ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXVII, № 5
1988

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՍԻԱՐՋՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1988, т. 87, № 5. 193—240

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Յու. Մ. Մովսիսյան—*Հաներաճաշիվներ և կլոններ* 195

Ֆ. Ա. Շամոյան, Ի. Մ. Գևորգյան—*Սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Ֆուրյեի գործակցիների նվազման արագության բնութագրումը և Ռ. Սուլինասի թեորեմի ճշգրտումը* 198

Ա. Ա. Պետրոսյան—*Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների սպեկտրների գնահատականներ* 203

Ա. Դ. Բաղդասարյան—*Ինտերպոլյացիա և որոշ ֆունկցիոնալ տարածությունների ֆունկցիաների հետքեր* 207

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ն. Ե. Հարությունյան, Ա. Դ. Դրոզդով—*Սֆերիկ ձուլվածքի բյուրեղացման պրոցեսի օպտիմիզացիան* 212

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ղ. Հովհաննիսյան—*Փոքր հաստության շրջանաձև տափօղակի և կիսաանվերջ գլանի փոխազդեցության վերաբերյալ առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի մասին* 216

Կ. Գ. Ղուլյան, Գ. Գ. Մխիթարյան, Ս. Մ. Մխիթարյան—*Անհամասեռ միջավայրում ճաքերի և բարակ ներդրակների շրջակայքում լարումների կենտրոնացումների մասին հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում* 221

ՄԱՐՄՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Ա. Քամալյան, Ն. Գ. Ջաղացպանյան, Կ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Ա. Զաչոյան, Վ. Օ. Գրաբովսկա, Ի. Ն. Սավենկովա—*Ինտերֆերոնի ինդուկտոր երկշղթա ռիբոնուկլեինային թթվի ազդեցությունը ուռուցքային աճի վրա* 227

Բովանդակություն LXXXVII *հատորի* 232

© Издательство АН АрмССР, Доклады АН АрмССР, 1988.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян—Алгебры и клоны. . . . 195

Ф. А. Шамоян, И. М. Геворкян—Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и уточнение теоремы Р. Салинаса 198

А. А. Петросян—Оценки спектров дискретных преобразований Фурье . 203

А. Г. Багдасарян—Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств 207

МЕХАНИКА

И. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов—Оптимизация процесса кристаллизации сферической отливки 212

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. К. Оганесян—К осесимметричной контактной задаче о взаимодействии упругого полубесконечного цилиндра с круглой шайбой малой толщины . 216

К. Г. Гулян, Г. Г. Мхитарян, С. М. Мхитарян—О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации 221

МОРФОЛОГИЯ

Л. А. Камалян, Н. Г. Джагацпанян, К. Р. Манвелян, А. А. Чачоян, В. О. Грабовска, И. Н. Савенкова—Влияние индуктора интерферона—дсРНК на опухолевый рост in vitro и in vivo 227

Содержание LXXXVII тома 232

CONTENTS

MATHEMATICS

Yu. M. Movsisian—Algebras and clones 195

F. A. Shamoyan, I. M. Gevorkian—Description of decrease speed of Fourier coefficients of bounded type function and the precise theorems of R. Salinas 199

A. A. Petrosian—Estimates of spectrums of discrete Fourier transforms 203

A. G. Bagdasarian—Interpolation and function traces from several functional spaces 207

MECHANICS

N. Kh. Arutiunian, A. D. Drozdov—Optimal crystallization of the spherical casting 212

THEORY OF ELASTICITY

E. K. Ogannessian—The axisymmetrical contact problem on interaction of elastic semiinfinite cylinder with a circular ring of small thickness . . . 216

K. G. Gulian, G. G. Mehitarian, S. M. Mehitarian—On concentration of stresses near the cracks or thin inclusions in a nonhomogeneous medium with the antiplane strain 221

MORPHOLOGY

L. A. Kamalian, N. E. Dzhagazpanian, K. R. Manvelian, A. A. Chachoyan, V. O. Grabovska, I. N. Savenkova—Influence of interferon's inductor—ds RNA on tumor grouth in vitro and in vivo 227

Contents of LXXXVII volume 232

Техн. редактор *Азизбекян Л. А.*

Сдано в набор 15.12.88. Подписано к печати 20.03.89. ВФ 02367
Бумага № 2. Формат 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2
Учет. изд. 3,32 л. Тираж 530. Заказ 1475. Издат. 7531. Цена 55 к.
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Алгебры и клоны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/IV 1988)

Пусть U—произвольное непустое множество, с каждым элементом ω которого связано некоторое натуральное число $n=|\omega|$, называемое арностью этого элемента $\omega\in U$. Если

$$T=\{|\omega|\,|\,\omega\in U\},$$

то множество U называется T-множеством ([1]).

Пусть Q—произвольное T-множество, где $T=N$, т. е. Q—произвольное N-множество. Подмножество всех n-арных элементов множества Q обозначим через Q_n. Такое множество Q называется клоном, если

а) для любых натуральных $n\geq 1$ и $m\geq 1$ определены операции

$$\mu_n^m: Q_n\times \underbrace{Q_m\times \ldots \times Q_m}_{n}\to Q_m$$

и нульарные операции, фиксирующие элементы $\delta_n^i\in Q_n$ для любого натурального $n\geq 1$ и для любого натурального $1\leq i\leq n$;

б) эти операции удовлетворяют следующим тождествам:

$$\mu_n^m(\mu_p^n(w, v_1, \ldots, v_p), u_1, \ldots, u_n)=$$

$$=\mu_p^m(w, \mu_n^m(v_1, u_1, \ldots, u_n), \ldots, \mu_n^m(v_p, u_1, \ldots, u_n));$$

$$\mu_n^m(\delta_n^i, u_1, \ldots, u_n)=u_i;$$

$$\mu_n^n(v, \delta_n^1, \ldots, \delta_n^n)=v.$$

Таким образом, все клоны образуют многообразие градуированных (многоосновных, многосортных) алгебр, общая теория которых развита в ([2]). Любое подмногообразие этого многообразия называется многообразием клонов. Здесь можно говорить и о свободных клонах.

Множество Q называется алгеброй над клоном Γ, если для любого $\gamma\in\Gamma$, $|\gamma|=n$, и для любых $a_1, \ldots, a_n\in Q$ определен элемент $\gamma(a_1, \ldots, a_n)\in Q$, причем справедливы условия:

$$\mu_n^m(\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)(a_1, \ldots, a_m)=\gamma[\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m)],$$

$$\delta_n^i(a_1, \ldots, a_n)=a_i.$$

Множество Q называется клон-алгеброй (клоновой алгеброй), если оно является алгеброй над некоторым клоном Γ.

Пусть OpQ—клон всех операций множества Q. Каждый клоно-

вый гомоморфизм $\varphi: \Gamma \to OpQ$ превращает множество Q в алгебру над клоном Γ и наоборот, если Q—алгебра над клоном Γ, тогда она определяет представление клона Γ в клоне всех операций множества Q.

Модуль или полигон естественным образом расширяются до алгебры над клоном (рассматривая при этом кольцо или моноид как унарную часть клона).

Если Q—алгебра над клоном Γ, то Q будем называть клоновой Γ-алгеброй. Для каждого фиксированного Γ имеем категорию всех клоновых Γ-алгебр, в которых гомоморфизмы—это отображения множеств, перестановочные с действием клона Γ:

$$\varphi\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n).$$

Поэтому всевозможные клоновые Γ-алгебры (при фиксированном клоне Γ) составляют многообразие всех клоновых Γ-алгебр. Подмногообразие в многообразии всех клоновых Γ-алгебр называется многообразием клоновых Γ-алгебр.

Теорема 1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между многообразиями клоновых Γ-алгебр и конгруэнциями клона Γ.*

Перейдем к описанию многообразий клоновых алгебр над разными клонами.

Пусть Q является алгеброй над клоном Γ; эту клон-алгебру здесь обозначим через (Q, Γ). Если (Q_1, Γ_1) и (Q_2, Γ_2)—две клон-алгебры, тогда гомоморфизм между ними определяется как пара $(\varphi, \tilde{\psi})$, где $\tilde{\psi}: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ является гомоморфизмом клонов и справедливо равенство

$$\varphi\omega(x_1, \ldots, x_n) = [\tilde{\psi}\omega](\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n)$$

для любого $\omega \in \Gamma_1$, $|\omega| = n$, и для любых $x_1, \ldots, x_n \in Q_1$ (ср. ([3]))

Теорема 2. *Многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с парами (ρ, ρ') вполне инвариантных конгруэнций $\rho' \subseteq \rho$ свободного клона $F(U)$, где U по каждому натуральному числу $n \in N$ содержит ровно счетное число n-арных элементов.*

Определим понятие насыщенного многообразия клон-алгебр. Гомоморфизм клон-алгебр $(\varphi, \tilde{\psi}): (Q, \Gamma_1) \to (Q, \Gamma_2)$ с тождественным φ назовем правым гомоморфизмом. Многообразие $\mathfrak{M}$ клон-алгебр называется насыщенным, если из $(Q, \Gamma) \in \mathfrak{M}$ и из того, что (Q, Γ)—правый, эпиморфный образ некоторой клон-алгебры (Q, Σ), следует и $(Q, \Sigma) \in \mathfrak{M}$. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда насыщено, когда отвечающая этому $\mathfrak{M}$ вполне инвариантная конгруэнция $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ имеет тривиальную конгруэнцию ρ_2.

Теорема 3. *Насыщенные многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с вполне инвариантными конгруэнциями свободного клона $F(U)$.*

Следствие. *Насыщенные многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с многообразиями клонов.*

Клоновый автомат (клон-автомат)—это трехосновная система (Q, Γ, Y), в которой Q и Y—произвольные множества, Γ—клон, причем для каждого n-арного элемента $\omega \in \Gamma$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in Q$ определены элементы $\omega(a_1, \ldots, a_n) \in Q$, $\omega*(a_1, \ldots, a_n) \in Y$ и справедливы следующие три тождества:

а) $\mu_3^m(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)(a_1, \ldots, a_m) = \omega(\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m))$;

б) $\mu_3^m(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)*(a_1, \ldots, a_m) = \omega*(\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m))$;

в) $\delta_m^i(a_1, \ldots, a_m) = a_i$.

Обычным образом определяются гомоморфизмы клоновых автоматов, и тогда возникает категория клоновых автоматов. Можно говорить и о категории клоновых автоматов при фиксированном клоне Γ.

Описываются многообразия в обеих категориях.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Հանրահաշիվներ և կլոններ

Աշխատանքում ներմուծվում է կլոնային հանրահաշվի գաղափարը և նկարագրվում են կլոնային հանրահաշիվների բազմաձևությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Изд-во Ереванского гос. ун-та, 1986. [2] *P. J. Higgins*, Math. Nachrichten, v. 27, № 1—2, p. 115—132 (1963). [3] *Ю. М. Мовсисян*, Мат. исследования АН МССР т. 9, № 1, с. 70—82 (1974)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян, И. М. Гепоркян

Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и уточнение теоремы Р. Салинаса

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/VIII 1988)

1°. Пусть D—единичный круг на комплексной плоскости, Γ—его граница, $H^p(0<p\leqslant+\infty)$—класс Харди в D. Символом $\mathcal{N}$ обозначим множество всех голоморфных в D функций, имеющих там ограниченный вид, т. е. $f\in\mathcal{N}\Leftrightarrow f=\frac{h_1}{h_2}$, где $h_j\in H^\infty$, $j=1, 2$.

Если $f\in L^1(\Gamma)$, то через $\hat{f}(n)$, $n\in\mathbf{Z}$, будем обозначать коэффициенты Фурье функции f. Пусть $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$ последовательность монотонно растущих положительных чисел.

В этой заметке мы получим полную характеристику тех α, для которых возможна нетривиальная оценка

$$|\hat{f}(-n)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\alpha_n},\ f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma),\ n=1, 2, \ldots \tag{1}$$

Для формулировки основного результата заметки введем также обозначение:

$$m_k=\sup_{n\geqslant1}\frac{n^k}{\alpha_n},\quad T(r)=\sup_{n\geqslant1}\frac{r^n}{m_n},\quad k=1, \ldots;\ r\geqslant0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$—последовательность монотонно растущих положительных чисел. Тогда, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

а)
$$\int^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr=+\infty; \tag{3}$$

б)
$$\sum_1^\infty\frac{1}{\sqrt[2n]{m_n}}=+\infty, \tag{4}$$

то для каждой $f\in L^1(\Gamma)\cap\mathcal{N}$ из условия (1) следует, что $\hat{f}(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$.

И обратно, если α удовлетворяет условию

$$\log\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\gamma_n\log\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где γ_n—монотонно растущая положительная последовательность, и если интеграл (3) или ряд (4) сходятся, то можно построить

функцию $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, *для которой коэффициенты* $\hat{f}(-n)$ *удовлетворяют оценке* (1). *В то же время* $\hat{f}(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *а ряд Фурье функции* f *имеет вид*

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ik\theta}. \tag{6}$$

Замечание 1. В том случае, когда последовательность $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$ растет достаточно регулярно, например, удовлетворяет условию (5), утверждение теоремы 1 можно выразить непосредственно в терминах $\alpha=\{\alpha_n\}_1$. А именно:

Теорема 1[1]. *Пусть* $\alpha=\{\alpha_n\}_1$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда для того, чтобы из* (1) *следовало* $\hat{f}(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_1^\infty \frac{\log\alpha_n}{n^{3/2}}=+\infty. \tag{7}$$

При этом, если последний ряд сходится, то можно построить функцию $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, *для которой* $\hat{f}(-n)$ *удовлетворяет оценке* (1), $f(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *а ряд Фурье функции* f *имеет вид* (6).

Замечание 2. В том частном случае, когда $\alpha_n=\exp\{A\sqrt{n}\}$, $n=1, 2, \ldots$, $A>0$, Г. Шапиро в ([1]) установил, что из (1) следует $f(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, а при $\alpha_n=\exp\{n^\alpha\}$, $n=1, 2, \ldots$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ он доказал, что существует функция $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, для которой выполняется (1) и $f(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$.

