

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
Д О К Л А Д Ы

Том 88 № 3

1989

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկե-
ծու (պատ. ֆաբտուդար), է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԲԱՆԱՅԱՆ,
ՀԽՍՀ ԳԱ քղր. առդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղա-
կալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ քղր.
առդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵՂՈՒԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ քղր.
առդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻ-
ՔՈՆՆԻՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ.
ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН АрмССР (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН
АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-
корр. АН АрмССР (отв. редактор),
А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН
АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, ака-
демик АН АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱՔԵՄԱՏԻԿԱ

- Դ. Տ. Բաղդասարյան, Ա. Կ. Հունանյան—Մ. Մ. Զրբաշյանի $B(z, z_k)$ ար-
տադրյալների մոդուլի գնահատական ներքինից 99
- Ա. Հ. Սարգսյան—Պարզ ծրագրերի մի դասի համար օրինակելի լրիվ համակարգ
կառուցելու պրոբլեմը 108
- Ա. Է. Զրբաշյան—Ինտեգրալ ներկայացումներ միավոր գնդում հարմոնիկ վեկտո-
րական ֆունկցիաների դասերի համար 112

ՄԵՆԱՆԻԿԱ

- Ա. Դ. Իրոզդով—Առաձգական մարմինների իրարից անջատման տեսության մեջ
Գիրսի մեթոդը 117

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

- Ռ. Լ. Աբրահամյան—Առաձգականության տեսության խնդիրներում հանդիպող Բես-
սելի ֆունկցիաներով որոշ զույգ ինտեգրալ հավասարումների վերաբերյալ . . . 121
- Ա. Ա. Բաբյոյան, Լ. Մ. Վալդանյան—Հատած սեպի ջերմային խնդիր . . . 125

ՖԻԶԻԿԱ

- Կ. Լ. Հովհաննիսյան, Ա. Գ. Պետրոսյան, Գ. Հ. Շիրինյան—Բարիումի մետաբորա-
տի α - և β -ֆազերի հալույթից առաջանալու առանձնահատկությունները 130

ԳՆՈՖԻԶԻԿԱ

- Ա. Ն. Կոզլով, Գ. Մ. Հովհաննիսյան, Յու. Պ. Սկովորովիչ—Լեռնային ապարների
ջրահագեցած և չոր նմուշներում էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի առաջացումը
մշման ազդեցության տակ 135

ԿԵՂԱԴՈՐԾՈՒԹՅՈՒՆ

- Ս. Է. Հակոբով, ՈՒ. Ա. Սարգսյան—Նիֆեդիպինի ֆարմակադինամիկայի և ֆարմա-
կալինետիկայի ուսումնասիրումներ ուղեղի արյան շրջանառության խանգարման ժամանակ 140

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Д. Г. Багдасарян, А. Г. Унанян—Оценка снизу модуля произведений $B(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна 90
- А. А. Саркисян—О проблеме построения полной системы примеров для одного класса простых программ 108
- А. Э. Джрбашян—Интегральные представления для классов гармонических векторных функций в единичном шаре 112

МЕХАНИКА

- А. Д. Дроздов—Метод Гиббса в теории отрыва упругих тел 117

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Б. Л. Абрамян—О некоторых интегральных уравнениях с функциями Бесселя, встречающихся в задачах теории упругости 121
- А. А. Баблоян, Л. М. Варданян—Температурная задача для усеченного клина 125

ФИЗИКА

- К. Л. Сванесян, А. Г. Петросян, Г. О. Едильян—Способности образования α - и β -фаз метабората бария из расплава 130

ГЕОФИЗИКА

- А. Н. Козлов, Г. М. Оганесян, Ю. П. Сквородкин—Возникновение электрических и магнитных полей во влагонасыщенных и сухих образцах горных пород под действием давления 135

ФАРМАКОЛОГИЯ

- С. Э. Акопов, М. А. Саркисян—Исследование фармакодинамики и фармакокинетики нифедипина при нарушениях мозгового кровообращения 140

CONTENTS

MATHEMATIC

- D. T. Bighdasarian, A. G. Hovhann*—The estimate from below of $B_1(z, z_1)$ modulus of M. M. Džrbishian products 99
- A. A. Sarkissian*—On problem of construction complete sample system for one class of simple programs 108
- A. E. Džrbashian*—Integral representations for classes of harmonic vector-functions in the unit ball 112

MECHANICS

- A. D. Drozdov*—Gibbs method in the theory of fracture of elastic bodies 117

THEORY OF ELASTICITY

- B. L. Abramian*—On certain dual integral equations with Bessel functions occurring in problems of elasticity theory 121
- A. A. Babloyan, L. M. Vardanian*—Thermal problem for truncation wedge 125

PHYSICS

- K. L. Hovhannessian, A. G. Petrossian, G. H. Shirinian*—Peculiarities of forming of barium metaborate α - and β -phases from alloy 130

GEOPHYSICS

- A. N. Kozlov, G. M. Hovhanisian, Yu. P. S'ovorodkin*—Electrical and magnetic field originating in water saturated and dry rock samples under the influence of pressure 135

PHARMACOLOGY

- S. E. Akopov, M. A. Sarkisian*—Measurements of pharmacokinetics and pharmacodynamics of nifedipine in cerebrovascular disease 140

Техн. редактор Азизбекияч .7. 4.

Сдано в набор 22.03.89. Подписано к печати 05.07.89. ВФ 02239

Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 2, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0.

Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. — 4,2. Цена 55 к.

Усл. кр. отт. Учет.-изд. л. 3,28. Тираж 530. Заказ № 458. Издат. № 7604.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР. 378310, г. Эчмиадзин

ISSN 0321-1339 Доклады Академии наук Армянской ССР. 1989. Т. 88. № 3. 97-144

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян, А. Г. Унянян

Оценка снизу модуля произведений $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1988)

Пусть $D = \{z; |z| < 1\}$ — единичный круг и $\{z_k\}_1^\infty$ — счетное множество точек из этого круга, упорядоченные в порядке возрастания их модулей.

На пути построения общей теории факторизации мероморфных в круге D функций, М. М. Джрбашян ⁽¹⁾ конструктивно построил произведения $B_\alpha(z, z_k)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha \in (-1; +\infty)$, нули которого совпадают с $\{z_k\}_1^\infty$ и сходимость которого в круге имеет место только при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+1} < +\infty. \quad (1)$$

Эти произведения построены таким образом: во-первых, вводятся в рассмотрение две функции

$$\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k \int_{|z|}^1 (1-x)^\alpha x^{k-1} dx; \quad (2)$$

$$\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \quad (3)$$

и, во-вторых, для любого ζ ($0 < \zeta < 1$) определяется функция

$$A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ \omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) - \omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) \right\}. \quad (4)$$

Указанные произведения определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z, z_k). \quad (5)$$

Функция $B_\alpha(z, z_k)$ является естественным обобщением функции Бляшке $B(z, z_k)$, и в специальном случае, когда $\alpha=0$, совпадает с ним и

$$A_0(z, \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \cdot \frac{|\zeta|}{\zeta}. \quad (6)$$

В настоящей работе доказана

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, то при любом ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$ имеет место

следующее неравенство:

$$|A_0(z, \bar{z})| \exp \left\{ - \operatorname{const} \left| \frac{1 - |\bar{z}|}{1 - \frac{\bar{z}z}{|\bar{z}|}} \right|^{x+1} \right\} \leq |A_x(z, \bar{z})|.$$

2. Если $-1 < x < 0$, то

$$|A_0(z, \bar{z})| \exp \left\{ - \operatorname{const} \left| \frac{1 - |\bar{z}|}{1 - \frac{\bar{z}z}{|\bar{z}|}} \right|^{x+1} \right\} \leq |A_x(z, \bar{z})|.$$

Чтобы приступить к доказательству теоремы, сначала докажем следующую лемму:

Лемма Пусть $z, \bar{z} \in D$, $-1 < x < 0$ и

$$U_x(z, \bar{z}) = \int_{|\bar{z}|^2}^1 \frac{(1-x)^{x+1}}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(x+2+k)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^k \times \\ \times \int_0^{|\bar{z}|^2} (1-x)^{x+1} \cdot x^{k-1} dx. \quad (7)$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \left\{ \log \frac{1 - \bar{z}z}{|\bar{z}|^2} - U_x(z, \bar{z}) \right\} \geq 0. \quad (8)$$

Доказательство. При $|\bar{z}| < 1$ имеем

$$\log \frac{1 - \bar{z}z}{|\bar{z}|^2} - U_x(z, \bar{z}) = \int_{|\bar{z}|^2}^1 \frac{(1-x)^{x+1}}{x} dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{|\bar{z}|^{2n}} \int_0^{|\bar{z}|^2} (1-x)^{x+1} \cdot x^{n-1} dx \right\} \cdot (\bar{z}z)^n = \\ = \frac{b_0(\rho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\rho) (\bar{z}z)^n,$$

где $\rho = |\bar{z}|$,

$$b_0(\rho) = 2 \int_{\rho^2}^1 \frac{1 - (1-x)^{x+1}}{x} dx; \quad b_n(\rho) = -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(2+x+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{\rho^{2n}} \times \\ \times \int_0^{\rho^2} (1-x)^{x+1} \cdot x^{n-1} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что

$$b_n(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} b_n(\rho) = -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{n}, \quad n \neq 0, \quad b_n(1) = 0. \quad (9)$$

Покажем, что $\{b_n(\rho)\}$ удовлетворяет условиям $b_n(\rho) \geq 0$; $b_n(\rho) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$b_n(\rho) - 2b_{n+1}(\rho) + b_{n+2}(\rho) \geq 0. \quad (10)$$

При $n = 1, 2 \dots$

$$b_n(\rho) = \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \cdot \int_0^1 [(1-\rho^2 x)^{x+1} - (1-x)^{x+1}] x^{n-1} dx.$$

Так как $x+1 > 0$, то $b_n(\rho) \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$

Далее

$$b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho) = \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \cdot \int_0^1 [(1-\rho^2 x)^{x+1} - (1-x)^{x+1}] x^{n-1} \times \\ \times \left| \frac{x+2+n}{n+1} \cdot x - 1 \right| dx,$$

функция $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho)$ непрерывна в $0 \leq \rho \leq 1$ (см. (9)), и

$$b'_{n+1}(\rho) - b'_n(\rho) = -2 \cdot \Gamma(x+1) \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(1+n)} \times \\ \times \int_0^1 (1-\rho^2 x)^x \cdot \left| \frac{x+2+n}{n+1} \cdot x - 1 \right| x^n dx = 0 \quad \text{при } \rho = 0.$$

Следовательно, $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho)$ не может принимать максимальное значение внутри $(0,1)$. Имеем $b_{n+1}(1) - b_n(1) = 0$,

$$b_{n+1}(0) - b_n(0) = \frac{\Gamma(x+2+n)}{\Gamma(x+2)\Gamma(n+2)} \cdot \left\{ \frac{nx-1}{n(n+1)} + \frac{(n-1)!}{(x+2)(x+3)\dots(x+n+1)} \right\}.$$

$$\text{Обозначив } f_n(x) = \frac{nx-1}{n(n+1)} + \frac{(n-1)!}{(x+2)(x+3)\dots(x+n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

получим $f_n(-1) = f_n(0) = 0$. Далее

$$f'_n(x) = \left| -\frac{1}{(x+2)^2} + \dots + \frac{1}{(x+n+1)^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2+n} \right)^2 \right| \frac{(n-1)!}{(x+2)\dots(x+1+n)} \geq 0,$$

следовательно, $f_n(x) \leq 0$, так что $b_{n+1}(0) - b_n(0) \leq 0$ и $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho) \leq 0$.

Далее, имеем

$$b_0(\rho) - b_1(\rho) = 2 \cdot \int_{\rho^2}^1 \frac{1-(1-x)^{x+1}}{x} dx + 1 - (x+2) \int_0^1 (1-\rho^2 x)^{x+1} dx,$$

$$b_0(1) = b_1(1) = 0,$$

$$b'_0(\rho) - b'_1(\rho) \leq -4 \frac{1-(1-\rho^2)^{x+1}}{\rho} + 4\rho(x+1) \int_0^{\rho^2} (1-\rho^2 x)^{x+1} dx = 0.$$

Следовательно, $b_0(\rho) \geq b_1(\rho)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\varphi_0(\rho) &= b_0(\rho) - 2 \cdot b_1(\rho) + b_2(\rho) = 2 \cdot \int_{\rho^2}^1 \frac{1 - (1-x)^{\alpha+1}}{x} dx + \\ &+ (\alpha+2) \cdot \int_0^1 \left| (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1} \right| \left(\frac{\alpha+3}{2} x - 2 \right) dx, \quad \varphi_0(1) = 0, \\ \varphi'_0(\rho) &= -\frac{4[1 - (1-\rho^2 x)^{\alpha+1}]}{\rho} - 2(\alpha+1)(\alpha+2) \int_0^1 (1-\rho^2 x)^{\alpha} \cdot x \left(\frac{\alpha+3}{2} x - 2 \right) dx = \\ &= \frac{2}{\rho} \cdot \int_0^1 [(\alpha+2)(\alpha+3)x^2 - 4(\alpha+2)x + 2] d(1-\rho^2 x)^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Но так как при $\alpha+1 > 0$ функция $(1-\rho^2 x)^{\alpha+1}$ монотонно убывает по x в $0 < x < 1$ и

$$(\alpha+2)(\alpha+3)x^2 - 4(\alpha+2)x + 2 \geq 4 \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+3)^2} - 4 \cdot \frac{(\alpha+2)}{\alpha+3} + 2 > 0,$$

то $\varphi'_0(\rho) < 0$, и $\varphi_0(\rho) \geq \varphi_0(1) = 0$.

Для $n \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_n(\rho) &= \Delta^2 b_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \times \\ &\times \int_0^1 \left| (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1} \right| x^{n-1} \left| \frac{(\alpha+2+n)(\alpha+3+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2 \cdot \frac{\alpha+2+n}{n+1} x + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right| dx,\end{aligned}$$

$\varphi_n(1) = 0$, $\rho < 1$. Следовательно, $\varphi'_n(\rho) \neq 0$, при $0 < \rho < 1$

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{\alpha^2 n(n+1) - \alpha n(n+3) + 2n+4}{n(n+1)^2(n+2)^2} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+3)} = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+3)} \cdot f_n(\alpha),\end{aligned}$$

где

$$f_n(\alpha) = \frac{\alpha^2 n(n+1) - \alpha n(n+3) + 2n+4}{n(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{(n-2)! \cdot 2}{(\alpha+2) \dots (\alpha+n+1)}.$$

Покажем, что $f_n(\alpha) \geq 0$. Имеем по индукции

$$f_1(\alpha) = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha + 6}{6} - \frac{2}{\alpha+2} \geq 0.$$

Пусть $f_k(\alpha) \geq 0$, т. е.

$$\frac{\alpha^2 k(k+1) - \alpha k(k+3) + 2k+4}{(k+1)(k+2)(k+3)} \geq \frac{(k-1)! \cdot 2}{(\alpha+2)(\alpha+3) \dots (\alpha+k+1)}.$$

Покажем, что

$$\frac{x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{2x^2(k+1) - 2x(k+2) + 2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \geq$$

$$\geq \frac{x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4}{k(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k}{x+k+2},$$

или

$$(x+2)[2x^2(k+1) - 2x(k+2) + 2] - (1-x)[x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4] \geq 0,$$

или

$$-(1-x^2)k^2 - 3x(1-x^2)k - 2x(1-x^2) \geq 0,$$

что очевидно. Отсюда следует, что $\varphi_n(0) \geq 0$. Следовательно, $\varphi_n(\rho) \geq 0$, и последовательность $\{b_n(\rho)\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (10), и по известной теореме о положительности сумм тригонометрических рядов (см. (2), с. 100) получается доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Из (2) имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x},$$

отсюда при $0 < \varepsilon < 1$ получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta)| \leq \frac{1}{|\zeta|} \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \int_{|\zeta|}^1 \frac{\left(\frac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{(1-x)^\varepsilon} \times$$

$$\times \left| \frac{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{dx}{\left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}\right|^{1-\varepsilon}}.$$

Но так как

$$\left| \frac{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}} \right| = \left| 1 + \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \cdot \frac{|\zeta| - x}{x - \bar{\zeta}z} \right| \leq 2,$$

то получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta)| \leq \text{const} \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \int_{|\zeta|}^1 \frac{dx}{(1-x)(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}} \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\varepsilon}. \quad (11)$$

При $\varepsilon = 1$ выберем $0 \leq \varepsilon_1 < 1$, такое, что $\alpha + \varepsilon_1 > 0$. Имеем

$$|\pm \omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta)| \leq \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{1}{|\zeta|(1-|\zeta|)^{1-\varepsilon_1}} \cdot \int_{|\zeta|}^1 \left(\frac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon_1} \cdot \left| \frac{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{dx}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \leq \text{const} \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+1}. \quad (12)$$

Для оценки $\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_a^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1}$ заметим, что при $0 \leq |z| < \zeta < |\zeta| < 1$ имеет место (см. (1), с. 624)

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{\omega_a^{(2)}(z, \zeta)} = \exp \left\{ - \int_{|z|}^1 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{xz}{\zeta}\right)^{a+1}} - 1 \right) \frac{(1-x)^a}{x} dx \right\}. \quad (13)$$

Но последнее равенство справедливо в D всюду, кроме точек множества

$$e(\zeta) = \{z/|\zeta| = \zeta; \arg z = \arg \zeta\}.$$

Рассмотрим отдельно два случая:

$$1) \quad \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

В этом случае, так как $z \in e(\zeta)$ и

$$\left| 1 - \frac{xz}{\zeta} \right| = \frac{1}{|\zeta|} \left| x \left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right) - (x - |\zeta|) \right| \geq \left| 1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right| \cdot \left| 1 - \frac{x - |\zeta|}{x \left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right)} \right| \geq \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right|,$$

получаем

$$\left| \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^a}{\left(1 - \frac{xz}{\zeta}\right)^{a+1}} \cdot \frac{dx}{x} \right| \leq \frac{2^{a+1}}{|\zeta| \cdot \left| 1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right|^{a+1}} \int_{|z|}^1 (1-x)^a dx \leq \text{const} \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{a+\varepsilon}, \quad (14)$$

$$\left| - \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx \right| \leq \text{const} (1 - |\zeta|)^{a+1} \cdot \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{a+\varepsilon}. \quad (15)$$

Так что

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_a^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1} &\leq \exp \left\{ \text{const} \cdot \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{a+\varepsilon} \right\} \leq \frac{1}{|A_0(z, \zeta)|} \times \\ &\times \exp \cdot c \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{a+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$2) \quad \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right| > \frac{1}{2}.$$

Если $a > 1$, то интегрированием по частям получаем

$$\omega_a^{(2)}(z, \zeta) - \omega_{a-1}^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1 - |\zeta|)^a}{a} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^a} - 1 \right]. \quad (17)$$

Пусть $a = [a] + \{a\}$. При $\{a\} = \beta \neq 0$ по (17) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{z} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\alpha}} - 1 \right] + \dots + \frac{(1-|\zeta|)^{\beta+1}}{\beta+1} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\beta+1}} - 1 \right] + \omega_{\beta}^{(2)}(z, \zeta) \quad (18)$$

Если $\{\beta\}=0$, то вместо (18) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = \omega_n^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{n} \cdot \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\alpha}} - 1 \right] + \dots + \frac{|\zeta| \cdot z}{\zeta} \times$$

$$\times \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z} - \ln\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right). \quad (19)$$

Имея в виду, что

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1} = \exp \operatorname{Re} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) \right\},$$

по (18) получаем

$$-\left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) \right\} = - \left\{ \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\alpha}} - 1 \right] + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{(1-|\zeta|)^{\beta+1}}{\beta+1} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\beta+1}} - 1 \right] \right\} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \cdot \int_0^{|\zeta|} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx \right\} = h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta) + h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta). \quad (20)$$

Для $|h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta)|$ получаем

$$\operatorname{Re} h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta) \leq |h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta)| = \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z} \right|^{\alpha} \cdot \left| \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\alpha} \right] + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta+1} \left[\frac{1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z}{1 - |\zeta|} \right]^{\beta+1} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z\right)^{\beta+1} \right] \right| \leq c \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{|\zeta|}{\zeta} z} \right|^{\alpha} \leq \operatorname{const} \left| \frac{1-|\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta} z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\beta} \quad (21)$$

Чтобы оценить $\operatorname{Re}\{h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta)\}$, напомним его в следующем виде:

$$h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) - \log \left(1 - \frac{\bar{\zeta} z}{|\zeta|} \right) \right\} - \left\{ \log \frac{1 - \bar{\zeta} z}{|\zeta|^{\alpha}} - \int_{|\zeta|^{\alpha}}^1 \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \cdot \int_0^{|\zeta|} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx \right\} - \int_{|\zeta|^{\alpha}}^1 \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx -$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^k \cdot \int_{|z|^2}^{|z_1|^2} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx.$$

Имеем

$$- \operatorname{Re} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) - \log \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1|^2} \right\} = -\log |z_1| \cdot |A_0(z, z_1)| \leq -\log |A_0(z, z_1)| + \log \frac{1}{|z_1|}. \quad (22)$$

Далее, интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^k \cdot \int_{|z|^2}^{|z_1|^2} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx &= \frac{(1-|z_1|^2)^{\beta}}{\beta} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|z_1|^2}{z_1}\right)^{\beta}} - 1 \right] + \\ &+ \frac{(1-|z_1|^2)^{\beta}}{\beta} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|z_1|^2}{z_1}\right)^{\beta}} + 1 \right] + \int_{|z|^2}^{|z_1|^2} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} \cdot \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x z_1}{z_1}\right)^{\beta}} - 1 \right\} dx. \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|^2}^{|z_1|^2} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left(1 - \frac{x z_1}{z_1}\right)^{\beta}} \cdot \frac{dx}{x} \right| &\leq \frac{1}{|z_1|^2} \cdot \int_{|z|^2}^{|z_1|^2} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left|1 - \frac{x z_1}{z_1}\right|^{\beta}} dx = \frac{1}{|z_1|} \cdot \int_{|z|}^{|z_1|} \frac{(1-t|z_1|)^{\beta-1}}{\left|1 - \frac{t|z_1|}{z_1} z_1\right|^{\beta}} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|z_1|} (1-|z_1|)^{\beta-1} \cdot \int_{|z|}^{|z_1|} \frac{dt}{(1-t)^{\beta}} = \frac{1}{|z_1|} \cdot \frac{1}{1-\beta} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\int_{|z|^2}^{|z_1|^2} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx \leq \int_{|z|}^{|z_1|} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx \leq -\frac{1}{|z_1|^2} \cdot \frac{(1-x)^{\beta}}{\beta} \Big|_{|z|^2}^{|z_1|^2} \leq \frac{(1-|z_1|^2)^{\beta}}{\beta |z_1|^2} \leq \frac{2^{\beta}}{\beta |z_1|^2}. \quad (24)$$

Из (18), (21)–(24) и по лемме получаем доказательство теоремы при $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.

При $\alpha = [\alpha] = n$ из (19) получаем

$$\begin{aligned} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) + \omega_n^{(2)}(z, z_1) \right\} &= - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) - \log \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1|^2} \right\} - \left\{ \log \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1|^2} - \right. \\ &\left. - \log \left(1 - \frac{\bar{z}_1 z}{z_1} \right) \right\} - \left\{ \frac{(1-|z_1|)^{\beta}}{n} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{z}_1 z}{z_1}\right)^n} - 1 \right] + \dots + (1-|z_1|) \left[\frac{1}{1 - \frac{\bar{z}_1 z}{z_1}} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\operatorname{Re} \left\{ -\log \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1|^2} + \log \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1|} \right\} = -\log \left| \frac{1 - \bar{z}_1 z}{|z_1| - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{1}{|z_1|} \right| = \log \left| \frac{|z_1|(|z_1| - \bar{z}_1 z)}{1 - \bar{z}_1 z} \right| \leq 2.$$

При $-1 < \alpha < 0$ из (17) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(1)}(z, z_1) = \omega_{\alpha+1}^{(2)}(z, z_1) - \frac{(1-|z_1|)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{z}_1 z}{z_1}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right]. \quad (25)$$

Так что

$$-\left\{\log\left(1-\frac{z}{\bar{z}}\right)+\omega_a^{(2)}(z, \bar{z})\right\}=-\left\{\log\left(1-\frac{z}{\bar{z}}\right)+\omega_{a+1}^{(2)}(z, \bar{z})\right\}+ \\ +\frac{(1-|\bar{z}|)^{a+1}}{a+1}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\bar{z}z}{|\bar{z}|}\right)^{a+1}}-1\right].$$

и доказательство в этом случае аналогично вышесказанному.

Авторы благодарят профессора В. С. Захаряна за постановку задач.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Դ. Տ. ՔԱՂԻԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Դ. ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ

Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_a(z; z_k)$ արտադրյալների մոդուլի գնահատական ներկերից

Աշխատանքում ապացուցվում է թեորեմ, որտեղ տրված է Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_a(z; z_k) = \prod_1 A_a(z; z_k)$ զուգամետ արտադրյալների մոդուլի գնահատական ներքերից:

Այն է.

Թեորեմ 1) Երբ $\alpha > 0$, ապա ցանկացած ε -ի համար ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|A_0(z; \bar{z})| \exp \left\{ -\text{const} \left| \frac{1-|\bar{z}|}{1-\frac{\bar{z}z}{|\bar{z}|}} \right|^{a+\varepsilon} \right\} \leq |A_a(z; \bar{z})|:$$

2) Երբ $-1 < \alpha < 0$, ապա՝

$$|A_0(z; \bar{z})| \exp \left\{ -\text{const} \left| \frac{1-|\bar{z}|}{1-\frac{\bar{z}z}{|\bar{z}|}} \right|^{a+1} \right\} \leq |A_a(z; \bar{z})|:$$

Այս թեորեմի ապացույցը էապես հիմնվում է հետևյալ լեմայի վրա:
Լեմա 1) Ենթադրենք $z, \bar{z} \in D$, $-1 < \alpha < 0$, և

$$U_a(z; \bar{z}) = \int_{|\bar{z}|^2}^1 \frac{(1-x)^{a+1}}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+2)}{\Gamma(a+2)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^k \int_0^{|\bar{z}|^2} (1-x)^{a+1} x^{k-1} dx:$$

Այդ դեպքում

$$\text{Re} \left\{ \log \frac{1-\bar{z}z}{|\bar{z}|^2} - U_a(z; \bar{z}) \right\} \geq 0:$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԴԱՆՔՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. ² Н. А. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.

УДК 519.681

МАТЕМАТИКА

А. А. Саркисян

О проблеме построения полной системы примеров для одного класса простых программ

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/XII 1988)

В работах (1–6) для ряда классов программ исследована проблема построения полной системы примеров (ПСП), т. е. такой системы примеров, на которой программа проходит все свои ветви. В настоящей работе рассматривается новый класс простых программ, для которого доказывается разрешимость проблемы построения ПСП. Одновременно определяется его расположение в иерархии простых программ (7). Все используемые, но не определяемые здесь понятия приведены в (1,6).

Обозначим AL_2 следующую систему команд:

- (1). $z_i \leftarrow z_j$ ($z_i \leftarrow C$). Содержимое счетчика z_j (константа C) записывается в счетчик z_i .
- (2). $z_i \leftarrow z_i + 1$ ($z_i \leftarrow z_i - 1$). Содержимое счетчика z_i увеличивается (уменьшается) на единицу.
- (3). *do forever ... end*. Циклическое выполнение группы команд между *do forever* и *end*.
- (4). *exit*. Выполнение программы завершается.
- (5) *if* $z_i \geq z_j(C)$ *then goto* l_1 *else goto* l_2 , $\geq \{ \{ >, < \}$. Содержимое счетчика z_i сравнивается с содержимым счетчика z_j (константой C). При выполнении условия $\geq$ переход осуществляется на команду с меткой l_1 ; в противном случае переход осуществляется на команду с меткой l_2 .
- (6). *if* $z_i \leftarrow X_j R$ ($z_i \leftarrow X_j L$) *then goto* l_1 *else goto* l_2 . Содержимое обозреваемой ячейки ленты X_j записывается в счетчик z_i . Если обозреваемая ячейка ленты содержит целое число, то переход осуществляется на команду с меткой l_1 и головка ленты после считывания сдвигается на одну ячейку вправо (влево); если же обозреваемая ячейка ленты пустая, то сдвига головки не происходит, а переход осуществляется на команду с меткой l_2 .
- (7). $X_i \leftarrow z_j$. Содержимое счетчика z_j записывается в обозреваемую ячейку ленты X_i .

AL_2 -программой называется любое непустое множество команд (1)–(7) со следующими ограничениями:

- (а) вложенные циклы *do forever ... end* запрещены;
- (б) команды с метками l_1 и l_2 расположены после команды *if ... then goto ... else goto ...* и хотя бы одна из них не принадлежит циклу *do forever ... end*.

Теорема 1. Проблема построения ПСП разрешима в классе AL_2 -программ.

Доказательство. Аналогично (*) введем понятия преобразования счетчика z_i при выполнении пути $\alpha - r'_i(z_i)$ и условия реализуемости пути $\alpha - R_i(z_i)$.

Каждую AL_2 -программу P представим в виде конечного множества путей, имеющих вид $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_m^{k_m}$, где k_i — количество прохождений участка пути α_i . Условие реализуемости такого пути имеет вид:

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_m^{k_m}}(z_1, \dots, z_l) = & R_{\alpha_1^{k_1}}(z_1, \dots, z_l) \& \\ & \& R_{\alpha_2^{k_2}}(r_{\alpha_1^{k_1}}^1(z_1, \dots, z_l), \dots, r_{\alpha_1^{k_1}}^{k_1}(z_1, \dots, z_l)) \& \dots \& \\ & \& R_{\alpha_m^{k_m}}(r_{\alpha_{m-1}^{k_{m-1}}}^1(r_{\alpha_{m-2}^{k_{m-2}}}^1(\dots r_{\alpha_1^{k_1}}^1(z_1, \dots, z_l) \dots)), \dots, \\ & r_{\alpha_{m-1}^{k_{m-1}}}^{k_{m-1}}(r_{\alpha_{m-2}^{k_{m-2}}}^{k_{m-2}}(\dots r_{\alpha_1^{k_1}}^{k_1}(z_1, \dots, z_l) \dots))). \end{aligned}$$

Исследуем отдельную компоненту $R_{\alpha_i^{k_i}}$ этого тождества.

1. В цикле $\alpha_i^{k_i}$ нет команд работы с лентами.

В этом случае условие реализуемости $R_{\alpha_i^{k_i}}(z_i)$ представляет собой множество линейных неравенств, сводимое к конечному посредством следующего правила монотонности:

$$(z \in C) \& (z + M \in C) \Rightarrow \forall m \in [0, M] (z + m \in C), \sigma \in \{>, \geq, <, \leq\}.$$

2. В цикле $\alpha_i^{k_i}$ присутствуют команды работы с лентами.

В этом случае каждую ленту можно представить в виде конечного числа монотонно изменяющихся (возрастающих или убывающих) или произвольных множеств. Если работа в цикле ведется с монотонно изменяющимися значениями, то количество линейных неравенств в условии реализуемости $R_{\alpha_i^{k_i}}(z_i)$ ограничивается аналогично 1. Если же работа в цикле ведется с произвольными значениями, то из группы неравенств в условии реализуемости $R_{\alpha_i^{k_i}}(z_i)$, связанных с данной лентой, остается только одно с условием, что результат решения его записывается сразу в несколько ячеек ленты.

Систему команд AL_2 дополним командами работы с новыми структурами данных — магазинами (M), очередями (Q), таблицами (T):

(8). $z_i \leftarrow M_j$ ($z_i \leftarrow Q_j$). В счетчик z_i заносится элемент, вытолкнутый из магазина M_j (очереди Q_j).

(9). $M_i \leftarrow z_j$ ($Q_i \leftarrow z_j$). Содержимое счетчика z_j вталкивается (добавляется) в магазин M_i (очередь Q_i).

(10). *if EMPTY M_i (EMPTY Q_i) then goto l_1 else goto l_2 .* Магазин M_i (очередь Q_i) проверяется на пустоту. Если магазин (очередь) пуст, переход осуществляется на команду с меткой l_1 ; в противном случае переход осуществляется на команду с меткой l_2 .

