijk} \nabla_j H_k = \frac{1}{c} \frac{\partial D^i}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j^i, \quad \nabla_i D^i = 4\pi \rho_e, \quad (1.5)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.6)$$

которые выполняются тождественно, если вектора  $B$  и  $E$  выражены через потенциалы  $A$  и  $\varphi$  по формулам (1.1).

Из вариационного уравнения (1.2), (1.3), примененного к движению среды, одновременно формулируются соотношения на поверхности разрыва определяющих параметров среды и поля.

2. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины  $2h$  как трехмерное, упругое, электропроводящее тело и отнесем ее к триортogonalной инерциальной (неподвижной) системе координат (17).

Будем считать, что оболочка контактирует с внешней средой, электродинамические свойства которой отождествляются со свойствами вакуума ( $\sigma = 0$ ,  $\rho_e = 0$ ,  $\mu = \varepsilon = 1$ ).

Пусть оболочка находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности в области трехмерной оболочки  $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$  с векторным потенциалом  $A_0$  и в области окружающего пространства —  $B_0^{(e)} = (B_{01}^{(e)}, B_{02}^{(e)}, B_{03}^{(e)})$  с векторным потенциалом  $A_0^{(e)}$ :

$$B_0 = \operatorname{rot} A_0, \quad \operatorname{div} A_0 = 0; \quad B_0^{(e)} = \operatorname{rot} A_0^{(e)}, \quad \operatorname{div} A_0^{(e)} = 0. \quad (2.1)$$

Для изучения магнитоупругих процессов в электропроводной, упругой оболочке будем исходить из вариационного уравнения (1.2) для линейной теории трехмерной магнитоупругости, которое будет выражаться следующим образом:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV dt + \frac{1}{8\pi} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} E^2 dV dt -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8\pi} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} h dV dt + c^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} dV dt - c^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} \text{rot}(\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{u}) A_0 dV dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} \rho_e \cdot \delta \varphi dV dt + \frac{1}{8\pi} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} E_{(e)}^2 dV dt - \frac{1}{8\pi} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} h_{(e)}^2 dV dt = 0. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Здесь  $V_3^*$  — трехмерная область вне внешней поверхности трехмерной оболочки до некоторой сферической поверхности  $\Sigma$  радиуса  $R$ , где  $R \rightarrow \infty$ ;  $E, h$  — соответственно векторы индуцированных (возмущенных) электрических и магнитных полей в области трехмерной оболочки;  $E_{(e)}, h_{(e)}$  — аналогичные величины в окружающей оболочке области;  $\mathbf{j}$  — возмущенный ток проводимости в оболочке,  $A, A_{(e)}$  — векторные, а  $\varphi, \varphi_{(e)}$  — скалярные потенциалы возбужденного электромагнитного поля.

Для существования объемных интегралов по  $V_3^*$  следует принять во внимание условие на бесконечности<sup>(15)</sup>, при котором убывание векторов электромагнитного поля с расстоянием должно происходить в общем случае быстрее, чем  $i/R^{-1}$ .

3. Наша цель заключается в том, чтобы приближенно свести вариационное уравнение (2.2) трехмерной линейной теории магнитоупругости (с независимыми переменными  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и времени  $t$ ) к соответствующему уравнению двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек (с независимыми переменными  $\alpha_1, \alpha_2$  и времени  $t$ ).

Решение поставленной проблемы базируется на асимптотическом методе, развитом в работах<sup>(10-14)</sup>. Удерживая в равенстве (2.7) все члены до порядка  $O(i^{-l+l})$ , после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} 2\rho h \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] A_1 A_2 dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S \delta w + M_1 \delta \alpha_1 + M_2 \delta \alpha_2 + 2H \delta z) A_1 A_2 dz_1 dz_2 dt + \\
& + \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} (\bar{j}_1 \delta A_1^0 + \bar{j}_2 \delta A_2^0) A_1 A_2 dz_1 dz_2 dt + \\
& + \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\bar{j}_1 \delta u_2 - \bar{j}_2 \delta u_1) A_{02} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\bar{j}_1 \delta u_2 - \bar{j}_2 \delta u_1) A_{01} - \right. \\
& - \left. \left[ \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial (A_2 \bar{j}_1 \delta w)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial (A_1 \bar{j}_2 \delta w)}{\partial \alpha_2} \right] A_{03} \right\} A_1 A_2 dz_1 dz_2 dt + \\
& + \frac{1}{8\pi} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_2} (E_{(e)}^2 + h_{(e)}^2) A_1 A_2 (1 + k_1 \alpha_3) (1 + k_2 \alpha_3) dz_1 dz_2 dt = 0. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Уравнение (3.1) представляет собой вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

Здесь  $\bar{j}_1$  и  $\bar{j}_2$  — компоненты поверхностного тока проводимости по срединной поверхности оболочки (или иначе усредненные токи по толщине оболочки), которые определяются формулами

$$\bar{j}_1 = 2h \cdot \sigma \cdot \left( E_{20} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right), \quad \bar{j}_2 = 2h \sigma \cdot \left( E_{10} + \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad (3.2)$$

$E_{i0}$  — тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля, а  $A_i^0$  — тангенциальные компоненты векторного потенциала индуцированного магнитного поля в точках срединной поверхности оболочки. Здесь специально не приводится, но строго доказывается, что в рамках асимптотической погрешности  $O(\epsilon^{-l+p})$  компоненты  $A_k$ ,  $k=1, 2, 3$  ведут себя как постоянные по толщине оболочки.