Доказательство теоремы 1 основано на ряде вспомогательных утверждений. Пусть $\beta>0$, $H(D)$—множество всех голоморфных в D функций, введем в рассмотрение банахово пространство голоморфных в D функций:

$$A_\beta=\left\{f\in H(D):|f(z)|\leqslant\frac{C_f}{(1-|z|)^\beta},\ z\in D\right\},$$

$\|f\|_{A_\beta}=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|(1-|z|)^\beta$, положим $A_\infty=\bigcup\limits_{\beta>0}A_\beta$. Введем в A_∞ топологию индуктивного предела банаховых пространств A_β.

Относительно этой топологии A_∞ превращается в топологическую алгебру. Если $f\in A_\beta$, то через E_α $(\alpha\geqslant\beta)$ обозначим замыкание множества $\mathcal{P}\cdot f$ в пространстве A_α, $E(f)\overset{\text{def}}{=}E_\alpha(f)$, здесь $\mathcal{P}$—множество всех многочленов от z. Следующая лемма непосредственно следует из представлений Шварца (см. ([2])). Пусть $f\in H(D)$, $Df(z)=zf'(z)$, $z\in D$, $D^nf=D^{n-1}(Df)$.

Лемма 1. *Пусть* $f\in A_\infty$, $f(z)\neq 0$, $z\in D$, *тогда для любого натурального* n *справедливо представление*

$$D^nf(z)=\psi_n(z)f(z),\ z\in D,\ \text{где}$$

$\psi_n(z)\in H(D)$ *и удовлетворяет оценке*

$$|\psi_n(z)| \leqslant \frac{C_f(n)}{(1-|z|)^{2n}} \log^n \frac{1}{1-|z|}, \quad z \in D, \quad \left(|z| \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Пусть* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}$, $\zeta \in C^1 \setminus D$. *Если* $\lim_{k \to +\infty} C_k k^n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, *то по формуле*

$$\Phi_g(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad f \in A_\infty \tag{8}$$

порождается линейный непрерывный функционал на A_∞.

Следующее утверждение следует из леммы 1.

Лемма 3. *Если* $f \in A_\beta$, $f(z) \neq 0$, $z \in D$, *то функция* $D^n f$ *принадлежит подпространству* $E_{2\beta+\varepsilon}(f)$ *для любого* $\varepsilon > 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Лемма 4. *Пусть* $z = \{z_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}} dr < +\infty, \tag{9}$$

где $T(r)$ *определяется по формуле* (2). *Тогда существует целая функция* G *порядка* $\frac{1}{2}$ *и нормального типа, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |G(n)| < +\infty, \quad |G(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{T^2(x)}, \quad x > 0.$$

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Пусть $f \in A^\infty$, тогда хорошо известно, что f допускает представление

$$f(z) = \frac{B(z) S_1(z) Q(z)}{S_2(z)}, \quad z \in D$$

где B—произведение Бляшке, S_j—сингулярная внутренняя функция ($j = 1, 2$), Q—внешняя функция.

Поскольку $f \in L^1(\Gamma)$, то нетрудно заметить, что функция $\psi \overset{\text{def}}{=} BS_1Q = f \cdot S_2$ принадлежит классу H^1, поэтому

$$\int_\Gamma \zeta^n f(\zeta) S_2(\zeta) |d\zeta| = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Следовательно, если ряд Фурье функции f имеет $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi}$, то, исходя из последнего равенства и учитывая условие (3), легко видеть, что функция $g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^{-n}$, $\zeta \in C^1 \setminus D$, по формуле (8) порождает линейный непрерывный функционал Φ_g на A_∞, при этом $\Phi_g \perp E(S_2)$

Применяя леммы 2 и 3, получим $\Phi_g \perp D^n S_1$, $d = 0, 1, \ldots$. Используя это и условие (3), отсюда выводим $c_k = 0$, $k = -1, -2, \ldots$. Для установления обратного утверждения воспользуемся леммой 4 и пос-

троим функцию $f(\zeta)=\sum_{1}^{\infty} G(n)\zeta^{-n}$, $|\zeta|\geqslant 1$, здесь G — построенная в лемме 4 целая функция. Исходя из теоремы Вигерта — Ло (см. ([3])) заключаем, что f имеет аналитическое продолжение в $C^1\setminus\{1\}$. Учитывая оценки, полученные в лемме 4, устанавливаем, что указанное продолжение имеет ограниченный вид в D и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

2°. Прежде чем привести применение теоремы 1 к подклассам функций из $\mathcal{N}$ с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями, введем некоторые обозначения. Через $\mathcal{N}^+$ обозначим известный подкласс класса $\mathcal{N}$: $f\in\mathcal{N}^+ \Leftrightarrow$

$$\lim_{\rho\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(e^{i\varphi})|d\varphi.$$

С последовательностью положительных чисел $M=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ свяжем функцию Островского $T(r)=\sup_{k\geqslant 1}\frac{r^k}{M_k}$ $(r\geqslant 0)$ и обозначим через $C_N^{\infty}(M)$ класс функций $f\in\mathcal{N}$, граничное значение которых на Γ удовлетворяет оценке

$$|f^{(k)}(e^{i\theta})|\leqslant A_f^k M_k,\quad k=0,1,\ldots, \tag{11}$$

где A_f положительное число, зависящее только от f. Исходя из элементарных свойств функций класса $\mathcal{N}$, нетрудно построить функцию $f\in\mathcal{N}$, граничное значение которой удовлетворяет условию $f\in C(\Gamma)$, в то же время $f\notin\mathcal{N}^+$. Естественно возникает вопрос о полной характеристике тех $M=\{M_k\}_1^{\infty}$, для которых из условия (11) следовало $f\in\mathcal{N}^+$ или, что то же самое, чтобы из (11) следовала оценка

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant A_f^k M_k,\ |z|\leqslant 1. \tag{12}$$

Справедлива

Теорема 3. *Пусть $M=\{M_k\}_1^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Тогда*

1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *Из* (11) *следует оценка* (12);

б)
$$\int^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr=+\infty. \tag{13}$$

2. *Если последний интеграл сходится, то можно построить функцию $f\in C_N^{\infty}(M)$ такую, что $f\notin\mathcal{N}^+$ и, следовательно:*

$$f\notin H^p,\quad (p>0).$$

Из этой теоремы следует следующее уточнение теоремы Р. Салинаса (см. ([4])).

Определение. *Скажем, что класс $C_N^{\infty}(M)$ является квазианалитическим, если из условия $f\in C_N^{\infty}(M)$, $f^{(k)}(\zeta_0)=0$, $k=0,1,\ldots$, при некотором $\zeta_0\in\Gamma$, следует, что*

$$f(\zeta)=0, \quad \zeta\in\Gamma.$$

Теорема 4. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *класс* $C_{\omega}(M)$ *квазианалитический;*

б) $$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\, dr = +\infty.$$

При этом, если последний интеграл сходится, то можно построить функцию $f\in C_{\omega}(M)$ *такую, что* $f^{(k)}(\zeta_0)=0$, $k=0, 1, \ldots$ *при некотором* $\zeta_0\in\Gamma$, *в то же время* $f\notin A^{++}$.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Ի. Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Ֆուրյեի գործակիցների նվազման արագության բնութագրումը և Ի. Սալինասի թեորեմի ճշգրտումը

Հոդվածում ստացվել է շրջանում անալիտիկ սահմանափակ տեսքի և շրջանագծի վրա հանրագումարելի ֆունկցիաների բացասական ինդեքսներով Ֆուրյեի գործակիցների նվազման արագության բնութագիրը։ Դրա հիման վրա տրվել է քվազիանալիտիկ դասերի վերաբերյալ Ի. Սալինասի հայտնի թեորեմի ճշգրտումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Shapiro*, в кн. Современные проблемы теории аналитических функций, Наука, с. 326—331, 1966. [2] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций. Мир, М., 1963. [3] *Л. Бибербах*, Аналитическое продолжение, Наука, М., 1967. [4] *R. B. Salinas*, Rev. Acad. Ciencias, Madrid, v. 49, p. 331—368 (1955).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 517.5:519.72

МАТЕМАТИКА

А. А. Петросян

Оценки спектров дискретных преобразований Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 10/IX 1988)

1. Пусть $\bar{x}$ — исходный вектор из некоторого линейного метрического пространства векторов размерности N (X, ρ). Φ—оператор Фурье

$$\Phi : X \to Y,$$

задаваемый $N \times N$-матрицей отсчетов базисных функций некоторой ортогональной системы. S_m—комплексный функционал выбора размерности $m < N$ над Y:

$$S_m : Y \to \mathbf{C}^m$$

$$W : \mathbf{C}^m \to Y \text{—оператор восстановления.}$$

Обозначим через ε_Φ следующую величину:

$$\varepsilon_\Phi = \sup_{\bar{x} \in X} \rho(\bar{x}, \Phi^{-1} W S_m \Phi \bar{x})$$

(будем считать ее конечной). Задача состоит в отыскании при фиксированном m операторов S_m и W таких, что

$$\varepsilon_\Phi \to \min.$$

В случае, когда $\Phi = F$ есть матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ), компоненты вектора $\bar{y} = F\bar{x}$ представляются в виде:

$$y_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left\{-\frac{2\pi i k l}{N}\right\},$$

где x_k—компоненты вектора $\bar{x}$. В работе ([1]) установлено, что если исходный вектор $\bar{x}$ принадлежит классу векторов с действительными компонентами

$$X_\Delta = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) : \max_{1 \le k \le N-1} |x_{k-1} - x_k| \le \Delta\}, \quad \Delta > 0,$$

то

$$|y_l| \le \frac{\Delta}{\sin \frac{\pi l}{N}}, \quad l = \overline{1, N-1}. \tag{1}$$

В ([2]) эта оценка улучшена для целых номеров $l = \frac{N}{2}$ и $\frac{N}{4}$ в 2 раза.

В настоящей работе приводится уточнение оценки (1) для про-

извольных номеров l. Устанавливается также аналогичная оценка для спектра дискретного преобразования Фурье—Хартли (ДПФХ), являющегося вещественным аналогом ДПФ и в настоящее время широко используемого исследователями в цифровой обработке сигналов [3]. В заключение указываются приложения полученных результатов к частному случаю сформулированной выше задачи.

2. Перейдем к формулировке полученных результатов. Пусть

$$y_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-ikx}, \quad 1 \leqslant l \leqslant N-1, \tag{2}$$

где $x = \frac{2\pi l}{N}$, $x_{k+1} = x_k + \Delta_{k+1}$, $|\Delta_{k+1}| \leqslant \Delta$, $k = \overline{0, N-2}$. Следующая оценка снизу устанавливается непосредственно, если применить к сумме (2) преобразование Абеля и положить $\Delta_k = \Delta$, $k = \overline{1, N-1}$.

Лемма 1. *Для произвольного l, $l \in \{1, \ldots, N-1\}$*

$$\max_{\bar{x} \in X_\Delta} |y_l| \geqslant \frac{\Delta}{2\sin\frac{\pi l}{N}}.$$

Обозначим

$$z_l = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k (e^{-ikx} - 1)$$

и будем считать N четным (для нечетного N отличия незначительны).

Лемма 2. *Пусть l—фиксировано, $1 \leqslant l \leqslant N-1$. Тогда*

$$z_l = \begin{cases} \zeta_l - 2\Delta_{\frac{N}{2}} & l\text{—нечетно}, \\ \zeta_l, & l\text{—четно}, \end{cases}$$

где

$$\zeta_l = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} [\Delta_k (e^{-ikx} - 1) + \Delta_{N-k} (e^{ikx} - 1)].$$

На основании леммы 2 устанавливаются

Теорема 1. *Для произвольного l, $l \in \{1, \ldots, N-1\}$*

$$\max_{\bar{x} \in X_\Delta} \operatorname{Re} z_l = \Delta \cdot N.$$

Теорема 2. *Для прозвольного l, $l \in \{1, \ldots, N-1\}$*

$$\max_{\bar{x} \in X_\Delta} \operatorname{Im} z_l \leqslant \frac{2}{\pi} \Delta \cdot N$$

Из леммы 1 и теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Имеют место следующие неравенства* ($1 \leqslant l \leqslant N-1$):

$$\frac{\Delta}{2\sin\frac{\pi l}{N}} \leqslant \max_{\bar{x} \in X_\Delta} |y_l| \leqslant \frac{\Delta\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2\sin\frac{\pi l}{N}}. \tag{3}$$

3. Перейдем к случаю с применением ДПФХ, матрица которой имеет вид

$$\Phi = \left\| \frac{1}{N} \left| \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) \right| \right\|_{k,\ l=\overline{0,\ N-1}}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $\bar{x} \in X_\Delta$, Φ — *матрица ДПФХ порядка* $N \times N$, $\bar{y} = \Phi\bar{x} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$. *Тогда*

$$\max_{\bar{x} \in X_\Delta} |y_l| = \frac{\Delta\sqrt{2/N}}{\sin\frac{\pi l}{N}} \sum_{m=1}^{N-1} \left| \sin\left(\frac{m\pi l}{N}\right) \cdot \cos\left| (m-1)\frac{\pi l}{N} - \frac{\pi}{4} \right| \right|, \quad l = \overline{1,\ N-1}.$$

Следствие. В условиях теоремы 4

$$\max_{\bar{x} \in X_\Delta} |y_l| \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi l}{N}}, \quad l = \overline{1,\ N-1}. \tag{4}$$

4. Рассмотрим приложения оценок (3) и (4) к задаче сжатия информации посредством ДПФ и ДПФХ. В важном частном случае сформулированной в п. 1 задачи, когда процедура $\Psi S_m \bar{y}$ сводится к замене нулями компонент из некоторой, заранее очерченной области спектра, такой метод сжатия известен как зонное кодирование ([4]). Величина $k = N/m$ называется при этом коэффициентом сжатия информации, и задача заключается в отыскании оптимального способа зонного кодирования, т. е. такого, который гарантирует минимум ε_Φ при заданном k. Следует подчеркнуть, что заменять нулями целесообразно те компоненты спектра, которые малы по абсолютной величине и, следовательно, вносят меньший вклад при восстановлении исходного вектора. Таким образом, оценки (3) и (4) позволяют сделать вывод о том, что оптимальным на классе X_Δ способом зонного кодирования с помощью ДПФ или ДПФХ является замена нулями центральных компонент вектора $\bar{y}$. Кроме того, в ([4]) на основании (1) оценивается значение максимума среднеквадратической ошибки ε_F на классе X_Δ при оптимальном зонном кодировании посредством ДПФ. Аналогично, используя (3), можно прийти к более точной оценке ε_F. Именно если Ψ есть матрица ДПФ или ДПФХ порядка $N \times N$ и

$$\varepsilon_\Psi = \sup_{\bar{x} \in X_\Delta} \rho(\bar{x}, \Psi^{-1}\tilde{y}),$$

где вектор $\tilde{y}$ получается из вектора $\bar{y} = \Psi\bar{x}$ заменой нулями $2s+1$ центральных компонент ($s < N/2$, N — четно), то справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть* ρ — *среднеквадратическая метрика. Тогда*

$$\varepsilon_F \leqslant \Delta \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left[1 + \frac{2N}{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(s+1)}{N} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{N}\right)\right]},$$

$$\varepsilon_\Phi \leqslant \Delta \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{N}{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(s+1)}{N} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{N}\right)}$$

(Оценка ε_k устанавливается на основании (4)).

