

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

# ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ ДОКЛАДЫ

Том 97 № 1

1997

## Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Է. Ս. ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Վ. Վ. ԴՈՎԼԱԹՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Վ. Դ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Կ. Գ. ՂԱՐԱԳՅՈՋՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Յու. Դ. ՇՈՒՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ֆ. Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Դ. Ս. ՍԵՂՈՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս

## Редакционная коллегия

Դ. Ա. ԱՐԶՄԱՆՅԱՆ, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик НАН Армении, Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик НАН Армении, Э. С. ГАБРИЭЛЯН, академик НАН Армении, В. В. ДОВЛАТЯН, академик НАН Армении (зам. отв. редактора), В. О. КАЗАРЯН, академик НАН Армении, К. Г. КАРАГЕЗЯН, академик НАН Армении, Ф. Т. САРКИСЯН, академик НАН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, академик НАН Армении (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, академик НАН Армении, Ю. Г. ШУКУРЯН, академик НАН Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик НАН Армении



# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ա. Մ. Գրիգորյան – Քվադրատային տարածություններ                                                      | 3  |
| Մ. Գ. Նահապետյան, Վ. Գ. Ուշակով – Հակադարձ խնդիրներ որոշ միայնար համակարգերում                     | 9  |
| Գ. Վ. Սիրայեյան, Զ. Ս. Միրայեյան–Միտտազ – Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների մի դասի լիովին մոնոտոնությունը | 16 |
| Վ. Հ. Միրայեյան – Արելյան խմբերի ընդլայնումների նույնությունների մասին                             | 20 |

## ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Վ. Կ. Բրուտյան, Վ. Վ. Սարգսյան – Կառավարելի համակարգերի գծային սինթեզի տեսության մի ֆանի ընդհանրացումներ | 24 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Գ. Հ. Խաչատրյան, Կ. Ս. Հովակիմյան, Կ. Մ. Նիկողոսյան, Ա. Լ. Վարդապետյան – Սփռված սպեկտրով ազդանշանի հզորության սպեկտրալ խտությունը | 32 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Լ. Ա. Աղալովյան, Գ. Ս. Հարությունյան – Առաձգականության փոփոխական բնութագրիչներ ունեցող հեծանների համար Բեռնուլիի վարկածի կիրառելիության մասին | 38 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ԷԼԵԿՏՐԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Վ. Ա. Տոնոյան, Ն. Կ. Սելջումյան – Ուղղահայաց կիսաանվերջ ճեղքով պիեզակերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության մի սիմետրիկ խնդրի մասին | 44 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ՖԻԶԻԿԱ

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ա. Ժ. Խաչատրյան – Էլեկտրոնի ցրումը կամայական կարճ ազդող պոտենցիալներից բաղկացած վերջավոր շղթայի վրա | 49 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ՀԻՂՐԱՎԼԻԿԱ

|                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Կ. Խ. Հովսեփյան, Հ. Վ. Թոքմաչյան, Հ. Ս. Հովհաննիսյան, Ռ. Մ. Ռաֆայելյան – Պոմպի շարժիչի անջատման ժամանակ առաջացած անցումային գործընթացի պարամետրերը որոշելու մոտավոր առընչությունները | 54 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ԵՐԿՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ռ. Ա. Մանդալյան, Ա. Ս. Սահակյան – Դիլիջանի հանգստության ալորիթմի բերրափարների առաջացման բնույթի մասին | 58 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ռ. Ա. Զաքարյան, Պ. Ա. Ղազարյան, Ա. Ս. Աղաբալյան, Կ. Գ. Ղարապետյան – Ցիկլիկ ԱՄՆ-ի սինթեզի և "myc" գենի տրանսկրիպցիայի ինհիբիցիայի խթանումը Cα – եպ-ՌՆԹ-ով Պլիսեի լիմֆոսարկոմայի բջիջներում | 63 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

|                                                                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ա. Ս. Հովհաննիսյան, Լ. Վ. Գասպարյան, Ա. Ի. Վարդանյան, Ռ. Ս. Ավագյան, Ս. Ս. Հովհաննիսյան – Էրիթրոցիտների ռեակտիվությունը միլիմետրային էլեկտրամագնիսական ալիքների նկատմամբ սրտի իշեմիկ հիվանդության ընթացքում | 67 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ի. Բ. Սելիքսեթյան, Հ. Մ. Չիլինգարյան, Օ. Հ. Նազարյան – Օրթոֆոսֆատների հայտնաբերումը մարդու ուղեղի նյարդային կառուցվածքներում | 71 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ե. Վ. Պապոյան, Վ. Բ. Ֆանարյան – Կարմիր կորիզ կեղևային կապերի նեյրոնային վերլուծություն | 74 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|



## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- А. М. Григорян* — Квазилинейные пространства ..... 3
- А. Г. Нагапетян, В. Г. Ушаков* — Обратные задачи в некоторых одноканальных системах ..... 9
- Г. В. Микаелян, З. С. Микаелян* — Вполне монотонность одного класса функций типа Миттаг-Леффлера ..... 16
- В. Г. Микаелян* — О тождествах расширений абелевых групп ..... 20

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- В. К. Брутян, В. В. Саргсян* — Некоторые обобщения теории линейного синтеза управляемых систем ..... 24

### ИНФОРМАТИКА

- Г. Г. Хачатрян, К. С. Овакимян, К. М. Никогосян, А. Л. Вартапетян* — Спектральная плотность мощности шумоподобных сигналов ..... 32

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Л. А. Агаловян, Г. С. Арутюнян* — О применении гипотезы Бернулли для балок с переменными упругими характеристиками ..... 38

### ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

- В. С. Тоноян, Нарек С. Мелкумян* — Об одной симметричной задаче электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом ..... 44

### ФИЗИКА

- А. Ж. Хачатрян* — Рассеяние электрона на конечной цепочке из произвольных короткодействующих потенциалов ..... 49

### ГИДРАВЛИКА

- К. Х. Овсепян, О. В. Токмаджян, О. С. Оганесян, Р. М. Рафаэлян* — Приближенные зависимости для оперативного определения параметров переходного процесса при отключении привода насоса ..... 54

### ГЕОЛОГИЯ

- Р. А. Мандалян, А. С. Саакян* — О природе горючих сланцев Дилижанского месторождения ..... 58

### МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

- Р. А. Захарян, П. А. Казарян, А. С. Агабалян, К. Г. Карагезян* — Стимуляция  $\text{Ca}^{2+}$ -зсРНК синтеза цАМФ и ингибирование транскрипции гена "тус" в клетках лимфосаркомы Плиссе ..... 63

### БИОФИЗИКА

- А. С. Оганесян, Л. В. Гаспарян, С. И. Вардамян, Р. С. Авакян, С. С. Оганесян* — Реактивность эритроцитов к миллиметровым электромагнитным волнам при ишемической болезни сердца ..... 67

### МОРФОЛОГИЯ

- И. Б. Меликсетян, А. М. Чилингарян, О. А. Назарян* — Выявление ортофосфатов в нервных структурах мозга человека ..... 71

### ФИЗИОЛОГИЯ

- Е. В. Палоян, В. В. Фанарджян* — Нейронный анализ рубро-корковых связей ..... 74



# CONTENTS

## MATHEMATICS

|                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>A. M. Grigorian</i> – Quasilinear spaces .....                                                                         | 3  |
| <i>M. G. Nahapetian, V. G. Ushakov</i> – Reserve problems in some single server quencing systems .....                    | 9  |
| <i>G. V. Mikaelian, Z. S. Mikaelian</i> – On complete'y monotonicity of one class of Mittag-Lefflier-type-functions ..... | 16 |
| <i>V. G. Mikaelian</i> – On identities of extensions of Abelian groups .....                                              | 20 |

## APPLIED MATHEMATICS

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>V. K. Brutian, V. V. Sargssian</i> – Some generalization of the linear theory of the operate systems ..... | 24 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## INFORMATION THEORY

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>G. H. Khachatryan, K. S. Hovakimian, K. M. Nikogossian, A. L. Vartapetian</i> – Power spectrum density of DS spread spectrum signals ..... | 32 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## THEORY OF ELASTICITY

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>L. A. Aghalovian, G. S. Harutunian</i> – On applicability of B-moulli hypothesis for beams with variable elastic characteristics ..... | 38 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## THEORY OF ELECTROELASTICITY

|                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>V. S. Tonoyan, Narek S. Melkumian</i> – On one symmetric electroelasticity problem for a piezoceramical semiplane with a vertically infinite crack ..... | 44 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## PHYSICS

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>A. Gh. Khachatryan</i> – Electron scattering of the finite chain from arbitrary $\delta$ -potentials ..... | 49 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## HYDRAULICS

|                                                                                                                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>K. Ch. Hovsepian, H. V. Tolnadjyan, H. S. Hovhanissian, R. M. Rafaelian</i> – The approximate dependences to determine the parametres of transitive process under the surcumstances of switched off pump's drive ..... | 54 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## GEOLOGY

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>R. A. Mandalian, A. S. Sahakian</i> – On the nature of the oil-shales in Dilijan ..... | 58 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## MOLECULAR BIOLOGY

|                                                                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>R. A. Zakharian, P. A. Kazarian, A. S. Aghabalian, K. G. Karagvozian</i> – Stimulation by $Ca^{2+}$ -ds-RNA sinthesis of cAMP and inhibition of "myc" gene transcription in the cells of Plysse lymphosarcoma ..... | 63 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## BIOPHYSICS

|                                                                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>A. S. Oganessian, I. V. Gasparian, S. I. Vardanian, R. S. Avakian</i> – The reactivity of erythrocytes to electromagnetic millimeter waves during ischemic heart disease ..... | 67 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## MORPHOLOGY

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>I. B. Meliksetian, A. M. Chilingarian, O. H. Nazarian</i> – Revealing of ortophosphates in the nervous structures of human brain ..... | 71 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## PHYSIOLOGI

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>E. V. Papoyan, V. V. Fanardjian</i> – Unit analysis of rubro-cortical connections ..... | 74 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|

Сдано в набор 10.04.97. Подписано к печати 05.05.97.

Формат 70x1081/16. Бумага № 1. Высокая печать. Печ. лист 4,9.

Усл. печ. л. 6,86. Тираж 200. Заказ № 1.

Цена договорная.

Адр. ред. 375019, Вреван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13, т. 37-36-05.

Издательство "Гитутюн" НАН РА

375019, Вреван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.



МАТЕМАТИКА

УДК 512 642

А.М.Григорян

Квазилинейные пространства

(Представлено академиком НАН Армении А.Б.Нерсисяном 17/V 1996)

В работе (1) было предложено рассмотрение квазилинейных систем, которые позволяют не только строить новые методы, но и объединить и классифицировать имеющееся к настоящему времени многообразие линейных и нелинейных методов (и систем), широко используемых во многих областях цифровой обработки сигналов и изображений (2,3). Такие системы представляют собой гомоморфные отображения, определяемые в пространствах с алгебраической структурой, названной *квазилинейным пространством*. С их помощью было выделено основополагающее свойство суперпозиции, присущее многим нелинейным операциям, и определена та минимальная алгебраическая структура, которая включает в себя линейные пространства и многие совокупности множеств и функций, традиционно считающихся нелинейными.

1. *Квазилинейное пространство* элементов определяется над некоторым множеством с бинарной операцией, подчиняющейся заданным аксиомам группы или моноида (4).

Пусть множество  $K$  есть *моноид*, т.е. ассоциативное множество с единичным элементом. Будем называть  $K$  множеством скаляров. Суть построения квазилинейного пространства состоит в ослаблении условий линейного пространства в степени, достаточной для получения таких границ пространства, которые включили бы многие полезные нелинейные образования элементов. В то же время мы постараемся сохранить максимум возможного в структуре линейного пространства (5).

**Определение 1.** Непустое множество  $E$  элементов  $x, y, z, \dots$  называется *квазилинейным пространством (над моноидом  $K$ )*, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило  $\rho$ , посредством которого любым двум элементам  $x$  и  $y$  множества  $E$  ставится в соответствие третий элемент  $z$  из этого множества, обозначаемый через  $x \rho y$ , т.е.  $z = x \rho y$ .



II. Имеется правило  $\tau$ , посредством которого любому элементу  $x$  множества  $E$  и любому числу  $k \in K$  ставится в соответствие элемент  $u$  из  $E$ , обозначаемый через  $k\tau x$ , т.е.  $u = k\tau x$ .

III. Эти правила удовлетворяют следующим шести аксиомам:

$$1^\circ. x\rho y = y\rho x;$$

$$2^\circ. x\rho(y\rho z) = (x\rho y)\rho z;$$

$$3^\circ. \text{ в } E \text{ существует такой элемент } 0, \text{ что } x\rho 0 = x \text{ для всех } x \in E;$$

$$4^\circ. 1\tau x = x \text{ для каждого элемента } x \in E;$$

$$5^\circ. k_1\tau(k_2\tau x) = (k_1k_2)\tau x \text{ для всех чисел } k_1, k_2 \in K;$$

$$6^\circ. k\tau(x\rho y) = (k\tau x)\rho(k\tau y).$$

Квазилинейное пространство  $E$  с операциями  $\rho$  и  $\tau$  будет обозначаться через  $E(\rho, \tau; K)$ .

2. Предлагаемая концепция квазилинейных пространств связывает известную концепцию линейных (или векторных) пространств с пространствами, которые сильно отличаются от линейных пространств. Можно сказать, что понятие квазилинейного пространства совпадает с линейным пространством, если множество скаляров  $K$  есть числовое поле  $S(g)$  (где  $g$  ее вторая бинарная операция) и к перечисленным шести аксиомам добавить следующие две аксиомы:

$$7^\circ. \text{ для каждого элемента } x \text{ существует такой элемент } -x, \text{ что } x\rho(-x) = 0;$$

$$8^\circ. (k_1gk_2)\tau x = (k_1\tau x)\rho(k_2\tau x) \text{ для всех } k_1, k_2 \in S(g).$$

Следует отметить следующие три обстоятельства в пользу квазилинейных пространств. Во-первых, так как поле имеет достаточно регулярную структуру, невозможно построение полей с произвольным числом элементов — конечные поля существуют только, когда число элементов равно степени простого числа. С другой стороны, моноиды (и группы) с произвольным числом элементов легко строятся. Во-вторых, в теории обработки изображений, которые описываются положительными дискретными функциями многих переменных, операция противоположного элемента (отрицательного изображения) вообще лишена смысла. Потому здесь нет необходимости в аксиоме  $7^\circ$ . И наконец, для многих целей цифровой обработки сигналов и изображений аксиома  $8^\circ$ , в отличие от других аксиом линейного пространства, требует выполнения довольно сильных условий, поскольку жестко связывает алгебраическую структуру множества скаляров (а выбор таких может быть различным) с аддитивной структурой самого пространства.

Эту аксиому мы назовем аксиомой существования прямой линии. Рассмотрим аксиому  $8^\circ$ , в которой для упрощения записи будем считать, что  $g = +$ . Так как  $1 \in S(+)$ , следующее соотношение  $1\tau x = (k\tau x)\rho((1-k)\tau x) = x$  имеет место для любого  $x \in E$  и всех  $k \in S(g)$ .



Для фиксированного элемента  $x$  из  $E$  рассмотрим функцию  $l(k)$  на  $S(+)$ , график которой  $G(k) = G_x(k) = (k, l(k)) = (k\alpha, (1-k)\alpha)$ .

На плоскости  $E \times E$  график  $G(k)$  этой функции представляет собой прямую, пересекающую оси координат в точках  $(0, x)$  и  $(x, 0)$ . Таким образом, в линейном пространстве  $E$  каждый элемент  $x$  индуцирует прямую, пересекающую оси координат на расстоянии  $x$  от центра:  $x \Rightarrow l_x(k)$ . Другими словами, можно сказать, что линейное пространство это такое множество  $E$ , для которого имеет место следующее утверждение: для заданного элемента  $x \in E$  все точки соответствующей прямой  $l_x(k)$  лежат в произведении  $E \times E$ . Более того, вместе с  $l_x(k)$  в  $E \times E$  лежат и все прямые, параллельные первой. И мы можем рассматривать операции  $\rho$  и  $\tau$  на  $E$  как операции параллельных переносов прямых в  $E \times E$ . Обозначим через  $L$  рассмотренное семейство параллельных прямых  $L = \{l_x; x \in E\}$ , полностью лежащих в произведении линейных пространств  $E \times E$ . В силу приведенных рассуждений, аксиому  $8^\circ$  будем называть *аксиомой существования прямой (или семейства параллельных прямых)*. Такая интерпретация аксиомы  $8^\circ$  полностью согласуется с шестью аксиомами линейного пространства.

При анализе аксиомы  $8^\circ$  линейного пространства мы естественно приходим к мысли ее замены или обобщения. Действительно, можно попытаться ввести такую аксиому, которая позволяла бы рассматривать произведение пространств  $E \times E$  как множество, образованное семейством подобных кривых, отличных от прямых. Для этого возьмем некоторую бесконечную в обе стороны кривую  $\tilde{l}_x$ , проходящую через точки  $(0, x), (x, 0) \in E \times E$ . И рассмотрим соответствующее ей семейство подобных кривых  $\tilde{l}_y$  (кривых, образованных гомотопиями с центром в начале координат и положительными (или произвольными, когда берется числовое поле  $S$ ) коэффициентами),  $\tilde{L} = \{\tilde{l}_x; x \in E \setminus \{0\}\}$ . Возникает вопрос — как записать аксиому  $8^\circ$ , чтобы все кривые  $\tilde{l}_y$  лежали бы в  $E \times E$ ? Нетрудно показать, что для этого нужно, чтобы для всех  $k \in S$  выполнялось тождество:  $x = (k_1\alpha)\rho(\tilde{l}(k_1)\alpha)$ . Будем считать, что  $\tilde{l}_x(k) = \tilde{l}(k)\alpha$ , где  $\tilde{l}(k)$  бесконечная в обе стороны кривая пересекает оси координат в точках  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$ , т.е.  $\tilde{l}(0) = 1, \tilde{l}(1) = 0$ . Поэтому соответствующая аксиома  $8^\circ$  должна принять вид

$$(k_1 g k_2)\alpha = (k_1\alpha)\rho\left((k_2 g \tilde{k}_1)\alpha\right), \quad \tilde{k}_1 = (k_1 g (-1))g(\tilde{l}(k_1)), \quad (1)$$

для всех  $k_1, k_2 \in S(g)$  и любого  $x \in E$ . В случае числового поля  $S(+)$  такая аксиома записывается в виде  $(k_1 + k_2)\alpha = (k_1\alpha)\rho\left((k_2 + \tilde{k}_1)\alpha\right)$ .



$\bar{k}_1 = k_1 - 1 + \bar{l}(k_1)$  для всех  $k_1, k_2 \in S(+)$  и любого  $x \in E$ .

Эту аксиому будем обозначать как аксиому  $\bar{8}^\circ$  и называть ее аксиомой существования бесконечной кривой заданного вида. А для заданного семейства подобных кривых  $\bar{L}$  квазилинейное пространство, дополненное аксиомами  $7^\circ$  и  $\bar{8}^\circ$ , назовем  $\bar{L}$ -пространством. Ясно, что когда  $\bar{L}$  есть семейство  $L$  параллельных прямых, рассмотренных выше, то  $L$ -пространство совпадает с линейным пространством.

В квазилинейных пространствах, как и в линейных пространствах, можно ввести понятия линейной независимости элементов, базиса и гомоморфизма. Все они связаны с понятием подпространства, подобно такому для линейного пространства.

3. Приведем примеры квазилинейных пространств.

*Пример 1 (пространства функций).* Совокупности  $F$  действительных  $n$ -мерных функций  $f(x), g(x), \dots$ , определенных на множестве  $X$  с областью значений  $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ , вместе с операциями  $\rho = \max(\vee)$  или  $\min(\wedge)$  и умножением  $\tau = x$  на элементы группы  $R_+ = (0, +\infty)$ : являются квазилинейными пространствами  $F(\vee, x; R_+)$  и  $F(\wedge, x; R_+)$ , соответственно.

*Пример 2 (n-мерное пространство).* Множество упорядоченных совокупностей  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n), \dots$  из  $n$  элементов  $x_i, y_i, \dots, i = 1 \div n$ , есть квазилинейное пространство с операциями поточечного сложения и умножения на константу.

*Пример 3 (полиномы).* Множество  $P_n$  алгебраических полиномов степени  $< n$  с неотрицательными коэффициентами есть квазилинейное пространство  $P_n(+, x; R_+)$ .

*Пример 4 (решетки).* Пусть  $\mathcal{P}_\vee$  и  $\mathcal{P}_\wedge$  есть  $\vee$ - и  $\wedge$ -полурешетки, т.е. упорядоченные множества с определенным коммутативным и ассоциативным бинарным отношением  $\leq$ , в которых произвольные элементы  $x$  и  $y$  имеют соответственно верхнюю точную грань (или  $\sup$ )  $x \vee y$  и нижнюю точную грань (или  $\inf$ )  $x \wedge y$ . Операции  $\vee$  и  $\wedge$  являются бинарными операциями в  $\mathcal{P}_\vee$  и  $\mathcal{P}_\wedge$ .

Если полурешетки  $\mathcal{P}_\vee$  и  $\mathcal{P}_\wedge$  содержат наименьший и наибольший (универсальные) элементы,  $O$  и  $I$ , тогда выполняются следующие соотношения: 1)  $x \vee y = y \vee x$ , 2)  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ , 3)  $x \vee O = x$ , и 1)  $x \wedge y = y \wedge x$ , 2)  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ , 3)  $x \wedge I = x$ , для всех  $x, y \in \mathcal{P}$ . Существуют различные полурешетки (<sup>7</sup>), в которых мы можем определить операцию умножения и получить квазилинейные пространства. Например, если  $\mathcal{P}_\wedge$  есть полурешетка  $n$ -мерных полунепрерывных сверху числовых функций, тогда для обычного умножения  $\tau = x$  на скаляр из группы  $K$  мы имеем: 4)  $1\tau = x$ ; 5)  $k_1 \tau(k_2 \tau) = (k_1 k_2) \tau$ ; 6)  $k \tau(x \vee y) = (k \tau) \vee (k \tau)$ . Пусть  $Z^*$  будет множеством положительных



чисел и  $x \leq y$  означает, что  $x$  делит  $y$ . Тогда, в множестве  $Z^*$  имеет место операция умножения на скаляр. Для заданного топологического пространства  $P$  семейство  $\mathcal{F}$  всех открытых множеств является решеткой и имеет место операция гомотопии (подобия),  $k\tau X = kX$ , для всех  $k \in Z^*$ .

Пусть  $P$  является дистрибутивной решеткой, то есть  $P$  есть одновременно  $\vee$ - и  $\wedge$ -полурешетка и следующие равносильные тождества имеют место:  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  и  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ , для всех  $x, y, z \in P$ . Тогда можно рассматривать  $P$  как квазилинейное пространство с операциями  $(\vee, \wedge)$  или  $(\wedge, \vee)$ .

*Пример 5 (подмножества).* Совокупности подмножеств  $X, Y, Z, \dots$  некоторого множества  $A$ , замкнутые относительно операций объединения и пересечения подмножеств и преобразования подобия:  $X \rho Y = X \cup Y (X \cap Y)$  и  $k\tau X = kX = \{kx; x \in X\}$ ,  $k \in K$ , являются соответственно квазилинейными пространствами.

*Пример 6 (свертка подмножеств).* Пусть  $K$  есть группа скаляров с бинарной операцией  $g$ . Тогда множество семейств  $\mathcal{T} = \{T_a\}_{a \in K}$ ,  $\mathcal{G} = \{G_a\}_{a \in K}, \dots$  подмножеств некоторого множества  $A$ , замкнутое относительно преобразования подобия и операции свертки множеств, которую мы вводим в виде следующего объединения:  $\mathcal{V} = \{V_a\} = \mathcal{T} \rho \mathcal{G} = \left\{ \bigcup_{b \in K} \{T_{ag(-b)} \cap G_b\} \right\}$  составляют квазилинейное пространство  $\mathcal{M}(\rho, x; K)$ .

*Пример 7 (булевы функции).* Пусть  $\oplus$  есть операция сложения по модулю 2. Семейство  $n$ -мерных булевых функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  с операциями сложения булевых функций и умножения на неотрицательные целые:  $f \rho g = f \oplus g$  и  $k\tau f = k \otimes f = f \oplus f \dots \oplus f$  ( $k$  раз), если  $k \geq 1$ , является квазилинейным пространством с двумя логическими операциями.