- (11). *if FINDEX (T_i, z_j) then goto l_1 else goto l_2 .* Поиск по таблице T_i значения счетчика z_j . Если значение найдено, указатель таблицы устанавливается на соответствующую ячейку таблицы, а переход осуществляется на команду с меткой l_1 ; в противном случае положение указателя не меняется, переход осуществляется на команду с меткой l_2 .
- (12) *if FINDNEEX (T_i, z_j) then goto l_1 else goto l_2 .* Поиск по таблице T_i значения счетчика z_j . Если значение найдено, положение указателя не меняется, а переход осуществляется на команду с меткой l_2 ; в противном случае указатель таблицы устанавливается на первую свободную ячейку таблицы, а переход осуществляется на команду с меткой l_1 .
- (13). $z_i \leftarrow T_j$. Содержимое обозреваемой ячейки таблицы T_j заносится в счетчик z_i .
- (14). $T_i \leftarrow z_j$. Содержимое счетчика z_j заносится в обозреваемую ячейку таблицы T_i .
- (15). *DELETE (T_i).* Обозреваемая ячейка удаляется из таблицы T_i .
- AL_2^* -программой называется любое непустое множество команд (1) – (15) с ограничениями (а) и (б).

Теорема 2. Проблема построения ПСП разрешима в классе AL_2^* -программ.

Справедливость этого утверждения следует из того, что очереди и магазины, аналогично лентам, представляются в виде конечного числа монотонно изменяющихся или произвольных множеств. В случае же с таблицами работа фактически ведется со счетчиками z_j .

Система команд AL_2^* особенно удобна для описания модулей подсистемы ввода-вывода малой ЭВМ.

Вычислительная мощность AL_2 -программ «выше» мощности XL -программ: функция

$$f(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{m_1 \text{ раз}}, \underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{m_2 \text{ раз}}) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 = m_2 \\ 1, & \text{если } m_1 \neq m_2 \end{cases}$$

вычислима AL_2 -программой, но не вычислима XL -программой (7).

Ереванский научно-исследовательский институт
математических машин

Ա. Հ. ՍՍԵՂՈՅԱՆ

Պարզ ծրագրերի մի դասի համար օրինակելի լրիվ համակարգ
կառուցելու պրոբլեմ

Հոդվածում հետադրույթաբար է օրինակելի լրիվ համակարգ կառուցելու խնդիրը պարզ ծրագրերի մի դասի համար: Ապացուցվում է նշված խնդրի լուծելիությունը: AL_2 — ծրագրերի դասակարգում, որը պարունակում է երկ-կողմանի հաշվիչների և ժապավենների հետ աշխատելու հրամաններ: Ապացուցվում է նաև նույն խնդրի լուծելիությունը: AL_2^* — ծրագրերի դասակար-

դուձ, որը լայնացված է տվյալների նոր տիպերով և նրանց հետ աշխատանքի հրամաններով: Այս տվյալների տիպերը և հրամանները հարմար են օպերացիոն համակարգի ծրագրերի նկարագրման համար: Սրոշված է AL — ծրագրերի տեղը պարզ ծրագրերի հերթադասիայում:

ЛИТЕРАТУРА—ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Я. М. Барздинь, Я. Я. Бичевский, А. А. Калинин, Уч. зап. Лата. гос. ун-та, т. 210, с. 152 (1974). ² А. А. Калинин, Я. Я. Бичевский, Я. М. Барздинь, Уч. зап. Лата. гос. ун-та, т. 210, с. 188 (1974). ³ Я. М. Барздинь, А. А. Калинин, Уч. зап. Лата. гос. ун-та, т. 233, с. 123 (1975). ⁴ А. И. Лукинъ, Программирование, № 3, с. 3 (1984). ⁵ А. И. Лукинъ, ДАН СССР, т. 278, № 3, с. 564 (1984). ⁶ А. Г. Тадевосян, Кибернетика, № 6, с. 41 (1985). ⁷ E. M. Guregy, J. ACM, v. 33, № 2, p. 46 (Aug. 1985).

УДК 517.1

МАТЕМАТИКА

А. Э. Джрбашян

Интегральные представления для классов гармонических векторных функций в единичном шаре

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсисяном 6/XII 1988)

1. Введение. Рассмотрим вектор-функции $F = (f_1, \dots, f_n)$, удовлетворяющие n -мерным уравнениям Коши—Римана в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (1)$$

Хорошо известно (см. например, ⁽¹⁾), что из уравнений (1) вытекает существование (в каждой компоненте связности G) некоторой гармонической функции H , для которой $F = \nabla H$. В частности, все компоненты вектора F гармоничны. Такие векторы F будем называть гармоническими, или системами М. Рисса. Естественно в этом случае называть компоненты f_j сопряженными гармоническими функциями, так как системы М. Рисса являются, очевидно, обобщением понятия аналитической функции в многомерных вещественных областях.

На основании этого понятия И. Стейн и Г. Вейс обобщили теорию пространств Харди H^p на случай гармонических векторов в полупространствах $\mathbb{R}^n$ ^(1,2). Решающую роль здесь играли ядро Пуассона и его сопряженные в смысле уравнений (1). Развивая те же идеи, в ⁽³⁾ удалось построить аналогичную теорию более широких классов A^p в полупространствах.

Однако, к сожалению, те же задачи в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^n$ оказываются значительно более сложными и не поддаются решению со всей полнотой адекватности классическому случаю. Здесь, видимо, трудности кроются в основном в невозможности нахождения сопряженных ядер Пуассона из-за неинвариантности уравнений (1) относительно естественных групп вращений в шаре. Поэтому приходится идти не по пути буквальных аналогий со случаем полупространств, а искать другие пути. Нам известны два варианта обобщений пространств H^p в шаре, принадлежащие Риччи и Вейсу ⁽⁴⁾ и Кораньи и Вадю ⁽⁵⁾. Второй путь нам представляется более привлекательным, и мы, во многом следуя тем же идеям, строим теорию классов A^p систем М. Рисса в шаре.

2. Определения и вспомогательные результаты. Обозначим через $B = B^n$ единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Для любых ρ и

α , $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, обозначим через $A_\alpha^p = A_\alpha^p(B)$ класс всех скалярных гармонических функций в B с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \int_B |f(x)|^p (1-|x|)^\alpha dx < \infty.$$

Сферической гармоникой порядка $k \geq 0$ называется сужение однородного гармонического полинома степени k на единичную сферу $S = \partial B$.

Для любого $n \geq 3$ и $k \geq 0$ существует $d_k = d_k(n) = \frac{(n+k-3)!(2k+n-2)}{k!(n-2)!}$

линейно-независимых сферических гармоник порядка k . Обозначим через $\{Y_j^{(k)}\}_{k \geq 0, 1 \leq j \leq d_k}$ ортонормальную систему сферических гармоник.

Для $x', y' \in S$ положим также $Z_x^{(k)}(y') = \sum_{j=1}^{d_k} Y_j^{(k)}(x') Y_j^{(k)}(y')$. Эта функция называется зональной гармоникой порядка k (более подробно о гармониках см., например, (1)).

Теорема 1* (6,7). Если $f \in A_\alpha^p$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, то имеет место интегральное представление

$$f(x) = \int_B Q_\alpha(x, y) f(y) (1-|y|)^\alpha dy, \quad (2)$$

$$\text{где } Q_\alpha(x, y) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(2k+n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2k+n)} (|x||y|)^k Z_x^{(k)}(y'). \quad (3)$$

Лемма 1 (6,7). Ядро $Q_\alpha(x, y)$ удовлетворяет оценкам

$$|Q_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(1-r\rho)^{-[\alpha]}}{|r\rho x' - y'|^{n+[\alpha]}} + \frac{C}{(1-r\rho)^{1+\alpha}},$$

где $x = rx'$, $y = \rho y'$, $r = |x|$, $\rho = |y|$, $[\alpha]$ — целая часть и $\{\alpha\}$ — дробная часть числа $\alpha > -1$. В частности, если $\alpha = m$ целое неотрицательное число, то

$$|Q_m(x, y)| \leq \frac{C}{|r\rho x' - y'|^{n+m}}.$$

Пусть H — некоторое гильбертово пространство функций в некоторой области G . Представляющим ядром пространства H называется функция K , определенная на $G \times G$, обладающая свойством

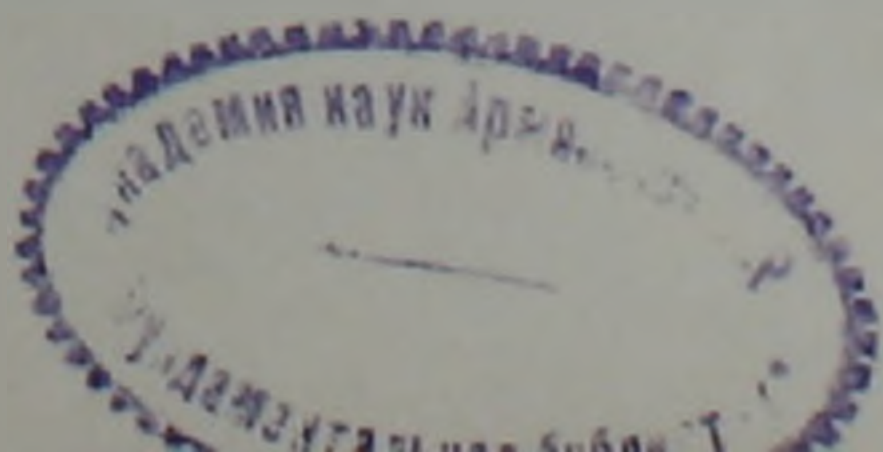
$$f(x) = (K(x, y), f(y)), \quad \forall f \in H,$$

где $(\dots)$ внутреннее произведение в H .

Лемма 2 ((3), (8), гл. III). Пусть H сепарабельное гильбертово пространство и пусть $\{\psi_k\}_{k \geq 1}$ ортогональный базис в нем. Воспроизводящее ядро H существует тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in G$ существует константа $C = C_{x_0}$, такая, что

$$|f(x_0)| \leq C_{x_0} \|f\|_H.$$

Для удобства дальнейших приложений мы приводим результаты из (8) в несколько модифицированном виде.



В таком случае воспроизводящее ядро задается рядом

$$K(x, y) = \sum_{k \geq 1} \Psi_k^*(y) \Psi_k(x),$$

где Ψ_k^* сопряженный к Ψ_k элемент.

3. Основные результаты. Мы будем рассматривать классы A_p^α систем М. Рисса в единичном шаре. Гармонический вектор $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежит классу $A_p^\alpha(B, R^n)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, если $|F| = \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2}$ принадлежит скалярному классу A_p^α .

Лемма 3. Система $\{\varphi_{kj}(x)\} = \left\{ \left(\frac{\Gamma(2k + n + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(2k + n - 1) k} \right)^{1/2} \cdot \varphi(|x|^k) Y_j^{(k)}(x') \right\}$, $k \geq 1$, $1 \leq j \leq d_k$ является полной и ортонормальной в $A_2^\alpha(B, R^n)$.

Пользуясь этим фактом и общим результатом о представляющих ядрах, мы почти немедленно получаем следующую теорему:

Теорема 2. Представляющее ядро класса $A_2^\alpha(B, R^n)$ задается рядом

$$K^{(\alpha)}(x, y) = \sum_{k, j} \varphi_{kj}^*(y) \varphi_{kj}(x).$$

Другими словами, если $F \in A_2^\alpha(B, R^n)$, то

$$F(x) = \int_B F(y) K^{(\alpha)}(x, y) (1 - |y|)^\alpha dy. \quad (4)$$

Учитывая, что $A_p^\alpha \cap A_2^\alpha$ плотно в A_p^α , мы в качестве следствия теоремы получаем аналог теоремы 1 — интегральное представление для класса $A_p^\alpha(B, R^n)$ при помощи ядра $K^{(\alpha)}$ при $1 < p < \infty$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением ядра $K^{(\alpha)}$ в случае целых неотрицательных $\alpha = m$ и будем обозначать их через $K^{(m)}$.

Лемма 4. Компоненты $K_{jk}^{(m)}(x, y)$ матричного ядра $K^{(m)}$ удовлетворяют оценкам ($1 \leq j, k \leq n$)

$$|K_{jk}^{(m)}(x, y)| \leq \frac{C}{|r_0 x' - y'|^{n+m}}. \quad (5)$$

Обозначим через $L_p^\alpha(B, R^n)$ пространство векторных функций $G = (g_1, \dots, g_n)$ (не обязательно гармонических или удовлетворяющих уравнениям (1)), интегрируемых в B со степенью p с весом $(1 - |y|)^\alpha$. Легко видеть, что интеграл в правой части (4) сохраняет смысл и при замене гармонического вектора F любым элементом из $L_p^\alpha(B, R^n)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$. Более того, замечая, что при фиксированном k , $1 \leq k \leq n$, система $\{K_{jk}^{(m)}(x, y)\}_{j=1}^n$ удовлетворяет уравнениям (1) по переменной x , мы видим, что при подстановке в правую часть (4) любой функции $G \in L_p^\alpha(B, R^n)$ получается гармонический вектор F .

Следующий результат показывает, что при этом мы попадаем именно в класс $A^p_0(B, R^n)$.

Теорема 3. Пусть m — целое неотрицательное число. Тогда, если $G \in L^p_2(B, R^n)$, $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$, то векторная функция

$$T_m G(x) = F(x) = \int_B G(y) K^{(m)}(x, y) (1 - |y|)^n dy \quad (6)$$

принадлежит классу $A^p_2(B, R^n)$, если только $m > \frac{1+\alpha}{p} - 1$. Более того, существует независимая константа $C > 0$ такая, что

$$\|F\|_{A^p_2} \leq C \|G\|_{L^p_2}.$$

Таким образом, оператор T_m является непрерывным проектором из $L^p_2(B, R^n)$ в свое подпространство $A^p_2(B, R^n)$.

Интересно также выяснить действие оператора T_m в других пространствах функций. Обозначим через $Lip^\beta(B, R^n)$ класс всех ограниченных непрерывных векторов $G = (g_1, \dots, g_n)$ в B , удовлетворяющих там условию Липшица порядка β , $0 < \beta \leq 1$.

Теорема 4. Пусть $G \in Lip^\beta(B, R^n)$, $0 < \beta < 1$. Тогда функция $F = T_m G$ есть гармонический вектор того же класса при любом целом неотрицательном m . Более того, существует независимая константа $C > 0$ такая, что

$$\|F\|_{Lip^\beta} \leq C \|G\|_{Lip^\beta}.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Է. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ինտեգրալ ներկայացումներ միավոր գնդում հարմոնիկ
վեկտորական ֆունկցիաների դասերի համար

Հոդվածում դիտարկվում են n — չափանի էվկլիդեսյան տարածության միավոր B գնդում ընդհանրացված Կոշի-Ռիմանի պայմաններին բավարարող վեկտոր-ֆունկցիաներ: Այդ հավասարումներին բավարարող $F = (f_1, \dots, f_n)$ վեկտորական ֆունկցիան պատկանում է A^p_2 , $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ տարածությանը, եթե վերջավոր է հետևյալ ինտեգրալը

$$\int_B \left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} (1 - |x|)^n dx < \infty:$$

A^p_2 տարածությունների համար գտնված է ինտեգրալ ներկայացում մատրիցայի կորիզի միջոցով: Ապացուցվում է, որ համապատասխան ինտեգրալ

ձևափոխությունը սահմանափակ է վեկտոր ֆունկցիաների կշռային L^p տարածություններում: Բացի այդ պարզվում է, որ այդ օպերատորը պահպանում է Հիլբերտյան դասերը:

ЛИТЕРАТУРА-ՊՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М., 1974. ² Н. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, М., 1973. ³ А. Э. Джрбашян, Изв АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4 (1987). ⁴ F. Ricci, G. Weiss, Proc. Symp. Pure Math., v. 25, part 1 (1979). ⁵ A. Korányi, S. Vági, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 26, fasc. 1 (1972). ⁶ А. Э. Джрбашян, Мат. сб., т. 121 (163), № 2 (6) (1983). ⁷ А. Е. Djrbashian, F. A. Shamolian, Topics in the Theory of A_p Spaces, Teubner Verlag, Leipzig, 1988. ⁸ К. Нолла, Функциональный анализ, Мир, М., 1967.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Д. Дроздов

Метод Гиббса в теории отдира упругих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 30/X 1988)

Исследуется задача об отдире двух упругих тел, соединенных тонким клеевым слоем. Сформулирован принцип Гиббса для определения области, в которой происходит разрыв соединительного слоя. Получено соотношение, связывающее размеры области отдира с интенсивностью внешней нагрузки.