В заключение автор выражает благодарность С. С. Агаяну за внимание к работе и полезные замечания.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների սպեկտրների գնահատականներ

Աշխատանքում բերված են որոշակի դասի ազդանշանների Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության սպեկտրի գնահատականներ։ Բերված է նաև Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության իրական թվային անալոգ հանդիսացող Հարթլիի դիսկրետ ձևափոխության սպեկտրի գնահատական։ Նշված է ստացված արդյունքների կիրառությունը ինֆորմացիայի սեղմման խնդրում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Ефимов*, Тезисы докл. Всесоюзн. симп. по теории аппроксимации функций в комплексной области. Уфа, 1976. [2] *А. В. Ефимов*, Краткие сообщ. Междунар. мат. конгресса, VII, секция 9, часть II, Варшава, 1983. [3] *Р. Н. Брейсуэлл*, ТИИЭР, т. 72 № 8 (1984). [4] *Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов*, Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. Наука, М., 1987.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Г. Багдасарян

Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 12/X 1988)

При изучении граничных задач для общих гипоэллиптических операторов в пространствах типа Соболева—Лиувилля приходится рассматривать некоторые функциональные пространства типа Никольского—Бесова, являющиеся, как и в классическом случае, интерполяционными для соответствующих пространств Соболева—Лиувилля.

Теория этих пространств, в классическом случае, во всей полноте (эквивалентные нормы, вложения разных метрик и разных измерений, интерполяция и т. д.) изложена в монографиях ([1-4]).

В настоящей заметке изучаются свойства (следы, интерполяция) некоторых пространств типа H и B, являющихся обобщениями соответственно классических пространств Соболева—Лиувилля и Никольского—Бесова. Обобщениями перечисленных пространств в разных терминах занимались многие авторы. Отметим работы Х. Трибеля, М. Л. Гольдмана, Г. А. Калябина и др.

В работе ([5]) Трибеля и Штёкерта предложен обобщенный метод декомпозиции, позволяющий с единой точки зрения подойти к различным пространствам, оставаясь в рамках которого, однако, невозможно получить рассматриваемые здесь B пространства. Этот метод был существенно развит в работе М. Л. Гольдмана ([6]) за счет использования покрытий.

Краткий обзор результатов относительно пространств типа Никольского—Бесова приведен П. И. Лизоркиным в дополнении к монографии ([4]).

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n—n-мерное евклидово пространство, N_n^0—множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in N_n^0$, то положим $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$, $\xi^\alpha=\prod_{j=1}^{n}\xi_j^{\alpha_j}$.

Определение 1. Непустой многогранник $\mathfrak{N}$ с вершинами из N_n^0 назовем полным, если начало координат N_n^0 является вершиной $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ имеет вершины на каждой оси координат N_n^0, отличные от начала координат. Полный многогранник $\mathfrak{N}$ назовем вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$ мерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ имеют только положительные координаты. Пусть $\mathfrak{N}$—вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta^1, \ldots, \beta^N$, при этом вершина

a^j находится на j-той координатной оси ($j=1, 2, \ldots, n$) и $a^0=(0, \ldots, 0)$. Для каждого натурального числа m сопоставим многограннику $\mathfrak{M}$ функции

$$\nu(\xi)=\left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2a^j}+\sum_{i=1}^{N} \xi^{2\beta^i}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(\xi)=\mu_m(\xi)=|\nu(\xi)|^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

Определение 2. Пусть $1<p<\infty$. Через $\Phi(\mu; R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ обладающих следующими свойствами:

а) $\varphi_k \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geqslant 0$, $k=0, 1, \ldots$;

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \Omega_k \equiv \{\xi;\ \xi \in R_n,\ 2^{k-1} \leqslant \mu(\xi) \leqslant 2^{k+1}\}$, $k=1, 2, \ldots$;

$$\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \Omega_0 \equiv \{\xi;\ \xi \in R_n,\ \mu(\xi) < 2\}; \tag{2}$$

в) $$\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in R_n; \tag{3}$$

г) $$\|F\varphi_k\|_{M_p^p} \leqslant c;\ c>0,\ k=1, 2, \ldots \tag{4}$$

Здесь F — оператор преобразования Фурье, M_p^p — пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p), $S(R_n)$ — пространство быстро-убывающих, бесконечно дифференцируемых функций (см., например, ([1])).

В ([7]) приведен пример системы из $\Phi(\mu; R_n)$.

Определение 3. Пусть функция $\mu(\xi)$ определена, как выше $-\infty<s<\infty$, S' — пространство медленно растущих распределений. Положим

а) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$H_p^s(\mu; R_n)=\{f;\ f \in S',\ \|f\|_{H_p^s}=\|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{\frac{s}{2}} Ff\}\|_{L_p}<\infty\},$$

б) при $1<p<\infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$

$$B_{p,q}^s(\mu; R_n)=\left\{f;\ f \in S',\ \|f\|_{B_{p,q}^s}=\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq}\|f*\varphi_k\|_{L_p}^q\right)^{1/q}<\infty\right\}, \quad 1 \leqslant q<\infty$$

$$B_{p,\infty}^s(\mu; R_n)=\left\{f;\ f \in S',\ \|f\|_{B_{p,\infty}^s}=\sup_k 2^{ks}\|f*\varphi_k\|_{L_p}<\infty\right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ и $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ введены в ([6]) и ([7]) соответственно.

2°. Определение 4 (см. ([3]), ([9])). Банахово пространство A_1 называется ретрактом банахова пространства A_0, если существуют операторы $S \in L(A_1, A_0)$, $R \in L(A_0, A_1)$ такие, что $RS=E$, где E — тождественный оператор в $L(A_1, A_1)$. При этом операторы R и S называются ретракцией и коретракцией соответственно.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$. Положим

$$\bar{\varphi}_k=\sum_{j=-2}^{2} \varphi_{k+j}, \text{ где } \varphi_l \equiv 0 \text{ при } l<0.$$

Тогда из (2) и (3) имеем

$$\bar{\varphi}_k * \varphi_k = \varphi_k, \quad k=0, 1, 2 \ldots$$

Положим далее для $f \in S'$ и $g=\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ $(j=0, 1, \ldots)$

$$Sf=\{\varphi_j * f\}_{j=0}^{\infty}, \quad Rg=\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j * g_j. \tag{5}$$

Оператор R определен только на тех последовательностях $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ $(j=0, 1, \ldots)$, для которых ряды, задающие Rg, сходятся в S'.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$. *Тогда:*

а) *пространство* $H_p^s(\mu; R_n)$ *является ретрактом пространства* $L_p(l_2^s)$;

б) *пространство* $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ *является ретрактом пространства* $l_q^s(L_p)$,

(определение пространств $l_q^s(L_p)$, $L_p(l_q^s)$, см., например, в [3,9]).

Соответствующие операторы R и S определяются соотношениями (5).

Если для $1<p<\infty$, $1<q<\infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Psi(\mu; R_n)$ положить

$$F_{p,q}^s(\mu; R_n)=\left\{f; f \in S', \|f\|_{F_{p,q}^s}=\left[\int_{R_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq}|f * \varphi_k|^q\right)^{p/q} dx\right]^{1/q}<\infty\right\},$$

то из утверждения а) теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$. *Тогда*

$$H_p^s(\mu; R_n)=F_{p,2}^s(\mu; R_n).$$

Для банаховых пространств A_0, A_1 символы $[A_0, A_1]_\theta$, $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ означают интерполяционные пространства между A_0 и A_1, полученные соответственно комплексным и вещественным методами (см. [3,9]).

Теорема 3. *Пусть* $0<\theta<1$, $s^*=(1-\theta)s_0+\theta s_1$,

$$\frac{1}{p^*}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}. \quad \textit{Тогда}$$

а) *при* $-\infty<s_0, s_1<\infty$, $s_0 \neq s_1$, $1<p<\infty$, $1 \leq r, q_0, q_1 \leq \infty$

$$(B_{p,q_0}^{s_0}(\mu; R_n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,r}=B_{p,r}^{s^*}(\mu; R_n);$$

б) *при* $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$

$$(B_{p,q_0}^s(\mu; R_n), B_{p,q_1}^s(\mu; R_n))_{\theta,q^*}=B_{p,q^*}^s(\mu; R_n);$$

в) *при* $-\infty<s_0, s_1<\infty$, $s_0 \neq s_1$, $p^*=q^*$, $1<p_0, p_1<\infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$

$$(B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu; R_n), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,p^*}=B_{p^*,q^*}^{s^*}(\mu; R_n);$$

г) *при* $-\infty<s_0, s_1<\infty$, $1<p_0, p_1<\infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$

$$[B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu; R_n), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu; R_n)]_\theta=B_{p^*,q^*}^{s^*}(\mu; R_n);$$

д) *при* $-\infty<s_0, s_1<\infty$, $s_0 \neq s_1$, $1<p<\infty$, $1 \leq q \leq \infty$

$$(H_p^{s_0}(\mu; R_n), H_p^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,q}=B_{p,q}^{s^*}(\mu; R_n).$$

Утверждения а) — г) теоремы получаются из теоремы 1 и соот-

Академия наук СССР

ветствующих интерполяционных формул для пространств $l_q^s(L_p)$ (см. ([3,9])), а утверждение д) доказано в ([7]).

3°. Пусть вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ таков, что вершины $\beta^i (i=1, \ldots, N)$ находятся в $N_{n-1}^0 = N_n^0|_{\xi_n=0}$. Пусть далее $\mathfrak{N}'$ — проекция многогранника $\mathfrak{N}$ на N_{n-1}^0. Тогда согласно (1) соответствующие многограннику $\mathfrak{N}$ функции ν и μ имеют вид

$$\nu(\xi) = (\xi_n^{2m} + \nu'^2(\xi'))^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(\xi) = (\xi_n^{2m} + \nu'^2(\xi'))^{\frac{1}{2m}}, \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{6}$$

Здесь и далее $m = |\alpha^n|$, (см. (1)), ν' и μ' — функции, отвечающие многограннику $\mathfrak{N}'$:

$$\nu'(\xi') = \left[\sum_{j=1}^{n-1} (\xi')^{2(\alpha^j)'} + \sum_{i=1}^{N} (\xi')^{2(\beta^i)'} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \mu'(\xi') = [\nu'(\xi')]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta^i = ((\beta^i)', 0), \quad \alpha^j =$$

$$= ((\alpha^j)', 0), \quad (i = 1, 2, \ldots, N; \ j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Рассмотрим оператор следа:

$$\mathfrak{R}' f = \left\{ f(x', 0), \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', 0), \ldots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x', 0) \right\}, \quad f \in S(R_n).$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $r = 0, 1, \ldots$; $s > s + \frac{1}{p}$, *функции* μ *и* μ' *определены в* (6).

Тогда оператор следа (после продолжения по непрерывности) — есть ретракция

а) $H_p^s(\mu; R_n)$ на $\prod_{j=1}^{n} B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}-j}(\mu'; R_{n-1})$,

б) $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ на $\prod_{j=1}^{n} B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}-j}(\mu'; R_{n-1})$.

Если функция $\nu(\xi)$ (см. (6)) имеет вид

$$\nu(\xi) = \left(\sum_{i=k}^{n} \xi^{2m_i} + \nu'^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

то повторным применением теоремы 4 можно получить следы на гиперплоскостях размерности $1, 2, \ldots, n-2$.

Ереванский государственный
университет

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ինտերպոլյացիա և որոշ ֆունկցիոնալ տարածությունների ֆունկցիաների հետքեր

Հոդվածում բերվում են Սոբոլև—Լիուվիլի և Նիկոլսկի—Բեսովի տիպի տարածությունների վերաբերյալ ինտերպոլյացիոն պնդումներ և թեորեմ նշված տարածություններից ֆունկցիաների հետքերի մասին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1977. [2] *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский*, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, М., 1975. [3] *Х. Трибель*, Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы, Мир, М., 1980. [4] *Х. Трибель*, Теория функциональных пространств, Мир, М., 1986. [5] *B. Stöckert, H. Triebel*, Math. Nachr., v. 89, p. 247–267 (1979). [6] *М. Л. Гольдман*, Труды МИАН СССР, т. 156, с. 47—81 (1980). [7] *А. Г. Багдасарян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 4, с. 353—365 (1988). [8] *Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях*, УМН, т. 20, № 1, с. 3—74 (1965). [9] *Й. Бергх, Й. Лефстрём*, Интерполяционные пространства. Введение, Мир, М., 1980.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов

Оптимизация процесса кристаллизации сферической отливки

(Представлено 9/VI 1988)

В статье исследуется процесс кристаллизации сферической отливки. Найден закон оптимального изменения температуры внешней поверхности формы, обеспечивающий максимальную несущую способность отливки при заданном времени отверждения.