При выводе вариационного уравнения (3.1) предполагалось, что компоненты заданного магнитного поля не зависят от поперечной координаты ( $\alpha_3$ ) оболочки. Изучая вопрос о возможности такого предположения, доказано, что в тонких оболочках в рамках асимптотической погрешности  $O(\epsilon^{-l+p})$  вполне реально существование такого магнитного поля, при этом уравнения (2.1) принимают вид:

$$B_{01} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_{30}}{\partial \alpha_2}, \quad B_{02} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_{30}}{\partial \alpha_1}, \quad B_{03} = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial(A_2 A_{30})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(A_1 A_{10})}{\partial \alpha_2} \right), \quad (3.3)$$

где  $A_{k0}$ ,  $k=1, 2, 3$ , не зависят от  $\alpha_3$ .

4. Варьирование действия (3.1) по  $u_i$  и  $w$  при постоянных  $A_i^0$ ,  $i=1, 2$ , с учетом (3.3) дает динамические уравнения теории тонких оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R_1} \left| \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} \right| + \frac{1}{c} \bar{j}_2 \cdot B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \left| \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1 M_1}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} \right| - \frac{1}{c} \bar{j}_1 \cdot B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left| \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} \right| + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left| \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 M_1}{\partial \alpha_2} \right| \right| + \frac{1}{c} \bar{j}_1 \cdot B_{02} - \frac{1}{c} \bar{j}_2 \cdot B_{01} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3)$$

Варьирование действия (4.1) по  $A_i^0$ ,  $A_k^0$  при постоянных  $u_i$  и  $w$

с учетом (1.1) дает уравнения электромагнитного поля в суммарном виде, т. е. как для внутренней области оболочки (которая в рамках асимптотической точности  $O(\epsilon^{-l+p})$  проявляется как математический разрез ( $10^{-12}$ )), так и во внешней от него среде:

$$\operatorname{rot} h_{(e)} = \delta(x_2) \cdot \Theta(x_1, x_2 \in \Omega) \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} E_{(e)} = 0, \quad (4.4)$$

где  $\bar{j} = (\bar{j}_1, \bar{j}_2, 0)$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\Theta(x_1, x_2 \in \Omega)$  — функция Хевисайда.

С учетом (1.1) к уравнениям (4.4) следует присоединить уравнения типа (1.6) с индексом  $(e)$ .

Уравнение (4.4) с помощью функции Грина легко приводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( \bar{j}_1(x_1, x_2, t) - 2h\epsilon \cdot \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial \varpi(x_1, x_2, t)}{\partial t} + 2h\epsilon \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} \right) e_1 + \\ & + \left( \bar{j}_2(x_1, x_2, t) - 2h\epsilon \cdot \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} + 2h\epsilon \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial \varpi(x_1, x_2, t)}{\partial t} \right) e_2 = \\ & = - \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\bar{j}_1(x'_1, x'_2, t) e'_1 + \bar{j}_2(x'_1, x'_2, t) e'_2}{R_{pq}} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $R_{pq}$  — расстояние между двумя точками  $(x_1, x_2)$  и  $(x'_1, x'_2)$  на поверхности оболочки;  $(e_1, e_2)$  и  $(e'_1, e'_2)$  базисные векторы для срединной поверхности оболочки в указанных точках.

Уравнения (4.1) — (4.3), (4.5) представляют разрешающую систему двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, которая с асимптотической точностью  $O(\epsilon^{-l+p})$  (т. е. в рамках точности классической теории тонких оболочек, когда относительно единицы пренебрегаются величины порядка  $h/R_i$ ) совпадает с аналогичной системой, приводимой в работах ( $10^{-12}$ ), где были сохранены члены до порядка  $O(\epsilon^{-2l+2p})$  (т. е. с некоторыми уточненными членами по сравнению с классической теорией оболочек).

