

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 88 № 2

1989

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. Բաբտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ թղթ. առդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ թղթ. առդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ թղթ. առդամ (պատ. Խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Ր. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРИЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНИЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Վ. Մ. Մարտիրոսյան—Հիլբերտի օպերատորին նման օպերատորների մասին. վերլուծության թեորեմներ 51
- Ի. Վ. Հովհաննիսյան—Մ. Մ. Ջրբաշյանի $N_\alpha(-\infty < \alpha < 0)$ դասի ֆունկցիաների մի ներկայացման մասին 55
- Ռ. Խ. Թոռոսյան—Վերջավոր բազմությունների $\{F\}$ -անջատելի ենթաբազմությունների քանակի մասին 61
- Գ. Ա. Սուխասյան—Ֆունկցիաների դիֆերենցիալ մասին, որոնց գրունները և բնեռները պարզ են, իրար հաջորդում են և բնկած են ճառագայթների համակարգի վրա 65
- Գ. Գ. Էվին—Միջոցադիկայները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում 71

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

- Վ. Ն. Հակոբյան—Կոշտ ներդրակով ուժեղացված առաձգական սեպի համար մի կոնտակտային խնդրի մասին 77

ՖԻԶԻԿԱ

- Ժ. Բ. Խաչատրյան—50—90 կմ բարձրությունների վրա փոքր զառային լազերորիչների որոշման արբանյակային ռադիոլոկացիոն ղուպլերյան մեթոդը 82

ՈՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

- Հ. Վ. Ազատյան, Փ. Ս. Կինոյան, Տոս. Ի. Գուդիմենկո, Վ. Ն. Ջալիլչևի, Գ. Մ. Պոդոսյան—Ուլտրային ալեքտրոնային կապ պարունակող սիմ.-տրիադիկային օլիգակլինների սինթեզը, հատկությունները և պոլիմերումը 87

ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿՆՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Ս. Ազարյան, Լ. Ա. Թուխկյան, Ի. Ա. Ջալալյան—MnI.V ուտրովիտի բաղադրման ճնշումը Ca-երկթևի մենթ-ի և դրոմներից ստացված Ca-ցածրամուկուլյար ՈՆԹ պրեպարատներով 93

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартirosян—Об операторах, подобных оператору Гильберта; теоремы разложения	51
И. В. Оганисян—Об одном представлении функций класса N_α ($-1 < \alpha < 0$)	
М. М. Джрбашяна	55
Б. Е. Торосян—О числе $\{F\}$ -отделимых подмножеств в конечных множествах	61
Г. А. Сукиасян—Дефекты функций с простыми нулями и полюсами, чередующимися на системе лучей	65
Г. Г. Эмин—Предрадикалы в категории модулей над всеми кольцами	71

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Акопян—Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением	77
---	----

ФИЗИКА

Ж. Б. Хачатрян—Спутниковый радиолокационно-доплеровский метод определения малых газовых компонент на высотах 50–90 км	82
---	----

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. В. Азатян, Ф. С. Киноян, Ю. И. Гудижянко, В. И. Запашный, Г. М. Погосян—Синтез, свойства и полимеризация слиям триазинсодержащих олигоэфиров с терминальной ацетиленовой связью	87
--	----

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

А. С. Агабалян, Л. А. Рухкян, Р. А. Захорят—Подавление размножения ретровируса MuLV препаратами Са-ди РНК и Са низкомоллекулярной РНК из дрожжей	93
--	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

<i>V. M. Martirosian</i> —On the operators, similar to Hilbert operator; decomposition theorems	51
<i>I. V. Hovhannisian</i> —On a representation of functions of the class $N_\alpha(-1 < \alpha \leq 0)$ of M. M. Džerbashian	55
<i>B. E. Torossian</i> —On the number of $\{F\}$ -separable subsets of finite sets.	61
<i>G. A. Suklasian</i> —On the defects of the functions with simple zeros and poles alternating on the system of rays	65
<i>G. G. Emin</i> —Preradicals, in the category of modules over all rings . .	71

THEORY OF ELASTICITY

<i>V. N. Hakopian</i> —On a contact problem for an elastic wedge stiffened by a rigid inclusion	77
---	----

PHYSICS

<i>J. B. Khachatryan</i> —Satellite radiolocation-Doppler method of small determination gas component 50—90 km height.	82
--	----

ORGANIC CHEMISTRY

<i>H. V. Azatyan, F. S. Kinoyan, Ju. I. Gudimenco, V. N. Zaplitshni G. M. Pogossian</i> —Cynes, properties and polymerisation of s-triazinic oligoethers with terminal acetylenic bond	87
--	----

MOLECULAR BIOLOGY

<i>A. S. Agaballan, L. A. Ruchkian, R. A. Zakarian</i> —Inhibition of magnification of Muvon the action of ols RNA and low molecular weight RNA from yeast	93
--	----

Техн. редактор *Азизбеян Л. А.*

Сдано в набор 15.02. 1989 г. Подписано к печати 30.05. 1989 г. ВФ 02176.
 Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 2. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист 4,2
 Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт.—4,2

Усл. кр. отт. Учет.-изд. л. 3,3. Тираж 530. Заказ № 302. Издат. № 7584.
 Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. I, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Об операторах, подобных оператору Гильберта;
 теоремы расщепления

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XI 1988)

Теорема Рисса—Титчмарша ⁽¹⁾ об ограниченности в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, оператора Гильберта

$$(Sf)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi i} \int_{|y-x| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy, \quad x \in R \text{ п. в.}, \quad (1)$$

и результаты И. И. Привалова ⁽²⁾ о граничном поведении интегралов типа Коши—Стилтьеса устанавливают обобщимую связь разложения $L_p(R) = H_p^+ \oplus H_p^-$ с формулами Сохоцкого. Если $f(x)(1+|x|)^{-1} \in L_1(R)$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f(x)}{x-z} dx = \begin{cases} f^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ -f^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad (2)$$

то формулы Сохоцкого можно записать в виде

$$(P^\pm f)(x) = f^\pm(x), \quad x \in R \text{ п. в.}; \quad P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S), \quad (3)$$

где I —единичный оператор. Тогда $P^\pm$ —соответственно операторы ограниченного проектирования $L_p(R)$ на $H_p^\pm$ (см., например, ⁽¹⁾). Известна (см., например, ⁽³⁾) следующая

Проблема А. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \geq 0$ —локально суммируемая на R функция. Когда оператор Гильберта S ограничен в $L_p(R; w dx)$?

Полное решение проблемы А дано в следующей теореме Ханта—Макенхаупта—Видена ⁽⁴⁾.

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \geq 0$ —локально суммируемая на R функция. Тогда для справедливости оценки

$$\int_R |Sf|^p w dx \leq C_p \int_R |f|^p w dx \quad (4)$$

с константой C_p , не зависящей от f , необходимо и достаточно, чтобы $w \in (A_2)$, т. е.

$$\sup_J \left\{ |J|^{-p} \left(\int_J w dx \right) \left(\int_J w^{\frac{1}{1-p}} dx \right) \right\} < +\infty,$$

где $J \subset R$ —произвольный интервал, $|J|$ —его длина.

Проблема А требует уточнения для пространства $L_p(R; vdx)$, не лежащих в $L_1(R; (1+|x|)^{-1}dx)$, так как выражение Sf имеет смысл не для всех $f \in L_p(R; vdx)$. В этом случае от оператора S можно перейти к подобному ему оператору $S_\Omega = \Omega S \Omega^{-1}$, выбрав функцию Ω так, чтобы оператор S_Ω мог быть применен ко всем $f \in L_p(R; vdx)$. Положим

$$P_\Omega^+ = \Omega P^+ \Omega^{-1}, P_\Omega^- = \overline{\Omega} P^- \overline{\Omega}^{-1}, P_\Omega = I - P_\Omega^+ - P_\Omega^-. \quad (5)$$

Задача 1. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — измеримая на R , почти всюду отличная от нуля функция, и для функции $v \geq 0$ произведение $w = v|\Omega|^p$ локально суммируемо на R . Найти условия, при которых справедлива оценка

$$\int_R |S_\Omega f|^p v dx \leq C_p \int_R |f|^p v dx \quad (6)$$

с константой C_p , не зависящей от f , и

$$(P_\Omega^+ P_\Omega^-)(f) = 0, \quad f \in L_p(R; vdx). \quad (7)$$

При $\Omega(z) \equiv 1$ задача 1 сводится к проблеме А, так как в этом случае $S_\Omega = S$, $P_\Omega^\pm = P^\pm$ и (7) вытекает из (6). Однако из (6), вообще говоря, не следует (7).

Решение поставленной задачи дано в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — измеримая на R почти всюду отличная от нуля функция и для функции $v \geq 0$ произведение $w = v|\Omega|^p$ локально суммируемо на R . Тогда для выполнения (6) и (7) необходимо и достаточно, чтобы $w \in (A_p)$ и $\exp\{2i \arg \Omega(x)\}$ была граничной функцией внутренней функции для полуплоскости $\text{Im} z > 0$.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\Omega \neq 0$ — целая функция и для функции $v \geq 0$ произведение $w = v|\Omega|^p$ локально суммируемо на R . Тогда для выполнения (6) и (7) необходимо и достаточно, чтобы $w \in (A_p)$ и

$$|\Omega(z)/\overline{\Omega}(z)| \leq 1, \quad \text{Im} z > 0. \quad (8)$$

Отметим, что класс HV целых функций, удовлетворяющих условию (8) и не имеющих корней при $\text{Im} z \leq 0$, был изучен М. Г. Крейном (5).

Через $\overline{HV}_0$ обозначим класс целых функций Ω , удовлетворяющих (8) и условию

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \ln |\Omega(iy)/\overline{\Omega}(iy)| = 0. \quad (9)$$

С задачей 1 и теоремой 1 связаны теоремы расщепления трех типов весовых пространств в прямую сумму „стандартных“ пространств. Для формулировки соответствующих результатов приведем необходимые сведения и обозначения.

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in (A_p)$. Если $f(z)$ голоморфна при $\text{Im} z > 0$, то

$$f \in H_p^+(w dx) \Leftrightarrow \sup_{v > 0} \left\{ \int_R |f(x+iy)|^p w(x) dx \right\} < +\infty \quad (10)$$

(см. (6)). Аналогично определяется пространство $H_p^+(w dx)$ в полуплоскости $\text{Im} z < 0$. Функции из $H_p^\pm(w dx)$ имеют некасательные граничные значения п. в. на R и с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_R |f|^p w dx \right)^{1/p} \quad (11)$$

$H_p^\pm(w dx)$ и $H_p^-(w dx)$ — банаховы пространства (6).

Если $1 < p < \infty$, $w \in (A_p)$, $0 \leq z < \infty$, то $W_{p,z}^\pm(w dx)$ — пространство с нормой (11) целых функций $f(z)$ степени $\leq z$, принадлежащих $H_p^\pm(w dx)$ при $\pm \text{Im} z > 0$ (см. (7-9)). $W_{p,z}^\pm(w dx)$ и $W_{p,z}^-(w dx)$ — банаховы пространства (7-9), а $W_{p,0}^\pm(w dx)$ содержит лишь тождественно нулевую функцию.

Введем пространство $E_p(v dx)$. Если

$$1 < p < \infty, w \in (A_p), \Omega \in \overline{HB_0}, v = w|\Omega|^{-p}, \quad (12)$$

то $E_p(v dx)$ — пространство с нормой

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_R |f|^p v dx \right)^{1/p} \quad (13)$$

целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$f(z)/\overline{\Omega}(z) \in H_p^+(w dx), f(z)/\Omega(z) \in H_p^-(w dx). \quad (14)$$

$E_p(v dx)$ — банахово пространство, причем: 1) если $\Omega(z)/\overline{\Omega}(z) \neq 0$ при $\text{Im} z > 0$, то $E_p(v dx)$ содержит лишь тождественно нулевую функцию; 2) если функция $\Omega(z)/\overline{\Omega}(z)$ имеет в полуплоскости $\text{Im} z > 0$ ровно n нулей (с учетом кратностей), где $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $E_p(v dx)$ — n -мерное пространство.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (12). Тогда

$$L_p(R; v dx) = E_p(v dx) \oplus \Omega H_p^+(w dx) \oplus \overline{\Omega} H_p^-(w dx), \quad (15)$$

а P_+, P_+, P_- — соответственно операторы ограниченного проектирования банахова пространства $L_p(R; v dx)$ на его замкнутые подпространства

$$E_p(v dx), \Omega H_p^+(w dx), \overline{\Omega} H_p^-(w dx). \quad (16)$$

В специальном случае, когда $p=2$, $w(x)=1$ и функция $\Omega(z)$ имеет конечную степень, теорема 2 эквивалентна одному утверждению из работы (10).

Если выполнены условия (12) и $0 \leq z < \infty$, то через $H_{p,z}^+(v dx)$ обозначим пространство с нормой (13) функций $f(z)$, голоморфных при $\text{Im} z > 0$ и таких, что

$$e^{isz} f(z) \{\overline{\Omega}(z)\}^{-1} \in H_p^+(w dx). \quad (17)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (12) и $0 \leq z < \infty$. Тогда

$$H_{p,z}^+(v dx) = E_p(v dx) \oplus \Omega H_p^+(w dx) \oplus \overline{\Omega} W_{p,z}^-(w dx), \quad (18)$$

а P_+, P_+, P_- — соответственно операторы ограниченного проекти-

рования банахова пространства $H_p^+(vdx)$ на его замкнутые подпространства

$$E_p(vdx), \Omega H_p^+(wdx), \overline{\Omega} W_{p,\sigma}^-(wdx). \quad (19)$$

Если выполнены условия (12) и $0 \leq \sigma_+, \sigma_- < \infty$, то через $E_p^{\sigma_+, \sigma_-}(vdx)$ обозначим пространство с нормой (13) целых функций $f(z)$, для которых

$$e^{i\sigma_+ z} \frac{f(z)}{\Omega(z)} \in H_p^+(wdx), \quad e^{-i\sigma_- z} \frac{f(z)}{\Omega(z)} \in H_p^-(wdx). \quad (20)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (12) и $0 \leq \sigma_+, \sigma_- < \infty$. Тогда

$$E_p^{\sigma_+, \sigma_-}(vdx) = E_p(vdx) \ominus \Omega W_{p,\sigma_-}^+(wdx) \oplus \overline{\Omega} W_{p,\sigma_+}^-(wdx), \quad (21)$$

а P_+, P_0^+, P_- — соответственно операторы ограниченного проектирования банахова пространства $E_p^{\sigma_+, \sigma_-}(vdx)$ на его замкнутые подпространства

$$E_p(vdx), \Omega W_{p,\sigma_-}^+(wdx), \overline{\Omega} W_{p,\sigma_+}^-(wdx) \quad (22)$$

При $p=2$, $w(x) \equiv 1$ в (15), (18) и (21) имеем расщепление в сумму ортогональных пространств.

Отметим, что теоремы 2—4 обобщаются на тот случай, когда $1 < p < \infty$, $w \in (A_p)$, $v = w|\Omega|^{-p}$, где Ω — измеримая на R почти всюду отличная от нуля функция и $\exp\{2i \arg \Omega(x)\}$ — граничная функция внутренней функции для полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Հիլբերտի օպերատորին նման օպերատորների մասին.
վերլուծության քննեմներ

Դիցուք $1 < p < \infty$ և $w \geq 0$ իրական առանցքի վրա լոկալ հանրագումարելի ֆունկցիա է: $L_p(R; wdx)$ դասում Հիլբերտի ձևափոխության սահմանափակ լինելու հայտանիշը տրվել է ⁽¹⁾ աշխատանքում: Ներկա հոդվածում բերված է մեկ ավելի ընդհանուր խնդրի լուծումը: Կշռային v ֆունկցիաների մի դասի համար բերված է մի թեորեմ $L_p(R; vdx)$ տարածությունը իր որոշակի տեսքի փակ ենթատարածությունների ադիդ գումարի տեսքով ներկայացնելու մասին: Բերված են նման տիպի թեորեմներ $L_p(R; vdx)$ -ի երկու տեսակի ենթատարածությունների վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐՈՒՄՆԵՐՅԱՆ

- ¹ Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- ² И. И. Привалов, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 4, с. 261—276 (1940). ³ Дж. Гарнетт, Ограниченные аналитические функции, Мир, М., 1984. ⁴ R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Weeden, Trans. Amer. Math. Soc., v. 176, p. 217—251 (1973). ⁵ И. И. Ахизер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.
- ⁶ J. Garcia-Cuerva, Rizz. Math., v. 162, p. 5—68 (1979). ⁷ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ⁸ В. М. Мартиросян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 19, с. 44—74 (1984).
- ⁹ В. Б. Дыбин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 21, с. 566—582 (1986). ¹⁰ В. П. Гурарий, Мат. сб., т. 58 (100), с. 439—452 (1962).

