

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՆԴԵՍ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

1989

Том 88 № 4

Издается с января 1944 г.
Выходит 10 раз в год.

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկեա-
ծու (պատ. ֆաբրիկար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԴԱՐՐԻՆԼՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԽԱԼԱԼՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԱՐՁՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղա-
կալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ րդր.
անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵՂՈՒՄՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ րդր.
անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻ-
ՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ.
ՖԱՆԱՐԴՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Ա. Ա. Գրիգորյան—Մերումորֆ ֆունկցիաների ընդհանրացում 147
- Կ. Վ. Գասպարյան—Հրսպտեննցիալ մարտինգալների հավասարաչափ ինտեգրելիության բավարար պայմանները 150

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Լ. Ա. Մինասյան—Դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ ղեղում ջերմության պարբերական հոսքը 155

ԱՌԱՋԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Գ. Սահակյան—Անհամասեռ առաձգական միջավայրի վեկտորական ալիքային հավասարումը ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով 163

ՖԻԶԻԿԱ

- Ա. Կ. Ավետիսյան, Ա. Ս. Գունագուլյան, Հ. Լ. Մինասյան—Ինֆրակարմիր ճառագայթման միջդոնային բազմաֆոտոն կլանումը Շե-ում 168

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

- Լ. Ա. Զախարյան, Հ. Գ. Գալստյան, Մ. Կ. Վարդանյան, Ն. Տ. Գասպարյան—Ոսկրուղեղի րջիջներում վերակառուցված նուկլեոսոմների կազմում HVS-1 տիմիդինիկինազայի գենի էքսպրեսիան 173

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Պ. Կառապետյան—Ընդակեր քզեզների նոր տեսակ Հայկական հՍՀ-ից (Coleoptera, Bruchidae) 178

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Խ. Ա. Սալադյան, Ա. Վ. Չիլիյան—Կալցիումի հոմեոստազը ապահովող մեխանիզմների ձևաչափումը: Բջջի կալցիում-ոնզոլյատոր համակարգի ձևաչափումը 181
- Վ. Մ. Հաբուրյունյան, Գ. Ա. Գրիգորյան—Կալցիումի փոխանակության հորմոնալ կանոնավորման վիճակը պարբերական հիվանդության ժամանակ 185

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

- Դ. Խ. Գրիգորյան, Ա. Մ. Սողոմոնով, Ա. Ն. Հայրապետյան—Խիտինների կառավարող նյարդային րջիջների ֆարմակոլոգիական բնութագիրը 189

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- С. А. Григорян*—Обобщенные мероморфные функции 147
К. В. Гаспарян—Достаточные условия равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов 150

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- Р. С. Минасян*—Периодическое течение тепла в полном шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью 155

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. Г. Саакян*—Векторное волновое уравнение для неоднородной упругой среды через обобщенные потенциалы 163

ФИЗИКА

- С. К. Аветисян, С. С. Данагулян, Г. Р. Минасян*—Межзонное многофотонное поглощение инфракрасного излучения в Ge 168

БИОХИМИЯ

- Р. А. Захарян, Г. Г. Галстян, М. К. Варданян, Н. Т. Гаспарян*—Экспрессия гена тимидинкиназы HSV—1 в составе реконструированных нуклеосом в клетках костного мозга 173

ЭНТОМОЛОГИЯ

- А. П. Карапетян*—Новый вид жуков зерновок из Армянской ССР (*Coleoptera, Bruchidae*) 178

МЕДИЦИНА

- Х. С. Саядян, А. В. Зильфян*—Эволюция механизмов, обеспечивающих кальцевый гомеостаз. Эволюция кальцийрегулирующей системы клетки 181
В. М. Арутюнян, Г. А. Григорян—Состояние гормональной регуляции кальциевого обмена при периодической болезни 185

ФИЗИОЛОГИЯ

- Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг, С. Н. Айрапетян*—К фармакологической характеристике командных нейронов оборонительного поведения виноградной улитки 189

C O N T E N T S

MATHEMATICS

S. A. Grigorian—Generalized meromorphic functions 147

K. V. Gasparian—Sufficient conditions for uniform integrability of exponential semimartingales 150

APPLIED MATHEMATICS

R. S. Minasian—Periodic heat flow in a hollow ball, filled by good mixed liquid 155

THEORY OF ELASTICITY

S. G. Sahakian—Vector wave equation for the nonhomogeneous elastic medium by generalized potentials 163

PHYSICS

S. K. Avetisyan, S. S. Danagullian, H. R. Minasian—Interband multiphoton absorption of infrared radiation in Ge. 168

BIOCHEMISTRY

R. A. Zakharian, H. G. Galstian, M. K. Vardanian, N. T. Gasparian—Expression of HSV-1 tk gene reconstructed in nucleosomes into bone marrow cells 173

ENTOMOLOGY

A. P. Karapetian—A new species of Bruchidae from the Armenian SSR (Coleoptera, Bruchidae) 178

MEDICINE

Kh. S. Sayadian, A. V. Zilflun—The evolution of mechanisms, security of calcium homeostasis. The evolution of cell Ca-regulatory system 181

V. M. Haroutyunian, G. A. Grigorian—The state of calcic exchange hormonal regulation in periodic disease 185

PHYSIOLOGY

G. E. Grigorian, A. M. Stolberg, S. N. Halrapettian—On the pharmacological characteristic of command neurons of defensive behavior of snale . . . 189

Техн. редактор Азизбеяч Л. 4.

Сдано в набор 10.05.89. Подписано к печати 04.08.89. ВФ 02286

Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 2, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0.
Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет.-изд. л. 3,4. Тираж 530. Заказ № 671.

Издана № 7618. Цена 55 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ISSN 0321-1334 Доклады Академии наук Армянской ССР 1989, т. 88, № 1, 145-192

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Обобщенные мерморфные функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1988)

1. Пусть Γ — подгруппа группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенная дискретной топологией, и G — компактная группа, являющаяся группой характеров группы Γ . На локально-компактном пространстве Ω , полученном из декартова произведения $G \times [0, 1)$ путем отождествления в точку слоя $(i \times \{0\})$, рассмотрим систему функций

$$\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}, \quad \Gamma_+ = \{a \in \Gamma; a \geq 0\}; \quad \varphi^a(x \cdot r) = x(a) \cdot r^a.$$

Определение 1 Пусть D — открытое множество в Ω и f — непрерывная функция на D . Будем говорить, что f — обобщенно-аналитическая функция или просто аналитическая функция на D , если f локально на D аппроксимируется линейными комбинациями функций из $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$.

Обозначим через A равномерную алгебру на Ω , порожденную функциями из $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$. Эта алгебра обладает многими свойствами, присущими диск-алгебре. В частности, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, A — диск-алгебра.

Определение 2. Замкнутое в Ω множество E называется множеством интерполяции для A , если сужение A на E совпадает с $C(E)$.

Напомним, что $C(E)$ — банахова алгебра в $\sup$ -норме.

Пусть $\rho(s_1, s_2) = \sup_{\substack{f \in A \\ \|f\|=1}} |f(s_1) - f(s_2)|$ — метрика Глисона на Ω .

Теорема 1. Для замкнутого подмножества E в $\Omega \setminus \{*\}$, где $\{*\} = G \times \{0\}$, следующие условия эквивалентны:

- а) E — множество интерполяции для A ;
- б) существует $\delta > 0$ такое, что $\rho(s_1, s_2) > \delta$ для всех $s_1, s_2 \in E$, $s_1 \neq s_2$;

в) сужение A на E является замкнутой подалгеброй в $C(E)$.

Отметим, что не каждое интерполяционное множество является множеством нулей некоторой функции из A . С другой стороны, нули функций из A не всегда образуют интерполяционное множество.

Теорема 2. Пусть $E(f) = \{s \in \Omega, f(s) = 0\}$ содержится в $\Omega \setminus \{*\}$ для некоторого $f \in A$. Тогда

$$E(f) = \bigcup_{i=1}^n E_i,$$

где каждое E_i является множеством интерполяции.

Определение 3. Множество E , $E \subset \Omega$, назовем тонким, если для любого $s \in E$ найдутся окрестность $U \subset \Omega$ и аналитическая на U функция f такие, что множество $E \cap U$ совпадает с множеством нулей функции f на U .

Если D — открытое множество в Ω и f — ограниченная аналитическая функция на $D \setminus E$, где E — тонкое множество, то f аналитически продолжается на все D , т. е. существует аналитическая на D функция, совпадающая с f на $D \setminus E$ (см. (1)).

Определение 4. Пусть D — открытое множество в Ω . Функцию f назовем мероморфной на D , если

а) эта функция обобщенно аналитическая на $D \setminus E$, где E — некоторое тонкое множество;

б) функция f не продолжается аналитически ни в одну точку множества E ;

в) для каждой точки $s \in E$ существует окрестность U_s и обобщенно аналитическая на U_s функция g_s , $g_s \neq 0$, такая, что функция $1/g_s$ аналитически продолжается на все U_s .

У мероморфной в D функции кроме нулей и полюсов могут быть и существенно особые точки, которые образуют нигде не плотное подмножество тонкого множества.

Теорема 3. Пусть f — мероморфная функция на Ω . Тогда найдется обобщенно-аналитическая в Ω функция g , $g \neq 0$, такая что $f \cdot g$ аналитически продолжается на Ω .

В доказательстве этого результата существенно используются теоремы 1 и 2.

2 Пусть $K = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ — полуплоскость, и A^0 — алгебра всех равномерно почти-периодических аналитических функций на K . Как хорошо известно, каждую функцию $f \in A^0$ формально можно представить в виде $f(z) \sim \sum_{a \geq 0} c(a) e^{iaz}$, $c(a) \in \mathbb{C}$.

Алгебра A^0 равномерно замкнута на K и, как показали Р. Аренс и И. Зингер (см. (2)), изометрически изоморфна равномерной алгебре A на $\bar{\Omega}$, порожденной функциями $\{e^{ia}\}_{a \in \mathbb{R}}$. (G в этом случае является компактификацией Бора вещественной прямой $\mathbb{R}$). Этот факт можно проследить и из следующих соображений.

Рассмотрим A^* — сопряженное пространство к A^0 . Очевидно, K естественно вкладывается в A^* , и поэтому будем считать, что $K \subset A^*$. Пусть $\bar{K}$ — слабо*-замыкание K в A^* . Тогда $\bar{K}$ — компакт (так как K содержится в единичном шаре A^*) и существует гомеоморфизм между $\bar{K}$ и пространством $\bar{\Omega} = G \times [0, 1] / G \times \{0\}$. Этот гомеоморфизм порождает изометрический автоморфизм между A^0 и A .

Для некоторого множества E , $E \subset K \subset A^*$, положим $E_k = E \cap K$. Скажем, что E является множеством интерполяции для A^0 , если сужение $A|_E$ изометрически (в равномерной на E норме) изоморфно пространству $C(X)$ всех непрерывных функций на некотором компакте X . Другими словами, сужение A^0 на E (рассматривая A^0 как подпространство A^{**}), совпадает с $C(E)$.

Теорема 4. Пусть для некоторых c и d ($0 < c < d < \infty$) E со-

держится в $|c, d| = \{z \in \mathbb{C}; c \leq \operatorname{Im} z < d\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) E — множество интерполяции;
- б) существует $\delta > 0$ такое, что для любых $z_1, z_2 \in E$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1 - z_2| > \delta$;

в) сужение A на E замкнуто в равномерной на E норме.

Теорема 5. Пусть $E \subset |c, d|$, $0 < c < d < \infty$. Для того чтобы существовала функция $f \in A^0$, $f \neq 0$, такая, что $f|_E = 0$, необходимо и достаточно, чтобы E_n можно было представить в виде объединения конечного числа множеств интерполяции.

Теорема 6. f — мероморфная функция на $\operatorname{int} K$. Предположим, что существует такое конечное покрытие $\operatorname{int} K$ полосами $|c_i, d_i|$, $1 \leq i \leq n$, что на каждом $|c_i, d_i|$ существует почти-периодическая функция g_i такая, что $f \cdot g_i$ расширяется на $|c_i, d_i|$ до почти-периодической аналитической функции. Тогда найдется почти-периодическая аналитическая в $\operatorname{int} K$ функция g , такая что $f \cdot g$ расширяется до почти-периодической аналитической в $\operatorname{int} K$ функции.

Институт математики Академии наук,
Армянской ССР

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների ընդհանրացում

Դիցուք Γ — իրական թվերի խմբի որոշ նիթախումբն է, G -ն Γ խմբի համալուծ խումբն է, իսկ $\Omega = G \times [0, \infty) / G \times \{0\}$ կամայական $a \in \Gamma$, $a \geq 0$ համապատասխանում է $\varphi^a(a+r) = a(a)r^a$ անընդհատ ֆունկցիա Ω լոկալ կոմպակտ տարածություն վրա: Նշված φ_a ֆունկցիաների դժային կոմպակտացիաները կոչվում են բազմանդամներ: Ուն ֆունկցիաները, որոնք լոկալ մոտարկվում են բազմանդամներով, կոչվում են ընդհանրացված, իսկ ընդհանրացված ֆունկցիաների հարաբերությունները՝ մերոմորֆ:

Ստացված արդյունքները նկարագրում են ընդհանրացված ֆունկցիաների ինտերպոլյացիոն բազմությունները:

Մանուցվում է, Վայերշտրասի թեորեմի ընդհանրացում:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 С. А. Григорян, ДАН АрмССР, т. 71 № 2 (1980).
- 2 R. Arens, I. Singer T.A.M.S., v 81, № 2, p. 379–383 (1950).

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

К. В. Гаспарин

Достаточные условия равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 24/1 1989)

В данной заметке получены достаточные, близкие к неулучшаемым условия равномерной интегрируемости экспоненциальных опциональных мартингалов. При «обычных» предположениях условия такого типа получены ранее А. А. Новиковым (¹, ²) и Д. Лепинглем, Ж. Мемэном (³).

Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с произвольной фильтрацией $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Рассматриваемые здесь мартингалы считаются опционально измеримыми *l'aglad* процессами (⁴).

Рассмотрим уравнение Долеан

$$Z_t = 1 + \int_{[0,t]} Z_{s-} dM_s^c + \int_{[0,t]} Z_s dM_{s+}^g, \quad (1)$$

где $M^c = M^c + M^d$, M^c и $M^d(M^g)$ — непрерывная и чисто разрывная *cadlag*(*caglad*) составляющие заданного локального мартингала $M \in \mathcal{M}_{loc}$ ($M = M^c + M^g$). Единственное (с точностью до неотличимости) решение $Z = \varepsilon(M)$ уравнения (1) задается формулой (см. (⁵))

$$\varepsilon(M)_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t + \sum_{i=1,2} [\ln(1+u) - u] * \mu_t^i \right\},$$

где $\langle M^c \rangle$ — квадратическая характеристика $M^c \in \mathcal{M}_{loc}^c$, $\mu^1(ds, du)$ и $\mu^2(ds, du)$ — целочисленные случайные меры на пространстве $(R_+ \times E, B(R_+) \times B(E))$, $E = R^1 \setminus \{0\}$, порожденные скачками вида $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$ и $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, $s \geq 0$, соответственно.

Теорема 1. Пусть $M \in \mathcal{M}_{loc}$. Тогда $\varepsilon(M)$ — равномерно интегрируемый мартингал, если

а) при $\Delta M \geq -1$, $\Delta^+ M \geq -1$ возрастающий процесс

$$C_t = \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_{t \wedge T} + \sum_{i=1,2} [(1+u)\ln(1+u) - u] * \mu_{t \wedge T}^i -$$

локально интегрируемый ($C \in \mathcal{A}_{loc}^+$) и

$$E \exp \tilde{C}_T < \infty, \quad (2)$$

где $T = \inf\{t : \Delta M_t = -1 \text{ или } \Delta^+ M_t = -1\}$, а $\tilde{C}$ — компенсатор процесса C (см. (⁵));

6) при $\Delta M > -1$, $\Delta^+ M > -1$

$$E \exp A_\infty < \infty, \quad (3)$$

$$\text{где } A_t = \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t + \sum_{i=1,2} \left[\ln(1+u) - \frac{u}{1+u} \right] * \mu_t^i.$$

Для доказательства пункта а) теоремы 1 приведем ряд лемм.

Лемма 1. При выполнении условия (2) имеем $M \in H_T^+$ и $\varepsilon(M)_{T-} > 0$ P -п. н. ($H_T^+ = \{M \in \mathcal{H}_{\text{loc}} : E[M, M]_{\frac{1}{2}}^T < \infty\}$).

Доказательство. Из элементарных неравенств и условия (2) имеем

$$\begin{aligned} E[M, M]_{\frac{1}{2}}^T &\leq [E(\langle M^c \rangle_T + \sum_{i=1,2} I_{|u| \leq 1} u^2 * \mu_T^i)]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ E \sum_{i=1,2} I_{|u| > 1} u * \mu_T^i \leq [E(\langle M^c \rangle_T + 6 \sum_{i=1,2} I_{|u| \leq 1} [(1+u) \ln(1+u) - \\ &- u] * \mu_T^i)]^{\frac{1}{2}} + 3E \sum_{i=1,2} I_{|u| > 1} [(1+u) \ln(1+u) - u] * \mu_T^i < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что $E|\Delta M_S|/I_{S \leq \lambda} < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|/I_{U \leq \lambda} < \infty$ для всех $S \leq T$, $U \leq T$, т. е. $M_{T-} < \infty$ P -п. н. (ср. (6)). Отсюда следует, что $\varepsilon(M)_{T-} > 0$ P -п. н.

Лемма 2. Пусть $0 < \lambda < 1$ и процесс $C \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$. Тогда процесс $G = \varepsilon^\lambda(M) \exp(1-\lambda) \bar{C}$ — локальный субмартингал.