При варьировании действия (3.1) наряду с разрешающей системой уравнений двумерной теории магнитоупругости (4.1) — (4.3), (4.5), при помощи соответствующих контурных интегралов получают граничные условия на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем срединную поверхность оболочки  $\Omega$ . Эти условия, во-первых, представляют канонические граничные условия теории тонких оболочек ( $16$ ) и, во-вторых, получают контурные интегралы вдоль  $\Gamma$  определяющими поверхностными токами

$$\oint_{\Gamma} \bar{j}_0 A_{03} \delta \varpi dg, \quad \oint_{\Gamma} (\bar{j}_0 \delta u_t - \bar{j}_t \delta u_0) A_{01} dg, \quad (4.6)$$

где  $\delta$  и  $t$  — нормальное и касательное направления для контура  $\Gamma$ . Из (4.6) будут вытекать следующие граничные условия на  $\Gamma$  для поверхностного тока:

$$\bar{J}_0 = 0, \quad \bar{J}_1 = 0, \quad \text{или} \quad \bar{J}_1/\Gamma = \bar{J}_2/\Gamma = 0. \quad (4.7)$$

Ленинканский филиал  
Ереванского политехнического института им. К. Маркса

## ՈՒՆՔԻՆ

### Հաղորդիչ բարակ բաղանիքի մագնիսաառաձգականության վարիացիոն հավասարումը

Բերվում է մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության վարիացիոն հավասարումը, որը կարող է հիմք ծառայել արտաձևյալ միմյանց հետ փոխազդեցության մեջ գտնվող առաձգական մարմնի և էլեկտրամագնիսական դաշտի բոլոր հավասարումները և եզրային պայմանները:

Ասիմպտոտիկ մեխոդի ոգնությունը մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության վարիացիոն հավասարման հիման վրա կառուցվում է բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության վարիացիոն հավասարումը, որից ելնելով արտաձևվում են մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության որոշիչ հավասարումները և եզրային պայմանները:

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> К. Б. Власов, Б. Х. Ишмухаметов, Журн. exper. и теорет. физики, т. 46, вып. 1, с. 201—212 (1964).
- <sup>2</sup> Л. Т. Черный, в кн.: Науч. тр. Ин-та механики МГУ, № 31, с. 100—119 (1974).
- <sup>3</sup> В. А. Желнорович, Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами, Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- <sup>4</sup> Л. И. Седов, А. Г. Цыпкин, Прикл. математика и механика, т. 43, вып. 3, с. 387—400 (1974).
- <sup>5</sup> В. В. Лохин, в кн.: Науч. тр. Ин-та механики Моск. ун-та, № 31, с. 149—166 (1974).
- <sup>6</sup> А. А. Штейн, Прикл. математика и механика, т. 41, вып. 2, с. 271—281. (1977).
- <sup>7</sup> Л. И. Седов, Усп. мат. наук, т. 20, вып. 5 (125), с. 121—180 (1965).
- <sup>8</sup> В. Л. Бердичевский, в кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Судостроение, Л., с. 55—66, 1970.
- <sup>9</sup> С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977.
- <sup>10</sup> С. О. Саркисян, Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин. Докт. дис. Казанский гос. ун-т, 1986.
- <sup>11</sup> С. О. Саркисян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 38, № 6, с. 21—24 (1985).
- <sup>12</sup> С. О. Саркисян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 42, № 5, (1989).
- <sup>13</sup> С. О. Саркисян, Уч. зап. Ереванского ун-та, Ест. науки, № 2, с. 41—46, 1985.
- <sup>14</sup> С. О. Саркисян, Механика. Межвуз. сб. научн. тр. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111, 1987.
- <sup>15</sup> В. В. Никольский, Электродинамика и распространение радиоволн., Наука, М., 1978.
- <sup>16</sup> В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, Л., 1951.
- <sup>17</sup> А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Наука, М., 1976.

УДК 537.523.4

ФИЗИКА

Р. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егнязрян, Э. А. Тер-Геворкян

**О стимулировании ВЧ-колебаний и их влиянии на энергию аномальных электронов в пеннинговском разряде переменной длины**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 17/VII 1989)

Данная работа посвящена дальнейшему изучению разряда с осциллирующими электронами в связи с возможностью использования его в современных направлениях науки и техники в качестве источника заряженных частиц (<sup>1-2</sup>). Эффективная работа источника зависит от того, насколько удастся снизить энергетические затраты для получения пучка ионов или электронов с заданными параметрами. Достижение поставленной цели тесно связано с нахождением оптимального режима работы газоразрядной ячейки. В связи с этим ряд предыдущих работ авторов (<sup>3-7</sup>) был посвящен поискам некоторого оптимального режима диапазона физических и геометрических параметров газоразрядного источника, обеспечивающих выполнение этой задачи. В работах (<sup>8-9</sup>) показано, что в определенной области значений геометрических параметров разряд становится нестабильным. Об этом свидетельствовал ряд экспериментальных фактов, в том числе и появление аномальных электронов за отверстием в центре катода.

В работах (<sup>9-10</sup>) авторы выход аномальных электронов за отверстием в центре катода объясняют появлением ВЧ-колебаний, обусловленных развивающейся при определенных параметрах разряда неустойчивостью диокотронного типа. Установлено, что эффективность выхода потоков электронов в значительной степени зависит от геометрических параметров разрядного промежутка.