Возникает следующий вопрос — можно ли всякое квазилинейное пространство дополнить до линейного? Ответ отрицательный, и для этого достаточно обратиться к примеру 1. Например, для квазилинейного пространства  $F(\vee, x; R)$  требование аксиомы 8° запишется в виде  $(k_1 + k_2)f = (k_1 f) \vee (k_2 f)$ , что невыполнимо для  $k_1 \neq 0$  или  $k_2 \neq 0$ .

Вышеприведенные примеры квазилинейных пространств показывают, что различные традиционно считающиеся нелинейными пространства элементов (функций, подмножеств) с разными операциями (арифметическими, логическими, теоретико-множественными) объединены общим понятием квазилинейного пространства.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении



## Մ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

### Քվադրիգծային տարածություններ

Նկարագրվում են քվադրիգծային տարածություններ, որոնք թույլատրում են ընդգրկել բազմաչափ տվյալների, դիսկրետ և անընդհատ ֆունկցիաների տարբեր համախմբություններ: Մասնավորապես նկարագրվում են ազդանշանների և պատկերների բազմաթիվ ձևավորումներ, որոնք օգտագործվում են մաթեմատիկական մորֆոլոգիայում: Նկարագրված քվադրիգծային տարածությունները թույլ են տալիս վերոհիշյալ գոյացությունները դիտարկել որպես հանրահաշվական կառուցվածք ունեցող տարածություններ: Բերված է գծային տարածության 8-րդ աբսիսի ընդհանրացումը:

### ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> A. Grigorian, S. Agaian, J. Astola, Proc. SPIE's Symposium on Electronic Imaging: Science and Technology, February 1995, San-Jose, 1995. <sup>2</sup> E. R. Dougherty, J. Astola, SPIE Press, v. TT16 (1994). <sup>3</sup> I. Pitas, Venetsanopoulos, Nonlinear Digital Filters, Boston: Kluwer Academic Publisher, 1990. <sup>4</sup> М. Каргополов, И. Мерзляков, Основы теории групп, Наука, 1972. <sup>5</sup> В. Ильин, Е. Поздняк, Линейная алгебра, 6-ое изд. М., Наука, 1974. <sup>6</sup> J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, London, Academ Press, 1988. <sup>7</sup> Г. Биркгоф, Теория решеток, М., Наука, 1984.



МАТЕМАТИКА

УДК 517

М.Г.Нагапетян, В.Г.Ушаков

Обратные задачи в некоторых одноканальных системах

(Представлено академиком НАН Армении Р.Р.Варшамовым 26/VI 1996)

1. Рассматриваются: а) модель  $M|G|1|\infty$  с параметром  $a > 0$  поступления и с функцией распределения (ФР)  $B(x)$ ,  $B(+0) = 0$ , времен обслуживания,

$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ ,  $\beta_1 = \int_0^\infty x dB(x)$ ,  $a\beta_1 < 1$ . Дисциплины обслуживания FIFO и LIFO;

б) модель  $GI|M|1|\infty$  с ФР  $A(x)$ ,  $A(+0) = 0$ , рекуррентного потока и с параметром  $b > 0$  обслуживания,

$\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA(x)$ ,  $\alpha_1 = \int_0^\infty x^1 dA(x)$ ,  $\alpha_1\beta > 1$ . Дисциплины обслуживания FIFO и LIFO;

в) модель  $M_r|G_r|1|\infty$  с параметрами  $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$  поступления и с ФР  $B_1(x), \dots, B_r(x)$  времен обслуживания вызовов приоритетов  $1, \dots, r$  (1-вызовов, ..., r-вызовов),  $B_i(+0) = 0$ ,

$\beta_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_i(x)$ ,  $\beta_{i1} = \int_0^\infty x dB_i(x)$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Дисциплина обслуживания — абсолютный приоритет. Разновидности — дообслуживание, обслуживание заново, потеря прерванного вызова. Внутри потоков — дисциплина FIFO. Загрузка первыми  $i$  потоками —  $\rho_{i1}$  (см.(1)) и

$\rho_{r1} < 1$ . Пусть  $f(s)$  и  $v(s)$  — преобразования Лапласа — Стильеса (ПЛС) от стационарных ФР выходящего потока и виртуального времени пребывания вызова. В модели  $M|G|1|\infty$  (2)

$$f(s) = \left[ a\beta_1 + (1 - a\beta_1) \frac{a}{s + a} \right] \beta(s), \quad (1)$$



$$v(s) = \begin{cases} \frac{(1 - a\beta_1)s\beta(s)}{s - a + a\beta(s)}, \text{ FIFO,} \\ \left[ (1 - a\beta_1) + \frac{a(1 - \pi(s))}{s + a - a\pi(s)} \right] \beta(s), \text{ LIFO,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $\pi(s)$  — решение уравнения  $\pi(s) = \beta(s + a - a\pi(s))$ . В модели  $GI/M/1/\infty$  (2)

$$f(s) = \left[ \rho - b(1 - \rho) \frac{\alpha(s) - \rho}{s - b(1 - \rho)} \right] \frac{b}{s + b}, \quad (3)$$

$$v(s) = \begin{cases} \frac{b(1 - \rho)}{s + b(1 - \rho)}, \text{ FIFO,} \\ v(s) = [1 - \rho + \rho\pi(s)] \frac{b}{s + b}, \text{ LIFO,} \end{cases} \quad (4)$$

где  $\pi(s) = \frac{b[1 - \gamma(s)]}{s + b[1 - \gamma(s)]}$ ,  $\gamma(s) = \alpha(s + b - b\gamma(s))$ ,  $\rho = \gamma(0)$ . Пусть  $f_i(s)$  и

$v_i(s)$  имеют тот же смысл, что и  $f(s)$  и  $v(s)$ , но для  $i$ -вызовов. В модели  $M_r/G_r/1/\infty$  (1,2)

$$f_i(s) = h_i(s)[1 - (1 - \rho_{i1})\tau_i(s)], \quad (5)$$

$$v_i(s) = \frac{\mu_{i+1}(s)(1 - \rho_{i1})}{s - a_i + a_i h_i(s)} h_i(s) \quad (6)$$

(дообслуживание и обслуживание заново);

$$f_i(s) = m_i(s, 0) \left[ m_i(0, s) - m_i(a_i, s + a_i) \tau_i(s) [1 - \rho_{i-1} - a_i \sigma_{i-1}^{-1} (1 - \beta_i(\sigma_{i-1}))] \right], \quad (7)$$

$$v_i(s) = \frac{\mu_{i+1}(s)(1 - \rho_{i1})}{s - a_i + a_i h_i(s)} m_i(s, 0) \quad (8)$$

(потеря). Здесь  $\pi_i(s)$  и  $h_i(s)$  — ПЛС от ФР и  $i$ -периода и  $i$ -цикла (1),  $\mu_{i+1}(s) = s + \sigma_i - \sigma_i \pi_i(s)$ ,  $\mu_i(s) \equiv s$ ,  $\sigma_i = a_1 + \dots + a_i$ ,  $\sigma_0 = 0$ ,  $m_i(s_1, s_2) = \beta_i(s_1 + \sigma_{i-1}) + \sigma_{i-1}(s_1 + \sigma_{i-1})^{-1} (1 - \beta_i(s_1 + \sigma_{i-1})) \pi_{i-1}(s_2)$ ,  $\tau_i(s) = a_i^{-1} \mu_i(a_i) \times \mu_i(s) \mu_i^{-1}(s + a_i)$ ,



$$h_i(s) = \begin{cases} \beta_i(\mu_i(s)), & \text{дообслуживание,} \\ \beta_i(s + \sigma_{i-1}) \left[ 1 - \frac{\sigma_{i-1} \pi_{i-1}(s)}{s + \sigma_{i-1}} (1 - \beta_i(s + \sigma_i)) \right]^{-1}, & \text{обслуживание} \\ m_i(s, 0), & \text{заново,} \\ & \text{потеря.} \end{cases}$$

Решается задача восстановления параметров моделей по ФР выходящего потока и виртуальных времен пребывания вызова. Близкая задача для модели  $M|G|1|\infty$  решена в (3).

2. В модели  $M|G|1|\infty$  из (1) имеем:  $a = -(f(0))^{-1}$ . Из (2) при дисциплинах FIFO и LIFO

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v(s)}{f(s)} = \frac{1 - a\beta_1}{a\beta_1},$$

откуда находим  $\beta_1$ . Далее, из (1) получаем  $\beta(s)$ .

Алгоритм восстановления дисциплины в модели  $M|G|1|\infty$  из двух: FIFO и LIFO. Из определения  $\pi(s)$ , когда уже восстановлены  $a, \beta_1, \beta(s)$ , имеем  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \pi(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(s) \stackrel{def}{=} \pi_\infty < 1$ . Пусть  $\omega_c(s)$  — ПЛС абсолютно непрерывной компоненты ФР с ПЛС  $\omega(s) = (v(s) / \beta(s))$ . Тогда: 1) при  $\omega_* = (1 - a\beta_1)a(1 - \pi_\infty)$  имеем дисциплину FIFO; 2) при  $\omega_* = a(1 - \pi_\infty)$  имеем дисциплину LIFO, где  $\omega_* = \lim_{s \rightarrow +\infty} s\omega_c(s)$ .

По  $f(s)$  и  $v(s)$  при обеих дисциплинах  $a$  и  $\beta_1$  одинаковы. Приравняем значения  $v(s)$  из (2). В равенстве

$$\frac{(1 - a\beta_1)s}{s - a + a\beta(s)} = (1 - a\beta_1) + \frac{a(1 - \pi(s))}{s + a - a\pi(s)}$$

в обеих частях стоят ПЛС от неотрицательных случайных величин (СВ), каждая из которых — смесь абсолютно непрерывной СВ и СВ, равной 0. Используя единственность разложения Лебега, получаем

$$\frac{(1 - a\beta_1)a(1 - \beta(s))}{s - a + a\beta(s)} = \frac{a(1 - \pi(s))}{s + a - a\pi(s)},$$

а пределы правой и левой частей равенства, помноженные на  $s$ , при  $s \rightarrow \infty$  дают числа  $a(1 - \pi_\infty) > (1 - a\beta_1)a(1 - \pi_\infty)$ , откуда следует утверждение.

Решение обратной задачи не всегда существует.

Причины. 1.  $f(s)$  и  $v(s)$  (см. (1) и (2)) нельзя выбирать независимо. 2.  $\beta(s)$ , найденная по (1), не всегда есть ПЛС от отрицательной СВ.



**Примеры.** 1. ФР с ПЛС  $f(s)$  и  $v(s)$  не могут быть неразложимы. Для  $v(s)$  это следует из (4), а для  $f(s)$

$$f(s) = \beta(s) \left( a\beta_1 + (1 - a\beta_1) \frac{a}{s+a} \right) = \beta(s) \left[ (a\beta_1)^{1/2} + \left( 1 - (a\beta_1)^{1/2} \right) g(s) \right]^2,$$

где легко видеть, что

$$g(s) = \frac{(a\beta_1)^{1/2}}{1 - (a\beta_1)^{1/2}} \left[ \frac{(s + \beta_1^{-1})^{1/2} - (s + a)^{1/2}}{(s + a)^{1/2}} \right] -$$

ПЛС от абсолютно непрерывной СВ.

В различных метриках разложения ФР всюду плотны в множестве всех ФР (5-7) и решение не существует для широкого класса ФР.

2. При дисциплине FIFO  $f(s)$  и  $v(s)$  не могут быть ПЛС от распределений Эрланга порядка  $k$ . Если  $f(s) = \frac{(ka)^k}{(s + ka)^k}$ , то

$$\beta(s) = \frac{(s + a)(ka)^k}{a(s\beta_1 + 1)(s + ka)^k}, \quad a\beta_1 < 1.$$

Нетрудно показать, что найдется  $M$  такое, что  $(-1)^M \beta^{(M)}(0) < 0$ . Тогда  $\beta(s)$  не есть ПЛС от неотрицательной СВ.

Пусть  $v(s) = \left[ \frac{v}{s+v} \right]^k$ . Достаточно рассмотреть случай  $k=2$ . При

$k=2$  функция  $\beta(s) = \frac{(v+a)^2}{(s+v+a/2)^2 + (v+a)^2 - (a/2+v)^2}$  допускает

обращение  $b(x) = \left( (v+a)^2 - \left( \frac{a}{2} + v \right)^2 \right)^{-1/2} \exp\left(-\left(v + \frac{a}{2}\right)x\right) \sin\left(\left( (v+a)^2 - \left( \frac{a}{2} + v \right)^2 \right)^{1/2} x\right) (v+a)^2$ . Но  $b(x)$  принимает отрицательные значения и не есть плотность.

Задача восстановления параметров может иметь решение.

**Пример.** При дисциплине FIFO ФР  $V(x)$  может быть гиперэкспоненциальной ФР:  $V(x) = p(1 - e^{-v_1 x}) + (1 - p)(1 - e^{-v_2 x})$ . Для разрешимости обратной задачи  $f(s)$  должно иметь вид

$$\tau(s) = \left[ 1 - \frac{v}{\beta} + \frac{v}{\beta} \frac{a}{s+a} \right] \frac{\beta}{v} \left[ \frac{As_1}{s+s_1} + \frac{Bs_2}{s+s_2} \right],$$



где

$$s_{1,2} = \frac{a+v_1+v_2}{2} \pm \left( \left[ \frac{a+v_1+v_2}{2} \right]^2 - \frac{\beta}{v} \right)^{1/2},$$

$$A = \frac{s_1 \alpha - v_1 v_2}{s_1 (s_1 - s_2)}, \quad B = \frac{v_1 v_2 - s_2 \alpha}{s_2 (s_1 - s_2)},$$

$$\alpha = p v_1 + (1-p) v_2, \quad v = \alpha a + v_1 v_2, \quad \beta = (v_1 + a)(v_2 + a).$$

Достаточно показать, что  $s_1 > 0$ ,  $s_2 > 0$ ,  $A > 0$ ,  $B > 0$ . Имеем  $A + B = v / \beta$  и

$$\left[ \frac{a+v_1+v_2}{2} \right]^2 - \frac{v_1 v_2 \beta}{v} = \frac{(a+v_1+v_2)^2 (v - 4v_1 v_2 \beta)}{4v}.$$

Оценим числитель последнего выражения

$$\begin{aligned} (a+v_1+v_2)^2 (v - 4v_1 v_2 \beta) &> (a+v_1+v_2)^2 (v_1 a + v_1 v_2) - 4v_1 v_2 \beta = \\ &= v_1 (a+v_2)(a+v_1-v_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Из определения  $A$  и  $B$ :  $A + B = v_1 v_2 s_1^{-1} s_2^{-1}$ . Далее,  $s_1 s_2 = \frac{v_1 v_2 \beta}{v}$ . Неравенства  $A > 0$ ,  $B > 0$  нетрудно вывести из определения  $A$  и  $B$ .

**Алгоритм** восстановления параметров в модели  $GI|M|1|\infty$ . Из (3) имеем

$$\alpha(s) = \rho + \frac{\rho[s - b(1-\rho)]}{b(1-\rho)} - \frac{(s+b)(s - b(1-\rho))}{b^2(1-\rho)} f(s).$$

Константы  $\rho$  и  $b$  находим из соотношений

$$v_1 = -v'(0) = [b(1-\rho)]^{-1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v(s)}{f(s)} = \frac{1-\rho}{\rho}.$$

**Алгоритм** восстановления дисциплины в модели  $GI|M|1|\infty$ . При дисциплине FIFO  $v(s)$  — ПЛС от показательной ФР. Можно ли получить такую же  $v(s)$  при дисциплине LIFO? Предположим, что можно:

$$\left[ 1 - \rho + \rho \pi(s) \right] \times \frac{s}{b+s} = \frac{v}{v+s}. \quad \text{Отсюда} \quad 1 - \rho + \rho \pi(s) = \frac{v}{b} + \left( 1 - \frac{v}{b} \right) \frac{v}{v+s},$$

$\pi(s)$  — ПЛС от абсолютно непрерывной СВ, поэтому в силу единственности разложения Лебега  $\rho = 1 - \frac{v}{b}$ ,  $\pi(s) = \frac{v}{v+s}$ , т.е.  $\gamma(s) = 1 - \frac{v}{b}$ ,

$\alpha(s) \equiv 1$  и нет стационарного режима.

3. **Алгоритм** восстановления параметров в модели  $M_r|G_r|1|\infty$  с абсолютным приоритетом является рекуррентным по  $i$  от 1 до  $r$ . При



$i = 1$  имеем модель  $M|G|1|\infty$  с дисциплиной FIFO и по  $f_1(s)$ ,  $v_1(s)$  восстанавливаются  $a_1, \beta_{11}, \beta_1(s)$ . Пусть по функциям  $f_j(s), v_j(s)$ ,  $j = \overline{1, i-1}$ ,  $i > 1$  восстановлены  $a_j, \beta_{j1}, \beta_j(s)$ . Покажем, как находятся  $a_i, \beta_{i1}, \beta_i(s)$  с помощью функций  $f_j(s), v_j(s)$ ,  $j = \overline{1, i}$ .

Для всех разновидностей абсолютного приоритета

$$a_i^{-1} = -f_i'(0), \quad (10)$$

что нетрудно проверить на основе (5) и (7). Из (5) и (8)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v_i(s)}{f_i(s)} = \frac{1 - \rho_{i1}}{1 - a_i^{-1}(1 - \rho_{i1})\mu_i(a_i)} \quad (11)$$

(дообслуживание и обслуживание заново),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v_i(s)}{\tau_i(s)} = (1 - \rho_{i1}) \left\{ \beta_i(\sigma_{i-1}) + (1 - \beta_i(\sigma_{i-1}))\pi_{i-1\infty} - \left( \beta_i(\sigma_i) + \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} (1 - \beta_i(\sigma_i))\pi_{i-1\infty} \right) \frac{\mu_i(a_i)}{a_i} \frac{1}{h_i(a_i)} \left( 1 - \rho_{i-11} - \sigma_{i-1}^{-1} a_i (1 - \beta_i(\sigma_{i-1})) \right) \right\}^{-1}, \quad (12)$$

(потеря прерванного вызова), где  $\pi_{i-1\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \pi_{i-1}(s) < \infty$ . В (11) неизвестно только  $1 - \rho_{i1}$ . Итак, в случае дообслуживания и обслуживания заново из (11) находим  $1 - \rho_{i1}$ .

**Дообслуживание.** Так как  $1 - \rho_{i1} = 1 - \rho_{i-11} - a_i \beta_{i1}$ , то восстанавливается  $\beta_{i1}$ . Далее, из (9)

$$\beta_i(s) = h_i \left( s - \sum_{j=1}^{i-1} (a_j - a_j \beta_j(s)) \right). \quad (13)$$

Восстановив  $h_i(s)$  по формуле (5), из (13) находим  $\beta_i(s)$ .

**Обслуживание заново.** Опять по формуле (5) восстанавливаем  $h_i(s)$ , а из (9) находим  $\beta_i(s + \sigma_{i-1})$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Используя аналитическое продолжение, определяем  $\beta_i(s)$  при  $\operatorname{Re} s > 0$  и подсчитываем  $\beta_{i1}$ .

**Потеря.** Подставим в (7) и (8)  $s = a_i$ . Получим два уравнения. Эти два уравнения позволяют найти неизвестные константы  $\beta_i(\sigma_{i-1})$ ,  $\beta_i(\sigma_i)$  и  $h_i(a_i)$ . Теперь уравнения (8) и (9) относительно неизвестных функций  $h_i(s)$  и  $\beta_i(s + \sigma_{i-1})$  определяют функцию  $\beta_i(s + \sigma_{i-1})$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Используя аналитическое продолжение, определяем  $\beta_i(s)$  при  $\operatorname{Re} s > 0$  и подсчитываем  $\beta_{i1}$ .

Ереванский государственный университет



Հակադարձ խնդիրներ որոշ միալար համակարգերում

Դիտարկվում է  $M, |G, |1|^\infty$  համակարգը բացարձակ և հարաբերական գերադասելիությունների հերթականությամբ: Տարբերում ենք բացարձակ գերադասելիությունների հերթականության հերթականություններ՝ ընդհանուր պահանջի կորուստ, վերասպասարկում, սպասարկում ընդհանուր կետից: Ելքային հոսքի միաչափ բաշխումների և պահանջների համակարգում գտնվելու ժամանակների բնութագրիչների օգնությամբ վերսկանգնվում են համակարգի նախնական բնութագրիչները:

ЛИТЕРАТУРА –ԳՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> М. Г. Нагапетян, В. Г. Ушаков, Вероятн. и оптим., ЕГУ, № 3, 1996. <sup>2</sup> В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков, Системы массового обслуживания, изд. Моск. ун-та, 1984. <sup>3</sup> И. Н. Коваленко, ДАН СССР, т. 164, № 5, с. 1979-1981 (1965). <sup>4</sup> Э. А. Даишелян, Г. А. Попов, ДАН АрмССР, т. 71, № 3, с. 129-135 (1980). <sup>5</sup> В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков, Теория вероятностей и ее применения, т. 29, в. 2, с. 348-351 (1984). <sup>6</sup> В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков, Теория вероятностей и ее применения, т. 31, в. 2, с. 369-372 (1986). <sup>7</sup> К. R. Parthasarathy, R. R. Rao, S. R. Varadhan, Trans. Amer. Math. Soc., v. 102, № 2, p. 200-217 (1962).



УДК 517.53

Г.В.Микаелян, З.С.Микаелян

# Вполне монотонность одного класса функций типа Миттаг-Леффлера

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 1/VI 1996)

## 1. Класс целых функций

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (1)$$

порядка  $\rho$  и типа 1, где  $\Gamma(\bullet)$  — гамма-функция Эйлера, — основа целого направления в гармоническом анализе<sup>(1)</sup>.

Функция  $E_{\rho}(-x, \mu)$ , в случае  $\rho \geq 1$ ,  $x \geq 0$ , вполне монотонна тогда и только тогда, когда  $\mu \geq \rho^{-1}$  (2). В частности, функция Миттаг-Леффлера  $E_{\rho}(-x, 1)$  вполне монотонна при  $\rho \geq 1$  (3,4).

Вполне монотонность функции  $\varphi(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ , означает ее бесконечную дифференцируемость и выполнение условий

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geq 0$$

для всех  $x \geq 0$  и целых  $n \geq 0$ .

С точки зрения теории вероятностей вполне монотонность функции  $\varphi(x)$  эквивалентна существованию распределения  $F(t)$ , сосредоточенного на  $[0, +\infty)$  такого, что

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dF(t) \quad (5).$$

Поэтому обоснован интерес специалистов по теории вероятностей к функциям типа Миттаг-Леффлера.

Естественным обобщением класса функций (1) служит следующий класс функций (6,7).



Пусть  $p \geq 1$  заданное целое число, положительные числа  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_p$  и  $w_1, \dots, w_p$  удовлетворяют условию

$$w_1^{-1} + \dots + w_p^{-1} < \rho_0^{-1} + \dots + \rho_p^{-1}, \quad (2)$$

а  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p$  и  $\nu_1, \dots, \nu_p$  — действительные числа.

Рассмотрим класс функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho, w}(z, \mu, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\mu_0 + \frac{k}{\rho_0})} \prod_{m=1}^p \frac{\Gamma(\nu_m + \frac{k}{w_m})}{\Gamma(\mu_m + \frac{k}{\rho_m})} z^k. \quad (3)$$

Условие (2) обеспечивает сходимость ряда (3).

Нетрудно проверить, пользуясь формулой Стирлинга, что введены целые функции порядка и типа

$$\chi = \frac{1}{\rho_0^{-1} + \sum_{k=1}^p (\rho_k^{-1} - w_k^{-1})}, \quad \sigma = \frac{1}{\chi} \left( \rho_0^{\rho_0^{-1}} \prod_{k=1}^p \frac{\rho_k^{\rho_k^{-1}}}{w_k^{w_k^{-1}}} \right) \text{ соответственно.}$$

Цель настоящей заметки заключается в установлении следующего факта.