Доказательство. В работе (7) доказано, что

$$\varepsilon^\lambda(M) = \varepsilon(\bar{N}_\lambda + \bar{A}_\lambda) = \varepsilon(\bar{N}_\lambda) \varepsilon(\bar{A}_\lambda), \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{N}_\lambda = \lambda M + \sum_{i=1,2} (V^i - \bar{V}^i), \quad V^i = [(1+u)^i - 1 - \lambda u] * (\mu^i)^T,$$

$$\bar{A}_\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle M^c \rangle_T + \sum_{i=1,2} \bar{V}^i, \quad \bar{N}_\lambda = (1 + \Delta \bar{A}_\lambda)^{-1} \cdot \bar{N}_\lambda^* + (1 + \Delta^+ \bar{A}_\lambda)^{-1} \cdot \bar{N}_\lambda^*,$$

$$\bar{N}_\lambda = \bar{N}_\lambda^* + \bar{N}_\lambda^* (\Delta \bar{A}_\lambda > -1, \Delta^+ \bar{A}_\lambda > -1),$$

Кроме того имеем

$$\varepsilon^\lambda(M) = 1 + \varepsilon^\lambda(M)_- \cdot (\bar{N}_\lambda^* + \bar{A}_\lambda^*) + \varepsilon^\lambda(M) \cdot (\bar{N}_\lambda^* + \bar{A}_\lambda^*),$$

$$\exp(1-\lambda) \bar{C} = 1 + (1-\lambda) [\exp(1-\lambda) \bar{C}_-] \cdot \bar{C}^* + [\exp(1-\lambda) \bar{C}] \cdot \bar{C}^*,$$

$$\text{где } \bar{A}_\lambda = \bar{A}_\lambda^* + \bar{A}_\lambda^*, \quad \bar{C} = \bar{C}^* + \bar{C}^*.$$

Отсюда, применяя формулу Ито (4), получим

$$\begin{aligned} G &= 1 + G_- \cdot [\bar{N}_\lambda^* + \bar{A}_\lambda^* + (1-\lambda) \bar{C}^*] + G \cdot [\bar{N}_\lambda^* + \bar{A}_\lambda^* + (1-\lambda) \bar{C}^*] + \\ &+ S'[\Delta G - (\Delta \varepsilon^\lambda(M)) \exp(1-\lambda) \bar{C}_- - \varepsilon^\lambda(M)_- \Delta \exp(1-\lambda) \bar{C}] + \\ &+ S''[\Delta^+ G - (\Delta^+ \varepsilon^\lambda(M)) \exp(1-\lambda) \bar{C} - \varepsilon^\lambda(M) \Delta^+ \exp(1-\lambda) \bar{C}], \end{aligned}$$

$$\text{где } S'[X] = \sum_{s \in \mathcal{S}} X_s, \quad S''[X] = \sum_{s \in \mathcal{S}} X_s.$$

Далее, после несложных преобразований, получим

$$G = 1 + G_- \cdot \{\bar{N}_\lambda + (\bar{V}^1 - V^1) + (1-\lambda)(\bar{C}^d - C^d) + (1-\lambda)[M^d, \bar{C}^d]\} + \\ + G \cdot \{\bar{N}_\lambda + (\bar{V}^2 - V^2) + (1-\lambda)(\bar{C}^e - C^e) + (1-\lambda)[M^e, \bar{C}^e]\} + \\ + G_- \cdot \left\{ \frac{(\lambda-1)^2}{2} \langle M^e \rangle^T + S'[L(1 + \Delta M, \Delta \bar{C})] \right\} + G \cdot S''[L(1 + \Delta^* M, \Delta^* \bar{C})].$$

где $L(x, y) = x^\lambda \exp(1-\lambda)y - x + (1-\lambda)x \ln x - (1-\lambda)xy \geq 0$

$\forall x, y \in R_+$. Отсюда так как $[M^d, \bar{C}^d] \in \mathcal{M}_{loc}$ и $[M^e, \bar{C}^e] \in \mathcal{M}_{loc}$ (см. (5)), имеем $G = m + D$, где $m \in \mathcal{M}_{loc}$, D — возрастающий процесс. Но $\exp(1-\lambda)\bar{C} \in \mathcal{P}_s \cap \mathcal{V}$ — сильно предсказуемый процесс ограниченной вариации — локально ограничен (5). Кроме того, так как процесс $\varepsilon^1(M)$ — неотрицательный супермартингал, то $G \in \mathcal{A}_{loc}$. Значит, процесс $D \in \mathcal{A}_{loc}^+$ и G — локальный субмартингал (см. (9)).

Лемма 3. Пусть $0 < \lambda < 1$ и процесс $C \in \mathcal{A}_{loc}^+$ удовлетворяет условию (2). Тогда имеет место неравенство

$$\varepsilon^\lambda(M) \leq \varepsilon(\bar{N}_\lambda) \leq \varepsilon^1(M) \exp(1-\lambda)\bar{C}. \quad (5)$$

Доказательство. В разложении (4) $\varepsilon(\bar{A}_\lambda)$ — невозрастающий процесс с $\varepsilon(\bar{A}_\lambda)_0 = 1$ (см. (1)). Отсюда следует, что $\varepsilon(\bar{N}_\lambda) \geq \varepsilon^\lambda(M)$. С другой стороны, имеем $G = \varepsilon(\bar{N}_\lambda)\bar{F}$, где $\bar{F} = \varepsilon(\bar{A}_\lambda) \exp(1-\lambda)\bar{C} \in \mathcal{P}_s \cap \mathcal{V}$. Тогда, применяя формулу Ито (4), получим $G = \varepsilon(\bar{N}_\lambda)_- \cdot \bar{F} + \varepsilon(\bar{N}_\lambda) \cdot \bar{F}^e + \bar{F} \cdot \varepsilon(\bar{N}_\lambda)^e + \bar{F}_- \cdot \varepsilon(\bar{N}_\lambda)^e$, ($\bar{F} = \bar{F}^e + \bar{F}^e$). Отсюда, в силу единственности разложения Дуба — Мейера (9) для локального субмартингала G и из того, что $\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_- > 0$ на $[0, T]$ и $\varepsilon(\bar{N}_\lambda) > 0$ на $[0, T]$ (см. (4) и лемму 1) заключаем, что $\bar{F}$ — возрастающий процесс. Однако, так как $\Delta \bar{A}_\lambda > -1$ и $\Delta^* \bar{A}_\lambda > -1$ (1), т. е. $\varepsilon(\bar{A}_\lambda) > 0$, то согласно (4) имеем $\varepsilon(\bar{N}_\lambda) = 0$ на $[T, \infty]$ и неравенство $G \geq \varepsilon(\bar{N}_\lambda)$ справедливо на R_+ .

Лемма 4. Пусть $0 < \lambda < 1$ и процесс $C \in \mathcal{A}_{loc}^+$ удовлетворяет условию (2). Тогда процесс $\varepsilon(\bar{N}_\lambda)$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Доказательство. Положим $S_n = \inf\{t : \bar{C}_t \geq n\}$. Очевидно $(S_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ (F -м. о.), $S_n \uparrow \infty$ P -п. н. Пусть $(U_m, \varepsilon^m)_{m \geq 1}$ — локализуящая последовательность для $\varepsilon(\bar{N}_\lambda)$ (т. е. $U_m \in \mathcal{F}_+$ (F_+ -м. о.), $U_m \uparrow \infty$ P -п. н. при $m \uparrow \infty$, $\varepsilon^m \in \mathcal{M}(F)$ (F -мартингал) и $\varepsilon(\bar{N}_\lambda) = \varepsilon^m$ на $[0, U_m]$ $\forall m \geq 1$). Тогда $\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_+ = \varepsilon_+^m$ на $[0, U_m]$ $\forall m \geq 1$ и $\varepsilon_+^m \in \mathcal{M}(F_+)$.

Имеет место очевидное равенство

$$1 = E\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{S_n \wedge U_m} = E\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{S_n} + I_{S_n \leq U_m} + E\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{U_m} + I_{U_m < S_n}. \quad (6)$$

Согласно (5) имеем $\sup_m E[\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{U_m} + I_{U_m < S_n}]^{\frac{1}{\lambda}} \leq \exp n \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$, так как $\varepsilon(M)_- = F_+$ -супермартингал и $E\varepsilon(M)_{U_m} \leq 1$. Отсюда при $\lambda < 1$ последовательность $(\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{U_m} + I_{U_m < S_n})_{m \geq 1}$ равномерно интегрируема при фиксированном $n \geq 1$. Далее, используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости для $(\varepsilon(\bar{N}_\lambda)_{S_n} + I_{S_n \leq U_m})_{m \geq 1}$, получим из (6) при

$n \uparrow \infty \quad 1 = E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}} I_{S_n < \infty} + E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_n} I_{S_n = \infty} = E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}}.$ Отсюда имеем

$$E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_\infty = E[\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_\infty - \varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}}] + 1 \geq 1 - E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}} I_{S_n < \infty}. \quad (7)$$

Применяя далее (5) и неравенство Гельдера, получим $E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}} I_{S_n < \infty} \leq [E\varepsilon(M)_{S_{n+}}]^\lambda [EI_{S_n < \infty} \exp C_{S_{n+}}]^{1-\lambda} \leq [EI_{S_n < \infty} \exp C_\infty]^{1-\lambda} < \infty$. Отсюда, согласно условной леммы, $E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{S_{n+}} I_{S_n < \infty} \rightarrow 0$ при $n \uparrow \infty$.

Таким образом из (7) окончательно имеем $E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_\infty \geq 1$, т. е. $E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_\infty = 1$.

Доказательство теоремы 1, а). Положим $\tilde{M} = \ln \varepsilon(M) - \bar{C}$ (считаем $\ln 0 = -\infty$) и $V_n = \ln \{t : \tilde{M}_{t+} \leq -n\}$, $(V_n)_{n \geq 1} \subset \bar{\mathcal{T}}_+$, $V_n \uparrow \infty$ P -п. н. Согласно (5), имеем $\varepsilon(\tilde{N}_\lambda) \leq \exp(\lambda \tilde{M} + \bar{C})$ ($\varepsilon(\tilde{N}_\lambda) \leq \varepsilon(M) \exp(1 - \lambda) \tilde{M}$). Отсюда получим $\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{V_{n+}} \leq I_{V_n < \infty} \exp(C_{V_{n+}} - \lambda n) + I_{V_n = \infty} \varepsilon(M)_{V_{n+}} \exp(1 - \lambda)n \leq \exp \bar{C}_\infty + \varepsilon(M)_\infty \exp n$.

Таким образом последовательность $\{\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{V_{n+}}\}_{0 < \lambda < 1}$ при фиксированном $n \geq 1$, равномерно интегрируема по λ . С другой стороны из (5) имеем $\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{V_{n+}} \rightarrow \varepsilon(M)_{V_{n+}}$ P -п. н. при $\lambda \uparrow 1$, т. е. сходимость имеет место и в L^1 . Но т. к. $E\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)_{V_{n+}} = 1$ (лемма 4), то $E\varepsilon(M)_{V_{n+}} = 1$ и справедливо неравенство

$$E\varepsilon(M)_\infty = E[\varepsilon(M)_\infty - \varepsilon(M)_{V_{n+}}] I_{V_n < \infty} + 1 \geq 1 - E\varepsilon(M)_{V_{n+}} I_{V_n < \infty} \quad (8)$$

Но т. к. $E\varepsilon(M)_{V_{n+}} I_{V_n < \infty} \leq \exp(-n) E \exp \bar{C}_\infty$, то из (8) при $n \uparrow \infty$ получим $E\varepsilon(M)_\infty \geq 1$, т. е. $E\varepsilon(M)_\infty = 1$.

Доказательство теоремы 1, б). Рассмотрим процесс $\varepsilon(\lambda M) \in \mathcal{M}_{loc}$ ($0 < \lambda < 1$). Из очевидных равенств

$$\varepsilon^\lambda(M) = \exp\left(\lambda M - \frac{\lambda^2}{2} \langle M^c \rangle\right) \exp\left\{\lambda \sum_{i=1,2} [\ln(1+u) - u] \cdot \bar{\nu}^i\right\},$$

$$\varepsilon(\lambda M) = \exp\left(\lambda M - \frac{\lambda^2}{2} \langle M^c \rangle\right) \exp\left\{\sum_{i=1,2} [\ln(1+\lambda u) - \lambda u] \cdot \bar{\nu}^i\right\}$$

и из элементарного неравенства ($u > -1$)

$$\lambda \ln(1+u) \leq \ln(1+\lambda u) \leq \ln(1+u) - (1-\lambda) \frac{u}{1+u}$$

имеем

$$\varepsilon^\lambda(M) \leq \varepsilon(\lambda M) \leq \varepsilon^\lambda(M) \exp(1-\lambda)A. \quad (9)$$

Неравенство (9) есть аналог неравенства (5) для процесса $\varepsilon(\lambda M)$. Доказательство теоремы получится теперь заменой в лемме 4 процессов $\varepsilon(\tilde{N}_\lambda)$ на $\varepsilon(\lambda M)$, $\bar{C}$ на A и соответствующим изменением доказательства в теореме 1, а).

Теорема 2. Пусть $N \in \mathcal{M}_{loc}$, $z^1 \in \mathcal{D}(F) \times B(E)$, $z^2 \in \mathcal{C}(F) \times B(E)$ так, что $I_{z^1 < -1} z^1 \cdot \bar{\nu}_\alpha^1 < \infty$ P -п. н. $\forall t \in \mathbb{R}$, и

$$E \exp\left\{\frac{1}{2} \langle N \rangle_\infty + \sum_{i=1,2} (z^i \exp z^i - \exp z^i + 1) \cdot \bar{\nu}_\alpha^i\right\} < \infty,$$

где $\bar{\mu}^1$ и $\bar{\mu}^2$ — квазинепрерывные слева $\mathcal{G}(F)$ и $\mathcal{G}(F_+)$ -измеримые, соответственно, целочисленные меры с непрерывными компенсаторами $\bar{\nu}^1$ и $\bar{\nu}^2$ (см. (3)). Тогда процесс

$$\alpha = \exp \left\{ N - \frac{1}{2} \langle N \rangle + \sum_{l=1,2} \left[I_{|z^l| > 1} z^l * \bar{\mu}^l + I_{|z^l| \leq 1} z^l * (\bar{\mu}^l - \bar{\nu}^l) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\exp z^l - I_{|z^l| \leq 1} z^l - 1) * \bar{\nu}^l \right] \right\} =$$

равномерно интегрируемый мартингал.

Доказательство теоремы 2 получается применением теоремы 1, б) к локальному мартингалу $M = N + \sum_{l=1,2} (\exp z^l - 1) * (\bar{\mu}^l - \bar{\nu}^l)$, учитывая, что $\alpha = \varepsilon(M)$ (см. (10)).

З а м е ч а н и е. На примере пуассоновского мартингала (см. (2)) можно показать, что условия (2) и (3) неулучшаемы в том смысле, что из условий $E \exp(1 - \varepsilon) \bar{C} < \infty$ и $E \exp(1 - \varepsilon) A < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ не следует равномерная интегрируемость экспоненты $\varepsilon(M)$ (см. (10)).

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Էֆսպոնենցիալ մարտինգալների հավասարաչափ ինտեգրելիության
բավարար պայմանները

Հոդվածում ստացված են օպցիոնալ լոկալ մարտինգալի Դոլեանի էքսպոնենցիալ հավասարաչափ ինտեգրելիության բավարար պայմանները, որոնք մոտ են անլավացնելիներին:

Լրիվ հավանական տարածության վրա տրված ֆիլտրացիան ենթադրվում է կամայական:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒՆ

- ¹ А. А. Новиков, Теория вероятностей и ее применения, т. 17. № 4 (1972).
² А. А. Новиков, Теория вероятностей и ее применения, т. 20. № 1 (1975). ³ D. Lepingle, J. Memln, Z. Wahrsch. verw. Geb., Bd. 42 (1978). ⁴ Л. И. Гальчук, Мат. сб., т. 112 (154), № 4(8) (1980). ⁵ Л. И. Гальчук, Теория вероятностей и ее примен., т. 29, № 1 (1984). ⁶ Р. Ш. Липцер, А. И. Ширяев, Теория мартингалов, Наука, М., 1986. ⁷ К. В. Гаспарян, ДАН АрмССР, т. 86. № 2 (1988). ⁸ К. В. Гаспарян, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, т. 15 (1988). ⁹ Л. И. Гальчук, Мат. сб., т. 115 (157), № 2(6) (1981). ¹⁰ К. В. Гаспарян, Канд. дис., Ереван, 1988.

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

**Периодическое течение тепла в полном шаре,
 заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсисяном 7/II 1989)

1. *Постановка задачи и построение решения.* В работе рассматривается задача периодического течения тепла в полном шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью, когда на внешней поверхности сферы происходит теплообмен по закону Ньютона совместно с излучением. Предполагаем, что внутри сферического тела и в жидкости действуют источники тепла с периодически изменяющейся интенсивностью. Функция распределения температуры $U(r, t)$ в сферической области ($R_1 < r < R_2$) удовлетворяет уравнению ⁽¹⁾

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{c\rho} w(r, t), \quad (1.1)$$

условиям на поверхности контакта с хорошо перемешиваемой жидкостью ⁽²⁾ и на внешней поверхности ^(3, 4), а также условию периодичности

$$-4\lambda\pi R_1^2 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + M_1 c_1 \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} - Q(t) = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = h[S(t) - U(R_2, t)] + \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda} [S^4(t) - U^4(R_2, t)]; \quad U(r, t+\theta) = U(r, t).$$

Здесь $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности сферы, λ —

коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — теплоемкость, $w(r, t)$ — интенсивность источника тепла, M_1, c_1 — соответственно масса жидкости и ее теплоемкость, $Q(t)$ — количество выделяемого в жидкость тепла в единицу времени, h — коэффициент теплообмена, $S(t)$ — температура окружающей среды, ε — степень черноты поверхности, σ — постоянная Стефана — Больцмана, равная ⁽⁵⁾ $\sigma = 5,775 \cdot 10^{-12}$ Вт/см²град⁴, θ — период изменения $U(r, t)$. Относительно функции $S(t)$ предполагаем, что она непрерывна и обладает производной с ограниченной вариацией в интервале $(0, \theta)$, а $w(r, t)$ и $Q(t)$ имеют ограниченную вариацию. Применяя к $U(r, t)$ конечное комплексное преобразование Фурье по времени t , для изображения функции $U(r, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$i\gamma_k U_k(r) = a \left[U_k'(r) + \frac{2}{r} U_k(r) \right] + \frac{1}{c\rho} w_k(r), \quad (1.3)$$

где $U_k(r) = \int_0^{\theta} U(r, t) \exp(-i\gamma_k t) dt$; $w_k(r) = \int_0^{\theta} w(r, t) \exp(-i\gamma_k t) dt$; $\gamma_k = \frac{2k\pi}{\theta}$. Согласно формуле обращения, $U(r, t) = \frac{1}{\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(r) \exp(i\gamma_k t)$.

Решая уравнение (1.3) и удовлетворяя первому из условий (1.2), получим

$$U_k(r) = \frac{1}{r D_k(R_2)} \left\{ D_k(r) \left[R_2 C_k + \frac{1}{i\beta_k} \int_r^{R_1} r_1 w_k(r_1) \operatorname{sh} \beta_k (R_2 - r_1) dr_1 \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \beta_k (R_2 - r) \left[\frac{1}{i\beta_k} \int_r^r r_1 w_k(r_1) D_k(r_1) dr_1 + Q_k \right] \right\} \quad (1.4)$$

$$U_0(r) = C_0 + \frac{1}{i r R_2} \left[r \int_r^{R_2} r_1 (R_2 - r_1) w_0(r_1) dr_1 + (R_2 - r) \left(\int_{R_1}^r r_1^2 w_0(r_1) dr_1 + \frac{Q_0}{4\pi} \right) \right].$$

Здесь $D_k(r) = 4i\pi\beta_k R_1 \operatorname{ch} \beta_k (r - R_1) + \left(4i\pi + \frac{i\gamma_k M_1 c_1}{R_1} \right) \operatorname{sh} \beta_k (r - R_1)$; $Q_k =$

$$= \int_0^{\theta} Q(t) \exp(-i\gamma_k t) dt; \quad \beta_k = \sqrt{\frac{i\gamma_k}{a}}.$$

Прежде чем удовлетворить второму из условий (1.2), обозначим $\int_0^{\theta} U^2(R_2, t) \exp(-i\gamma_k t) dt = N_k$. Выполняя второе из условий (1.2), будем иметь

$$C_k \left[R_2 D_k(R_2) + (hR_2 - 1) D_k(R_2) \right] = R_2 D_k(R_2) \left[-\frac{\varepsilon\sigma}{\theta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} N_j N_{k-j} + \right. \\ \left. + \int_0^{\theta} \left(hS(t) + \frac{\varepsilon\sigma}{i} S^4(t) \right) \exp(-i\gamma_k t) dt \right] + \frac{1}{i} \int_{R_1}^{R_2} r w_k(r) D_k(r) dr + \beta_k Q_k; \quad C_0 h =$$

$$= -\frac{\varepsilon\sigma}{\theta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} N_j N_{-j} + \int_0^{\theta} \left[hS(t) + \frac{\varepsilon\sigma}{i} S^4(t) \right] dt + \frac{1}{i R_2^2} \left[\int_{R_1}^{R_2} r^2 w_0(r) dr + \frac{Q_0}{4\pi} \right]. \quad (1.5)$$

В свою очередь, N_k определяются из следующих уравнений:

$$N_k = \frac{1}{\theta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j C_{k-j} \quad (1.6)$$

Таким образом, для определения C_k и N_k получили совокупность бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений (1.5) и (1.6). Перед тем, как исследовать эти системы, получим условия разрешимости одного класса систем нелинейных алгебраических уравнений.