Главное внимание в настоящей работе уделено выяснению влияния длины разрядного промежутка на режим горения разряда при данных условиях и возможность стимулирования в нем ВЧ-колебаний с целью инициирования эффективного выхода потока электронов за отверстие в центре катода вдоль магнитного поля без применения каких-либо электроннооптических систем. Опираясь на предыдущие исследования (<sup>4-6</sup>), авторы выбрали те ячейки Пеннинга, в которых наиболее четко проявилось различие режимов горения разряда.

Экспериментальные данные настоящей работы свидетельствуют о важной роли относительной длины разрядного промежутка  $l_{отн}$  равной отношению длины разрядного промежутка  $l$  к диаметру анода  $d$ , в развитии неустойчивостей диокотронного типа и подтверждают механизм появления аномально быстрых электронов за отверстием катода, предложенный авторами в работе (<sup>9</sup>).

Принципиальная схема разрядного промежутка типа Пеннинга по-

казана на рис. 1, а. Она представлена цилиндрическим анодом 1, двумя катодами по обеим сторонам цилиндрического анода, один из которых (3) неподвижный с осевым отверстием, а другой (2) подвижный.

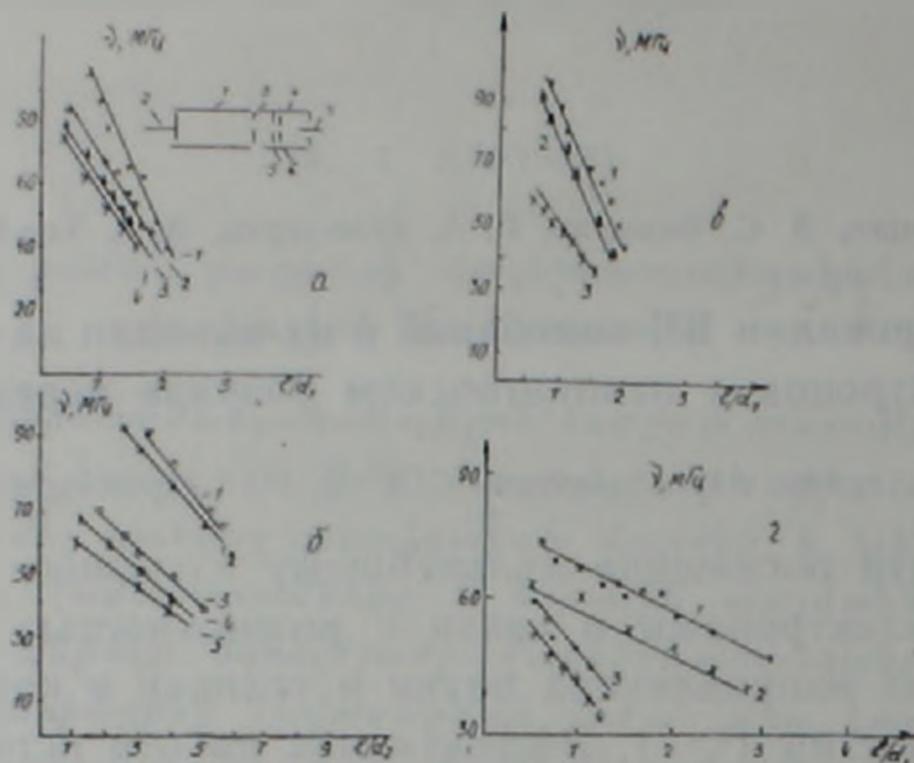


Рис. 1. Принципиальная схема разрядного промежутка. Зависимости частоты ВЧ-колебаний переменной компоненты разрядного тока от относительной длины разрядного промежутка для ячеек диаметров  $d_1$  и  $d_2$  (а, б, в),  $d_1 < d_2$ ,  $U_a = 3$  кВ,  $p = 4 \cdot 10^{-4}$  торр,  $V$  (Гц): а) 1—1210, 2—1430, 3—1540, 4—1650; б) 1—1100, 2—1210, 3—1230, 4—1540, 5—1760; в)  $V = 1210$  Гц,  $U_a$  (кВ): 1—3, 2—2, 3—1,5; з)  $U_a = 1,5$  кВ,  $p$  (торр): 1,2— $5 \cdot 10^{-5}$ , 3,3— $4 \cdot 10^{-4}$ ,  $V$  (Гц): 1,5—1100, 2,4—1320

К неподвижному катоду примыкает коллектор 4, внутри которого располагаются центральный электрод 7, сетки 5 и 6, изолированные от корпуса коллектора и друг от друга. Сетки предназначены для подавления электронов при измерении ионного тока пучка и ионов при измерении электронного тока. Центральный электрод 7 служит для измерения осевого компонента тока пучка заряженных частиц. Энергию электронов определяли методом задерживающего потенциала, подаваемого с некоторым смещением на сетки 5 и 6. Для получения информации о существовании ВЧ-колебаний в прианодном слое и связанном с ним появлении аномальных электронов снимаемое с сопротивления напряжение в цепи разрядного тока подавалось на вход анализаторов спектра СКЧ—5, СКЧ—8, СКЧ—59. Просматривались спектрограммы колебаний в диапазоне от 1 до 100 МГц. Колебания в разряде изучались в зависимости от относительной длины разрядного промежутка  $l_{отн}$ , которую плавно меняли в горящем разряде с помощью специального устройства. Для выяснения природы колебаний при фиксированной длине разрядного промежутка меняли физические параметры разряда.