**Теорема.** Функция  $E_{\rho, w}(-x, \mu, \nu)$  с  $\rho_0 \geq 1, x \geq 0$  вполне монотонна тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\mu_0 \geq \rho_0^{-1}, \quad \rho_k \geq w_k, \quad \nu_k > 0, \quad (\mu_k / \nu_k) \geq (w_k / \rho_k), \quad k = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Рассмотрим мероморфную функцию

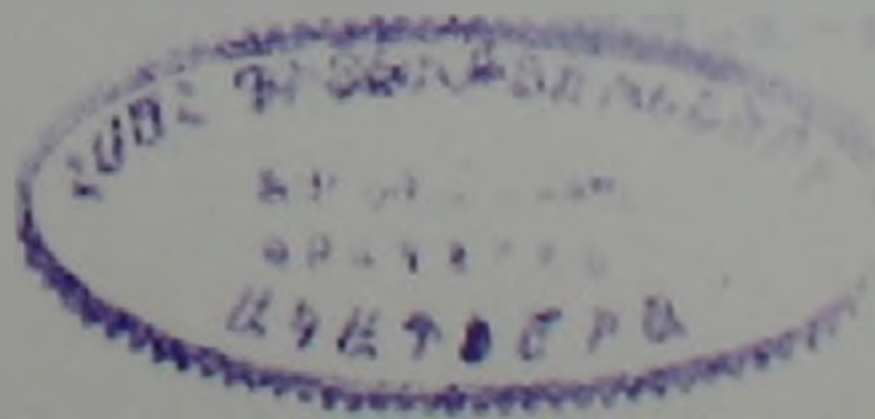
$$\Gamma(z+1) = e^{-cz} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + (z/k)},$$

где  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln n)$  — постоянная Эйлера, и мероморфную функцию

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{z}{\rho_0})} \prod_{k=1}^p \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{z}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{z}{\rho_k})},$$

которая аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > -m$ , где

$$m = \min(1, \nu_k w_k; 1 \leq k \leq p).$$





Лемма. При выполнении условий (4) найдется неубывающая функция  $\beta(x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , такая, что

$$\gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} d\beta(x), \quad \operatorname{Re} z > -m. \quad (5)$$

Доказательство. Введем функции

$$\alpha_{k_0}(x) = \frac{k + \mu_0 - 1 + (x/\rho_0)}{k + x}, \quad \alpha_{k_i}(x) = \frac{k + \mu_i - 1 + (x/\rho_i)}{k + v_i - 1 + (x/w_i)}, \quad i = \overline{1, p}, \quad x \geq 0.$$

Поскольку функции  $\alpha_{k_i}(x)$  при всех  $k$  и  $i$  вполне монотонны, то вполне монотонна также и функция

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=0}^p \alpha_{k_i}(x) \quad \text{при всех } n \geq 1.$$

Следовательно, по теореме Бернштейна найдутся неубывающие функции  $\mu_n(x)$  такие, что

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=0}^p \alpha_{k_i}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xu} d\mu_n(x) \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (6)$$

Более того, доопределяя функции  $\mu_n(x)$  в (6) на полуоси  $-\infty < x < 0$  как  $\mu_n(x) = \mu_n(0)$ , сохраняем равенство (9) с пределами интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для любого  $\lambda > 0$  и всех  $x \geq 0$

$$n^{x\lambda} = e^{x\lambda \ln n} = \int_{-\infty}^0 e^{-xu} d \operatorname{sgn}(u - \lambda \ln n), \quad (7)$$

причем предел интегрирования 0 можно заменить на  $+\infty$ .

Таким образом, функции

$$\gamma_n(x) = n^{\lambda_1 + x\lambda_2} \prod_{k=1}^n \prod_{i=0}^p \alpha_{k_i}(x) \quad \text{при всех } n \geq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^p v_i - \sum_{i=0}^p \mu_i + 1, \quad \lambda_2 = \sum_{i=0}^p \rho_i^{-1} - \sum_{i=1}^p w_i^{-1},$$

согласно (6) и (7), представимы в виде

$$\gamma_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} d\beta_n(u), \quad d\beta_n(u) \geq 0. \quad (8)$$

Здесь функции  $\beta_n(u)$  суть свертки функций  $n^{\lambda_1} \mu_n(u)$  и  $\operatorname{sgn}(u - \lambda_2 \ln n)$ .



Легко заметить, что  $\gamma_n(x)$  — "усечение" функции  $\gamma(x)$ . Более того  $\gamma_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходится к  $\gamma(x)$  на любом компакте, не содержащем полюсов функции  $\gamma(x)$ .

Следовательно, доказано представление (5) для всех  $x \geq 0$ . Из теоремы Виванти—Прингсгейма—Ландау следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Из леммы вытекают формулы

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{x}{\rho_0})} \prod_{k=1}^p \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{x}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{x}{\rho_k})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} d\beta(u) \quad (9)$$

для всех  $x \geq 0$ , где функция  $\beta(u)$  та же, что и в (5).

Замена переменной в  $e^{-x} = \tau$  в (9) и последующая замена непрерывного  $x$  на дискретную  $n$  решает следующую проблему моментов Стильтьеса:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{n}{\rho_0})} \prod_{k=1}^p \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{n}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{n}{\rho_k})} = \int_0^{+\infty} \tau^n d\omega(\tau),$$

где  $d\omega(\tau) \geq 0$ , что равносильно вполне монотонности функции  $E_\rho(-x, \mu, \nu)$ .

Ереванский государственный университет

#### Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Չ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

##### Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների մի դասի լիովին մոնոտոնությունը

Աշխատանքում դիտարկվում է Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների մի դաս, որը հանդիսանում է Միտտագ-Լեֆլերի ֆունկցիաների լայն ընդհանրացում: Մոմենտների մեթոդի միջոցով ստացված են այդ դասի ֆունկցիաների լիովին մոնոտոնության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

#### ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966. <sup>2</sup> М. М. Джрбашян, Р. А. Багян, Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 10, № 6, с. 483-508 (1975). <sup>3</sup> Н. Pollard, Bul. Amer. Math. Soc., v. 54, p. 1115-1116 (1948). <sup>4</sup> А. Wintner, J. de Mathem. pures et appliquees, p. 165-182 (1959). <sup>5</sup> В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., Мир, 1984. <sup>6</sup> С. Fox Proc. of the Lond. Math. Soc., v. 27, p. 389-400 (1928). <sup>7</sup> С. А. Акопян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 15, № 1, с. 13-36 (1962).



УДК 512.542

В. Г. Микаелян

## О тождествах расширений абелевых групп

(Представлено академиком НАН Армении А. Б. Нерсисяном 8/IV 1996)

Тесная взаимосвязь между группами и их тождествами наводит на целесообразность изучения тождеств расширений групп с точки зрения тождеств групп, участвующих в расширении. (Основные определения см. в (1,2)). Пусть  $R$  есть расширение  $H$  посредством  $G$ . Если

$$V = \text{Var } H, \quad U = \text{Var } G$$

есть многообразия, порожденные группами  $H$  и  $G$ , а  $V, U$  — соответствующие вербальные подгруппы в свободной группе  $F = F_\infty$ , то всегда:  $R \in V \cdot U$  (произведение многообразий см. (1,3)).

$V \cdot U$  имеет вербальной подгруппой в  $F$  группу  $V(U) < F$ , т.е. всевозможные подстановки тождеств группы  $G$  в тождества  $H$  являются тождествами для  $R$ . Однако не всегда это свойство обратимо, т.е.  $R$  может удовлетворять "дополнительному" тождеству  $w \equiv 1$ , не лежащему в  $V(U)$ .

В (4) мы получили целый ряд конкретных примеров, позволяющих строить расширения  $R$  с указанным свойством (см.(4), примеры 1-4).

В (5) мы получили теоремы, позволяющие строить широкие классы таких примеров. В этих примерах разность тождеств расширений  $R$  от  $V(U)$  достигалась на путях доказательства строгости включений

$$V \circ G \subseteq V \cdot \text{Var } G, \tag{1}$$

$$H \circ U \subseteq \text{Var } H \cdot U. \tag{2}$$

Здесь  $V \circ G$  — многообразие, порожденное всевозможными расширениями групп из  $V$  посредством  $G$ ,  $H \circ U$  — многообразие, порожденное всеми расширениями группы  $H$  посредством групп из  $U$ .

Во всех указанных примерах и теоремах одна из групп (и порожденных им многообразий)  $H$  или  $G$  существенно предполагалась неабелевой. Рассмотрим случай, когда  $H$  и  $G$  — абелевы. Для абелевой группы  $A$  обозначим через  $A_i$  ее  $i$ -ый слой (7), т.е. ее подгруппу:



$$gp\{x \in A \mid x^i = 1\}.$$

Если  $A$  имеет конечную экспоненту  $\exp A$  и  $p \mid \exp A$  ( $p$  — простое число), то введем функцию  $k(p) = k(p, A)$ , таким образом:  $p^{k(p)} \mid \exp A$ , но  $p^{k(p)+1} \nmid \exp A$ .

**Теорема 1.** Пусть абелевы группы  $H, G$  имеют периоды, соответственно  $m, n$ . Если существует простое  $p$ , делящее  $m, n$ , такое, что мощность фактора

$$G_{p^{k(p)}} / G_{p^{k(p)-1}}$$

конечна, то любое расширение  $R$  группы  $H$  посредством  $G$  удовлетворяет некоторому тождеству  $w \equiv 1$ , которое не лежит в  $V(U)$ .

Как видим, теорема 1 позволяет легко конструировать расширения как конечные, так и бесконечные и бесконечно порожденные.

**Следствие 1.** Если  $H, G$  абелевы группы конечных не взаимно простых экспонент, причем  $G$  — конечна, то любое расширение  $H$  посредством  $G$  обладает "дополнительным" тождеством.

**Теорема 2.** а) Если  $H, G, m, n$  те же, что и в теореме 1,  $H$  — конечна, то расширения  $R$  (группы  $H$  посредством  $G$ ) имеют "дополнительные" тождества, коль скоро существует простое  $p$ , делящее  $m$ , такое, что степени неприводимых представлений группы  $Z_n$  над полем  $F_p \cong Z_p$  больше чем

$$\omega(p, H) = \log_p \left| H_{p^{k(p)}} / H_{p^{k(p)-1}} \right|.$$

б) Если  $H$  такая же, что и выше,  $G$  абелева группа бесконечного периода, то всякое расширение группы  $H$  посредством  $G$  имеет тождество, не лежащее в  $V(U)$ .

При условии  $|H| < \infty$  теорема 2 позволяет строить примеры с нужным свойством даже для групп  $G$  с порядком взаимно простым с  $|H|$ . Теорема 1 является следствием теоремы 1 из (6) и замечаний, сделанных выше. Теорема 2 является следствием следующей теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $H$  — конечная абелева группа периода  $m > 1$  и для каждого простого  $p$ , делящего  $m$ , число  $k(p) = k(p, H)$  определяется как и выше:  $p^{k(p)} \mid m$ ,  $p^{k(p)+1} \nmid m$ . Тогда

а) равенство

$$H \circ A_n = \text{Var } H \cdot A_n = A_m \cdot A_n$$



имеет место тогда и только тогда, когда  $(m, p) = 1$  и для любого простого  $p$ , делящего  $m$ , степень неприводимых представлений группы  $Z_m$  над полем  $F_p \cong Z_p$  не больше чем

$$\omega(p, H) = \log_p \left| H_{p^{k(p)}} / H_{p^{k(p)-1}} \right|.$$

б) Всегда имеет место неравенство

$$H \circ A \neq \text{Var } H \cdot A (= A_m \cdot A).$$

Доказательство теоремы 3 основано на следующих леммах:

Лемма 1. Если  $|H| < \infty$  и

$$H \circ A_m = \text{Var } H \cdot A_m,$$

то период группы  $H$  взаимно прост с  $m$ .

Лемма 2. Пусть  $q_1, \dots, q_t$  есть все простые делители числа  $m$ ;

$$q_i^{\beta(i)} \mid m, \text{ но } q_i^{\beta(i)+1} \nmid m.$$

$\text{Var } H = A_m$ ,  $p_1, \dots, p_s$  — все простые делители числа  $m$ .  $H(p_j)$  есть  $p_j$ -компонента (?) группы  $H$ . Тогда для выполнения равенства

$$H \circ U = \text{Var } H \cdot U$$

необходимо, чтобы  $(m, p) = 1$  и для любой пары  $i, j$  выполнялись равенства

$$H(p_j) \circ A_{q_i^{\beta(i)}} = A_{p_j^{\alpha(j)}} \cdot A_{q_i^{\beta(i)}},$$

где  $p_j^{\alpha(j)}$  есть период группы  $H(p_j)$ .

Лемма 3. Если  $H$  есть конечная абелева группа периода  $p^a$ , то для равенства

$$H \circ A_{q^b} = A_{p^a} \cdot A_{q^b},$$

необходимо и достаточно, чтобы в многообразии  $H \circ A_{p^b}$  содержалось  $\alpha \cdot \beta$  подмногообразий, содержащих  $A_{p^a q^b}$ .

Лемма 4. Если  $p \nmid N$  и  $\alpha > \gamma$  ( $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ ), то для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеем

$$Z_{p^a}^k \circ A_n \subseteq Z_{p^a}^k \circ A_n.$$

Лемма 5. Пусть  $p, q$  — различные простые числа, тогда

$$Z_{p^a}^k \circ A_{q^b} = A_{p^a} \cdot A_{q^b}$$

тогда и только тогда, когда



$$q^{\beta} \prod_{i=1}^k (p^k - 1).$$

Лемма 6. Пусть  $H$  есть группа вида

$$H = Z_{p^{a_1}}^{k_1} + Z_{p^{a_2}}^{k_2} + \dots + Z_{p^{a_s}}^{k_s},$$

где  $k(p) = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s$ ; тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  равенств

$$H \circ A_n = \text{Var } H \cdot A_n = A_{p^{a_1}} \cdot A_n$$

имеет место тогда и только тогда, когда  $p \mid n$  и  $k$  не меньше чем максимальная степень неприводимого представления группы  $Z_p$  над полем  $F_p$ .

В заключение автор хочет выразить свою самую искреннюю благодарность А. Ю. Ольшанскому за постановку вопроса и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

#### Վ. Հ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

##### Արեւյան խմբերի ընդլայնումների նույնությունների մասին

Շարունակելով խմբերի ընդլայնումները՝ ընդլայնմանը մասնակցող խմբերի նույնությունների տեսակետից ուսումնասիրելու թեման, հեղինակը քննարկում է արեւյան խմբերի ընդլայնումների նույնությունները: Մասնավոր ուշադրություն է դարձվում դեպքերի քննարկությանը, երբ մի արեւյան խմբի բոլոր ընդլայնումները մի այլ արեւյան խմբի միջոցով բավարարում են մի որևէ հավելյալ նույնության: Այսինքն մի այնպիսի նույնության, որը տեղի ունի ընդլայնման մեջ, բայց նույնություն չէ ընդլայնմանը մասնակցող խմբերով ծնված բազմաձևությունների արտադրյալի համար: Ենթադրենք  $R$  խումբը  $H$  խմբի ընդլայնումն է  $G$  խմբի միջոցով:  $V$ -ն և  $U$ -ն  $H$ ,  $G$  խմբերով ծնված բազմաձևություններին համապատասխան վերբայան ենթախմբերն են անվերջ ռանգի ազատ խմբում: Այդ դեպքում նշված բազմաձևությունների արտադրյալին համապատասխան վերբայան ենթախումբն է  $V(U)$ :

Մենք, մասնավորապես կարող ենք ապացուցել, որ եթե  $H$  և  $G$  արեւյան խմբերը ունեն համապատասխանաբար  $m$  և  $n$  պարբերությունները և եթե գոյություն ունի պարզ  $p$ , բաժանող  $m$ -ն և  $n$ -ը, այնպիսին որ  $G_{p^{k(n)}}/G_{p^{k(n)-1}}$  ֆակտոր խումբը վերջավոր է, ապա  $H$ -ի կամայական ընդլայնում  $G$ -ի միջոցով ունի մի հավելյալ նույնություն (որը, իհարկե, չի պատկանում  $V(U)$ -ին):

#### ЛИТЕРАТУРА – ՊՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> X. Нейман, Многообразия групп, М., Мир, 1969. <sup>2</sup> B. Neumann, Math. Ann., v. 114, p. 506-525 (1937). <sup>3</sup> B. Neumann, H. Neumann, P. Neumann, Math. Z., v. 80, p. 44-62 (1962). <sup>4</sup> В. Г. Микаелян, ДНАН Армении, т. 94, № 3, с. 277-280 (1993). <sup>5</sup> В. Г. Микаелян, ДНАН Армении, т. 95, № 2, с. 72-75 (1995). <sup>6</sup> В. Г. Микаелян, Материалы III Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова, с. 228, 1993. <sup>7</sup> А. Г. Курош, Теория групп, М., Наука, 1967.



УДК 62-501.12

В. К. Брутян, В. В. Саргсян

# Некоторые обобщения теории линейного синтеза управляемых систем

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукуръяном 4/ХП 1995)

Пусть управляемые системы являются конечномерными и описываются векторными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T] \stackrel{\Delta}{=} I, \quad (1)$$

где  $x = x(t)$   $n$ -мерный вектор состояния;  $u = u(t)$   $r$ -мерный вектор управления,  $A$  и  $D$  матрицы соответствующих размеров, причем не обязательно с постоянными во времени элементами.

Функционал качества представляется формулой

$$J(x_0, t_0, u, T) = x_T' \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^T (x' B x + u' E u) dt, \quad (2)$$

где  $x_T$  — конечное состояние системы.

По предположению все упомянутые матрицы (которые могут быть функциями времени) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) Матрицы  $A$ ,  $D$ ,  $B$  и  $E$  являются ограниченными на интервале  $I$ ;
- 2) Без потери общности предполагается, что  $A = A'$ ,  $B = B'$ ,  $E = E'$ ;
- 3) На интервале  $I$  матрица  $E$  положительно определенная.

В работах (1-3) показано, что можно составить дифференциальное уравнение Риккати, которое позволяет определить минимум функционала (2). Это возможно, если решение уравнения Риккати существует и является полностью определенным. Достаточным условием для существования полностью определенного решения уравнения Риккати является выполнение условий 1-3 и матричных неравенств:  $B \geq 0$  и  $\Gamma \geq 0$ .

В настоящей работе вышеприведенные достаточные условия формулируются в более общем виде и определяется совокупность необходимых и достаточных условий для существования полностью определен-



ных решений дифференциального уравнения Риккати в задачах линейного синтеза управляемых систем на конечном интервале времени.

При выполнении условий 1-3 ниже введенные дополнительные корреляционные соотношения являются и необходимыми условиями для полностью определенного решения рассматриваемой задачи.

Реакция системы (1) на управление  $u(t)$  может быть записана в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) D(\sigma) u(\sigma) d\sigma ,$$

где  $\Phi(t, t_0)$  — передаточная матрица, которая является решением уравнения

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0) , \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n .$$

Если выходом системы считать  $m$ -мерный вектор  $y$ , определяемый выражением

$$y = Hx , \quad (3)$$

то при нулевых начальных условиях импульсная переходная функция системы по координате  $y$  при входном воздействии  $u$  имеет вид

$$e(t, \tau) = H(t)\Phi(t, \tau)D(\tau)l(t - \tau) ,$$

где  $l(t)$  функция Хевисайда, которая равна единице при  $t > 0$  и нулю при  $t \leq 0$  (3). Для дальнейшего интерес представляет следующая матрица:

$$E(t, \tau) = e(t, \tau) + e'(\tau, t) . \quad (4)$$

В частности  $E(t, \tau)$  будет корреляционной матрицей, если для всех управлений  $u$  и некоторых моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  выполняется условие (4.5):

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} u'(t) E(t, \tau) u(\tau) dt d\tau \geq 0 . \quad (5)$$

Если соотношение (5) справедливо для моментов времени  $t_1, t_2$  в пределах интервала  $I$ , то матрица  $E(t, \tau)$  является корреляционной на интервале  $I$ , причем граничные значения  $t_0$  и  $T$  необязательно конечны.

Теперь задача минимизации функционала качества (2) системы (1) рассматривается на конечном интервале времени.

Преобразуем в функционале качества (2) члены, содержащие выражение  $x'Vx$ . Для этого используем матрицу  $\Gamma$ , определяемую из дифференциального уравнения (2.6)



$$-\dot{\Gamma} = \Gamma A + A^T \Gamma - \Gamma D E^{-1} D^T \Gamma + B, \quad \Gamma(T) = \Gamma_T.$$

С учетом условий 1-3, из которых следует, что  $\Gamma = \Gamma'$ , получим

$$\int_{t_0}^T x' B x dt = -x' \Gamma x \Big|_{t_0}^T + 2 \int_{t_0}^T (x' \Gamma \dot{x} - x' \Gamma A x) dt.$$

Далее в соответствии с уравнением (1) имеем

$$x_T' \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^T x' B x dt = x_0' \Gamma_0 x_0 + 2 \int_{t_0}^T x' \Gamma D u dt.$$

Это означает, что если определить матрицу  $H$  в виде  $H' = \Gamma D$  (2.5), то функционал качества (2) можно представить следующим образом:

$$J(x_0, t_0, u, T) = x_0' \Gamma_0 x_0 + \int_{t_0}^T (u' E u + 2 x' \Gamma D u) dt. \quad (6)$$

Для случая  $x_0 = 0$  имеем

$$J(0, t_0, u, T) = \int_{t_0}^T (y' u + u' y) dt. \quad (7)$$

Так как при

$$y(t) = \int_{t_0}^t e(t, \tau) u(\tau) d\tau,$$

и кроме того,  $e(t, \tau)$  при  $\tau > t$ , то формулу (7) можно представить в виде

$$J(0, u, t_0, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) [e(t, \tau) + e'(\tau, t)] u(\tau) dt d\tau, \quad (8)$$

где  $u(t) = 0$  вне интервала  $I$ . Используя формулы (4) и (5), можно установить, что если матрица  $E(t, \tau)$  является корреляционной на интервале  $I$ , где

$$E(t, \tau) = E(t) \delta(t - \tau) + \Gamma D' \Phi(t, \tau) D(\tau) l(t - \tau) + D'(t) \Phi'(\tau, t) D(\tau) \Gamma l(\tau - t),$$

$\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака, то тогда

$$J(0, t_0, u, T) \geq 0 \quad (9)$$

для любого управления  $u$ .

В предположении, что существует управление  $u^*$ , минимизирующее (2), можно установить верхнюю границу минимума функционала:



$J^*(x_0, t_0, u^*, T)$ . Так как  $u \equiv 0$  также представляет собой возможный случай управления, то в соответствии с формулой (6) имеем

$$J(x_0, t_0, 0, T) = x_0' \Gamma_0 x_0.$$

Отсюда следует, что

$$J^*(x_0, t_0, u^*, T) \leq x_0' \Gamma_0 x_0,$$

чем и устанавливается верхняя граница.

Для определения нижней границы значения  $J^*(x_0, t_0, u^*, T)$  докажем следующую лемму.

**Лемма.** Для системы (1) с функционалом качества (2) при выполнении условий 1, 2 достаточным для существования нижней границы значения  $J^*(x_0, t_0, u^*, T)$  (существование оптимального управления  $u^*$  предполагается) является любое из следующих условий.

4) Выбор матриц  $A$ ,  $D$ ,  $B$  и  $E$  может быть сделан на конечном интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$  так, что матрица  $E(t, \tau)$  является корреляционной на интервале  $[t_0 - t_1, T]$ .

5) Матрицы  $A$  и  $D$  являются полностью наблюдаемыми в момент времени  $t_0$  в том смысле, что для любого начального состояния  $x_0$  управление  $u_1$  и время  $t_1$  могут быть найдены путем рассмотрения движения системы от нулевого состояния в момент времени  $t_0 - t_1$  к состоянию  $x_0$  в момент времени  $t_0$ .

6) Матрица  $E(t, \tau) - k\Phi(t_0, t_0)\delta(t - \tau)$  является корреляционной на интервале  $I$  для некоторого положительного числа  $k$ .