1. *Постановка задачи.* Форма для кристаллизации отливки состоит из двух частей. Внутренняя часть формы представляет собой шар радиуса a_1, внешняя часть—массивное твердое тело, в котором вырезано сферическое отверстие радиуса $a_2>a_1$. Центр отверстия совпадает с центром шара. Форма предварительно прогрета до температуры кристаллизации θ_0. (Величина θ отсчитывается от температуры эксплуатации отливки.) В момент времени $t=0$ отверстие между внешней и внутренней частями формы заливается расплав при температуре θ_0. За счет изменения температуры внешней поверхности формы $\theta^*=\theta^*(t)$, $\theta^*(0)=\theta_1<\theta_0$ на отрезке времени $[0, T]$ происходит кристаллизация расплава. Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ). В момент времени t расплав занимает область $(a_1\leqslant r<a(t))$, а вещество отливки в твердой фазе—область $(a(t)<r\leqslant a_2)$, где $a(t)$—радиус поверхности раздела фаз. Естественная конфигурация расплава совпадает с конфигурацией формы в момент заливки. Для материала отливки в твердом агрегатном состоянии естественная конфигурация получается из актуальной конфигурации расплава в момент кристаллизации с помощью однородной деформации с коэффициентом линейного расширения при фазовом превращении λ.

Поведение материала формы подчиняется уравнению состояния изотропного упругого тела: $\sigma=K_1(\bar{\varepsilon}-3\alpha\theta)E+2G_1e$, где σ—тензор напряжений, E—единичный тензор, $\bar{\varepsilon}$, e—шаровая составляющая и девиатор тензора деформаций ε, K_1—модуль объемной деформации, G_1—модуль сдвига, α—коэффициент линейного теплового расширения.

Расплав считаем идеальной несжимаемой жидкостью (p—давление):

$$\sigma=-pE,\quad \bar{\varepsilon}=\varepsilon_{\vartheta\vartheta} \tag{1.1}$$

Для простоты полагаем равными коэффициенты линейного теплового расширения отливки и формы.

Поведение материала отливки в твердой фазе описывается уравнением состояния несжимаемого упругого тела

$$\sigma=-pE+2G(e-e^*),\quad \bar{\varepsilon}=3(\alpha\theta+\lambda). \tag{1.2}$$

где G — модуль сдвига, $e^* = e(\tau^*(r), r)$, $\tau^*(r)$ — момент кристаллизации расплава в точке с радиусом r.

После окончания кристаллизации происходит остывание отливки в форме до температуры $\theta = 0$. Затем отливка вынимается из формы и загружается внешним давлением интенсивности q. Согласно ([1]) несущая способность сферического сосуда максимальна, когда интенсивность напряжений постоянна по сечению. Требуется определить закон изменения температуры внешней поверхности формы $\theta^*(t)$, который обеспечивает постоянную интенсивность напряжений в отливке при заданном времени отверждения T.

2. *Определение температуры отливки при кристаллизации.* Для расчета температурных полей в отливке воспользуемся приближенным методом ([2]). Предположим, что изменение температуры внешней поверхности формы и тепловыделение при кристаллизации происходят достаточно медленно, так что в каждый момент времени в отливке и форме успевает установиться термодинамическое равновесие. При наличии сферической симметрии равновесное температурное поле в твердых телах описывается уравнением Лапласа

$$\theta'' + 2\theta' r^{-1} = 0, \tag{2.1}$$

где штрих обозначает производную по r. В области, занятой расплавом, температура определяется конвективным теплообменом и считается постоянной и равной температуре фазового перехода ([3]). Пусть коэффициенты теплопроводности отливки и формы совпадают и равны $\varkappa$. Тогда справедливы граничные условия

$$|\theta(t, 0)| < \infty, \quad \theta(t, a_1) = \theta_0, \quad \theta(t, \infty) = \theta^*(t)$$

$$\theta(t, a(t)) = \theta_0, \quad \rho\mu a^{\cdot}(t) = \varkappa\theta'(t, a(t)) \tag{2.2}$$

где μ — скрытая теплота кристаллизации, ρ — плотность расплава. Решение краевой задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\theta = \theta_0 (0 \leqslant r \leqslant a(t)), \quad \theta = [\theta_0 - \theta^*(t)] a(t) r^{-1} + \theta^*(t) \quad (a(t) \leqslant r < \infty). \tag{2.3}$$

Функция $a(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho\mu a a^{\cdot} = -\varkappa(\theta_0 - \theta^*), \quad a(0) = a_2. \tag{2.4}$$

3. *Формирование полей напряжений и перемещений.* При центрально симметричной деформации величина ε определяется по формуле

$$\bar{\varepsilon} = u' + 2ur^{-1}, \tag{3.1}$$

где $u = u(t, r)$ — радиальное смещение точек отливки и формы. Из соотношений (1.1), (1.2), (2.3) и (3.1) получим

$$u = \varkappa\theta_0 r + \left\{\beta + [\varkappa + \frac{1}{2}\alpha(\theta_0 - \theta^*)] a^3\right\} r^{-2} \quad (a_1 \leqslant r \leqslant a(t);$$

$$u = \frac{3}{2}\varkappa(\theta_0 - \theta^*) a + (\varkappa + \varkappa\theta^*) r + \beta r^{-2} \quad (a(t) \leqslant r \leqslant a_2), \tag{3.2}$$

где $\beta = \beta(t)$ — подлежащая определению функция времени. Согласно (1.2), (2.3) и (3.2) ненулевые физические компоненты тензора напряжений в области, занятой материалом отливки в твердой фазе, будут

$$\sigma_r=-p-4G\left\{\left[\beta(t)-\beta(\tau^*(r))\right]r^{-3}+\frac{1}{2}\alpha\left[(\theta_0-\theta^*(t))a(t)-(\theta_0-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\theta^*(\tau^*(r))a(\tau^*(r))\right]r^{-1}-\lambda\right\},$$

$$\sigma_\theta=\sigma_\varphi=-p+2G\left\{\left[\beta(t)-\beta(\tau^*(r))\right]r^{-3}+\frac{1}{2}\alpha\left[(\theta_0-\theta^*(t))a(t)-(\theta_0-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\theta^*(\tau^*(r)))a(\tau^*(r))\right]r^{-1}-\lambda\right\} \tag{3.3}$$

На поверхностях контакта отливки и формы выполняются равенства

$$\sigma_r(t,a)=\sigma_r(t,a_1)=3K_1\left\{\beta+\left[\lambda+\frac{1}{2}\alpha(\theta_0-\theta^*)\right]a^3\right\}a_1^{-3};$$

$$\sigma_r(t,a_2)=-4G_1\left[\beta a_2^{-3}+\lambda+\frac{3}{2}\alpha(\theta_0-\theta^*)a a_2^{-1}\right]. \tag{3.4}$$

Проинтегрируем уравнение равновесия

$$\sigma_r'+2(\sigma_r-\sigma_\theta)r^{-1}=0 \tag{3.5}$$

по r в пределах от $a(t)$ до a_2. Учитывая (3.3) и граничные условия (3.4), найдем ($X(r)=\beta(\tau^*(r))$, $Z(r)=\theta_0-\theta^*(\tau^*(r))$):

$$K_1\left[X(r)+\left(\lambda+\frac{1}{2}\alpha Z(r)\right)^{-3}\right]a_1^{-3}+\frac{4}{3}G_1\left[\lambda+X(r)a_2^{-3}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\alpha Z(r)ra_2^{-1}\right]-4G\int_r^{a_1}\left[(X(r)-X(s))s^{-3}+\frac{1}{2}\alpha(rZ(r)-sZ(s))\right]s^{-2}ds-$$

$$-4G\lambda\ln(a_2r^{-1})=0. \tag{3.6}$$

4. *Выбор оптимального закона изменения температуры.* Согласно (1.2) и (3.1) после полного охлаждения радиальное смещение точек отливки равно: $u=\lambda r+Dr^{-2}$, где D—подлежащая определению постоянная. Ненулевые физические компоненты тензора напряжений определяются по формулам (3.3), в которых следует $\beta(t)$ заменить на D и положить $\theta_0-\theta^*(t)=0$. Интенсивность напряжений в полом шаре S имеет вид

$$S=\sqrt{3}(\sigma_r-\sigma_\theta)/2=-3\sqrt{3}G\left[(D-X(r))r^{-3}-\frac{1}{2}\alpha Z(r)-\lambda\right]. \tag{4.1}$$

Предположим, что интенсивность напряжений в отливке постоянна: $S=S_*$. Проинтегрируем уравнение (3.5) по r в пределах от a_1 до a_2. Учитывая (4.1) и граничные условия $\sigma_r(a_1)=0$, $\sigma_r(a_2)=-q$, получим $S_*=q\sqrt{3}\left[4\ln(a_2a_1^{-1})\right]^{-1}$. Продифференцируем равенства (3.6) и (4.1) по r. Исключая функцию $X'(r)$, найдем

$$2\alpha\left[\left(G_1-\frac{G}{3}\right)+\frac{r}{a_2}(G_1-G)\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a_2}\right)\right)\right]Z'(r)+2\alpha(G_1-G)\left(1-\right.$$

$$-\left(\frac{r}{a_2}\right)^4\Big)\frac{Z(r)}{a_2}=4\pi r^2(G-G_1)(r^{-2}-a_2^{-2})-\frac{S_0 r^4}{G\sqrt{3}}\left|\frac{K_1}{a_1^3}+\frac{4}{3}\left(\frac{G}{r^3}-\frac{G-G_2}{a_1^3}\right)\right|.$$

При $G=G_1$ из этого уравнения следует оптимальный закон изменения температуры внешней поверхности формы

$$\theta^*(t)=\theta_1-q\left|\ln\frac{a_2}{a(t)}+\frac{K_1}{4G_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3\left(1-\left(\frac{a(t)}{a_2}\right)^3\right)\right|\left(4\pi G_1\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^{-1}. \qquad (4.2)$$

Отметим, что при заданной интенсивности внешнего давления q оптимальный режим кристаллизации не всегда может быть реализован, поскольку необходимо выполнение дополнительного условия $\theta^*(t)>0$. Это неравенство справедливо при $\alpha\theta_1\geqslant\frac{q}{4G_1}\left|1+\frac{K_1}{4G_1}\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3-1\right)\ln^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right|$.

Подставляя выражение (4.2) в (2.4), получим уравнение для определения оптимального закона смещения фронта кристаллизации

$$\dot{a}a=-\frac{\varkappa}{\rho\mu}\left\{\theta_0-\theta_1+q\left[\ln\frac{a_2}{a_1}+\frac{K_1}{4G_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3\left(1-\left(\frac{a}{a_2}\right)^3\right)\right]\left(4\pi G_1\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^{-1}\right\}$$

$$a(0)=a_2.$$

Время оптимальной кристаллизации отливки T равно

$$T=\frac{4\pi\rho\mu a_2^2 G_1}{\varkappa q}\ln\frac{a_2}{a_1}\int_{a_1/a_2}^{1}x\left[\frac{K_1}{4G_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3(1-x^3)-\ln x+\frac{4\pi G_1}{q}(\theta_0-\theta_1)\ln\frac{a_2}{a_1}\right]^{-1}dx. \qquad (4.3)$$

При заданном времени затвердевания T соотношение (4.3) служит для определения начального переохлаждения формы $\theta_0-\theta_1$.

Институт проблем механики
Академии наук СССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Դ. ԴՐՈԶՈՎ

Սֆերիկ ձուլվածքի բյուրեղացման պրոցեսի օպտիմիզացիան

Ուսումնասիրվում է սֆերիկ ձուլվածքի բյուրեղացման պրոցեսը։ Գտնվել է ձուլման կաղապարի սպտաքին մակերևույթի ջերմության օպտիմալ փոփոխության օրենքը, որն ապահովում է ձուլվածքի ամենամեծ բեռնունակությունը ձուլվածքի կարծրացման տրված ժամանակի ընթացքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский*, Теория ползучести неоднородных тел, Наука, М., 1983. [2] *Л. С. Лейбензон*, Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 2. Подземная гидравлика воды нефти и газа, Госнаучтехиздат, М.—Л., 1934. [3] *Б. Я. Любов*, Теория кристаллизации в больших объемах, Наука, М., 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 5

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. К. Оганесян

К осесимметричной контактной задаче о взаимодействии упругого полубесконечного цилиндра с круглой шайбой малой толщины

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/IV 1988)

Основные результаты по исследованию контактных задач теории упругости для цилиндрических тел отражены в ([1]). В этом направлении укажем также на работы ([2-8]).

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача о взаимодействии полубесконечного упругого цилиндра с упругой шайбой малой толщины.

Рассмотрим отнесенный к цилиндрической системе координат r, θ, z упругий полубесконечный цилиндр $\Omega=\{r=R,\ \pi-\theta<\pi,\ z\geqslant 0\}$ с осью Oz и радиуса R, обладающий модулем сдвига G_2, торец $z=0$ которого концентрически подкреплен упругой круговой шайбой малой толщины h из упругого материала с модулем сдвига G_1. Поверхность шайбы $z=-h$ нагружена тангенциальными напряжениями произвольной интенсивности, т. е.

$$\tau_{zr}|_{z=-h}=\tau_0(r),\quad \sigma_z|_{z=-h}=0\quad (0<r<R). \tag{1}$$

Определим тангенциальные контактные напряжения $\tau_{rz}=\tau(r)$ в зоне контакта, когда боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки.