Данные экспериментов приведены на рис. 1—4. Из экспериментальных зависимостей  $\nu = f(l_{отн})$  (рис. 1 а, б, в) видно, что  $l_{отн}$  при которой наступает неустойчивое состояние, различна. Из тех же зависимостей следует, что при  $p = \text{Const}$  частота колебаний уменьшается с

ростом  $I_{отн}$  для всех значений анодного напряжения  $U_a$  и магнитной индукции  $B$  измеренного интервала.  $I_{отн}$ , при которой возникают неустойчивости, зависит также и от давления (рис. 1,з). Она уменьшается с ростом давления, уменьшается и величина частоты колебаний.

Экспериментальные зависимости частоты ВЧ-колебаний разрядного тока от индукции магнитного поля  $B$  при различных анодных напряжениях и давлении  $p=4 \cdot 10^{-4}$  торр приведены на рис. 2. Видно, что эти зависимости соответствуют диэктронным колебаниям, частота которых является функцией напряженности радиального электрического поля  $E_r$  и индукции магнитного поля  $B: \nu \sim \frac{E_r}{B}$ .

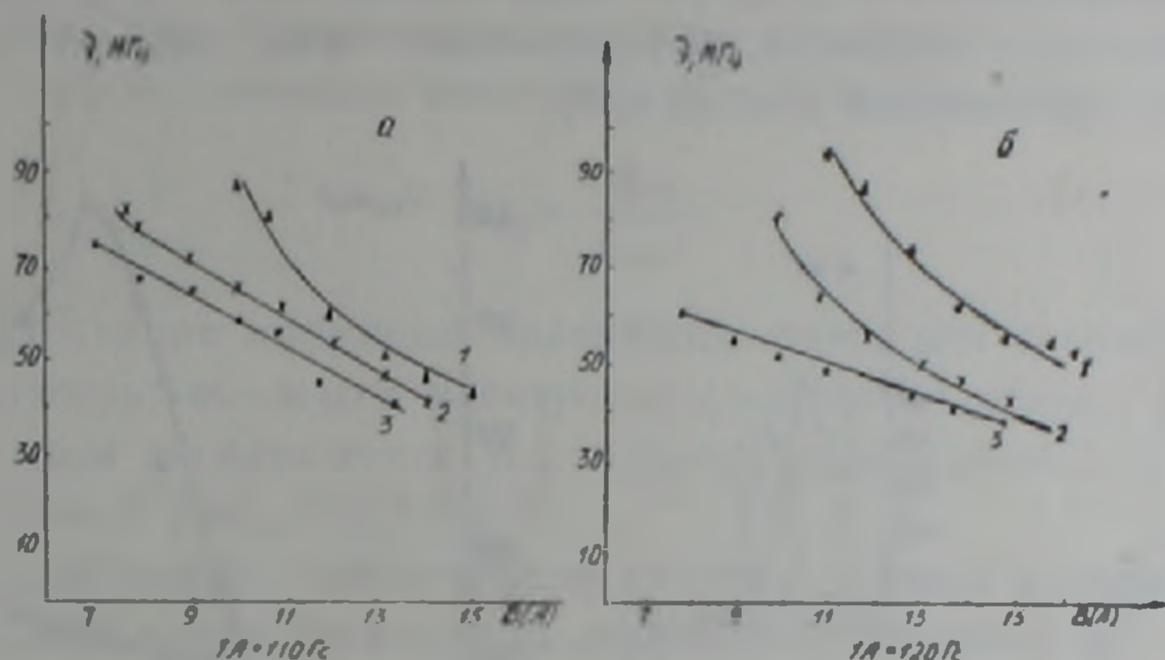


Рис. 2. Зависимость частоты ВЧ колебаний переменной компоненты разрядного тока от индукции магнитного поля при  $p=4 \cdot 10^{-4}$  торр для двух разрядных промежутков: а)  $l/d_1=1$  отн. ед., б)  $l/d_2=2$  отн. ед.,  $U_a$ (кВ): 1—3, 2—2, 3—1,5