Согласно теории Гамильтона — Якоби — Беллмана можно составить дифференциальное уравнение Риккати, которое позволяет определять минимум функционала (6). Так как член  $x_0' \Gamma_0 x_0$  в выражении (6) постоянен при фиксированном значении  $t$ , то необходимо минимизировать лишь интеграл в правой части. Обозначив через  $\tilde{J}^*$  минимум этого интеграла, запишем соответствующее обобщенное уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана (26)

$$\frac{\partial \tilde{J}^*(x, t)}{\partial t} + \tilde{H}^*\left(x, \frac{\partial \tilde{J}^*(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{J}^*(x, t)}{\partial x^2}, t\right) = 0, \quad \tilde{J}^*(x, T) = 0 \text{ для всех } x, \quad (10)$$

где  $\tilde{H}^*$  единственный минимум (по отношению к управлению  $u$ ) функции

$$\tilde{H}(x, \psi, t, u) = u' E u + 2x' D \Gamma u + \psi' A x + \psi' D u$$

( $\psi$  означает сопряженную переменную). Минимум функции  $\tilde{H}$  достигается при некотором управлении  $u^*(x, \psi, t)$ , которое может быть определено по формуле



$$u^* = -E^{-1} D' \left( \frac{\psi}{2} + \Gamma x \right). \quad (11)$$

Минимизированный гамильтониан при этом принимает следующий вид:

$$\tilde{H}^*(x, \psi, t) = -\frac{1}{4} \psi' D E^{-1} D' \psi - x' \Gamma D' E^{-1} D' \Gamma x + \psi' (A - D E^{-1} D' \Gamma) x.$$

Можно проверить, что уравнение (10) имеет решение

$$\tilde{J}^*(x, t) = x' F(t, T) x,$$

которое дает следующее значение для минимума функционала (2):

$$J^*(x_0, t_0, u^*, T) = x_0' [F(t_0, T) + \Gamma(t_0)] x_0.$$

При этом требуется, чтобы функция  $F(t, T)$  являлась решением данного уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} -F &= F(A - D E^{-1} D' \Gamma) + (A' - \Gamma D E^{-1} D') F - F D E^{-1} D' F - \Gamma D E^{-1} D' \Gamma, \\ F(T, T) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (2.7) следует также, что оптимальное управление (11) может быть представлено в другой форме путем замены переменной  $\psi$  градиентом функции  $\tilde{J}^*(x, t)$ . Таким образом, если функция  $F(t, T)$  существует, то

$$u^* = -E^{-1} D' [F(t, T) + \Gamma] x.$$

**Теорема.** Рассмотрим систему (1) и предположим, что условия 1-3 справедливы. Достаточными условиями для существования решения матричного уравнения Риккати (12) на интервале  $I$  являются либо выполнение условия 6, либо возможность выбора такого момента времени  $t_1$  и таких матриц  $A$ ,  $D$ ,  $E$  и  $B$  на интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$ , что выполняются условия 4 и 5. Необходимым требованием существования упомянутого решения является выполнение соотношения (9).

**Доказательство леммы.** Предположение о том, что матрицы  $A$ ,  $D$ ,  $B$  и  $E$  могут быть выбраны на ограниченном интервале времени  $[t_0 - t_1, t_0]$  так, что выполняются условия 4 и 5, приводит к тому, что величина  $J(0, u_1, t_0, t_0 - t_1)$  становится ограниченной. В соответствии с соотношением (9) эта величина неотрицательна. Если при этом на интервале  $I$  действует оптимальное управление  $u^*$  (предполагается, что оно существует), то тогда

$$J(0, u_1, t_0, t_0 - t_1) + J^*(x_0, u^*, T, t_0) \geq 0.$$

Этот результат устанавливает нижнюю границу для значения  $J^*(x_0, u^*, T, t_0)$ :



$$-\infty < v(x_0, t_0) \leq J^*(x_0, u^*, T, t_0), \quad (13)$$

где величина  $v$  есть  $J(0, u_1, t_0, t_0 - t_1)$ , причем она зависит от  $x_0$  (так как  $u_1$  зависит от  $x_0$ ).

Чтобы завершить доказательство, покажем, что если выполняется условие 6, то момент времени  $t_1$  и матрицы  $A$ ,  $D$ ,  $B$  и  $E$  на интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$  могут быть выбраны так, что условия 4 и 5 также удовлетворяются. Во-первых, выберем матрицы  $A$  и  $D$  и момент времени  $t_1$  так, что условие 5 выполняется. При желании можно матрицы  $A$  и  $D$  выбрать постоянными, а время  $t_1$  произвольно малым. Затем возьмем произвольную матрицу  $B$  так, чтобы матрица  $\Gamma D'$  была равной нулю. Окончательно выберем матрицу  $E$  в виде  $E = \lambda U$ , где  $\lambda$  — положительная константа, которая будет определена ниже. Тогда для произвольного управления  $u$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0-t_1}^T \int_{t_0-t_1}^T u'(t) E(t, \tau) u(\tau) d\tau dt &= \int_{t_0-t_1}^T u'_2(t) u_2(t) dt + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T u'_3(t) E(t, \tau) u_3(\tau) d\tau dt + \\ &+ \int_{t_0}^T u'_3(t) \Gamma(t) D'(t) \Phi(t, \tau_0) dt \int_{t_0-t_1}^t \Phi(t_0 - \tau) D(\tau) u_2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $u_2$  управление на интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$ , а  $u_3$  управление на интервале  $I$ . Применяя неравенство Коши — Шварца (7.8) и условие 6, получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0-t_1}^T \int_{t_0-t_1}^T u'(t) E(t, \tau) u(\tau) d\tau dt &\geq \lambda \int_{t_0-t_1}^{t_0} u'_2 u_2 dt + \lambda \int_{t_0}^T u'_3 u_3 dt - \left\{ \left[ \int_{t_0}^T u'_3 u_3 dt \right]^{1/2} \right. \\ &\left. * \left[ \int_{t_0}^T \|\Gamma D' \Phi(t, t_0)\|^2 dt \right]^{1/2} \left[ \int_{t_0-t_1}^T \|\Phi(t_0, \tau) D(\tau)\|^2 dt \right]^{1/2} \left[ \int_{t_0-t_1}^{t_0} u'_2 u_2 d\tau \right]^{1/2} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что можно подобрать такое число  $\lambda$ , что правая часть неравенства (14) будет неотрицательной независимо от управления  $u(t)$ . Чтобы убедиться в этом, введем обозначения

$$q_1 \triangleq \left[ \int_{t_0-t_1}^{t_0} u'_2 u_2 dt \right]^{1/2}, \quad q_2 \triangleq \left[ \int_{t_0}^T u'_3 u_3 dt \right]^{1/2}.$$

Тогда правая часть неравенства (14) может быть записана в виде

$$\lambda q_1^2 + \alpha q_2^2 - \beta q_1 q_2, \quad (15)$$



где  $\alpha$  и  $\beta$  фиксированные константы.

Вариации управления  $u(t)$  приводят к вариациям значений  $q_1$  и  $q_2$ . Следовательно, параметр  $\alpha$  нужно выбрать так, чтобы квадратичная форма (15) была неотрицательной для всех значений  $q_1$  и  $q_2$ . Заметим, что если  $\alpha = 0$ , то этого сделать не удастся.

В заключение отметим, что корреляционное условие 6 предполагает, что матрицы  $E$  на интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$  могут быть найдены при любых выбранных матрицах  $B$ ,  $A$  и  $D$ , и при этом выполняется условие 4. Более того, так как матрицы  $A$  и  $D$  на интервале  $[t_0 - t_1, t_0]$  могут быть выбраны так, что выполняется условие 5, то тогда при выполнении условия 6 применение первой части доказательства леммы дает нижнюю границу для величины  $J^*(x_0, u^*, T, t_0)$  (см. неравенство (14)).

Доказательство теоремы. Заметим, что условия достаточности в данном случае совпадают с условиями, при которых справедлива лемма, за исключением того, что теорема требует, чтобы матрица  $E$  была положительно определенной на интервале  $I$ . Доказательство теоремы ведется от противного. Сначала предполагается, что уравнение (12) не имеет полностью определенного решения. Однако согласно теории данного дифференциального уравнения решение является полностью определенным в окрестности точки  $T$ . Но если решение невозможно продолжить на произвольное расстояние слева от точки  $T$ , то тогда для некоторой величины  $\tau_1 \in I$  (но не в окрестности точки  $T$ ), а также для некоторого начального значения  $x_0$  и некоторого положительного числа  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  имеем  $J^*(x_0, u^*, T, \tau_1 + \varepsilon) \rightarrow +\infty$  или  $-\infty$ . Это противоречит либо неравенству (10), либо доказанной лемме.

Таким образом, достаточные условия справедливости леммы совместно с требованием  $E > 0$  на интервале  $I$  являются достаточными условиями для существования полностью определенного решения уравнения (12) на интервале  $I$ .

Соотношение (9) является необходимым условием, так как если оно не удовлетворяется, то в соответствии с формулами (4), (5) и (8) можно показать, что существует некоторое управление  $\tilde{u}$ , для которого функционал качества  $J(0, \tilde{u}, T, t_0)$  отрицателен, а это противоречит тому, что если уравнение (12) имеет полностью определенное решение, то минимум функционала  $J^*(0, u^*, T, t_0)$  по формуле

$$J^*(x_0, u^*, T, t_0) = x_0' [F(t_0, T) + \Gamma(t_0)] x_0$$

равен нулю, что и требовалось доказать.

Высшее военное многопрофильное командное училище МО РА



Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, Վ. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Կառավարելի համակարգերի գծային սինթեզի տեսության  
մի քանի ընդհանրացումներ

Դիտարկվում է վերջավոր ժամանակահատվածում կառավարելի համակարգերի գծային սինթեզի խնդիրներում Ռիկկատիի դիֆերենցիալ հավասարումների լրիվ որոշակի լուծումների գոյության համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանների համախմբությունը: Հայտնի բավարար պայմանները ձևակերպվում են ավելի ընդհանուր տեսքով: Նկարագրված լրացուցիչ կոոնյացիոն առնչությունները հանդիսանում են դիտարկող խնդրի լրիվ որոշակի լուծման համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. И. Зубов, Лекции по теории управления, Наука, М., 1970. <sup>2</sup> В. К. Брутян, Основные аспекты теории непрерывных марковских систем и ее приложение, Айастан, Ереван, 1984. <sup>3</sup> В. Г. Флеминг, Р. В. Ришел, Детерминистическое и оптимальное управление, Наука, М., 1980. <sup>4</sup> В. К. Брутян, Автоматика и телемеханика, № 7, с. 51-61, 1980. <sup>5</sup> В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, с. 120-126 (1989). <sup>6</sup> Р. Е. Калман, М. Арбиб, П. Фалб, Очерки по математической теории систем, Мир, М., 1974. <sup>7</sup> А. Балакришнан, Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1974. <sup>8</sup> Р. Курант, Дифференциальные уравнения с частными производными, Наука, М., 1965.



УДК 621.391.254

Академик НАН РА Г. Г. Хачатрян, К. С. Овакимян,  
К. М. Никогосян, А. Л. Вартапетян

## Спектральная плотность мощности шумоподобных сигналов

(Представлено 10/VI 1996)

1. Часто целесообразно разложить модулированный цифровой сигнал на дискретную и непрерывную части. Спектр потока сигналов, несущих информацию, зависит от используемой формы сигнала и корреляционных свойств переданной последовательности данных. Для того, чтобы иметь желаемую форму спектра, проектировщику системы связи необходимо правильно выбрать тип модуляции и ввести некоторую корреляцию в последовательность случайных данных. Например, использование минимальной модуляции (ММ) вместо квадратурной фазовой модуляции (КФМ) позволяет подавить боковые лепестки спектра КФМ сигнала <sup>(1)</sup>; с другой стороны, замена некоррелированного потока данных коррелированным в системах связи с частичным откликом <sup>(2)</sup> ведет к компактности спектра без привнесения межсимвольной интерференции.

Системы шумоподобных сигналов (ШПС) с непосредственной модуляцией несущей (ШПС с НМН) используют сигналы, которые формируются на базе псевдослучайных (ПС) (детерминированных) последовательностей. В этой работе рассматривается следующая проблема: как построить требуемый спектр выбором ПС последовательностей? Хотя анализ ШПС с НМН строится в основном на предположении хаотичности ПС последовательностей <sup>(3)</sup>, мы убедимся что с некоторых точек зрения ШПС системы, использующие специально выбранные детерминированные ПС последовательности, могут демонстрировать лучшие показатели.

2. Мы рассмотрим систему ШПС с НМН, в которой множество переданных сигналов состоит из пар противоположных сигналов. Такое предположение оправдано для многих случаев, поскольку если даже исходное множество сигналов не содержит противоположных, их можно создать в передатчике. Например, если при наличии нескогерентного приема используется множество ортогональных сигналов, то добавление функции в передатчике, которая случайным образом



меняет полярность переданных сигналов, не приводит к ухудшению эффективности системы, но сглаживает спектр.

Таким образом, в рассматриваемой модели имеется множество  $2M$  сигналов  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2M$ , которые могут быть перенумерованы так, что  $s_i(t) = -s_{i+M}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Каждый ШПС с НМН сигнал  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  имеет форму

$$s_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_i^{(k)} u(t - kT) \cos \omega_0 t, \quad (2.1)$$

где  $c_i^{(k)} \in \alpha^L \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L\}$  ( $\alpha_l \in R$ ) обычно называют элементом сигнала, а вектор  $c_i^{(k)}: c_i = (c_i^{(0)}, c_i^{(1)}, \dots, c_i^{(N-1)})$  называют ПС последовательностью;  $u(t)$  — форма элемента сигнала;  $\omega_0$  — несущая частота;  $T$  — временной интервал элемента сигнала.

В частности, мы будем рассматривать прямоугольную форму элемента сигнала (что вместе с  $c_i^{(k)} \in \{-1, 1\}$  соответствует двоичной фазовой модуляции):

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{в противном сл.} \end{cases} \quad (2.2)$$

и синусоидальную форму (что вместе с  $c_i^{(k)} \in \{-1, 1\}$  и при наличии второго квадратурного канала соответствует ММ модуляции)

$$u(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{в противном сл.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Заметим, что в реальных системах форма сигнала, заданная по (2.2) и (2.3), может быть искажена и расширена после фильтрации, и этот эффект также будет учтен в нашем анализе. Поток данных  $b(n) \in \{1, 2, \dots, 2M\}$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  отображается в поток сигналов  $s_{b(n)}(t)$  (исключая член  $\cos \omega_0 t$ , мы перейдем к рассмотрению видеосигналов):

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{b(n)}(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_{b(n)}^{(k)} u(t - nT_0 - kT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_{b(n)}^{(k)} u(t - nNT - kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l u(t - lT), \end{aligned} \quad (2.4a)$$

где существует взаимнооднозначное соответствие между последовательностями  $d_l$  и  $c_{b(n)}^k$ :  $d_l = c_{b(n)}^k \Leftrightarrow k = l \pmod{N}$  и  $n = \left\lfloor \frac{l}{N} \right\rfloor$ .



Поскольку поток данных  $b(n)$  является стационарным (в широком смысле) случайным дискретным процессом, то  $s(t)$  есть периодически-стационарный (в широком смысле) непрерывный процесс (с периодом  $T$ ) и усредненная спектральная плотность мощности (СПМ) таких сигналов может быть выражена (1)

$$S(f) = \frac{1}{T} |U(f)|^2 A(f), \quad (2.5)$$

где

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.6)$$

есть преобразование Фурье функции  $u(t)$ , и

$$A(f) = \sum a(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (2.7)$$

есть преобразование Фурье автокорреляционной функции  $a(m)$  эргодического в автокорреляционной функции дискретного процесса  $d_l$ :

$$a(m) = E[d_l d_{l+m}] = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=L/2}^{L/2+m} \frac{d_l d_{l+m}}{L+1}. \quad (2.8)$$

При заданной отфильтрованной форме элемента сигнала  $u(t)$  СПМ ШПС сигналов зависит от ПС последовательностей посредством выражений (2.8), (2.4).

Оценим дискретную автокорреляционную функцию  $a(m)$ . При предположении, что передающиеся сигналы равновероятны и сигнальное множество состоит из пар противоположных сигналов, нетрудно заметить, что

$$a(m) = \begin{cases} \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M \sum_{l=0}^{N-m-1} c_i^{(l)} c_i^{(l+m)}, & \text{if } 0 \leq m < N \\ 0, & m \geq N \end{cases} \quad (2.9a)$$

и

$$a(-m) = a(m). \quad (2.9b)$$

Таким образом, спектр ШПС сигналов зависит от ПС последовательностей опосредованно через сумму ее апериодических автокорреляций:

$$a(m) = \sum_{i=1}^M a_i(m); \quad (2.10a)$$

$$a_i(m) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-m-1} c_i^{(l)} c_i^{(l+m)}, & 0 \leq m < N \\ a_i(-m), & -N < m < 0 \end{cases} \quad (2.10b)$$



3. Требуемый спектр  $S_D(f)$  может быть получен, если СПМ ПС последовательностей  $A_D(f)$  удовлетворяет условию (см. (2.5))

$$A_D(f) = \frac{TS_D(f)}{|U(f)|^2}. \quad (3.1)$$

Заметим, что из (2.7) следует, что  $A(f)$  периодична с периодом  $1/T$ ; таким образом, формирование требуемого спектра осуществляется в диапазоне

$$f \in \left[-\frac{1}{2T}; \frac{1}{2T}\right).$$

Далее, при данной  $A_D(f)$  требуемая автокорреляционная функция  $a_D(m)$  может быть подсчитана из  $A_D(f)$  применением обратного преобразования Фурье (1)

$$a_D(m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_D(f) e^{j2\pi f m T} df. \quad (3.2)$$

Рассмотрим специфичные спектральные формы, которые могут быть предпочтительными в некоторых случаях.

3.1. В системах ШПС наилучшим считается равномерное распределение мощности по всему диапазону частот, т.е. желательно иметь по возможности плоский спектр. Одним из аргументов в пользу плоского спектра является возможность противостоять помехам: если мощность сконцентрирована в узком частотном диапазоне, то постановщику помех легче нарушить связь. Существуют и другие причины, побуждающие иметь плоский спектр. Принимая их во внимание, различные службы частотного контроля (например, Государственный Комитет по частотам в России) сформировали определенные правила, налагающие ограничения на пики в спектре ШПС сигналов. Как же обеспечить плоский спектр? Как видно из (3.1)

$$S_D(f) = \text{const}, \quad f \in \left[-\frac{1}{2T}; \frac{1}{2T}\right), \quad \text{если} \quad (3.3)$$

$$A_D(f) = \frac{1}{|U(f)|^2}.$$

Мы назовем ПС последовательности, удовлетворяющие равенству (3.3), обеляющими, так как они обеспечивают постоянный уровень СПМ (в обозначенном диапазоне частот). Рассмотрим некоторые формы сигналов.

а) Форма сигнала, имеющего прямоугольный спектр:



$$u(t) = \frac{1}{T} \sin c(t/T) = \frac{\sin(\pi/T)}{\pi} \quad (3.4)$$

$U(f)$  имеет постоянный уровень в диапазоне  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$  и мы потребуем для этого случая, чтобы

$$A_D(f) = \text{Const} \quad (3.5a)$$

и следовательно

$$a(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (3.5b)$$

Очевидно, что для хаотичной последовательности условие (3.5) выполняется; это условие выполняется также для детерминированных ПС последовательностей  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , если ее апериодические автокорреляции  $a_i(m)$  (2.10) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^M a_i(m) = 0, \quad m \neq 0. \quad (3.6)$$

ПС последовательности, имеющие свойство (3.6), хорошо изучены в (4-6); они называются комплементарными.

#### б) Прямоугольная форма сигнала (2.2)

Используя выражения (2.2), (2.6), (3.3), (3.2), можно показать, что обеляющие ПС последовательности должны иметь следующую суммарную автокорреляционную последовательность  $a(m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$  (нормированную к 128):

$$a = \{a(m)\} = \begin{pmatrix} 128,0000 & -23,8628 & 8,8956 & -4,4596 & 2,6493 & -1,7286, \\ 1,2251 & -0,8956 & 0,6970 & -0,5403 & 0,4467 & -0,3574 & 0,3091 & -0,2513, \\ 0,2255 & -0,1843 & 0,1710 & -0,1394 & 0,1336 & -0,1078 & 0,1067 & -0,0848, \\ 0,0868 & -0,0675 & 0,0717 & -0,0542 & 0,0599 & -0,0437 & 0,0505 & -0,0353, \\ 0,0429 & -0,0284 & \dots \end{pmatrix} \quad (3.7a)$$

#### в) Синусоидальная форма элемента сигнала (2.3)

Аналогично можно вывести, что обеляющие ПС последовательности должны иметь суммарную автокорреляционную последовательность (нормированную к 128)

$$a = \{a(m)\} = \begin{pmatrix} 128,0000 & -12,7239 & 3,9876 & -1,8472 & 1,0806 & -0,6707, \\ 0,4904 & -0,3331 & 0,2793 & -0,1923 & 0,1807 & -0,1206 & 0,1269 & -0,0792, \\ 0,0944 & -0,0532 & 0,0733 & -0,0358 & 0,0588 & -0,0236 & 0,0484 & -0,0147, \\ 0,0407 & -0,0080 & 0,0349 & -0,0029 & 0,0303 & 0,0011 & 0,0267 & 0,0044, \\ 0,0238 & 0,0070 & \dots \end{pmatrix} \quad (3.7b)$$

3.2. Рассмотрим ситуацию, когда в диапазоне работы ШПС системы присутствует нежелательный сигнал, вызывающий интерференцию. Естественная стратегия избежать интерференции — не передавать сигнал на частотах, используемых интерференционным сигналом. В



этом случае требуемый спектр будет иметь провалы на частотах, занятых интерференционным сигналом. Таким образом, зная, какая часть общей полосы сигнала занята интерференционным сигналом, можно так сформировать общий спектр ШПС сигнала, чтобы он имел провалы на частотах, занятых интерференционными сигналами.

В асинхронных системах ШПС множественного доступа с кодовым разделением сигналов (МДКР), когда несколько сигналов занимают одну и ту же полосу одновременно, необходимо, чтобы спектры сигналов друг друга компенсировали: гребень спектра одного сигнала должен совпадать с провалом другого. Следовательно, построив спектры сигналов соответствующим образом, можно свести к минимуму взаимовлияние сигналов в асинхронных системах МДКР.

Таким образом, представленный метод подсчета СПМ ШПС позволяет формировать требуемый спектр выбором автокорреляционных свойств ПС последовательностей. В дальнейшем этот метод может быть применен и к кодируемым сигналам.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Գ. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Կ. Ս. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ,  
Կ. Մ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ, Ա. Լ. ՎԱՐԴԱՊԵՏՅԱՆ

Սփռված սպեկտրով ազդանշանի հզորության սպեկտրալ խտությունը

Տվյալ աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ սփռված սպեկտրով (ՍՍ) ազդանշանի հզորության սպեկտրալ խտությունը կախված է օգտագործվող աղմկանման հաջորդականությունների (ԱՀ) գումարային ոչ պարբերական ավտոկոռելյացիոն պատկերից: Մասնավորապես, տրված ազդանշանի տարրի համար ռադոնաախրված է ԱՀ բազմությունը, որը ապահովում է հարթ սպեկտր:

#### ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> John G. Proakis, Digital Communications, N.Y., McGraw-Hill, 1989. <sup>2</sup> S. Pasupathy, IEEE Communication Society Magazine, v. 15, № 4, July, p. 4-11 (1977), also reprinted in: Tutorials in Modern Commun., ed L. B. Lawrence et al., Computer Science Press, 1982. <sup>3</sup> R. L. Pickholtz, D. L. Schilling, L. B. Milstein, IEEE Trans Commun., COM-30, p. 855-884, May, 1982. <sup>4</sup> K. V. Prasad, M. Darnell, I International Symposium on Communication Theory & Application, Scotland, England, 9-13 September 1991. <sup>5</sup> M. J. E. Golay, IRE Trans. on Information Theory, v. IT-7, April, p. 82-87 (1961). <sup>6</sup> C-C. Tseng and C. L. Liu, IEEE, Trans. on Information Theory, v. IT-18(5), September, p. 644-652 (1972).



ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик НАН Армении Л. А. Агаловян, Г. С. Арутюнян

О применимости гипотезы Бернулли для балок с переменными  
упругими характеристиками

(Представлено 14/III 1996)

Рассматривается определение напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, когда упругие модули переменны, обсуждается вопрос применимости гипотезы плоских сечений Бернулли в расчетах балок с подобными свойствами. Такая проблема, в частности, возникает в расчетах силиконовых балок и пластин.

Установлены асимптотические порядки компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, выделены факторы, влияющие на применимость гипотезы Бернулли.

1. Для определения напряженно-деформированного состояния изогнутых балок в качестве прикладной модели служит классическая теория балок, основанная на известной гипотезе плоских сечений Бернулли. Кирхгофф обобщил эту гипотезу на пластинки (гипотеза недеформируемых нормалей), а Ляв — на оболочки. Доказано, что уравнения классической теории балок можно получить из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования, а точное решение проблемы складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Принимая гипотезу плоских сечений Бернулли, пренебрегают пограничным слоем, а решение внутренней задачи определяется лишь приближенно <sup>(1)</sup>. Работа преследует цель — вывести такие уравнения для балок-полос, которые учитывали бы зависимость упругих модулей от координат точек (этим свойством, в частности, обладают балки и пластины, состоящие из искусственно выращиваемых кристаллов <sup>(2)</sup>), а также выяснить возможность использования гипотезы плоских сечений в расчетах таких конструктивных элементов.