1. *Постановка задачи.* Два упругих тела, занимающие области Ω_1 и Ω_2 , соединены тонким клеевым слоем постоянной толщины h вдоль участка границы $\gamma(0)$. Тела помещены в термостат и находятся в естественном состоянии при температуре θ_* . Введем в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ лагранжеву систему координат $\xi = (\xi_i)$. В момент времени $t = 0$ к телам прикладываются массовые силы $F(t, \xi)$ и поверхностные усилия $f(t, \xi)$ вдоль участка границы $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma(0)$. Под действием нагрузки происходит деформация тел и частичный разрыв клеевого слоя. Обозначим через $\gamma(t)$ участок границы, вдоль которого тела соединены в момент времени $t \in [0, T]$. Будем исследовать задачу об отдире в квазистатическом приближении при малых деформациях. Обозначим: $u(t, \xi)$ — вектор перемещения, $\varepsilon(t, \xi)$ — тензор деформаций при переходе из недеформированной в актуальную конфигурацию, ε_i , e — шаровая составляющая и девiator тензора ε . Удельные внутренняя энергия Φ и энтропия S упругого тела определяются по формулам

$$\rho\Phi = \rho\Phi_* + \frac{1}{2} K \bar{\varepsilon}^2 + G e \cdot e + \rho c (\theta^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*), \quad \rho S = \rho S_* + \rho c (\theta - \theta_*) / \theta_*. \quad (1.1)$$

Здесь Φ_* и S_* — удельные внутренняя энергия и энтропия в естественном состоянии при температуре θ_* , ρ — плотность, c — теплоемкость, θ — температура, K и G — модули объемной деформации и сдвига.

Клеевой слой рассматривается как поверхность бесконечно малой толщины, которая обладает сосредоточенной внутренней энергией и энтропией. Деформацией этой поверхности пренебрегаем. Удельные внутренняя энергия Φ_c и энтропия S_c равны

$$\rho_c \Phi_c = \rho_c \Phi_{c*} + \rho_c c_c (\theta^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*), \quad \rho_c S_c = \rho_c S_{c*} + \rho_c c_c (\theta - \theta_*) / \theta_*. \quad (1.2)$$

Здесь Φ_{c*} и S_{c*} — удельные внутренняя энергия и энтропия в естественном состоянии при температуре θ_* , ρ_c — плотность, c_c — теплоемкость клея.

Требуется по заданным усилиям F, f определить напряженно-деформированное состояние в телах и расположение соединительного слоя $\gamma(t)$. Задача об отдире стержней и лент рассматривалась в ряде работ (см., например, (1,2), где содержится подробная библиография).

2. *Принцип Гиббса.* Представим процесс непрерывного деформирования как предел следующего дискретного процесса. Разобьем отрезок времени $[0, T]$ точками $t_k = k\Delta, \Delta = T/N, k = 1, \dots, N$. При дискретном нагружении на интервале времени $[t_{k-1}, t_k)$ под действием усилий $F_{k-1} = F(t_{k-1}, \xi), f_{k-1} = f(t_{k-1}, \xi)$ система находится в положении термодинамического равновесия, которое характеризуется постоянной температурой θ_{k-1} , полем перемещений $u_{k-1}(\xi)$ и соединительным слоем, расположенным вдоль участка границы γ_{k-1} . В момент времени t_k к телам прикладывается нагрузка F_k, f_k . Система мгновенно переходит в новое состояние термодинамического равновесия, которое характеризуется параметрами θ_k, u_k, γ_k . Переход из предыдущего в последующее равновесное состояние подчиняется первому закону термодинамики (3)

$$\bar{\Phi}_k - \bar{\Phi}_{k-1} = \bar{A}_k, \quad \bar{A}_k = \int_{\Omega} \rho F_k \cdot (u_k - u_{k-1}) dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot (u_k - u_{k-1}) ds \quad (2.1)$$

Здесь $\bar{\Phi}_k$ — внутренняя энергия системы, dv — элемент объема области Ω , ds — элемент площади поверхности $\partial\Omega$.

Из соотношений (1.1), (1.2) и (2.1) найдем температуру θ_k и энтропию системы $\bar{S}_k$ (v — объем области Ω , a_k — площадь поверхности γ_k):

$$\theta_k = \theta_{k-1} \left\{ 1 + 2\theta_* (\rho c v + \rho_c c_c a_k)^{-1} \theta_{k-1}^{-2} [\bar{A}_k - (W_k - W_{k-1}) - \rho_c (\Phi_{c_k} + c_c (\theta_{k-1}^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*)) (a_k - a_{k-1})] \right\}^{1/2}, \quad W_k = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} K \varepsilon_k^2 + G e_k \dots e_k \right) dv, \quad (2.2)$$

$$\bar{S}_k = \rho (S_* - c) v + \rho_c (S_{c_*} - c_c) a_k + (\rho c v + \rho_c c_c a_k) \theta_k / \theta_*.$$

Согласно принципу Гиббса (4,5) истинное положение термодинамического равновесия u_k, γ_k доставляет $\max_{\gamma_k} \max_{u_k} \bar{S}_k$. Можно показать (6), что при фиксированном γ_k величина $\max_{u_k} \bar{S}_k$ достигается на поле перемещений u_k , которое в области Ω удовлетворяет уравнениям равновесия, а на поверхности $\partial\Omega$ — граничным условиям в напряжениях. Справедливо равенство (5):

$$W_k = \frac{1}{2} A_k, \quad A_k = \int_{\Omega} \rho F_k \cdot u_k dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot u_k ds. \quad (2.3)$$

Предположим, что расположение соединительного слоя известно, а его площадь a_k подлежит определению. Приравняв нулю производную $\bar{S}_k$ по a_k , найдем с помощью (2.3)

$$\rho_c \left(S_{c_*} + c_c \frac{\theta_k - \theta_*}{\theta_*} \right) \theta_k = \rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta_k^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_k} dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_k} ds \right). \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2), (2.4) определяют размеры клеевого слоя в дискретной задаче отрыва. Переходя в этих равенствах к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ и учитывая (2.3), получим дифференциальные уравнения для определения площади соединительного слоя при непрерывном нагружении (точкой обозначена производная по времени t):

$$(\rho c v + \rho_c c_c a) \dot{\theta} = \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \rho (F \cdot u - F^0 \cdot u) dv + \int_{\Gamma} f \cdot u - f^0 \cdot u) ds \right| - \\ - \left[\rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F \cdot \frac{\partial u}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial u}{\partial a} ds \right) \right] a, \quad (2.5)$$

$$\rho_c \left(S_{c_*} + c_c \frac{\theta - \theta_*}{\theta_*} \right) \theta = \rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F \cdot \frac{\partial u}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial u}{\partial a} ds \right). \quad (2.6)$$

Для приложений наибольший интерес представляет однопараметрическое нагружение: $F = R(t)F^0(\xi)$, $f = R(t)f^0(\xi)$, где F^0 , f^0 — заданные функции. Обозначим через $u^0(\xi, a)$ поле перемещений, соответствующее внешней нагрузке F^0 , f^0 и площади соединительного слоя a . В силу линейности уравнений равновесия $u = R(t)u^0$. Из (2.5) (2.6) получим $\gamma_1(x + \gamma_1)^{-1} = -\theta \cdot [\theta + (x_1 - 1)\theta_*]^{-1}$, где $\gamma_1 = a/a(0)$, $x = \rho c v / (\rho_c c_c a(0))$, $x_1 = S_{c_*}/c_c$. Интегрируя это равенство, найдем $\theta = \theta_* [1 + x_1(1 - \gamma_1)(x + \gamma_1)^{-1}]$. Подставим выражение для θ (2.6) ($\Psi_{c_*} = \Phi_{c_*} - S_{c_*}\theta_*$ — удельная свободная энергия клея):

$$\frac{\rho_c S_{c_*}^2 \theta_*}{c_c} \left[\left(\frac{x + 1}{x + \gamma_1} \right)^2 - 1 \right] = 2\rho_c \Psi_{c_*} - R^2 \left(\int_{\Omega} \rho F^0 \cdot \frac{\partial u^0}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f^0 \cdot \frac{\partial u^0}{\partial a} ds \right). \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение для определения безразмерной площади соединительного слоя γ_1 при заданном внешнем усилии K .

3. Пример. Рассмотрим два прямолинейных стержня длины l прямоугольного поперечного сечения ширины d и толщины h . Один конец стержней жестко зашпемлен, а другой свободен. Стержни соединены между собой клеевым слоем вдоль участка длиной $b(0) < l$, примыкающего к зашпемленным концам. К свободным концам стержней приложены силы $R = R(t)$, направленные перпендикулярно продольной оси. Под действием нагрузки происходит плоский изгиб стержней и частичный разрыв клеевого слоя. Считаем, что прогиб стержней достаточно мал и справедлива гипотеза плоских сечений. Напряжение σ связано с деформацией ϵ законом Гука с модулем упругости E .

Согласно (2.7) безразмерная координата конца области разрыва $\gamma_1 = b/b(0)$ определяется из соотношения

$$\left(\frac{x + 1}{x + \gamma_1} \right)^2 - 1 = A [R_*^2 (l_* - \gamma_1)^2 - B]. \quad (3.1)$$

Здесь $R_* = R/(Ehd)$, $l_* = l/b(0)$, $A = 24c_c E b^2(0) (\rho_c h S_c^2 \eta_*)$, $B = -\rho_c h \Psi_{c_*} / (12 E b^2(0))$ — безразмерные параметры. Назовем систему устойчивой, если достаточно малые внешние воздействия не приводят к разрыву соединительного слоя. В силу (3.1) система является устойчивой при $\Psi_{c_*} < 0$.

4. *Задача Гриффитса*. Две других полуплоскости, занимающие области $x_2 < 0$ и $x_2 > 0$, соединены между собой тонким клеевым слоем вдоль оси x_1 на интервалах $(-\infty, -b(0)]$ и $[b(0), \infty)$ ((x_1, x_2) — декартовы координаты). На бесконечности к системе приложены растягивающие усилия интенсивностью $q = q(t)$, направленные перпендикулярно оси x_1 . Под действием нагрузки происходит деформация системы и частичный разрыв клеевого слоя. Рассматриваемый пример является модификацией задачи Гриффитса о распространении трещины при плоской деформации (¹). Пусть в момент времени t трещина располагается на отрезке $[-b(t), b(t)]$ оси x_1 . Величина b определяется из соотношений (2.3), (2.7) при $\kappa = \infty$:

$$\frac{\partial W_*}{\partial b} + 2\rho_c \Psi_{c_*} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $W_* = \pi q^2 b^2 (1 - \nu) / (2G)$ — механическая энергия системы, вызванная наличием трещины, ν — коэффициент Пуассона. Соотношение (4.1) совпадает с энергетическим критерием разрушения (¹), в котором следуют положить $\beta = -\frac{1}{2} \rho_c \Psi_{c_*}$, где β — удельная энергия образования новой граничной поверхности.

Московский автомеханический
институт

Ա. Դ. ԳՐԻՖԻՏ

Առաձգական մարմինների իրարից անջատման տեսության
մեջ Գրիֆսի մեթոդը

Ուսումնասիրվում է բարակ սոսնձային շերտով միացված երկու առաձգական մարմինների իրարից անջատման մասին խնդիրը: Ձևակերպվել է Գրիֆսի սկզբունքը այն տիրույթի որոշման համար, որի մեջ տեղի ունի միացվող շերտի ճեղքում: Ատացված է հարաբերակցություն, որով կապված են ճեղքվածքի տեղամասի և արտաքին թևի ուժգնության չափերը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. В. Гольдштейн, И. Н. Дашевский, В. М. Ентое, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 2, с. 110—116 (1979). ² K. S. Kim, N. Aravas, Int. J. Solids Structures, v. 24, № 4, p. 417—435. (1988). ³ Л. И. Седов, Механика сплошной среды. Т. 1. Наука, М., 1976. Т. 2. Наука, М., 1976. ⁴ Дж. Гиббс, Термодинамические работы. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951. ⁵ В. Л. Бердичевский, Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, М., 1983. ⁶ Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Э. Паулов, Механика растущих вязкоупругопластических тел. Наука, М., 1987. ⁷ Разрушение. Ред. Либовиц Г. Т. 2. Математические основы теории разрушения, Мир, М., 1975.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН Армянской ССР Б. Л. Абрамян

О некоторых парных интегральных уравнениях с функциями Бесселя, встречающихся в задачах теории упругости

(Представлено 4 XI 1988)

При рассмотрении пространственных задач теории упругости со смешанными граничными условиями с круговыми линиями раздела граничных условий возникают парные интегральные уравнения вида

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta^{\alpha} \psi(\beta) J_m(\beta r) d\beta &= f(r) \quad (0 < r < a); \\ \int_0^{\infty} \psi(\beta) J_m(\beta r) d\beta &= g(r) \quad (r > a), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha = \pm 1$; $f(r)$ и $g(r)$ — заданные функции; $\psi(\beta)$ — искомая функция; $m = 0, 1, \dots$. Предполагается, что функции f и g и их первые производные непрерывны и ограничены в указанных интервалах.

Строгие решения для уравнений вида (1) или для их частных случаев получены в ряде работ (Н. Басбридж и др.), упоминаемых в монографиях (^{1,2}).

Решения, полученные для уравнений (1) в большинстве этих работ, включают в себя значительные действия и не могут считаться простыми. Сравнительно простые решения получены в работах, в которых использованы содержащие функции Бесселя разрывные интегралы и интегральные уравнения Абеля.

В настоящей заметке для парных уравнений (1) простые решения получены методом ортогонализации уравнений более коротким путем. Отметим, что метод ортогонализации парных уравнений ранее был изложен в работах К. Трантера (^{3,4}) и А. А. Баблояна (^{5,6}), которые его предложили при получении решений парных уравнений другого вида.

Для решения уравнений (1) при $\alpha = \pm 1$ и $\text{Re } m > -\frac{1}{2}$ пользуемся значениями интегралов (⁷)

$$\int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0; \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} x^{\frac{1}{2}-m} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0. \quad (3)$$

Используя эти значения, будем иметь также

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} x^{\frac{1}{2}-m} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0. \quad (5)$$

1. Рассмотрим уравнения (1) при $\alpha = 1$.

Обе части первого уравнения из (1) умножаем на $r^{m+1}(x^2 - r^2)^{-1/2}$, где $x < a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от нуля до x , а обе части второго уравнения из (1) умножаем на $r^{1-m}(r^2 - x^2)^{-1/2}$, где $x > a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от x до бесконечности, далее полученный результат дифференцируем по x . Тогда будем иметь:

$$\int_0^{\infty} \beta \psi(\beta) d\beta \int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad x < a; \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \psi(\beta) d\beta \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad x > a. \quad (7)$$

Используя здесь значения (2) и (5), получим:

$$\int_0^{\infty} \beta^{1/2} \psi(\beta) J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) d\beta = F_1(x) \quad (0 < x < \infty), \quad (8)$$

где введено обозначение

$$F_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-m-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} & x < a \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} & x > a. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая (9) из (8), будем иметь.

$$\begin{aligned} \psi(\beta) &= \beta^{1/2} \int_0^{\infty} x F_1(x) J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}-m} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} - \end{aligned} \quad (10)$$

$$-V\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_a^\infty x^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Это решение для рассмотренных уравнений совпадает с решениями других авторов (см., например, работу Б. Нобля (6)), получивших их другими методами.