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

И. В. Оганисян

Об одном представлении функций класса
 $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/XI.1988)

1. Класс $N_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$ М. М. Джрбашяна ⁽¹⁾ совпадает с множеством функций $F(z)$, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление вида

$$F(z) = cz^\lambda \frac{B_\alpha(z; a_n)}{B_\alpha(z; b_n)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\}, \quad (1)$$

где c — постоянная; λ — целое число,

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (2)$$

а $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция ограниченной вариации на сегменте $[0; 2\pi]$.

В представлении (1) функции $B_\alpha(z; a_n)$ и $B_\alpha(z; b_n)$ сходящиеся в $|z| < 1$ произведения М. М. Джрбашяна с нулями $\{a_n\}_n^*$ и $\{b_n\}_n^*$ соответственно:

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{-W_\alpha(z; z_k)}. \quad (3)$$

Для классов $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ имеет место включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2} \subset \dots \subset N_0 (-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < 0)$, где $N_0 \equiv N$ — класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны.

Через $A_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$ обозначим множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций, принадлежащих классу N_α . Тогда для каждой функции $f(z) \in A_\alpha$ имеет место представление

$$f(z) = cz^\lambda B_\alpha(z; z_k) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\}. \quad (4)$$

Обозначим через A_α^* множество тех функций из A_α , в представлении (4) которых функция $\psi(\theta)$ не возрастающая. Так как при $-1 < \alpha \leq 0$ имеем $\operatorname{Re} S_\alpha(z) \geq 0$, а также ⁽²⁾

$$|B_\alpha(z; z_k)| \leq |B_0(z; z_k)| \leq 1 \quad (|z| < 1), \quad (5)$$

то легко убедиться в справедливости следующих двух замечаний.

Замечание 1. Если $f(z) \in A_\alpha^* (-1 < \alpha \leq 0)$, то $f(z)$ ограничена в $|z| < 1$.

Замечание 2. Любую функцию класса $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ можно представить как частное двух функций класса A_α^* .

Следующая теорема характеризует граничное свойство функций класса N_α ((³), теорема 2 при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$).

Теорема А. Если $F(z) \in N_\alpha (-1 < \alpha < 0)$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta}) \quad (6)$$

существует для любого $\theta \in [0; 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset [0; 2\pi]$, $(1+\alpha)$ -емкость которого равна нулю.

В работе (⁴) доказывается неулучшаемость данного результата. Приведем также две теоремы, доказательства которых можно найти в работах (⁵) и (⁷).

Теорема В. Если функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, принадлежит классу $A_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$, то имеет место оценка

$$|a_n| \leq \exp \left\{ \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \sqrt[n]{c_\alpha (1+\alpha) n^{\alpha+1} (1+o(1))} \right\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где c_α — некоторая положительная константа.

Теорема Салема и Зигмунда. Если $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^\beta < \infty$ ($0 < \beta < 1$), то тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ может расходиться только на множестве, у которого $(1-\beta)$ -емкость равна нулю.

В данной работе устанавливаются оценки для коэффициентов тейлоровских разложений для функций любого класса $A_\alpha^* (-1 < \alpha \leq 0)$ в зависимости от α . Откуда получается, что любую функцию класса $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ можно представить как частное двух ограниченных аналитических функций этого же класса, коэффициенты Тейлора которых имеют порядок $O(n^\alpha)$.

2. Полученный здесь основной результат по своей формулировке оказался близким (в некотором смысле и более точным) к формулировке соответственной теоремы для классов T_γ Л. Карлесона, хотя нет данных о сравнимости классов $N_\alpha (-1 < \alpha < 0)$ с классами $T_\gamma (0 < \gamma < 1)$. А именно известна ((⁶), теорема 3.6)

Теорема С. Если $\omega(z) \in T_\gamma (0 < \gamma < 1)$, то существуют две ограниченные, аналитические функции

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

так, что

$$\omega(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 \frac{n^1}{(\log n)^{1+\gamma}} < \infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |b_n|^2 \frac{n}{(\log n)^{1+\gamma}} < \infty$$

для любого $\delta > 0$. В частности, φ и ψ принадлежат любому классу $T_\beta (\beta < \gamma)$.

Для классов T_γ имеется также аналогичный теореме А результат о существовании граничных предельных значений (см. [6], теорема 3.3). Отметим, что эти результаты для классов $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ были доказаны непосредственно из их факторизационных представлений, а для классов $T_\gamma (0 < \gamma < 1)$ они были выявлены Карлесоном довольно окольными путями, ввиду того, что не была выяснена их аналитическая структура и не были известны факторизационные представления, характеризующие эти классы.

3. Докажем следующую основную теорему:

Теорема 1. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1, \quad (7)$$

принадлежит классу $A_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$, то имеет место оценка

$$|a_n| = O(n^\alpha), \quad n \rightarrow \infty.$$

Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. При $\beta > 1$ справедлива оценка

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - re^{i\varphi}|^\beta} \leq \frac{c}{(1-r)^{\beta-1}},$$

где c — абсолютная константа, зависящая только от β .

Действительно, при $0 < \varphi \leq \pi$ имеем

$$|1 - re^{i\varphi}| \geq \left[(1-r)^2 + r \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq c(1-r + \varphi).$$

Следовательно

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - re^{i\varphi}|^\beta} = 2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{|1 - re^{i\varphi}|^\beta} \leq c \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-r + \varphi)^\beta},$$

откуда и следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 2. Если $-1 < \alpha \leq 0$, то имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} |B'_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)| d\varphi \leq \frac{c}{(1-r)^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Согласно (3), имеем

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha(z; z_k),$$

где

$$b_\alpha(z; z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z; z_k)},$$

Тогда, вычисляя логарифмическую производную произведения $B_\alpha(z; z_k)$, получим

$$B_{\alpha}(z; z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b'_{\alpha}(z; z_k)}{b_{\alpha}(z; z_k)} B_{\alpha}(z; z_m).$$

Согласно (5), получим

$$|B_{\alpha}(z; z_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \{|b'_0(z; z_k)| + |b'_{\alpha}(z; z_k) - b'_0(z; z_k)|\}.$$

Имея в виду неравенство (6)

$$|b'_{\alpha}(z; \xi) - b'_0(z; \xi)| \leq c \frac{(1 - |\xi|)^{1+\alpha}}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}},$$

а также

$$|b'_0(z; \xi)| = \frac{1 - |\xi|^2}{|1 - z\bar{\xi}|^2} \leq c \frac{(1 - |\xi|)^{1+\alpha}}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}},$$

находим

$$|B'_{\alpha}(z; z_k)| \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|)^{1+\alpha}}{|1 - z\bar{z}_k|^{2+\alpha}}.$$

Откуда, используя лемму 1, получаем

$$\int_0^{2\pi} |B'_{\alpha}(re^{i\varphi}; z_k) d\varphi \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|)^{1+\alpha}}{(1 - r|z_k|)^{1+\alpha}} \leq \frac{c}{(1 - r)^{1+\alpha}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $f_1(z) \in A_{\alpha}^*$ ($-1 < \alpha \leq 0$) и не имеет нулей, тогда

$$\int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{c}{(1 - r)^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Если $f_1(z)$ удовлетворяет условиям леммы, то справедливо представление

$$f_1(z) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\alpha}(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\}, \quad d\psi(\theta) \geq 0. \quad (8)$$

Имея в виду (2) и замечание 1, легко получить

$$|f'_1(re^{i\varphi})| \leq c \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - re^{i(\varphi - \theta)}|^{2+\alpha}},$$

используя лемму 1, находим

$$\int_0^{2\pi} |f'_1(re^{i\varphi})| d\varphi \leq c \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\theta)}{(1 - r)^{1+\alpha}}.$$

Откуда и получается утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Пусть $f(z) \in A_{\alpha}^*$ ($-1 < \alpha \leq 0$), тогда согласно (4) имеем

$$f(z) = B_\alpha(z; z_k) f_1(z), \quad (9)$$

где $f_1(z)$ определяется по формуле (8).

Имея в виду неравенство (5) и замечание 1, получим

$$|f'(z)| \leq c |B_\alpha(z; z_k)| + |f_1'(z)|,$$

далее, используя леммы 2 и 3, находим

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{c}{(1-r)^{1+\alpha}}. \quad (10)$$

Из (.) имеем

$$na_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{-n-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(re^{i\varphi}) r^{-n-1} e^{-i\varphi(n-1)} d\varphi,$$

откуда, используя неравенство (10), находим

$$|a_n| \leq \frac{r^{1-n}}{n} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})| d\varphi \leq c \frac{r^{1-n}}{n(1-r)^{1+\alpha}}.$$

Вычисляя минимум функций $\frac{r^{1-n}}{n(1-r)^{1+\alpha}}$ при $0 < r < 1$, получаем

$$|a_n| \leq c \frac{\left(\frac{n-1}{n+\alpha}\right)^{1-n}}{n \left(1 - \frac{n-1}{n+\alpha}\right)^{1+\alpha}} \leq c \frac{(n+\alpha)^{1+\alpha}}{n} \leq cn^\alpha.$$

Теорема доказана.

4. Имея в виду замечание 2, из теоремы 1 получим

Теорема 2. Пусть $F(z) \in N_\alpha$ ($-1 < \alpha \leq 0$), тогда существуют ограниченные аналитические функции

$$f_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)} z^n \in N_\alpha, \quad l=1, 2,$$

$$\text{такие, что } F(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} z^n},$$

причем $|a_n^{(l)}| = O(n^\alpha)$, $n \rightarrow \infty$, $l=1, 2$.

Используя теорему Салема и Зигмунда, из теоремы 2 получаем

Следствие. Если $F(z) \in N_\alpha$ ($-1 < \alpha < -0,5$), тогда радиальный предел $F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta})$ существует всюду на $[0; 2\pi]$ кроме, быть

может, некоторого исключительного множества E , γ -емкость которого равна нулю, где γ — любое число из интервала $(2(1+\alpha), 1)$.

Отметим, что полученный таким путем результат, характеризующий множество исключительных точек $e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$, где может не

существовать радиальный предел (6), для функций класса N_α является менее точным, чем теорема А.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. С. Захаряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ի. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ դասի ֆունկցիաների
մի ներկայացման մասին

Միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերին նվիրված աշխատանքներից է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սահմանված $N_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$ դասը, որը հանդիսանում է Ռ. Նևանլինայի $N = N_0$ դասի քնական ընդհանրացումը:

Հայտնի է նաև, որ $N_\alpha \subset N_0$, երբ $-1 < \alpha < 0$ և $N_0 \subset N_\alpha$, երբ $0 < \alpha < \infty$:

Ներկա աշխատանքում գնահատելով $N_\alpha (-1 < \alpha \leq 0)$ դասին պատկանող սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների թելոբյան գործակիցները, ստացվում է ներկայացում այդ դասին պատկանող ցանկացած մերոմորֆ ֆունկցիայի համար՝ կախված α պարամետրից: Լկացուցվում է, որ այդ դասի ցանկացած ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել այդ դասին պատկանող երկու այնպիսի սահմանափակ, անալիտիկ ֆունկցիաների քանորդի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրի թելոբյան գործակիցների կարգը n^α է:

Ոչնչլով ստացված ներկայացումից ստացվում են որոշ առնչություններ այդ դասի և I . Կաուլեսոնի $T_\tau (0 < \tau < 1)$ դասի միջև:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐՈՒՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашиян, Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ² М. М. Джрбашиян, В. С. Захарян, ДАН СССР, т. 173, № 6, с. 1247—1250 (1967). ³ М. М. Джрбашиян, В. С. Захарян, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 34, с. 1262—1339 (1970). ⁴ В. С. Захарян, С. В. Мадоян, ДАН АрмССР, т. 79, № 1, с. 7—9 (1984). ⁵ С. С. Степанян, ДАН АрмССР, т. 75, № 3, 1982, с. 107—113 (1982). ⁶ В. С. Захарян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 3, № 1 (1968). ⁷ Н. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. ⁸ I. Carleson, On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Uppsala, 1960.

УДК 519.1+519.71

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

О числе $\{F\}$ -отделимых подмножеств в конечных множествах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 22/XI 1988)

Рассматриваются непустые конечные множества точек n -мерного евклидова пространства R^n и вопросы оценки числа подмножеств рассматриваемого множества $A \subseteq R^n$, отделяемых в A заданным классом функций $\{F(x_1, \dots, x_n)\} \equiv \{F(\bar{x})\} \equiv \{F\}$.

В ^(1,2) было установлено необходимое и достаточное условие линейной отделимости ($\{\bar{a}\bar{x} + b\}$ -отделимости) подмножества в конечном множестве. В ⁽³⁾ было дано обобщение этого условия до случая рассмотрения $\{F\}$ -отделимости подмножества в конечном множестве, где $\{F\}$ — произвольный класс функций. Вытекаемые из этих условий выводы были использованы для установления верхних оценок числа $\{F\}$ -отделимых подмножеств в конечных множествах — при различных конкретизациях описаний исходного конечного множества, отделяющего класса функций $\{F\}$, мощности и структуры подмножеств, подлежащих $\{F\}$ -отделению.

Результаты по такой общности рассмотрений ранее не были получены. Что касается вопроса верхней оценки полного числа линейно-отделимых подмножеств, то непосредственно получаемые из результатов работ ⁽¹⁻³⁾ оценки в общем случае хуже оценок, следующих из утверждения Р. Уайндера и др. (см. ^(4,5)).

Настоящая работа представляет результаты по верхним оценкам числа $\left| \sum_{i=1}^q a_i f_i(\bar{x}) + b \right|$ -отделимых подмножеств в произвольном конечном множестве, обобщения некоторых результатов работ ⁽¹⁻³⁾ и другие результаты такой же природы. Необходимая информация о неопределяемых здесь понятиях содержится в ⁽³⁾. Отметим, что все определения ⁽³⁾ и настоящей работы, касающиеся множеств функций, носят специфический характер. Их следует понимать как „по разделению“ или „относительно разделения“.

1. Рассмотрим полный класс $\{G(\bar{x}), I, J\}$.

Пусть I_0 обозначает множества всех представителей членов семейства I и пусть множество $A \subseteq E^n$ — произвольное.

Теорема 1. *Имеют место оценки*

$$1) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, E^n, p)| \leq \prod_{(I_1, \dots, I_k) \in I_0} [\min\{p, 2^{n-k}\} + 1];$$

$$2) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, A)| \leq 2 \cdot \left\{ \frac{\left(\left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor + 1 \right)^{|I_0|+1} - 1}{|I_0| + 1} + \left(\left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor + 1 \right)^{|J_0|} \right\}.$$

Через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{z}))$ обозначим множество всех $\{F\}$ -отделимых шарообразных подмножеств в E^n с центрами в точке $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in E^n$, а через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{z}, r_0))$ — множество всех таких подмножеств, имеющих радиус r_0 . Множества всех подмножеств последнего типа, имеющие мощность $p = \sum_{t=0}^{r_0} \binom{n}{t} + q$, $0 \leq q < \binom{n}{r_0+1}$, обозначим через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{z}), p)$.

Теорема 2. *Справедливы неравенства*

$$1) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, S^*(\bar{z}, r_0))| \leq \left[\sum_{l=0}^{r_0} \binom{n}{l} - 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i_1, \dots, i_k) \in I_0} \left[\sum_{l=0}^{r_0 + \sum_{t=1}^k \alpha_{i_t} - k} \binom{n-k}{l} + 1 \right] + 2;$$

$$2) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{z}, r_0))| \leq \left[\binom{n}{r_0+1} - 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i_1, \dots, i_k) \in I_0} \left[\binom{n-k}{r_0 + \sum_{t=1}^k \alpha_{i_t} - k + 1} + 1 \right] + 1;$$

$$3) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{a}))| \leq \sum_{u=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \left[\binom{n}{u+1} - 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\prod_{(i_1, \dots, i_k) \in I_0} \left[\binom{n-k}{u + \sum_{t=1}^k \alpha_{i_t} - k + 1} + 1 \right] + \prod_{(i_1, \dots, i_k) \in J_0} \left[\binom{n-k}{u - \sum_{t=1}^k \alpha_{i_t} + 1} + 1 \right] \right] + n;$$

$$4) |M(\{G(\bar{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\bar{z}), p)| \leq$$

$$\leq \prod_{(i_1, \dots, i_k) \in I_0} \left[\min \left\{ \binom{n-k}{r_0 + \sum_{t=1}^k \alpha_{i_t} - k + 1}, q \right\} + 1 \right].$$

2. Рассмотрим полный класс $\{F(\bar{x}) \equiv \left\{ \sum_{i=1}^q a_i \cdot f_i(\bar{x}) + b \right\}$ — линейное замыкание заданного множества функций $\{f_1(\bar{x}), \dots, f_q(\bar{x}), 1\}$.