Предположим, что шайба постоянной толщины $h<<R$, полностью сцепленная с полубесконечным цилиндром на его торце $z=0$, нагружена симметричным образом и ее изгибная жесткость пренебрежимо мала, т. е. $D\approx 0$, где D—цилиндрическая жесткость шайбы на изгиб. Рассматривая равновесие элемента шайбы в цилиндрической системе координат и используя затем связь между компонентами напряжений и деформаций, придем к дифференциальному уравнению

$$\Delta_0 U_r=-(1-\nu^2)E^{-1}F_r;$$

$$\Delta_0=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2},\quad F_r=[\tau(r)-\tau_0(r)]/h. \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение (2) должно рассматриваться при граничном условии

$$T(r)|_{r=b}=0, \tag{3}$$

где $T(r)$—растягивающие условия, действующие в срединной плос-

кости шайбы и выражающиеся через радиальное перемещение формулой

$$T(r)=2hG\left[\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_r)-\frac{U_r}{r}\right]\quad(0<r<R).$$

Решая уравнение (2) методом вариации постоянных, получим

$$U_r=C_0r+\frac{1-\nu}{4hGr}\int_0^r(\xi^2-r^2)[\tau(\xi)-\tau_0(\xi)]d\xi\quad(0<r<R). \tag{4}$$

На торце $z=0$ имеем условие контакта

$$U_r^{(0)}=U_r^{(1)}\quad(0<r<R) \tag{5}$$

и условия

$$\sigma_{rz}(r,0)=\tau(r),\quad \sigma_z(r,0)=0\quad(0<r<R) \tag{6}$$

Здесь $\tau(r)$—неизвестное тангенциальное контактное напряжение, подлежащее определению.

На боковой же поверхности цилиндра

$$\sigma_r(R,z)=0,\quad \sigma_{rz}(R,z)=0\quad(0<z<\infty). \tag{7}$$

Воспользовавшись известным представлением осесимметричной задачи теории упругости через функцию Лява (6), бигармоническую функцию Лява $\chi(r,z)$ представим в виде

$$\chi=C_0+E_0Z+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k+E_kZ)e^{-\mu_kz}J_0(\mu_kr)+$$
$$+\int_0^{\infty}[A(\lambda)I_0(\lambda r)+B(\lambda)rI_1(\lambda r)]\cos\lambda z\,d\lambda\quad(0<r<R,\ 0<z<\infty), \tag{8}$$

где $J_0(x)$—функция Бесселя первого рода, а $I_0(x)$ и $I_1(x)$—модифицированные функции Бесселя.

Подставляя (8) в известные соотношения ([6]), которые связывают компоненты напряжений и перемещений с функцией $\chi(r,z)$, и требуя, чтобы выполнялось второе условие (6), получим

$$C_k=(2\nu-1)E_k/\mu_k\quad(k=0,1,2,\ldots); \tag{9}$$

$$2GU_r(r,z)=\int_0^{\infty}[A(\lambda)I_1(\lambda r)+rB(\lambda)I_0(\lambda r)]\lambda^2\sin\lambda z\,d\lambda+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kE_kJ_1(\mu_kr)[2(1-\nu)-\mu_kz]e^{-\mu_kz};$$

$$2GU_z(r,z)=\int_0^{\infty}\Big[\lambda A(\lambda)I_0(\lambda r)+B(\lambda)\big(4(1-\nu)I_0(\lambda r)+$$
$$+\lambda rI_1(\lambda r)\big)\Big]\lambda\cos\lambda z\,d\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kE_kJ_0(\mu_kr)[2\nu-1-\mu_kz]e^{-\mu_kz}.$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \Big\{ I_0(\lambda r)\lambda r B(\lambda) + I_1(\lambda r)[\lambda A(\lambda) + 2(1-\nu)E(\lambda)] \Big\} \times$$

$$\times \lambda^2 \cos\lambda z d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k z} J_2(\mu_k r)\mu_k^2 E_k(\mu_k z - 1), \quad (0<r<R,\ 0<z<\infty),$$

$$\sigma_r(r, z) = \int_0^\infty \Big\{ I_0(\lambda r)[(1-2\nu)\lambda B(\lambda) + \lambda^2 A(\lambda)] +$$

$$- I_1(\lambda r)\Big[\lambda^2 r E(\lambda) - \frac{\lambda}{r} A(\lambda)\Big]\Big\} \lambda \sin\lambda z d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \mu_k^2 J_0(\mu_k r)[2E_k - \mu_k E_k z] - \frac{\mu_k}{r} J_1(\mu_k r)[2(1-\nu)E_k - \mu_k E_k Z] \Big\} e^{-\mu_k z}.$$

Используя далее интегральное представление функций $e^{-\mu_k z}$ и $ze^{-\mu_k z}$ по функциям $\sin\lambda z$ и $\cos\lambda z$ ([7]), при помощи условия (7) после некоторых преобразований для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ получим следующую систему уравнений:

$$B(\lambda)[(1-2\nu)I_0(\lambda R) + \lambda R I_1(\lambda R)] + A(\lambda)[\lambda I_0(\lambda R) - R^{-1} I_1(\lambda R)] =$$

$$= -4\pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \lambda E_k J_0(\mu_k R)/(\mu_k^2 + \lambda^2)^2; \tag{10}$$

$$B(\lambda)[\lambda R I_0(\lambda R) + 2(1-\nu) I_1(\lambda R)] + A(\lambda)\lambda I_1(\lambda R) = 0.$$

Теперь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ определим из системы (10) и их выражения подставим в первое условие (6), а затем обе части полученного уравнения умножим на $rJ_1(\mu_n r)$ и проинтегрируем от 0 до R. В результате будем иметь

$$\mu_n E_n = \frac{16}{\pi R J_0(\mu_n R)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k R) E_k \int_0^\infty \frac{I_1^2(\lambda R)}{\Delta(\lambda)} \frac{\lambda^6 d\lambda}{(\mu_n^2 + \lambda^2)^2(\mu_k^2 + \lambda^2)^2} -$$

$$- \frac{2}{R^2 \mu_n J_0^2(\mu_n R)} \int_0^R r\tau(r) J_1(\mu_n r) dr \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Уравнения (11) должны рассматриваться вместе с условием контакта (5), которое принимает вид $(0<r<R)$

$$G^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k J_1(\mu_k r) = (1-\nu_2)^{-1} C_0 r + [4(1-\nu_2)G_1 h r]^{-1}(1-\nu_1) \int_0^r (\xi^2 - r^2)[\tau(\xi) -$$

$$- \tau_0(\xi)] d\xi. \tag{12}$$

Умножая далее (12) на $rJ_1(\mu_n r)$, а затем интегрируя обе его части от 0 до R, после перехода к безразмерным координатам и величинам

$$x = r/b,\ y = \xi/b,\ \tau^*(y) = b\tau(by)/RG_2,\ \tau_0^*(y) = b\tau_0(by)/RG_2;$$

$$L(x, y) = K(bx, by)/R,\ E_n^* = \mu_n^2 E_n J_0(\mu_n R)/G_2,\ H = (1-\nu_1)RG_2/8(1-\nu_2)G_1 h;$$

$$K(\xi, r)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-1}J_0^{-2}(\mu_k R)J_1(\mu_k\xi)J_1(\mu_k r),\ \lambda^*=\lambda R,\ \mu_k^*=\mu_k R,\ C=-\frac{C_0}{2(1-\nu_2)}$$

получим

$$E_n^*=-4C+4HJ_0^{-1}(\mu_n^*)\mu_n^*\int_0^1 J_1(\mu_n^* x)dx\int_0^x (y^2-x^2)|\tau^*(y)-\tau_0^*(y)|dy$$

$$n=(0,1,2,\ldots). \tag{13}$$

При этом из граничного условия (3) легко найти, что

$$C=-2L(1+\nu_1)\int_0^1|\tau^*(y)-\tau_0^*(y)|dy-NH\int_0^1(y^2-1)|\tau^*(y)-\tau_0^*(y)|dy,$$

$$(N=(1-\nu_1^2)) \tag{14}$$

Производя далее интегрирование по частям интеграла в (13), после несложных преобразований будем иметь

$$E_n^*=4C(N^{-1}-1)+8H(1+\nu_1)N^{-1}\int_0^1|\tau^*(y)-\tau_0^*(y)|dy-$$

$$-8HJ_0^{-1}(\mu_n^*)\int_0^1 xJ_0(\mu_n^* x)dx\int_0^x|\tau^*(y)-\tau_0^*(y)|dy. \tag{15}$$

Теперь, если неизвестное контактное напряжение $\tau^*(y)$ разложить по полной ортогональной системе $\{J_1(\mu_k^* y)\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. положить

$$\tau^*(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k J_1(\mu_k^* y)\quad(0<y<1),$$

то вместо (15) будем иметь

$$E_n^*-D_n^*\delta_n=\gamma+G_n\quad(n=1,2,\ldots), \tag{16}$$

$$D_n^*=4HJ_0(\mu_n^*)/\mu_n^*;$$

$$\gamma=8H(1+\nu_1)N^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^*)^{-1}\delta_k[J_0(\mu_k^*)-1]+4C(N^{-1}-1);$$

$$G_n=D_n^*\delta_n^0-8H(1+\nu_1)N^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^*)^{-1}\delta_k^0[J_0(\mu_k^*)-1].$$

После перехода к безразмерным величинам (11) можно представить в форме

$$E_n^*+\sum_{k=1}^{\infty}A_{kn}E_k^*+B_n\delta_n=0; \tag{17}$$

$$\delta_n=2J_0^{-1}(\mu_n^*)\int_0^1 xJ_1(\mu_n^* x)\tau(x)dx;\quad B_n=J_0(\mu_n^*);$$

$$A_{kn} = -16\pi^{-1}\mu_n^* \int_0^\infty \Delta_0^{-1}(\lambda^*) I_1^2(\lambda^*) \lambda^{*-6} (\mu_n^{*2} + \lambda^{*2})(\mu_k^{*2} + \lambda^{*2})^2 d\lambda^*;$$

$$\Delta_0(\lambda^*) = R\Delta(\lambda) = \lambda^{*2}[I_0^2(\lambda^*) - I_1^2(\lambda^*)] - 2(1-\nu_2) I_1^2(\lambda^*).$$

Таким образом, поставленная задача свелась к решению системы из двух алгебраических систем (16) и (17). Исключая из этой системы b_n, для определения $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ получим одну бесконечную систему, которая после введения новой неизвестной

$$X_n = (D_n^* + B_n)\xi_n / \mu_n^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

принимает вид

$$X_n + \mu_n^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} D_k^* \mu_k^{1/2} (D_k^* + B_k)^{-1} X_k = \mu_n^{-1/2} a_n, \tag{18}$$

$$a_n = -\gamma - G_n - \sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} (\gamma + G_k) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для исследования бесконечной алгебраической системы (18) можно показать, что

$$D_k^*(D_k^* + B_k)^{-1} = (1 + \gamma_0 \mu_k)^{-1} \quad (\gamma_0 = 1/8H),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} |A_{kn} D_k^* \mu_k^{1/2} (D_k^* + B_k)^{-1}| = O(\mu_n^{*-1})$$

$$\mu_n^{-1/2} a_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

откуда вытекает ее квазиполная регулярность.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ղ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Փոքր հաստության շրջանաձև տափօղակի և կիսաանվերջ գլանի փոխազդեցության վերաբերյալ առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի մասին

Դիտարկվում է առանցքահամաչափ բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիր բարակապատ շրջանաձև առաձգական տափօղակից հավասար շառավիղ ունեցող կիսաանվերջ գլանին, որի կողմնային մակերևույթը ազատ է ճիգերից։ Տափօղակը համակենտրոն ձևով ամրակցված է առաձգական գլանին, վերջինիս հատույթի մակերևույթով։ Ենթադրվում է, որ տափօղակի ծռման կոշտությունը արհամարելի փոքր է։ Խնդիրը բերվում է քվազիլիովին ռեգուլյար հանրահաշվական անվերջ համակարգի լուծման։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [2] *Б. Л. Абрамян*, ДАН АрмССР, т. 19, № 1, с. 3—12 (1954). [3] *В. Т. Гринченко*, ПМ, т. 1, № 1, с. 109—119 (1965). [4] *А. В. Белоконь, Е. П. Маликов*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 35, № 2, с. 17—26 (1982). [5] *Э. К. Оганесян*, ДАН АрмССР, т. 75, № 1, с. 30—35 (1982). [6] *И. Н. Снеддон*, Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955. [7] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М., 1971. [8] *В. М. Александров, С. М. Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Г. Гулян, Г. Г. Мхитарян, С. М. Мхитарян

О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 24/V 1988)

Ряд важных вопросов о концентрации напряжений возле щелей или абсолютно жестких тонких включений в однородных упругих средах исследован в ([1, 2]). Многие результаты в этом направлении отражены также в ([3, 4]).

В настоящей статье рассматривается вопрос об определении основных характеристик концентрации напряжений возле системы произвольного числа щелей или тонких абсолютно жестких включений, расположенных на одной линии в находящемся в условиях антиплоской деформации бесконечном пространстве, модуль упругости которого по вертикальной координате изменяется по степенному закону.

1. Пусть упругое неоднородное бесконечное пространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, состоит из верхнего и нижнего полупространств, причем верхнее полупространство $z>0$ обладает модулем упругости $E=E_+z^{\alpha}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ и коэффициентом Пуассона σ_+, а нижнее полупространство $z<0$ модулем упругости $E=E_-|z|^{\alpha}$ и коэффициентом Пуассона σ_-. Пусть далее это пространство в плоскости $z=0$ содержит систему связных вдоль оси Oy щелей

$$\Omega=\left\{z=0;\ \bigcup_{k=1}^{N} a_k\leqslant x\leqslant b_k,\ -\infty<y<\infty\right\}\quad (k=1,2,\ldots,N)$$

$$(a_{k-1}<b_{k-1}<a_k;\ k=1,2,\ldots,N,\ b_N>a_N)$$

и нагружено такими силовыми факторами (приложенными к берегам щелей касательными силами по направлению Oy или равномерно распределенными на бесконечности касательными силами в том же направлении или же сосредоточенными вдоль определенных линий, параллельных оси Oy, и равномерно распределенных по ним силами), которые обеспечивают возможность нахождения пространства в условиях антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxz. Тогда отличной от нуля будет только компонента смещений $v(x,z)$ в направлении оси Oy и можно ограничиться рассмотрением системы линейных щелей

$$L=\left\{z=0;\ \sum_{k=1}^{N} a_k\leqslant x\leqslant b_k\right\}\quad (k=1,2,\ldots),$$

в плоскости Oxz, являющейся следом указанной выше системы щелей

Ω в этой плоскости. При этом поскольку при помощи известного способа воздействия всех силовых факторов можно свести к нагрузкам, приложенным к берегам щелей, то будем считать, что

$$\tau_{zy}|_{z=0} = -\tau(x) \quad (x \in L), \tag{1.1}$$

тем самым предполагая, что верхние и нижние берега щелей нагружены касательными силами разных интенсивностей.