2. Для другого случая, при $\alpha = -1$, введя обозначение $\psi(\beta) = \beta D(\beta)$, будем иметь уравнения

$$\int_0^\infty D(\beta) J_m(\beta r) d\beta = f(r) \quad r < a; \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \beta D(\beta) J_m(\beta r) d\beta = g(r) \quad r > a.$$

Для получения решения уравнений (11) обе части первого уравнения из (11) умножаем на $r^{m-1}(x^2-r^2)^{-1/2}$, где $x < a$, далее интегрируем полученное выражение по r в пределах от нуля до x и затем дифференцируем по x ; обе части второго уравнения из (11) умножаем на $r^{1-m}(r^2-x^2)^{-1/2}$, где $x > a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от x до бесконечности. Тогда получим:

$$\int_0^\infty \beta^{1/2} D(\beta) J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) d\beta = F_2(x) \quad (0 < x < \infty), \quad (12)$$

где использованы значения (3) и (4) и введено обозначение

$$F_2(x) = \begin{cases} V\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-m-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} & x < a \\ V\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} & x > a. \end{cases} \quad (13)$$

Учитывая (13) из (12) получим:

$$D(\beta) = V\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_0^a x^{-m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) dx \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} + \\ + V\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_a^\infty x^{m+\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) dx \int_x^\infty \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}}. \quad (14)$$

Это решение для рассмотренных уравнений также совпадает с решениями других авторов.

Առաձգականության տեսության խնդիրներում հանդիպող Բեսսելի
ֆունկցիաներով որոշ զույգ ինտեգրալ հավասարումների վերաբերյալ

Այս փոքրիկ հոդվածում դիտարկվում են Բեսսելի ֆունկցիաներ պարու-
նակող որոշ տեսակի զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք հանդիպում են
խառը եզրային պայմաններով առաձգականության տեսության տարածական
խնդիրների ուսումնասիրության ժամանակ, երբ եզրային պայմանների փո-
փոխությունը կատարվում է շրջանային գծերի վրա:

Դիտարկվող զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծումները կարճ ճա-
նապարհով ստացվում են օրթոգոնալիզացիայի եղանակով, որն առաջարկված
է Լեւել Կ. Տրանտերի և Ա. Բարլոյանի (³⁻⁶) աշխատանքներում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ I. N. Sneddon, Mixed boundary value Problems in potential theory. North-
Holland Publ. Co. Amsterdam, John Wiley and Sons, 1966. ² Я. С. Уфлянд, Метод
парных уравнений в задачах математической физики. Наука, Л., 1977. ³ С. J.
Tranter, Proceed. Edinb. Math. Soc., ser. 2, v. 13, part 3, p. 267—268 (1963). ⁴ С. J.
Tranter, Proceed. Glasgow Math. Assoc., v. 6, part 3, p. 136—140 (1964). ⁵ А. А.
Баблюян, ДАН АрмССР, т. 39, № 3, с. 149—157 (1964). ⁶ А. А. Баблюян, ПММ, т.
28, вып. 6, с. 1015—1023 (1964). ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных
преобразований. Т. 2. Наука, М., 1970. ⁸ B. Noble, Journ. Math. and Phys., v. 37,
№ 2, p. 128—136 (1958).

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян, Л. М. Варданян

Температурная задача для усеченного клина

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/XII 1988)

Разработана методика решения температурных задач для однородного или составного усеченного клина при произвольных граничных условиях. По предложенной методике решаются гармонические и би-гармонические граничные задачи. Ввиду простоты гармонических задач методика решения иллюстрируется на них.

Аналогичным вопросам посвящены работы (1-5).

1. Определим гармоническую функцию в области усеченного клина, когда на границе заданы значения неизвестной функции $U(r, \varphi)$ (рис. 1)

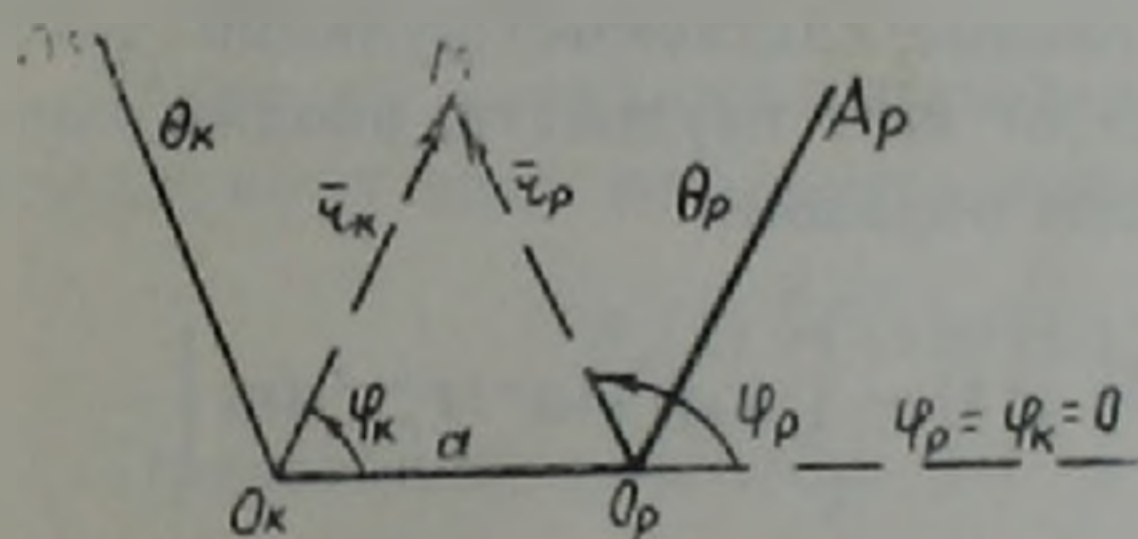


Рис. 1

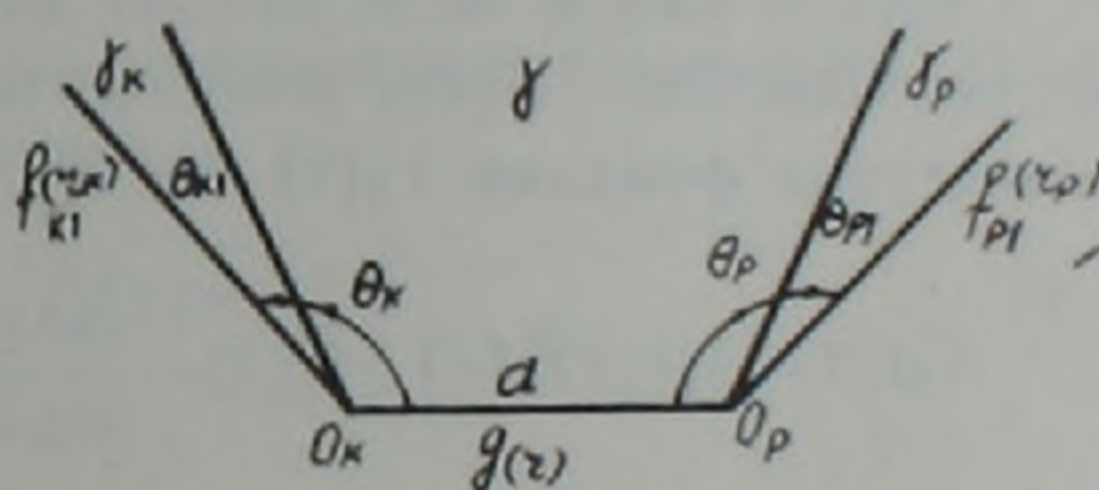


Рис. 2

$$U(r, \theta_k) = f_k(r_k) \quad (0 \leq r_k < \infty; k = 1, 2); \quad (1.1)$$

$$U(r, 0) = g(r) = g_k(r_k) + g_p(r_p) \quad (k, p = 1, 2). \quad (1.2)$$

Введем две системы полярных координат с центром O_k и O_p соответственно (рис. 1). Связь между ними имеет вид

$$r_k e^{i\bar{\varphi}_k} + r_p e^{-i\bar{\varphi}_p} = a, \quad (1.3)$$

где $\bar{\varphi}_k = \varphi_k$; $\bar{\varphi}_p = \pi - \varphi_p$; $\theta_k + \theta_p > \pi$; $0 < \theta_k, \theta_p \leq \pi$.

Решение рассматриваемой задачи ищем в виде

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^2 U_k(r_k, \bar{\varphi}_k) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \Phi(s, \bar{\varphi}_k) r_k^{-s} ds, \quad (1.4)$$

где $\Phi_k(s, \bar{\varphi}_k) \sin s \theta_k = a^s X_k(s) \sin s \bar{\varphi}_k + B_k(s) \sin s (\theta_k - \bar{\varphi}_k)$.

Здесь $f_k(r_k)$ — финитная функция, $g_k(r_k)$ ($k = 1, 2$) интегрируемые функции (одна из них произвольная). Из условия (1.2) получаем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} B_k(s) r_k^{-s} ds = g(r) = \sum_{k=1}^2 g_k(r_k) \quad (0 \leq r_k \leq a) \quad (1.5)$$

Пользуясь свободой, требуем, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} B_k(s) r_k^{-s} ds = g_k(r_k) \quad (0 \leq r_k \leq a) \quad (1.6)$$

Примем здесь $g_k(r_k) = 0$; $(r_k > a)$.

В работе доказывается, что любое другое продолжение функции $g_k(r_k)$ на область $[a, \infty)$, а также выбор представления (1.2) не влияет на окончательные интегральные уравнения и на вид неизвестной функции $U(r, \varphi)$. Из условия (1.1) получаем два интегральных уравнения для определения функций $X_k(s)$ ($k=1,2$), которые имеют вид

$$X_k(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \theta_p} [X_p(\xi) \sin s \varepsilon_k + a^{-s} B_p(\xi) \sin(\xi \theta_p - s \varepsilon_k)] d\xi = \tilde{f}_k(s),$$

$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \xi) \quad (1.7)$$

где $\tilde{f}_k(s) = a^{-s} \int_0^a f_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k$; $\tilde{g}_k(s) = a^{-s} \int_0^a g_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k$

Сюда в явном виде входят отдельные слагаемые функции $g(r)$ и их продолжения. Чтобы освободиться от этих неудобств, вводим новые неизвестные функции $Y_k(s)$ следующим образом:

$$X_k(s) = A_k^*(s) \tilde{Y}_k(s) + \tilde{f}_k^*(s) - \frac{\sin s \varepsilon_k}{\sin s \pi} \left[\tilde{g}(s) - \int_0^\infty g_k(r_k) a^{-s} r_k^{s-1} dr_k \right] -$$

$$- \frac{\sin s \theta_k}{\sin s \pi} \int_a^\infty g_p(r_p) a^{-s} (r_p - a)^{s-1} dr_p, \quad (1.8)$$

где $A_k^*(s)$ — нормирующий множитель, $\tilde{f}_k^*(s)$ — произвольная функция.

При этом интегральные уравнения примут окончательный вид

$$A_k^*(s) \tilde{Y}_k(s) + \frac{\sin s \varepsilon_k}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \theta_p} [A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi) -$$

$$- \frac{\sin \xi \varepsilon_p}{\sin \xi \pi} \tilde{g}(\xi)] d\xi = \tilde{f}_k(s) - \tilde{f}_k^*(s) \quad (1.9)$$

а гармоническая функция определяется по формулам

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \left[A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi) - \frac{\sin \xi \varepsilon_p}{\sin \xi \pi} \tilde{g}(\xi) \right] \frac{\sin \xi \bar{\varphi}_p}{\sin \xi \theta_p} \left(\frac{a}{r_p} \right)^\xi d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,p}} \frac{\sin(\pi - \bar{\varphi})}{\sin s \pi} \tilde{g}(s) \left(\frac{a}{r_k} \right)^s ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \left\{ [A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi)] \sin \xi \bar{\varphi}_p + \right.$$

$$+ \bar{g}(\frac{z}{a}) \sin \frac{\varepsilon}{2} (\theta_p - \bar{\varphi}_p) \Big\} \frac{a^s r^{-s}}{\sin \frac{\varepsilon}{2} \theta_p} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,p}} \frac{\sin(\pi - \bar{\varphi}_k)}{\sin s\pi} \bar{g}(s) \left(\frac{a}{r_k}\right)^s ds, \quad (1.10)$$

где
$$a^s \bar{g}(s) = \int_0^a [g_k(r_k) + g_p(a - r_k)] r_k^{s-1} dr_k,$$

Здесь последние слагаемые являются решением уравнения Лапласа для полуплоскости, когда $U(r, \varphi) = g(r)$ на отрезке $(0, a)$, а вне этого отрезка $U(r, \varphi) = 0$. На этой основе последние слагаемые не зависят от индекса k .

Если в системе (1.10) примем

$$A_k^*(s) = \frac{\sin s\varepsilon_k}{\sin s\pi}; \quad \bar{f}_k^*(s) = \bar{f}_k(s), \quad (1.11)$$

то неизвестные функции интегральных уравнений представляются в виде

$$a^s \bar{Y}_k(s) = \int_0^\infty Y_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k, \quad (1.12)$$

т. е. функция $Y_k(r_k)$ является в этом случае продолжением граничной функции $g(r_k)$.

Один из вариантов приведения интегральных уравнений (1.9) к регулярному виду получается применением

$$A_k^*(s) = \Gamma(s) \sin s\varepsilon_k; \quad \bar{f}_k^*(s) = \bar{f}_k(s). \quad (1.13)$$

Представляя при этом

$$\bar{Y}_k(s) = \int_0^\infty U_k(r) r^{s-1} dr, \quad (1.14)$$

получаем систему интегральных уравнений ($k+p=3$, $k=1, 2$)

$$U_k(r) + e^{-\frac{1}{r}} \int_0^\infty \frac{U_p(t) t^{p-1} r^{1/p} t^{1/p-1} \sin \gamma_p \varepsilon_p dt}{r^{2\gamma_p+2} (rt)^{1/p} \cdot \cos \gamma_p \varepsilon_p + t^{2\gamma_p}} = 0, \quad \gamma_p = \frac{\pi}{\theta_p}. \quad (1.15)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^\infty K_k(r, t) dt = e^{-\frac{1}{r}} \cdot \frac{\varepsilon_p}{\theta_p}, \quad (1.16)$$

поэтому система (1.15) регулярна при $\theta_k, \theta_p > \frac{\pi}{2}$ ($k=1, 2$; $k+p=3$).

В частности, когда $\theta_k > \frac{\pi}{2}$, $\theta_p = \frac{\pi}{2}$, система (1.15) приводится к одному регулярному уравнению такого же вида.

Если $\theta_k = \theta_p = \frac{\pi}{2}$, то система (1.15) или (1.9) решается в замкнутом виде

$$U_k(r)(1 - e^{-\frac{2}{r}}) = F_k(r) - F_p(r)e^{-\frac{1}{r}}, \quad (1.17)$$

$$\text{где } \bar{F}_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\Gamma(\xi - s)}{\Gamma(\xi) \sin \xi \theta_p} \left| \frac{\sin \xi \theta_p}{\sin s \pi} \bar{g}(\xi) - \bar{f}_k(\xi) \right| d\xi.$$

При этом получается точное решение гармонической задачи для полуполосы в декартовой системе координат.

На основе (1.16) при условии (1.13) можно доказать, что уравнения (1.9) регулярны при $\theta_k > \frac{\pi}{4}$.

Если норму функции связывать с порядком убывания на бесконечности на контуре преобразования и учитывать значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \pi} \sin(\xi \theta_p + \alpha) d\xi = \frac{\left(2 \cos \frac{\theta_p}{2}\right)^{s-1}}{\sin s \pi} \sin \left| (s+1) \frac{\theta_p}{2} + \alpha \right|, \quad (1.18)$$

нетрудно убедиться, что система 1.9 регулярна при $(0 < \theta_k, \theta_p < \pi)$.

2. Докажем, что предложенный метод успешно применяется и для решения аналогичных задач составных тел (рис. 2).