Определение. Пусть классы $\{H(\bar{x})\}$ и $\{S(\bar{x})\}$ полны относительно множества $A \subseteq R^n$. Скажем, что $\{H(\bar{x})\}$ и $\{S(\bar{x})\}$ эквивалентны относительно A , если $M(\{H(\bar{x})\}, A) = M(\{S(\bar{x})\}, A)$. Скажем, что полные классы $\{H(\bar{x})\}$ и $\{S(\bar{x})\}$ эквивалентны, если они эквивалентны относительно любого множества $B \subseteq R^n$.

Пусть подкласс $\{F_{\Pi}(\bar{x})\} \subseteq \{F(\bar{x})\}$ состоит из всех функций

$F_n(\bar{x}) = \sum_{i=1}^q a_i \cdot f_i(\bar{x}) + b$ с целыми значениями коэффициентов $a_1, \dots, a_q$ и свободного члена b .

Теорема 3. Классы $\{F(\bar{x})\}$ и $\{F_n(\bar{x})\}$ эквивалентны.

Пусть функции $f_i(\bar{x})$, $i = \overline{1, q}$, определены в множестве $A \subset R^n$.

Теорема 4. Если в A не существуют точки $\bar{x}, \bar{y} \in A$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, такие, что $f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{y})$ при $i = \overline{1, q}$, то для любого подмножества $A_0 \in M(\{F\}, A)$ существует отделяющая его функция $F_0(\bar{x}) \in \{F(\bar{x})\}$, принимающая различные значения в точках множества A .

Отметим, что утверждение останется верным, если в его формулировке класс $\{F(\bar{x})\}$ заменить классом $\{F_n(\bar{x})\}$.

Через $s_i(A)$, $i \in \overline{1, q}$, обозначим количество различных значений, принимаемых функцией $f_i(\bar{x})$ в множестве A .

Теорема 5. Имеет место оценка

$$|M(\{F(\bar{x})\}, A, p)| \leq \prod_{i=1}^q \binom{p + s_i(A) - 1}{s_i(A) - 1}.$$

Пусть $m_i(A, p) = \max_{\substack{A_0 \subset A \\ |A_0| = p}} \left\{ \sum_{\bar{x} \in A_0} f_i(\bar{x}) \right\} - \min_{\substack{A_0 \subset A \\ |A_0| = p}} \left\{ \sum_{\bar{x} \in A_0} f_i(\bar{x}) \right\} + 1$.

Теорема 6. Если функции $f_i(\bar{x})$, $i = \overline{1, q}$, целочисленны в множестве A , то имеет место неравенство

$$|M(\{F(\bar{x})\}, A, p)| \leq \prod_{i=1}^q m_i(A, p).$$

3. Пусть множество $A \subset R^n$ и класс функций $\{F(\bar{x})\}$ произвольны. Пусть также $M_{\text{стр}}^+(\{F\}, A) = \{A_0 \in 2^A / \exists F_0(\bar{x}) \in \{F(\bar{x})\} : F_0(\bar{x}) > 0 \text{ при } \bar{x} \in A_0 \text{ и } F_0(\bar{x}) < 0 \text{ при } \bar{x} \in A \setminus A_0\}$. Множество $M_{\text{стр}}^-(\{F\}, A)$ определяется аналогично.

Теорема 7. 1) $|M_{\text{стр}}^+(\{F\}, A)| = |M_{\text{стр}}^-(\{F\}, A)|$; 2) Множество $M_{\text{стр}}^+(\{F\}, A) \cap M_{\text{стр}}^-(\{F\}, A)$ состоит из некоторого количества пар взаимно-дополняющих (до A) подмножеств; 3) Если класс $\{F\}$ полон относительно A , то $M_{\text{стр}}^+(\{F\}, A) \equiv M_{\text{стр}}^-(\{F\}, A) \equiv M(\{F\}, A)$.

Теорема 8. $A_0 \in M^s(\{F\}, A)$, $s \in \{+, -\}$, тогда и только тогда, когда в классе $\{F(\bar{x})\}$ разрешима система

$$\begin{cases} \sum_{\bar{x} \in A_0} F(\bar{x}) - \sum_{\bar{x} \in A \setminus A_0} F(\bar{x}) = s \sum_{\bar{x} \in A} |F(\bar{x})| \\ F(\bar{x}) \neq 0, \text{ при } \bar{x} \in A. \end{cases}$$

Из теорем 7 и 8 следуют выводы, которые можно использовать в вопросах оценки числа строго $\{F\}$ -отделимых подмножеств конечных множеств (аналогично рассмотрению полных классов функций).

4. Пусть $u(\bar{x}) = (u_1(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x}))$ — преобразование координат. Скажем, что класс $\{F(\bar{x})\}$ замкнут относительно подстановки $u(\bar{x})$, если для любой функции $F \in \{F\}$ имеет место $F(u_1(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x})) \in \{F\}$.

Если преобразованием $\bar{u}(\bar{x})$ множество $A \subseteq R^n$ отображается на множество $B \subseteq R^n$, то занедем $A \xrightarrow{\bar{u}(\bar{x})} B$.

Теорема 9. Пусть: 1) для множеств $A, B \subseteq R^n$ имеем $A \xrightarrow{\bar{u}(\bar{x})} B \xrightarrow{\bar{v}(\bar{x})} A$; 2) класс $\{F\}$ замкнут относительно подстановки каждого из преобразований $\bar{u}(\bar{x})$ и $\bar{v}(\bar{x})$. Тогда для любого $p \in \{0, |A|\}$ имеет место равенство $|M_{\text{ca}}(\{F\}, A, p)| = |M_{\text{ca}}(\{F\}, B, p)|$.

Приведем одно следствие из этого простого утверждения.

Следствие. Пусть класс $\{G(x), I, J\}$ замкнут относительно подстановки линейных преобразований вида $u(x) = (a_1x_1 + b_1, \dots, a_nx_n + b_n)$ и пусть для множеств $A = S_1^{(1)} \times \dots \times S_n^{(1)}$, $B = S_1^{(2)} \times \dots \times S_n^{(2)}$ выполняются условия: 1) $|S_i^{(1)}| = |S_i^{(2)}|$ при $i = \overline{1, n}$; 2) для любого $i \in \{1, n\}$ каждое из множеств $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$ состоит из последовательных членов некоторой арифметической прогрессии. Тогда для любого $p \in \{0, |A|\}$ имеет место равенство $|M(\{G(x), I, J\}, A, p)| = |M(\{G(x), I, J\}, B, p)|$.

Замечание. В силу равенств $|M_{\text{ca}}(\{F\}, A, p)| = |M(\{F\}, A, |A| - p)|$ и $|M_{\text{ca}}^+(\{F\}, A, p)| = |M_{\text{ca}}^-(\{F\}, A, |A| - p)|$ оценки числа $\{F\}$ -отделимых в A подмножеств мощности p достаточно рассматривать в пределах $0 \leq p \leq |A|/2$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Р. Б. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Վերջավոր բազմությունների $\{F\}$ -անջատելի ենթաբազմությունների
քանակի մասին

Աշխատանքում հաստատվում են վերջավոր բազմությունների $\{F\}$ -անջատելի ենթաբազմությունների քանակների տարբեր վերին գնահատականներ՝ կախված ելակետային բազմության, ենթաբազմություններն անջատող ֆունկցիաների $\{F\}$ դասի, ինչպես նաև $\{F\}$ -անջատման ենթակա ենթաբազմությունների հզորության և կառուցվածքի նկարագրություններից:

Այստեղ ներկայացվում են կամայական վերջավոր բազմության

$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i(\bar{x}) + b \right\}$ -անջատելի ենթաբազմությունների քանակների վերին գնահատականներ, $(1-3)$ աշխատանքների որոշ արդյունքների ընդհանրացումներ և այդ բնույթի այլ արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. Е. Торосян, VI Всесоюз. конф. по проблемам теоретич. кибернетики. Тезисы докл., г. Саратов, 1983. ² Б. Е. Торосян, ДАН АрмССР, т. 84, № 2 (1987). ³ Б. Е. Торосян, ДАН АрмССР, т. 87, № 4 (1988). ⁴ R. O. Winder, Trans. IEEE, EC-12, № 5 (1963). ⁵ М. Блох, Я. Моравек, Кибер. сб., и. с., № 6, 1969.

Г. А. Сукиасян

Дефекты функций с простыми нулями и полюсами, чередующимися на системе лучей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Аракелян 1/XII 1988)

Пусть $l_j = \{z : \arg z = \alpha_j; -\pi < \alpha_j \leq \pi\}$, $j = 1, \dots, n$ — система попарно различных лучей.

В данной работе исследуются дефекты функций класса $M(l_1, \dots, l_n)$ — класс мероморфных в $\mathbb{C}$ функций конечного порядка, нули и полюсы которых лежат на $\bigcup_{j=1}^n l_j \cup \{z=0\}$, причем на каждом l_j , $j=1, \dots, n$ они являются простыми и чередуются. При $n=1$ класс $M(l_1, \dots, l_n)$ обозначим через $M(l)$, где $l = \{z : \arg z = \alpha; -\pi < \alpha \leq \pi\}$.

Обозначим нули и полюсы функции $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$, лежащие на l_j , $j=1, \dots, n$, соответственно через $\{a_k^j\}_{k=1}^\infty$, $j=1, \dots, n$ и $\{b_k^j\}_{k=1}^\infty$, $j=1, \dots, n$. Так как в силу теоремы Лейбница

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{b_k^j} - \frac{1}{a_k^j} \right| < \infty, \quad j=1, \dots, n,$$

то сходятся абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве комплексной плоскости произведения

$$\Pi_j(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_k^j}}{1 - \frac{z}{b_k^j}}, \quad j=1, \dots, n.$$

Таким образом, если $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$, то из (4) и известных теорем о представлении следует, что

$$w(z) = z^p e^{P_m(z)} \Pi_1(z) \times \dots \times \Pi_n(z), \quad (1)$$

где p — порядок нуля или полюса в $z=0$, $P_m(z)$ — некоторый многочлен, степень которого m не превышает порядка $w(z)$.

Теорема 1. Пусть $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$ и предположим, что в (1) $m \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I) для любого $a \neq 0, \infty$ $\delta(a, w) = 0^*$;
- II) если $\rho(\Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = \rho > m$, то $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$, где $\rho(j)$ — порядок функции f ;
- III) если $\rho < m$, то $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 1$.

* Мы предполагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений

Теорема 2. Пусть $w(z) \in M(l)$, $w(0) \neq 0, \infty$ и в (1) $m = 0$. Тогда для любого $a \in \bar{C}$ $\delta(a; w) = 0$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. Функции $\Pi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$ удовлетворяют следующим условиям ($z = re^{i\varphi}$):

$$I) \quad \frac{1}{5} \left| \Pi_j(ie^{ia_j}) \right| \frac{|\sin(\varphi - a_j)|}{r} \leq \left| \Pi_j(re^{i\varphi}) \right| \leq 5 \left| \Pi_j(ie^{ia_j}) \right| \frac{r}{|\sin(\varphi - a_j)|};$$

$$r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$II) \quad \frac{1}{5} \left| \Pi_j(-e^{ia_j}) \right| \frac{-\cos(\varphi - a_j)}{r} \leq \left| \Pi_j(re^{i\varphi}) \right| \leq 5 \left| \Pi_j(-e^{ia_j}) \right| \frac{r}{-\cos(\varphi - a_j)};$$

$$r > 1, \quad \frac{\pi}{2} + a_j \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + a_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

$$III) \quad m(r; \Pi_j) + m\left(r; \frac{1}{\Pi_j}\right) = O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Pi_1(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{z}{a_k^1}}{1 - \frac{z}{b_k^1}}$

(для $j = 2, \dots, n$ доказательство аналогичное) и предположим, что $|b^1| < |a^1|$. Обозначим через

$$\Pi^1(w) = \Pi_1(we^{ia_1}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{w}{|a_k^1|}}{1 - \frac{w}{|b_k^1|}}$$

Из теоремы 1 ((¹), с. 398) следует, что $\operatorname{Im} \Pi^1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$. Тогда, применяя неравенства Каратеодори для полуплоскости ((²), с. 29, теорема 8), получим, что

$$\frac{1}{5} \left| \Pi^1(i) \right| \frac{|\sin(\arg w)|}{|w|} \leq \left| \Pi^1(w) \right| \leq 5 \left| \Pi^1(i) \right| \frac{|w|}{|\sin(\arg w)|},$$

$$|w| > 1, \quad 0 \leq \arg w \leq 2\pi.$$

Из этих неравенств вытекает (2) для $j = 1$, откуда непосредственно следует (4) для $j = 1$.

Поскольку при $\operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Re} \Pi^1(w) > 0$ (это проверяется точно так же, как и неравенство $\operatorname{Im} \Pi^1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$), то, повторяя вышесказанное для функции $e^{\frac{\pi}{2}} \Pi^1(\xi e^{i\frac{\pi}{2}})$, получим (3) для $j = 1$ (здесь учитываем, что $\operatorname{Im}\{e^{\frac{\pi}{2}} \Pi^1(\xi e^{i\frac{\pi}{2}})\} \cdot \operatorname{Im} \xi > 0$ при $\operatorname{Im} \xi > 0$). В случае $|a^1| < |b^1|$ вместо функции $\Pi_j(z)$ нужно рассматривать функцию $1/\Pi_j(z)$ и для нее повторить доказательство.

Лемма 2. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — произвольные комплексные числа и пусть $k(r)$ — монотонно возрастающая функция, стремящаяся к ∞ при $r \rightarrow \infty$, такая, что для достаточно больших значений r

$$\frac{\ln k(r)}{|a_m z^m|} \leq c < 1, \quad |z| = r, \quad c = \text{const}.$$

Тогда на окружности $\Gamma(r) = \{z : |z| = r\}$ при $r \geq r_0$ можно указать множества $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_2(r)$, для которых справедливы:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & |e^{a_m z^m + \dots + a_1 z}| \geq k(r), \quad z \in \Gamma_1(r); \\ \text{II)} \quad & |e^{a_m z^m + \dots + a_1 z}| \leq \frac{1}{k(r)}, \quad z \in \Gamma_2(r); \\ \text{III)} \quad & \text{mes}[\Gamma(r) \setminus \{\Gamma_1(r) \cup \Gamma_2(r)\}] \leq M \frac{\ln k(r)}{r^m}, \quad M = \text{const} < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство этой леммы буквально то же самое, что и доказательство леммы 3 работы (6).

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $\psi(r)$ и $k(r)$ монотонно возрастающие функции, стремящиеся к ∞ при $r \rightarrow \infty$, причем $\ln k(r) = o(r^m)$, $r \rightarrow \infty$. Учитывая лемму 2, обозначим через ($z = re^{i\varphi}$)

$$\Gamma_1(r) = \{z : |e^{P_m(z)}| \geq k(r)\}, \quad r \geq r_0,$$

$$\Gamma_2(r) = \left\{ z : |e^{P_m(z)}| \leq \frac{1}{k(r)} \right\}, \quad r \geq r_0,$$

$$E(r) = \Gamma(r) \setminus \{\Gamma_1(r) \cup \Gamma_2(r)\},$$

$$F_j(r) = \left\{ z : |z| = r, \quad |\arg z - \alpha_j| \leq \frac{1}{\psi(r)} \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Заметим, что

$$\text{mes} \left[F(r) = \bigcup_{j=1}^n F_j(r) \right] \leq \sum_{j=1}^n \text{mes}[F_j(r)] = \frac{2n}{\psi(r)}. \quad (6)$$

Величину $m(r; a; w)$ для $a \neq 0, \infty$ разобьем на части и каждую в отдельности оценим сверху

$$\begin{aligned} m(r; a; w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E(r) \cup F(r)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1(r) \setminus F(r)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2(r) \setminus F(r)} \ln^+ \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (7)$$

При $re^{i\varphi} \in \Gamma_1(r) \setminus F(r)$, применяя неравенства (2) и (3), получим, что

$$|w(re^{i\varphi})| = |(re^{i\varphi})^p e^{P_m(re^{i\varphi})} \Pi_1(re^{i\varphi}) \times \dots \times \Pi_n(re^{i\varphi})| \geq K_1 \frac{r^{p-n} k(r)}{\psi^n(r)},$$

$$r \geq r_1, \quad K_1 = \text{const} < +\infty,$$

а когда $re^{i\varphi} \in \Gamma_2(r) \setminus F(r)$

$$|w(re^{i\varphi})| \leq K_2 \frac{r^{p+n} \psi^n(r)}{k(r)}, \quad r \geq r_1, \quad K_2 = \text{const} < +\infty.$$

Предположим, что $k(r)$ и $\psi(r)$ выбраны таким образом, чтобы

$$\frac{r^{p-n} k(r)}{\psi^n(r)} \rightarrow \infty, \quad \frac{r^{p+n} \psi^n(r)}{k(r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

(например, при $p > 0$ $\psi(r) = r$, $k(r) = |r^{p+n}\psi^n(r)|^2 = r^{2(p+n)}$). Отсюда будет следовать, что

$$I_2 + I_3 = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Воспользовавшись теоремой 7.3 ((³), с. 58), оценками (5) и (6) получим, что

$$I_1 \leq o(1)T(K_3 r; w), \quad K_3 = \text{const} > 1, \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Согласно лемме 1.3.1 работы (⁴), существует последовательность $r_n = r_n(K_3) \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, для которой при $r_n \geq r_0$

$$T(K_3 r_n; w) \leq K_3^{\lambda+1} T(r_n; w), \quad (10)$$

где λ — нижний порядок функции $w(z)$.