2. К решению одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений. Пусть имеем бесконечную систему

$$m_k = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} m_j m_l + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{k,j} m_j + p_k. \quad (2.1)$$

Рассмотрим, наряду с (2.1), мажорантную систему

$$M_k = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j M_l + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j + P_k, \quad (2.2)$$

$$\text{где } |a_{k,j,l}| \leq a_{k,j,l}; \quad |\beta_{k,j}| \leq b_{k,j}; \quad |p_k| \leq P_k. \quad (2.3)$$

Известно (⁶), что если система (2.2) имеет неотрицательное решение M_k , то система (2.1) имеет решение m_k^* (главное, т. е. решение, полученное методом последовательных приближений, начиная от нулевых значений), удовлетворяющее условию $|m_k^*| \leq M_k$, а если M_k^* есть главное решение системы (2.2), то решение m_k системы (2.1), удовлетворяющее условию $|m_k| \leq M_k^*$, единственно. Перейдем к условиям существования неотрицательного решения системы (2.2).

Предположим, что суммы коэффициентов $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} = a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} = b_k$ ограничены в своей совокупности, а также ограничены свободные члены P_k . Обозначим $\sup_k a_k = a$, $\sup_k b_k = b$, $\sup_k P_k = P$. Предположим также, что

$$b < 1; \quad (1-b)^2 - 4|\varepsilon|aP = \rho > 0. \quad (2.4)$$

Возьмем постоянную $K = \frac{1-b}{2|\varepsilon|a}$ такую, что $P_k \leq K(1-b_k - |\varepsilon|Ka_k)$.

Тогда система

$$M_k' = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j' M_l' + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j' + K(1-b_k - |\varepsilon|Ka_k) \quad (2.5)$$

будет мажорантной для (2.2). Система (2.5) имеет очевидное решение $K = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} K^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} K + K(1-b_k - |\varepsilon|Ka_k)$ и, следовательно, система (2.2) имеет неотрицательное главное решение $M_k^* \leq K$. Введем, далее, понятие устойчивого решения. Назовем устойчивым решением $\underline{M}_k \geq 0$ ту ветвь решений системы (2.2), которая остается ограниченной при стремлении ε к нулю. Получим вначале оценку для устойчивого решения системы (2.2). Обозначим через $\underline{M} > 0$ точную верхнюю границу $\underline{M}_k$. Из (2.2) будем иметь

$$\underline{M}_k \leq |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} \underline{M}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} \underline{M} + P_k \leq |\varepsilon|a \underline{M}^2 + b \underline{M} + P, \quad (2.6)$$

а следовательно, $\underline{M} \leq |\varepsilon|a \underline{M}^2 + b \underline{M} + P$. Учитывая (2.4), получим

$$\underline{M} \leq \frac{2P}{1-b+\sqrt{\rho}}. \quad (2.7)$$

Исследуем вопрос единственности устойчивого решения систе-

мы (2.2). Предварительно покажем, что $\underline{M}_k - M_k^* \geq 0$. Применим процесс последовательных приближений к M_k^* , начиная от нулевых значений $M_k^{(0)} = 0$, причем легко видеть, что $M_k^{(n)}$ монотонно возрастают с увеличением n . В самом деле, $M_k^{(1)} = P_k \geq M_k^{(0)}$. Предполагая, что $M_k^{(n)} \geq M_k^{(n-1)}$, получаем

$$\begin{aligned} M_k^{(n+1)} &= |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j^{(n)} M_l^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j^{(n)} + P_k \geq \\ &\geq |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j^{(n-1)} M_l^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j^{(n-1)} + P_k = M_k^{(n)}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем $\underline{M}_k - M_k^{(0)} = \underline{M}_k \geq 0$. По индукции получим

$$\begin{aligned} \underline{M}_k - M_k^{(n+1)} &= |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} [\underline{M}_j (M_l - M_l^{(n)}) + (\underline{M}_j - M_j^{(n)}) M_l^{(n)}] + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} (\underline{M}_j - M_j^{(n)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, имеем $\underline{M}_k - M_k^* \geq 0$, т. е. главное решение M_k^* также устойчиво. Обозначив далее $M_k^* = \underline{M}_k - r_k$, где $r_k \geq 0$ должно быть ограниченным, для определения r_k получим систему уравнений

$$r_k = -|\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} r_j r_l + \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r_j,$$

откуда

$$r_k \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r_j.$$

Обозначив через r точную верхнюю границу r_k , имеем

$$\begin{aligned} r_k &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + \right. \\ &+ \left. |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r = (b_k + 2|\varepsilon| a_k \underline{M}) r, \end{aligned}$$

а согласно (2.7) и (2.4)

$$r_k \leq \left(b_k + \frac{4|\varepsilon| a_k P}{1 - b + \sqrt{\rho}} \right) r \leq (1 - \sqrt{\rho}) r$$

для всех r_k . Следовательно, $r \leq (1 - \sqrt{\rho}) r$, откуда получаем, что $r = 0$, т. е. $M_k^* = \underline{M}_k$. Таким образом доказана единственность $\underline{M}_k$. Одновременно доказана сходимость метода последовательных приближений. Согласно (6), система (2.1) имеет единственное (устойчивое) решение, которое удовлетворяет условию $|\underline{m}_k| \leq \underline{M}_k$ и может быть получено методом последовательных приближений или методом редукции. Процесс последовательных приближений сходится при любых на-

чальных значениях $m_k^{(0)}$, меньших по модулю $\frac{2\rho}{1-b+\sqrt{\rho}}$.

Наконец, покажем, как получать приближенные значения m_k с избытком (m_k^+) и недостатком (m_k^-). Взяв первые n уравнений в (2.1), имеем

$$m_k^+ = \varepsilon \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{k,j,l} m_j^+ m_l^+ + \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} m_j^+ + p_k + \frac{2\rho}{1-b+\sqrt{\rho}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[|\beta_{k,j}| + \frac{2|\varepsilon|\rho}{1-b+\sqrt{\rho}} \left(\sum_{l=1}^n |\alpha_{k,j,l}| + \sum_{l=1}^n |\alpha_{k,l,j}| \right) \right]; \quad (2.8)$$

$$m_k^- = \varepsilon \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{k,j,l} m_j^- m_l^- + \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} m_j^- + p_k - \frac{2\rho}{1-b+\sqrt{\rho}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[|\beta_{k,j}| + \frac{2|\varepsilon|\rho}{1-b+\sqrt{\rho}} \left(\sum_{l=1}^n |\alpha_{k,j,l}| + \sum_{l=1}^n |\alpha_{k,l,j}| \right) \right].$$

Заметим, что сказанное выше относится также к системам с двойным входом:

$$m_{k,j} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \alpha_{k,j,\mu,\mu_1,\nu,\nu_1} m_{\mu,\nu} m_{\mu_1,\nu_1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{k,j,\mu,\nu} m_{\mu,\nu} + p_{k,j}.$$

3. Окончательная форма решения. Исследование полученных уравнений. Преобразуем полученное в п. 1 решение, отделив действительную и мнимую составляющие. Обозначив

$$\frac{U_k(r)}{\theta} = u_k(r) - i v_k(r); \quad \frac{w_k(r)}{\theta} = p_k(r) - i q_k(r); \quad \frac{C_k}{\theta} = \frac{d_k - i b_k}{k^2};$$

$$\frac{C_0}{\theta} = d_0; \quad \frac{N_k}{\theta} = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon \sigma R_2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_k - i n_k}{k^2}; \quad \frac{N_0}{\theta} = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon \sigma R_2} \right)^{\frac{1}{3}} m_0, \quad (3.1)$$

из (1.4) получим

$$u_k(r) = \frac{1}{r \gamma_k(R_2)} \left\{ \frac{R_2}{k^2} |d_k \gamma_k(r) - b_k \tilde{\gamma}_k(r)| + \frac{1}{2\delta_k} \int_r^{R_2} r_1 [p_k(r_1) \Omega_k(r, R_2 - r_1) - \right.$$

$$- q_k(r_1) \Phi_k(r, R_2 - r_1)] dr_1 + \frac{1}{2\delta_k} \int_{R_1}^r r_1 [p_k(r_1) \Omega_k(r_1, R_2 - r) - q_k(r_1) \Phi_k(r_1, R_2 -$$

$$- r)] dr_1 + \frac{1}{\theta} \int_0^{\delta} Q(t) |E_k(R_2 - r) \cos \gamma_k t + F_k(R_2 - r) \sin \gamma_k t| dt \Big\}; \quad (3.2)$$

$$v_k(r) = \frac{1}{r \gamma_k(R_2)} \left\{ \frac{R_2}{k^2} |d_k \tilde{\gamma}_k(r) + b_k \gamma_k(r)| + \frac{1}{2\delta_k} \int_r^{R_2} r_1 [p_k(r_1) \Phi_k(r, R_2 - r_1) + \right.$$

$$+ q_k(r_1) \Omega_k(r, R_2 - r_1)] dr_1 + \frac{1}{2\delta_k} \int_{R_1}^r r_1 [p_k(r_1) \Phi_k(r_1, R_2 - r) + q_k(r_1) \Omega_k(r_1, R_2 -$$

$$-r)|dr_1 + \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} Q(t) [E_k(R_2 - r) \sin \gamma_k t - F_k(R_2 - r) \cos \gamma_k t] dt \Bigg\};$$

$$u_0(r) = d_0 + \frac{1}{R_2 r} \left[r \int_r^{R_2} r_1 (R_2 - r_1) p_0(r_1) dr_1 + (R_2 - r) \left(\int_{R_1}^r r_1^2 p_0(r_1) dr_1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{4\pi\theta} \int_0^{\theta} Q(t) dt \right) \right].$$

Здесь, для краткости, введены следующие обозначения:

$$\gamma_k(r) = f_k(R) f_k(r - R_1) + g_k(R) g_k(r - R_1); \quad \bar{\gamma}_k(r) = f_k(R) g_k(r - R_1) -$$

$$- g_k(R) f_k(r - R_1); \quad R = R_2 - R_1;$$

$$f_k(r) = 4\lambda\pi [\bar{\gamma}_k R_1 (\operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r - \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r) + \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r] -$$

$$- \frac{\gamma_k M_1 c_1}{R_1} \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r; \quad \bar{\gamma}_k = \sqrt{\frac{k\pi}{\theta a}};$$

$$g_k(r) = 4\lambda\pi [\bar{\gamma}_k R_1 (\operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r + \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r) + \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r] +$$

$$+ \frac{\gamma_k M_1 c_1}{R_1} \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r;$$

$$\Omega_k(r_1, r) = \gamma_k(r_1) (\operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r + \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r) + \bar{\gamma}_k(r_1) (\operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r - \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r); \quad (3.3)$$

$$\Phi_k(r_1, r) = \eta_k(r_1) (\operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r - \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r) - \bar{\gamma}_k(r_1) (\operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r + \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r);$$

$$E_k(r) = f_k(R) \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r + g_k(R) \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r; \quad F_k(r) = f_k(R) \operatorname{ch} \bar{\gamma}_k r \sin \bar{\gamma}_k r -$$

$$- g_k(R) \operatorname{sh} \bar{\gamma}_k r \cos \bar{\gamma}_k r.$$

Неизвестные d_k , b_k , m_k и n_k определяются, согласно (3.1), (1.5) и (1.6), из следующих систем нелинейных алгебраических уравнений:

$$d_k = - \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ L_k(R_2) \left[2m_0 m_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m_j m_{k-j} - n_j n_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right] - \right.$$

$$\left. - 2G_k(R_2) \left[m_0 n_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m_j n_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right] \right\} + P_k;$$

$$b_k = - \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ G_k(R_2) \left[2m_0 m_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m_j m_{k-j} - n_j n_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2L_k(R_2) \left[m_0 n_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m_j n_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right] \right\} + T_k;$$

$$d_0 = - \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{h R_2} \left(m_0^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m_j^2 + n_j^2}{j^4} \right) + P_0; \quad (3.4)$$

$$m_k = \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[2d_0 d_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{d_j d_{k-j} - b_j b_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right];$$

$$n_k = 2 \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[d_0 b_k + k^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{d_j b_{k-j}}{j^2 (k-j)^2} \right]; \quad m_0 = \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left(d_0^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{d_j^2 + b_j^2}{j^4} \right);$$

где

$$L_k(r) = \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} [A_k f_k(r - R_1) + B_k g_k(r - R_1)];$$

$$G_k(r) = \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} [B_k f_k(r - R_1) - A_k g_k(r - R_1)];$$

$$\begin{aligned} A_k = & \operatorname{ch} \delta_k R \cos \delta_k R \left\{ 4\lambda\pi [\delta_k (R + hR_1 R_2) (1 - \operatorname{th} \delta_k R \operatorname{tg} \delta_k R) - 2\delta_k^2 R_1 R_2 \operatorname{tg} \delta_k R + \right. \\ & \left. + (hR_2 - 1) \operatorname{th} \delta_k R] - \frac{2k\pi M_1 c_1}{\theta R_1} [\delta_k R_2 (1 + \operatorname{th} \delta_k R \operatorname{tg} \delta_k R) + (hR_2 - 1) \operatorname{tg} \delta_k R] \right\}; \\ B_k = & \operatorname{ch} \delta_k R \cos \delta_k R \left\{ 4\pi [\delta_k (R + hR_1 R_2) (1 + \operatorname{th} \delta_k R \operatorname{tg} \delta_k R) + 2\delta_k^2 R_1 R_2 \operatorname{th} \delta_k R + \right. \\ & \left. + (hR_2 - 1) \operatorname{tg} \delta_k R] + \frac{2k\pi M_1 c_1}{\theta R_1} [\delta_k R_2 (1 - \operatorname{th} \delta_k R \operatorname{tg} \delta_k R) + (hR_2 - 1) \operatorname{th} \delta_k R] \right\}; \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k = & -\frac{kR_2}{2\pi} \int_0^{\theta} |L_k(R_2) \sin \gamma_k t + G_k(R_2) \cos \gamma_k t| \frac{d}{dt} \left[hS(t) + \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda} S^4(t) \right] dt + \\ & + k^2 \int_{R_1}^{R_2} r |L_k(r) p_k(r) - G_k(r) q_k(r)| dr + \frac{k^2 \delta_k}{(A_k^2 + B_k^2) \theta} \int_0^{\theta} Q(t) [(A_k + B_k) \cos \gamma_k t + \\ & + (A_k - B_k) \sin \gamma_k t] dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_k = & -\frac{kR_2}{2\pi} \int_0^{\theta} |G_k(R_2) \sin \gamma_k t - L_k(R_2) \cos \gamma_k t| \frac{d}{dt} \left[hS(t) + \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda} S^4(t) \right] dt + \\ & + k^2 \int_{R_1}^{R_2} r |G_k(r) p_k(r) + L_k(r) q_k(r)| dr + \frac{k^2 \delta_k}{(A_k^2 + B_k^2) \theta} \int_0^{\theta} Q(t) [(B_k - A_k) \cos \gamma_k t + \\ & + (A_k + B_k) \sin \gamma_k t] dt; \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{1}{h\theta} \left\{ \int_0^{\theta} \left| hS(t) + \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda} S^4(t) \right| dt + \frac{1}{\lambda R_2^2} \left[\int_{R_1}^{R_2} r^2 w_0(r) dr + \frac{Q_0}{4\pi} \right] \right\},$$

а штрих при знаке сумм обозначает, что при суммировании индексы $j=0$ и $j=k$ опускаются. Исследуем разрешимость систем (3.4). Вначале оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений этих систем. Обозначив через α_k сумму модулей коэффициентов в k -ом уравнении первой из систем (3.4), имеем

$$\alpha_k = 2 \left(\frac{\varepsilon \sigma R_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} [|L_k(R_2)| + |G_k(R_2)|] \left(\frac{2}{3} \pi^2 + 1 - \frac{6}{k^2} \right). \quad (3.6)$$

Аналогичные выражения получаем и для других систем (3.4). Произведенные оценки показывают, что при $\delta_k(R_2 - R_1) \geq \pi$ $|L_k(R_2)| < \frac{1}{\delta_k R_2}$; $|G_k(R_2)| < \frac{1}{\delta_k R_2}$. Свободные члены P_k и T_k в силу условий



относительно $S(t)$, $w(r, t)$ и $Q(t)$, остаются ограниченными и при $\alpha P < \frac{1}{4}$, где $\alpha = \sup_k \alpha_k$, $P = \sup_k (|P_k|; |T_k|)$, системы (3.4), согласно п. 2, имеют единственное устойчивое решение, которое может быть получено методом последовательных приближений или методом редукции. Решая укороченную систему, получим двустороннюю оценку неизвестных d_k , b_k , m_k и n_k , после чего способом, описанным в (7) получим значения $U(r, t)$ с избытком и недостатком.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության պարբերական հոսք

Հոդվածում դիտարկվում է դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության պարբերական տարածման խնդիրը՝ գնդի արտաքին մակերևույթի վրա ջերմափոխանակության ու ճառագայթման համատեղ առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, որ գնդում և հեղուկում գործում են պարբերաբար փոփոխվող հզորությամբ ջերմության աղբյուրներ: Խնդրի լուծումը տրվում է շարքով ըստ հոանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների, որի գործակիցները որոշվում են հանրահաշվական ոչ գծային անվերջ սիստեմներից: Տրվում են լուծելիության պայմանները սյուպիսի սիստեմների մի դասի համար: Սահմանվում է նրանց կայուն լուծման հասկացությունը: Ապացուցվում է կայուն լուծման միակությունը և ստացված է գնահատականը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎՈՒՄՆԵՐՆԵՐ

- ¹ Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк, Теория тепло- и массообмена, Госэнергоиздат, М.—Л., 1961. ² Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. ³ Г. Ф. Мучник, И. Б. Рубашов, Методы теории теплообмена, ч. I, Высшая школа, М., 1970. ⁴ А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Высшая школа, М., 1967. ⁵ Г. Гребер, С. Эрк, У. Григуль, Основы учения о теплообмене, ИЛ, М., 1958. ⁶ Л. В. Канторович, В. М. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962. ⁷ Р. С. Минасян, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958).

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. Сазкин

Векторное волновое уравнение для неоднородной упругой среды через обобщенные потенциалы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 8/II 1989)

Представление вектора перемещения Гельмгольца ⁽¹⁾ позволяет разделить векторное волновое уравнение для однородной упругой среды на независимые скалярные уравнения в прямоугольной, цилиндрической (круговой, эллиптической, параболической), сферической и конической системах координат. Путем обобщения представления вектора перемещения получено разделение векторного уравнения для слоисто-неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения в декартовой, цилиндрической (круговой) и сферической системах координат ⁽²⁻⁴⁾.

В настоящей работе показано, что разделение векторного волнового уравнения для слоисто-неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения можно получить и в других ортогональных системах координат.

Пусть в ортогональной системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 коэффициенты λ, μ и плотность ρ среды представляют собой произвольные дифференцируемые функции ξ^1 . Допустим, что в ортогональной системе координат компонента метрического тензора g_{11} зависит только от ξ^1 , а отношение g_{22}/g_{33} — от ξ^2 и ξ^3 . Тогда известное векторное волновое уравнение для неоднородной изотропной упругой среды при отсутствии внешних массовых сил

$$G(u) = (\lambda + 2\mu) \text{grad} \text{div} u - \mu \text{rot} \text{rot} u + \text{grad} \lambda \cdot \text{div} u + \text{grad} \mu \times \times \text{rot} u + 2 \text{grad} \mu \cdot \text{grad} u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

представим в следующем виде:

$$G(u) = \text{grad}(\xi \text{div} u) - \text{rot}(\mu \text{rot} u) + \text{rot} \left[u \times \frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \right] + \text{grad} \left(u \cdot \frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \right) - \frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \text{div} u - u \text{div} \left(\frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \right) + \frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \times \text{rot} u - u \times \text{rot} \left(\frac{\mu'}{g_{11}} e_1 \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $\xi = \lambda + 2\mu$; $\mu' = \frac{d\mu}{d\xi^1}$; u — вектор перемещений, e_1 — орты системы координат.