Например, если составная область образована из двух клиньев и усеченного клина (рис. 2), то, используя решение задачи, приведенной в п. 1, и решения для клиньев в виде интеграла Меллина

$$U_{k1}(r_k, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\bar{f}_{k1}(\xi) \sin \xi (\varphi_k - \theta_k) + \bar{f}_k(\xi) \sin \xi (\theta_{k0} - \varphi_k)}{\sin \xi \theta_{k1}} \left(\frac{a}{r_k} \right)^\xi d\xi \quad (2.1)$$

и удовлетворяя граничным и контактными условиям, получим следующие соотношения между функциями $\bar{Y}_k(s)$ и $\bar{f}_k(s)$ ($k=1, 2$):

$$\begin{aligned} f_k(s) \Delta_k(s) &= \frac{\gamma_k}{\gamma} \bar{f}_{k1}(s) \sin s \theta_k + g_k(s) \sin s \theta_{k1} - \\ &- \left| A_k^*(s) \bar{Y}_k(s) + \bar{f}_k^*(s) - \bar{f}_k(s) \right| \frac{\sin s \pi \cdot \sin s \theta_{k1}}{\sin s \theta_k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\bar{f}_{k1}(s)$, $\bar{g}_k(s)$ — преобразования граничных функций,

$$\gamma \Delta_k(s) = \gamma_k \sin s \theta_k \cos s \theta_{k1} + \gamma \sin s \theta_{k1} \cos s \theta_k; \quad \theta_{k0} = \theta_k + \theta_{k1}.$$

Из (1.9) и (2.2), исключая $\bar{f}_k(s)$, после некоторых преобразований для составной области получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$X_k(s) + \frac{S_k(s)}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{B(s, \xi - s)}{\Delta_p(\xi)} \left[X_p(\xi) + \frac{\gamma_p}{\gamma} \bar{f}_{p1}(\xi) - \bar{g}_p(\xi) \frac{S_p(\xi)}{\sin \xi \pi} \right] d\xi = 0. \quad (2.3)$$

$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \xi; \quad k+p=3; \quad k=1, 2)$$

Сведение интегральных уравнений (2.3) производится аналогично (1.3) — (1.15).

По описанной методике решен ряд гармонических и бигармонических краевых задач, для однородных и составных клиновидных областей, при различных граничных и контактных условиях.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ա. Ա. ՐԱԲՆՅԱՆ, Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Հատած սեպի ջերմային խնդիր

Մշակված է եղանակ լուծելու համասեռ կամ անհամասեռ հատած սեպի ջերմային խնդիրներ կամայական եղրային պայմանների դեպքում:

Նշանակը լուսարանելու համար որպես օրինակ, բերվում է Դիրիխլեի խնդրի լուծումը ինչպես համասեռ, այնպես էլ բաղադրյալ հատած սեպի համար:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է որպես երկու «տեղական» լուծումների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացվում է Մելինի ինտեգրալի տեսքով:

Խնդիրը բերվում է ռեզուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման:

Առաջարկված եղանակը կիրառելի է նաև, ինչպես համասեռ, այնպես էլ բաղադրյալ հատած սեպի բիհարմոնիկ խնդիրներ լուծելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՇԱՀԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел, Наука, М., 1963. ² Н. Ф. Морозов, Математические вопросы теории трещин, Наука, М., 1984. ³ А. Ф. Злитке, Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Наукова думка, Киев, 1979. ⁴ В. Т. Гринченко, Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. ⁵ А. А. Баблюян, Л. М. Варданян, Задача для составной полуплоскости, ослабленной впадиной, Калинин, 1987.

УДК 548.73

ФИЗИКА

К. Л. Ованесян, А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян

Особенности образования α - и β -фаз метабората бария из расплава

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 30/XII 1988)

Благодаря удачному сочетанию нелинейно-оптических и механических свойств кристаллов β - BaB_2O_4 проблеме их получения уделяется большое внимание. Эффективность генерации гармоник (д.ф.д.) β - $\text{BaB}_2\text{O}_4 = 6 \times d_{\text{эф. КДР}}$ (1064 нм), порог лучевой прочности 20 Гвт/см² (0.1 нс, 1064 нм), область прозрачности 190—3500 нм. β -фазой обозначается низкотемпературная модификация метабората бария, которая нецентросимметрична и кристаллизуется при температурах ниже 925 С. При температурах выше точки фазового перехода 925 С образуется высокотемпературная модификация α - BaB_2O_4 , которая обладает инверсионной симметрией. Температура плавления BaB_2O_4 равна 1095 С, поэтому для получения β -фазы используется раствор-расплавный метод, позволяющий путем подбора растворителей и их концентрации снизить температуру ликвидус и проводить процесс при температурах ниже фазового перехода (¹).

В настоящей работе изучены особенности метабората бария при плавлении и затвердевании и определены граничные условия образования α - и β -фаз из чистых расплавов. Показано, что верхняя граница образования β -фазы лежит значительно выше 925 С.

В экспериментах использовались BaCO_3 и B_2O_3 марки ЧДА, механическая смесь которых в отношении 1:1 (в пересчете на BaO) плавилась в платиновом тигле с использованием высокочастотного нагрева. Температура контролировалась термопарой Pt—Pt/Rh (ПП₆₈), приведенной в контакт со стенкой тигля. Идентификация состава твердой фазы проводилась рентгеновским способом (ДРФ—2,0).

Выращенные кристаллы по внешней огранке делятся на две группы. По рентгеновским спектрам установлена принадлежность кристаллов одной из этих групп к α -модификации BaB_2O_4 , другой—к β -модификации. Образцы β - BaB_2O_4 , полученные из чистых расплавов, бесцветны и спектрально прозрачны в области 0,2—3 мкм. Генерация второй гармоники от излучения частотного лазера на гранате с неодимом наблюдалась визуально при 300 К на образцах диаметром 7 мм и толщиной 4 мм. Угловая зависимость интенсивности второй гармоники не снималась. Процесс затравления во всех опытах по выращиванию кристаллов проводился при температурах ≥ 1050 С, поэтому факт образования β -фазы при таких температурах поднял ряд вопросов, касающихся области существования β -фазы и кинетики фазового

перехода. Вместе с тем отсутствие на этом этапе очевидных факторов, ответственных за рост α - или β -фаз, предполагало возможную роль структурных частиц, присутствующих в расплавах, в образовании той или иной фазы.

Изучение фазового превращения при повышении температуры проводилось на порошке размельченного кристаллического образца β - BaV_2O_4 . Кинетика и степень фазового превращения оказались зависящими от выбранной температуры и продолжительности термообработки. Превращение сопровождается последовательным уменьшением интенсивности рефлексов, соответствующих β -фазе, с одновременным увеличением интенсивности рефлексов α -фазы. В табл. 1 приведены рентгенографические данные для однофазных исходных образцов α - и β - BaV_2O_4 и для образца β - BaV_2O_4 , подвергнутого двухчасовой термообработке при 960 С. Отметим, что после отжига при 940 С в течение четырех часов в образцах регистрируются лишь следы α -фазы. Таким образом, фазовое превращение при температурах вблизи ≥ 925 С протекает медленно, однако с повышением температуры ускоряется.

Таблица 1
Межплоскостные расстояния и относительные интенсивности β - BaV_2O_4 после термообработки при 960 С в течение 2 ч по сравнению с данными для однофазных β - BaV_2O_4 и α - BaV_2O_4

β - BaV_2O_4					α - BaV_2O_4		
Исходный образец			После термообработки		$d, \text{\AA}$	I/I_0	hkl
hkl	I/I_0	$d, \text{\AA}$	$d, \text{\AA}$	I/I_0			
			6.53	9	6.54	15	006
$\bar{1}11$	25	6.30	6.30	11			
			5.98	11	5.98	22	012
111	8	5.49	5.49	3			
220	8	4.14	4.15	3			
$\bar{1}12$	10	3.90	3.90	5			
			3.85	10	3.86	18	018
202	85	3.62	3.60	90	3.62	40	110
112	100	3.51	3.51	95			
			3.32	100	3.32	100	10.10
$\bar{2}22$	25	3.13	3.13	10			
			3.08	12	3.09	25	202
202	30	3.05	3.04	12			
$\bar{3}12$	8	2.93	2.93	3			
330	10	2.85	2.85	4			
			2.64	8	2.64	20	208
421	5	2.51	2.52	14			
			2.43	60	2.42	75	11.12
313	15	2.37	2.38	6			
			2.35	10	2.35	22	20.11
			2.28	3	2.30	8	214
402	8	2.12	2.12	7	2.13	20	128
333	8	2.09	2.09	8	2.09	15	300
512	35	2.07	2.07	15			
423	14	2.02	2.03	15	2.03	23	210

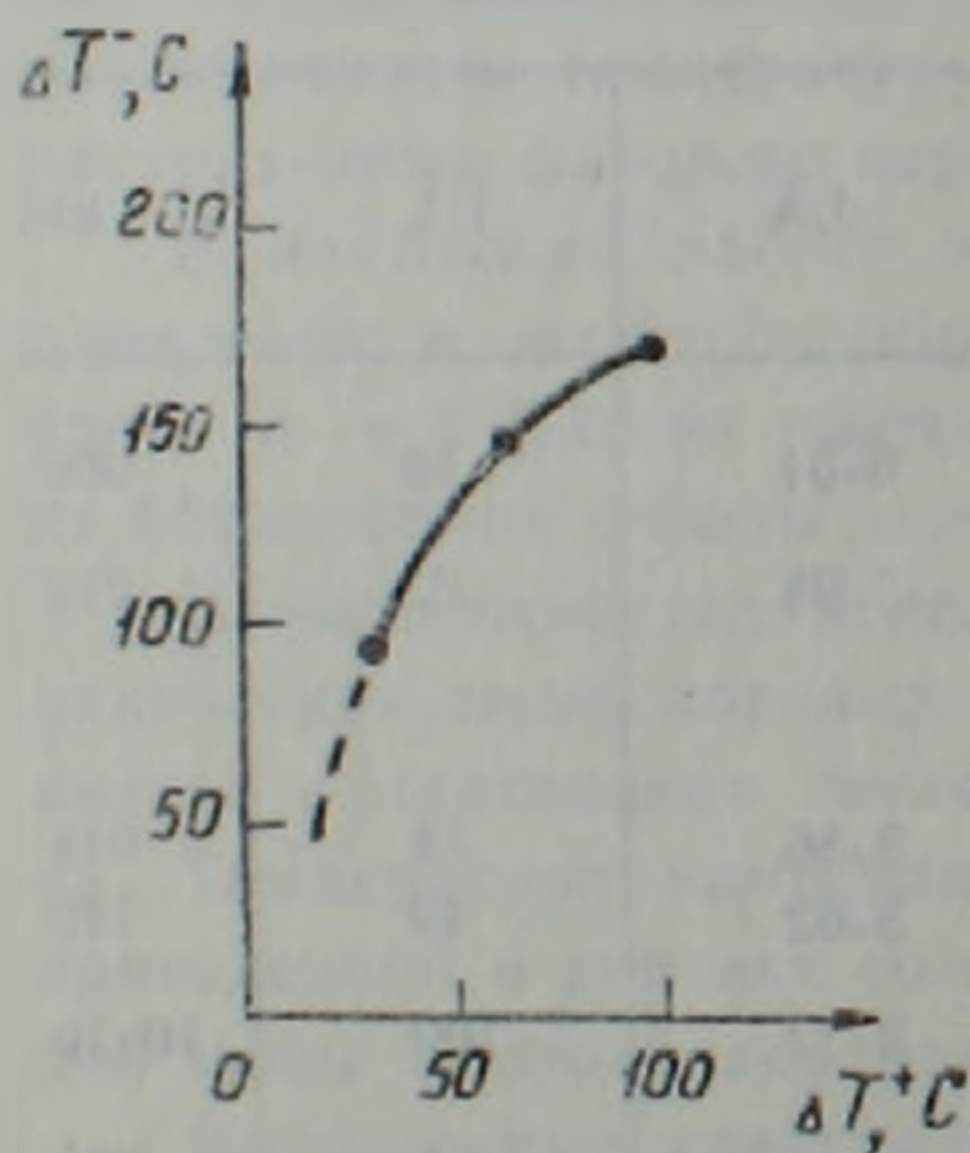
Для изучения взаимосвязей между состоянием расплава и формируемым составом твердой фазы расплавы перегревались до различных температур и далее охлаждались при визуальном контроле мо-

Таблица 2

Зависимость состава твердой фазы от температурно-временных характеристик

Тип затравки	Переохлаждение $\Delta T^-, ^\circ\text{C}$	Выдержка (мин) ($\Delta T^+ = 100^\circ\text{C}$)	Состав твердой фазы
Pt-стержень	20	30	1
	20	120	2
	30	00	2
	40	30	2 + 3 (следы)
	40	120	2 + 3 (следы)
	40	300	2 + 3 (следы)
	60	30	2 + 3 (1:1)
	60	120	2 + 3 (1:3)
	60	300	2 + 3 (1:9)
	90	30	2 + 3 (1:1)
	90	120	2 + 3 (1:3)
	90	300	2 + 3 (1:9)
Без затравки	160	30	
	160	120	
	160	300	

мента затвердевания. На рисунке показана зависимость переохлаждения (ΔT^-) расплава от величины предварительного перегрева (ΔT^+) продолжительностью 30 мин. Измерения проводили в одном тигле с последовательным увеличением температуры перегрева в отдельных



Зависимость переохлаждения расплава BaB_2O_4 от величины перегрева продолжительностью 30 мин

опытах. Эта зависимость использовалась для регулирования температуры спонтанной кристаллизации, а также в опытах по вытягиванию образцов на платиновую проволоку в широкой области переохлаждений $\Delta T^- = 30 \div 90^\circ\text{C}$ с последующим быстрым охлаждением. Несмотря на то, что все расплавы имеют одинаковый химический состав (с точностью до изменений, обусловленных испарением), формируемый состав твердой фазы неодинаков. Согласно рентгеновским спектрам он соответствует $\alpha\text{-BaB}_2\text{O}_4$, $\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$ или же их смеси в зависимости от условий опытов. Полученные взаимосвязи иллюстрируются данными табл. 2. Таким образом, перегрев расплава является основным параметром, определяющим состав твердой фазы, формируемой при кри-

тализации. Перегретые расплавы обнаруживают склонность к переохлаждению, а продолжительность обработки расплава регулирует и количественное содержание в образцах β -фазы (β -фаза регистрируется в образцах, полученных при $\Delta T \geq 40$ C; количественное содержание этой фазы возрастает с увеличением продолжительности перегрева).

Результаты исследований поведения метабората бария при плавлении и затвердевании, а также при температурном воздействии позволяют сделать ряд выводов и предположений. Температура фазового перехода 925 C действительно является температурой, выше которой β -фаза метабората бария нестабильна. Она претерпевает фазовое превращение с переходом в α -модификацию. Однако эта температура не характеризует границы образования α - и β -фаз при обратном порядке превращений от температуры выше ликвидус, т. е. при снижении температуры. В соответствии с полученными данными β -фаза может при определенных условиях зарождаться при более высоких температурах. В зависимости от температурных условий опытов она после формирования может полностью или частично трансформироваться в α -фазу. Наличие следов β -фазы в образцах, полученных при $\Delta T = 40$ C, т. е. при 1055 C (табл. 2) позволяет рассматривать эту температуру как верхний предел существования β -фазы или, по крайней мере, ее сохранения в условиях закалочного охлаждения.

Причиной образования β -фазы при кристаллизации перегретых расплавов может являться разрушение в них структурных центров или фрагментов α -фазы. В этом случае в соответствии с принципом простоты энергетически выгоднее образование зародышей β -фаз, так как элементарная ячейка β -BaB₂O₄ содержит 12 формульных единиц, а ячейка α -фазы—18 формульных единиц и имеет протяженный размер— $c=39,192$ А). Как уже указывалось выше, высокотемпературная неустойчивость β -фазы ведет к ее превращению в α -фазу, и это обстоятельство является серьезным препятствием при получении из расплава крупных монокристаллов.