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи. С этой целью плоскость (xz) осью Ox разрежем на верхнюю $(+)$ и нижнюю $(-)$ полуплоскости и запишем выражение вертикальных смещений их граничных точек. В соответствии с (1.1) введя в рассмотрение функции

$$T_{\pm}(x)=\begin{cases} \tau_{\pm}(x) & (x \in L); \\ \tau(x) & (x \in L';\ L'=R/L;\ R=\{z=0;\ |x|<\infty\}), \end{cases}$$

согласно известным результатам [1, 5] будем иметь

$$v_{\pm}(x, 0)=v_{\pm}(x)=\pm\frac{\vartheta_{\nu}^{\pm}}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T_{\pm}(s)ds}{|x-s|^{\nu}} \quad (-\infty<x<\infty), \tag{1.2}$$

$$\vartheta_{\nu}^{\pm}=2(1+\sigma_{\pm})\Gamma(1+\nu/2)\{\sqrt{\pi}E_{\nu}^{\pm}\Gamma[(1+\nu)/2]\}^{-1},$$

где $\Gamma(x)$—гамма-функция Эйлера.

Далее введя в рассмотрение скачок смещений на щелей

$$\Phi(x)=v_{+}(x)-v_{-}(x);\quad \Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in L'), \end{cases} \quad (-\infty<x<\infty)$$

из (1.2) получим уравнение

$$\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(s)ds}{|x-s|^{\nu}}=\Phi(x) \quad (-\infty<x<\infty), \tag{1.3}$$

$$T(x)=\vartheta_{\nu}^{+}T_{+}(x)+\vartheta_{\nu}^{-}T_{-}(x).$$

Если теперь обратить [6] уравнение (1.3), придем к следующему ключевому уравнению:

$$T(x)=\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi}\int_{L}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}} \quad (-\infty<x<\infty). \tag{1.4}$$

Рассматривая ключевое уравнение (1.4) на системе щелей L, придем к следующему разрешающему интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi}\int_{L}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}}=f(x) \quad (x \in L) \tag{1.5}$$

$$f(x)=\vartheta_{\nu}^{+}\tau_{+}(x)+\vartheta_{\nu}^{-}\tau_{-}(x),$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(a_k)=\varphi(b_k)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, N), \tag{1.6}$$

выражающих условия непрерывности смещений $v_{\pm}(x)$ в концевых точках щелей. Рассматривая же (1.4) на L', определим напряжения вне L на линии продолжения щелей:

$$\tau(x)=\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi(\vartheta_{\nu}^{+}+\vartheta_{\nu}^{-})}\int_{L}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}}\quad(x\in L'). \tag{1.7}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегродифференциального уравнения (1.5) при условиях (1.6), после чего касательные напряжения вне щелей сразу определятся по формуле (1.7).

Предельный переход $\nu\to 0$ в (1.5) и (1.7) приводит к основным уравнениям

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{L}\frac{\varphi'(s)ds}{s-x}=-f_0(x)\quad(x\in L),$$

$$f_0(x)=\vartheta_0^{+}\tau_{+}(x)+\vartheta_0^{-}\tau_{-}(x);\ \vartheta_0^{\pm}=2(1+\sigma_{\pm})/\pi E_0^{\pm},$$

$$\tau(x)=-\frac{1}{\pi^2(\vartheta_0^{+}+\vartheta_0^{-})}\int_{L}\frac{\varphi'(s)ds}{s-x}\quad(x\in L')$$

обсуждаемой задачи для обычного упругого неоднородного пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации.

Рассмотрим частный случай, когда $L=\{z=0;\ x\geqslant 0\}$, т. е. случай полубесконечной щели. Тогда уравнение (1.5) и условия (1.6) примут соответственно вид

$$\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}}=f(x)\quad(x>0), \tag{1.8}$$

$$\varphi(0)=0. \tag{1.9}$$

Чтобы построить решение уравнения (1.8), воспользуемся ортогональным интегральным соотношением ([7])

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}}s^{-\alpha/2}J_{-\alpha}(\lambda\sqrt{s})ds=$$

$$=\frac{2^{\nu}\sec(\pi\nu/2)}{\Gamma(1-\nu)}\lambda^{-\nu}x^{(\alpha-1)/2}J_{1-\alpha}(\lambda\sqrt{x}), \tag{1.10}$$

где $\lambda,\ x>0$, $\alpha=(1+\nu)/2$, а $J_{\mu}(x)$—функция Бесселя первого рода. Исходя из (1.10), решение уравнения (1.8) представим в виде

$$\varphi'(x)=x^{-\alpha/2}\int_{0}^{\infty}\Phi(\lambda)J_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x})d\lambda\quad(x>0). \tag{1.11}$$

Подстановка (1.11) в (1.8) с учетом (1.10) после некоторых преобразований даст

$$\Phi(\lambda)=\frac{\Gamma(1-\nu)\lambda^{1+\nu}}{2^{\nu}\operatorname{cosec}(\pi\nu/2)}\int_0^{\infty} x^{(1-\nu)/2} f(x) J_{1-\nu}(\lambda\sqrt{x})dx, \tag{1.12}$$

причем для сходимости последнего интеграла достаточно, чтобы

$$f(x)=O(x^{\alpha-1})(x\to 0); \quad f(x)=O(x^{\nu/4-\varepsilon}) \quad (\varepsilon>0,\ x\to\infty).$$

Теперь, проинтегрировав (1.11) и учитывая (1.9), находим

$$\varphi(x)=2x^{(1-\nu)/2}\int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{1-\nu}(\lambda\sqrt{x})d\lambda \quad (x\geqslant 0). \tag{1.13}$$

Таким образом, в разбираемом частном случае решение разрешающего уравнения (1.8)—(1.9) дается формулами (1.12)—(1.13).

Отметим, что для вычисления коэффициента интенсивности напряжений можно пользоваться развитой в ([8]) методикой, где, как и в ([9-10]), рассмотрены другие частные случаи L при плоской деформации.

2. Теперь в такой же постановке, как выше, для упругого неоднородного указанного типа бесконечного пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации, обсудим аналогичную задачу о включениях, когда система сквозных щелей Ω заменяется системой абсолютно жестких тонких включений идентичной конфигурации, причем включения в вертикальном направлении не сопротивляются изгибу. В этой задаче, сохраняя прежние обозначения, требуется определить скачок касательных напряжений $T(x)=T_+(x)-T_-(x)$ на системе включений L, а также касательные напряжения $\tau(x)$ и вертикальные смещения $v(x)=v_+(x)=v_-(x)$ вне L, т. е. на L'. При этом считается, что

$$v_+(x,0)=v_+(x)=v_-(x,0)=v_-(x)=f(x) \quad (x\in L), \tag{2.1}$$

где $f(x)$—наперед заданная функция, обусловленная приложенными к бесконечному телу силовыми факторами.

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи. Для этого равенства (1.2) рассмотрим как интегральные уравнения относительно $T_\pm(x)$ и их обратим. В результате будем иметь

$$T_\pm(x)=\pm\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}}\cdot\frac{v'_\pm(s)}{\vartheta_\nu^\pm}ds \quad (-\infty<x<\infty),$$

откуда

$$T(x)=\frac{\nu\operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}}\tilde{V}'(s)ds \quad (-\infty<x<\infty), \tag{2.2}$$

$$\tilde{V}(x)=(\vartheta_\nu^+)^{-1}v_+(x)+(\vartheta_\nu^-)^{-1}v_-(x).$$

В свою очередь обращая уравнение (2.2), придем к следующему ключевому интегральному уравнению задачи:

$$\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{T}(s)ds}{|x-s|^{\nu}}=\tilde{V}(x)\quad(-\infty<x<\infty) \tag{2.3}$$

Далее рассматривая ключевое уравнение (2.3) на системе включений и учитывая (2.1), придем к разрешающему интегральному уравнению задачи ($x\in L$)

$$\int_{L}\frac{T(s)ds}{|x-s|^{\nu}}=\nu\tilde{\Theta}_{\nu}f(x)\quad(\tilde{\Theta}_{\nu}=(\Theta_{\nu}^{+})^{-1}+(\Theta_{\nu}^{-})^{-1}), \tag{2.4}$$

которое должно рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k}T(x)dx=0\quad(k=1,2,\ldots,N), \tag{2.5}$$

выражающих статические условия равновесия включений. Рассматривая же ключевое уравнение (2.3) на L', находим

$$v(x)=(\nu\tilde{\Theta}_{\nu})^{-1}\int_{L}\frac{T(s)ds}{|x-s|^{\nu}}\quad(x\in L'). \tag{2.6}$$

Таким образом, после того, как найдены решение уравнения (2.4)—(2.5), вертикальные смещения вне включений будут определяться по (2.6).

С другой стороны, поскольку в обсуждаемой задаче $v_{+}(x)-v_{-}(x)=\Phi(x)=0$ ($-\infty<x<\infty$), то из (1.3) или (1.4) вытекает, что $T(x)=\Theta_{\nu}^{+}T_{+}(x)+\Theta_{\nu}^{-}T_{-}(x)=0$ ($-\infty<x<\infty$), откуда

$$T_{-}(x)=-\Theta_{\nu}^{+}(\Theta_{\nu}^{-})^{-1}T_{+}(x)\ (x\in L);\quad v(x)=0\ (x\in L').$$

В заключение отметим, что в частном случае одного полубесконечного включения решения разрешающих уравнений (2.4)—(2.6) в явном виде можно построить при помощи результатов из ([11]).

Ереванский институт народного хозяйства
Институт механики Академии наук Армянской ССР

Կ. Գ. ՂՈՒԼՅԱՆ, Գ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Անհամասեռ միջավայրում ճաքերի և բարակ ներդրակների շրջակայքում լարումների կենտրոնացումների մասին հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում

Դիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող անվերջ տարածությունում մի գծի երկայնքով դասավորված կամայական թվով ճաքերի կամ բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգերի շրջակայքում լարումների կենտրոնացումների հիմնական բնութագրիչների որոշման հարցը, երբ տարածության առաձգականության մոդելը ըստ ուղղահայաց կոորդինատի փոփոխվում է աստիճանային օրենքով։

Խնդրի լուծումը բերվում է, որոշակի եզրային պայմաններով, ինտեգրա-

դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը, որոնց կորիզները աստիճանային տիպի ֆունկցիաներ են։ Նշված են մի շարք մասնավոր դեպքեր, երբ քննարկվող խնդիրների լուծումները կարելի է կառուցել փակ տեսքերով, որոնք պարունակում են ինտեգրալներ կամ օրթոգոնալ բազմանդամներով անվերջ շարքեր։ Մասնավորապես, կիսաանվերջ ճաքի կամ ներդրակի դեպքում կառուցված են համապատասխան որոշիչ հավասարումների փակ լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Я. Попов*. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Наука, М., 1982. [2] *Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук*. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Наукова думка, Киев, 1983. [3] *Г. П. Черепанов*. Механика хрупкого разрушения. Наука, М., 1974. [4] Развитие теории контактных задач в СССР. Наука, М., 1976. [5] *Г. Я. Попов*. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Вища школа, Киев-Одесса, 1982. [6] *Ф. Д. Гахов*. Краевые задачи. Наука, М., 1977. [7] *С. М. Мхитарян*. ДАН АрмССР, т. 74, № 4, с. 175—182 (1982). [8] *С. М. Мхитарян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 38, № 4, с. 16—29 (1985). [9] *С. М. Мхитарян*, в кн: Механика неоднородных структур. Наукова думка, Киев, с. 149—156, 1986. [10] *Г. Я. Попов, М. В. Радиолло*, ПМ, т. 11, вып. 5, с. 36—44 (1975). [11] *С. М. Мхитарян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, с. 63—72, 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 611.616—076.4:616.9—092.6/9:616—006.34:61

МОРФОЛОГИЯ

Л. А. Камалян, Н. Г. Джагацпанян, К. Р. Манвелян, А. А. Чачоян,
В. О. Грабовска, И. Н. Савенкова

Влияние индуктора интерферона—дсРНК на опухолевый рост in vitro и in vivo

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ю. Т. Алексаняном 10/VI 1988)

Широкий спектр биологической активности различных индукторов интерферона (ИФН) включает, помимо противовирусного, иммуномодулирующего, антимутагенного и радиопротективного, также выраженное противоопухолевое действие. Как известно, к наиболее активным индукторам ИФН относятся РНК-содержащие вирусы, а также природные и синтетические двуспиральные (дс) РНК [1-8].

В настоящей работе приведены результаты изучения противоопухолевой активности природной дсРНК фагового происхождения, полученной в Институте микробиологии им. А. Кирхенштейна АН Латвийской ССР.