Общее решение уравнения (2) разложим по линейно-независимым векторам

$$\mathbf{u} = \psi_1(\xi^1) \text{grad} \Phi_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) + \psi_2(\xi^1) \text{rot rot} [\Phi_2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \mathbf{e}_1] + \\ + \text{rot} [\Phi_3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \mathbf{e}_1], \quad (3)$$

где Φ_i — обобщенные потенциалы, $\psi_1(\xi^1)$, $\psi_2(\xi^1)$ — неизвестные функции, которые определяются условием разделения векторного уравнения для неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения.

Подставим разложение (3) в уравнение (2). Учитывая линейность оператора $G(\mathbf{u})$ и следующие соотношения:

$$\text{rot}(\varphi(\xi^1) \mathbf{e}_1) = 0; \quad \text{grad} \Phi = \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \times \text{rot}(\Phi \mathbf{e}_1); \\ \text{rot rot}(\Phi \mathbf{e}_1) = \text{grad} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} - \left[\Delta \Phi - \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right] \mathbf{e}_1; \\ \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \cdot \text{rot rot}(\Phi \mathbf{e}_1) = \text{rot rot}(\Phi \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1 \times \text{rot} \left(\frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \mathbf{e}_1 \right),$$

получим уравнение

$$G(\mathbf{u}) = \rho \psi_1 \text{grad} [\varphi_1^2 L_1(\Phi_1)] + \rho \psi_2 \text{rot rot} [\varphi_2^2 L_2(\Phi_2) \mathbf{e}_1] + \text{rot} [\varphi_3^2 L_3(\Phi_3) \mathbf{e}_1] = 0, \quad (4)$$

при соблюдении условий

$$\gamma(p_1 + p_\nu) = p_1 + 2p_\nu; \quad \gamma(p_1 + p_\nu) = p_1 + p_\nu; \quad (5)$$

$$(p_1 + p_\nu) [-(\gamma - 1)p_1 + 2p_\nu] = 2 \left[(p_1 + p_\nu)' + p_1^2 - (p_1 + p_\nu) \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} \right]; \quad (6)$$

$$(p_1 + p_\nu) \left[-(\gamma - 1)p_1' - (\gamma - 1)p_1^2 + p_1 p_\nu - p_1 \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} - p_\nu \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right] = \\ = p_1 p_\nu' + p_1 p_\nu^2 + p_1' + 2p_1 p_1' - (p_1 p_\nu + p_\nu' + p_\nu^2) \frac{\partial \ln g_{11}^{-1} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - p_\nu \frac{\partial^2 \ln g_{11}^{-1} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^{12}} - \\ - 2 \left[3p_1 p_\nu + 2p_1' + 2p_1^2 - 2(p_1 + p_\nu) \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} - p_\nu \frac{\partial \ln g_{11}^{-1} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} + p_\nu' + \right. \\ \left. + p_\nu^2 \right] \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} - 2(p_1 + p_\nu) \frac{\partial^2 \ln g_{11}}{\partial \xi^{12}}; \quad p_2 + p_\nu = \gamma p_2 + 2p_\nu; \quad (7)$$

$$(p_2 + p_\nu) \left[(\gamma - 1)p_2 + 2p_\nu + 2 \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} \right] = \\ = 2 \left[(\gamma p_2)' + (\gamma - 1)p_2 p_\nu + p_\nu' + p_\nu^2 + p_\nu \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} \right]; \quad (8)$$

$$(p_2 + p_\nu) \left[(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\nu + \gamma p_2^2 - \gamma p_2 \frac{\partial \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - 2p_\nu \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right] = \\ = [(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\nu + \gamma p_2^2]' - (\gamma p_2 + p_\nu)' \frac{\partial \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - (\gamma p_2 + \\ + p_\nu) \frac{\partial^2 \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^{12}} - p_\nu \frac{\partial \ln g_{11}^{-1} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - p_\nu \frac{\partial^2 \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^{12}} +$$

$$+ \left(p_2 + p_\mu - 2 \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} \right) \left[(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\mu + \gamma p_2^2 - (\gamma p_2 + p_\mu) \frac{\partial \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - p_\mu \frac{\partial \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right]. \quad (9)$$

В формулах (4) — (9) приняты следующие обозначения:

$$L_1(\Phi_1) \equiv \Delta \Phi_1 + \frac{1}{\gamma g_{11}} [(\gamma + 1)p_1 + 2p_\mu] \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^1} + \frac{1}{\gamma g_{11}} \left[p_1 p_\mu + p_1^2 + p_1' - p_1 \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} - p_\mu \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right] \Phi_1 - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}; \quad (10)$$

$$L_2(\Phi_2) \equiv \Delta \Phi_2 + \frac{1}{g_{11}} \left[(\gamma + 1)p_2 + 2p_\mu - \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{g_{11}} \left[(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\mu + \gamma p_2^2 - \gamma p_2 \frac{\partial \ln g_{11} g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} - 2p_\mu \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right] \Phi_2 - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}; \quad (11)$$

$$L_3(\Phi_3) \equiv \Delta \Phi_3 + \frac{1}{g_{11}^2} \left(p_\mu - \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \right) \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi^1} - \frac{p_\mu}{g_{11}^2} \frac{\partial \ln g_{22} g_{33}}{\partial \xi^1} \Phi_3 - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2}; \quad (12)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{g_{11} g_{22} g_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{g_{22} g_{33}}{g_{11}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{g_{11} g_{33}}{g_{22}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{g_{11} g_{22}}{g_{33}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \right) \right]; \quad (13)$$

$$p_i = \frac{1}{\psi_i} \frac{d\psi_i}{d\xi^1}; \quad p_\mu = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\xi^1}; \quad p_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi^1}; \quad v_1^2 = \frac{\xi}{\rho}; \quad v_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (14)$$

Векторное уравнение (4) разделяется на следующие независимые скалярные дифференциальные уравнения для обобщенных потенциалов Φ_i :

$$L_i(\Phi_i) = 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Условие разделения (5) — (9), при выполнении которых векторное волновое уравнение для неоднородной упругой среды разделяется на независимые уравнения (15), можно привести к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$p_1 + p_2 + p_\rho = 0; \quad \mu p_1 + \xi p_2 + 2\mu^1 = 0; \quad (16)$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 - \mu p_1 \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} = (\xi p_2)' + \xi p_2^2 - \xi p_2 \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} \equiv K; \quad (17)$$

$$K' + \left[3 \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} - p_\rho - 2 \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} \right] K + \left\{ (2\mu p_1 + \xi p_2) \frac{\partial \ln g_{11} \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} + (\xi + 2\mu) p_1 p_2 \frac{\partial \ln \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} + (\mu p_1 - 2\mu') \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^{12}} + [(\mu p_1 + \mu^1) p_\rho - 2(\mu p_1 - 2\mu') \frac{\partial \ln \sqrt{g_{22} g_{33}}}{\partial \xi^1} + 2(\mu p_1 + \mu') \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}] \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[(\mu p_1 + \mu') \frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1} \right] \right\} = 0; \quad (18)$$

Система уравнений (16) — (18) незамкнута, и ее решение можно

получить при дополнительных предположениях относительно ρ_1 , ρ_2 , ρ , μ и ξ . Решение системы (16)–(18) определяет параметры μ , ξ и ρ неоднородной упругой среды и функции $\psi_1(\xi^1)$, $\psi_2(\xi^1)$, при которых разделение векторного уравнения (2) на независимые уравнения (15) возможно.

Рассмотрим условие разделения (16)–(18) в некоторых ортогональных системах координат.

I. Пусть λ , μ , ρ неоднородной упругой среды являются функциями от координаты z . Тогда в декартовой, цилиндрической (круговой, эллиптической, параболической) и биклиндрической системах координат условие разделения (16)–(18) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= 0; & 2 \frac{d\mu}{dz} + \mu \rho_1 + \xi \rho_2 &= 0; \\ \frac{d(\mu \rho_1)}{dz} + \mu \rho_1^2 &= C\rho; & \frac{d(\xi \rho_2)}{dz} + \xi \rho_2^2 &= C\rho, \end{aligned}$$

где C — некоторая постоянная.

II. Пусть λ , μ , ρ радиально-неоднородной упругой среды являются функциями от координаты r . В этом случае в сферической и конической системах координат условие разделения (16)–(18) записывается системой

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= 0; & 2 \frac{d\mu}{dr} + \mu \rho_1 + \xi \rho_2 &= 0; \\ \frac{d(\mu \rho_1)}{dr} + \mu \rho_1^2 - \frac{\mu \rho_1}{r} &= \frac{d(\xi \rho_2)}{dr} + \xi \rho_2^2 - \frac{\xi \rho_2}{r} = K; \\ \frac{dK}{dr} - \left(\rho_1 - \frac{3}{r} \right) K + \frac{\xi + 2\mu}{r} \rho_1 \rho_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Դ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Անհամասեռ առաձգական միջավայրի վեկտորական ալիքային հավասարումը
ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով

Անհամասեռ առաձգական միջավայրի համար, որի լամբի գործակիցները և խտությունը կախված են օրթոգոնալ համակարգի միայն մեկ կոորդինատից, տեղափոխությունների վեկտորը ներկայացված է ոչ կոմպլանար վեկտորների գումարի տեսքով՝ արտահայտված երեք ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով: Տեղափոխությունների վեկտորի այդպիսի ներկայացումը հնարավորություն է տալիս որոշ անհամասեռ միջավայրի համար վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհել անկախ, սկալյար, երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների՝ ընդհանրացված պոտենցիալների նկատմամբ: Դեկարտյան, գլանական (շրջանային, էլիպտիկ, պարարոլային), սֆերիկ և կոնական կոորդինատների համակարգերում ուսումնասիրված են այն պայ-

ժանները, որոնց դեպքում անհամասեռ միջավայրի համար վեկտորական ա-
լիքային հավասարումը հնարավոր է սրոհել: Այդպիսի անհամասեռ միջա-
վայրերի համար արտածված են առաձգական ալիքների տարածման հավա-
սարումները ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒՅՈՒՆ

- ¹ Ф. Н. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики. Т. 2. ИЛ. М., 1960.
² J. F. Hook, The Journal of the Acoustical Society of America, v. 33. p. 302–313
(1961). ³ С. Г. Саакян, ДАН СССР, т. 263, № 3 (1983). ⁴ С. Г. Саакян, ДАН
АрмССР, т. 85, № 4 (1987).

УДК 535.345

ФИЗИКА

С. К. Аветисян, С. С. Данагулян, Г. Р. Минасян

Межзонное многофотонное поглощение инфракрасного излучения в Ge

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 14/XII 1988)

В работе ⁽¹⁾ чистые образцы Ge при $T=300\text{ К}$ подвергались облучению CO_2 лазером с частотой $\Omega = 1,77 \cdot 10^{14}\text{ с}^{-1}$ и максимальной интенсивностью $I = 500 \frac{\text{мВт}}{\text{см}^2}$. Эксперимент показал, что начиная с $I = 200 \frac{\text{мВт}}{\text{см}^2}$ концентрация неравновесных носителей $n(I)$ зависит от интенсивности как $I^{3,5}$.

Такие высокие интенсивности, как отмечается в ⁽¹⁾, могли вызывать межзонное многофотонное поглощение ($E_g/\hbar\Omega > 6$). В этом случае n зависел бы от интенсивности как I^7 , а коэффициент поглощения K — как I^6 (как это следует из теории возмущений ⁽²⁾). Однако в условиях описанного эксперимента характерный параметр задачи $\hbar\Omega/\nu \sim 1$ (ν — энергия взаимодействия электрона с полем волны). Так что обычная теория возмущений не применима, поскольку существует сравнимый с семифотонным поглощением вклад от поглощения восьми и большего числа фотонов. В связи с этим нами применена адиабатическая теория по параметру $\hbar\Omega/E_g \ll 1$ ⁽³⁾, для расчета коэффициента многофотонного поглощения в Ge.

Уравнение Шредингера для электрона в кристалле под действием электромагнитной волны $E = E_0 \sin \Omega t$ имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m_0} \left(\hat{p} + \frac{eE_0}{\Omega} \sin \Omega t \right)^2 + u(r) \right\} \psi(r, t), \quad (1)$$

где m_0 — масса свободного электрона, $u(r)$ — периодический потенциал решетки, $\hat{p}$ — оператор квазимпульса электрона.

Разлагая волновые функции $\psi(r, t)$ по функциям Хаустона ⁽⁴⁾, перейдем к импульсному представлению

$$\psi(r, t) = \sum_n \int a_n(p, t) \psi_n \hat{p}(r) dp; \\ p' = p + \int_0^t E(t') dt'. \quad (2)$$

Здесь $\Psi_{np'} = e^{\frac{i}{\hbar} p r} u_n(r)$ — стационарные Блоховские функции. Подставляя (2) в (1), для временных коэффициентов $a_n(p, t)$ будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$i\hbar \frac{\partial a_k(p, t)}{\partial t} = E_k(p') a_k(p, t) - ieE_0 \sin(\Omega t) \times \\ \times \left(\int u_{j,p'}^*(r) \frac{\partial u_{k,p'}(r)}{\partial p} dr \right) a_j(p, t), \quad (3)$$

где $E_k(p) = p^2/2m_k$, $k=1, 2$. Здесь мы предполагаем, что межзонные многофотонные переходы происходят между валентной зоной как тяжелых дырок, так и легких дырок и зоной проводимости. При вычислении интегральной вероятности переходов нами учтены межзонные переходы с обеих валентных подзон. Система уравнений (3) совпадает с системой уравнений, получаемых в адиабатической теории возмущений (4). Однако, как показано в (3), даже при слабых полях теория возмущений приводит к некорректным результатам. Действительно, при нахождении вероятности перехода применяется метод перевала (2), а с другой стороны, недиагональный матричный элемент перехода содержит полюс в точке перевала ($E_c(p, t) = E_v(p, t)$). Как показано в (3), во втором порядке теории возмущений особенность матричного элемента полностью компенсирует малость поля. В связи с этим, следуя (3), для расчета вероятности межзонного перехода будем применять адиабатическую теорию. Недиагональный матричный элемент координаты равен

$$x_{1,2} = \frac{1}{2i\epsilon(p, t)} \frac{\partial \epsilon(p, t)}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\epsilon(p, t) = E_c(p, t) - E_v(p, t).$$

Представляя адиабатическую энергию в следующем виде:

$$\epsilon(p, t) = E_g \left(1 + y^2 + \left(x + \frac{1}{\gamma} \sin \Omega t \right)^2 \right),$$

$$\text{где } y^2 = \frac{p_{\perp}^2}{2m^*E_g}, \quad x^2 = \frac{p_{\parallel}^2}{2m^*E_g}, \quad m^* = \frac{m_c m_v}{m_c + m_v}, \quad \gamma = \frac{\Omega \sqrt{2m^*E_g}}{eE_0},$$

и подставляя (4) в (3), нетрудно получить

$$i\dot{b}_c(\tau) = \frac{1}{2} (1 + q^2) b_c(\tau) - \frac{if_0 \cos \omega t}{1 + q^2} b_v(\tau); \quad (5)$$

$$i\dot{b}_v(\tau) = -\frac{1}{2} (1 + q^2) b_v(\tau) + \frac{if_0 \cos \omega t}{1 + q^2} b_c(\tau),$$

где

$$f_0 = \frac{\hbar e E_0}{\sqrt{m} E_g^2}, \quad \frac{1}{(1 + y^2)^{3/2}}, \quad \tau = (1 + y^2) \frac{E_g t}{\hbar}, \quad \omega = \frac{\hbar \Omega}{(1 + y^2) E_g} = \frac{1}{N(1 + y^2)};$$

$$q = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{f_0}{\omega} \sin \omega \tau = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\gamma \sqrt{1+y^2}} \sin \omega t;$$

$$a_{c,v} = b_{c,v} \exp \left[\pm i \int_0^t \left(\frac{p_1^2 + p_x'^2}{4m_c} \pm \frac{p_1^2 + p_x'^2}{4m_v} \right) dt' \right].$$

От сингулярностей в недиагональных частях (5) ($q = \pm i$) можно избавиться с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} \left[(A_1 + iA_2) \left(\frac{q-i}{q+i} \right)^{1/2} + (A_1 - iA_2) \left(\frac{q+i}{q-i} \right)^{1/2} \right]; \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left[(A_1 + iA_2) \left(\frac{q-i}{q+i} \right)^{1/2} - (A_1 - iA_2) \left(\frac{q+i}{q-i} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В работе (3), где рассматривался корневой вид закона дисперсии носителей, применялось несколько иное преобразование. Подставляя (6) в (5), после несложных преобразований можно получить следующее уравнение:

$$\ddot{B} + B \left[\frac{1}{4} (1 + q^2)^2 \right] = 0, \quad (7)$$

где $B = A_1 \exp \left(\frac{1}{2} \ln q \right)$. При получении уравнения (7) отброшены малые члены порядка $\ddot{q}/q$ и $(\ddot{q}/q)^2$. Отметим, что точно такое уравнение получено нами ранее (5), для другой ситуации, когда рассматривалось многофотонное поглощение в Ge между валентными зонами легких и тяжелых дырок. Величина $\frac{1}{4} (1 + q^2)^2$ представляет квадрат адиабатической энергии двухзонного полупроводника. Тогда амплитуда межзонного перехода определяется следующим выражением (5):

$$|R| = \exp \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\tau_0^*}^{\tau_0} (1 + q^2(\tau)) d\tau \right]. \quad (8)$$

Здесь τ_0 и τ_0^* — комплексно сопряженные решения следующего уравнения $1 + q^2(\tau_0 + i\tau_0^*) = 0$. Это уравнение имеет бесконечное множество решений, причем на каждом периоде поля T имеются две пары комплексно сопряженных решений. В работе (6) нами приведена корректная процедура когерентного сложения амплитуд переходов от всех „точек поворота“ на комплексной плоскости времени. Применяя вышеуказанный метод, можно получить следующее выражение для вероятности многофотонного межзонного перехода:

$$w_{x,v} = 2\Omega |R|^2 (1 - |R|^2) \sin^2(\pi \Phi) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (1 + q^2(\tau)) d\tau - n \right). \quad (9)$$

Здесь $\Phi = \frac{N}{2} \left(1 + y^2 + x^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) - \frac{N\omega\tau_0'}{\pi} \left(1 + y^2 + x^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) +$

$$+ \frac{N}{\pi\gamma} \left(2x \cos \omega \tau_0 + \frac{\sin \omega \tau_0}{4} \right),$$

n — число фотонов, поглощаемых в каждом акте межзонного перехода, а интегрирование для величины R дает