В заключение отметим, что сказанное справедливо для стехиометрических расплавов. В наших опытах не было зафиксировано заметных изменений в температурах плавления после нескольких циклов плавления и затвердевания. Однако при избытке одного из компонентов систему следует рассматривать как раствор-расплавную (растворитель BaO или B₂O₃). Влияние возможного испарения на наблюдаемую картину и учет этого обстоятельства при обсуждении результатов требуют дополнительного исследования.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Կ. Լ. ՇՈՂՉԱՆՆԱՅԱՆ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Հ. ՀԻՐՆՅԱՆ

Բարիումի մետաբորատի α - և β -փազերի հալույրից առաջանալու
առանձնահատկություններ

Աշխատանքում ուսումնասիրված են բարիումի մետաբորատի ցածր ջերմաստիճանային β -BaB₂O₄ փազի հատկությունները հալվելու և պնդանա-

լու ժամանակ, որոշված են մաքուր հալույթից բյուրեղանալու դեպքում նրա առաջացման ջերմաստիճանային սահմանները: Հայտնաբերված է, որ β - BaB_2O_4 -ը սաղմնավորվում է ֆազայի անցման 925°C ջերմաստիճանից զգալի բարձր ջերմաստիճաններում: Ֆազային անցման կինետիկայի ուսումնասիրությունը ցույց է տվել, որ 925°C մոտ ջերմաստիճաններում վերափոխումը ընթանում է բավական դանդաղ և արագանում է ջերմության բարձրացման հետ: Կազմավորվող պինդ ֆազի բաղադրությունը վրա հալույթի գերտաքացածության ազդեցության տվյալների վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս հզրահանգելու, որ հալույթում α -ֆազի բաղադրական մասնիկների բայթայման դեպքում էներգետիկ տեսակետից ձևավորվում է կառուցվածքով ավելի պարզ β -ֆազի առաջացումը, չնայած հետագայում այն վերափոխվում է α -ֆազի: Այդ հանգամանքը հանդիսանում է հալույթից β - BaB_2O_4 -ի խոշոր բյուրեղների ստացման հիմնական խոչընդոտը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Jiang Aldong, Cheng Fen, Lin Qi e. a., J. Synthetic Crystals, v. 15, № 2, p. 102 (1986).

УДК 550.837

ГЕОФИЗИКА

А. Н. Козлов, Г. М. Оганесян, Ю. П. Сковородкин

Возникновение электрических и магнитных полей во
 влагонасыщенных и сухих образцах горных пород
 под действием давления

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 1/II 1988)

Изменение напряженно-деформированного состояния горных масс при тектонических процессах в определенных гидрогеологических условиях сопровождается флюидодинамическими явлениями. В свою очередь, временные изменения локального магнитного поля и электрических параметров, наблюдаемые при натурном моделировании и режимных наблюдениях, могут быть результатом перемещений жидкой фазы в земле (¹).

Эти изменения вариации исследуются как возможные признаки сейсмотектонического процесса. При этом предполагаются следующие ситуации:

1. Тектонический процесс сопровождается долговременным изменением гидрорежима. Иными словами, фильтрационный процесс изменяется по мере изменения тектонических напряжений.

2. При изменении напряженно-деформированного состояния происходит относительно кратковременная инфильтрация жидкой фазы в зону дилатансии.

3. Изменение напряженно-деформированного состояния не сопровождается инфильтрацией извне жидкой фазы.

Если для первых двух случаев влияние фильтрационного потока на электрическое и магнитное поле исследовалось теоретически и экспериментально (¹⁻⁴), то вопрос о влиянии жидкой фазы, содержащейся в порах и трещинах горной породы изначально (третий случай) или содержание которой может измениться после кратковременной инфильтрации (второй случай), практически не изучено.

Рассмотрим результаты лабораторных измерений электрических и магнитных свойств керна осадочных, вулканических и метаморфизованных пород, отобранного из скважин в различных сейсмоактивных районах Армении.

В боковую поверхность образцов, изготовленных в виде цилиндров диаметром 35 мм и высотой 70 мм, «вживляли» серебряные электроды на глубину 5 мм. Боковую поверхность герметизировали влагонепроницаемой пленкой из эпоксидной смолы. Толщина этого слоя составляла от 0,2 до 0,3 мм. На боковой поверхности образца укрепляли индукционные датчики для измерения электродвижущей силы

U , пропорциональной $\frac{\partial B_{xy}}{\partial t} = B'_{xy}$ и $\frac{\partial B_z}{\partial t} = B'_z$, где B_{xy} и B_z компоненты магнитного поля. Образцы подвергали сжатию в направлении их высоты. Исследования проводили на дубликатах образцов, изготовленных из одного керна, при их естественном влагосодержании («сухие»), и насыщенных водой под вакуумом. Во втором случае содержание поровой жидкости определяли с помощью точного взвешивания. Оно составляло от 1 до 16 весовых процентов. Подготовленный таким образом образец устанавливали между пуансонами гидравлического 100-тонного пресса, который позволял осуществлять одноосное нагружение и разгрузку в различных режимах. Предварительно на торцы образца накладывали пластины-электроды и электроизолирующую пленку, которая одновременно препятствовала вытеканию жидкости («закрытая» система или недренажное сжатие). Для измерения электрических E и магнитных B сигналов была использована калиброванная система усилитель-самописец с большим входным сопротивлением (10 МОм), обладающая линейной характеристикой в диапазоне частот от 0,07 до 75 Гц. Выходной сигнал регистрировали на многоканальном быстродействующем самописце в полосе частот от 0,07 до 30 Гц. Продольную деформацию образца измеряли с помощью двух микрометров, закрепленных между пуансонами пресса.

В результате в процессе нагружение-разгрузка одновременно определяли: разность потенциалов электрических E_x , E_y , E_z компонент, магнитных B'_{xy} и B'_z компонент, продольную деформацию ΔL всего образца при известном давлении P на образец. Возникновения сигналов B'_{xy} и B'_z компонент можно ожидать при протекании электрического тока в образце, для чего производится замыкание торцевых электродов-пластин через резистор, сопротивление которого экспериментально установлено $R \leq 0,2 R$ образца. В процессе испытаний образцы доводили до разрушения. Основные результаты получены в режиме ступенчатого нагружения и разгрузки.

Как известно, при влагонасыщении образцов разного минерального состава их механические свойства изменяются (⁵⁻⁶). В нашем случае увеличение продольной деформации $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ и уменьшение разрушающих напряжений $\sigma_{разр}$ фиксируются при насыщении горной породы водой всего до 1%. Одновременно у большинства влагонасыщенных образцов разного состава в диапазоне напряжений более $0,5\sigma_{разр}$ возникают области ползучести (самопроизвольное увеличение деформации и падение напряжения). На рис. 1 показаны кривые зависимости ϵ , E_z и B'_{xy} от давления P у сухого и влагонасыщенного образцов из туфодацита (влагонасыщенность 6%).

Возникновение потенциала E_x , E_y , E_z параллельно (ось Z) и ортогонально к оси сжатия (оси X , Y) зарегистрировано у влагонасыщенных образцов разного минерального состава в широком диапазоне деформаций, включая область разрушения (запредельное состояние). Электрический сигнал возникает в виде импульсов во всем рассматриваемом диапазоне частот в процессе нагружение-разгрузка. При $0,1-0,2 \sigma_{разр}$ наблюдается максимум амплитуды сигнала и возникно-

вление синхронных E_x , E_y , E_z импульсов. При замыкании пластин-электродов происходит изменение магнитной индукции так же синхронно с электрическими импульсами (рис. 1). Такая закономерность выявлена у всех исследованных образцов: песчаников разной плот-

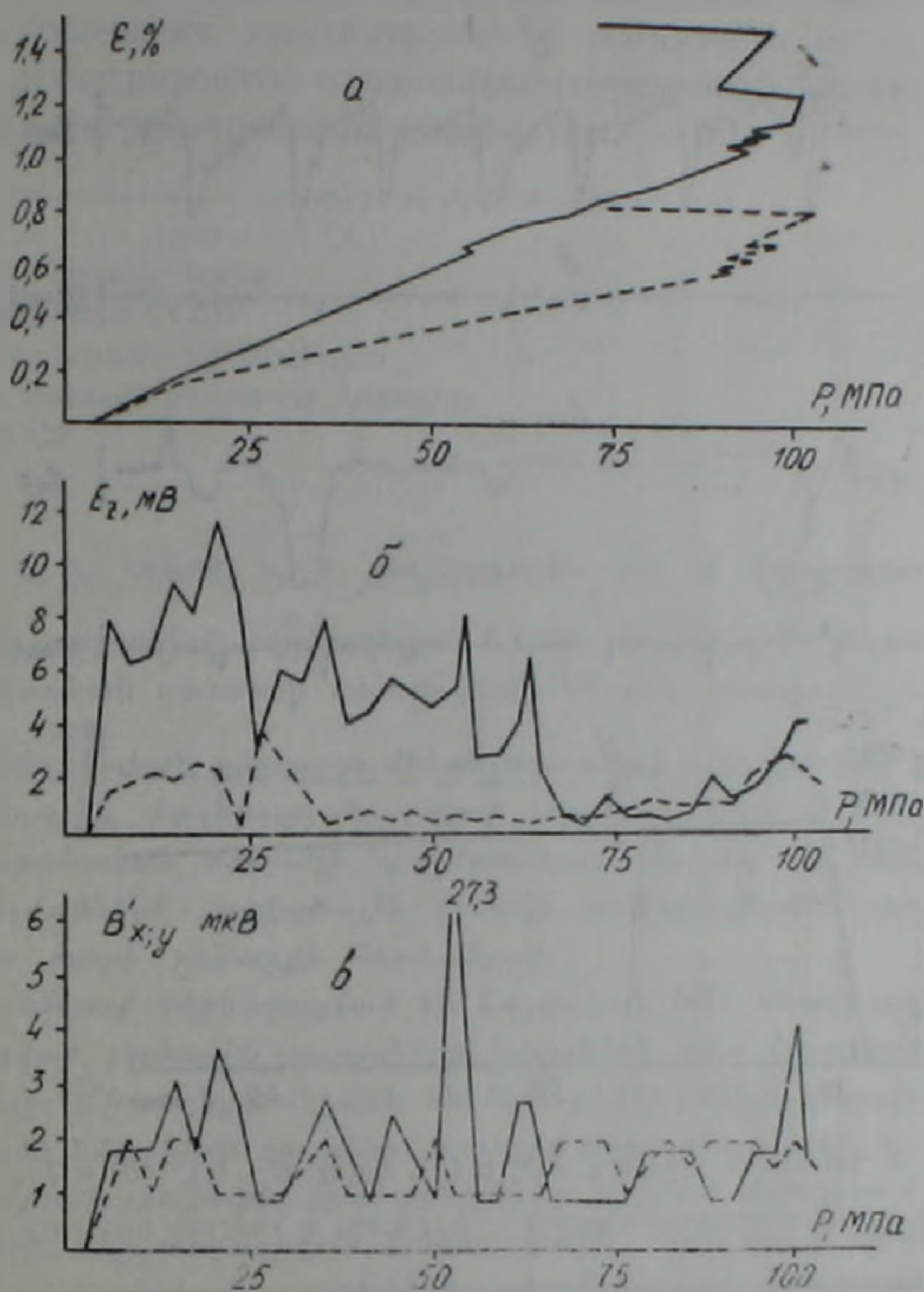


Рис. 1. Зависимости ϵ (а), E (б), B' (в) от давления для «сухих» (---) и влагонасыщенных (—) образцов туфодацита

ности, туфобрекчий, фельзитов, туфодацитов, пористых базальтов, андезитов и т. д. У влагонасыщенных образцов возникновение ползучести вызывает появление коррелированных периодических импульсов E_x , E_y , E_z , в свою очередь коррелированных с $B'_{x,y}$, B'_z . При размыкании электродов-пластин прекращалось течение тока, следовательно $B'_{x,y} \approx 0$ и $B'_z \approx 0$ (рис. 2).

У «сухих» образцов также наблюдается появление коррелированных E и B' импульсов в широком интервале давлений. Однако частота их возникновения и амплитуда значительно меньше по сравнению с влагонасыщенными аналогами.

Таким образом, в довольно широкой области напряжений ниже $\sigma_{разр}$ возникают электромагнитные явления во всем объеме образца. При этом жидкой фазой объясняется как изменение механических свойств, так и формирование электромагнитных сигналов. При изме-

нении напряженно-деформированного состояния образца может происходить изменение параметров исходных трещин, в первую очередь, их ширины, а также образование новых. В обоих случаях при раскрытии трещины или при сближении ее берегов, а также при образова-

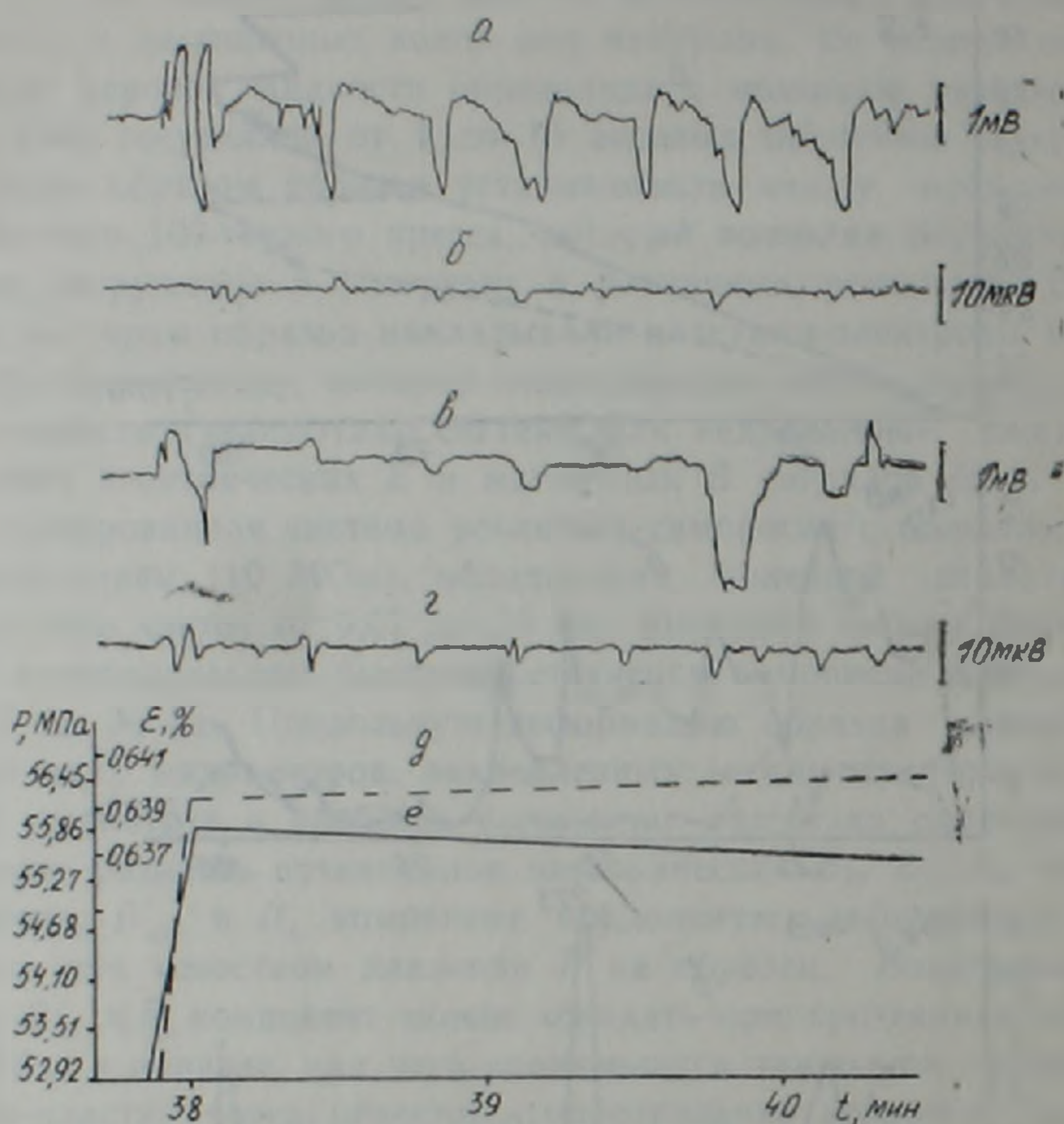


Рис. 2. Фрагмент записи $E_z(a)$, $B(b)$, $E_z(v)$, $B(z)$, $z(d)$ и $P(e)$ для влагонасыщенного образца туфодациита в участке ползучести

нии новой возникает градиент давления между полостью с изменяющимся объемом и в близрасположенных порах. В результате происходит относительно быстрая фильтрация жидкой фазы и перенос объемных зарядов при перетоке жидкости по протяженным каналам. Возникновение E и B' импульсов у «сухих» образцов также объяснимо фильтрацией остаточной жидкой фазы.

Периодическое возникновение синхронных импульсов на участке ползучести (рис. 2) согласуется с явлением прерывистого скольжения, обнаруженным В. Ф. Брейсом и Ж. Д. Байерли (⁷) в горной породе, заключающемся в периодическом хрупком разрушении участков зацепления поверхностей трещин. По видимому, и такое разрушение приводит к периодической фильтрации жидкой фазы.