Требуется определить решение плоской задачи теории упругости ортотропного тела в области  $\Omega = \{x, y: x \in [0, l], -h \leq y \leq h, h \ll l\}$ , когда модули упругости являются функциями от координат точек, на продольных краях  $y = \pm h$  заданы компоненты внешней нагрузки



$$\sigma_{xy} = \pm \varepsilon^{-1} q_x^{\pm}(x), \quad \sigma_y = \pm q_y^{\pm}(x), \quad (1.1)$$

а при  $x=0, l$  — произвольные пока условия краевых задач теории упругости. Введем безразмерные переменные  $\xi = x/l$ ,  $\zeta = y/h$  и безразмерные компоненты вектора перемещения  $U = w/l$ ,  $V = v/l$ . Уравнения задачи примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \zeta} - \varepsilon^{-1}(\rho h g) = 0, \\ E_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} = \sigma_x - \nu_{12} \sigma_y, \quad \varepsilon^{-1} E_2 \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \sigma_y - \nu_{12} \sigma_x, \quad (1.2)$$

$$G_{12}(\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi}) = \sigma_{xy}, \quad \varepsilon = h/l,$$

где  $\sigma_{ik}$  — компоненты тензора напряжений,  $E_i = E_i(\xi, \zeta)$  — модуль Юнга,  $G_{12} = G_{12}(\xi, \zeta)$  — модуль сдвига,  $\nu_{ik} = \nu_{ik}(\xi, \zeta)$  — коэффициент Пуассона,  $\rho = \rho(\xi, \zeta)$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести. Система (1.2) сингулярно возмущена малым параметром  $\varepsilon$ . Ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя (1.3.4). Решением внутренней задачи является

$$\sigma_x = \varepsilon^{-2+s} \sigma_x^{(s)}, \quad \sigma_{xy} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{xy}^{(s)}, \quad \sigma_y = \varepsilon^s \sigma_y^{(s)}, \\ U = \varepsilon^{-2+s} U^{(s)}, \quad V = \varepsilon^{-3+s} V^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (1.3)$$

где  $s = \overline{0, N}$  означает, что по некому индексу  $s$  происходит суммирование от 0 до  $N$ . После подстановки асимптотического представления (1.3) в (1.2) и приравнения коэффициентов при соответствующих степенях  $\varepsilon$ , получим систему относительно  $\sigma_x^{(s)}$ ,  $\sigma_{xy}^{(s)}$ ,  $\sigma_y^{(s)}$ ,  $U^{(s)}$ ,  $V^{(s)}$ . Решив эту систему и удовлетворив граничным условиям (1.1), получим:

$$V^{(s)} = v^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi, \zeta) \\ U^{(s)} = -\frac{dv^{(s)}}{d\xi} \zeta + u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_x^{(s)} = E_1(\xi, \zeta) \left[ -\frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right] + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{xy}^{(s)} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ I_1 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ I_0 \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right] + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_y^{(s)} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ I_2 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ I_3 \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right] - \frac{d\sigma_{xy0}^{(s)}}{d\xi} \zeta + \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.4)$$



$$\begin{aligned}\sigma_{xy0}^{(s)} &= \frac{1}{2} \left( q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( I_4 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( I_5 \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1) \right] \\ \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) &= \frac{1}{2} \left( q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( I_6 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( I_7 \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \sigma_y^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta=-1) \right]\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_0^\zeta E_1(\xi, \zeta) d\zeta, \quad I_1 = \int_0^\zeta \zeta E_1(\xi, \zeta) d\zeta \\ I_2 &= \int_0^\zeta \left( \int_0^\zeta E_1 \zeta d\zeta \right) d\zeta, \quad I_3 = \int_0^\zeta \left( \int_0^\zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta \\ I_4 &= \int_0^1 \zeta E_1(\xi, \zeta) d\zeta - \int_{-1}^0 \zeta E_1(\xi, \zeta) d\zeta \\ I_5 &= \int_0^1 E_1 d\zeta - \int_{-1}^0 E_1 d\zeta, \quad I_6 = \int_0^1 \left( \int_0^\zeta \zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta - \int_{-1}^0 \left( \int_0^\zeta \zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta \\ I_7 &= \int_0^1 \left( \int_0^\zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta - \int_{-1}^0 \left( \int_0^\zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta \\ q_x^{\pm(0)} &= q_x^\pm, \quad q_y^{\pm(0)} = q_y^\pm, \quad q_x^{\pm(s)} = q_y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta \frac{1}{E_2(\xi, \zeta)} \left( \sigma_y^{(s-4)} - \nu_{21}(\xi, \zeta) \sigma_x^{(s-2)} \right) d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta \left( \frac{1}{G_{12}(\xi, \zeta)} \sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \nu_{12}(\xi, \zeta) \sigma_y^{(s-2)} + E_1(\xi, \zeta) \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \int_0^\zeta \sigma_x^{*(s)} d\zeta \right)$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \int_0^\zeta \sigma_{xy}^{*(s)} d\zeta \right) + g \int_0^\zeta \rho^{(s)} d\zeta; \quad \rho^{(0)} = h\rho, \quad \rho^{(s)} = 0, \quad s \neq 0,$$



функции  $u^{(s)}, v^{(s)}$  определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( I_{11} \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) - \frac{d}{d\xi} \left( I_{01} \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) &= F_x^{(s)} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \left( a_1 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) + \frac{d^2}{d\xi^2} \left( a_2 \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) &= F_y^{(s)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{-1}^1 \zeta E_1 d\zeta, \quad I_{01} = \int_{-1}^1 E_1 d\zeta \\ a_1 &= \int_0^1 \zeta E_1 d\zeta - \int_{-1}^0 \zeta E_1 d\zeta - \int_{-1}^1 \left( \int_0^\zeta \zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta \\ a_2 &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^\zeta E_1 d\zeta \right) d\zeta - \int_0^1 E_1 d\zeta + \int_{-1}^0 E_1 d\zeta \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} F_x^{(s)} &= q_x^{+(s)} + q_x^{-(s)} - \left[ \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1) \right] \\ F_y^{(s)} &= q_y^{+(s)} + q_y^{-(s)} + \frac{d}{d\xi} \left( q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)} \right) - \left[ \sigma_y^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_y^{*(s)}(\zeta=-1) \right] - \\ &\quad - \frac{d}{d\xi} \left[ \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1) \right] \end{aligned}$$

Определив из системы (1.6) функции  $u^{(s)}, v^{(s)}$ , по формулам (1.3), (1.4) определяются все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

2. В ряде случаев система (1.6) принимает упрощенный вид. Например, если  $E_1 = \text{const}$ ,  $G_{ik} = \text{const}$ ,  $v_{ik} = \text{const}$ , имеем

$$\begin{aligned} -2E_1 \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} &= F_x^{(s)}, \\ \frac{2}{3} E_1 \frac{d^4 v^{(s)}}{d\xi^4} &= F_y^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вернувшись к размерным величинам, можно убедиться, что первое из уравнений (2.1) совпадает с классическим уравнением растяжения-сжатия стержней <sup>(5)</sup>, а второе — с уравнением изгиба балок <sup>(6)</sup>. Для каждого приближения меняются лишь  $F_x^{(s)}, F_y^{(s)}$ . Гипотезе плоских сечений Бернулли соответствуют приближения  $s=0,1$ , остальные приближения уточняют результаты по классической теории.

Если  $E_1$  четная функция от  $\zeta$ , т.е.  $E_1(\zeta, -\zeta) = E_1(\zeta, \zeta)$ , система (1.6) принимает вид



$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\xi} \left( I_{01} \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) &= F_x^{(s)}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \left( a_1 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) &= F_y^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В смысле приложений важен также случай  $E_1 = E_1(\xi)$ . Имеем

$$\begin{aligned} -2 \frac{d}{d\xi} \left( E_1(\xi) \frac{du^{(s)}}{d\xi} \right) &= F_x^{(s)}, \\ \frac{2}{3} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( E_1(\xi) \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \right) &= F_y^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, если модуль Юнга  $E_1$  не зависит от координаты  $\zeta$  или есть четная функция, система (1.6) распадается на два отдельные уравнения, первое из которых есть уравнение растяжения-сжатия стержней, а второе — уравнение изгиба балок. Для приближений  $s=0,1$  (в рамках справедливости гипотезы плоских сечений) эти уравнения независимы. При  $s \geq 2$  уравнения системы (1.6) должны быть решены совместно, поскольку  $F_x^{(s)}$  будет содержать слагаемые, обусловленные изгибом, а  $F_y^{(s)}$  — слагаемые, вызванные растяжением-сжатием. Если отсутствует симметрия, то задачи растяжения-сжатия и изгиба не разделяются и  $u^{(s)}, v^{(s)}$  должны быть определены из системы (1.6), однако и в этом случае, как следует из (1.4), приближения  $s=0,1$  соответствуют гипотезе плоских сечений. Гипотеза плоских сечений Бернулли перестанет быть верной, если поправка от приближения  $s=2$  по сравнению с данными для  $s=0,1$  будет одного и того же порядка. Например, если  $E_1 = E_1(\xi)$  и полоса  $\Omega$  растягивается равномерно распределенной по торцам нагрузкой с равнодействующей  $P$ , используя (1.3)-(1.5), (2.3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{2h} + \frac{P}{4h} \varepsilon^2 \left( \zeta^2 - \frac{1}{3} \right) \bar{E}_1(\xi), \\ \sigma_{xy} &= \frac{P}{12h} \varepsilon^3 \zeta (1 - \zeta^2) \frac{d\bar{E}_1}{d\xi}, \\ \sigma_y &= \frac{P}{48h} \varepsilon^4 (1 - 2\zeta^2 + \zeta^4) \frac{d^2 \bar{E}_1}{d\xi^2}, \\ \bar{E}_1(\xi) &= E_1(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{v_{21}(\xi)}{E_2(\xi)} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$



Гипотеза Бернулли будет не применима к указанному классу задач, если  $\bar{E}_1(\xi) = O(\varepsilon^{-2})$ .

В случае балок с шарнирным опиранием главную роль играют величины

$$E_1(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1-2\xi}{G_{12}(\xi)} \right), E_1(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{\xi(1-\xi)v_{21}(\xi)}{E_2(\xi)} \right] \quad (2.5)$$

и их производные.

В заключение отметим, что, ограничившись решением (1.3)-(1.5), граничным условиям при  $x = 0, l$ , как и в классической теории, можно удовлетворять лишь интегрально. Для поточечного удовлетворения этим условиям необходимо привлекать решение пограничного слоя. Погранс-лой можно строить изложенным в (1.7) способом.

Авторы весьма признательны проф. Армену Тер-Кюрегяну (Беркли, США), привлечшему внимание авторов к этой проблеме.

Институт механики НАН Армении

Нагорно-Карабахский государственный университет

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Գ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Առաձգականության փոփոխական բնութագրիչներ ունեցող հեծանների  
համար Բեռնուլիի վարկածի կիրառելիության մասին

Դիտարկված է օրթոտրոպ շերտ-հեծանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ շերտի նյութի առաձգականության մոդուլները փոփոխական են: Նման խնդիր մասնավորապես առաջանում է արհեստական բյուրեղների աճեցման եղանակով գերճշգրիտ սարքաշինության մեջ օգտագործվող հեծանների և սալերի հաշվարկներում: Կառուցված է առաձգականության մաթեմատիկական տեսության համապատասխան եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը, որոշված են լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկ կարգերը, ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր նշված մեծությունները որոշելու համար: Ուսումնասիրված է Բեռնուլիի հարթ կտրվածքների վարկածի կիրառելիության հնարավորությունը նման հեծանների հաշվարկներում: Կախված արտաքին բեռի փոփոխելիությունից և առաձգականության մոդուլների հարաբերակցությունից արտածված են պայմաններ, երբ Բեռնուլիի վարկածը կիրառելի է:

#### ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Լ. Ա. Աղալոյան, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). <sup>2</sup> L. O'Connor, Mechanical Engineer, February, 1992. <sup>3</sup> А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., Наука, 1973. <sup>4</sup> А. Х. Найфе, Методы возмущений, М., Мир, 1976. <sup>5</sup> А. П. Филипп, Прикладная механика твердого деформируемого тела, т. 1, М., Наука, 1975. <sup>6</sup> С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, т. 1, М., Наука, 1965. <sup>7</sup> Լ. Ա. Աղալոյան, ԴԱՆ ԱրմՍՏՐ, տ. 45, № 3 (1972).



ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

В.С.Тоноян, Нарек С.Мелкумян

Об одной симметричной задаче электроупругости  
для пьезокерамической полуплоскости  
с вертикальным полубесконечным разрезом

(Представлено академиком НАН Армении Г.Е.Багдасаряном 10/IV 1995)

Наличие в реальных материалах дефектов типа трещин, надрезов, узких полостей, инородных включений может привести в некоторых случаях к их быстрому развитию и разрушению всего тела как целого. К настоящему времени достигнут существенный прогресс в исследовании разрушения материалов при действии механических и тепловых нагрузок. Однако разрушение материалов при наличии связанных полей различной природы (например, упругой и электрической) до сих пор изучено недостаточно. В связи с этим представляет интерес распространение методов механики разрушения на пьезоэлектрические материалы (<sup>1</sup>).

Электроупругое состояние пьезокерамической плоскости, поляризованной в направлении оси симметрии с прямолинейной трещиной конечной длины, параллельной оси симметрии, при равномерном растяжении на бесконечности в направлении, перпендикулярном оси трещины, рассмотрено в работе (<sup>1</sup>).

В настоящей работе рассматривается симметричная задача плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, которая на конечном расстоянии от границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. Направление предварительной поляризации перпендикулярно к оси разреза.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости  $x \geq 0$ ,  $|z| < \infty$ , поляризованной в направлении оси  $Z$ , которая на конечном расстоянии  $a$  от горизонтальной границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. На границе полуплоскости с вакуумом заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза — нормальное давление и электрический потенциал. Так как задача симметрична относительно вертикального разреза, то можно ограни-



читься рассмотрением только квадранта ( $0 < x < \infty$ ,  $0 < z < \infty$ ). Известно, что поставленная электроупругая задача математически сводится к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы (2) со следующими граничными условиями (3):

$$D_x(0, z) = 0; \sigma_x(0, z) = f_1(z); \tau_{zx}(0, z) = f_2(z) \quad (0 < z < \infty); \quad (1)$$

$$\Psi(x, 0) = 0; \tau_{zx}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty) \quad (2)$$

$$U_z(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq a); \sigma_x(x, 0) = f_3(x) \quad (a < x < \infty) \quad (3)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\tau_{zx}$  — компоненты тензора механических напряжений,  $U_x$ ,  $U_z$  — проекции вектора перемещений,  $D_x$  — компонент вектора электрической индукции,  $\Psi$  — электрический потенциал.

Решения задачи ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} U_x(x, z) &= -\frac{1}{c_{11}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{U}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{c_{11}^E} \int_0^\infty \beta \bar{U}(\beta, x) \cos \beta z d\beta; \\ U_z(x, z) &= \frac{1}{c_{44}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{W}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha + \frac{1}{c_{44}^E} \int_0^\infty \beta \bar{W}(\beta, x) \sin \beta z d\beta; \\ \Psi(x, z) &= -\frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \alpha \bar{\Psi}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \beta \bar{\Psi}(\beta, x) \sin \beta z d\beta; \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha_k z}; \\ \bar{U}(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x}; \\ \bar{W}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha_k z}; \\ \bar{W}(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x}; \\ \bar{\Psi}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha_k z}; \\ \bar{\Psi}(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x}; \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A_k(\alpha)$  и  $B_k(\beta)$  — неизвестные функции интегрирований, которые необходимо определить из граничных условий (1)-(3).

$\Delta_1(t_k)$ ,  $\Delta_2(t_k)$ ,  $\Delta_3(t_k)$  определяются по формулам:



$$\begin{aligned}\Delta_1(t_k) &= \kappa t_k^2 + \kappa_1; \quad \Delta_2(t_k) = \eta t_k^4 + \eta_1 t_k^2 + 1; \\ \Delta_3(t_k) &= \nu t_k^4 + \nu_1 t_k^2 + 1,\end{aligned}\quad (6)$$

причем

$$\begin{aligned}\kappa &= \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1\right) \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} - \left(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1\right) \frac{e_{33}}{e_{15}}; \\ \kappa_1 &= \left(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} - \frac{e_{31}}{e_{15}}\right); \quad \eta = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \cdot \frac{e_{33}}{e_{15}}; \\ \eta_1 &= \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1\right) \left(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\right) - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} - \frac{e_{33}}{e_{15}}; \quad \nu = \frac{c_{33}^E}{c_{11}^E}; \\ \nu_1 &= \left(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1\right) \left(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\right) - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E};\end{aligned}\quad (7)$$

а  $t_k^2$  — корни бикубического уравнения

$$t^6 - Pt^4 + Qt^2 - R = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}P &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu\right)^{-1} \left[ \left(\frac{e_{31}}{c_{11}^E} + \frac{e_{15}}{c_{11}^E}\right) \kappa - \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta_1 + \frac{e_{15}}{c_{44}^E} \eta - \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu_1 - \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \nu \right]; \\ Q &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu\right)^{-1} \left[ \frac{e_{33}}{c_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} - \left(\frac{e_{31}}{c_{11}^E} + \frac{e_{15}}{c_{11}^E}\right) \kappa_1 - \frac{e_{15}}{c_{44}^E} \eta_1 - \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \nu_1 \right]; \\ R &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu\right)^{-1} \left(\frac{e_{15}}{c_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}}\right).\end{aligned}\quad (9)$$

В этих соотношениях  $c_{11}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  — модули упругости материала при нулевом электрическом поле,  $e_{13}, e_{13}, e_{13}$  — пьезомодули,  $\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{33}^s$  — диэлектрические проницаемости при нулевой деформации.

Используя основные соотношения теории электроупругости (2) и учитывая (4), (5), можно все компоненты электроупругого поля выразить через  $A_k(\alpha)$  и  $B_k(\beta)$ . Удовлетворив (1) и (2), получим (4):

$$\begin{aligned}B_k(\beta) &= -\frac{2}{\pi} \frac{P_{1k}}{\beta^2} \int_0^\infty f_1(t) \cos \beta t dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \frac{P_{2k}}{\beta^2} \int_0^\infty f_2(t) \sin \beta t dt + \frac{2}{\pi \beta} \sum_{k=1}^3 P_{3k} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 A_k(\alpha)}{\alpha^2 t_k^2 + \beta^2} d\alpha\end{aligned}\quad (10)$$

$$A_k(\alpha) = C_k \cdot A_1(\alpha) \quad (11)$$

где  $P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}$  и  $C_k$  зависят от  $t_k, \Delta_1(t_k), \Delta_2(t_k), \Delta_3(t_k)$  и физико-механических постоянных материала.



Удовлетворив (3) и учитывая (11), будем иметь:

$$\int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = 0, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = m_{11} f_3(x) + \sum_{k=1}^3 n_{1k} B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x} d\beta, \quad a < x < \infty.$$

Решив (12) методом ортогонализации (5), будем иметь.

$$A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi \alpha} \int_a^{\infty} r \varphi(r) J_0(\alpha r) dr + \frac{2}{\pi \alpha} \int_a^{\infty} F(r) J_0(\alpha r) dr, \quad (13)$$

где

$$\varphi(r) = m_{11} \int_r^{\infty} \frac{f_3(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (14)$$

$$F(r) = r \sum_{k=1}^3 n_{1k} \int_0^{\infty} \beta^2 B_k(\beta) K_0\left(\frac{\beta}{t_k} r\right) d\beta,$$

$J_0(\alpha r)$  — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом,

$K_0\left(\frac{\beta}{t_k} r\right)$  — функции Макдональда  $m_{11}$  и  $n_{1k}$ , зависящие от  $t_k$ ,  $\Delta_1(t_k)$ ,

$\Delta_2(t_k)$  и  $\Delta_3(t_k)$ . Используя (14), (11), (10), выразим  $F(r)$  через  $A_1(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} F(r) = r \varphi^*(r) + \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \beta \left[ \sum_{k=1}^3 d_{1k} K_0\left(\frac{r}{t_k} \beta\right) \right] d\beta \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_1^2 + \beta^2} d\alpha + \\ + \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \beta \left[ \sum_{k=1}^3 d_{2k} K_0\left(\frac{r}{t_k} \beta\right) \right] d\beta \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_2^2 + \beta^2} d\alpha + \\ + \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \beta \left[ \sum_{k=1}^3 d_{3k} K_0\left(\frac{r}{t_k} \beta\right) \right] d\beta \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_3^2 + \beta^2} d\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (13) в (15), для определения  $F(r)$  получаем следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$F(r) = \Omega(r) + \int_a^{\infty} K(r, \gamma) F(\gamma) d\gamma, \quad (16)$$



где

$$\Omega(r) = -\frac{2r}{\pi m_{22}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^3 b_{4k} m_{k2} K_0\left(\frac{r}{t_k} \beta\right) d\beta \int_0^\infty f_1(t) \cos \beta t dt -$$

$$-\frac{2r}{\pi m_{22}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^3 b_{4k} m_{k3} K_0\left(\frac{r}{t_k} \beta\right) d\beta \int_0^\infty f_2(t) \sin \beta t dt +$$

$$+\frac{4r}{\pi^2} \int_0^\infty \gamma \varphi(\gamma) \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{d_{kj}}{t_j^2} \frac{\ln r / t_k}{\left(\frac{r}{t_k}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{t_j}\right)^2} d\gamma;$$

$$K(\gamma, r) = \frac{4r}{\pi^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{d_{kj}}{t_j^2} \frac{\ln r / t_k}{\left(\frac{r}{t_k}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{t_j}\right)^2} d\gamma. \quad (17)$$

$$K(\gamma, r) = \frac{4r}{\pi^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{d_{kj}}{t_j^2} \frac{\ln r / t_k}{\left(\frac{r}{t_k}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{t_j}\right)^2} d\gamma. \quad (18)$$

Здесь  $d_{kj}$  определено через  $\Delta_k(t_k)$  и  $t_k$ ; с использованием (5) показано, что (16) можно решить методом последовательных приближений (для пьезокерамики PZT-4). Далее, используя (16), (13), (11), (10), (6) и основные соотношения электроупругости (2), можно определить все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости.

Институт механики НАН Армении

#### Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, ՆԱՐԵԿ Ս. ՄԵԼԻՔՈՒՄՅԱՆ

##### Ուղղանկյանց կիսաանվերջ ճեղքով պիեզակերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության մի սիմետրիկ խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է նախապես բեռնացված պիեզակերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ սիմետրիկ խնդիր, որը եզրից վերջավոր հեռավորության վրա ունի ուղղանկյանց կիսաանվերջ ճեղք: Նախնական բեռնացման ուղղությունը ուղղանկյանց է ճեղքի առանցքին:

Կիսահարթության եզրի վրա տրված են մեխանիկական լարումների վեկտորը և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը, իսկ ճեղքի եզրի վրա տրված են նորմալ ճնշումը և էլեկտրական պոտենցիալը: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով: Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը բերվել է սկզբում զույգ ինտեգրալ հավասարման, իսկ հետագայում Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Ցույց է տրված վերջին հավասարման լուծելիությունը: Ստացված են անալիտիկ բաճառներ ճեղքի շարունակության գծի վրա մեխանիկական նորմալ լարման և էլեկտրական ինդուկցիայի վեկտորի նորմալ բաղադրիչի համար անջատված եզակիությանը:

#### ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев, Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, М., Изд. Физ.-мат.лит., 1988. <sup>2</sup> В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, НА.Шульга, Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. <sup>3</sup> А.Ф.Улитко, В кн.: Совр. пробл. механики и авиации, М., с. 290-300, 1982. <sup>4</sup> И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.Изд.Физ.-мат.лит., 1971. <sup>5</sup> В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян, Изв.АН Арм.ССР, т. 24, № 4, с. 1-15, 1971.



ФИЗИКА

УДК 5.44

А. Ж. Хачатрян

**Рассеяние электрона на конечной цепочке  
из произвольных короткодействующих потенциалов**

(Представлено академиком НАН Армении Д.М.Седракяном 26/III 1996)

Рассмотрим одномерную задачу движения электрона в поле потенциала

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i \delta(x - x_i), \quad (1)$$

где  $V_i$ ,  $x_i$  — произвольные величины.

Пусть решение уравнения Шредингера вне потенциала (1) имеет вид ( $\hbar = 1$ ,  $2m_0 = 1$  — масса электрона):

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + r(k)e^{-ikx}, \quad \text{при } x < x_1; \quad (2)$$

$$\psi(x, k) = t(k)e^{ikx}, \quad \text{при } x < x_N.$$

Здесь  $E = k^2$  — энергия электрона,  $r(k)$  и  $t(k)$  соответственно амплитуды коэффициентов отражения и прохождения электрона.