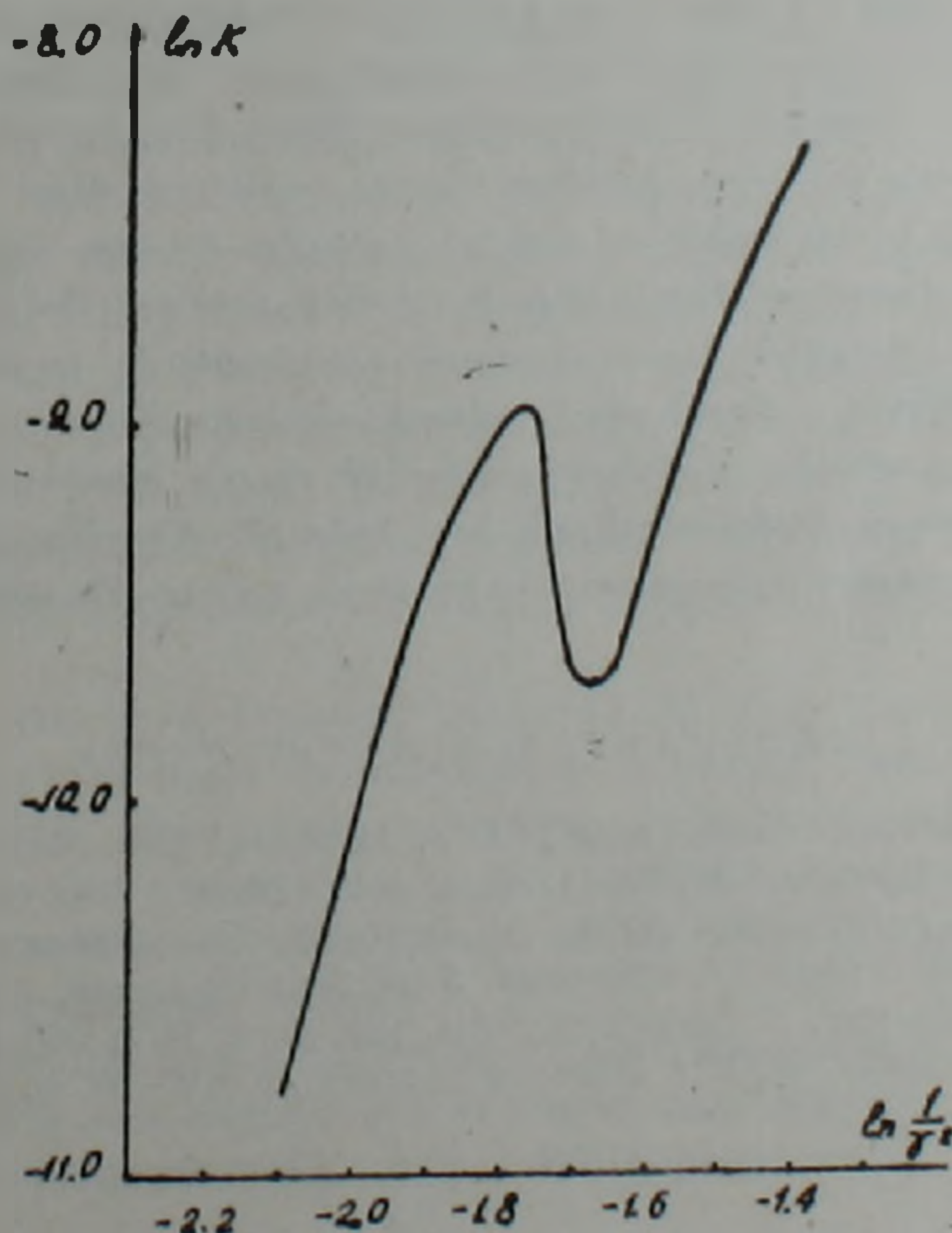
$$R = \exp \left\{ -N \left[\omega \tau_0 + y^2 \omega \tau_0 + x^2 \omega \tau_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x}{\gamma} \sin(2\omega \tau_0) \operatorname{sh}(\omega \tau_0) - \frac{1}{4\gamma^2} \operatorname{sh}(2\omega \tau_0) \cos(2\omega \tau_0) + \frac{\omega \tau_0}{2\gamma^2} \right] \right\}.$$

С помощью (9) можно вычислить коэффициент многофотонного поглощения

$$K(I) = \sum_{n=N_{\min}}^{\infty} \frac{4\pi n W_n \hbar \Omega}{n_0 c F_0^2}. \quad (10)$$

Здесь W_n — вероятность n -фотонного перехода, включающая все интерференционные эффекты, связанные с поглощением $n+m$ фотонов и испусканием m фотонов, n_0 — показатель преломления, c — скорость света. В выражении (10) $N_{\min}$ — минимальное число фотонов, поглощаемых в процессе межзонного перехода, которое при $\hbar\Omega = 10,6$ мкм, и $E_g = 0,8$ эВ равно $N_{\min} = 7$. При низких интенсивностях $\gamma \gg 1$ коэффициент поглощения зависел бы от I как I^6 . В рассмотренном же эксперименте $\gamma \sim 1$, и, следовательно, нужно учитывать также переходы с поглощением восьми и большего числа фотонов.

Ниже приведены результаты численного расчета $K(I)$ с учетом всех интерференционных эффектов. Как видно из рисунка, при $\gamma \gg 1$



наклон кривой равен 6 ($N=7$). С дальнейшим увеличением I зависимость $\ln K$ от $\ln \frac{1}{\gamma^2}$ отклоняется от линейной, что связано, как было отмечено выше, с возрастанием роли переходов с $N > 7$. Таким образом, при высоких интенсивностях в соответствии с экспериментом ⁽¹⁾ концентрация фотовозбужденных носителей растет с интенсивностью несколько медленнее. При интенсивностях $I \sim 500 \frac{\text{мВт}}{\text{см}^2}$ наблюдается немонотонная зависимость $K(I)$ (рис.), что является результатом динамического эффекта Штарка ⁽⁶⁾.

В заключение отметим, что для объяснения эксперимента ⁽¹⁾ в работе ⁽⁷⁾ предложен другой механизм, основанный на эффекте ударной ионизации носителей. Однако полученный в ⁽⁷⁾ порог нелинейности неудовлетворительно согласуется с экспериментом ⁽¹⁾.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Ереванский физический институт

Ո. Կ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ո. Ո. ԴԱՆԱԴՈՒԼՅԱՆ, Հ. Ի. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ինֆրակարմիր ճառագայթման միջզոնային բազմաֆոտոն կլանումը Ge-ում

Աշխատանքում տեսականորեն ուսումնասիրված է $\lambda = 10.6$ մկմ ալիքի երկարությամբ ուժեղ լազերային ճառագայթման բազմաֆոտոն կլանումը Ge-ում: Բազմականաչափ ցածր ինտենսիվությունների տիրույթում Ge-ում էներգետիկորեն հնարավոր է յոթֆոտոնային միջզոնային կլանում, որը կարելի է նկարագրել խոտորումների տեսությամբ: Սակայն ինտենսիվության հետագա աճի դեպքում ինտեգրալ կլանման մեջ սկսում է դեր խաղալ նաև ութ և ավելի թվով ֆոտոնների միաժամանակ կլանումը և էական է դառնում վերջինիս հետ կապված կոհերենտության երևույթների հաշվառումը:

Բազմաֆոտոն կլանման խնդիրը, հաշվի առնելով վերը նշված հանգամանքը, լուծված է ադիաբատ տեսության օգնությամբ, որը կիրառելի է գործնականորեն կամայական ինտենսիվությունների համար: Ցույց է տրված, որ տեսականորեն ստացված կլանման գործակցի կախումը լույսի ինտենսիվությունից համընկնում է փորձնական տվյալների հետ: Միաժամանակ, կանխագուշակվել է ոչ գծային կլանման գործակցի լույսի ինտենսիվությունից ունեցած ոչ մոնոտոն կախվածության նոր երևույթ: Վերջինս կարող է գտնել անմիջական կիրառություն օպտոէլեկտրոնային ոչ գծային տարրերում:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ D. E. Watkins, C. R. Phipps, S. J. Thomson, Opt. Lett., v. 6., p. 76-78 (1981). ² Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, т. 47, с. 1945 (1964). ³ Ю. А. Быхов, А. М. Дыхне, ЖЭТФ, т. 58, с. 1734 (1970). ⁴ Л. Илуфф, Квантовая механика, ИЛ, 1957. ⁵ S. Avetissian, M. Hosek, H. Minassian, Solid State Commun., v. 60, p. 419-421 (1986). ⁶ H. Minassian, S. Avetissian, Phys. Rev. B, v. 34, p. 963-966 (1986). ⁷ R. B. James, D. L. Smith, IEEE J. Quantum Electron., v. QE-18, p. 1841-1864 (1982).

УДК 572.5.576.312.

БИОХИМИЯ

Р. А. Захарян, Г. Г. Галстян, М. К. Варданян, Н. Т. Гаспарян

Экспрессия гена тимидинкиназы HSV-I в составе
реконструированных нуклеосом в клетках костного мозга

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР К. Г. Карагезяном 9/XI 1988)

Восвобождение генетического материала в околоклеточную среду имеет место в различных тканях. Источником экзогенного генетического материала, в частности, служат клетки лимфоидного ряда, количество которых в тканях в 40 раз превышает их число в крови, клетки костного мозга и периферической крови, тканевые макрофаги. В организме взрослого человека в костном мозге ежедневно продуцируется 2×10^{11} клеток эритроцитов в результате дифференцировки такого же количества ортохромных и нормобластов в ретикулоциты, сопровождающейся карioreкcисом и выталкиванием ядерного и другого нуклеопротейного материала в околоклеточную среду костного мозга.

Данные, полученные нами (¹⁻³), показали, что взаимодействие полимеров ДНК, РНК, ДНК-протеиновых комплексов с плазматической мембраной нейрональной клетки, клеток костного мозга, нейтрофилов, фибробластов индуцирует в клетке прежде всего мембранные эффекты: повышение уровня цАМФ, входа экстрацеллюлярного Ca^{2+} , а в случае двуниевых РНК и повышение в клетке уровня 2—5-олигоаденилата. Повышение уровня ионов Ca^{2+} сопровождается активацией фосфолипазы A_2 и накоплением в мембране клетки лизолецитинов и ненасыщенных жирных кислот (²⁻⁴). Индуцированные в плазматической мембране клетки изменения подготавливают процесс интернализации ДНК, РНК в клетку на фоне относительно высокого уровня фосфорилирования компонентов плазматической мембраны и повышения подвижности в фосфолипидном бислое мембран. Одновременно в экспериментах *in vitro* нами (⁵), а затем и другими (⁶) было показано, что реконструированные нуклеопротеиновые комплексы биологически активны в ДНК-опосредованной трансформации клеток млекопитающих.

Очевидно, что нуклеосомная упаковка ДНК в хроматине может рассматриваться как одна из возможных структур, способная обеспечить перенос ДНК через плазматическую мембрану в процессе ее реутилизации *in vivo*, и может быть использована для получения доказательства возможности ДНК-опосредованной трансформации клеток костного мозга в условиях *in vivo*.

Клетки костного мозга получали от мышей линии С 3Н в среде Mc-Coу-5А с 15%-ной сывороткой теленка, содержащей гепарин. 10^6 клеток в 1 мл среды инкубировали с ИВЧ, реконструированными ну-

клеосомами, Са-преципитатом ДНК, которые добавляли прямо в среду из расчета 10 мкг [^3H] ДНК (12000 имп мин/мкг) на 10^5 клеток. Через 2, 4, 6 и 24 ч инкубации клетки обрабатывали ДНКазой 50 мкг/мл 30 мин 37°C , дважды промывали раствором «PBS». Субклеточные фракции клеток костного мозга выделяли по методу, описанному в работе (7), распределение [^3H] ДНК в субклеточных фракциях измеряли в сцинтилляторе в радиосчетчике SL-30 (Франция).

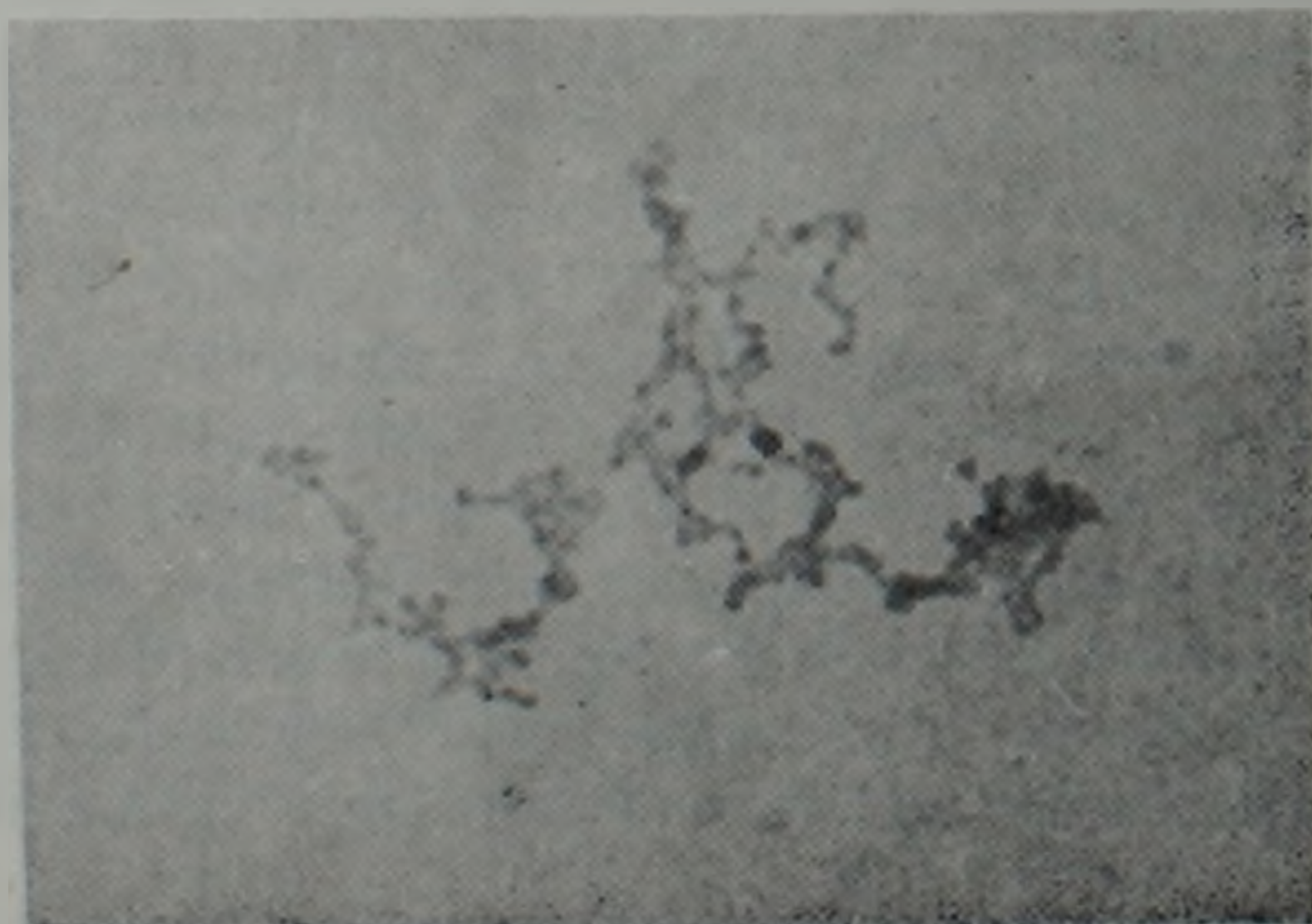
Реконструирование нуклеосом в присутствии набора гистонов и поли- α -глутаминовой кислоты подробно описано в нашем предыдущем исследовании (5) и в работе (8).

Выделение ДНК плазмиды PBR322 tk, P ν -фрагмента гена tk HSV-I, «Ник»-трансляцию, реконструирование искусственных вирусоподобных частиц, гибридизацию на нитроцеллюлозных фильтрах, определение активности тимидинкиназы (tkHSV-I) проводили как описано в работе (9). Инкубационная среда для определения активности tk HSV-I содержала 0,5 мМ [^{14}C] dCyd, 5мМ Mg^{2+} АТР, 0,3мМ тетрагидроуридина, 25мМ NaF.

Активность tk HSV-I выражали в наномолях dCyd, фосфорилированного 2×10^6 кл. в течение 1 ч. ДНК в составе комплексов метилчакридиновым оранжевым и степень фагоцитоза определяли в люминесцентном микроскопе Люмам Р—2.

Степень фагоцитоза Са-преципитата ДНК, ДНК-протеидных комплексов клетками костного мозга оценивали в процентах по числу фагоцитирующих клеток и по количеству фагоцитированных частиц на одну клетку (фагоцитарный индекс).

На электронной микрофотографии (рисунок) показана реконструкция нуклеосомоподобных комплексов ДНК PBR 322 tk. Глобуляр-



Электронная микрофотография реконструированной в нуклеосомоподобные комплексы молекул ДНК PBR 322 tk. Ув. 200×10^3

ные частицы, обнаруживаемые вдоль молекулы ДНК, морфологически близки к нуклеосомам, обнаруживаемым при электронной микроскопии хроматина. Формирование нуклеосом в условиях нашего эксперимента нами подтверждено ранее также данными по нуклеазному расщеплению полученных комплексов (5).

В табл. 1 приведены данные, позволяющие оценить процесс интернализации Са-преципитата ДНК и ДНК-протендных комплексов в клетки костного мозга.

Таблица 1

Фагоцитоз клетками костного мозга ДНК-протеидных комплексов

ДНК	Фагоцитоз, %			Фагоцитарный индекс	
	Время инкубации, ч				
	2	4	6	2	4
Са-преципитат ДНК	10	18	34	1—2	1—2
ДНК-протеидный комплекс	25	52	92	2—3	3—4

Существенное повышение степени фагоцитоза ДНК-протендных комплексов относительно Са-преципитата отмечается для всех изученных интервалов времени, одновременно выше и фагоцитарный индекс. Полученный результат указывает на то, что реконструированные нуклеосомные комплексы биологически активны и более эффективно, чем искусственные Са²⁺-комплексы ДНК, преодолевают барьер плазматической мембраны клеток костного мозга.

В следующей серии экспериментов было изучено внутриклеточное распределение экзогенной ДНК, интернализованной в клетки в составе Са-ДНК и ДНК-протендного комплекса. Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что нуклеосомоподобная упаковка ДНК облегчает преодоление барьера как плазматической, так и ядерной мембраны; возможно, что в силу своей нуклеофильности обеспечивает относительно быструю миграцию комплекса из цитоплазмы в ядро.

Таблица 2

Внутриклеточное распределение ДНК, интернализованной в клетках костного мозга в составе Са-преципитата и ДНК-протеинового комплекса (процент радиоактивности)

Субклеточные частицы	Са-преципитат ДНК			ДНК-протеиновый комплекс		
	Время инкубации, ч					
	0	2	4	0	2	4
Плазматическая мембрана	92	46	35	83	64	32
Цитоплазма	5	45	47	8	18	9
Ядро	2	8	12	2	10	11
Инкубационная среда	1	3	6	1	10	48

О функциональной активности гена tkHSV-1 в ДНК плазмиды PBR 322 tk, интернализованной в клетки костного мозга в виде нуклеопротендного комплекса, свидетельствовала индукция транзиторной активности вирусной (HSV-1) tk в клетках.

ДНК в виде Са-преципитата, реконструированных вирусоподобных частиц (ИБЧ) и ДНК-протендных комплексов, вводилась в коли-

честве 50 мкг в просвет бедренных костей мышей, через 48 ч в выделенных клетках костного мозга определяли активность тимидинкиназы (см. методы) по фосфорилированию [^{14}C]-дезокситидина (табл. 3).

Таблица 3

Тимидинкиназная активность в трансформированных клетках костного мозга

ДНК	Активность tk (в наномолях*) [^{14}C]dCd, фосфорилированного 4×10^4 кл./час.
ИБЧ	
Са-преципитат ДНК	0.89
ДНК-протеиновый комплекс	0.14
Контроль (ДНК)	0.32
	Не определяется

* Средняя из результатов трех экспериментов.

Перенос гена tk в составе ДНК PBR322 tk, интернализованной в клетки костного мозга в виде нуклеопротеидного комплекса, обеспечивала через 48 ч достаточно выраженный транзитный синтез фермента tk HSV-I, обнаруживаемого реакцией фосфорилирования дезокситидина, специфичной для tk вирусного (HSV-I) происхождения.

Активность tk, индуцированная в клетках костного мозга ИБЧ, содержащими ген tk, была в 7 и 3 раза выше, чем от применения Са-преципитата ДНК PBR322 tk и ДНК-протеидного комплекса, соответственно.

Через 48 ч после инъекции в полость бедренных костей ДНК-протеидных комплексов (Pv II-фрагмент) в ДНК ядер клеток костного мозга, после расщепления ДНК эндонуклеазами и разделения полученных фрагментов в агарозном геле, методом гибридизации на нитроцеллюлозных фильтрах были выявлены интактные гены tk HSV-I.