Итак, деформирование влагонасыщенных образцов горных пород в отсутствии дренирования вызывает возникновение в них электрических и магнитных импульсов, часто коррелированных во времени. Наблюдается значительное увеличение числа и амплитуды импульсов в области ползучести. При увеличении влагонасыщения образца амплитуда и частота появления импульсов увеличиваются.

Амплитуда импульсов во влагонасыщенных образцах сопоставима с амплитудой электрических сигналов при фильтрационном процессе (⁴). Это позволяет считать, что в определенных геологических условиях, при изменении напряженно-деформированного состояния влагонасыщенных горных пород, на земной поверхности будут возникать «быстрые» изменения электрического и магнитного полей, которые возможно регистрировать с помощью современной магнитометрической (⁸⁻⁹) и электрометрической аппаратуры.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР
Институт физики Земли
Академии наук СССР
Институт земного магнетизма и
распространения радиоволн Академии
наук СССР

Ա. Ն. ԿՈՉԼՈՎ, Դ. Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Պ. ՍԿՈՎՈՐՈԴԿԻՆ

Լեռնային ապարների ջրահագեցած և շուր նմուշներում էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի առաջացումը ննջման ազդեցության տակ

Երկրաֆիզիկական դիտարկումների ժամանակ էլեկտրական բնութագրիչների և տեղային մագնիսական դաշտի ժամանակային փոփոխությունները հիդրոերկրաբանական որոշակի պայմաններում կարող են առաջանալ լեռնային դանգվածների լարվածային վիճակի փոփոխություններից առաջացող ստորերկրյա ջրերի բնթացքի հետևանքով:

Աշխատանքում ներկայացված են Հայկական ԽՍՀ սեյսմաակտիվ շրջաններից վերցված լեռնային ապարների նմուշների վրա կատարված փորձերի արդյունքները: Միառանգը ճնշման ևն ենթարկվել (մինչև ջարդվելը) նույնատիպ գլանաձև նմուշների զույգերը, որոնցից մեկը դիտարկվել է «շոր» վիճակում, իսկ մյուսը լրացուցիչ ջրահագեցվել է: Ճնշման բնթացքում դիտարկվել են նմուշների մեջ տեղադրված էլեկտրոդների միջև եղած պոտենցիալների տարբերությունը, մակածող տվիչների օգնությամբ՝ մագնիսական մակածության փոփոխությունները, ինչպես նաև երկայնական դեֆորմացիայի և ջարդող ուժի մեծությունները:

Պարզվել է, որ ջրի առկայությունը առաջ է բերում ոչ միայն դեֆորմացիայի մեծացում և ջարդող ուժի փոքրացում, այլ նաև էլեկտրական ազդանքշանների լայնույթների մեծացում, որն ըստ հեղինակների, հանդիսանում է էլեկտրական և երկայնական արդյունք:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. П. Сковородкин, Л. С. Безуглая, Изв. АН СССР. Физика Земли № 4, с. 104—109, 1980. ² D. V. Fitterman, J. Geophys. Res., v. 84, NOB 11, p. 6031—6040 (1979). ³ T. Ishido, H. Mizutani, J. Geophys. Res. v. 86, NB3, p. 1763—1775, 1981. ⁴ А. Н. Козлов, Г. М. Оганесян, Ю. П. Сковородкин, в кн.: Прогноз землетрясений, № 7, с. 282—287, 1986. ⁵ Физические свойства горных пород и полезных ископаемых, № 7, с. 282—287, 1986. ⁶ Физические свойства горных пород и полезных ископаемых, № 7, с. 282—287, 1986. ⁷ У. Справочник геофизика. (Под ред. Н. Б. Дортмана), Недра, М., с. 90—94, 1984. ⁸ У. Файф, Н. Прайс, А. Томпсон. Флюиды в земной коре, Мир, М., 1981. ⁹ W. F. Bucci, J. D. Byerlee, Science, 153, 1966, p. 990—992. ¹⁰ А. Н. Козлов, С. Е. Синельникова, в кн.: Экспериментальные исследования геомагнитного поля. ИЗМЕРЕНИЯ, с. 25—30, 1984. ¹¹ Л. С. Безуглая, А. Н. Козлов, Г. М. Оганесян, Ю. П. Сковородкин, ДАН АрмССР, т. 86, № 2, с. 75—78 (1988).

УДК 616.12—009.72—02:615.217.24

ФАРМАКОЛОГИЯ

С. Э. Акопов, М. А. Саркисян

Исследование фармакодинамики и фармакокинетики
 нифедипина при нарушениях мозгового кровообращения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. С. Габриеляном 11/V 1988)

Нифедипин считается одним из препаратов выбора при терапии регионарных, в том числе и церебральных дисциркуляций (¹). Это определяет необходимость самых тщательных исследований его клинической фармакологии, которая при нарушениях мозгового кровообращения (НМК) практически не исследовалась.

Была изучена фармакодинамика и фармакокинетика нифедипина у 56 больных с НМК при однократном приеме препарата. Нифедипин назначался в дозе 20 мг внутрь, причем использовались две его лекарственные формы—препарат «Коринфар» (ГДР) и «Адалат» (ФРГ). Первый назначался внутрь, второй—под язык. Концентрацию нифедипина в плазме оценивали в соответствии с существующими рекомендациями (^{2–5}). Расчет параметров фармакокинетики препарата осуществлялся на ЭВМ «Электроника—60». Анализировали следующие параметры: время запаздывания ($T_{зап.}$), время достижения максимума концентрации ($T_{макс.}$), период полувсасывания ($T_{1/2}$), период полуэлиминации ($T_{0.5}$), максимальная концентрация (C_{max}), площадь под фармакокинетической кривой (AUC), кажущийся пероральный клиренс (CL) и среднее время удержания (MRT). Связывание препарата в плазме оценивали методом равновесного диализа (²).

Фармакодинамику препаратов оценивали, с одной стороны, по влиянию на сердечный выброс и объемный кровоток по сонным артериям, а с другой,—по их антиагрегантному эффекту. Мозговой кровоток и сердечный выброс определяли на доплерографе SD—100 «Vincimed» (Швеция), агрегацию тромбоцитов—на агрегометре (Payton) (США). Полученный материал подвергали анализу с применением методов многомерного статанализа и теории распознавания образов на ЭВМ ЕС—1033 с использованием пакета прикладных программ BMDP—77.

Средние величины параметров фармакокинетики нифедипина для двух его лекарственных форм приведены в табл. 1 и 2. Как видно из этих данных, они отличаются по своим кинетическим параметрам. Адалат быстро всасывается, и его максимальная концентрация в крови выше, чем для коринфара. По периоду полуэлиминации и клиренсу эти препараты достоверно не отличались друг от друга, хотя адалат

выводился из организма несколько быстрее. Эти различия позволяют рекомендовать адалат в тех случаях, когда необходимо достижение быстрого и значительного эффекта, например при гипертонических кризах. При курсовом назначении, по-видимому, выгоднее использование коринфара. Однако проведенный анализ показал, что для обеих лекарственных форм имеет место выраженная вариабельность фармакокинетических параметров у различных больных. Для адалата, например, максимальная концентрация колебалась в пределах 25—195 нг/мл, период полуэлиминации—от 0,5 до 5,5 ч и т. д. Аналогичные колебания отмечены и в случае коринфара. Поэтому было проведено разделение обследованных больных на классы, отличающиеся по типу фармакокинетики исследованных препаратов (табл. 1 и 2). Выделение таких классов означает, что при одинаковой дозировке нифедипина больным с НМК его терапевтический эффект может сильно варь-

Таблица 1
Фармакокинетика и фармакодинамика адалата у больных с НМК

ПАРАМЕТР		Группа в целом, n=12	Тип А, n=4	Тип В, n=3	Тип С, n=3
T _{max} , ч		0.583 ±0.08	0.500 ±0.01	0.563 ±0.06	0.601 ±0.05
T _{0.5} ^α , ч		0.14 ±0.03	0.10 ±0.02	0.11 ±0.01	0.10 ±0.01
T _{0.5} ^β , ч		3.13 ±0.36	4.10 ±0.66	2.50 ±0.26	1.51 ±0.77
C _{max} , нг/мл		71.8 ±6.7	95.1 ±3.8	75.4 ±7.8	40.7 ±5.9
AUC, нг/мл/ч		149.5 ±19.9	178.8 ±7.2	150.5 ±28.5	53.8 ±12.9
Cl, л/ч		189.7 ±42.5	112.6 ±4.7	141.8 ±24.4	409.3 ±79.3
MRT, ч		3.6 ±0.41	4.4 ±0.60	4.9 ±2.00	2.1 ±0.90
Увеличение ударного объема, %		3.1 ±1.25	4.4 ±2.30	5.1 ±3.30	0.9 ±0.81
Увеличение объемного кровотока по сонным артериям, %	0.5ч	14.1 ±3.5	25.3 ±4.6	17.2 ±2.7	3.8 ±2.6
	3.0ч	9.9 ±3.3	21.3 ±4.5	6.2 ±3.8	0
	6.0ч	5.6 ±2.3	13.7 ±4.3	1.8 ±0.8	0
Уменьшение агрегации тромбоцитов, %	0.75ч	30.7 ±7.2	50.7 ±11.7	31.6 ±15.3	14.6 ±8.0
	3.0ч	15.6 ±5.3	27.2 ±11.6	7.3 ±3.8	3.1 ±3.0
	6.0ч	5.9 ±2.6	11.0 ±5.8	1.6 ±1.7	0

Таблица 2

Фармакокинетика и фармакодинамика коринфара у больных с ИМК

ПАРАМЕТР	Группа в целом, n=44	Тип А, n=11	Тип В, n=21	Тип С, n=11
$T_{1/2\beta}$, ч	0.711 ± 0.09	1.290 ± 0.21	0.560 ± 0.10	0.395 ± 0.07
T_{max} , ч	2.83 ± 0.08	2.60 ± 0.30	2.91 ± 0.11	2.95 ± 0.05
$T_{0.5}^{\alpha}$, ч	0.045 ± 0.04	0.30 ± 0.66	0.49 ± 0.06	0.52 ± 0.07
$T_{0.5}^{\beta}$, ч	4.90 ± 0.64	3.52 ± 1.53	4.75 ± 0.80	6.51 ± 1.21
C_{max} , нг/мл	40.9 ± 3.2	17.0 ± 1.3	38.5 ± 1.8	69.4 ± 3.1
AUC, нг/мл/ч	159.2 ± 20.7	70.6 ± 19.9	192.6 ± 19.5	310.4 ± 33.7
CL, л/час	216.6 ± 39.6	524.7 ± 57.8	132.4 ± 15.6	67.6 ± 8.7
MRT, ч	7.1 ± 0.74	6.3 ± 2.10	7.0 ± 0.80	8.1 ± 1.32
Уменьшение агрегации тромбоцитов, %	3.0ч	42.5 ± 4.8	0	31.7 ± 5.7
	8.0ч	14.8 ± 4.6	0	55.7 ± 7.6
			12.4 ± 5.1	21.7 ± 6.9

ровать, по-видимому, за счет различий в фармакокинетике препарата.

Для проверки этого предположения была проанализирована связь между фармакокинетикой и фармакодинамикой нифедипина. Как видно из табл. 1, адалат приводит к увеличению у обследованных больных сердечного выброса и объемного кровотока по сонным артериям. При этом его эффект различался в выделенных подгруппах и зависел от логарифма концентрации препарата в крови (коэффициент корреляции 0,8). У трех больных, у которых концентрация препарата в крови была ниже 40 нг/мл, эффект вообще отсутствовал. Интересно отметить, что увеличение у одного больного дозы препарата с 20 до 30 мг привело к отчетливому увеличению мозгового кровотока. Длительность эффекта препарата также зависела от фармакокинетики. При относительно высоких значениях периода полужизни и низких значениях клиренса эффект адалата на мозговой кровоток сохранялся до 6 ч, в группах же с быстрым выведением препарата он исчезал уже к 3 часу. Аналогичные связи наблюдались и для антиагрегантного эффекта адалата и коринфара (табл. 1 и 2). И здесь значительный и длительный эффект (до 8 ч) наблюдался при достижении высокой концентрации нифедипина в крови и его относительно медленном выведении из организма.

Таким образом, оценка фармакокинетики нифедипина позволяет прогнозировать его терапевтический эффект, что создает основу для оптимизации его использования у больных ИМК. Проведенный клас-

тер-анализ показал, что отнесение обследуемого больного к одному из выделенных типов фармакокинетики нифедипина возможно по ограниченному числу измерений концентрации препарата в крови. Для коринфара только по определению концентрации препарата через 2, 3 и 4 ч после приема возможно определить решающие правила отнесения обследуемого больного к одному из трех выделенных классов фармакокинетики со статистической достоверностью в 97,7%. Это позволит сразу выделить подгруппу больных (тип А), которым использование этого препарата не показано, ввиду его плохого всасывания и быстрого выведения из организма. Отличия фармакокинетики нифедипина в классах (типах) В и С также диктуют его применение у этих больных в различной дозировке и с разной частотой суточного назначения.

Однако терапевтический эффект нифедипина зависит не только от параметров его фармакокинетики. Обследуемых больных отличает и выраженная вариабельность фармакодинамических параметров нифедипина. Его эффект зависит от чувствительности к нему сосудов и тромбоцитов, конкретных условий гемодинамики и др. Так, в случае, когда адалат вызывал не увеличение, а уменьшение сердечного выброса (у двух больных), он приводил и к понижению мозгового кровотока. Аналогичным образом, несмотря на высокую концентрацию нифедипина в крови у 14% обследованных больных, получавших адалат и коринфар, не отмечалось уменьшения агрегации тромбоцитов. Оказалось, что у этих больных тромбоциты полностью утратили чувствительность к нифедипину.

Другим фактором, определяющим эффективность препарата, является его взаимодействие с эндогенными физиологически активными соединениями. Нами исследован в этом плане простагландин. У части больных нифедипин приводил к более или менее выраженному увеличению концентрации простагландина в крови, и это хорошо коррелировало с его антиагрегантным эффектом (коэффициент корреляции 0,7).

Наконец, обсуждая природу факторов, определяющих сосудистотромбоцитарные эффекты нифедипина, необходимо указать, что они зависят и от его связывания в плазме. У обследованных больных с НМК связывание нифедипина с белками плазмы колебалось от 65 до 95%. Кроме того было обнаружено, что до 20% нифедипина могут связывать эритроциты, причем этот параметр был также весьма вариабельным.

Таким образом, терапевтический эффект нифедипина определяется целым комплексом факторов, связанных с особенностями его фармакокинетики и фармакодинамики у различных больных. Очевидно, что оптимизация использования этого препарата при нарушениях мозгового кровообращения требует предварительной оценки этих особенностей и разработки индивидуализированных схем назначения препарата.

Греванский
медицинский институт

Նիֆեդիպինի ֆարմակադինամիկայի և ֆարմակակինետիկայի
ուսումնասիրումներ ուղեղի արյան շրջանառության խանգարման ժամանակ

Ցույց է տրված, որ ուղեղային արյան շրջանառության խանգարմամբ
տարբեր հիվանդների մոտ նիֆեդիպինի ֆարմակակինետիկայի ցուցանիշները
դժվարորեն տարբեր են: Նիֆեդիպինի ազդեցությունը ուղեղային արյան հոսքի
թրոմբոցիտների ագրեգացիայի վրա պայմանավորված է պրեսայարատի կոն-
ցենտրացիայով արյան մեջ, ինչպես նաև՝ նիֆեդիպինի նկատմամբ ուղեղային
անոթների, թրոմբոցիտների և արյան մեջ պրոստացիկլինի կոնցենտրացիա-
յից:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ H. Gelmers, Amer. J. Cardiol., v. 59, № 3 (1987). ² Д. О. Румянцев, В. К. Пономорев, О. С. Рябоконь, Фармакол. и токсикол., № 3 (1986). ³ K. Miyazaki, N. Kohri, T. Arita et al., J. Chromatography, v. 310, № 1 (1984). ⁴ R. McAllister, Amer. J. Med., v. 81, № 6 (1986). ⁵ K. Schlossmann, Arzneim. Forsch., v. 22, № 3 (1972).