Из (7), (8), (9) и (10) следует утверждение I.

II. Так как $\rho > m$, то $\rho(w) = \rho$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ на некоторой последовательности значений $r_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ справедливы

$$T(r_n; w) \geq r_n^{\rho-\varepsilon}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, используя (4), будем иметь

$$\frac{m(r_n; w) + m\left(r_n; \frac{1}{w}\right)}{T(r_n; w)} \leq O(r_n^{m-\rho+\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty,$$

и поскольку ε может быть сколь угодно маленьким (в частности $0 < m < \rho - \varepsilon$), то получим, что $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$.

III. Если $\rho < m$, то, $T(r; \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = o(r^m)$, $r \rightarrow \infty$. Поэтому

$$T(r; w) = T(r; e^{\rho m}) + o(r^m), \quad r \rightarrow \infty$$

Следовательно, для достаточно малого ε ($0 < \rho + \varepsilon < m$)

$$\frac{N(r; \infty) + N(r; 0)}{T(r; w)} \leq O(r^{\rho+\varepsilon-m}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает утверждение III.

Доказательство теоремы 2. Согласно условиям теоремы 2 функция $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \frac{z}{b_k}},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно нули и полюсы $w(z)$.

Докажем теорему в случае, когда $|b_1| < |a_1|$, ибо в противном случае она будет верна для функции $1/\Pi(z)$, а из этого будет следовать, что она верна и для функции $\Pi(z)$.

Обозначим через

$$\Pi_1(w) = \Pi(we^{i\alpha}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{|a_k|}}{1 - \frac{w}{|b_k|}}.$$

Так как ((¹), с. 398, теорема 1) $\operatorname{Im} \Pi_1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$, то согласно теореме Чеботарева (см., например, ((¹), с. 400, теорема 2) функцию $\Pi_1(w)$ можно представить в виде

$$\Pi_1(w) = Cw + b + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ \frac{1}{|b_k| - w} - \frac{1}{|b_k|} \right\},$$

где $C \geq 0$, b — вещественное, $A_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k|^2 < +\infty$.

Таким образом

$$\Pi(z) = Ce^{-ia}z + b + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{b_k - z}, \quad (11)$$

и, повторяя рассуждения теоремы Чеботарева, легко можно показать, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k / |b_k| < +\infty.$$

Рассмотрим случай, когда a не есть вещественное число. Из (11) будем иметь

$$\frac{\Pi(z) - a}{z} = Ce^{-ia} + \frac{b - a}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{b_k - z}.$$

Обозначим через

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{z - b_k} - \frac{b - a}{z}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k| < +\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k| \neq b - a$, то по теореме Келдыша ((²)), с. 377)

$$\delta(Ce^{-ia}; \varphi) = 0. \quad (12)$$

Поскольку

$$n(r; a; \Pi) = n(r; Ce^{-ia}; \varphi),$$

$$N(r; a; \Pi) = N(r; Ce^{-ia}; \varphi) + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$T(r; \Pi) = T(r; \varphi) + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty,$$

то из (12) следует, что $\delta(a; \Pi) = 0$

Пусть a — вещественно. Если $a = 0, \infty$, то, применяя (4), будем иметь

$$\delta(a; \Pi) = 0.$$

Возьмем $a \neq 0, \infty$. Образ каждого отрезка

$$\Gamma_k = \{z : \arg z = \alpha; |b_k| \leq |z| < |b_{k+1}|\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

при отображении функцией $\Pi(z)$, покрывает всю вещественную ось, т. е. Γ_k , $k = 1, 2, \dots$ содержит хотя бы одну a -точку (можно доказать, что ровно одну a -точку). Обозначим через $n(r)$ количество Γ_k , целиком лежащих в круге $\{z : |z| \leq r\}$. Тогда

$$n(r; \infty; \Pi) - 1 = n(r) \leq n(r; a; \Pi).$$

Из последнего неравенства и из того, что $\delta(\infty; \Pi) = 0$, получим, что $\delta(a; \Pi) = 0$.

В заключение автор приносит благодарность Г. А. Барсегяну за постановку задач и руководство.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

Ֆունկցիաների դեֆեկտների մասին, որոնց գրոները և բեկոները պարզ են, իրար հաջորդում են և բնկած են հառագայթների համակարգի վրա

Դիցուք $I_j = \{z : \arg z = \alpha_j; -\pi < \alpha_j \leq \pi\}$, $j = 1, \dots, n$ գույք առ դույզ իրարից տարբեր ճառագայթների համակարգ է:

Դիտարկենք C -ում վերջավոր կարգ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների $M(I_1, \dots, I_n)$ դասը՝ որի գրոները և բեկոները ընկած են $\bigcup_{j=1}^n I_j \cup \{z=0\}$ ընդ որում ամեն մի I_j , $j = 1, \dots, n$ վրա նրանք պարզ են և իրար հաջորդում են: $N(I_1, \dots, I_n)$ դասը նշանակենք $M(I)$ -ով $n=1$ դեպքում, որտեղ $I = \{z : \arg z = \alpha; -\pi < \alpha \leq \pi\}$: Տվյալ աշխատանքում ուսումնասիրվում են $M(I_1, \dots, I_n)$ դասի ֆունկցիաների դեֆեկտները:

Թեորեմ 1. Դիցուք $w(z) \in M(I_1, \dots, I_n)$ և ենթադրենք, որ (1)-ում $m \neq 0$. Այդ դեպքում հիշտ են հետևյալ պնդումները.

I) Ցանկացած $a \neq 0, \infty$ $\delta(a; w) = 0$:

II) Եթե $\rho(\Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = r > m$, ապա $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$, որտեղ $\rho(f)$ -ը f ֆուկցիայի կարգն է:

III) Եթե $\rho > m$, ապա $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 1$:

Թեորեմ 2. Դիցուք $w(z) \in M(I_1, \dots, I_n)$, $w(0) \neq 0, \infty$ և (1)-ում $m = 0$: Այդ դեպքում ցանկացած $a \in C$ $\delta(a; w) = 0$:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956. ² М. В. Келдыш, ДАН СССР, т. 94, № 1, с. 377—380 (1954). ³ А. А. Гольдберг, И. В. Остро́вский, Распределение значений мероморфных функций. Наука, М., 1970. ⁴ В. И. Петренко, Рост мероморфных функций. Вища шк. 12, Харьков, 1978. ⁵ Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 24, № 3 (1989).

УДК 512.55+512.58

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Эмин

Предрадикалы в категории модулей над всеми кольцами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 24/XII 1987)

Рассматривается категория Mod . Объекты этой категории — всевозможные пары (A, U) , где U — ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, A — правый U -модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U) , где φ_A — гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B , а φ_U — гомоморфизм кольца U в кольцо V , причем $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$ для любых $a \in A$, $u \in U$. Такая пара называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V) . Умножение морфизмов происходит покомпонентно (с. (1)).

Определение. Скажем, что в категории Mod определен *предрадикал* r , если каждому модулю $(A, U) \in Mod$ поставлен в соответствие его идеал $r(A, U)$ так, что для любого гомоморфизма $(\varphi_A, \varphi_U) : (A, U) \rightarrow (B, V)$ категории Mod имеет место соотношение $r(A, U)(\varphi_A, \varphi_U) \subseteq r(B, V)$.

Другими словами предрадикал r — это нормальный подфунктор тождественного функтора $Id_{Mod} : Mod \rightarrow Mod$.

Пусть в категории Mod определен некоторый предрадикал r . Рассмотрим полную подкатегорию $Mod(As)$ категории Mod , объектами которой являются все модули вида (O, U) . Поскольку любые идеалы и любые гомоморфные образы объектов из $Mod(As)$ сами лежат в подкатегории $Mod(As)$, то нетрудно убедиться, что предрадикал r индуцирует вполне определенный предрадикал $\bar{r}$ в подкатегории $Mod(As)$, а это означает, что предрадикал r определяет вполне определенный предрадикал R в категории ассоциативных колец As , причем $r(O, U) = (O, R(U))$. Все сказанное выше остается верным и для полной подкатегории $Mod(Ab)$ категории Mod , объектами которой являются все модули вида (A, O) . Поэтому предрадикал r определяет вполне определенный предрадикал R_0 категории абелевых групп Ab , причем $r(A, O) = (R_0(A), O)$.

Лемма 1. Пусть r — произвольный предрадикал в Mod , (A, U) — некоторый модуль и $r(A, U) = (A', U')$. Тогда $U' = R(U)$, где R — предрадикал категории As , индуцированный предрадикалом r категории Mod .

Доказательство. Поскольку r — предрадикал и (O, U) — подмодуль модуля (A, U) , то $(O, R(U)) = r(O, U) \subseteq r(A, U) = (A', U')$. Значит, $R(U) \subseteq U'$. Для гомоморфизма же $(o, i_U) : (A, U) \rightarrow (O, U)$ имеем,

что $(A', U')(o, 1_U) = r(A, U)(o, 1_U) \subseteq r(O, U) = (O, R(U))$, т. е. $U' \subseteq R(U)$. Лемма доказана.

Пусть r — произвольный предрадикал категории Mod , (A, U) — некоторый модуль и $r(A, U) = (A', U')$. Поскольку (A', U') — идеал модуля (A, U) (напомним, что подмодуль (A', U') модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом, когда U' — идеал кольца U и выполнены включения $A' \cdot U \subseteq A'$, $A \cdot U' \subseteq A'$), то $A' — U$ -подмодуль U -модуля A . Покажем, что сопоставление каждому U -модулю A его U -подмодуля A' определяет предрадикал R_U в категории правых U -модулей $Mod-U$.

Пусть A и B — некоторые U -модули, $\varphi: A \rightarrow B$ — U -гомоморфизм и $r(A, U) = (A', U')$, $r(B, U) = (B', U')$, где $U' = R(U)$, в силу леммы 1. Покажем, что $A'\varphi \subseteq B'$. Действительно, поскольку $(\varphi, 1_U): (A, U) \rightarrow (B, U)$ -гомоморфизм в Mod , то $(A', U')(\varphi, 1_U) = r(A, U)(\varphi, 1_U) \subseteq r(B, U) = (B', U')$. Значит, $A'\varphi \subseteq B'$. Таким образом, для любого U -модуля A , если $r(A, U) = (A', U')$, сопоставление U -модулю A его U -подмодуля $R_U(A) = A'$ определяет предрадикал R_U в категории $Mod-U$.

Итак, нами доказана следующая

Лемма 2. *Каждый предрадикал r категории Mod индуцирует вполне определенный предрадикал R в категории As и предрадикалы R_U в категориях $Mod-U$ ($U \in As$), причем $r(A, U) = (R_U(A), R(U))$ для каждого модуля (A, U) категории Mod .*

Пусть R — некоторый предрадикал категории As , а R_U ($U \in As$) — некоторые предрадикалы категорий $Mod-U$. Рассмотрим систему предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$.

Определение. Систему предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ назовем согласованной, если она удовлетворяет следующим условиям:

(P1) $A \cdot R(U) \subseteq R_U(A)$ для любого U -модуля A ;

(P2) $R_U(B_\varphi) \subseteq R_U(B)$ для любого V -модуля B и U -модуля B_φ , полученного из модуля B отступлением вдоль гомоморфизма колец $\varphi: U \rightarrow V$ (см. (1), с. 212).

Теорема 1. *Пусть в категории Mod определен предрадикал r . Тогда он индуцирует в категории As предрадикал R , а на каждой категории $Mod-U$ ($U \in As$) — такие предрадикалы R_U , что система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ является согласованной. Обратно, каждая согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ определяет вполне определенный предрадикал r в категории Mod , а именно, $r(A, U) = (R_U(A), R(U))$ для каждого модуля $(A, U) \in Mod$. Указанное соответствие между всеми предрадикалами категории Mod и всеми согласованными системами предрадикалов взаимнооднозначно.*

Доказательство. Пусть в категории Mod определен предрадикал r . Этот предрадикал, в силу леммы 2, определяет вполне определенную систему предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$. Поскольку $r(A, U) = (R_U(A), R(U))$ — идеал модуля (A, U) , то $A \cdot R(U) \subseteq R_U(A)$. Условие (P1) выполнено.

Пусть $B — V$ -модуль, $\varphi: U \rightarrow V$ — гомоморфизм колец и $B_\varphi — U$ -модуль, полученный из V -модуля B отступлением вдоль φ . Пос-

кольку пара $(1, \varphi): (B_*, U) \rightarrow (B, V)$ — гомоморфизм в Mod , то имеет место включение $(R_U(B_*), R(U))(1, \varphi) = r(B_*, U)(1, \varphi) \subseteq r(B, V) = (R_V(B), R(V))$.

Обратно, пусть задана некоторая согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$. Поскольку $R(U)$ — идеал кольца U , $R_U(A)$ — подмодуль U -модуля A и $A \cdot R(U) \subseteq R_U(A)$ в силу условия (P1), то подмодуль $(R_U(A), R(U))$ является идеалом модуля (A, U) .

Пусть $(\varphi, \psi): (A, U) \rightarrow (B, V)$ — некоторый гомоморфизм. Очевидно, что $R(U)\psi \subseteq R(V)$. С другой стороны, нетрудно заметить, что гомоморфизм $(\varphi, \psi): (A, U) \rightarrow (B, V)$ разлагается в произведение гомоморфизмов $(\varphi, 1): (A, U) \rightarrow (B_*, U)$ и $(1, \psi): (B_*, U) \rightarrow (B, V)$. Поскольку R_U — предрадикал в $Mod-U$ и $(\varphi, 1)$ — U -гомоморфизм, то $R_U(A)\varphi \subseteq R_U(B_*)$. Из условия же (P2) следует, что $R_U(B_*) \subseteq R_V(B)$. Получили, что $R_U(A)\varphi \subseteq R_V(B)$.

Третье утверждение теоремы легко следует из первых двух.

Определение. Предрадикал r категории Mod называется *идемпотентным*, если $r(r(A, U)) = r(A, U)$ для любого модуля (A, U) .

Теорема 2. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ тогда и только тогда определяет идемпотентный предрадикал в категории Mod , когда все предрадикалы этой системы являются идемпотентными, и она удовлетворяет условию*

(P3) $R_U(A) = R_{R(U)}(A)$ для любого U -модуля A .

Доказательство. Пусть r — некоторый идемпотентный предрадикал в Mod и $\{R; R_U | U \in As\}$ — соответствующая согласованная система предрадикалов. Поскольку $r(O, U) = (O, R(U))$ для любого модуля $(O, U) \in Mod(As)$, то из идемпотентности предрадикала r следует идемпотентность предрадикала R . Поэтому идемпотентность предрадикала r означает, что для любого модуля (A, U) категории Mod $(R_U(A), U') = (R_{U'}(R_U(A)), U')$, где $U' = R(U)$, т. е. $R_U(A) = R_{U'}(R_U(A))$. С другой стороны, из условия (P2) следует, что $R_{U'}(R_U(A)) \subseteq R_U(R_U(A))$. Значит, $R_U(A) = R_U(R_U(A)) \subseteq R_U(R_U(A)) \subseteq R_U(A)$, т. е. $R_U(R_U(A)) = R_U(A)$ для любого U -модуля A .

Из идемпотентности r , как мы уже видели, следует, что $R_{U'}(A) = R_{U'}(R_U(A))$ для любого U -модуля A , где $U' = R(U)$. С другой стороны, поскольку $R_U(A)$ — U' -подмодуль U' -модуля A , то $R_{U'}(R_U(A)) \subseteq R_{U'}(A)$. Значит, $R_U(A) \subseteq R_{U'}(A)$. Из условия же (P2) следует, что $R_{U'}(A) \subseteq R_U(A)$.