В опытах in vitro использованы перевиваемые клетки лейкозной линии человека L-41, рака поджелудочной железы (СР) и гепатомы мышей XXIIa, in vivo—белые беспородные мыши, а также мыши линии CBA, C3HA, C_{57}B1/6 массой 18–20 г. Способность дсРНК к продукции ИФН в клеточных культурах определяли по антивирусной активности культуральных проб на гомологичных клетках культур по степени защиты их от цитопатического действия тест-вируса. Антипролиферативное действие дсРНК определяли в динамике в клетках культур, выращенных на покровных стеклах при посевной дозе 100 тыс. кл/мл. Фиксацию проводили в смеси Карнуа, препараты окрашивали гематоксилин-эозином, дсРНК вносили в концентрации 10 мкг/мл одновременно или спустя 24 ч после высева. Противоопухолевое действие дсРНК определяли по степени подавления роста опухоли. дсРНК вводили внутрибрюшинно в концентрации 50 мкг/мышь в течение 5–6 дней, лечение начинали через 48 и 96 ч после перевивки. Для проведения патогистологических исследований кусочки опухоли фиксировали в жидкости Карнуа, затем заливали в парафин. Срезы толщиной 5 мк окрашивали гематоксилин-эозином и метилгрюн-пиронином по методу Браше.

Изучено влияние дсРНК в концентрации 10 мкг/мл на митотическую активность клеток линии L-41 при введении препарата одновременно с посевом клеток или спустя 24 ч без замены среды культивирования. Данные о влиянии дсРНК на деление клеток линии L-41 приведены в табл. 1. Они показывают, что при использованной посевной дозе пик митотической активности отмечен к 48–72 ч, после чего наблю-

дается резкое снижение числа митозов. При одновременном с посевом введении дсРНК статистически достоверное угнетение пролиферативной активности выявляется спустя 48, 72, и 96 ч (опыт I). При внесении дсРНК спустя 24 ч после посева клеток имеет место более раннее угнетение митотической активности (к 24 ч), которое продолжается до конца наблюдения (опыт II).

Таблица 1

Влияние дсРНК на митотическую активность L-41

Сроки исследования, ч	Митотическая активность, ‰				
	Контроль	Опыт I	p	Опыт II	p
24	10,6±1,8	14,4±1,2	<0,05	—	—
48	22,8±1,2	8,6±0,7	<0,01	9,5±2,5	<0,02
72	21,8±1,9	10,1±3,5	<0,02	7,3±0,15	<0,01
96	9,8±2,0	4,0±1,5	<0,02	2,9±0,2	<0,02

Примечания: опыт I—введение дсРНК одновременно с посевом клеток; опыт II—введение дсРНК спустя 24 ч после посева

Несколько иные данные получены при замене среды культивирования, т. е. при удалении дсРНК после 24-часовой экспозиции с клетками. Согласно результатам, замена среды уменьшает (независимо от срока внесения дсРНК) продолжительность ингибирующего эффекта препарта до 72 ч. Спустя 96 ч митотическая активность клеток в опыте не только не снижается, но и достоверно превышает таковую в контроле.

Было исследовано также влияние дсРНК на пролиферативную активность клеток опухолевой линии рака поджелудочной железы. ДсРНК вносили одновременно с посевом клеток в концентрации 10 мкг/мл без замены среды культивирования в течение 4 дней. Клетки культуры СР (контроль) достигали пика митотической активности к 48 ч, после чего имело место снижение пролиферативной активности. дсРНК вызывал статистически достоверное угнетение митотической активности лишь спустя 24 и 48 ч, в более поздние сроки отмечена достоверная стимуляция митотической активности, что, по-видимому, связано с началом деления ранее покоящихся в культуре клеток (табл. 2).

Перевиваемая линия МГХХIIа оказалась нечувствительной к антипролиферативному действию дсРНК, о чем свидетельствует прибли-

Таблица 2

Влияние дсРНК на митотическую активность перевиваемой линии рака поджелудочной железы

Сроки исследования, ч	Митотическая активность, ‰		
	Контроль	Опыт	p
24	41,1±2,0	29,1±2,6	<0,01
48	46,4±1,27	39,3±1,37	<0,01
72	30,0±1,0	34,1±0,8	<0,02
96	20,8±1,9	28,3±1,0	<0,02

зительно одинаковая митотическая активность клеток в опыте и контроле. Нами выяснялась возможная связь антимитотического действия дсРНК с продукцией интерферона в клетках L-41 и CP. Однако в исследуемых линиях дсРНК не индуцировала ощутимых количеств ИФН (титр был менее 20 ед/мл), что позволяет исключить опосредованное действие препарата на клетки.

Изучалось противоопухолевое действие дсРНК в опытах на мышах. Согласно полученным результатам, дсРНК вызывала достоверное подавление роста рака молочной железы (РМЖ), карциномы Льюиса (3^{LL}), саркомы Крокера (С—180), саркомы 37 (С—37) и обусловливала четкую тенденцию к угнетению роста гепатомы, но не влияла на развитие аденокарциномы Эрлиха. Степень подавления роста опухоли была неодинаковой и колебалась от 36 до 67% (табл. 3).

Таблица 3

Противоопухолевое действие дсРНК в отношении перевиваемых опухолей мышей

Штамм опухоли	Средний вес, г, или объем, мм³		p	Индекс торможения, %
	Контроль	Опыт		
РМЖ	2.5±0.6	0.87±0.27	<0.01	67
3^{LL}	1070±240	350±160	0.05	67
С—180	2.5±0.23	1.21±0.3	<0.01	54
С—37	0.8±0.2	0.5±0.2	<0.05	36
МГХХПа	2.62±0.73	1.57±0.5	>0.05	40

Подавление роста вышеуказанных опухолей было временным: после окончания лечения разница в весе опухолей у животных контрольной и опытной групп постепенно уменьшалась. Так, у мышей с карциномой Льюиса индекс торможения в течение 5 дней снизился с 67 до 58%.

В связи со способностью аденокарциномы Льюиса метастазировать в легкие было изучено влияние дсРНК на количество и объем метастазов как при наличии первичной опухоли (опыт I), которая, как известно, тормозит метастазирование (конкамитантный иммунитет), так и при хирургическом удалении ее (опыт II). В первом опыте лечение дсРНК сокращало количество и объем метастазов, соответственно, на 65 и 69% по сравнению с контролем. Во втором опыте, где дсРНК вводили спустя день после операции, также отмечено ингибирующее действие препарата на процесс метастазирования: объем метастазов у леченых мышей уменьшается на 76% по сравнению с контролем. Итак, лечение дсРНК тормозит развитие метастазов в легких не только при наличии первичной опухоли, но и при удалении ее, т. е. в условиях отсутствия конкамитантного иммунитета.

В связи с заметным подавляющим действием дсРНК на рост ряда перевиваемых опухолей мышей представлялось целесообразным изучить возможные морфологические сдвиги, обусловленные введением препарата. Для этой цели была использована одна из наиболее чувствительных к дсРНК опухолей—сравнительно новая линия рака молочной железы, выведенная в ОНЦ Армянской ССР ([7]). Опухоли у кон-

трольных мышей имели железистое строение, в соединительнотканной строме встречались участки лимфогистиоцитарной инфильтрации, расположенные в основном по ходу сосудов. Очаги деструкции опухолевых клеток наблюдались крайне редко. В опухолевой ткани определялось большое число делящихся клеток.

В опухолях у подопытных животных, получивших дсРНК, отмечено наличие более обширных участков лимфогистиоцитарной инфильтрации, при этом не только по ходу сосудов и в строме, но и в самой опухоли (рис. 1). Гораздо чаще, чем у контрольных животных, наблюдались участки с деструкцией опухолевых клеток, расположенные, глазным образом, в центре опухолевых тяжей, содержащие обрывки цито-

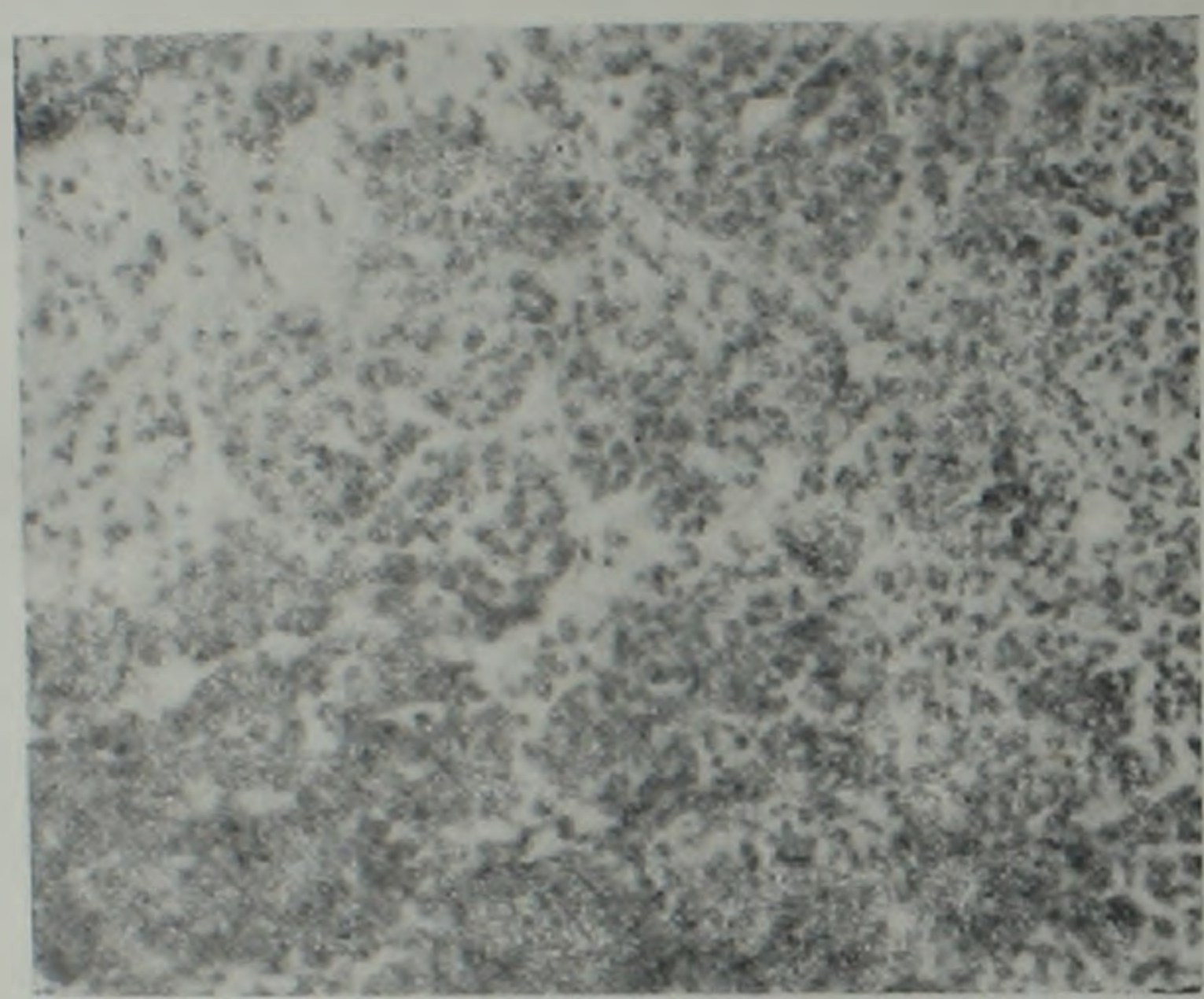

Рис. 1. Лимфоцитарная инфильтрация опухоли. Увел. ×200

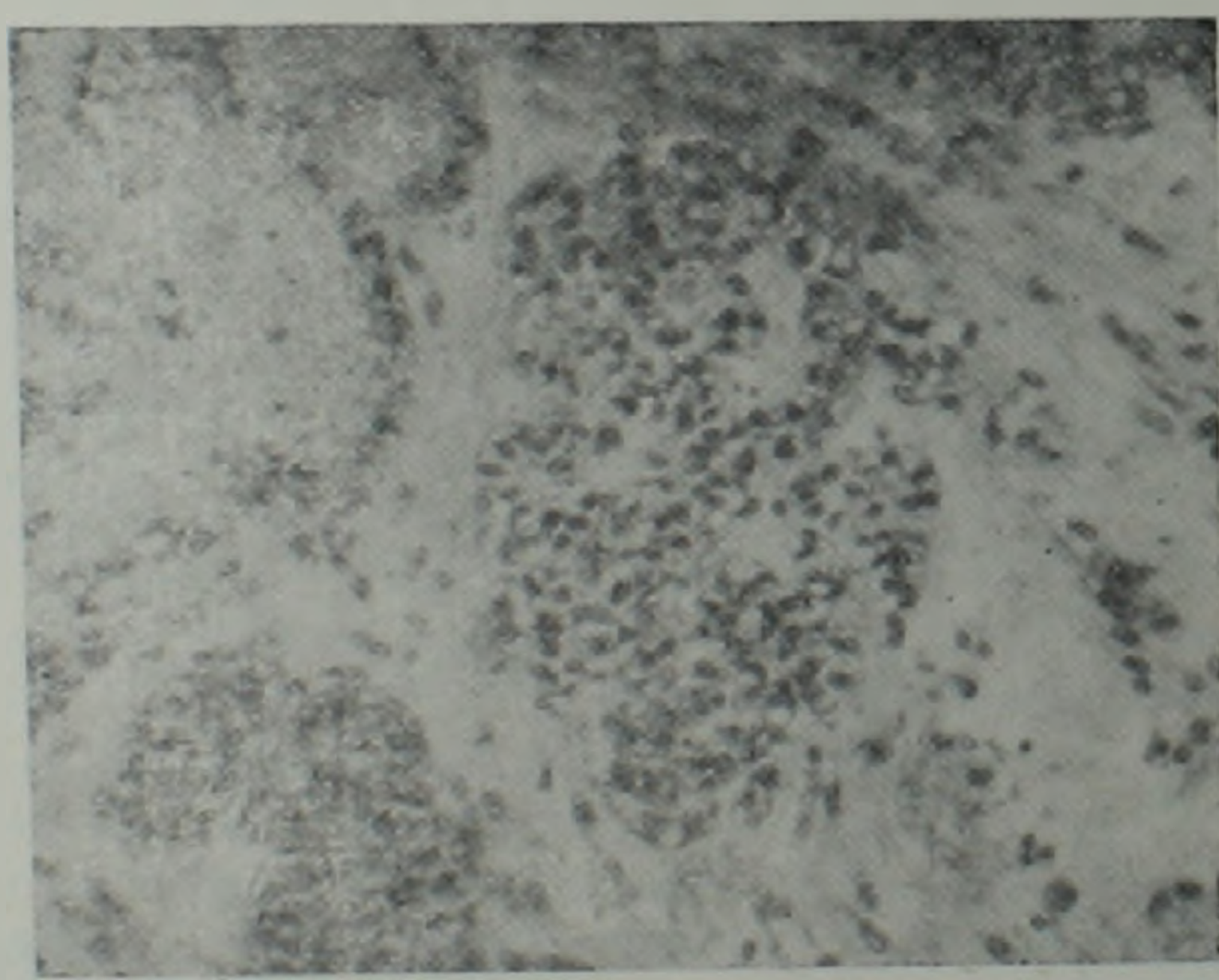

Рис. 2. Вакуолизация и деструкция опухолевых клеток. Увел. ×250

плазмы, фрагменты ядер и дистрофически измененные вакуолизированные клетки (рис. 2). В отдельных срезах, наряду с железистыми структурами, обнаруживались участки солидизированной опухолевой ткани. Реже, чем в контроле, встречались клетки в стадии деления. Гистологические данные свидетельствуют о том, что дсРНК способна интенсифицировать иммунные клеточные реакции, подавлять митотическую активность и оказывать деструктивное действие на опухолевые клетки.