Как было показано в работе (1), если рассматривать данную задачу в терминах функций Грина (ФГ), то решение соответствующего уравнения Шредингера для ФГ электрона, в частности, слева от барьера будет иметь вид

$$G(x, x', k) = G_0(x, x', k) - r(k) \frac{G_0(x, x_1, k) G_0(x_1, x', k)}{G_0(x_1, x_1)}, \quad \text{при } x, x' < x_1. \quad (3)$$

В (3)  $G_0(x, x', k)$  — ФГ свободного электрона. Здесь, как и в случае решения волнового уравнения (2), величина  $r(k)$  является амплитудой коэффициента отражения электронного пучка единичной интенсивности и энергии  $E = k^2$ .

Уравнение Шредингера для ФГ электрона в поле (1) имеет вид



$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^N V_l \delta(x - x_l) - k^2\right) G(x, x', k) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

Как известно, решение уравнения (4) вне зависимости от вида потенциальной энергии электрона равносильно решению интегрального уравнения Дайсона (см. например (2)):

$$G(x, x') + \int dx'' G_0(x, x'') V(x'') G(x'', x') = G_0(x, x'), \quad (5)$$

где  $V(x)$  — потенциальная энергия электрона.

Как мы покажем, решение уравнения (5) и использование (3) в случае  $V(x)$  вида (1), позволяет определить амплитуду коэффициента отражения электрона  $r(k)$  для любых значений параметров  $V_l, x_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) и  $E$ .

Для потенциала (1) уравнение (5) записывается

$$G(x, x') + \sum_{l=1}^N V_l G_0(x, x_l) G(x_l, x') = G_0(x, x'). \quad (6)$$

Решая уравнение (6) при  $x = x_p$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ), для неизвестных  $G(x_l, x')$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) получим

$$G(x_l, x') = \frac{\det \hat{A}_{Nl}}{\det \hat{D}_N}, \quad (7)$$

где символ  $\det$  означает детерминант соответствующей матрицы. Здесь матрица  $\hat{D}_N$  имеет вид

$$\hat{D}_N = (\delta_{pl} + V_l G_0(x_l, x_p)); \quad l, p = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Матрица  $\hat{A}_{Nl}$  получается из матрицы  $\hat{D}_N$  (8) заменой  $l$ -ого столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} G_0(x_1, x') \\ G_0(x_2, x') \\ \dots \\ G_0(x_N, x') \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вводя обозначения

$$A_{Nl} = \det \hat{A}_{Nl} \quad \text{и} \quad \hat{D}_N = \det \hat{D}_N \quad (10)$$

и подставляя (7) в (6), получим ФГ электрона в поле (1)

$$G(x, x') = G_0(x, x') - \frac{1}{\hat{D}_N} \sum_{l=1}^N V_l G_0(x, x_l) A_{Nl}. \quad (11)$$



Полученное решение (11) удовлетворяет уравнению (4) на всей числовой оси, т.е.  $-\infty < x, x' < \infty$ . К сожалению для произвольных  $x$  и  $x'$  дальнейшее упрощение выражения (14) не представляется возможным. Однако, если интересоваться ФГ только в определенной области, т.е.  $x$  и  $x'$  меняются в пределах рассматриваемой области, то соответствующие упрощения (14), как мы покажем ниже, возможны.

Как отмечалось выше, для определения амплитуды коэффициента отражения  $r$  достаточно только знание ФГ левее от потенциала (1). Поэтому будем рассматривать полученное решение ФГ (11) в случае  $x, x' < x_1$ .

Для преобразования (11) воспользуемся связью между ФГ с одното-чечной ФГ, найденной в работе (3),

$$G(x, x') = \{G(x, x')G_0(x', x')\}^{1/2} \lambda_{x, x'}, \quad (12)$$

где

$$\lambda_{x, x'} = \exp \left\{ - \int_{\min(x, x')}^{\max(x, x')} \frac{dy}{2G_0(y, y)} \right\}. \quad (12a)$$

Используя (12), решение ФГ (11), при  $x, x' < x_1$ , можно преобразовать к виду

$$G(x, x') = G_0(x, x') - \frac{1}{D_N} \sum_{l=1}^N V_l \frac{G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)} \tilde{A}_N \frac{G_0(x, x_1)G_0(x_1, x')}{G_0(x_1, x_1)}. \quad (13)$$

В (18)  $\tilde{A}_N$  получается из  $A_N$  (10) при  $x' = x_1$ . Сравнивая (13) с (3), получим амплитуду коэффициента отражения электрона

$$r(k) = \frac{1}{D_N} \sum_{l=1}^N V_l \frac{G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)} \tilde{A}_N. \quad (14)$$

Выражение (14) можно представить в более удобной форме

$$r(k) = -\tilde{D}_{N+1} / D_N. \quad (15)$$

В (15)  $\tilde{D}_{N+1}$  детерминант матрицы  $\hat{\tilde{D}}_{N+1}$

$$\begin{aligned} (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{p+1, p+1} &= (\hat{D}_N) \quad ; \quad (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{1,1} = 0 \\ (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{p+1,1} &= G_0(x_p, x_1) \quad ; \quad (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{1, p+1} = \frac{V_l G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$n, p = 1, 2, \dots, N.$$



Таким образом, нам удалось представить амплитуду коэффициента отражения электрона  $r(k)$  от потенциала (1) в виде отношения детерминантов двух матриц  $\tilde{D}_{N+1}$ ,  $D_N$ .

Заметим, что между детерминантами  $\tilde{D}_{N+1}$  и  $D_N$  существует связь.

$$\tilde{D}_{N+1} = \frac{1 - V_1 G_0(x_1, x_1)}{V_1 G_0(x_1, x_1)} D_N - \frac{D_{N-1}}{V_1 G_0(x_1, x_1)}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что  $r(k)$  можно также представить в виде

$$r(k) = 1 - \tilde{A}_{N1} / (G_0(x_1, x_1) \cdot D_N r(k)). \quad (18)$$

Используя (17), (18), для коэффициента отражения электрона  $R$  получим следующую формулу:

$$R = r(k)r^*(k) = 1 - |D_N|^{-2}, \quad (19)$$

где  $D_N$  есть детерминант матрицы (8). При получении (19) мы учли, что ФГ  $G_0(x, x')$  свободного электрона чисто мнимая, т.е.

$$G_0(x, x) = -G_0^*(x, x). \quad (20)$$

Использованные нами свойства ФГ  $G_0(x, x')$  (12) и (20) для получения (19) верны и в случае ФГ электрона, движущегося в поле некоторого регулярного потенциала (4). Поэтому (19) можно также рассматривать как коэффициент отражения электрона от потенциала (1), при наличии некоторого дополнительного поля  $U(x)$ . В этом случае  $G_0(x, x')$  в  $D_N$  (8) определяется из уравнения

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) G_0(x, x') = \delta(x - x').$$

В конце отметим, что результаты (15) и (19) были получены в работах В. М. Гаспаряна, Б. Л. Альтшулера, А. Г. Аронова и З. А. Касаманяна, методом последовательной сшивки ФГ на  $\delta$ -потенциалах (5,6).

Выражаю признательность В. М. Гаспаряну за постановку задачи и внимание при выполнении данной работы, а также академику НАН Армении Д. М. Седракяну и Д. А. Бадалянцу за обсуждение полученных результатов.

Выполнение данной работы во многом стало возможным благодаря гранту № MVL000 от Международного научного фонда.

Армянский инженерный государственный университет



## Ա. Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

### Էլեկտրոնի ցրումը կամայական կարճ ազդող պոտենցիալներից բաղկացած վերջավոր շղթայի վրա

Աշխատանքում դիտարկվում է էլեկտրոնի միաչափ շարժումը վերջավոր քանակի  $\delta$ -պոտենցիալներից բաղկացած ցանցի դաշտում: Գտնված է Շրեդինգերի Գրինի ֆունկցիայի համար հավասարման ճշգրիտ լուծումը: Ցույց է տրված, որ պոտենցիալի պարամետրերի կամայական արժեքների համար էլեկտրոնի անցման գործակիցը կարելի է ներկայացնել որոշակի մատրիցի դետերմինանտի միջոցով: Ստացված արդյունքները ընդհանրացված են նաև արտաքին դաշտի առկայությամբ դեպքի համար:

## ЛИТЕРАТУРА-ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> З. А. Касаманян, Э. С. Юзбашян, Уч. зап. ЕГУ, № 3, с. 43, 1977. <sup>2</sup> Н. Ф. Немецкая, Физика элементарных частиц, М., Наука, 1977. <sup>3</sup> З. А. Касаманян, Изв. вузов. Физика, № 11, с. 20, 1979. <sup>4</sup> З. А. Касаманян, докт. дис., Ереван, 1982. <sup>5</sup> В. М. Гаспарян, ФТТ, т. 31, вып. 2, с. 162-171 (1989). <sup>6</sup> V. M. Gasparian, B. L. Atshuler, A. S. Aronov et al., Phys. Lett., v. 132, № 4, p. 201 (1988).



ГИДРАВЛИКА

УДК 621.311.21.002.5:532.5

К.Х.Овсепян, О.В.Токмаджян, О.С.Оганесян, Р.М.Рафаэлян

**Приближенные зависимости для оперативного определения  
параметров переходного процесса при отключении  
привода насоса**

(Представлено академиком НАН Армении Ф.Т.Саркисяном 7/V 1996)

В последнее время в связи с энергетическими затруднениями имеют место частые отключения электропитания агрегатов мелиоративных насосных станций. По этой причине в трубопроводах возникают неустановившиеся процессы, которые сопровождаются изменением скорости движения воды и давления в трубопроводе, что отрицательно влияет на его прочность и приводит к нежелательным режимам работы агрегата.

Вопросы исследования переходных процессов в системе "насос — трубопровод" вновь начали привлекать внимание специалистов Республики Армения также в связи с проектированием и вводом в действие гидроэлектрических агрегатов "МикроГЭС" для фермерских хозяйств, которые для условий республики легко изготавливаются на базе центробежных насосов.

В работах (1,2) подробно исследованы сложные переходные процессы в системе "насос — трубопровод" и разработаны аналитические методы расчета гидромеханических параметров переходного процесса.

В настоящей статье для определения параметров переходного процесса используются приближенные уравнения движения воды в трубопроводе, агрегата и характеристик насоса, практическая применимость которых нами установлена в процессе численного эксперимента.

Исходными для расчета переходного процесса являются:

уравнение агрегата при потере привода насоса

$$A \frac{dn}{dt} = -M, \quad (1)$$

уравнение движения воды в трубопроводе, дополненное членом, приближенно учитывающим упругие свойства воды и стенок трубопровода<sup>(3)</sup>,



$$C \frac{dH}{dt} + B \frac{dQ}{dt} = H - H_H, \quad (2)$$

уравнение напорной характеристики насоса при изменении частоты вращения (4), аппроксимированное параболой вида

$$\frac{H}{n^2} = a_1 + b_1 \frac{Q}{n} + c_1 \left( \frac{Q}{n} \right)^2, \quad (3)$$

уравнение момента сопротивления, входящее в уравнение агрегата, приближенно представленное в виде

$$M = a_0 + k_1 Q n^2. \quad (4)$$

При выводе уравнения (4) нами использована зависимость между мощностью и расходом, которую для тихоходных и нормальной быстроходности насосов достаточно точно можно аппроксимировать линейной зависимостью.

В приведенных уравнениях введены следующие обозначения:  $A = \frac{GD^2}{375}$ ;  $GD^2$  — маховая масса вращающихся частей насосного агрегата;  $a_0 = 971 \frac{N_0}{n_H}$ ;  $N_0$  — мощность насоса на холостом режиме;  $N_H$ ,

$Q_H$  — номинальная частота вращения;  $C = \frac{L}{4a}$ ;  $L$  — длина трубопровода;  $a$  — скорость распространения волны гидравлического удара;  $K_1 = 971 \frac{N_H - N_0}{Q_H}$ ;  $B = \frac{L}{gF}$ ;  $F$  — площадь сечения трубопровода;  $g$  —

ускорение силы тяжести;  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  — коэффициенты аппроксимации.

Для конкретных параметров насосных станций система уравнений (1) — (4) решена на ЭВМ.

Прежде чем перейти к изложению результатов решений, отметим следующее обстоятельство. Точное описание переходного процесса, как известно, осуществляется с помощью волнового уравнения, описывающего движение воды в трубопроводе. Однако это связано с трудностями вычислительного характера. С другой стороны, хотя и использование уравнения "жесткого" гидравлического удара значительно упрощает процесс вычислений, однако в зависимости от параметров системы "насос — трубопровод" может привести к заметным отклонениям вычисленных значений от действительных.

Для того чтобы учесть влияние упругости воды и стенок трубопровода на переходный процесс и в то же время сравнительно легко реализовать решения уравнений, нами уравнение движения дополняется



членом  $C \frac{dH}{dt}$ , учитывающим упругие свойства воды и стенок трубопровода.

Уравнение (2) решено операторным методом. В результате получена аналитическая зависимость  $H = H(Q)$ , которая совместно с уравнениями (1)–(4) позволяет определить искомые значения  $n(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $H(t)$  и  $M(t)$  при переходном процессе.

Для апробации предлагаемых уравнений и метода решения и суждения о точности и практической их применимости нами в качестве контрольных расчетов определены значения времен  $T_n$  и  $T_Q$  в насосном и тормозном режимах, когда после отключения электропривода расход и частота вращения обращаются в нуль.

Сопоставление полученных данных с соответствующими параметрами, полученными в работе (1), показало, что уравнения (1)–(4) применимы для практических расчетов. Расчеты выполнены и по параметрам действующей насосной станции со следующими данными: насос марки 14М–12×4, длина трубопровода 2200 м, диаметр 630 мм, расход 220 л/с, напор 300 м, скорость распространения волны гидравлического удара – 1100 м/с.

При проектировании и выборе средств защиты трубопроводов насосных станций весьма важно иметь сведения о величинах минимального и максимального напоров при переходных режимах. С этой целью нами проведены расчеты гидравлического удара, где учитывается влияние инерции насосного агрегата. При анализе использованы также данные Дж. Пармакяна (1) относительно этих величин.

Отметим некоторые результаты исследований качественного характера. В зависимости от соотношений фазы гидравлического удара  $t_\phi$  и постоянного трубопровода  $T_T$ , характер изменения давления в трубопроводе может качественно различаться. А именно, если  $t_\phi < 0,7T_T$ , то изменение давления в трубопроводе носит колебательный характер, если же  $t_\phi > 0,7T_T$ , то процесс в трубопроводе близок к апериодическому.

Надо также отметить, что в интервале  $1 < \frac{T_T}{t_\phi} < 1,5$ , как по цепным

уравнениям Аллиев, так и в результате наших решений с использованием уравнения (2) получается, что первый пик давления при гидравлическом ударе незначительно превышает предельное значение, полученное из условия "жесткого" гидравлического удара. Исследования показывают (2), что для насосных установок, где выполняется условие  $\frac{T_a}{t_\phi} > 1$ , при расчетах переходных процессов с практической точностью

можно использовать уравнение "жесткого" гидравлического удара.



Этот важный вывод позволяет не только упростить процесс вычислений, но и в некоторых случаях получать аналитические решения.

Например, при потере привода насоса или сбросе нагрузки на генераторе гидроэлектрического агрегата нужно предварительно иметь сведения о разгонной частоте вращения и расхода в турбинном режиме.

В этом случае использование уравнений движения воды в трубопроводе и агрегата сводится к системе динамических дифференциальных уравнений, а качественный анализ их устойчивости позволяет определить отмеченные параметры как особую точку типа "фокус" (5).

Армянский научно-исследовательский институт  
водных проблем и гидротехники

Կ. Խ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ, Հ. Վ. ԹՈՔՄԱՋՅԱՆ, Հ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ռ. Մ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

Պոմպի շարժիչի անջատման ժամանակ առաջացած անցումային գործընթացի  
պարամետրները որոշելու համար մոտավոր առնչություններ

Էներգետիկ դժվարությունների հետևանքով վերջին ժամանակները հաճախ տեղի են ունենում մեխանիզմի պոմպակայանների հոսանքի անջատում: Այդ հետևանքով խողովակաշարերում տեղի է ունենում հիդրավիկական հարվածի երևույթը, որը բացասական է ազդում պոմպակայանների հոսալի աշխատանքի վրա, հաճախ բերում է վթարների: Հողվածում, ելնելով ագրեգատի հավասարումներից և ջրի շարժման մոտավոր հավասարումից, կազմվել է ալգորիթմ և կատարվել են թվային հաշվարկներ: Ցույց է տրված, որ ստացված կախվածությունները գործնականորեն ճիշտ են բնութագրում անցումային գործընթացը «պոմպ-խողովակաշար» համակարգում:

#### ЛИТЕРАТУРА —ՊՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Г. И. Кривченко, Н. Н. Аршеневский, Е. В. Квятковская и др., Гидромеханические переходные процессы в гидроэнергетических установках, М., Энергия, 1975. <sup>2</sup> К. П. Вишневский, Моделирование переходных процессов в сложных напорных системах с насосными станциями, Афтореф. докт. дис., Л., 1987. <sup>3</sup> К. Х. Овсепян, Изв.АН АрмССР. Техн. науки, т. 29, № 1 (1976). <sup>4</sup> Б. И. Находкин, Гидротехника и мелиорация, №6, с. 42-47, 1956. <sup>5</sup> Р. М. Рафазян Изв.АН АрмССР. Техн. науки, т. 28, № 6 (1975).



УДК 552.578

Р. А. Мандалян, А. С. Саакян

### О природе горючих сланцев Дилижанского месторождения

(Представлено академиком НАН Армении С.В.Григоряном 26/IV 1996)

Дилижанская сланценосная терригенная формация (Севано-Ширакский синклинорий, верхний олигоцен — нижний миоцен) обнажена в виде полосы, развитой по обоим бортам долины р.Агстев в пределах Большого Дилижана на протяжении около 10 км: от окрестностей микрорайона Шамахян до подступов к озеру Парзлич (1). Суммарная мощность ее составляет 480-650 м. В вещественном отношении она характеризуется преобладающим развитием терригенных накоплений (конгломераты, песчаники, алевролиты, глины, аргиллиты, горючие сланцы). В составе терригенного парагенезиса кровли Дилижанской формации по левобережью р. Агстев развиты маломощные слои углей и углистых аргиллитов. Горючие сланцы связаны преимущественно с нижней-средней частью разреза формации. В левобережье р. Агстев они слагают до 10-11 разобщенных по разрезу пластов с суммарной мощностью около 35 м. Здесь они максимально развиты по площади в бассейне речки Штоганаджур. Значительные скопления горючих сланцев развиты по правобережью р.Агстев на северо-восточной окраине Дилижана, в промежутке между микрорайоном Кахни-хач, дренажной галереей и территорией пансионатов "Цветмет" и "Импульс".

В обнажении это темно-серая или почти черная тонкослоистая (листовая) порода, приобретающая в выветрелых и окисленных разновидностях буровато-желтую или светло-коричневую окраску. Содержит преобразованные растительные остатки. В сухих качественных разновидностях она загорается от огня и горит со специфическим запахом жженой резины или гуттаперчи. Изучение под микроскопом показывает, что горючие сланцы слагаются тонкодисперсной смесью глинистого компонента (преобладает) и органического вещества (керогена).

Судя по данным рентгеноструктурного и электронографического анализов, в составе глинистого компонента отчетливо преобладает каолинит, в котором по мере наращивания разреза обнаруживается небольшая примесь монтмориillonита и, предположительно, смешанно-слоистого образования типа слюда-монтмориillonит. Обломочная примесь



алевритовой и реже песчаной размерности представлена окатанными и полуокатанными зернами вулканических пород (трахириолиты и риодациты, трахиандезиты, а также андезито-базальты и реже базальты). Им соответствует магнетит-диопсид-биотит-цирконовая минеральная ассоциация тяжелой фракции. В некоторых разновидностях в изобилии присутствует пирит в форме конкреций и псевдоморфоз по органическим, в том числе растительным, остаткам. В составе легкой фракции развиты кварц, санидин, плагиоклазы, вулканическое стекло, а также вывстрелые и оглиненные минералы.

Керогеновый компонент представляет собой желтовато-бурое или коричневое вещество с заметной или отчетливо выраженной люминесценцией. Судя по реликтам, его преобладающая масса была представлена коллоальгинитом по классификации А.И.Гинзбург (2). Считается, что большая часть коллоальгинита различных месторождений горючих сланцев является продуктом разложения планктонных, преимущественно бесскелетных зеленых и желтовато-зеленых водорослей. Предполагается также, что коллоальгинит может иметь общее зоогенно-фитогенное происхождение. В качестве примеси (8-15 %) определяется наличие красноватого и буро-коричневого вещества псевдовитринитового характера, которое развито в виде сплошных полос, линзочек и каемок, облегающих минеральные зерна и комочки органического, в том числе водорослевого, происхождения (талломоальгинит). От витринита, исходным материалом которого являются высшие растения, псевдовитринит отличается бесструктурностью вещества и более низким показателем преломления. В литературе последних лет предполагается, что по исходному материалу в составе горючих сланцев он представляет собой остатки донных бурых водорослей, являющихся частыми обитателями мелководных водоемов (2,3). Изложенные данные позволяют отнести основную часть горючих сланцев Дилижанского месторождения к категории коллоальгинит-псевдовитринитовых. Примесь витринитового компонента обнаруживают сланцы средней части формации по левобережью реки Штоганаджур и района железнодорожного узла Дилижана (таблица).

Судя по данным 11 полных силикатных анализов, колебания порообразующих компонентов связаны со значительными вариациями величин п.д.п. (от 8 до 17,46 %), которые коррелируются с содержаниями органического вещества. Заметны слабая карбонатность сланцев, отчетливое преобладание окисного железа над закисным, а также умеренное содержание серы (кроме проб 2 и 9). По результатам 50 спектральных анализов горючих сланцев примечательны вышекларковые содержания ванадия (0,001-0,02, среднее 0,016) и циркония (0,001-0,018, среднее 0,009). Считается, что в подобной обстановке ванадий чаще накапливается в илах при отмирании планктона в форме ванадийорганических, в том числе порфириновых, соединений. Присутствие циркония связано с обилием минерала циркона в составе обломочной примеси горючих сланцев.



## Химический состав горючих сланцев

| №<br>п.п. | SiO <sub>2</sub> | TiO <sub>2</sub> | Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | FeO  | CaO  | MgO  | MnO  | Na <sub>2</sub> O | K <sub>2</sub> O | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> | CO <sub>2</sub> | S <sub>общ.</sub> | ВЛ   | п.п.п. |
|-----------|------------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|------|------|------|------|-------------------|------------------|-------------------------------|-----------------|-------------------|------|--------|
| 1         | 52,20            | 0,28             | 14,20                          | 6,51                           | 0,50 | 5,50 | 2,30 | 0,18 | 0,15              | 0,90             | Сл                            | 2,50            | 1,18              | 0,15 | 13,45  |
| 2         | 48,30            | 0,14             | 17,26                          | 6,60                           | 0,22 | 4,20 | 0,85 | 0,14 | 0,50              | 1,90             | Сл                            | 1,26            | 8,53              | 2,10 | 8,00   |
| 3         | 48,09            | 0,64             | 17,28                          | 4,85                           | 1,43 | 4,55 | 0,90 | 0,11 | 0,75              | 1,80             | 0,46                          | 2,02            | 0,84              | 4,12 | 12,16  |
| 4         | 49,27            | 0,69             | 17,10                          | 4,79                           | 2,29 | 2,82 | 1,61 | 0,14 | 0,67              | 1,70             | 0,57                          | 0,88            | 0,60              | 4,46 | 12,41  |
| 5         | 48,48            | 0,46             | 18,42                          | 5,80                           | 0,24 | 5,65 | 1,82 | 0,05 | 0,93              | 2,90             | 0,09                          | 2,00            | 0,60              | 2,33 | 10,23  |
| 6         | 48,68            | 0,64             | 16,66                          | 4,60                           | 2,01 | 5,64 | 1,46 | 0,32 | 1,30              | 2,60             | 0,57                          | 3,16            | 1,28              | 2,95 | 8,13   |
| 7         | 43,45            | 0,59             | 12,43                          | 8,62                           | 0,87 | 4,00 | 3,66 | 0,36 | 0,47              | 1,00             | 0,69                          | 1,05            | 2,14              | 3,21 | 17,46  |
| 8         | 43,88            | 0,20             | 16,23                          | 6,23                           | 0,35 | 5,84 | 1,53 | 0,05 | 0,50              | 1,77             | 0,10                          | 1,84            | 0,90              | 3,50 | 17,08  |
| 9         | 42,24            | 0,14             | 17,46                          | 5,12                           | 0,13 | 5,78 | 2,03 | 0,05 | 0,50              | 1,76             | 0,05                          | 2,50            | 5,00              | 3,43 | 13,81  |
| 10        | 55,00            | 0,20             | 16,17                          | 5,72                           | 0,18 | 2,01 | 1,81 | 0,02 | 0,48              | 1,75             | Сл                            | 0,20            | 0,71              | 3,29 | 12,46  |
| 11        | 55,27            | 0,32             | 11,8                           | 6,06                           | 0,32 | 4,18 | 1,76 | 0,02 | 2,11              | 3,10             | 0,20                          | 0,46            | 0,20              | 4,10 | 10,10  |

Примечание. Работа проведена в химической лаборатории ИГН НАН РА. Анализы приведены к 100 %.