Полученный результат свидетельствует в пользу того, что ДНК-протеидный материал, освобождаемый в околклеточную среду костного мозга, может проникать в клетки костного мозга, достигать ядра и некоторое время сохраняться в клетке в интактном виде и функционировать; при этом можно полагать, что транзитная экспрессия генов может избирательно контролироваться клеточными регуляторами процессов транскрипции и трансляции в зависимости от функционального состояния трансформируемой клетки.

Институт экспериментальной
биологии Академии наук
Армянской ССР

Н. А. ХАЧАТУРЯН, Г. Ч. АХАТЯН, В. И. АХАТЯН, В. С. АХАТЯН

Получение и характеристика нуклеопротеидных комплексов
HSV-I с помощью метода гибридной селекции

В работе описано, что при введении в клетки PBR 322 tk нуклеопротеидных комплексов, полученных с помощью метода гибридной селекции, в клетках костного мозга

բջիջների պլազմատիկ մեմբրանի միջոցով նուկլեոպրոտեիդների կոմպլեքսի կազմում ԴՆԹ-ն հարաբերականորեն արագ է տեղափոխվում ցիտոպլազմայից կորիզ և պահպանվելով որոշակի ժամանակ կորիզում ինտակտ վիճակում գործում է որպես մատրիցա ԴՆԹ-ի և HSV-1 տիմիդինկինազայի ֆերմենտի սինթեզի համար:

Ստացված են ապացույցներ, որոնք վերաբերվում են արտաբջջային ԴՆԹ-ի գենների տրանզիստորային էքսպրեսիային՝ նրա ոսկրուղեղի բջիջներով ռեու-տիլիզացիայի պրոցեսի ընթացքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ե Ն Ո Ւ Բ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ С. Н. Айрапетян, Р. А. Захарян, Г. Е. Рыжков и др., ДАН СССР, т. 284, № 6, с. 1499 (1985). ² Р. А. Захарян, Г. Е. Рыжков, С. С. Дадалян и др., Нейрохимия, т. 5, № 3 с. 239 (1986). ³ L. A. Rouchkian, R. A. Zakharian, 4 International Congress o Cell Biology Abstracts, B-1013, P 5, 1. 6. (1988). ⁴ R. A. Zakharian, K. G. Karagyesian, S. S. Ovakimian, ISF-JOCS WORLD Congress, Abstracts, 3P12 (1988). ⁵ Р. А. Захарян, Г. Г. Галстян, Н. Р. Геворкян и др., Биополимеры и клетка, т. 4, № 1, с. 48 (1988). ⁶ Р. А. Захарян, Биополимеры и клетка, т. 3, № 4 с. 215 (1987). ⁷ L. P. Villarreal, R. T. White, P. Berg, J. Virol, v. 29, p. 209 (1979). ⁸ J. Oohara, A. Suyama, A Wada, Biochem. Biophys Acta, v. 741, p. 322 (1983). ⁹ U. Wlenhues, K. Hosokawa, A. Hoveler et al., DNA, v. 6, № 1, с. 81 (1987).

УДК 595.768.13

ЭНТОМОЛОГИЯ

А. П. Карапетян

Новый вид жуков зерновок из Армянской ССР (Coleoptera, Bruchidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 29/XI 1988)

Bruchidius zangezuricus sp. nov.

Голотип ♂ и аллотип ♀ выведены из семян гузырника (*Colutea orientalis*) в окрестностях г. Горис Армянской ССР 13.9. 1984 г. Г. А. Арутюняном. Голотип и аллотип хранятся в коллекциях Института зоологии АН АрмССР.

Тело удлинено-овальное, черное, сверху покрыто густыми коричнево-желтыми и серыми волосками. Серые волоски на надкрыльях образуют более или менее четкие пятна. Пигидий и низ тела в густых серых волосках, без пятен. Усики и ноги желто-красные, основание задних бедер черное.

Голова густо волосистая, мелкоточечная. Лоб в 3,5 раза уже головы, лобный киль сглаженный, шейная перетяжка хорошо выражена. Глаза мелкофасеточные, с глубокой вырезкой за местом прикрепления усиков, которая густо и коротко волосистая. У обоих полов усики сходные, нитевидные, примерно вдвое короче переднеспинки и надкрылий, вместе взятых, заходят за плечи на 2 членика, их 2-й членик такой же длины, как и 3-й, 7—10-й членики почти квадратные (рисунок, б).

Переднеспинка колоколообразная, в 1,6 раза шире длины, мелко шагреневанная, ее бока у середины широко закругленные, без зубца, у вершины втрое уже, чем у основания, ее задние углы острые (рисунок, а).

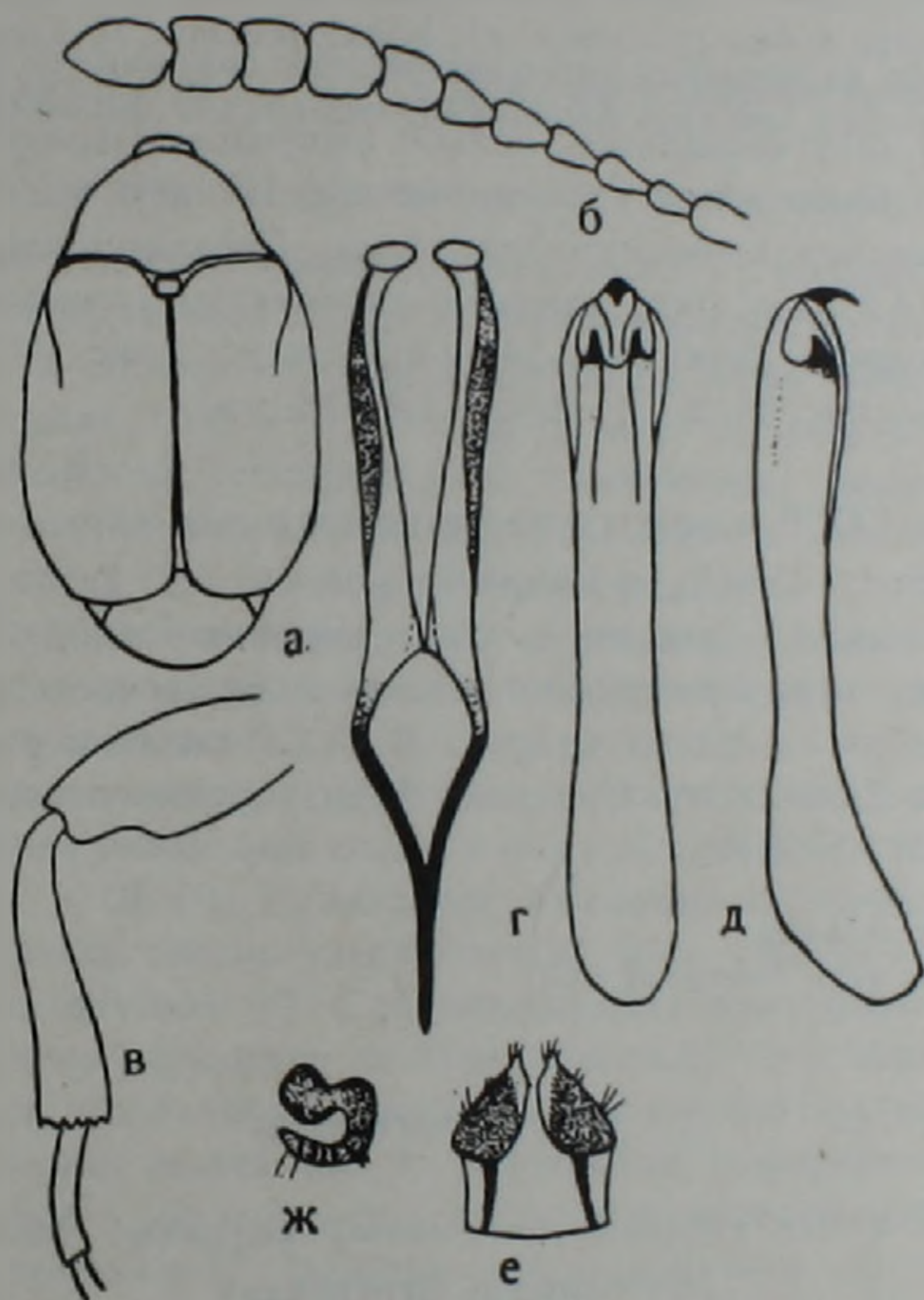
Надкрылья со щитком в 1,3 раза длиннее общей ширины, со слабо закругленными боками и с неглубокими точечными бороздками, у основания бороздок без бугорков. Промежутки между бороздками плоские, в более или менее густых точках, которые частично скрыты под волосками. Плечевые бугорки хорошо развиты. Пигидий пологий, слабо выпуклый, треугольный, почти одинаковой длины и ширины, со слабо закругленными боками.

Задние бедра без зубца (рисунок, в), слегка вздутые, перед вершиной с перетяжкой. Задние голени от основания к вершине изогнуты и расширены, на вершине с зазубринами. 1-й членик задних лапок изогнутый, втрое длиннее 2-го.

Самец: Пенисная трубка выпрямленная, к вершине слабо расширена, с острым вершинным зубцом и с 2 более маленькими предвер-

шинными зубцами на вентральной стороне (рисунок, д). Парамеры удлиненные, обособленные, слабо изогнутые, их вершина загнута под прямым углом, образуя слабо выпуклую пластинку (чем отличаются от парамер всех прочих местных видов).

Самка: Ложный яйцеклад короткого типа (1), генитальные пластинки с боков несут несколько волосков, на вершине с маленькими, зубцевидными, редковолнистыми лопастями (рисунок, е). Сперматека: рисунок, ж. Длина: 3,2—3,6 мм.



Bruchidius zangezurlicus Karapettian sp. nov. а—общий вид, б—усик ♂; в—задняя нога; г—термен с парамерами; д—пенисная трубка с вентральной стороны и сбоку; е—ложный яйцеклад с дорсальной стороны; ж—сперматека

По наружным морфологическим признакам этот вид попадает в одну группу с *B. mulsanti* (Brts.) и *B. seminarius* (L.).

В нашу определительную таблицу (1) он может быть включен следующим образом.

34(37) У обоих полов усики сходные, их вершинные членики квадратные или слабо поперечные, не пильчатые.

35(36) Тело удлинено-овальное, менее выпуклое. Передние и средние, а часто и задние ноги отчасти или полностью желто-красные. Ложный яйцеклад короткого типа.

а(б) Длина 1,9—2,8 мм. Усики едва достигают задних углов передне-спинки. Переднеспинка коническая, с прямолинейными боками,

почти одинаковой длины и ширины. Вершина усиков, лапки передних и средних ног и задние ноги часто целиком черные. Задние бедра с маленьким предвершинным зубцом. Усик: рис. 25, з-е; эдеагус: рис. 31, ж-н; ложный яйцеклад: рис. 35, п. (1).

. *B. seminarius* (L.)

6(a) Длина 3,2—3,6 мм. Усики заходят за плечевые бугорки надкрылий на 2 членика. Переднеспинка колоколообразная, с широко закругленными боками, в 1,6 раза шире длины. Усики и ноги, кроме вершины задних бедер, желто-красные. Задние бедра без предвершинного зубца (рисунок, в). Усик: рисунок, б; эдеагус: рисунок, г, д; ложный яйцеклад: рисунок, е. *B. zangezuristicus* sp. nov.

36(35) Тело короткоовальное, сильно выпуклое. Передние голени и вершина бедер желто-красные, остальная часть ног черная. Ложный яйцеклад промежуточного типа. Переднеспинка поперечная, почти в 1,5 раза шире длины, с равномерно дуговидно закругленными боками. Усик: рис. 24, а-б; эдеагус: рис. 34, г-е; ложный яйцеклад: рис. 36, д (1). Длина 1,4—1,9 мм.

. *B. mulsanti* (Brts.)

В фауне СССР к этой группе относится еще плохо изученный вид *B. kamtschaticus* Motsch., с Камчатки (2).

В Армении на пузырнике был известен лишь *B. fallaciosus* Khnz., резко отличающийся от нового вида, в частности, наличием большого зубца на задних бедрах. В СССР на этом растении развиваются еще 2 вида из Средней Азии, ранее отнесенные к роду *Acanthoscelides* Schilsky.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Պ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ընդակեր բզեզների նոր տեսակ Հայկական խՈՀ-ից
(Coleoptera, Bruchidae)

Ներկա աշխատանքում նկարագրված է ընդակեր բզեզների *Bruchidius* Schilsky սեռի նոր տեսակ *Bruchidius zangezuristicus* Karapetian sp. nov. որը ստացված է Գ. Ս. Հարությունյանի կողմից Գորիսում հավաքված *Coleoptera orientalis* բույսի սերմերից 13. 9. 1984 թ.

Բերվում է որոշիչ աղյուսակ, այս տեսակը սեռի մյուս, ավելի մոտ կանգնած տեսակներից տարրերի ու համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

А. П. Карапетян, Фауна Армянской ССР. Насекомые жесткокрылые. Зерновки (Bruchidae). Изд. АН АрмССР, Ереван, с. 83—157 (1985). 2 Ф. К. Лукьянович, М. Е. Тер-Минасян, Фауна СССР. Жесткокрылые, жуки-зерновки (Bruchidae), т. 24 (1), с. 128—169 (1957).

УДК 547.963.32

МЕДИЦИНА

Х. С. Саядян, А. В. Зильфян

Эволюция механизмов, обеспечивающих кальциевый гомеостаз.
Эволюция кальцийрегулирующей системы клетки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Мирзояном 13/V 1988)

Все живые существа способны регулировать концентрацию Ca^{+2} во внутри- и внеклеточной среде. У млекопитающих концентрации ионизированного и общего кальция подвержены лишь небольшим колебаниям в пределах 10% (^{1, 2}). Осуществляет эту регуляцию многокомпонентная система, состоящая из механизмов, поддерживающих внутриклеточный кальциевый гомеостаз, и гормонов, обеспечивающих стабильный уровень Ca^{+2} во внеклеточной среде.

В настоящей работе выдвигается положение о многоэтапном развитии системы в процессе эволюции, обеспечивающей внутриклеточный кальциевый гомеостаз.

Более трех миллиардов лет назад, когда образовалась жизнь на Земле, первичный океан был богат ионами K^{+} , Mg^{+2} и HPO_4^{-2} и беден ионами Са и Cl (³). Существует обоснованная концепция о том, почему природа «не смогла удержаться от того, чтоб не нагрузить Са одной ролью за другой» (⁴). Сравнительный анализ ионов Са с другими ионами, претендующими на подобную роль (и в первую очередь Mg^{+2}), показал, что размеры иона Са и его способность образовывать большое количество связей (до 8) с донорами электронов дают ему неоспоримое преимущество перед другими химическими элементами, в том числе и магнием (⁵⁻⁷). Возможность обратимо, но в то же время достаточно аффинно ($10^{-7} - 10^{-8}\text{M}$) связываться с белковыми молекулами (^{8, 9}), изменяя при этом их конформацию (а следовательно, и биологическую активность) позволила Ca^{+2} стать эффективнейшим регулятором функциональной активности белков. Благодаря этому Ca^{+2} оказался вовлеченным в создание большинства «базисных» биохимических реакций в самом начале зарождения жизни на Земле. Концентрация его в первичном океане составляла примерно 0.1 мкМ или $4 \cdot 10^{-6} \text{ г/л}$ (^{5, 10}). Такая же концентрация Ca^{+2} поддерживается в цитоплазме клеток благодаря многокомпонентной системе, обеспечивающей внутриклеточный гомеостаз Ca^{+2} и состоящий из: 1) цитозольных Са-связывающих белков, которые, с одной стороны, компенсируют быстрое, скачкообразное изменение концентрации иона, а с другой стороны, являются Са-зависимыми регуляторами клеточных функций (¹¹); 2) митохондрий, которые аккумулируют и выдают большое количество Са (^{6, 11, 12}); 3) мембранных белковых комплексов, осуществляющих функцию кальциевого насоса (¹³). Цитозольные Са-свя-

зывающие белки (тропонин-С, парвальбумин и кальмодулин) имеют высокую гомологию (¹⁴). Кальцийсвязывающие сайты белков в высокой степени сходны (так называемая EF связывающая конфигурация) (¹⁵), что указывает на общность их происхождения. Первым в процессе эволюции, вероятнее всего, образовался кальмодулин (полипептид из 148 аминокислот с 4 центрами связывания) (^{14, 16}), который оказался вовлечен в регуляцию активности таких основополагающих ферментов, как фосфодиэстеразы циклических нуклеотидов и аденилатциклазы, киназы, фосфорилазы и др. (^{14, 16–18}). Кальмодулин содержится как в животных, так и растительных клетках. Типичная клетка содержит в среднем 10^7 его молекул (около 1 суммарного клеточного белка) (^{16, 17}). Цитозольные Са-связывающие белки функционально активны при колебаниях Ca^{++} в пределах 1–2 мкМ или $4 \cdot 10^{-6}$ г/л, что соответствует концентрации Са в первичном океане 3 миллиарда лет назад (^{3, 5}). Земля в ту геологическую эпоху не была защищена озоновым слоем, посему и жизнь развивалась на глубине, где толстый слой воды предохранял от воздействия коротковолнового излучения (³). Температурные изменения на глубинах были невелики, а, следовательно, концентрация Са в воде оставалась практически постоянной. Необходимо отметить, что кроме физических факторов, определяющих среду обитания (температура, освещенность, давление и др.) не менее важными являются также показатели химического состава и, в первую очередь, количественные и качественные соотношения различных физиологически активных ионов. Известно, что для большинства одноклеточных организмов характерно передвижение при помощи ресничек, псевдоподий, жгутиков и др. В основе двигательной активности лежит конформационное изменение определенного класса белков, типа α - и β -тубулина, тропоина, актин-миозина, гельзолина, виллина и др. (^{19–21}). Все эти белки являются Са-зависимыми и эффективно функционируют только при определенной концентрации ионов Са (^{22–24}). Понятно, что при появлении градиента Ca^{++} клетка будет двигаться в сторону оптимума концентрации иона из-за повышения двигательной активности при приближении к оптимуму и наоборот. Действительно, для множества одноклеточных описано передвижение при появлении градиента Ca^{++} (²⁵). Чем выше подвижность клетки, тем больше возможность осуществлять «классический» хемотаксис в сторону как более высоких концентраций аттрактантов (сахаров, аминокислот и др.), так и более низких концентраций репеллентов. Однако этот вид хемотаксиса осуществляется через активацию специфических белковых рецепторов на мембране (²⁶). Эти два вида двигательной активности отличаются друг от друга принципиально по своим механизмам. Таким образом, можно прийти к заключению, что существуют: 1) Са-зависимый хемотаксис (или Ca^{+2} -ионотаксис), направленный на выбор *оптимума* концентрации Ca^{+2} в его градиенте; 2) аттрактантно-репеллентный хемотаксис—в отличие от первого типа («бессознательного») является примитивной разновидностью «разумного поведения» (²⁶), основанного на распознавании белковыми рецепторами «образов» молекул, и направлен на выбор *максимума* или *минимума* соответственно аттрактантов или репеллентов.

Оба эти механизма должны находиться в динамическом равнове-

сии. Причем появление Са-зависимого хемотаксиса в процессе эволюции сыграло важную роль не только в усилении адаптогенных свойств клетки, но и явилось важным механизмом в регуляции внутриклеточной концентрации Ca^{++} . Быстрое изменение иона регулировалось внутриклеточными Са-связывающими белками, а Са-зависимый хемотаксис позволял выбирать оптимум в среде обитания, снимая часть «работы» с цитозольных Са-связывающих белков.

С появлением в среднем рифее озонового слоя (около 1200 млн. лет назад) содержание кислорода в атмосфере достигло 0,2%, что обеспечило возможность защищаться от ультрафиолетового излучения уже только метровым слоем воды (²⁷). Началось интенсивное заселение шельфовых зон морей и океанов. Одноклеточным организмам, заселяющим эти зоны, был необходим более эффективный механизм обеспечения кальциевого гомеостаза, так как изменения концентрации ионов здесь были намного резче из-за влияния континентальных пресных вод и сильных температурных колебаний. Вероятнее всего, именно в этот период митохондрии взяли на себя функцию внутриклеточного динамического депо кальция.