Обратно, из условия (P3), примененного к $R_U(A)$, и из идемпотентности предрадикала R_U следует, что $R_{U'}(R_U(A)) = R_U(R_U(A)) = R_U(A)$. Идемпотентность же R означает, что $R(U') = U'$. Теорема доказана.

Определение. Предрадикал r категории Mod называется *радикалом*, если $r((A, U), r(A, U)) = (O, O)$ для любого модуля (A, U) категории Mod .

Теорема 3. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ тогда и только тогда определяет радикал в Mod , когда все предрадикалы этой системы являются радикалами, и она удовлетворяет условию*

$(P3)^* R_{\bar{U}}(A) = R_U(A_-)$ для любого $\bar{U}$ -модуля A , где $\bar{U} = U/R(U)$, π — естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $U/R(U)$, A_- — U -модуль, полученный из $\bar{U}$ -модуля A отступлением вдоль π .

Доказательство. Пусть r — некоторый радикал в Mod и $R; R_U|U \in As$ — соответствующая согласованная система предрадикалов. Очевидно, что из того, что r — радикал в Mod , следует, что R — радикал в As и, кроме того, $(R_{\bar{U}}(A/R_U(A)), R(\bar{U})) = r((A, U)/r(A, U)) = (0, 0)$, т. е. $R_{\bar{U}}(A/R_U(A)) = 0$ для любого модуля $(A, U) \in Mod$, где $\bar{U} = U/R(U)$. Отсюда и из условия $(P2)$ следует, что $R_U(A/R_U(A)) = 0$ для любого U -модуля A .

Пусть π — естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $\bar{U} = U/R(U)$ и A — произвольный $\bar{U}$ -модуль. Рассмотрим U -модуль A_+ , в котором по определению: $a \cdot u = a \cdot (u + R(U))$, $a \in A$, $u \in U$. Очевидно, что каждый подмодуль U -модуля A_+ является подмодулем $\bar{U}$ -модуля A . Поскольку $A = R(U) = 0$, то мы можем сделать также и обратный переход — переход к операции $\cdot : a \cdot (u + R(U)) = a \cdot u$, $a \in A$, $u \in U$. При этом U -модуль A_+ превратится в $\bar{U}$ -модуль A , подмодули и фактормодули U -модуля A_+ превратятся в подмодули и фактормодули $\bar{U}$ -модуля A . Рассмотрим естественный U -эпиморфизм $\theta : A_+ \rightarrow A_+/R_U(A_+)$. Очевидно, что при переходе к операции $\cdot$ отображение θ становится $\bar{U}$ -гомоморфизмом. Поэтому, т. к. $R_{\bar{U}}$ — предрадикал в $Mod - \bar{U}$, то $R_{\bar{U}}(A) \subseteq R_{\bar{U}}(A_+/R_U(A_+))$. С другой стороны, поскольку r — радикал в Mod , то, как мы уже указывали выше, $R_U(A_+/R_U(A_+)) = 0$. Значит, $R_{\bar{U}}(A) \subseteq 0$, т. е. $R_{\bar{U}}(A) = 0$ для любого $\bar{U}$ -модуля A . Из условия же $(P2)$ следует, что $R_U(A_+) \subseteq R_{\bar{U}}(A)$ для любого $\bar{U}$ -модуля A .

Обратно, пусть $(A, U) \in Mod$ — произвольный модуль. Поскольку R — радикал в As , то $r((A, U)/r(A, U)) = (R_{\bar{U}}(A/R_U(A)), 0)$. Применяя условие $(P3)^*$ к $\bar{U}$ -модулю $A/R_U(A)$ и учитывая, что R_U — радикал в $Mod - U$, мы получим, что $R_{\bar{U}}(A/R_U(A)) = R_U(A/R_U(A)) = 0$. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что если r — предрадикал в Mod , то $r(A, U)$ содержит все r -подмодули модуля (A, U) для любого модуля (A, U) и, кроме того, класс r -радикальных модулей замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов (см. $(^2)$, предложения 1.1 и 1.3). Поэтому (см. $(^1)$, предложение 2) строгие радикалы в смысле Куроша в Mod , а также, очевидно, в As — это в точности идемпотентные радикалы.

Теорема 4. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U|U \in As\}$ тогда и только тогда определяет строгий радикал в смысле Куроша, когда она удовлетворяет условию $(P3)$ и все предрадикалы этой системы являются идемпотентными радикалами, или, что то же самое, — строгими радикалами в смысле Куроша.*

Доказательство. Покажем, что система $\{R; R_U|U \in As\}$,

удовлетворяющая условиям теоремы, удовлетворяет также и условию $(P3)^*$.

Пусть π — естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $\bar{U} = U/R(U)$, A — произвольный $\bar{U}$ -модуль и $A_+ = U$ -модуль, полученный из $\bar{U}$ -модуля A отступлением вдоль π . Тогда, в силу условия $(P2)$, $R_0(A) = R_1(A_+) = R_{\bar{U}}(A)$. С другой стороны, из условия $(P3)$, учитывая, что R — радикал в As , следует, что $R_{\bar{U}}(A) = R_{R(U)}(A) = R_0(A)$. Получили, что $R_1(A_+) = R_0(A)$ для любого $\bar{U}$ -модуля A . Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Предрадикал r категории Mod назовем идеально наследственным, соответственно, сильно наследственным, если $r(B, V) = (B, V) \cap r(A, U)$ для любого модуля (A, U) и любого идеала, соответственно, подмодуля (B, V) модуля (A, U) .

Верны следующие теоремы.

Т е о р е м а 5. Система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ тогда и только тогда будет определять идеально наследственный, соответственно, сильно наследственный предрадикал в Mod , когда она удовлетворяет условию (P_1) и когда $R_U = R_0$ для любого $U \in As$, т. е. когда эта система имеет вид $\{R; R_0\}$, где R — идеально наследственный, соответственно, сильно наследственный предрадикал в As , а R_0 — предкручение в Ab .

Т е о р е м а 6. Система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ тогда и только тогда будет определять идеально наследственный строгий радикал в смысле Куроша в Mod , когда она удовлетворяет условию $(P1)$ и имеет вид $\{R; R_0\}$, где R — идеально наследственный строгий радикал в смысле Куроша в As , а R_0 — кручение в Ab .

Известно (см. ⁽⁴⁾, 2.17 и ⁽⁵⁾, предложение 4.1), что нетривиальные кручения в категории Ab и нетривиальные сильно наследственные строгие радикалы в смысле Куроша в категории As описываются с помощью наборов простых чисел.

Сильно наследственный строгий радикал категории As , соответственно, кручение категории Ab , определенное набором простых чисел Π , соответственно, набором простых чисел Λ , обозначим через R^Π , соответственно, через R_{Λ}^* . Верна следующая теорема.

Т е о р е м а 7. Система предрадикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ тогда и только тогда будет определять сильно наследственный строгий радикал в смысле Куроша в категории Mod , когда $R_U = R_0 = R_{\Lambda}^*$ для любого $U \in As$, т. е. когда эта система имеет вид $\{R; R_{\Lambda}^*\}$, где или $R = R^\Pi$, $R_{\Lambda}^* = R_{\Lambda}^*$, для некоторых наборов простых чисел Π и Λ , удовлетворяющих условию $\Pi \subseteq \Lambda$, или $R = 0_{As}$ — нулевой радикал в As ($0_{As}(U) = 0$ для любого $U \in As$), а R_{Λ}^* — произвольное кручение в Ab , или же $R_{\Lambda}^* = 1_{Ab}$ — тривиальное кручение в Ab ($1_{Ab}(A) = A$ для любого $A \in Ab$), а R — произвольный сильно наследственный строгий радикал в смысле Куроша в As .

Աինչոադիկալները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում

Նախորդ աշխատանքներում հեղինակին հաջողվել էր տալ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի խիստ ուղիկալների նկարագրությունը խիստ ուղիկալների համաձայնեցման սիստեմների միջոցով: Պարզվում է, որ ընդհանրացնելով այդ մեթոդը, կարելի է տալ նաև բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչոադիկալների նկարագրությունը:

Աինչոադիկալների համաձայնեցված սիստեմների միջոցով նկարագրված են բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչոադիկալները, իդեմպոտենտ մինչոադիկալները, ուղիկալները, Կուրոշի-Ամիցուրի իմաստով խիստ ուղիկալները, կատարելապես ժառանգական ու ուժեղ ժառանգական մինչոադիկալներն ու ուղիկալները:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Г. Г. Эмин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 3, с. 211—232 (1979).
 2. А. И. Кашу, Радикалы и кручения в модулях, Штиинца, Кишинев, 1983. 3. Е. Г. Шульгейфер, Сиб. мат. журн., т. 7, № 6, с. 1412—1421 (1966). 4. А. П. Мишина, Л. А. Скорняков, Абелевы группы и модули, Наука, М., 1969. 5. P. N. Stewart, Proc Amer. Math. Soc., v. 39, № 2, p. 273—278 (1973).

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Анопин

Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/VI 1988)

Основные результаты по исследованию обширных классов контактных и смешанных задач теории упругости для клиновидных тел подытожены в (1). В этом направлении укажем также на (2-5).

В настоящей работе рассматривается задача о контакте двух одинаковых симметрично расположенных гладких штампов с упругим клином, который на некотором отрезке своей срединной линии усилен абсолютно жестким включением. Задача математически формулируется в виде системы двух интегральных уравнений, решаемой методом ортогональных многочленов Чебышева.

1. Пусть упругий клин с углом раствора 2α на отрезке $[a, b]$ своей срединной линии $\varphi=0$ усилен абсолютно жестким тонким включением и деформируется двумя одинаковыми, симметрично расположенными на гранях клина $\varphi=-\alpha$ и $\varphi=\alpha$ гладкими штампами.

Необходимо определить контактные напряжения под штампами и на линии стыка включения с клином.

Ввиду симметрии относительно линии $\varphi=0$ будем рассматривать только верхнюю часть клина, для которой будут иметь место следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_{\varphi}(r, 0) = \tau_{r\varphi}(r, z) = 0 \quad (0 < r < \infty); \\ \tau_{r\varphi}(r, 0) = 0 \quad (0 < r < a; b < r < \infty); \\ u_r(r, 0) = 0 \quad (a < r < b); \\ \tau_{\varphi}(r, z) = 0 \quad (0 < r < a_1; b_1 < r < \infty); \\ u_{\varphi}(r, z) = f(r) \quad (a_1 < r < b_1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f(r)$ — известная функция, описывающая основание штампа.

Чтобы построить решение этой смешанной краевой задачи, сначала определим радиальные перемещения u , точек линии $\varphi=0$ и нормальные перемещения точек линии $\varphi=\alpha$ от неизвестных нормальных контактных напряжений $q(r)$, действующих под штампом, и касательных контактных напряжений $\tau(r)$, действующих на линии соединения включения с клином. Решение этой вспомогательной задачи легко построить при помощи преобразования Меллина (2). Затем подставим полученные выражения перемещений в третье и пятое условия (1.1), предварительно продифференцировав их по r . Перейдя в первом из полученных уравнений к новым переменным по формулам $r_0 = \exp(ds +$

$+c$); $r = \exp(dx + c)$, а во втором - по формулам $r_0 = \exp(d_1s + c_1)$; $r = \exp(d_2x + c_1)$ и введя обозначения

$$\varphi(s) = \exp[(ds + c)] / \exp(ds + c) / p_0; \quad \psi(s) = \exp(d_1s_1 + c_1) / \exp(d_1s + c_1) / p_0;$$

$$F(s) = \exp(d_1s + c_1) f' / \exp(d_1s + c_1) / p_0; \quad d = \frac{1}{2} \ln(b/a); \quad d_1 = \frac{1}{2} \ln(b_1/a_1);$$

$$c = \frac{1}{2} \ln(a \cdot b); \quad c_1 = \frac{1}{2} \ln(a_1 \cdot b_1),$$

придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} - R_{11}(x, s) \right] \varphi(s) ds + \int_{-1}^1 R_{12}(x, s) \psi(s) ds = 0; \quad (1.2)$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} - R_{21}(x, s) \right] \psi(s) ds + \int_{-1}^1 R_{22}(x, s) \varphi(s) ds = -F(x).$$

При этом должны удовлетворяться условия равновесия включения, штампа и условие гладкого контакта:

$$d_1 \int_{-1}^1 \psi(s) ds = 1; \quad \int_{-1}^1 \varphi(s) ds = 0; \quad \psi(\pm 1) = 0. \quad (1.3)$$

В систему уравнений (1.2) введены обозначения

$$R_{11}(x, s) = -\frac{2d}{\pi} \int_0^\infty \left[\lambda \operatorname{sh}^2 \alpha z + z^2 \sin^2 \alpha + d_1^2 - \frac{\lambda \Delta(z)}{2} \right] \frac{\sin z(x-s)}{\Delta(z)} dz;$$

$$R_{12}(x, s) = \frac{d_1}{\pi} \left[\frac{\sin \alpha}{2(\lambda + \mu)(2\alpha + \sin 2\alpha)} - \frac{z}{\pi \mu} \int_0^\infty \cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z \frac{\cos z(d_1s - dx + c_1 - c)}{\Delta(z)} dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} \cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z - \sin \alpha z \operatorname{ch} \alpha z \right] \frac{\sin(d_1s - dx + c_1 - c)z}{\Delta(z)} dz \right];$$

$$R_{21}(x, s) = \frac{d_1(1 - \cos 2\alpha)}{2(2\alpha - \sin 2\alpha)} + d_1 \int_0^\infty [\operatorname{ch} 2\alpha z - \cos 2\alpha - \Delta(z)] \sin z(sd_1 - dx + c_1 - c) \frac{dz}{\Delta(z)};$$

$$R_{22}(x, s) = \frac{d}{\pi} \left[\frac{z_1}{\pi \mu} \int_0^\infty \operatorname{ch} 2\alpha z \frac{\sin z(ds - d_1x + c - c_1)}{\Delta(z)} dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty [2\mu \cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z - 2(\lambda + \mu)z \sin \alpha z \operatorname{ch} \alpha z] \frac{\cos z(ds - d_1x + c - c_1)}{\Delta(z)} dz \right];$$

$$\Delta(z) = \operatorname{sh} 2\alpha z + z \sin 2\alpha; \quad \alpha = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu};$$

$$\theta_1 = \frac{x}{2\pi i x_1}; \quad \theta_2 = \frac{x_1}{2\pi i}.$$

2. Решение системы уравнений (1.2) представим в виде бесконечных рядов

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(1)} T_n(x); \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(2)} T_n(x); \quad (2.1)$$

где $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, а $X_n^{(i)}$ ($i = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (2.1) в систему (1.2), используя известное соотношение

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = \pi U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

и условие ортогональности многочленов Чебышева, по известной процедуре приходим к следующей эквивалентной системе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(i)} - \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i,j)} X_n^{(j)} = C_m^{(i)} \quad (i = 1, 2; m = 1, 2, \dots); \quad (2.3)$$

$$C_m^{(i)} = a_m^{(i)} + \sum_{j=1}^2 A_{m,0}^{(i,j)} X_0^{(j)} \quad (i = 1, 2); \quad a_m^{(1)} = 0;$$

$$a_m^{(2)} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 F(x) \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx,$$

где $U_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода, а ядра $A_{m,n}^{(i,j)}$ ($i, j = 1; m, n = 1, 2, \dots$) бесконечных систем представляют собой интегралы от произведения регулярных функций с функциями Бесселя первого рода $J_m(x)$ и $J_n(x)$, явные выражения которых здесь не приводятся. Далее следуя работе (6) легко доказать, что система (2.3) квазивполне регулярна.

Теперь заметим, что в правые части системы (2.3) входят неизвестные коэффициенты с нулевыми индексами, которые сразу определяются из первых двух условий (1.3). Они имеют вид

$$X_0^{(1)} = 0; \quad X_0^{(2)} = 1/\pi d_1 \quad (2.4)$$

Следующие два условия (1.3) служат для определения размеров контактной зоны, т. е. параметров a_1 и b_1 , и эквивалентны следующим уравнениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(2)} = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X_n^{(2)} = 0. \quad (2.5)$$

3. Отметим, что из рассмотренной здесь задачи при частных значениях α получаются решения некоторых известных задач, а также некоторых новых задач, представляющих самостоятельный интерес.