Образование горючих сланцев имело место в условиях вулканотектонической впадины, которая по мере обводнения превращалась в озерный водоем продолжительного развития. Их непосредственному накоплению способствовало сочетание ряда благоприятных факторов: теплые и влажно-субтропические климатические условия, обилие растительного покрова в обрамлении озера, интенсивное развитие планктона, а также другой биомассы и, как следствие, концентрация в осадках органического вещества (ОВ). Главным исходным материалом служила органическая масса, составленная отмершими плавающими и донными водорослями, т.е. сапропелевое вещество с высоким содержанием углеводов и белков. Дополнительным источником являлись остатки высшей растительности, обильно произраставшей в обрамлении озера и на сопредельных площадях. Вызревание всего этого материала в результате сложнейших биохимических и химических превращений протекало в несколько последовательных стадий.

*Седиментогенез:* накопление преимущественно водорослевой биомассы, ее смешение с глинистыми осадками и, вероятно, с гуминовыми кислотами, являющимися продуктами биохимических преобразований растительных остатков; начальное преобразование ОВ в присутствии свободного кислорода и при активном участии аэробных бактерий; начало липидной стадии превращений.

*Диagenез:* биохимические преобразования при отсутствии свободного кислорода и участии анаэробных бактерий с превращением ОВ в бесструктурное полиморфное вещество; вторичные реакции бактериального синтеза, полимеризация продуктов распада, биосинтез и минералообразование, формирование органических соединений серы.

*Катагенез:* уплотнение от вязкого геля до твердой породы, керогеновая стадия преобразования ОВ в нерастворимые (в природных условиях) формы.

Таким образом, изложенные данные позволяют отнести дилижанские горючие сланцы к сапропелево-гумусовому глинистому и алевроитоглинистому типу. Вместе с вмещающими породами они претерпели вторичные преобразования, связанные главным образом с дислокационными метаморфизмом. Отметим главные из них: развитие систем трещин и пустот, залеченных кальцитом, ангидритом и реже халцедоном и развитие по глинисто-органической массе корок и пленок коллоидального железистого вещества и гематита.

В целом же уровень вторичных минеральных преобразований, протекающих в условиях небольших вертикальных нагрузок, можно считать невысоким. Они в большей мере связаны с тектонической напряженностью, возникшей при складчатых и разрывных деформациях. Это формирование складок, проявление сбросов, сдвигов, сколов и других нарушений сплошности слоев. При этом органическое вещество сланцев не испытывало больших преобразований.

Институт геологических наук НАН Армении



**Դիլիջանի հանքավայրի այրվող թերթաքարերի առաջացման բնույթի մասին**

Դիլիջանի ցամաքածին ֆորմացիայի (վերին օլիգոցեն-ստորին միոցեն, Սևան-Շիրակի սինկլինորիում) այրվող թերթաքարերի առաջացումը կապված է մի շարք բարենպաստ գործոնների համակցությունից՝ տեկտոնական գոգավորության գոյացում, որը վերածվում է երկարատև զարգացում ունեցող լճավազանի, խոնավ-մերձարևադարձային և բարեխառն կլիմայական պայմաններ, բիոմասսայի առատություն, պլանկտոն գլիմառների ինտենսիվ զարգացում: Որպես հետևանք մանրահատիկ նստվածքներում նկատվում է օրգանական նյութի խտության բարձրացում, որը քիմիական և կենսաքիմիական բազմափուլ ձևափոխության հետևանքով դառնում է այրվող բաղադրամաս՝ կերոզեն: Նա կավային նյութի հեւ հանդես է գալիս նուրբ դիսպերս խառնուրդի ձևով՝ գլխավորապես կառլինիտային կազմով: Այրվող թերթաքարերը առանձնապես զարգացած են Դիլիջանի ֆորմացիայի ստորին և միջին մասերում:

**ЛИТЕРАТУРА -ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> Р. А. Маядалян, О. А. Саркисян, Изв. НАН Армении, Науки о Земле, т. 46, № 3, с. 57-60 (1994). <sup>2</sup> А. И. Гинзбург, Атлас петрографических типов горючих сланцев, Л., Недра, 1991. <sup>3</sup> А. И. Гинзбург, Е. Ф. Филатов, И. А. Летушева, Горючие сланцы, № 3, с. 229-237, 1984.



МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

УДК 577.23

Р. А. Захарян, П. А. Казарян, А. С. Агабалян,  
академик НАН Армении К. Г. Карагезян

Стимуляция  $\text{Ca}^{2+}$ -дсРНК синтеза цАМФ и ингибирование  
транскрипции гена "шус" в клетках лимфосаркомы Плиссе

(Представлено 22/III 1996)

Как известно, двухспиральные рибонуклеиновые кислоты (дсРНК) оказывают стимулирующее воздействие на первичный и вторичный иммунные ответы, а также имеют индуцирующее влияние на эндогенный синтез интерферона. Показано, что противоопухолевый и противовирусный эффекты дсРНК реализуются через синтез интерферона и ряд активирующихся при этом биохимических реакций, находящихся в зависимости, по крайней мере, от двух основных факторов: 1) повышения уровня 2-5 олигоаденилата, оказывающего активирующее действие на латентную дсРНК-зависимую РНК-азу и 2) индукции активности дсРНК-зависимой протеинкиназы, фосфорилирующей субъединицу фактора инициации процесса элонгации ELF (1,2).

На основании проведенных нами ранее исследований было установлено, что под действием дсРНК отмечаются: а) существенное повышение активности процесса фосфорилирования белков плазматической мембраны; б) интенсификация трансмембранных токов экстрацеллюлярного  $\text{Ca}^{2+}$ , в) повышение функциональной активности фосфолипазы  $\text{A}_2$ , катализирующей процесс деацилирования фосфолипидов — глицеридов с увеличением пула лизоформ этих соединений и полиеновых неэстерифицированных жирных кислот, наделенных иммунномодулирующими свойствами (3-6). Было также выявлено, что в лейкомиических лимфобластах человека, изученных *in vitro*, биохимические сдвиги, индуцируемые интерфероном и дсРНК, сопровождаются активированием механизмов запрограммированной гибели клеток и, как результат, повышением активности  $\text{Ca}^{2+}$  —  $\text{Mg}^{2+}$  — зависимой эндонуклеазы, фрагментирующей дезоксирибонуклеиновую кислоту (ДНК) хроматина по межнуклеосомным участкам, и гибелью лимфобластов, на фоне истощения клеток АТФ и ДПН. Активация отмеченной выше эндонуклеазы наступает в результате транслокации цитозольного  $\text{Ca}^{2+}$  в ядра лимфобластов с участием кальмодулина (7,8).



Исследование активности системы циклазы цАМФ-протеинкиназы А,  $\text{Ca}^{2+}$  — активируемой системы, включая активность протеинкиназы-С и активности сопряженных с этими системами генов в процессе индукции механизмов запрограммированной гибели онкотрансформированных клеток, является важным в понимании механизмов регрессии опухолей и повышения эффективности используемых в онкологической практике терапевтических средств.

Целью настоящего исследования являлось изучение влияния препарата кальциевой соли дсРНК (Са-дсРНК) с молекулярной массой  $1,5 \times 10^6$  дальтон (Д), выделенной из киллерного штамма *Sacharomyses cerevisiae* (9), на процесс размножения клеток лимфосаркомы Плиссе, уровень цАМФ и экспрессию протоонкогена с-мус.

В работе использовали первичную культуру клеток лимфосаркомы Плиссе (в каждой пробе находилось около  $5 \times 10^4$  клеток), которая содержалась в среде RPMI-1640, содержащей 2 мМ глутамина, 10 % сыворотки телянка, 500 ед/мл пенициллина и 700 ед/мл стрептомицина. Эффекты препарата РНК оценивались по истечении 48 ч инкубации клеток при  $37^\circ\text{C}$  и 5 %  $\text{CO}_2$ . О выживаемости клеток судили по степени интенсивности окрашиваемости их трипановым синим.

Уровень транскрипции "с-мус" гена характеризовали по "Норттериблот" анализу тотальной фракции м-РНК, выделенной из клеток лимфосаркомы Плиссе через 4 ч после воздействия дсРНК. С целью идентификации был использован экзон-I гена "с-мус" (фирма Amersham, Англия). Пробы-зонды были мечены  $\text{P}^{32}$  СТР (300 Ки/мМ, фирма Amersham, Англия) методом НИК-трансляции.

Концентрацию циклического АМФ (цАМФ) клеток определяли радиоиммунным методом. Спустя 4 ч после воздействия дсРНК клетки переносили в полипропиленовую пробирку с 70 % раствором эталона. После 5 с пребывания в жидком азоте пробирки переносили на 5 мин в кипящую водяную баню, клетки удаляли, а лиофилизированный супернатант использовали в радиоиммунологическом анализе с применением стандартного набора реактивов фирмы Amersham.

Как явствует из табл. 1, кальциевая соль дсРНК в концентрации 15 мкг/мл оказывает примерно 50 % ингибирующее действие на процесс размножения клеток лимфосаркомы Плиссе.

В то же время при этом не обнаруживается сколько-нибудь токсического эффекта на функциональное состояние исследованных клеток (табл. 2).

Приведенный фактический материал является доказательством ингибирующего влияния  $\text{Ca}^{2+}$  — дсРНК в условиях *in vitro* на процесс деления и размножения клеток лимфосаркомы Плиссе, не проявляя при этом значительных деструктивных воздействий на генетический аппарат. Примечательно, что спустя 4 ч после воздействия препарата наблюдается значительное, почти девятикратное повышение содержания цАМФ, составляющее приблизительно  $18,3 \pm 2,6$  р/мол/ $10^7$  клеток, против  $2,1 \pm 0,1$  р/мол/ $10^7$  клеток в контроле.



Таблица 1

Влияние Са-дсРНК на размножение клеток лимфосаркомы Плиссе  
in vitro (исходное количество клеток  $5 \times 10^4$ , 48 ч, 37°C, 5% CO<sub>2</sub>)

| Конечная концентрация<br>Са-дсРНК, мкг/мл | Число клеток/мл    |
|-------------------------------------------|--------------------|
| 0                                         | $1,9 \times 10^5$  |
| 0                                         | $1,8 \times 10^5$  |
| 1,5                                       | $1,82 \times 10^5$ |
| 1,5                                       | $1,95 \times 10^5$ |
| 3,0                                       | $1,85 \times 10^5$ |
| 3,0                                       | $1,70 \times 10^5$ |
| 6,0                                       | $1,55 \times 10^5$ |
| 6,0                                       | $1,18 \times 10^5$ |
| 15,0                                      | $0,98 \times 10^5$ |
| 15,0                                      | $1,20 \times 10^5$ |
| 25,0                                      | $0,75 \times 10^5$ |
| 25,0                                      | $0,60 \times 10^5$ |

Таблица 2

Жизнеспособность клеток лимфосаркомы Плиссе после  
воздействия Са-дсРНК (IC<sub>50</sub> 15 мкг/мл, 48 ч, 37°C, 5% CO<sub>2</sub>)

| № | Число живых<br>клеток | Число<br>погибших клеток | Общее количество<br>клеток |
|---|-----------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1 | 398 (90,5 %)          | 42 (9,5 %)               | 440 (100 %)                |
| 2 | 326 (92,1 %)          | 28 (7,9 %)               | 352 (100 %)                |
| 3 | 266 (92,4 %)          | 22 (7,6 %)               | 288 (100 %)                |

Нарушения в сбалансированности между активностями протеинкиназы-А и протеинкиназы-С, с одной стороны, и активностью сопряженных с ними генов, с другой, рассматриваются как один из важных этапов запуска процессов онкотрансформации, равно как и коррекция их сбалансированности — как один из этапов реверс-трансформации опухолевых клеток в нормальные. Координированная экспрессия протоонкогенов: генов *c-fos*, *c-myc*, *c-jun* и активация этих генов наблюдается во многих клетках уже на ранних стадиях митотического деления и стимуляции. Между тем следует отметить также, что в некоторых клетках описанная выше положительная коррелятивная связь между активацией указанных протоонкогенов и процессами пролиферативного роста не была обнаружена.

Идентификация транскриптов гена "с-мус", отраженная в условиях нашего эксперимента, свидетельствует о понижении уровня его транскрипции, развивающейся в результате воздействия Са<sup>2+</sup> — дсРНК.

Полученные результаты позволяют предположить, что отмеченный выше цитостатический эффект Са<sup>2+</sup> — дсРНК комплексов, по-видимому,



реализуется на исследованные лимфобласты через активацию системы цАМФ.

Не исключено, что с повышением концентрации цАМФ происходит прямое ингибирование интенсивности течения процесса образования диацилглицерина и как следствие ингибирования снижение уровня транскрипции протоонкогенов, вовлеченных в процессы митотической стимуляции. Допускается существование и других механизмов ингибирования процесса транскрипции гена "с-мус", включая и прямое воздействие продуктов трансляции генов, активируемых в условиях индукции дсРНК процессов терминальной дифференциации на процессы транскрипции гена "с-мус".

Республиканский гематологический центр  
Министерства здравоохранения РА  
Институт молекулярной биологии НАН Армении

Ռ. Ա. ՉԱՔԱՐՅԱՆ, Պ. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա. Ս. ԱՂԱԲԱԼՅԱՆ,  
Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Կ. Գ. ՂԱՄԱԳՅՈՉՅԱՆ

Ֆիզիկական ԱՄՖ-ի սինթեզի և "myc" գենի տրանսկրիպցիայի ինհիբիցիայի  
խթանումը  $Ca^{2+}$ -եպ-ՌՆԹ-ով Պլիսեի լիմֆոսարկոմայի բջիջներում

Ուսումնասիրված է  $Ca^{2+}$ -երկպարույր ՌՆԹ-ի ( $Ca^{2+}$ -եպ-ՌՆԹ) ազդեցությունը ԱՄՖ-ի սինթեզի և "myc" գենի տրանսկրիպցիայի գործընթացների վրա Պլիսեի լիմֆոսարկոմայի բջիջներում: Ցույց է տրված, որ պատրաստուկի միանվագ ներարկումը խթանում է ԱՄՖ-ի սինթեզը և "myc" գենի տրանսկրիպցիայի ինհիբիցիան: Ստացված տվյալները թույլ են տալիս ենթադրելու, որ  $Ca^{2+}$ -եպ-ՌՆԹ-ի վերոհիշյալ դրական ազդեցությունը լիմֆոբլաստների վրա իրականացվում է ցիկլիկ ԱՄՖ-ի ակտիվացման միջոցով:

#### ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> W. K. Roberts, A. Hovanessian, Nature, v. 264, p. 477-482 (1976). <sup>2</sup> P. Leblen, C. C. Sen, PNAJ, p. 3107-3111 (1976). <sup>3</sup> К. Г. Карагезян, Р. А. Захарян, С. С. Овакимян, Биол. журн. Армении, т. 40, № 12, с. 979-985. <sup>4</sup> Р. А. Захарян и др. в кн.: Метаболическая регуляция функции мембран, мат. симп. 1986, с. 189-196, Ереван, 1990. <sup>5</sup> К. G. Karageyzian, R. A. Zakharian, S. S. Ovakimian, 19th Meeting of FEBS, Abstract book, № 10397, 1989. <sup>6</sup> R. A. Zakharian, K. G. Karageyzian, ISF-IOCI World Congress 1988, Abstract book 3, p. 12, Tokyo, 1988. <sup>7</sup> R. A. Zakharian, Annual Meeting of the Inter Sol. Interferon Research. Abstract book, 1-85, USA, 1990. <sup>8</sup> Р. А. Захарян и др., ДАН СССР, т. 320, № 4. <sup>9</sup> Р. А. Захарян и др., Экспериментальная онкология, т. 7, № 3, с. 54-56 (1985).



БИОФИЗИКА

УДК 577.37

А. С. Оганесян, А. В. Гаспарян, С. И. Варданян, Р. С. Авакян,  
академик НАН Армении С. С. Оганесян

**Реактивность эритроцитов к миллиметровым электромагнитным  
волнам при ишемической болезни сердца**

(Представлено 17/X 1995)

Несмотря на широкое применение миллиметровых электромагнитных волн (ММВ) нетепловой интенсивности в терапии ряда заболеваний вопрос об эффективности лечения сердечно-сосудистых заболеваний ММВ остается невыясненным (1,2). Недостаточно изучены также возможности использования эффектов ММВ на кровь в диагностике. Определение биофизических параметров клеток крови способствует внедрению высокочувствительных методов диагностики и прогноза заболевания на клеточно-молекулярном уровне. В настоящей работе сделана попытка на основе определения степени модуляции кинетических параметров кислотного гемолиза эритроцитов под воздействием ММВ выявить чувствительность доноров и больных ишемической болезнью сердца (ИБС) к ММВ.

Исследовались эритроциты у 26 больных (22 мужчин и 4 женщины) ишемической болезнью сердца и у 12 доноров (6 мужчин и 6 женщин). Гемолиз эритроцитов проводился на первый и седьмой день госпитализации. Кровь (100 мкл) забирали утром натощак из пальца и разбавляли в отношении 1:10 в изотоническом растворе в присутствии 25 ед гепарина. Кислотный гемолиз проводили в рабочей камере агрегометра до и после двухчасовой инкубации при температуре  $+37^{\circ}\text{C}$  при постоянном перемешивании. Кровь инкубировали в двух кюветах, одну из которых подвергали двухчасовому облучению ММВ аппаратом "Арцах-2NG" (Институт радиофизики НАН РА) с мощностью потока 0,01 мкВт, при длине волн от 3 до 8 мм, а вторая кювета с цельной кровью являлась контрольной. Для проведения автоматической регистрации кислотного гемолиза из каждой кюветы брали по 20 мкл крови и впрыскивали в рабочую кювету агрегометра, содержащую 500 мкл гемолитической среды (0,9 NaCl 15 mM Трис/HCl, pH 2,2). Константу скорости гемолиза низкостойких (КСН) и высокостойких (КСВ) эритроцитов определяли по тангенсу угла на прямолинейных участках кривой гемолиза. Прямо-



линейная зависимость величины КСН от процента низкостойких и КСВ от процента высокостойких эритроцитов позволяет определить их количество в каждой пробе.

Реактивность эритроцитов к ММВ определяли степенью изменения величины КСН под воздействием ММВ по отношению к контролю.

Степень тяжести заболевания фиксировали на основе эхо- и кардиограмм. Статистическую оценку различий групп проводили непараметрическим критерием Вилкоксона — Манна — Уитни (3). Результаты, не удовлетворяющие уровню достоверности ( $p = 0,05$ ), отвергались.

Статистически достоверных различий в величине КСН эритроцитов доноров ( $0,94 \pm 0,07$ ) и больных ИБС ( $1,06 \pm 0,09$ ) до начала облучения ММВ в инкубации не было выявлено. У больных ИБС с первого на седьмой день лечения отмечено увеличение реактивности к ММВ (таблица).

При хронической коронарной недостаточности отмечены глубокие структурные перестройки в липидном спектре мембран эритроцитов, что приводит к нарушениям состояний  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -АТФазы и накоплению ионов натрия и кальция при одновременном уменьшении внутриклеточного калия (4). Снижение внутриклеточного АТФ в эритроците вызывает сложный комплекс структурно-функциональных изменений, повышается ассоциация белка спектрина с компонентами мембраны, что повышает резистентность эритроцитов к разным типам гемолиза (5,6). По-видимому, отсутствие реактивности эритроцитов крови у больных ИБС на первый день обследования определяется низким уровнем АТФ в эритроцитах и указывает на тяжесть заболевания. С улучшением общего состояния больного нормализуются уровень АТФ, ионов кальция в клетке и значение поверхностного потенциала, о чем свидетельствует увеличение КСН после двухчасовой инкубации эритроцитов с ММВ *in vitro*.

Реактивность эритроцитов к ММВ у доноров и больных ИБС  
(в % от числа обследованных) в процессе лечения

| Параметр                  | Реактивность эритроцитов<br>к ММВ |
|---------------------------|-----------------------------------|
| Доноры                    | 83%                               |
| Больные ИБС<br>до лечения | 45%                               |
| после лечения             | 84%                               |

Ранее показано (7), что под влиянием облучения ММВ нетепловой интенсивности скорость потребления глюкозы в эритроците *in vitro* поддерживается на первоначальном уровне и не подвергается изменению за период двухчасовой инкубации. Предполагается, что ММВ активируют энергетический метаболизм путем влияния на плазматическую



мембрану эритроцитов у больных ИБС. Следовательно, замедление перехода более стойких эритроцитов в менее стойкие за период двухчасовой инкубации может быть обусловлено поддержанием гомеостаза эритроцитов и особенно мембранного поверхностного заряда под воздействием ММВ. В то же время под воздействием ММВ отмечено ускорение этого перехода и увеличение КСН после инкубации. Как показано в той же работе (7), разнонаправленность изменения интенсивности флуоресценции при разных длинах волн (7,1 и 5,6 мкм) свидетельствует о специфичности восприятия мембраной эритроцитов больных ИБС радиоволн. В нашем случае разнонаправленность изменения константы скорости гемолиза происходит под влиянием шумового сигнала ММВ и указывает на то, что эритроциты выбирают нужную им частоту для регулирования биоэнергетических процессов, что, в свою очередь, определяется уровнем активности функционирующих систем. Возможно, что реактивность эритроцитов к ММВ обусловлена наличием в крови высокостойких к кислотному гемолизу эритроцитов, что может определять чувствительность человека к ММВ.

Таким образом, увеличение абсолютной величины реактивности эритроцитов к ММВ может служить критерием улучшения состояния больного ИБС; разнонаправленность изменения КСН, обнаруживаемой при слабых воздействующих дозах ММВ, вероятно, определяется уровнем активности биоэнергетических процессов в эритроцитах.

Институт кардиологии МЗ РА

Ա. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Լ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ս. Ի. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ռ. Ս. ԱՎԱԳՅԱՆ,  
Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Ա. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

### Էրիթրոցիտների ռեակտիվությունը միլիմետրային էլեկտրամագնիսական ալիքների նկատմամբ սրտի իշեմիկ երկամոլային ընթացքում

Հետազոտվել է միլիմետրային էլեկտրամագնիսական ալիքների (ՄԷԱ) ոչ ջերմային ազդեցությունը դոնորների և սրտի իշեմիկ հիվանդների էրիթրոցիտների թթվային հեմոլիզի կինետիկական չափանիշների վրա: Էրիթրոցիտների երկթամյա ճառագայթումը (3-ից 8 մմ ալիքի երկարությամբ, 0.01 մկվտ հզորությամբ) իրականացվել է իզոտոնիկ միջավայրում *in vitro* պայմաններում: Ցածր դիմադրողականությամբ էրիթրոցիտների հեմոլիզի արագության գործակիցը եղել է՝  $0,94 \pm 0,07$  դոնորների մոտ և  $1,06 \pm 0,09$  հիվանդների մոտ: Բուժման ընթացքում նկատվել է հիվանդների էրիթրոցիտների ռեակտիվության բարձրացում ՄԷԱ-ի նկատմամբ: Հնարավոր է, որ մարդու զգացողությունը ՄԷԱ-ի նկատմամբ պայմանավորված լինի արյան մեջ ցածր դիմադրողականություն ունեցող էրիթրոցիտների առկայությամբ: Այսպիսով, ՄԷԱ-ի նկատմամբ էրիթրոցիտների ռեակտիվության աճը կարող է հանդիսանալ սրտի իշեմիկ հիվանդների ընդհանուր վիճակի բարելավման նախանշան:

### ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 П. Я. Галонюк, А. В. Столбков, Т. Ю. Шерковина и др., Вопр. курортологии, физиотерапии и ЛФК, № 3, с. 14-16, 1988. 2 В. Ф. Лукьянов, Т. Б. Реброва, Н. С. Робустова, в кн.: Применение КВЧ излучения низкой интенсивности в биологии и медицине. Тезисы докладов 13-15 ноября, г. Звенигород, М., Меди-



цина, 1989. <sup>3</sup> Е. В. Гублер, А. А. Гелкин, Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях, Медицина, 1973. <sup>4</sup> А. Н. Кокарев, Ю. И. Кардаков, Кардиология, № 7, с. 21-24 (1991). <sup>5</sup> Л. К. Стук, В. М. Куракса, О. И. Гордиенко и др., Гематология и трансфузиология, № 4, с. 44-48, 1988. <sup>6</sup> I. Goto, T. Shimizu, Y. Maede, Comp. Biochem. Physiol., April, v. 101(3), p. 657-660 (1992). <sup>7</sup> В. Ф. Лукьянов, Л. Н. Гончаров, Н. И. Синицын и др., в кн.: Биологическое действие миллиметровых волн, М., Медицина, 1988.