На рис. 3 представлены значения энергий электронов, вышедших из отверстия в центре неподвижного катода, в зависимости от относительной длины разрядного промежутка. Из них следует, что при данных условиях поток приосевых электронов не является моноэнергичным. Интервал измеренных энергий электронов лежит в пределах  $20 \div 280$  эВ. Были обнаружены электроны с энергией до 400 эВ (на графике не приведены). При магнитных полях, больших критического, выход электронов с аномально большой энергией, как видно из рис. 3, а, зарегистрирован для коротких разрядных промежутков. Однако при полях, меньших  $B_{кр}$ , при прочих тех же условиях таких электронов не наблюдалось. С ростом относительной длины разрядного промежутка энергия электронов уменьшается. Наиболее интенсивные ВЧ-колебания также регистрировались для тех же разрядных промежутков (рис. 3, б). Выход аномальных электронов одновременно с ВЧ-колебаниями говорит о наличии общей причины их рождения и подтверждает предложенный авторами механизм их возникновения<sup>(8)</sup>.

Таким образом, интервал длин  $l_{отн}$ , при которых разряд находится в неустойчивом состоянии, зависит не только от физических, но и от геометрических параметров (рис. 1, а, б). Именно этим можно объяснить факт отсутствия ВЧ-колебаний при тех же значениях физических параметров в ячейке меньшего диаметра, но с постоянной дли-

ной разрядного промежутка (<sup>9</sup>), большей критической относительной длины  $l_{\text{отн.кр}}$ , т. е. той длины, при которой разряд переходит в неустойчивое состояние.

Возможность установления условий, при которых инициируются ВЧ-колебания, была получена благодаря плавному изменению длины разрядного промежутка исследуемой ячейки. Из рис. 1 а, б видно, что с ростом индукции магнитного поля при  $U_a = \text{Const}$  и  $p = \text{Const}$  предельное значение  $l_{\text{отн.кр}}$  смещается в сторону коротких  $l_{\text{отн.}}$ , с ростом же анодного напряжения при  $B = \text{Const}$  и  $p = \text{Const}$  — в сторону больших (рис. 1, в).

Экспериментальные зависимости  $v = f(B)$  и  $l_{\text{отн.}} = \text{Const}$  показывают, что критическое значение магнитного поля  $B_{\text{кр}}$ , при котором возникают неустойчивости диокотронного типа, зависит от величины объемного промежутка (рис. 2, а, б).

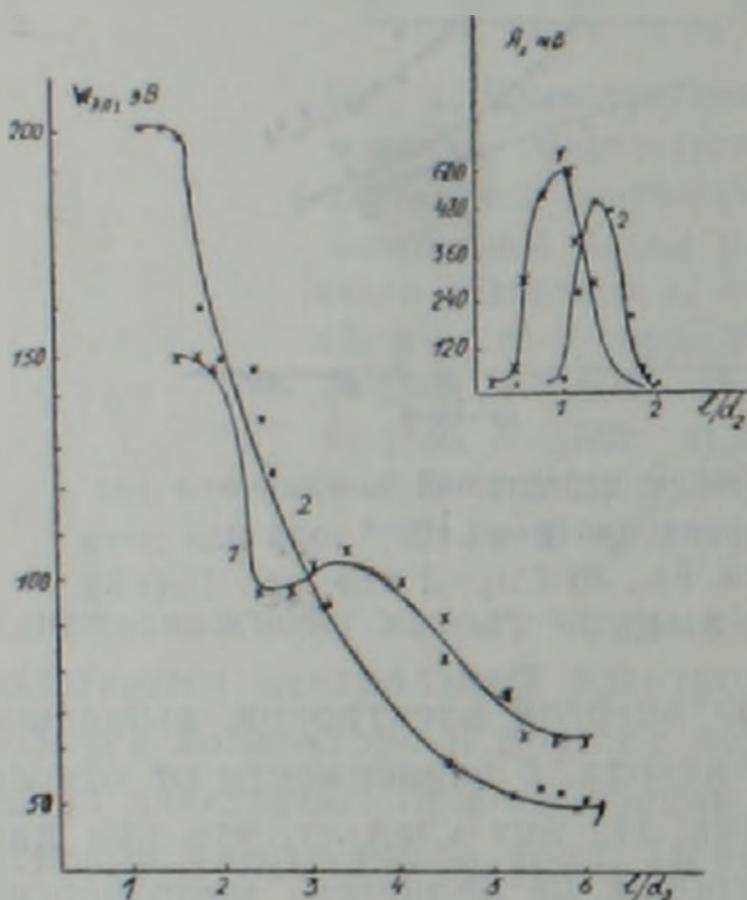


Рис. 3. Зависимость энергии электронов, вышедших из осевого отверстия в центре катода и амплитуды ВЧ-колебаний, от относительной длины разрядного промежутка при  $p = 5 \cdot 10^{-4}$  торр,  $B = 1500$  Гс,  $U_a$  (кВ)  
1—1,2; 2—2,4