Например, при $\alpha = \pi/2$, когда включение отсутствует, из (1.2) получается интегральное уравнение, которое описывает известную задачу о контакте двух симметрично расположенных штампов с полуплоскостью. В случае $\alpha = \pi$ и $f(r) = \text{const}$ получается контактная задача для плоскости, усиленной жестким включением и ослабленной полубесконечной щелью, на берегах которой действуют жесткие штампы, имеющие плоские основания. В этой задаче представляет интерес изменение коэффициента интенсивности K разрушающих напряжений $\sigma_z(r, 0)$ в концевой точке щели в зависимости от расстояний между штампами и включением от этой точки. Аналитически эта зависимость дается формулой

$$K = \frac{p_0}{2} \left\{ \frac{\pi}{\lambda + 2\mu} \frac{\ln(b/a)}{(a \cdot b)^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n[\ln(b/a)/4] X_n^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{\ln(b_1/a_1)}{(a_1 \cdot b_1)^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n[\ln(b_1/a_1)/4] X_n^{(2)} \right\}, \quad (3.1)$$

где $I_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — функция Бесселя мнимого аргумента.

Далее, если считать, что в указанной задаче включение отсутствует, то из (1.2) придем к следующему известному интегральному уравнению для определения контактных напряжений:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{r_0} q(r_0)}{(r_0 - r)} dr_0 = 0, \quad (3.2)$$

которое допускает замкнутое решение в виде

$$q(r) = \frac{p_0 \sqrt{b_1}}{K(k) \sqrt{r(r-a_1)(r-b_1)}}; \quad (k = \sqrt{1-a_1/b_1}). \quad (3.3)$$

Для разрушающих напряжений $\sigma_z(r, 0)$ и коэффициента интенсивности K получаются соответственно следующие выражения:

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{p_0 \sqrt{b_1}}{2K(k) \sqrt{r(r+a_1)(r+b_1)}}; \quad K = \frac{p_0}{2\sqrt{a_1} K(k)}. \quad (3.4)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Из (3.4) видно, что когда $a_1 \rightarrow 0$, т. е. когда штамп приближается к концевой точке щели, коэффициент интенсивности K возрастает.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Կոշտ ներդրակով ուժեղացված առաձգական սեւի համար
մի կոնտակտային խնդրի մասին

Դիտարկված է երկու միատեսակ համաչափորեն դասավորված ողորկ
շտամպների և առաձգական սեւի կոնտակտային խնդիրը, երբ վերջինս իր
միջին գծի ինչ որ հատվածում ուժեղացված է բացարձակ կոշտ ներդրակով:

Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է երկու ինտեգրալ համասարում-
ների համակարգի ձևով, որի լուծումը կառուցված է Չերիշևի օրթոգոնալ
բազմանդամների օգնությամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, М., Наука, 1976. ² Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1963. ³ И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955. ⁴ И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко, Неклассические смешанные задачи теории упругости, Наука, М., 1974. ⁵ К. С. Чобанян, Напряжения в составных упругих телах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987. ⁶ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, Известия АН АрмССР Механика, т. 25, № 2, (1972).

УДК 551.521.3:551.526

ФИЗИКА

Ж. Б. Хачатрян

Спутниковый радиолокационно-доплеровский метод определения малых газовых компонент на высотах 50—90 км

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 29/III 1988)

В работах (^{1, 2}) уже обсуждался вопрос о возможности определения «малых газовых компонент» в верхних слоях атмосферы, с помощью маломощного, но высокостабильного передатчика, устанавливаемого на искусственном спутнике Земли, двигающемся по круговой орбите. Принцип предлагаемого метода состоял в том, что частота передатчика f_0 , установленного на спутнике, должна подбираться такой, чтобы она находилась вблизи центра линии поглощения атмосферного газа, содержание которого необходимо определить. Вследствие движения спутника частота сигнала f , принятого на Земле, будет отличаться от той, которая излучается спутниковым передатчиком f_0 . Это отличие $F_g = f - f_0$ связано с эффектом Доплера и зависит от взаимного расположения спутника относительно пункта приема, и поэтому вследствие движения спутника по орбите величина F_g изменяется. Скорость движения спутника v много меньше скорости света c , и максимальное относительное изменение частоты составляет $\sim 10^{-5}$. Это в свою очередь позволяет достаточно точно воспроизвести контур линии поглощения исследуемого атмосферного газа, находящегося на больших высотах при малом давлении (^{3, 3}). Учитывая, что ширина линии Δf поглощения исследуемой газовой компоненты, например, водяного пара, озона, гидроксила, на высотах, превышающих 80—90 км, в основном определяется эффектом Доплера, связана со скоростью движения молекул газа и может быть рассчитана с использованием соотношения

$$\Delta f_g = \frac{f_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где R — газовая постоянная, M — масса молекул, T — абсолютная температура.

На меньших высотах основной фактор, влияющий на ширину линии поглощения, связан с соударением молекул. Оценки показывают (³), что с увеличением давления (понижением высоты) ширина линии поглощения расширяется и при регистрации относительного изменения частоты $\frac{\Delta F_g}{f_0} \sim 10^{-5}$ и излучении монохроматического сигнала можно

«воспроизвести» контур линии в интервале высот от 60 до 90 км.

В (3,4) приведены соотношения, с помощью которых можно определить на различных высотах для разных газовых компонент ширину линии поглощения, а в (1,2) проведены соответствующие расчеты для линии поглощения водяного пара с центром линии, приходящейся на длину волны $\lambda = 1,35$ см.

В (2) для уменьшения влияния нижних слоев атмосферы на результаты измерений был предложен двухчастотный метод, сущность которого состоит в том, что передатчик излучает одновременно на двух «близких» частотах, для которых поглощение в нижних слоях атмосферы практически одинаково, а в верхних различно.

Предложенный метод (1,2) можно существенно модернизировать, если на борту вместо высокостабильного передатчика синусоидальных колебаний установить угольный отражатель-ретранслятор. В этом случае существенно упрощается бортовая аппаратура, и радиофизические измерения можно проводить все время существования спутника на орбите; кроме того в два раза увеличивается диапазон частот, в котором содержится полезная информация о газовом составе атмосферы, т. е. появляется возможность расширить диапазон высот, для которых можно определять вертикальные распределения малых газовых компонент, и один и тот же угольный отражатель-ретранслятор можно использовать для определения содержания различных газовых компонент в верхней атмосфере, имеющих полосы поглощения в микроволновой области спектра, например, H_2O , O_3 , NO , NO_2 и др.

Следует отметить, что при практической реализации предлагаемого метода несколько усложняется наземный измерительный комплекс, и поэтому необходимо провести некоторые оценки, показывающие возможность его практической реализации. На рис. 1 показана схема

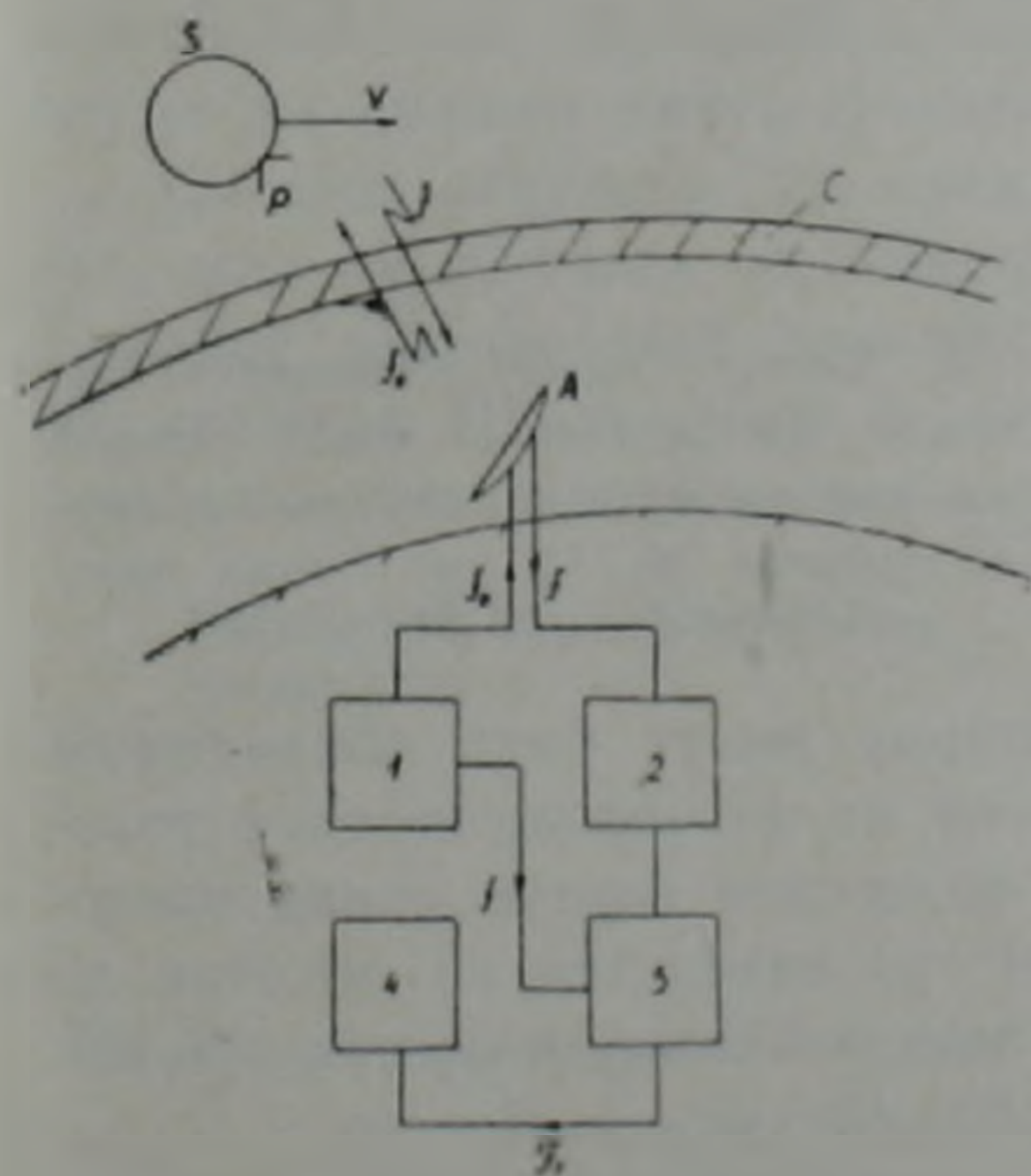


Рис. 1. S—спутник; P—ретранслятор, установленный на спутнике; C—слой атмосферы, в котором производятся измерения; A—антенна РЛС; 1—передатчик; 2—приемник; 3—сместитель; 4—вычислительный блок и регистратор

проведения измерений. На борту спутника S, движущегося по круговой орбите, устанавливается угольный отражатель-ретранслятор P, который облучается микроволновым передатчиком 1, установленным на Земле. Частота отраженного от ретранслятора сигнала отличается на

F_g — от той, которой он облучается. Это отличие согласно (1) определяется соотношением

$$F_g = 2 f_0 \frac{v}{c} \cdot \frac{R_3 \sin \varphi}{(R_e^2 + R_3^2 - 2 R_e R_3 \cos \varphi)^{1/2}}$$

φ — угол между радиус-векторами, исходящими из центра Земли и направленными на приемник (R_3) и на спутниковый передатчик (R_e).

Отраженный от ретранслятора сигнал, попадая на антенную систему наземного комплекса, усиливается приемником 2; выделяется и измеряется величина отраженного сигнала для разных смещений доплеровской частоты F_g . Последняя операция осуществляется при помощи сместителя 3 и специального устройства 4. При излучении двухчастотного сигнала приемная система практически не претерпевает изменений, хотя несколько усложняется сам процесс обработки и регистрации отраженного от ретранслятора излучения.

Непрерывная регистрация отраженного сигнала позволяет «воспроизвести» контур линии поглощения исследуемой газовой компоненты $\alpha(f)$, который зависит от вертикального высотного распределения исследуемой газовой компоненты.

Вид кривой $\alpha(f)$ для различных высотных распределений исследуемой газовой компоненты показан на рис. 2. Проведенные нами оценки показывают, что предложенный метод обеспечивает измерения содержания исследуемого газа, составляющего всего 10^{-5} г/м³. Это

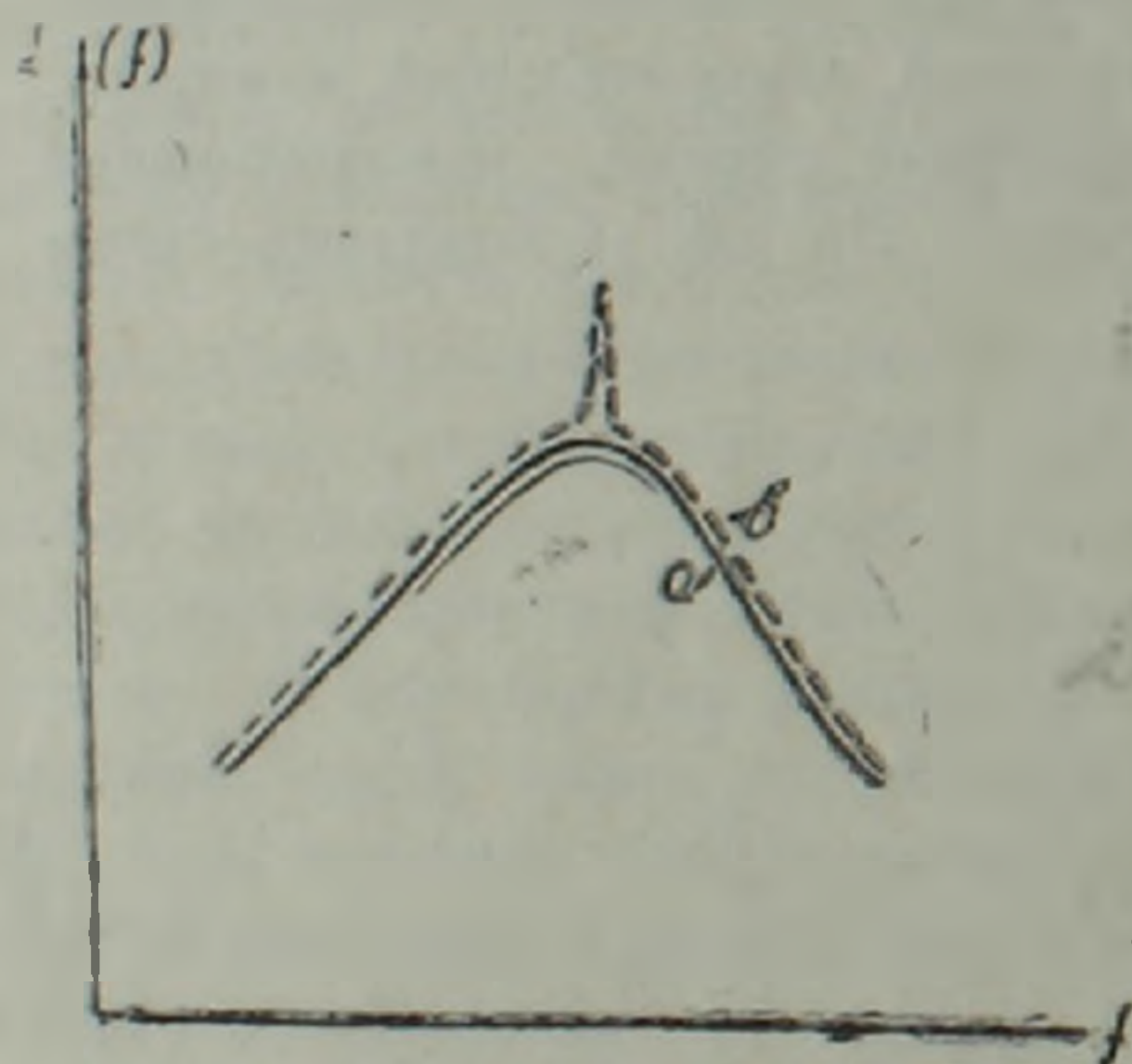


Рис. 2. Контур линии поглощения при различном распределении малой газовой компоненты по высотам: а — газ находится на высотах 50—70 км; б — газ появляется на высотах 80—90 км

значительно меньше тех величин, которые могут быть обнаружены контактными датчиками, установленными на метеорологических ракетах. На рис. 2 сплошной кривой (а) изображен контур линии поглощения для случая, когда исследуемый газ находится на высотах до 60—70 км, а пунктирной (б) — контур линии с пиком в центре при появлении исследуемого газа на высотах 80—90 км.

Проведем энергетические оценки, позволяющие определить размеры ретранслятора, который должен быть установлен на спутнике при сравнительно скромных параметрах наземной измерительной аппаратуры. Пусть спутник движется по 400-километровой круговой орбите, и сигнал регистрируется в диапазоне углов $\pm 45^\circ$ от вертикали. В этом случае максимальное удаление от спутника не будет превы-

шать 600 км. Пусть размер приемно-передающей антенны $L=3$ м, передатчик излучает 10 Вт, шумовая температура приемника $T_m=10^3$ К, полоса приемника $\Delta F_n=10^4$ Гц.