МОРФОЛОГИЯ

УДК 611.576

И. Б. Меликсетян, А. М. Чилингарян, О. А. Назарян

**Выявление ортофосфатов в нервных структурах мозга человека**

(Представлено академиком НАН Армении В. В. Фанарджяном 11/III 1996)

Предыдущими нашими исследованиями мозга лабораторных животных показана возможность гистохимического выявления клеточных ортофосфатов на срезах, полученных после формалиновой фиксации (1-3). Эти данные кажутся весьма значительными, поскольку ортофосфаты, занимающие важное место в обменных и энергетических процессах клеток и тканей, в гистохимическом отношении остаются почти не изученными. Анализ полученных данных позволил установить значительные отличия в реакционноспособности ортофосфатов не только у разных видов животных, но и в нервных структурах различных формаций мозга. В гисто- и цитохимическом отношении определенный интерес представляет выявление реакционноспособности ортофосфатов в разных отделах мозга человека, что до сих пор практически не изучалось.

Использовался трупный материал, взятый по возможности в самые ранние сроки после смерти. Материалом исследования служили ствол мозга, мозжечок, кора больших полушарий, твердая мозговая оболочка. Фиксацию проводили формалин-кальциевым фиксатором, который по данным наших ранних исследований оказался наиболее удобным для стабилизации фосфора в клеточных структурах мозга млекопитающих. Из кусочков мозга готовили замороженные срезы, толщиной 60 мкм, которые после промывки обрабатывались 15-20 мин в 70° ацетоне. Далее следовала двухкратная промывка, после чего срезы переносились в заранее приготовленные свинцовые смеси, где учитывалась закономерность концентрационного взаимоотношения по Чилингаряну (4). В данной серии экспериментов стандартным являлся 0,002 М раствор уксуснокислого свинца. В смесях использовали 1 М ацетатный буфер при pH 5,6 от 1 до 30 мл с интервалом 3-5 мл. Срезы инкубировали в свинцовых смесях от трех до десяти дней, после чего следовало сульфидное выявление преципитатов, образованных в клеточных структурах.



Полученные данные показывают, что и в мозгу человека осаждение фосфора в клеточных структурах происходит согласно закономерностям концентрационного взаимоотношения и последовательности выявления клеточных структур, однако при этом наблюдаются определенные особенности, свойственные нервным структурам мозга человека.

При pH 5,6 с 2 мл буфера в смеси осаждение продукта реакции весьма избирательно наблюдается на стенках сосудов и капилляров, которые выявляются за счет отложения черного мелкозернистого осадка. Клеточные элементы сосудистой стенки не окрашиваются. На препаратах твердой мозговой оболочки выявляется непрерывная сосудисто-капиллярная сеть. Кроме этих структур выявляются также клетки, которые, по-видимому, являются фибробластами и имеют отношение к рыхлой соединительной ткани. Цитоплазма последних окрашивается весьма интенсивно, а в ядрах образование осадка не наблюдается, но в них четко выделяется ядрышко. Форма клеток разная: овальная, полигональная, веретенообразная. От тела клетки на некотором расстоянии можно проследить утолщенные отростки. С повышением количества буфера в смеси наблюдается ослабление и исчезновение реакции сосудов и капилляров и образование осадка происходит в ядрах глиальных клеток, которые избирательно реагируют с 10 мл буфера в смеси.

В смесях с 18-20 мл буфера образование осадка избирательно происходит в перикарионах и отростках нервных клеток. В различных отделах мозга человека реакция нервных клеток существенно отличается. На срезах коры больших полушарий выявляются единичные пирамидные клетки средней величины и местами мелкие клетки полиморфного слоя. Мелкозернистый осадок наблюдается в перикарионах, ядра не окрашиваются, большинство клеток выявляется без отростков. На срезах мозжечка реакционной способностью отличаются клетки Пуркинье. Ортофосфаты выявляются в перикарионах и основных дендритах, которые прослеживаются на коротком расстоянии. В других типах нервных клеток мозжечка, в условиях нашей реакции, реакционная способность ортофосфатов не наблюдается. Кроме этих структур в белом веществе видна окраска осевых цилиндров нервных волокон. Четкое отличие реакции нервных клеток можно наблюдать на препаратах ствола мозга. Хорошо выраженной и постоянной реакцией отличаются мелкие нейроны собственных ядер моста. Ядра этих клеток круглые, большие и не окрашиваются, отростки не выявляются, а мелкозернистый осадок наблюдается только в перикарионах. Отчетливо выявляются также более крупные клетки ядра лицевого нерва. Осадок в их перикарионах крупнозернистый, ядра не окрашиваются. Образование осадка происходит и в отростках этих клеток.

Таким образом, проведенные исследования позволили установить, что в мозгу человека ортофосфаты, локализованные в сосудах и ядрах нейроглии, сходно реагируют с такими же структурами мозга лабораторных животных. В отличие от мозга лабораторных животных, где



наблюдается четкая реакция крупных пирамидных клеток коры больших полушарий, или ретикулярных клеток ствола мозга, в мозгу человека эти клетки остаются нереакционноспособными. Эти отличия в реакционноспособности нейронов мозга человека, по-видимому, объясняются или патологией, или трупными изменениями. Надо полагать, что дальнейшие исследования в этом направлении и усовершенствование методических подходов могут обеспечить получение ценных сведений о цитохимических особенностях нейронов мозга человека.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели  
Национальной академии наук Армении

Ի. Բ. ՄԵԼԻՔՍԵԹՅԱՆ, Հ. Մ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ, Օ. Հ. ՆԱՋԱՐՅԱՆ

### Օրթոֆոսֆատների հայտնաբերումը մարդու ուղեղի նյարդային կառուցվածքներում

Փորձի արդյունքները ցույց են տվել, որ մարդու ուղեղի անոթներում և նեյրոգլիայի կորիզներում տեղակայված օրթոֆոսֆատների հայտնաբերումը համանման է լաբորատոր կենդանիների նույնատիպ կառուցվածքներին: Ի հակադրություն լաբորատոր կենդանիների, որտեղ նկատվում է պարզ ռեակցիա ուղեղի մեծ կիսագնդերի խոշոր պիրամիդային բջիջներում, կամ ուղեղի սյան ռետիկուլյար բջիջներում, մարդու մոտ այդ բջիջները մնում են ոչ ռեակցիոն ընդունակ: Այդ երևույթը մարդու ուղեղի նեյրոններում բացատրվում է ախտաբանական վիճակով կամ դիակային փոփոխություններով:

Ենթադրվում է, որ հետադառ ուսումնասիրություններն այդ ուղղությամբ և մեթոդների կատարելագործումը թույլ կտան ստանալ արժեքավոր տեղեկություններ մարդու ուղեղի նեյրոնների ցիտոքիմիական առանձնահատկությունների մասին:

### ЛИТЕРАТУРА – ՓԲԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> И. Б. Меляксетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян, ДАН АрмССР, т. 86, № 5 (1988). <sup>2</sup> И. Б. Меляксетян, Дж. А. Мартиросян, Биол. журн. Армении, т. 43, № 10-11 (1990). <sup>3</sup> А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меляксетян, ДАН АрмССР, т. 85, № 2 (1987). <sup>4</sup> А. М. Чилингарян, Микроскопическое изучение кровеносных сосудов и нервной ткани, основанное на применении соединений свинца. Докт. дис., Л., 1968.



УДК 612.825.54 + 612.815

Е. В. Папоян, академик НАН Армении В. В. Фанарджян

### Нейронный анализ рубро-корковых связей

(Представлено 31/III 1995)

Ранее (1) были исследованы особенности влияний из сенсомоторной и теменной ассоциативной коры на рубро-спинальные нейроны красного ядра (КЯ), показано участие кортико-спинальных и кортико-рубральных нейронов указанных областей коры мозга в происхождении возбуждающих постсинаптических потенциалов (ВПСП) рубральных нейронов на корковые посылки (2-3), получены данные по антидромной активации нейронов теменной ассоциативной коры на стимуляцию КЯ (4).

Морфологическими исследованиями показано, что наряду с нисходящими трактами коры мозга в КЯ имеются и восходящие связи последнего с таламическими структурами, проецирующимися в те же области коры мозга (5,6). Анализ указанных реципрокных взаимоотношений представляет несомненный интерес. С целью подобного анализа в настоящей работе исследовались синаптические потенциалы, возникающие в нейронах теменной ассоциативной коры мозга на стимуляцию КЯ.

Эксперименты выполнялись на 27 взрослых кошках массой 2,5-3,5 кг, наркотизированных хлоралозой (45 мг/кг) и этаминалом натрия (10-15 мг/кг) и обездвиженных дитилином или флакседилом под искусственным дыханием. Раздражающие биполярные (0,3 мм) электроды вводили стереотаксически в КЯ, собственные ядра моста и моторную область коры мозга с целью антидромной идентификации эфферентных нейронов теменной коры и исследования их синаптических ответов. Раздражение указанных структур производили прямоугольными одиночными стимулами длительностью 0,1 мс и силой до 0,4 мА. Внутри- и внеклеточное отведение электрической активности нейронов передней и средней супрасильвиевой и передней латеральной извилин, расположенных ипсилатерально к раздражаемым структурам, осуществляли стеклянными микропипетками, заполненными 2,5 М раствором хлористого калия с сопротивлением 10-20 МОм. В конце эксперимента



выполнялся гистологический контроль локализации кончиков раздражающих электродов.

Была исследована активность 481 нейрона теменной коры мозга. Из них на раздражение КЯ отвечали 129 нейронов в виде антидромного (76 клеток, 58,9%) или синаптического (53 клетки, 41,0%) возбуждения. Скрытые периоды антидромных потенциалов действия (ПД) равнялись 0,98-1,88 мс ( $1,32 \pm 0,28$  мс,  $n=28$ ) (рис.1,Е). Синаптическая активация

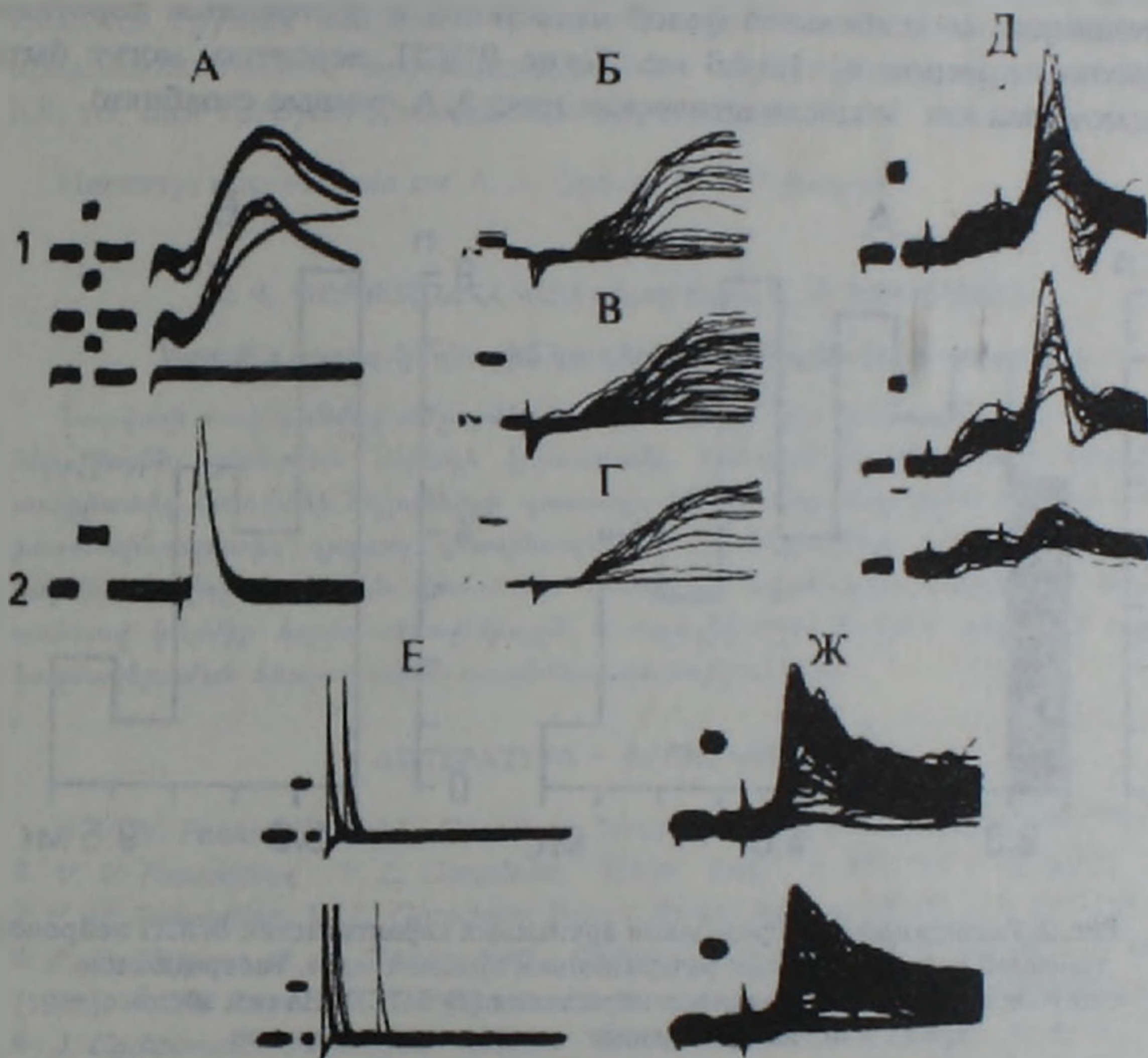


Рис. 1. Типы активации нейронов теменной ассоциативной коры на раздражение красного ядра. Ответы семи нейронов из передней латеральной (А, Б, В, Е) и супрасильвиевой (Г, Д, Ж) извилина. Снизу вверх на Б, В, Г (многократное наложение луча) и А, Д, Ж, и сверху вниз на Е — увеличение интенсивности раздражения. А, 2 — антидромный потенциал действия на раздражение латеральной группы собственных ядер моста. Нижний кадр на А, 1 — потенциал поля после выхода микроэлектрода из клетки. Д — эффекты парного раздражения. Калибровка амплитуды: 0,5 мВ (А, 1; Б); 5 мВ (В, Г, Д, Ж); 25 мВ (А, 2; Е). Отметка времени — 1 мс.

нейронов выражалась в возникновении возбуждающих постсинаптических потенциалов (ВПСП). Их скрытые периоды составляли 1,5-5,5 мс ( $3,22 \pm 1,1$  мс,  $n=46$ ), время восхождения деполяризации до максимума — 3,8-9,5 мс ( $5,28 \pm 1,84$  мс,  $n=20$ ), общая длительность ВПСП — 3,0-38,5 мс ( $14,97 \pm 7,94$  мс,  $n=17$ ) (рис. 1, 2). ВПСП с короткими скрытыми периодами в 2,0-2,5 мс характеризовались относительным постоянством



последних, при постепенном увеличении раздражения КЯ, а также сравнительной стабильностью времени восхождения деполяризации (рис. 1, Б-Д, Ж). Такие ВПСП рассматривались как олигосинаптические. Остальные ВПСП, характеризующиеся более длительным скрытым периодом и непостоянством временных параметров деполяризации, были оценены как полисинаптические (рис. 1, А). Помимо того, была выявлена группа из пяти нейронов теменной ассоциативной коры мозга, у которых на стимуляцию КЯ возникали деполяризационные потенциалы со стабильной фазой нарастания и постоянным коротким скрытым периодом в 1,5-1,6 мс. Такие ВПСП, вероятно, могут быть рассмотрены как моносинаптические (рис. 2, А, темные столбики).

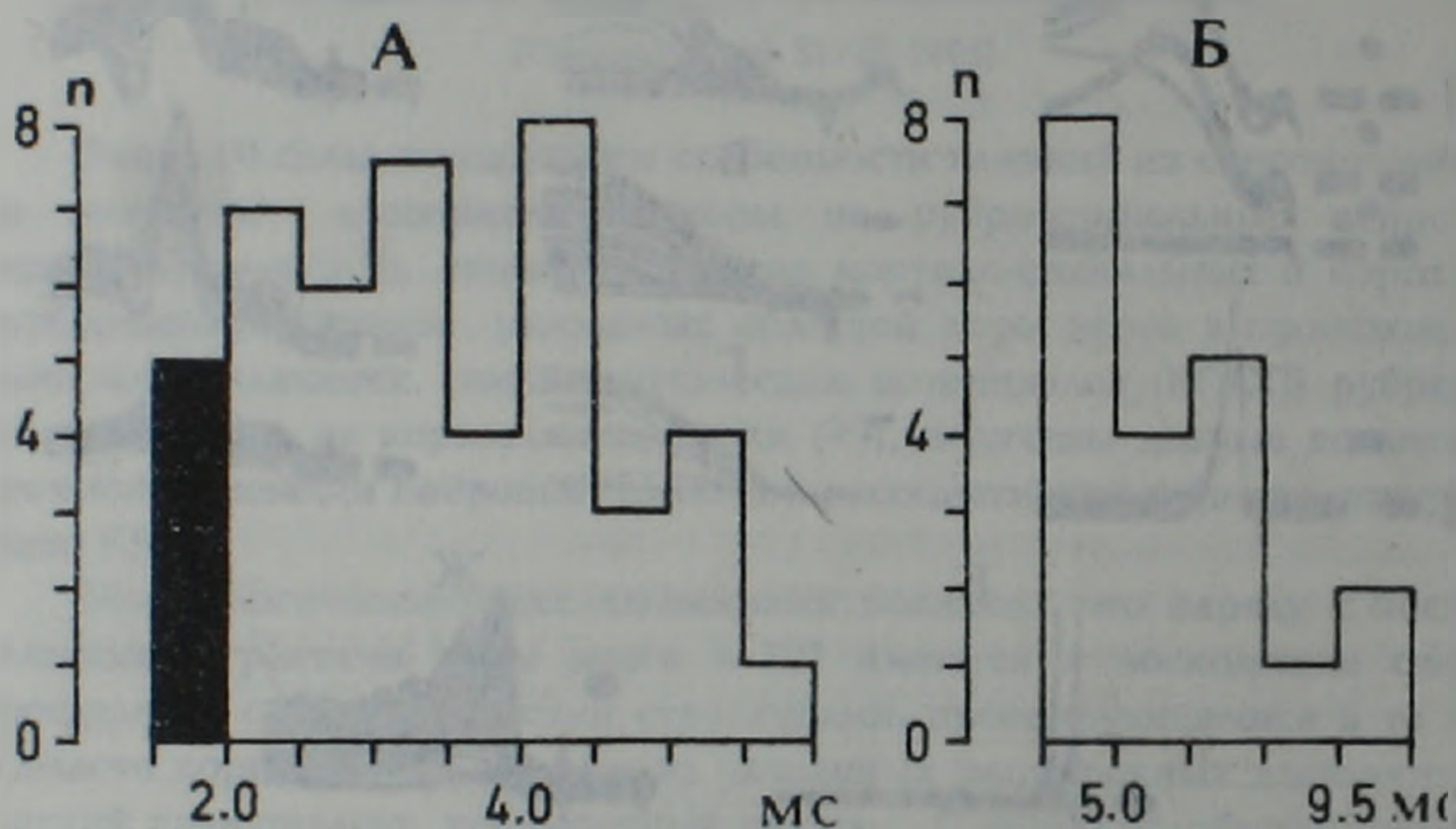


Рис. 2. Гистограммы распределения временных характеристик ВПСП нейронов теменной коры, вызванных раздражением красного ядра. Распределение скрытых периодов (А) и времени нарастания (Б) ВПСП. На оси абсцисс — время в мс, на оси ординат — количество нейронов.

У большинства исследованных нейронов при достижении критического уровня деполяризации (3,8-10,5 мВ ( $5,93 \pm 3,97$  мВ,  $n=21$ )) генерировались ПД. 37 клеток, отвечающие синаптическими потенциалами на раздражение КЯ, представляли эфферентные нейроны теменной коры, поскольку антидромно активировались на стимуляцию моторной области коры мозга (26 нейронов, 70,3%) и собственных ядер моста (11 нейронов, 29,7%) (рис. 1, А, 2).

На основании данных морфологии можно сделать предположение о двух путях осуществления основных восходящих влияний. Первый путь представлен рубро-таламическим трактом (<sup>7,8</sup>). Второй путь связан со стимуляцией мозжечково-таламических волокон, проходящих через КЯ (<sup>9</sup>). Волокна обоих путей оканчиваются в релейных таламических образованиях. Активация мозжечково-таламической проекции вызывает



моносинаптические ВПСР в нейронах вентролатерального, вентромедиального ядер и вентрального переднего таламического ядра, проецирующегося в теменную область коры мозга (10). Особенности ВПСР, возникающих в быстрых и медленных нейронах пирамидного тракта на стимуляцию вентролатерального ядра таламуса, дали основание полагать их моносинаптическую природу (11). Таким образом, наиболее короткий путь рубро-корковых влияний, прослеженный на основании имеющихся данных морфологии, является дясинаптическим путем. Что касается группы нейронов теменной коры (5 клеток), испытывающих, предположительно, моносинаптическое возбуждение на раздражение КЯ, то они требуют дальнейшего изучения.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели НАН Армении

Ե. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ

Կարմիր կորիզ-կեղևային կապերի նեյրոնային վերլուծությունը

Նարկոզի տակ գտնվող անշարժեցված կատուների վրա կատարված սուր փորձերում, ներքղջային գրանցման մեթոդի կիրառմամբ, հետազոտվել են ուղեղի գազաթային ասոցիատիվ հատվածի նեյրոնների պատասխանները: Հայտնաբերված են մոնո-, օլիգո-բազմասինապատիկ գրգռող հետսինապսային պոտենցիալներ, որոնք առաջանում են կարմիր կորիզի գրգռման ժամանակ: Ստացված տվյալները քննարկվում են հաշվի առնելով կարմիր կորիզ-տեսաթմբային և ուղեղիկ-տեսաթմբ - կեղևային ուղիների կազմակերպման ձևաբանական առանձնահատկությունները:

#### ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 V. V. Fanardjian, V. L. Gorodnov, Neurosci. Lett., v. 40, № 2, p. 269-273 (1983).
- 2 V. V. Fanardjian, V. L. Gorodnov, Brain Res., v. 425, № 1, p. 65-72 (1987).
- 3 V. V. Fanardjian, V. L. Gorodnov, Behav. Brain Res., v. 28, № 1, p. 131-137 (1988)
- 4 Ե. Վ. Պապոյան, Վ. Վ. Փանարձյան, Физиол. журн. СССР, т. 72, № 7, с. 865-873 (1986).
- 5 M. Roger, J. Cadusseau, Neuroscience, v. 21, № 2, p. 573-583 (1987).
- 6 J. Cadusseau, M. Roger, Behav. Brain Res., v. 28, № 1, p. 81-88 (1988).
- 7 A. Hinman, M. B. Carpenter, J. Comp. Neurol., v. 113, № 1, p. 61-82 (1959).
- 8 F. Conde, H. Conde, Neuroscience, v. 5, № 4, p. 789-802 (1980).
- 9 Y. Shinoda, T. Futami, H. Mitoma e.a., Behav. Brain Res., v. 28, № 1, p. 59-64 (1988).
- 10 M. Uno, M. Yoshida, I. Hirota, Exp. Brain Res., v. 10, № 2, p. 121-139 (1970).
- 11 M. Deschenes, P. Landry, M. Clerco, Neuroscience, v. 7, № 9, p. 2149-2157 (1982).