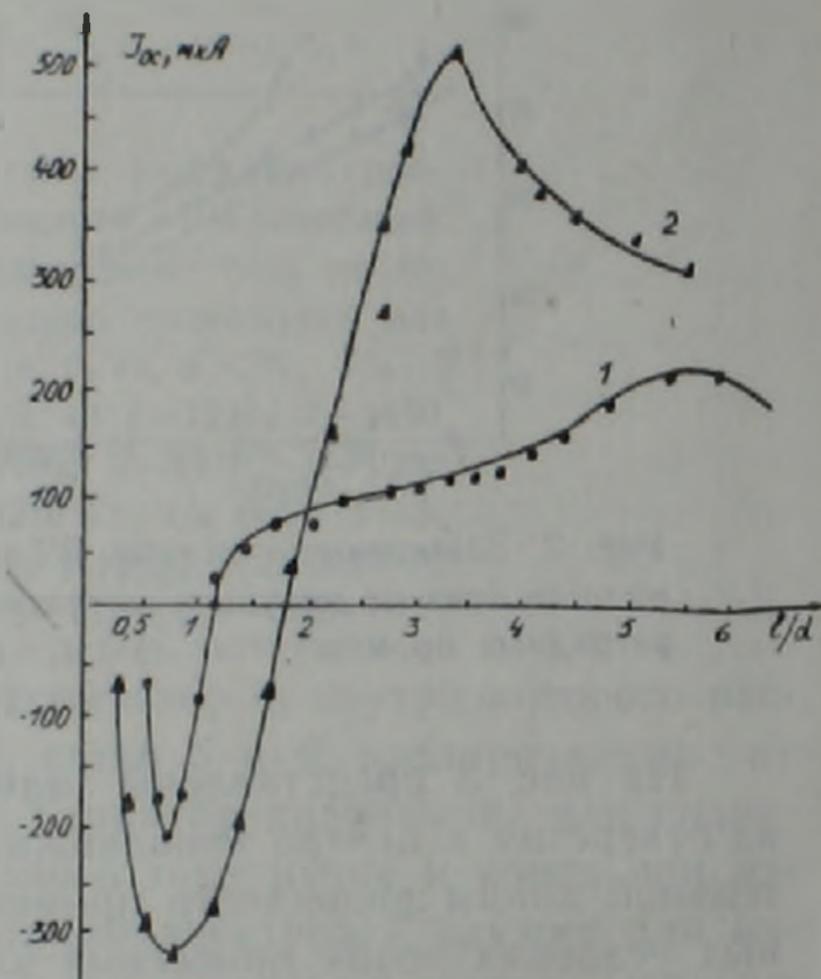


Рис. 4. Зависимость осевого компонента разрядного тока от относительной длины разрядного промежутка при  $p = 4 \cdot 10^{-4}$  торр: 1— $U_a = 2,4$  кВ,  $B = 1500$  Гс для  $d_1$ , 2— $U_a = 3$  кВ,  $B = 1300$  Гс для  $d_2$

На рис. 4 показаны экспериментальные зависимости осевого компонента тока из отверстия в центре катода от  $l_{\text{отн}}$  исследуемых ячеек. Видно, что в зависимости от длины разрядного промежутка при данных физических параметрах разрядные ячейки различных диаметров работают в различных режимах: ячейка меньшего диаметра становится преимущественно источником ионов, начиная с  $l_{\text{отн}}$ , равных 1,2 отн. ед., а большего диаметра — начиная с 1,7 отн. ед. Из отверстия в центре катода извлекается электронный ток, максимальное значение которого для разных ячеек (от 240 до 340 мкА) достигается при  $l_{\text{отн}}$  равной 0,9. В этих условиях создается оптимальный режим работы газоразрядной ячейки в качестве источника электронов. Дальнейшее увеличение  $l_{\text{отн}}$  приводит к спаду электронного тока. При этом мак-

симум электронного тока  $J_{e\max}$  с ростом индукции магнитного поля смещается в сторону коротких разрядных промежутков, уменьшаясь по величине. С ростом же анодного напряжения его значение увеличивается. Максимальное значение ионной составляющей тока из отверстия приходится на различные значения  $I_{0.11}$ . Рост анодного напряжения при данных условиях приводит к росту максимального значения ионного тока  $J_{i\max}$  из отверстия в центре катода.

Ход экспериментальных зависимостей свидетельствует о том, что с ростом  $I_{0.11}$  радикально меняются структура и распределение пространственного заряда, а следовательно, и род потока заряженных частиц (рис. 4). Появление ВЧ-колебаний с изменением  $I_{0.11}$  говорит о переходе от стационарного к динамическому режиму горения разряда, когда достигается критическое значение плотности электронов в прианодном слое  $n_{кр}$ , которое зависит от  $B_{кр}$  согласно <sup>(10)</sup>:

$$n_{кр} = \frac{B_{кр}}{4mc^2},$$

где  $B_{кр}$  — значение индукции магнитного поля, при которой возникает неустойчивость;  $m$  — масса электрона;  $c$  — скорость света.