Согласно (6) отношение принятой мощности $P_{пр}$ к излученной $P_{изл}$ определяется соотношением

$$\frac{P_{пр}}{P_{изл}} = \frac{S^2 \cdot S_2}{4\pi R^4 \lambda^2} \exp(-2 \int_0^R \alpha(R) dR), \quad (1)$$

где R — расстояние до спутника, λ — длина волны РЛС, S — эквивалентная площадь приемно-передающей антенны, S_2 — эквивалентная отражающая поверхность отражателя-ретранслятора, установленного на спутнике, величину которой можно рассчитать, воспользовавшись соотношением

$$S_2 = \frac{4\pi a^4}{\lambda^2}, \quad (2)$$

a — линейные размеры уголкового отражателя.

Величина $P_{пр}$, которую регистрирует радиолокационный приемник, при мощности отраженного сигнала, равной мощности шумов, определяется по формуле

$$P_{пр} = kT\Delta F_n,$$

k — постоянная Больцмана.

Подставляя приведенные величины в (1) и предполагая, что $\exp(-2 \int_0^R \alpha(R) dR)$ во всем диапазоне изменения α не превышает 0,5, а также считая, что зондирование ведется на длине волны 1,35 см (полоса поглощения водяного пара), имеем $S_2=600$ м². Учитывая, что для уголкового отражателя справедливо (2), получим, что размер его ребра должен иметь сравнительно скромные размеры — всего 1 м.

Следует отметить, что предложенный метод особенно перспективен, если на спутнике установить оптический уголкового отражателя и лазерное зондирование атмосферы проводить в оптическом диапазоне, включая ИК-диапазон, в котором имеется много достаточно интенсивных линий поглощения.

Ереванский государственный университет

Ջ. Ռ. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ

50—90 կմ բաճառությունների վրա փոխ գազային բաղադրիչների ուղղման արբանյակային ռադիոլոկացիոն ղուպերյան մեթոդը

Առաջարկված մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում՝ արբանյակի վրա տեղադրված է ռետրանսլյատոր, իսկ նրկրի վրա ճառագայթող-ընդունող ռադիոլոկացիոն կայան (ՌԿ)։ ՌԿ-ից ռետրանսլյատորի վրա ընկած էլեկտրամագնիսական ալիքը անդրադառնում և գրանցվում է ՌԿ-ի վրա տեղադրված ընդունող սարքի կողմից։ Արբանյակի պտույտի հետևանքով, ըստ Դոպլերի

էֆեկտի, ճառագայթման և ընդունման ազդանշանների հաճախությունները
կլինեն տարբեր: Դա հնարավորություն է տալիս ճշգրիտ վերարտադրելու
մթնոլորտի վերին շերտերում գտնվող քաղցրի կլանման կորի տեսքը:

Առաջարկված մեթոդը թույլ է տալիս չափել 10^{-7} գ/մ³ խտությամբ գազի
քանակությունը, որը բավականին փոքր է այն մեծություններից, որոնք կա-
րող են գրանցել հրթիռների վրա տեղադրված սվիչները:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Горелик, Ж. Б. Хачатрян, Тр. ГосНИИ ИПР, вып. 19 (1984). ² А. Г. Горелик, Ж. Б. Хачатрян, Изв. АН СССР, ФАО, т. 21, № 28. (1985). ³ D. L. Crook-Jones, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 27 (1965). ⁴ В. Н. Борин, А. П. Наумов, *Радиотехника и электроника*, т. 24, № 1 (1979). ⁵ М. Скольник, *Справочник по радиолокации*, Сов. радио, М., 1976.

УДК 54.541+678.42.5:547.556.3

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

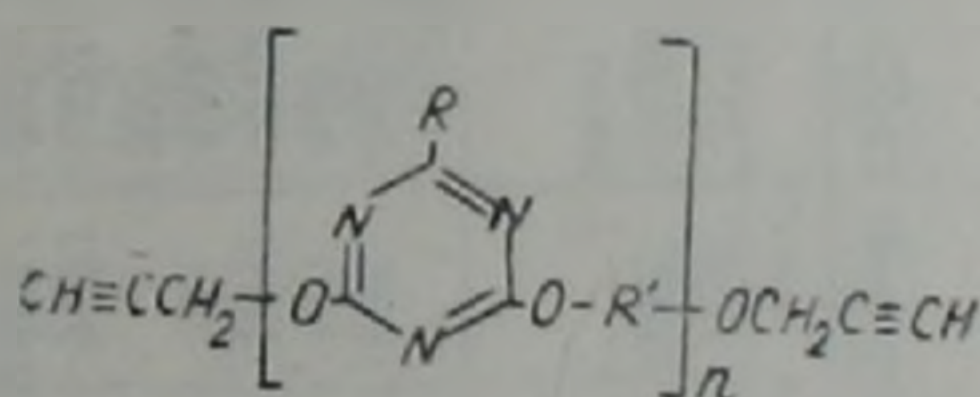
А. В. Азатян, Ф. С. Киноян, Ю. И. Гудименко, В. Н. Заплишный,
 Г. М. Погосян

Синтез, свойства и полимеризация симм-триазинсодержащих
 олигоэфиров с терминальной ацетиленовой связью

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Г. Мацюком 13/VII 1988)

В связи с широкими возможностями практического использования олигоэфиры с реакционноспособными функциональными группами продолжают привлекать внимание исследователей. Среди олигомеров, содержащих ацетиленовые группы, симм-триазиновые олигоэфиры остаются практически неисследованными.

Нами получены олигоэфирпропаргилаты триазинового ряда (ОПТ):



$\text{R} = \text{OC}_6\text{H}_5$, $\text{N}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$, $\text{N}(\text{C}_6\text{H}_5)_2$; $\text{R}' =$ остатки дифенилолпропана, резорцина, фенолфталена; $n = 1-2$.

Синтез ОПТ осуществляли взаимодействием монозамещенных производных цианурхлорида, бисфенолов и пропаргилового спирта, в условиях, обеспечивающих предельный обрыв с минимальной степенью олигомеризации (¹). Все полученные ОПТ представляют собой низкоплавкие, различных оттенков желтого и коричневого цвета порошки, растворимые во многих органических растворителях. Выходы и некоторые их свойства приведены в табл. 1 и 2.

Предполагаемое строение ОПТ подтверждено данными ИК, ПМР спектроскопии и элементного анализа. В ПМР спектрах (табл. 2) обнаружены сигналы протонов всех групп заместителей, обрамляющих триазиновый цикл. Пропаргильная группа проявляется дублетом в области 4,74—5,18 м. д. ($\text{CH}_2\text{C}\equiv\text{CH}$) и триплетом при 2,35—2,45 м. д. ($\text{CH}\equiv\text{CCH}_2$). Четко проявляются синглеты метильных протонов мостичной группы дифенилолпропана, сигналы фенольных протонов, а также сигналы этильных протонов этиламинной группы заместителей в положении 2 триазинового цикла. В ИК спектрах ОПТ (табл. 2) обнаружены широкие, средней интенсивности полосы поглощения с максимумами при 2998—3320 см^{-1} и узкие слабые полосы при 2125—2145 см^{-1} , характерные валентным колебаниям $\text{CH}\equiv$ и $\text{C}\equiv\text{C}$ групп соответственно. Обнаружены также интенсивные полосы поглощения

Таблица 1

Выходы и некоторые свойства ОПТ

R	R' (остаток онсфенола)	Вы- ход, %	Т. разм., °C	[α] дл. г., 20°C. (диок- сан)	Мол. масса:			n	Содержание ≡CH, моль		N, %, най- дено	Брутто формула	N, %, вычис- лено
					ИТЭК	ИКС	вычис- лено		най дено	вычислено			
N(C ₆ H ₅) ₂	Дифенилолпропан	87	70—83	0.033	525	549	566	1	0.0029	0.0025	9.02	C ₃₆ H ₃₀ N ₄ O ₂	9.89
	Резорцин	82	115—123	0.01	—	436	448	1	0.0030	0.0025	12.58	C ₂₇ H ₂₀ N ₄ O ₂	12.49
	Фенолфталеин	77	120—130	0.046	1180	1057	1219	2	—	—	8.98	C ₇₄ H ₅₀ N ₄ O ₆	8.61
N(C ₂ H ₅) ₂	Дифенилолпропан	80	68—75	0.026	—	453	470	1	0.0028	0.0025	10.98	C ₂₈ H ₃₀ N ₄ O ₂	11.91
	Резорцин	76	65—70	0.023	—	—	352	1	0.0031	0.0025	15.30	C ₁₉ H ₂₀ N ₄ O ₂	15.90
	Фенолфталеин	75	110—123	0.019	—	972	1171	2	—	—	9.70	C ₆₀ H ₅₀ N ₄ O ₉	8.90
OC ₆ H ₅	Дифенилолпропан	89	98—102	0.028	480	468	491	1	0.0027	0.0025	10.0	C ₃₀ H ₂₅ N ₃ O ₄	9.80
	Резорцин	86	85—93	0.014	—	361	373	1	0.0026	0.0025	11.98	C ₂₂ H ₁₅ N ₃ O ₄	11.25
	Фенолфталеин	70	105—115	0.045	1150	1095	1069	2	—	—	7.32	C ₆₄ H ₄₀ N ₄ O ₁₁	7.23

ИК и ПМР С спектры олигоэфирпропаргилатов ОПТ

R	R' (остаток бисфенола)	ИКС, ν , см ⁻¹ (группа)							ПМР, δ , м. д. (группа)
		$\equiv\text{CH}$	CH ароматическое и алифатическое	$\text{C}\equiv\text{C}$	$\text{C}=\text{O}$ фта-лид-ное	$\text{C}=\text{C}$, $\text{C}=\text{N}$ -сопряженное и циануратный цикл	$\text{C}-\text{O}-\text{C}$ и $\text{C}-\text{N}$	1,4- или 1,3-бzl.	
$\text{N}(\text{C}_6\text{H}_5)_2$	Дифенилолпропан	3310	3070, 3020, 2980, 2880	2130	—	1605, 1570, 1530, 1500, 1390—1375	1260, 1220, 1185, 1110, 1080, 1010	830	7,26—7,05($\text{C}_6\text{H}_4 + \text{C}_6\text{H}_5$) 4,74д. (OCH_2); 2,36т ($\equiv\text{CH}$); 1,6с. ($\text{CH}_2-\text{C}-$)
	Резорцин	3300	3075, 3025, 2970, 2870	2140	—	1610, 1590, 1580, 1520, 1395—1380	1265, 1230, 1190, 1130, 1050, 1020	780	
	Фенолфталин	3298	3060, 3010, 2965, 2850	2128	1755	1610, 1575, 1545, 1490, 1380	1240, 1205, 1185, 1125, 1090, 1020	815	7,3—6,9($\text{C}_6\text{H}_4 + \text{C}_6\text{H}_5$) 4,78д. (OCH_2); 2,43т. ($\equiv\text{CH}$)
$\text{N}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	Дифенилолпропан	3320	3080, 3020, 2950, 2890	2130	—	1610, 1590, 1515, 1505, 1380	1270, 1220, 1185, 1100, 1090, 1020	825	7,2—6,8(C_6H_4) 4,78д. (OCH_2); 3,26кв. (NCH_2); 2,28т. ($\equiv\text{CH}$); 1,56с. ($\text{CH}_2-\text{C}-$); 0,88т. ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{N}$)
	Резорцин	3305	3090, 3000, 2955, 2890	2145	—	1615, 1600, 1545, 1500, 1390—1380	1280, 1190, 1170, 1120, 1025	790	
	Фенолфталин	3300	3025, 2985, 2930, 2880	2135	1770	1610, 1600, 1530, 1510, 1395—1380	1270, 1230, 1190, 1130, 1100, 1030	825	7,7—7,0(C_6H_4) 5,18д. (OCH_2); 3,56кв (NCH_2); 2,48д. ($\equiv\text{CH}$); 1,08т. ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{N}$)
OC_6H_5	Дифенилолпропан	3295	3060, 3040, 2970, 2875	2125	—	1590, 1570, 1555, 1500, 1390—1370	1230, 1210, 1190, 1105, 1075,	820	7,3—6,8($\text{C}_6\text{H}_4 + \text{C}_6\text{H}_5$); 4,86д. (OCH_2); 2,45т ($\equiv\text{CH}$); 1,58с. ($\text{CH}_2-\text{C}-$)
	Резорцин	3300	3030, 2980, 2925, 2875	2140	—	1605, 1580, 1505, 1495, 1380	1270, 1225, 1190, 1170, 1140, 1030	790	
	Фенолфталин	3320	3090, 3040, 2950, 2885	2145	1765	1615, 1595, 1535, 1510, 1495, 1380	1235, 1200, 1150, 1115, 1045	830	7,35—6,8($\text{C}_6\text{H}_4 + \text{C}_6\text{H}_5$) 4,83д. (OCH_2); 2,46т. ($\equiv\text{CH}$)

в областях, характерных для валентных колебаний $C=C$, $C=N$ —сопр. и циануратного цикла (1440 — 1615 и 1395 — 1375 cm^{-1} соответственно), $C-O-C$ и $C-N$ связи (1110 — 1280 cm^{-1}), а также средней интенсивности узкие полосы поглощения CN -ароматического, алифатического (2850 — 3080 cm^{-1}) и деформационных колебаний 1,3 и 1,4-дизамещенного бензольного кольца. Олигоэфирпропаргилаты на основе фенолфталена, кроме того, дают сильные полосы поглощения при 1755 — 1770 cm^{-1} , характерные валентным колебаниям фталидного цикла указанного бисфенола.

Содержание алкинного водорода в синтезированных олигоэфирах определяли методом обратного титрования согласно (2), а тройной связи—по данным ИК спектроскопии (3), из сравнения значений тангенсов углов наклона калибровочных прямых, построенных в координатах $lg I_0/I-C$, с аналогичными прямыми для ОПТ, используя известное (3) соотношение $M_{ст} \cdot S_{ст} = \bar{M}_n \cdot S$, вычисляли значения среднечисловых мол. масс ($\bar{M}_n$) синтезированных олигоэфиров. Найденные таким образом значения $\bar{M}_n$ хорошо коррелируют с таковыми, найденными по методу ИТЭК (4), что свидетельствует о достоверности полученных данных (табл. 1).

Все полученные олигоэфиры дают положительную реакцию на ненасыщенность с водным раствором перманганата калия и бромной водой и отрицательную на галоид по Бельштейну.