Ca^{++} за счет энергии мембранного потенциала переносится в матрикс митохондрий (¹⁸), где связывается с фосфатом, образуя нерастворимый гидроксиапатит. Это позволяет накапливать и отдавать большие количества Са за сравнительно малый промежуток времени.

Скорость поглощения Са изолированными митохондриями в физиологических условиях достигает половины максимальной лишь при его концентрации вне митохондрий не менее 25 мкМ, что намного выше нормального внутриклеточного уровня (⁸⁻⁹).

Появление внутриклеточного депо резко расширило возможности адаптации в шельфовой зоне. Однако эта система была эффективна только при экстрацеллюлярной концентрации Са не выше 100 мкМ (³⁻⁵). При высоких концентрациях Ca^{++} токсичен в силу использования энергии градиента на свой транспорт а также вследствие полного прекращения синтеза АТФ (⁸⁻⁹) и накопления большого количества нерастворимого гидроксиапатита, приводящего к разобщению ферментативных реакций (³⁻⁵).

Когда 600 млн. лет назад за геологически короткий период времени произошло резкое повышение концентрации Са в мировом океане (приблизительно в 10 000 раз) (¹⁰⁻²⁷), возможно, именно отсутствие эффективного механизма регуляции гомеостаза Са явилось причиной гибели вендской флоры и фауны. Выжили в этих условиях те клетки, которые создали в своих мембранах эффективные механизмы, способные поддерживать крутой градиент в 10^4 М.

Появление современных методов измерения внутриклеточной концентрации Ca^{+2} (²⁸⁻³¹) позволило показать, что механизмы, обеспечивающие Са-гомеостаз клетки, работают взаимосвязанно. Г. Рассмусеном и П. Баррет была дана схема сопряженного действия кальциевого мембранного насоса, кальцийсвязывающих белков цитоплазмы и транспорта Са в митохондрии (⁷), причем показана высокая специфичность действия этих механизмов.

Таким образом, обобщая вышеприведенное, можно сказать, что большинство биохимических реакций в клетке объясняется участием

не только самого иона, но и механизмов, обеспечивающих его гомеостаз, в наиболее эволюционно древних метаболических реакциях. Эволюцию Са-регулирующей системы клетки можно разделить на 4 крупных этапа: 1) появление в архее белковых структур, обладающих высоким сродством к Са (появление EF-конфигурации); 2) создание механизма Са-зависимого нонотаксиса (Са-хемотаксиса); 3) возникновение в рифее митохондриального депо Са; 4) появление кальцевого насоса на границе венда и кембрия

Появление каждого нового механизма в системе резко расширяло возможности адаптации клетки к изменениям в среде обитания.

Ереванский медицинский институт

Խ. Ս. ՍԱՅԱԴՅԱՆ, Ա. Վ. ԶԻՆՅԱՆ

Կալցիումի հոմեոստազը ապահովող մեխանիզմների ձևաշրջումը
Բջջի կալցիում-ոնեգուլյուստոր համակարգի ձևաշրջումը

Ներկայացված է վարկած, որտեղ հիմնավորվում է բջջում կալցիումի հոմեոստազի ապահովման մեխանիզմների զարգացումը երկրաբանական հեղաշրջումներին զուգահեռ: Քննարկվում են կալցիումի հետ կապեր ստեղծող սպիտակուցների, միտոքոնդրիանների և թաղանթային Са—պոմպի առաջացման պայմանները առաջնային օվկիանոսում:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. D. H. Cope, Clinical Endocrinol. Metabol., № 1, p. 21 (1972). ² Э. Мур, в кн.: Ионоселективные электроды. Под ред Р. Дарста, Мир, М., с. 221—279, 1972.
- ³ V. J. Dreier, The Geochemistry of natural waters Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. № 9, p. 275—276 (1982). ⁴ W. R. Lowenstein, B. Rose, Ann. of N. Y. Acad. Sci., v. 307, № 2, 255—307 (1978). ⁵ Э. Карафолу, Д. Т. Пелингтон, В мире науки, № 1, с. 28—38 (1986). ⁶ E. Carafoli, M. Compton, in: Current Topics in Membranes Transport. C. H. Bourne, J. Danielli (Eds) Acad. Press, v. 10, № 7, p. 151—217 (1978). ⁷ H. Rassmussen, P. Q. Barret, Physiological Reviews, v. 64, № 3, p. 938—984 (1978). ⁸ P. C. Hinkle, R. E. McCarty, Sci. Am., v. 238, № 3, p. 104—123 (1978). ⁹ M. Klengenberg, Trends Biochem Sci., № 4, p. 249—252 (1979). ¹⁰ W. S. Broecker, Chemical Oceanography. Harcourt Brace Jovanovich, № 7, p. 214 (1981).
- ¹¹ R. H. Kretsinger, Inter. Rev. Cytology, v. 46, ,. 323—395 (1976). ¹² F. R. Bygrave, Biol. Rev., v. 53, № 1, p. 43—79 (1978). ¹³ B. Sarcodi, D. C. Tosteron, in: Membrane Transport in Biology. G. Gleblsch, Tosteron D. C. eds, Springer, Berlin, v. 2, 117—160 (1982). ¹⁴ A. R. Means, J. R. Dedman, Nature, v. 285, № 1, p. 73—77 (1980). ¹⁵ W. J. Cheung, Science, v. 207, № 1, p. 19—27 (1980). ¹⁶ C. B. Klee, T. H. Gronch, P. C. Richman, Ann. Rev. Biochem., v. 49, № 3, p. 489—515 (1980).
- ¹⁷ W. J. Cheung, Sci. Am., v. 246, № 6, p. 49—56 (1982). ¹⁸ R. H. Kretsinger, Neurosci. Res. Programm Bull., v. 19, № 2, p. 213—328 (1981). ¹⁹ B. Katz, Nerve, muscle and synaps. New York, Mc Craw Hill, p. 39—114, 1966. ²⁰ J. M. Murray, A. Weber, Sci. Am. v. 230, № 2, p. 59—71 (1974). ²¹ R. S. Allenstein, E. Eiseberg, Ann. Rev. Biochem. v. 49, № 5, p. 921—956 (1980). ²² K. E. Summer, J. R. Gibbons, Proc. Natl. Acad. Sci. USA v. 68, № 6, p. 3052—3056 (1971). ²³ R. C. Weisenberg, Science, v. 177, № 6, p. 1107—1115 (1972). ²⁴ H. L. Illn, T. P. Stossel, Nature, v. 284, № 2, p. 583—586 (1970). ²⁵ J. Adler, Sci. Am., v. 234, № 4, p. 40—47 (1976). ²⁶ D. E. Koshland, Trends Biochem. Sci., № 5, p. 297—301 (1980). ²⁷ Историческая геология, Непри, М. с. 94—94, 1986. ²⁸ M. O. Atsoy, R. A. Murphy, K. E. Kamm, Am. Physiol., v. 245 (Cell physiol. 14), p. 255—270 (1983). ²⁹ J. R. Blants, W. G. Wier, P. Hess et al., Prog. Biophys. Mol. Biol., v. 40, № 1, p. 1—114 (1981). ³⁰ A. B. Bosle A. W. Snowdowne, Science, v. 217, № 2, p. 252—254 (1982). ³¹ R. I. Tsiem, T. Pozza, T. S. Pink, S. Cell Biol., v. 94, № 2, p. 325—334 (1981).

УДК 617.55—009.7—06:612.55—616.447—07

МЕДИЦИНА

В. М. Арутюнян, Г. А. Григорян

Состояние гормональной регуляции кальциевого обмена при периодической болезни

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР К. Г. Карагезяном 29/VII 1988)

В последние годы все большее внимание исследователей стали привлекать вопросы нарушения обмена кальция в патогенезе различных заболеваний. Изменение содержания ионизированного кальция, нарушение мембранных механизмов его транспорта считается одним из изначальных звеньев общепатологического процесса ⁽¹⁾. Исключительно разнообразное физиологическое значение кальция предопределяет множественность клинических проявлений патологии кальциевого обмена ⁽²⁾. Хотя в отечественной и зарубежной литературе есть немало данных о состоянии различных желез внутренней секреции при периодической болезни (ПБ) ^(3,4), патогенез и клиническое значение нарушений регуляции кальциевого обмена остаются малонизученными. В связи с этим и проведено настоящее исследование.

Обследовано 105 больных ПБ (67 мужчин, 38 женщин) в возрасте от 16 до 62 лет. Функциональное состояние околощитовидных желез исследовали путем прямого радиоиммунологического определения паратгормона (ПТГ) в сыворотке крови с помощью стандартных тест-наборов реагентов фирмы «Вук-Малликрод» (ФРГ). Аналогичным методом изучали содержание тиреокальцитонина (КТ) в крови, используя наборы фирмы «Сиз» (Франция). Концентрацию ПТГ и КТ выражали в пмоль/л, сыворотку для определения гормонов хранили при —20°С. Концентрацию кальция определяли фотометрическим методом, основанным на реакции с глюксальбис-2-оксанилом. Показатели ионизированного кальция рассчитывали по формуле Маклеана и Хастинга, предварительно определяя для этого общий белок по Лоури. Содержание неорганического фосфора в сыворотке крови устанавливали с помощью набора реактивов для определения фосфора Био-Латест (Чехословакия). Показатели ионизированного кальция и неорганического фосфора выражали в ммоль/л.

Одновременно вышеуказанные показатели были определены у 15 родственников больных первой степени родства, являющихся практически здоровыми людьми. В качестве контроля были обследованы 30 практически здоровых лиц. Полученные данные обрабатывали методом вариационной статистики.

Статистически достоверных различий в содержании ПТГ и КТ в крови мужчин и женщин (как здоровых, так и больных) обнаружено не было, что согласуется с данными Виске и соавт. ⁽⁵⁾.

В результате обследования больных ПБ было отмечено, что у них по сравнению со здоровыми людьми, как при приступе заболевания, так и во внеприступном периоде, выявляется функциональная недостаточность околощитовидных желез, проявляющаяся снижением содержания уровня ПТГ в сыворотке крови, умеренно выраженной гипокальциемией и гиперфосфатемией (табл. 1).

Уровень кальцитонина как у здоровых лиц, так и у больных ПБ в приступном периоде остается в пределах нормы. Взаимосвязи между

Таблица 1

Содержание ПТГ, КТ, Ca^{++} и неорганического фосфора в сыворотке крови у здоровых людей и больных ПБ в период приступа и во внеприступном периоде ($M \pm m$)

Обследованные	ПТГ, пмоль/л	КТ, пмоль/л	Ca^{++} , ммоль/л	Неорганический фосфор, ммоль/л
Здоровые (П=30)	39.61 ± 2.85	48.31 ± 1.93	1.12 ± 0.05	1.20 ± 0.11
Больные в период приступа (П=29)	$16.84 \pm 1.82^*$	49.58 ± 3.76	$0.92 \pm 0.03^*$	1.64 ± 0.08
В период между приступами (П=105)	$16.88 \pm 3.51^*$	49.53 ± 4.75	0.93 ± 0.02	1.61 ± 0.09

* Различия по сравнению с нормой достоверны ($P < 0,05$).

степенью гипопаратгормонемии и гипокальциемии с клиническим вариантом заболевания ПБ (абдоминальным, торакальным, суставным, смешанным) и наличием сопутствующих заболеваний, предшествующих оперативным вмешательствам, не выявлено. Такие причины гипокальциемии, как энтериты, целиакия, острый панкреатит, бронхопневмония, у больных были исключены. Кроме того, среди обследованных больных не было кормящих и беременных женщин. Воздействие длительности заболевания на содержание кальцийрегулирующих гормонов в крови отражено в табл. 2.

Таблица 2

Содержание ПТГ, КТ, Ca^{++} и неорганического фосфора в сыворотке крови больных ПБ в зависимости от длительности заболевания ($M \pm m$)

Давность заболевания	Число обследованных	ПТГ, пмоль/л	КТ, пмоль/л	Ca^{++} , ммоль/л	Неорганический фосфор, ммоль/л
До 6 мес.	2	28.50 ± 0.91	49.61 ± 4.75	1.12 ± 0.02	1.21 ± 0.07
6 мес.—1 год	4	29.05 ± 2.84	48.67 ± 0.84	2.10 ± 0.06	1.19 ± 0.04
1 год—5 лет	25	10.62 ± 1.10	52.64 ± 4.94	0.98 ± 0.02	1.49 ± 0.03
5—10 лет	21	18.65 ± 3.97	48.53 ± 2.86	0.92 ± 0.10	1.51 ± 0.09
10—15 лет	29	16.14 ± 2.65	49.28 ± 3.99	0.92 ± 0.01	1.60 ± 0.07
15—20 лет	10	16.18 ± 3.88	54.92 ± 2.11	0.91 ± 0.03	1.70 ± 0.04
21—25 лет	5	15.68 ± 1.42	50.45 ± 9.69	0.92 ± 0.04	1.68 ± 0.04
25—30 лет	8	16.01 ± 3.62	45.64 ± 8.83	0.90 ± 0.05	1.69 ± 0.06
Более 30 лет	1	15.79	48.62	0.93	1.62

Как видно из таблицы, при длительности заболевания до 1 года содержания паратгормона и кальция приближаются к таковым у здоровых людей. Гипопаратгормонемия и гипокальциемия наблюдаются при длительности заболевания более 5 лет и достигают максимальной выраженности при длительности заболевания от 20 до 25 лет, при дли-

тельности заболевания свыше 25 лет имеет место относительная стабилизация изучаемых показателей. При анализе частоты приступов ПБ от гипопаратгормонемии выяснилось, что частота приступов у больных с уровнем ПТГ в сыворотке крови менее $18,05 \pm 0,58$ в 1,9 раза превосходила частоту приступов у больных, уровень паратгормона в сыворотке которых приближался к нормальным величинам.

Одновременно у первой категории больных были более выраженными продолжительность температурного синдрома (в среднем на 11,3 ч). Уровень кальцитонина, независимо от длительности заболевания, частоты приступов, продолжительности температурного болевого синдрома при ПБ, оставался в пределах нормы.

Для ПБ характерно частое развитие амилоидоза, который рассматривается в качестве основного проявления этого заболевания при II фенотипе ПБ (6). Нами изучены показатели функциональной активности околощитовидных желез и КТ у 26 больных амилоидозом почек. При наличии у больных ПБ амилоидоза почек гипокальциемия и гиперфосфатемия, а также гипопаратгормонемия были выражены сильнее, особенно в терминальной (уремической) стадии амилоидного нефроза. Уровень кальцитонина, продолжая оставаться в норме, при II и III стадиях амилоидного нефроза составляет, однако, не более 59 и 65% (соответственно) своего содержания в сыворотке крови у всех обследованных нами больных ПБ (в среднем). У больных ПБ с амилоидозом почек гипопаратгормонемия достигала максимальной выраженности при наличии хронической почечной недостаточности (терминальная или уремическая стадия амилоидоза почек).

Таким образом, при периодической болезни имеет место паратиреоидная недостаточность, выраженность которой находится в прямой связи с длительностью заболевания. Поскольку ПБ относится к заболеваниям с аутосомно-рецессивной формой наследования, уровень кальцийрегулирующих гормонов был изучен и в крови родственников больных первой степени родства. У всех обследованных содержание ПТГ и КТ было в пределах нормы и не отличалось от контрольных показателей.

По всей видимости, нарушение функции околощитовидных желез при ПБ носит неспецифический характер, отсутствует у ближайших родственников больных и проявляется по мере клинической эволюции заболевания. Именно гипопаратгормонемией обусловлены наблюдаемые нами гипокальциемия и гиперфосфатемия, поскольку уровень кальцитонина оставался нормальным у всех обследованных больных. Паратиреоидная недостаточность оказывает неблагоприятное патогенетическое действие, что выражается в учащении приступов и их большей продолжительности у больных с наиболее низким уровнем ПТГ в сыворотке крови.

Гипофункция околощитовидных желез является фактором, способствующим резкому повышению проницаемости сосудов (7), что не может не отражаться на возникновении приступов ПБ, названных Н. Гращенковым «кризами проницаемости» (8).

При экспериментальном гипопаратиреозе показано выраженное повышение сосудистой проницаемости на фоне дегрануляции тучных

клеток, а также повышенная проницаемость микрососудов брюжейки и плевры (^{9, 10}). В то же время дегрануляции клеток и повышению сосудистой проницаемости в настоящее время придается важное значение в патогенезе ПБ (¹¹).

Приведенные данные позволяют заключить, что при ПБ наблюдаются нарушения гормональной регуляции кальцевого обмена, оказывающие неблагоприятное патогенетическое воздействие на возникновение, частоту и продолжительность характерных для этого заболевания приступов.

Таким образом у больных ПБ в сыворотке крови выявлено снижение уровня паратгормона, ионизированного кальция, повышение уровня неорганического фосфора при нормальном содержании кальцитонина, которые находятся в прямой зависимости от давности и частоты приступов заболевания.

При развитии амилоидоза и его прогрессировании у больных ПБ указанные нарушения, гормональные и метаболические, еще более усугубляются.

Нарушения гормональной регуляции кальцевого обмена при ПБ и амилоидозе оказывают неблагоприятное патогенетическое воздействие на течение заболевания и нуждаются в терапевтической коррекции.

Кафедра внутренних болезней № 2.

Ереванский медицинский институт

Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Ա. ԴՐՐԴՐՅԱՆ

Կալցիումի փոխանակության հորմոնալ կանոնավորման վիճակը
պարբերական հիվանդության ժամանակ

Պարբերական հիվանդությամբ տառապող հիվանդների մոտ, արյան սի-
ճուկում ռադիոիմունոլոգիական և բիոքիմիական հետազոտության եղանակ-
ներով հայտնաբերվել է պարաթիրոիդի, իոնիզացված կալցիումի քանակի
իջեցում, անօրգանական ֆոսֆորի քանակի բարձրացում, կալցիտոնինի նոր-
մալ քանակի պայմաններում:

Նշված փոփոխությունները գտնվել են որոշակի կախման մեջ, հիվանդու-
թյան վաղեմիությունից, սրացման հաճախականությունից, ամիլոիդոզի զար-
դացման շրջանից:

Քննարկվում է հարվահանաձև գեղձերի գործունեության անբավարարու-
թյան դերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Г. Чучалин, Терапевтический архив, № 1, с. 127 1987. ² Ю. В. Наточин, Те-
рапевтический архив, № 8, с. 7, 1987. ³ А. А. Айвазян, в кн.: Периодическая болезнь,
Ачастан, Ереван, 1982. ⁴ H. Mamon, Presse Med., v. 78, p. 735 (1970). ⁵ P. S. Wlske,
P. Epstein, R. Bell, New Engl. J. Med., v. 500, № 25, p. 1219 (1979). ⁶ О. М. Вино-
градова в кн.: Первичный и генетический варианты амилоидоза, Медицина, М.,
1980. ⁷ A. De Benedetti, A. Millo, B. Pierini et al., Experientia v. 19, № 2, p. 99—100
(1963). ⁸ Н. Н. Грищенко, в кн.: Гипоталамус и его роль в физиологии и патологии,
медицина, М., 1964. ⁹ Г. С. Бежинов, А. В. Зильфян, Журн. эксп. и клинич. мед. АН
АрмССР, т. 20, № 6, с. 682 (1980). ¹⁰ Д. Н. Хулавердян, А. В. Зильфян, Бюлл. эксп.
биологии и медицины, № 11, с. 24—26, 1982. ¹¹ О. М. Виноградова, БМЭ, т. 19, с. 67,
1982.