В нашем эксперименте  $n_{кр}$  в среднем равнялось  $(3-8) \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ , а по данным <sup>(10)</sup>  $n_{кр} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ .

Из приведенных зависимостей следует, что для возникновения неустойчивостей кроме физических параметров важную роль играет и относительная длина разрядного промежутка. Ход экспериментальных зависимостей  $\gamma = f(I_{0.11})$  показывает, что для широкого интервала физических параметров неустойчивое состояние возможно лишь для коротких разрядных промежутков. При больших относительных длинах разрядного промежутка в условиях эксперимента не было найдено какого-либо сочетания физических параметров, которое бы привело к неустойчивому режиму горения разряда. Это хорошо объясняется теорией диокотронных колебаний. Из сказанного следует, что для генерирования ВЧ-колебаний, создающих возможность получения потоков электронов из газоразрядного промежутка, в нем необходимо создать электрическое поле, средняя радиальная составляющая которого  $E_r$ , играющая основную роль в ионизационных процессах, сможет обеспечить интенсивную ионизацию разрядного промежутка. Это, в свою очередь, приведет к достижению критической плотности пространственного заряда в азимутально вращающемся прианодном слое, а следовательно, и к возникновению неустойчивости. Именно изменение относительной длины разрядного промежутка в горящем разряде и создает такое перераспределение компонентов  $E_r$  и  $E_z$  электрического поля <sup>(11)</sup>, при котором возможно выполнение вышеуказанных условий и объяснение всех наблюдаемых закономерностей.

Таким образом, изменение относительной длины разрядного промежутка приводит к коренной перестройке режимов горения разряда, определяемых перераспределением электрических полей по радиусу и по оси ячейки Пеннинга. Установлена область относительных длин  $(0,5 \div 6)$  разрядных промежутков, в которой развиваются неустойчивости. Выявилось, что контроль за ВЧ-колебаниями разрядного проме-

жутка может служить дополнительным удобным средством диагностики разряда без какого-либо искажения пространственного заряда. Найдено оптимальное значение относительной длины разрядного промежутка, при которой ячейки различных радиусов могут служить источником электронов. Подтверждается непосредственная связь между интенсивностью ВЧ-колебаний и выходом аномальных электронов. Максимальная величина электронных токов достигает 340 мкА.

Ереванский  
государственный университет  
Ереванский  
педагогический институт

Ո. Պ. ԲԱԲԵՐՑՅԱՆ, Է. Ս. ԲԱԴԱԼՅԱՆ, Գ. Ա. ԵԳՈԱԶԱՐՅԱՆ, Է. Ի. ՏԵՐ-ԴԵՎՈՐՅԱՆ

Փոփոխվող երկարությամբ պլեննինգի պարպման մեջ բարձր հանախային տատանումների զրգուման և նրանց կողմից անոմալ էլեկտրոնների էներգիայի վրա ունեցած ազդեցության մասին

Փորձնականորեն ցույց է տրված, որ պարպումային միջակայքի երկարության անընդհատ փոփոխումով կարելի է զրգոել բարձր հաճախային տատանումներ, որոնք ուղեկցվում են կատոդի կենտրոնից դուրս եկող անոմալ մեծ էներգիայով օժտված էլեկտրոններով:

Դա թույլ է տալիս սառը կատոդներով բջիջը օգտագործել որպես էլեկտրոնների աղբյուր:

#### ЛИТЕРАТУРА—ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> H. R. Kaufman, R. S. Robinson, AIAA Journal, v. 20 p. 745—760 (1982).
- <sup>2</sup> А. А. Куландин, С. В. Тимашев, Ю. С. Попов, Энергетические системы космических аппаратов. 2-е изд., Машиностроение, М., 1979.
- <sup>3</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Э. И. Тер-Геворкян, ЖТФ, т. 53, № 4, с. 665—669 (1983).
- <sup>4</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Э. И. Тер-Геворкян, ЖТФ, т. 49, № 7, с. 1445—1447 (1979).
- <sup>5</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Э. И. Тер-Геворкян, ЖТФ, т. 50, № 7, с. 1565—1567 (1980).
- <sup>6</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Э. И. Тер-Геворкян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, с. 60—64, 1983.
- <sup>7</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егiazарян, Э. И. Геворкян, Физика, Межвуз. сб. науч. тр., в. 5, с. 34—41 (1985).
- <sup>8</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егiazарян, Э. И. Тер-Геворкян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, с. 87—90, 1984.
- <sup>9</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егiazарян, Э. И. Тер-Геворкян, ЖТФ, т. 55, № 1, с. 73—78 (1985).
- <sup>10</sup> W. Knauper, Journ. Appl. Phys. v. 37, № 2, 602—611 (1966).
- <sup>11</sup> P. П. Баберцян, Э. С. Бадалян, Г. А. Егiazарян, Э. И. Тер-Геворкян, ЖТФ, т. 57, № 10, с. 2039—2049 (1987).