Как и следовало ожидать, симм триазинсодержащие олигоэфирпропаргилаты не способны полимеризоваться в присутствии радикальных инициаторов. Эффективными катализаторами полимеризации оказались ацетилацетонаты и соли металлов переходной валентности; они обеспечивают полимеризацию ОПТ в широком интервале температур (80 — $250^\circ C$). Причем константы скорости процесса полимеризации, определенные гравиметрически (5), в присутствии ряда изученных катализаторов, имеют очень близкие значения (табл. 3), что свидетельст-

Таблица 3

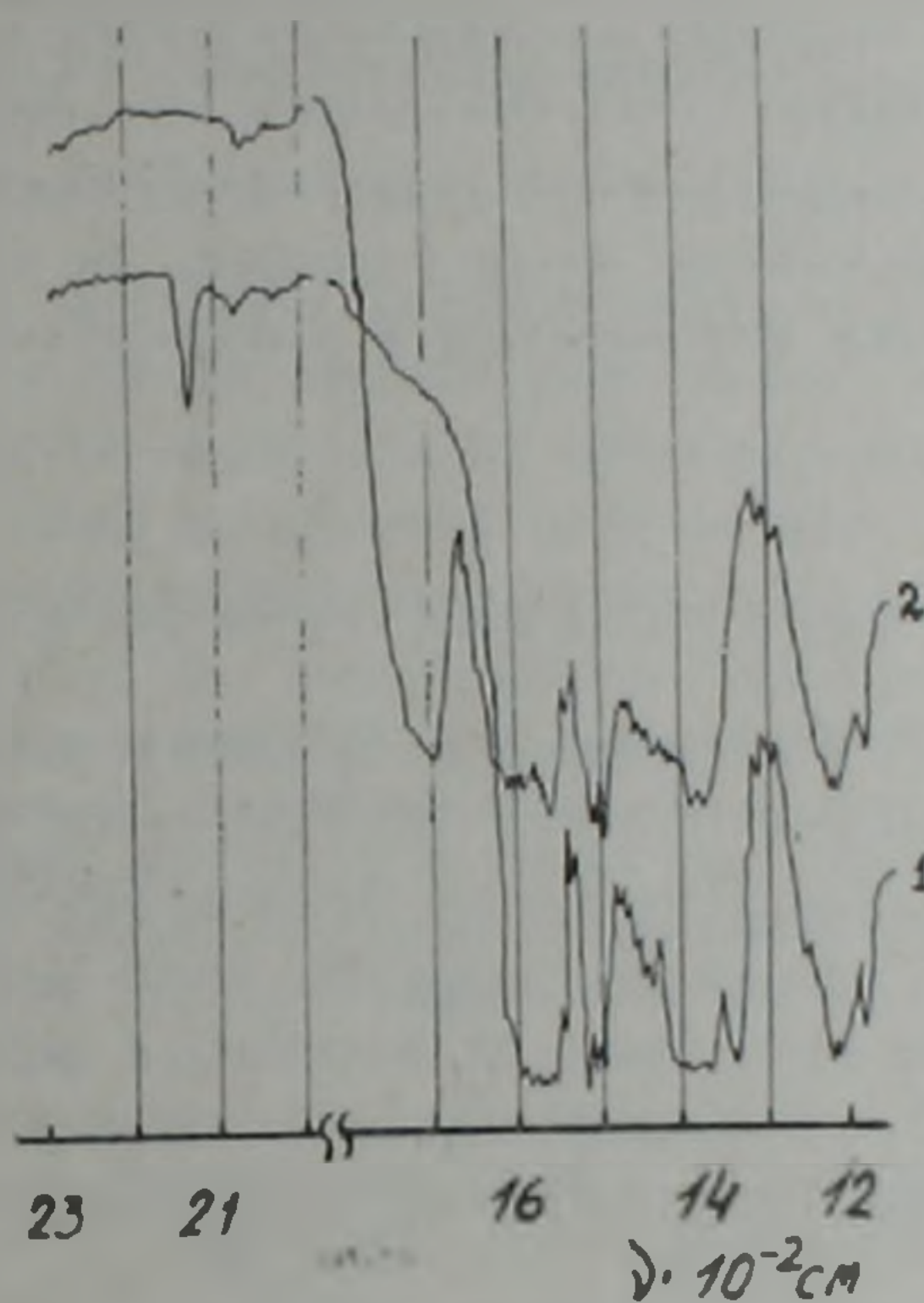
Константы скорости полимеризации ОПТ в массе при $200^\circ C$
в присутствии некоторых катализаторов

Катализатор	$K \cdot 10^{-6} c^{-1}$	Катализатор	$K \cdot 10^{-6} c^{-1}$
$CuBr$	1.6	Ацетилацетонат	
$CuCl_2$	1.5	железа	1.4
$CuCl$	1.5	Ацетилацетонат	
$PdCl_2$	1.3	меди	1.7

вует о близкой их активности. Наиболее активен ацетилацетонат меди ($AcAcCu$), который и использовали в дальнейшем. В результате полимеризации ОПТ, в присутствии указанных в этой таблице катализаторов, образуются термостойкие, неплавкие и нерастворимые политриазины трехмерной структуры, с температурой начала интенсивного разложения на воздухе 290 — $310^\circ C$. Однако полимеризация при температурах выше $130^\circ C$ сопровождается вспениванием и образова-

нием дефектных структур; это, вероятно, связано с протеканием побочной реакции гомополиперэтерификации, аналогично описанной в (6). По этой же причине не удалось получить растворимые ОПТ исходя из дихлортриазинов, содержащих алкоксизаместители в положении 2 триазинового цикла.

Следует также отметить, что в ИК спектрах конечных продуктов полимеризации ОПТ наряду с исчезанием полос поглощения, характерных валентным колебаниям $\text{C}\equiv\text{N}$ и $\text{C}=\text{C}$ связей, наблюдается появление сильной полосы поглощения при 1700 см^{-1} (рис. 1), характер-



Кривые ИКС исходного олигоэфирпропаргилата (1) и продукта его полимеризации (2)

ной валентным колебаниям $\text{C}=\text{O}$ группы изоциануратного цикла. Это, по-видимому, связано с тем, что полимеризация ОПТ в присутствии всех указанных катализаторов (табл. 3), сопровождается изомеризацией циануратного цикла в изоциануратный. Такая изомеризация ранее была описана для целого ряда симм-триазиносодержащих эфиров и олигоэфиров (6, 7). Было показано (6, 7), что изомеризация идет только при температурах выше 160°C , в случае же ОПТ мы наблюдали изомеризацию во всем изученном интервале температур.

На примере олигоэфиров $\text{R}=\text{NPh}_2$ и NEt_2 , R' —остаток дифенилпропана, нами исследована возможность использования их в вакуумных фотолитографических процессах. Было установлено, что в условиях термического вакуумного испарения при остаточном давлении $3,8\text{—}5,2\text{ мПа}$ и температуре $475\text{—}510\text{ К}$ на стеклянных подложках формируются тонкие пленки толщиной $0,46\text{—}0,98\text{ мкм}$. Такие пленки имеют высокую адгезию к подложке и большую чувствительность к воздействию УФ излучения ($1,28\text{—}1,62\text{ Дж/см}^2$). При воздействии лазерного излучения в облученных местах легко удаляется светочувстви-

тельный слой (энергия удаления пленки $1,32-1,7 \cdot 10^8$ Дж/мкм³) и формируется рельеф, соответствующий шаблону.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Հ. Վ. ԱՋԱՏՅԱՆ, Փ. Ս. ԿՐԵՈՅԱՆ, ՅՈՒ. Ի. ԿՈՒԴԻՄԵՆԿՈ, Վ. Ն. ԶԱՊԼԻՇՆԻ, Գ. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Մայրալին ացետիլենային կապ պարունակող սիմ.-տրիագինային
օլիգաէթերների սինթեզը, հատկությունները և պոլիմերումը

Սինթեզված են ծայրային ացետիլենային խմբեր պարունակող սիմ.-տրիագինային օլիգաէթերներ: Ուսումնասիրված են նրանց ֆիզիկաքիմիական հատկությունները, պոլիմերացման ընդունակությունը և գործնական կիրառության հնարավորությունները: Ցույց է տրված, որ այդ օլիգաէթերները պոլիմերվում են իզո-ձևի փոխարկվելով և հանդիսանում են արդյունավետ ֆոտոնեգիստներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. В. Азатян, В. Н. Заплишный, Г. М. Погосян и др., Тезисы докл. III Всесоюзн. конф. по химии и физико-химии олигомеров. Черногловка, ИХФ, с. 82. 1986.
2. J. G. Hupple, S. Stiggia. Anal. Chem., v. 21. p. 1469 (1949). 3. Л. И. Тарутинс, Ф. О. Позднякова, Спектральный анализ полимеров. Химия, Л., 1986. 4. Руководство к практическим работам по химии полимеров. Под. ред. В. С. Иванова, Изд-во ЛГУ, 1982. 5. А. В. Азатян, Ф. С. Киноян, А. И. Шерле и др., Кинетика и катализ, т. 29, № 2, с. 333 (1988). 6. Г. М. Погосян, В. А. Ланкратов, В. Н. Заплишный и др., Полиэтризины, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1987. 7. В. Н. Заплишный, М. А. Хачатрян, Ф. С. Киноян и др., ЖПХ, т. 60, № 6, с. 1378 (1987).

УДК 577.1

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

А. С. Агабалин, Л. А. Рухкин, Р. А. Захарян

Подавление размножения ретровируса MuLV препаратами
 Са-дн РНК и Са-низкомолекулярной РНК из дрожжей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Африкьяном 1/IX 1988)

Двуинтевые РНК (дн-РНК) стимулируют первичный и вторичный иммунный ответ, а также индуцируют синтез интерферона. Эффект дн-РНК реализуется через синтез интерферона и ряд биохимических реакций, зависящих по крайней мере от двух процессов: а) повышения уровня 2—5-олигоаденилата, активирующего латентную дн-РНК-зависимую РНК-азу, б) индукции дн-РНК-зависимой протеникиназы, фосфорилирующей фактор инициации $el\dot{f}$ -2⁽¹⁻²⁾.

Ранее нами было показано, что дн-РНК существенно повышает уровень фосфорилирования белков плазматической мембраны, активирует трансмембранные токи экстрацеллюлярного Ca^{2+} , повышает активность фосфолипазы A_2 , которая в свою очередь приводит к накоплению и высвобождению лизоформ фосфолипидов и ненасыщенных жирных кислот, обладающих иммуномодулирующими свойствами⁽³⁻⁴⁾.

Вместе с тем было показано, что индуцированное дн-РНК повышение уровня фосфорилирования плазматической мембраны, накопление в мембране лизофосфолипидов и ненасыщенных жирных кислот, повышающие текучесть мембраны, существенно нарушают рецепцию и подавляют сорбцию вируса (осповакцины, энцефаломиокардита) на плазматической мембране клетки⁽⁶⁾.

Изложенное послужило основанием для изучения влияния дн-РНК на развитие ретровирусной инфекции, эритроидной лейкемии у мышей.

В качестве дн-РНК использовали дрожжевую киллерную РНК с молекулярной массой $1,2—1,8 \times 10^6$, низкомолекулярную РНК—препарат нуклеината натрия (Рига, Олайн), который, как нами было показано ранее, содержит в своем составе дн-РНК. РНК переводили в форму Са-преципитата. 3H дн-РНК с активностью $6,5 \times 10^3$ имп/мкг была получена в тритиевой воде с удельной активностью 5 Кю/мл.

Взаимодействие 3H дн-РНК с клетками проводили в триэтаноловом буфере⁽⁷⁾ в суспензии при 4°C. В экспериментах использовано по 10^7 клеток. Энзиматическую обработку клеток в суспензии проводили при 37°C в течение 60 мин.

Мышей линии ВЛ В/с заражали вирусом лейкемии Раушера—MuLV, через 2 недели у 20 зараженных мышей пальпировалась вирус-

индуцированная спленомегалия, вторая группа мышей (20) получала внутрибрюшинно Са-дн-РНК—10 мкг/мышь (по три раза в неделю), третья группа (20 мышей) получала 5 мг Са-преципитата низкомолекулярной РНК (по три раза в неделю). Четвертая группа (20 мышей) получала Са-дн-РНК (три раза в неделю) через 12 ч после заражения вирусом, пятая группа (20 мышей) получала Са-преципитат низкомолекулярной РНК (три раза в неделю) через 12 ч после заражения вирусом. Наблюдение проводили в течение 20 дней. Вес селезенки у интактных мышей контрольной группы, второй и третьей групп составлял $0,101 \pm 0,012$ г, $0,110 \pm 0,013$ г, и $0,108 \pm 0,015$ г соответственно; у первой группы мышей вес селезенки превышал нормальные значения в 15 раз ($1,565 \pm 0,253$ г); у четвертой и пятой групп мышей наблюдалось уменьшение веса селезенки по сравнению с селезенками инфицированных животных на 62 и 58% соответственно. У мышей, зараженных вирусом MuLV и леченных препаратами РНК, получали смывы клеток костного мозга из бедренных костей и в надосадочной жидкости определяли активность фермента ревертазы. Активность ревертазы у мышей, инфицированных MuLV и получавших препараты Са-РНК, составляла 25% от активности фермента у мышей первой группы, не получавших препараты РНК, с явно выраженной спленомегалией.

Прекращение лечения препаратами РНК приводило к повышению активности ревертазы до 50% уже в первые три дня.

Для суждения, насколько специфично взаимодействие дн-РНК с плазматической мембраной клеток костного мозга, нами был изучен процесс сорбции ^3H дн-РНК на клетках в суспензии. Максимум специфического связывания дн-РНК достигался в течение 6—10 мин. Присутствие 20-кратного избытка рибонуклеотидов, «холодной» ДНК тимуса телят, разрушенной ультразвуком до мол. массы $1-5 \cdot 10^6$ Д, не оказывало влияния на связывание дн-РНК с мембраной клеток костного мозга.

Энзиматическая обработка клеток в суспензии оказывала разные эффекты на сорбцию дн-РНК клетками.

Влияние энзиматической обработки на связывание дн-РНК клетками костного мозга

Обработка	Связывание ^3H дн-РНК, мкг/ 10^5 клеток
Суспензия костного мозга, полученная сразу после воздействия трипсина (250 мкг/мл)	0,002
Суспензия клеток костного мозга через 3 суток культивирования	0,46
Суспензия клеток костного мозга после обработки трипсином (0,5%) мкг/мл)	0,0015
Суспензия клеток костного мозга после обработки ДНК-азой (100 мкг/мл)	0,46
Суспензия клеток костного мозга после обработки РНК-азой (50 мкг/мл)	0,5

Очевидно, что фактор связывания дн-РНК на поверхности клеток представлен протенинами. Полученные данные свидетельствуют о том, что процесс сорбции дн-РНК на плазматической мембране клеток костного мозга носит высокоспецифический характер.

В связи с вышесказанным было изучено влияние дн-РНК на адсорбцию вируса MuLV на клетках костного мозга мышей. Полученные данные показывают, что адсорбция дн-РНК на поверхностной мембране клеток костного мозга подавляет адсорбцию вируса на 80—90% (в течение 18—24 ч наблюдения). В то же время использованная в тех же концентрациях дн-РНК, гидролизованная до моно- ди- и тетра-нуклеотидов, практически не оказывала влияния на сорбцию вируса.

Если относительно «поздний» эффект дн-РНК (8—24 ч) по подавлению адсорбции вируса может быть объяснен в конечном итоге индукцией интерферона, то «ранние» эффекты дн-РНК (15, 30, 60 мин) предполагают наличие и других механизмов, в частности, индуцируемые дн-РНК в плазматической мембране изменения в фосфорилировании протенинов и в обмене фосфолипидов, связанных с активацией фосфолипазы A_2 , повышением текучести мембраны и изменением сродства рецептора к вирусу.

Можно заключить, что подавление активности фермента ревертазы и сорбции ретровируса MuLV на поверхностной мембране клеток мишеней является одним из механизмов ингибирования процесса ретровирусной инфекции эритроидной лейкемии препаратами Са-РНК. Это позволяет рекомендовать использованные препараты и при других формах ретровирусного инфицирования клеток костного мозга.

НИИ проктологии МЗ Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный институт
Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ԱՂԱՐԱՅԱՆ, Լ. Ա. ԽՈՒԽՅԱՆ, Բ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

MuLV ռետրովիրուսի բազմացման ճնշումը Са-երկրել ԹնԹ-ի և դրոժներից ստացված Са-ցածրամոլեկուլյար ԹնԹ պրեպարատներով

Са-երկթելանի ԹնԹ-ն ինդուկցում է բջջում ինտերֆերոն, բարձրացնում է սպիտակուցի պլազմատիկ թաղանթների ֆոսֆորիլացման մակարդակը, բարձրացնում է A_2 ֆոսֆորիլազայի ակտիվությունը, որը առաջ է բերում մեմբրանում լիզոֆորմ ֆոսֆոլիպիդների և իմունոմոդուլացված հատկանիշներով օժտված շահագեցած ճարպաթթուների կուտակումներ:

Ստացվել են տվյալներ, որոնք ցույց են տալիս, որ երկթել ԹնԹ-ի սորբցիոն պրեպարատներով բջջի պլազմատիկ մեմբրանի վրա կրում է բարձր սպեցիֆիկ բնույթ: Երկթել ԹնԹ-ի սորբցիան մեմբրանի վրա ճնշում է վիրուսի ադսորբցիան բջջի վրա 80—90%-ով: Միաժամանակ Са-երկթել ԹնԹ-ն և

դրոժներից ստացված Ca-ցածրամոլեկուլյար ՌՆԹ-ն ճնշում ևն MuLV ունի.
սազայի ակտիվությունը:

Ստացված արդյունքները թույլ ևն տալիս են աշխատողները օգտագործած
պրեպարատները նաև այլ ձևերով ոսկրուղեղի բջիջների ուտրոֆիկությանին
ինֆիցիացիան:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐՈՇՈՒՆԻՐՅՈՒՆ

¹ W. K. Roberts, A. Hovanessian, R. E. Broion et al., Nature, v. 264, p. 477—482 (1976). ² E. Lebleu, G. C. Sen, B. Gubler et al., Proc. Natl. Acad. Sci. USA, v. 73, p. 3107--3111 (1976). ³ С. Н. Айрапетян, Р. А. Захарян и др., ДАН СССР, т. 264, № 6, с. 1499—1502 (1985). ⁴ Р. А. Захарян, Г. Е. Рычков, С. С. Дадалян и др., Нейрохимия, т. 5, № 3, с. 239—247 (1986). ⁵ К. Г. Карагезян, Р. А. Захарян, С. С. Овакимян. Биол. журн. Армении, т. 40 № 12, с. 985—992 (1987). ⁶ Л. А. Рухкян, Р. А. Захарян, С. Н. Айрапетян, ДАН АрмССР, т. 83, № 1, с. 40—44 (1986). ⁷ О. К. Гаврилов, Г. Козиниц, Н. Б. Черняк, Клетки костного мозга и периферической крови, Медицина, М., 1985.