УДК 615.017.8

ФИЗИОЛОГИЯ

Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг, С. Н. Айрапетян

К фармакологической характеристике командных нейронов
 оборонительного поведения виноградной улитки

(Представлено академиком АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 16/XI 1988)

Данные о корреляции между активностью Na-насоса и количеством хеморецепторов и каналов на мембране нейронов, а также сродством рецепторов (¹⁻²) поставили вопрос о возможном физиологическом значении этих механизмов в выработке целостных реакций нейронных сетей-аналогов обучения. Чтобы вплотную подойти к изучению роли различных метаболических внутриклеточных факторов (Na-K-АТФаза, система вторичных посредников и др.) в процессах обучения и памяти, нам представлялось необходимым прежде всего исследовать хеморецептивные свойства идентифицированных командных нейронов (ЛПа2, ППа2, ЛПа3, ППа3), участвующих в организации безусловного оборонительного рефлекса закрывания дыхальца (³). В качестве модели этой реакции применяли одиночную электрическую стимуляцию мачтимального нерва (10—40 мА, 1 мс) препарата «ЦНС-хеморецептор» (⁴) виноградной улитки (*Helix Pomatia*).

Препарат фиксировали в проточной камере объемом 1 мл. После трехминутной обработки папанном при комнатной температуре удаляли оболочки, покрывающие ганглии. Камеру подключали к системе непрерывной перфузии раствором Рингера (²). Внутриклеточную электрическую активность отводили с помощью стеклянных микроэлектродов (2,5 М KCl, 8—10 МОм) и записывали на бумагу самописца (Г-338) с одновременным визуальным контролем на экране осциллографа. Медиаторы ацетилхолин (АХ) и норадреналин (НА) 1 мл вводили в проток непосредственно у входа в камеру, обеспечивая таким образом нужную физиологическую концентрацию веществ (5×10^{-5} М) в камере в момент инъекции. В экспериментах использованы 35 препаратов изолированного «ЦНС-хеморецептор» и исследованы 65 нейронов.

Опыты показали, что исследованные командные нейроны АХ-чувствительны (³⁻⁵). Ответная реакция на АХ проявлялась в виде деполяризации, которая носила, однако, вероятностный характер. В ряде случаев ответ вообще отсутствовал (⁶), что особенно характерно было для нейрона ППа3. Сам деполяризующий эффект был в основном подпороговым (рис. 1), хотя иногда на фоне медленной деполяризационной волны появлялись спайки (рис. 2, Б). Величина деполяризационного ответа на АХ в разных опытах варьировала.

В серии эксперимента изучалось влияние АХ на ответы командных нейронов, вызванных электрической стимуляцией мантийного нерва. Показано, что АХ подавляет эти ответы (рис. 2, В). Но в ряде случаев угнетение спайковой активности не наблюдалось.

Те же нервные клетки в разных опытах проявляли двойкий тип

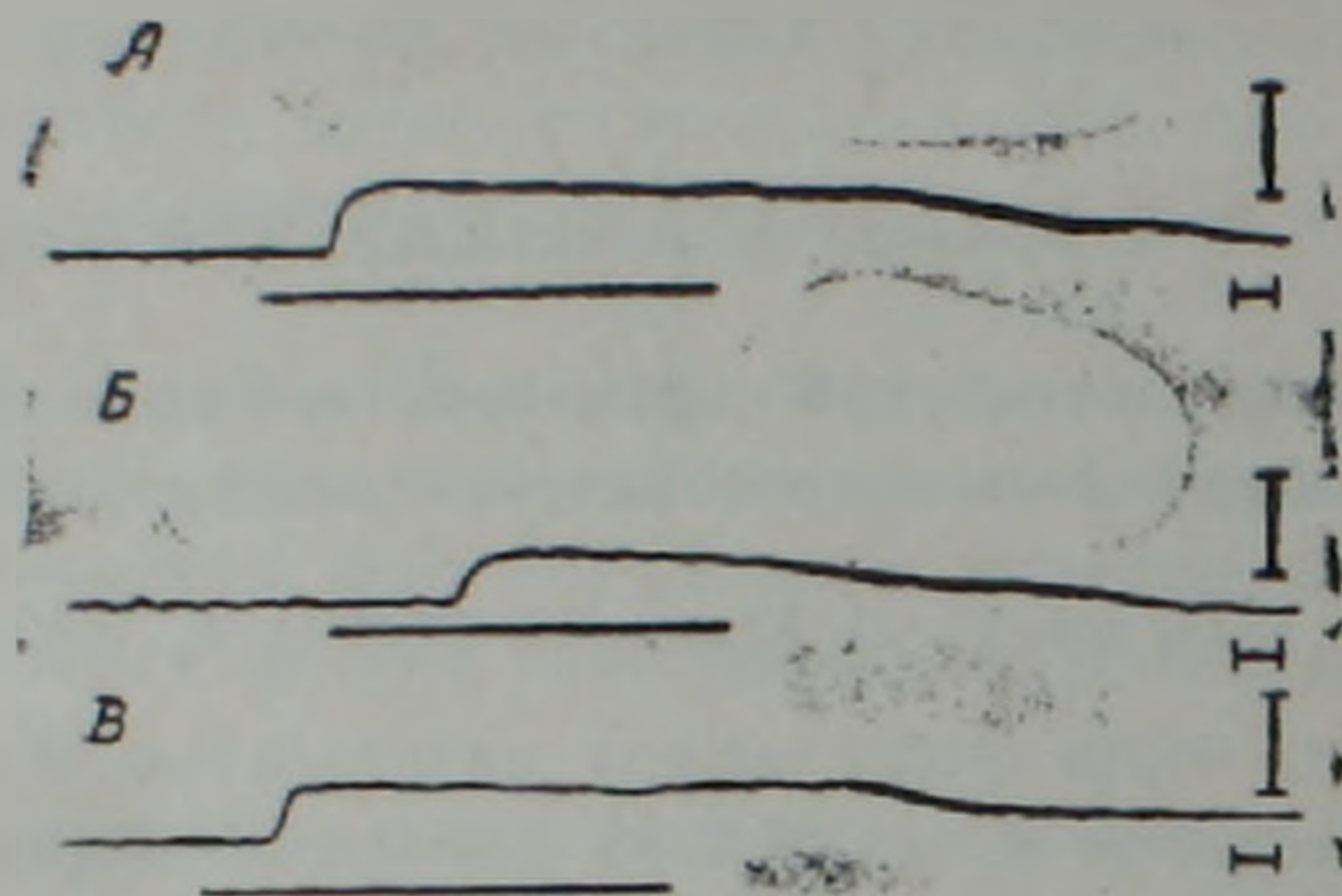


Рис. 1. Денполяризирующий эффект АХ на командные нейроны. А, Б, В—подпороговые ответы нейронов ЛПаЗ, ППа2, ЛПаЗ соответственно. Горизонтальная линия под нейрограмм—отметка введения АХ. Калибровка: 40 мВ, 5 с (А, Б) и 2 с (В)

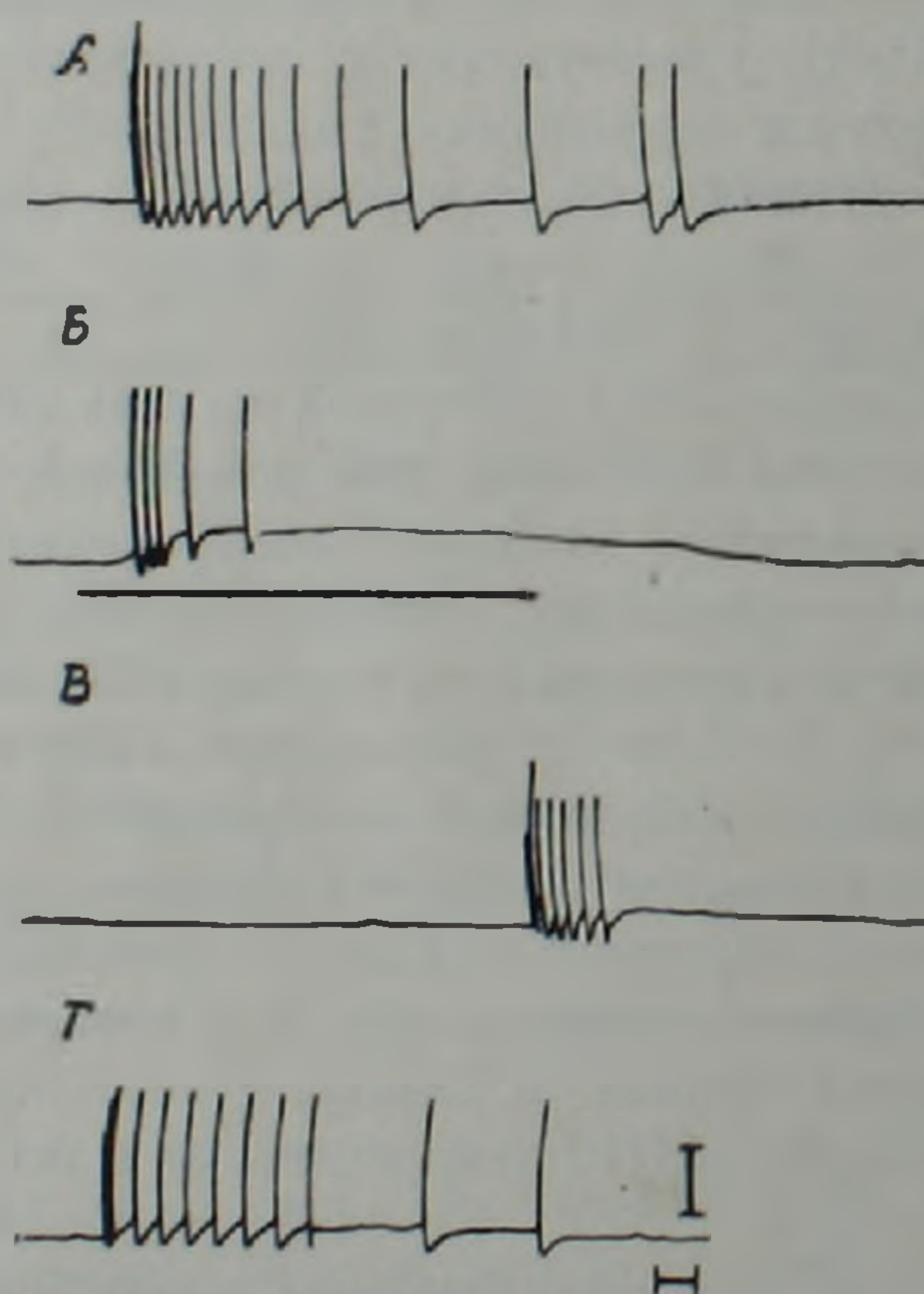


Рис. 2. Подавляющий эффект АХ на вызванную активность нейрона ЛПаЗ. А—ответ нейрона на электрическую стимуляцию нерва до введения АХ; Б—спайковая активность нейрона, вызванная АХ; В—ответ нейрона на электрическую стимуляцию нерва через 1 мин и Г—через 5 мин после инъекции АХ. Калибровка: 40 мВ, 5 с

реакции в ответ на аппликацию НА. Один—монофазный в виде деполяризации со спайковой активностью (рис. 3, А), другой—двухфазный в виде начальной гиперполяризации с последующей медленной волной деполяризации, на гребне которой возникали спайки (рис. 3, Б—Г). В обоих случаях в сравнении с АХ ответ на НА был более продолжительным.

Характерным для реакции командных нейронов на НА является то, что в фазе гиперполяризации фазовые ВПСН (возбуждающий постсинаптический потенциал) не только сохранялись (6), но появлялись, если их не было (рис. 3, В). Вместе с тем спайки, предшествующие аппликации НА, в фазе гиперполяризации исчезали при сохранении ВПСН (рис. 3, Г). В фазе деполяризации увеличение мембранного потенциала приводило к усиленной спайковой активности (рис. 3, А—Д).

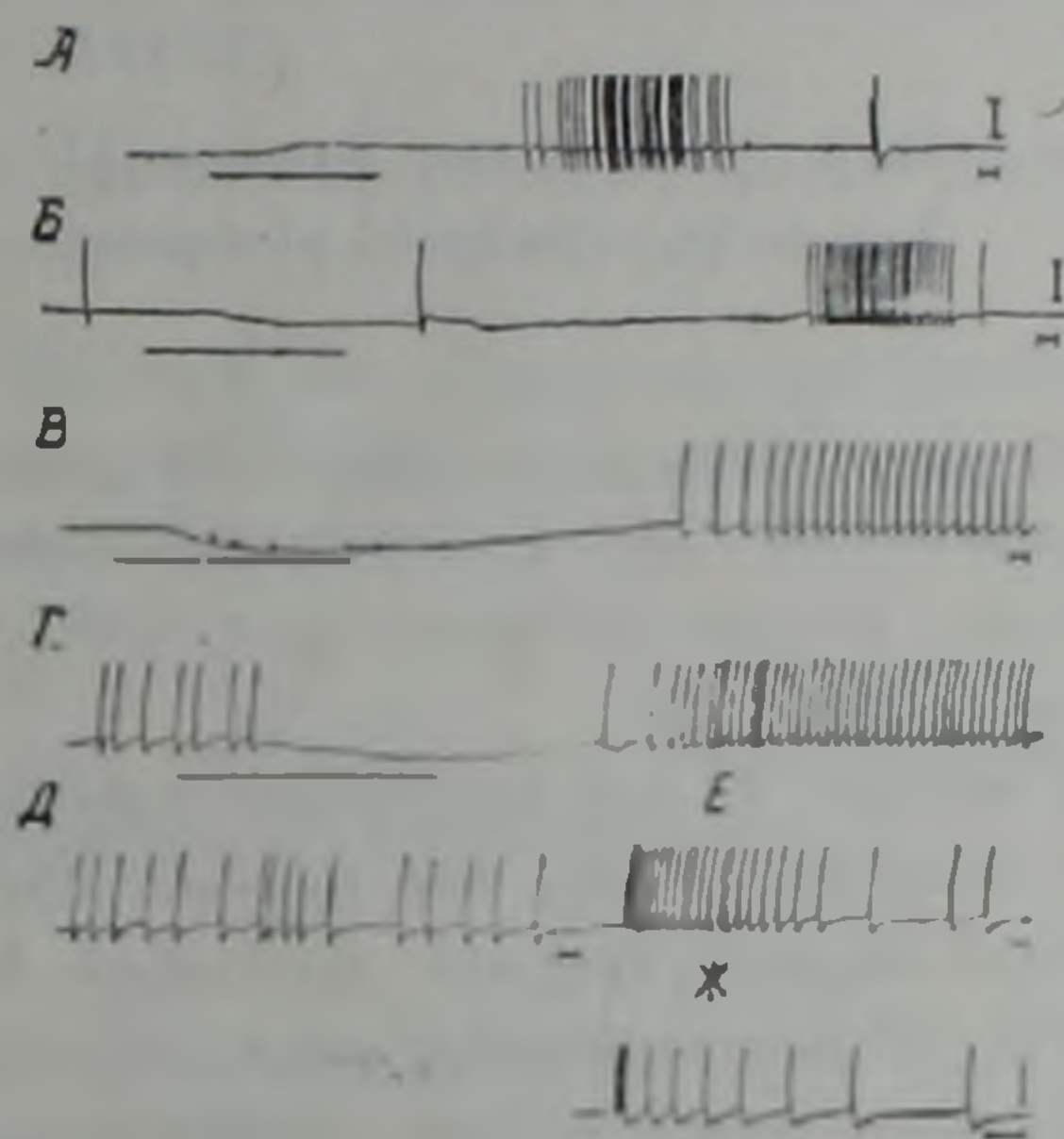


Рис. 3. Эффекты НА на активность командных нейронов. А—монофазный деполяризирующий ответ нейрона ППа2; Б—подавление ответа нейрона (ЛПа3), вызванного электрической стимуляцией нерва в фазе гиперполяризации; В—появление ВПСН в фазе гиперполяризации (ЛПа3); Г, Д—угнетение спайковой активности нейрона (ЛПа3) в фазе гиперполяризации; Е—потенцирующий эффект НА на ответы нейрона (ЛПа3), вызванного раздражением нерва; Ж—ответ нейрона (ЛПа3) на электрическую стимуляцию нерва до введения НА. Калибровка: 40 мВ, 2 с (Е, Ж) и 5 с (А—Д).

Нами изучалось также влияние НА на состояние нервной сети оборонительного рефлекса. При сочетании электрической стимуляции мантийного нерва с аппликацией НА было обнаружено, что оба эти фактора при своем деполяризующем действии одинаково повышают хемочувствительность мембран командных нейронов и в результате наступает потенциация активности последних (рис. 3, Е).

В фазе НА—гиперполяризации эффекты электрического раздражения нерва значительно угнетаются (рис. 3, Б). Потенцирующий эф-

фект НА по сравнению с подавляющим действием АХ был значительно дольше. Он мог длиться несколько минут.

Полученные факты позволяют заключить, что командные нейроны оборонительного поведения чувствительны к физиологическим дозам АХ и НА при их системном введении в препарат «ЦНС-хеморецептор». Допускается возможность участия адренергических механизмов в следовых процессах, происходящих в нервной сети оборонительного рефлекса закрывания дыхальца виноградной улитки.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Գ. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՍՏՈՂԲԵՐԳ, Ս. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Խիտունների կառավարող նյարդային բջիջների ֆարմակոլոգիական բնութագիրը

Ուսումնասիրությունները կատարվել են խիտունջի մեկուսացված նյարդային հանգույցների վրա: Ներբջջային միկրոէլեկտրոդային մեթոդով գրանցվել են խիտունջի շնչառական համակարգը կարգավորող նեյրոնների էլեկտրական ակտիվությունն, ինչպես հանգիստ պայմաններում, այնպես էլ հրահրված պոտենցիալների ձևով:

Փորձերը ցույց տվեցին, որ այդ նյարդային բջիջները հիմնականում լուսայաց բջիջներ են և ակտիվանում են, երբ գրգռում ենք նրանց զգացող նյարդային ուղիները, կամ ազդում որոշակի քիմիական նյութերով: Այսպես, ացետիլխոլինը ($5 \times 10^{-5} M$) ուսումնասիրված 4 տեսակի բջիջների մոտ առաջացնում է էլեկտրական ակտիվության ապաբևեռացում, իսկ առանձին դեպքերում ընդհուպ մինչև գործողության պոտենցիալների առաջացումը: Սակայն ացետիլխոլինից ընկճվում են նույն բջիջների զգացող ներվաթելերի գրգռումից հրահրված գործողության պոտենցիալները:

Փորձի նույն պայմաններում նորադրենալինն առաջացնում է բջջի էլեկտրական ակտիվության երկֆազ փոփոխություն՝ բջիջների թաղանթի պոտենցիալների սկզբնական գերբևեռացումը փոխարինվում է ապաբևեռացման, որի ժամանակ առաջ են գալիս գործողության պոտենցիալներ: Մյուս կողմից նորադրենալինը կարող է ուժեղացնել բջջի հրահրված գործողության պոտենցիալները: Նորադրենալինի քիմիական մեխանիզմները կարող են մասնակցել խիտունջների շնչառական ռեֆլեքսների կենտրոնական նյարդային ցանցում հետքային երևույթների առաջացման և կարգավորման գործում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. N. Ayrapetyan, V. L. Arvanov, S. B. Maginyan e. a., Cell. Molec. Neurobiol., v. 5, №3, p. 231—243 (1985). ² S. N. Ayrapetyan, M. A. Suleymanyan, A. A. Saghiyan e. a., Cell. Molec. Neurobiol., v. 4, p. 367—383 (1984). ³ Д. А. Сахаров Генезис нейтронов. Наука, М., 1981. ⁴ О. С. Максимова, П. М. Балабан, Нейронные механизмы пластичности поведения. Наука, М. 1983. ⁵ Т. П. Норекян, Д. Б. Логунов, Е. Н. Соколов, Нейрофизиология, т. 17, №4, с. 530—536 (1985). ⁶ М. В. Чистякова, Журн. вышшей нервной деятельности, т. 37, №1, с. 122—127 (1987)