Таким образом, выявлено антипролиферативное действие дсРНК in vitro и in vivo, что, наряду с данными о клиническом применении препарата ([8]), обосновывает целесообразность использования его в комплексной терапии злокачественных новообразований.

Онкологический научный центр им. В. А. Фанарджяна
Министерства здравоохранения Армянской ССР

Լ. Ա. ՔԱՄԱԼՅԱՆ, Ն. Դ. ՋԱՂԱՑՊԱՆՅԱՆ, Կ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ, Ա. Ա. ՉԱՉՈՅԱՆ,
Վ. Օ. ԳՐԱՐՈՎՍԿԱ, Ի. Ն. ՍԱՎԵՆԿՈՎԱ

Ինտերֆերոնի ինդուկտոր երկշղթա ռիբոնուկլեինային թթվի ազդեցությունը ուռուցքային աճի վրա

Աշխատանքում ներկայացված են երկշղթա ռիբոնուկլեինային թթվի հակաուռուցքային ազդեցության արդյունքները։ Մարդու ուռուցքային ծագում ունեցող բջջային կուլտուրաներում պրեպարատը ճնշում է բջիջների միտոտիկ ակտիվությունը։ Պրեպարատի ներգործությունը կախում չունի ինտերֆերոնի ազդեցությունից։

Մկների բուժումը 5—6 օրվա ընթացքում (2,5 մգ/կգ միանվագ դոզաբաժնով) պայմանավորել է մի շարք պատվաստվող ուռուցքների ճնշումը։ Պրեպարատի հակաուռուցքային ներգործությունը իրագործվում է ինտերֆերոնի արտահայտման, իմունիտետի բջջային ռեակցիաների ուժեղացման միջոցով և ուռուցքային բջիջների վրա նրա անմիջական ազդեցության հետանքով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. М. Ерувере, . Я. Фелдмане*, в кн. Индукторы интерферона. Зинатне, Рига, с. 47—51, 1981. [2] *Л. М. Вильнер. Н. С. Лашкезич, Н. С. Тихомирова-Сидорова* и др. Вопросы вирусологии, № 3, с. 334—337, 1984. [3] *Н. Г. Дзасацпанян, Л. А. Камалян*, в кн.: IV Всесоюзный съезд онкологов. Тезисы докл., Л., с. 252, 1986. [4] *Ф. И. Ершов, А. С. Новохатский*, в кн.: Интерферон и его индукторы. Наука, М., 1980. [5] *Л. А. Лаврухина, Ф. И. Ершов*, Вопросы вирусологии, № 4, с. 446—449, 1985. [6] *Н. Н. Носик, Ф. И. Ершов, О. В. Николаева и др.*, Вопросы вирусологии, № 6, с. 718—720, 1984. [7] *К. Р. Манвелян, Б. А. Езданян, Т. С. Лачагурова*, Журн. экспериментальной и клинической медицины АН АрмССР, т. 19, № 5, с. 67—70 (1979). [8] *Л. А. Камалян, Г. Я. Фелдмане, Л. Н. Мкртчян и др.*, в кн.: Неспецифические стимуляторы в иммунотерапии опухолей. Зинатне, Рига, с. 199—204, 1985.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ղ. Ս. Ղազարյան—*Հավասարաչափ սահմանափակ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի դասում Ֆուրյեի շարքերի տարամիտության բազմության չափի ճշգրիտ գնահատականը* 3

Ա. Ա. Ալեքսանյան—*Գծայնացված գիդրոդինամիկ նորմալ ձևերով բուլյան ֆունկցիաների ներկայացման հետ կապված գնահատականներ* 5

Մ. Կ. Կյուրեղյան—*Վերջավոր դաշտերի վրա չվերածվող բազմանդամների կառուցման նոր մեթոդ* 51

Ի. Վ. Հարությունյան—*Ֆուրյե—Ծակոբիի շարքերի մաքսիմալ զուգամիտության մասին* 56

Ի. Վ. Դալլաքյան—*Շրջանում անալիտիկ, եզրի մոտ աճ թույլ տվող ֆունկցիաների զրոների մասին* 99

Նու. Մ. Մելոիսյան—*Գերնույնությունները և խմբեր* 104

Մ. Վ. Ղազարյան—*Բազմաբնույթային եզակիություններ ունեցող ֆունկցիաների հոլոմորֆ շարունակության վերաբերյալ* 106

Ա. Վ. Բարասյան, Ի. Գ. Եսայանյան—*Ֆուրյեի վերլուծություն ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների մինիմալ համակարգի միջոցով* 111

Ի. Ն. Բարոսյան—*Վերջավոր բազմության (F)—անջատելի ենթաբազմությունների քանակի գնահատումների մասին* 147

Ա. Վ. Աբրահամյան—*Սեգյոյի կորիզի զրոների մասին* 152

Նու. Մ. Սովիսյան—*Հանրահաշիվներ և կլոններ* 195

Ֆ. Ա. Նամոյան, Ի. Մ. Գևորգյան—*Սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Ֆուրյեի գործակիցների նվազման արագության բնութագրումը և Ռ. Սուլինասի թեորեմի ճշգրտումը* 198

Ա. Ա. Պետրոսյան—*Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների սպեկտրների գնահատականներ* 201

Ա. Գ. Բաղդասարյան—*Ինտերպոլյացիա և որոշ ֆունկցիոնալ տարածությունների ֆունկցիաների հետքեր* 207

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Սարգսյան—*Հաղորդիչ բարակ գլանական թաղանթի մագնիսաիմպուլսային բնութագրումը* 10

Ա. Ն. Հովհաննիսյան—*Վերդրակներով ուժեղացված կլոր ծանր օղակի լարվածային վիճակի մասին* 115

Ս. Ա. Նազարով—*Շերտի հատվածում Լամեի և Ստոքսի համակարգերի լուծումների վարքը անվերջությունում* 156

Ե. Ա. Զլսդոյան—*Բաղադրյալ մարմինների քերտարվածության խնդիրները* . 160

Ն. Խ. Հարությունյան, Ա. Դ. Դեոպով—*Սֆերիկ ձուլվածքի բյուրեղացման պրոցեսի օպտիմիզացիան* 212

ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Կ. Հ. Մկրտչյան—*Առաձգական կիսահարթության վրա հեծանի ստացիոնար տատանումները* 60

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Մ. Մխիթարյան, Ա. Զ. Գևորգյան—*Ուղիղ գծով բաժանվող սահմանային պայմաններով անհամասեռ կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի լուծման մասին* 16

Ա. Ֆ. Մինասյան, Վ. Ս. Տոնոյան—*Ուղղահայաց վերջավոր ճեղքով անհամասեռ կիսահարթության համար մի խնդրի մասին* 22

Ս. Մ. Մխիթարյան, Ս. Զ. Պետրոսյան—*Երբանային գծով բաժանվող սահմանային պայմաններով կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի մասին* . . . 65

Ս. Զ. Պետրոսյան—*Աստիճանային օրենքով անհամասեռ կիսահարթության համար առաձգականության տեսության երկու հարթ խառը եզրային խնդիրների մասին* . . . 10

Ի. Լ. Աբրահամյան—*Անվերջ երկարությամբ գլանային թուլացումով առաձգական մարմնի համար մի ոչ սիմետրիկ խնդրի մասին* 153

Ե. Ղ. Հովհաննիսյան—*Փոքր հաստության շրջանաձև տափօղակի և կիսաանվերջ գլանի փոխազդեցության վերաբերյալ առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդրի մասին* 216

Կ. Գ. Ղուլյան, Դ. Գ. Մխիթարյան, Ս. Մ. Մխիթարյան—*Անհամասեռ միջավայրում ճաքերի և բարակ ներդրակների շրջակայքում լարումների կենտրոնացումների մասին հարթ դեֆորմացիայի դեպքում* 221

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Հ. Ջրբաշյան—*Լրիվ մոմենտի պահպանումը ֆոտոնի արձակմամբ ատոմային և միջուկային անցումների ժամանակ* 29

Ա. Վ. Հովհաննիսյան—*Ֆոտոընդունիչի հոսանքի տատանումների բաշխումը տուրբուլենտ մթնոլորտով անցած ճառագայթման ընդունման դեպքում* . . . 36

Պ. Ս. Պապոսյան—*Էլեկտրամագնիսական ալիքների փնջից չերենկովյան ճառագայթման էներգետիկ սպեկտրը* 75

Ա. Վ. Հովհաննիսյան—*Օպտիկական իմպուլսների հետերոդինային ընդունման հաճակարգերի համեմատական անալիզ և սինթեզ համաժամանակացման սխալների առկայության դեպքում* 121

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ս. Հայրապետյան, Վ. Վ. Վիխրև, Ա. Գ. Նիկողոսյան—*Երեգակի մթնոլորտում մագնիսական ուժային խողովակների արտամղման ժամանակ ազատ մագնիսական դաշտի առաջացման մասին* 171

ԳԵՈՖԻԶԻԿԱ

Հ. Մ. Ավշյան, Դ. Գ. Մարկոսյան, Ս. Ռ. Հովհաննեսյան—*Մագնիսական դաշտի դերը մասնիկների նստեցման ժամանակ* 79

Հ. Մ. Ավշյան, Օ. Պ. Գույումջյան, Դ. Վ. Մարկոսյան—*Ապարների մաշվածության ուղղորդվածությունը, հնամագնիսական շերտայնության տեսանկյունից* . . . 126

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ս. Մ. Հայրապետյան, Ա. Ֆ. Համբարձումյան, Վ. Հ. Դանիելյան, Ն. Ա. Հովհաննիսյան—*Լցոնների պոլիմերիզացիոն ձևափոխումը որպես պոլիմերիզացիոն լցոնավորման մասնավոր դեպք* 174

ՄՈԼԵԿՈՒԼՅԱՐ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Կ. Վ. Դանոյան, Ս. Ա. Աղաջանյան, Ս. Հ. Ավետիսյան, Լ. Վ. Կարապետյան—*Դեստամատ դեհիդրոգենազի մոդիֆիկացիան 1-(թիլ-3-(3-դիմեթիլամինոպրոպիլ)կարբոդիիմիդով* 50

ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

Լ. Ա. Քամալյան, Ն. Գ. Ջաղացպանյան, Կ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Ա. Ջաքոյան, Վ. Օ. Գերասիմովա, Ի. Ն. Սավենկովա—*Ինտերֆերոնի ինդուկտոր երկշղթա օրթոսինդետիկ թթվի ազդեցությունը ուռուցքային աճի վրա* 227

ՖԻԶԻՄԻԱ

Ս. Լ. Մկրտչյան, Ա. Լ. Նալչյան, Ա. Ն. Այանյան, Վ. Դ. Միսիրարյան—*Տոքսոֆիլպազա A_2-ի ազդեցությունը լիպիդային գերօքսիդացման վրա* . . . 41

Վ. Ն. Տերտով, Խ. Ս. Սայադյան, Ռ. Ա. Սաճակյան, Ա. Վ. Զիլֆյան, Ա. Ն. Սոկոլով—*Հարվահանաձև գեղձերի մզվածքի ազդեցությունը ԴՆԹ-ի սինթեզի վրա տարբեր իմունոկոմպետենտ օրգաններից ստացված լիմֆոցիտներում* . . . 45

Կ. Գ. Ղարագյոզյան, Գ. Հ. Մելիքսեթյան, Զ. Ա. Մկրտչյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Հ. Ռ. Մարտիկյան, Ժ. Ի. Հակոբյան—*Ֆոսֆոլիպիդների մասնակցությունը մարդու սրտամկանի կրեատինկինազի ակտիվության կարգավորման գործում* . . . 50

Մ. Ի. Աղաջանով, Լ. Մ. Մեծլումյան, Ժ. Ե. Միրզոյան, Վ. Գ. Մխիթարյան—*Հ-տոկոֆերոլի ազդեցությունը գլիկոգիլացված հեմոգլոբինի պարունակության վրա այլոբսանային դիաբետի ժամանակ* . . . 131

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ռ. Ա. Հարությունյան, Լ. Ա. Սահակովա, Դ. Ս. Սարգսյան, Զ. Կ. Խաչատրյան—*Սուբստանցիա Բ-ի դերը ճագարների օրգանիզմի ջերմային հոմեոստազի կարգավորման մեջ* . . . 154

ԻՄՈՒՆՈԼՈԳԻԱ

Լ. Ա. Կծոյան, Դ. Ա. Կարգանյան, Դ. Վ. Էլոյան—*Լ-լիմֆոցիտների β-ադրենառեցեպտորների զգայունության համեմատական վերլուծությունը հաստ աղիքի ֆունկցիոնալ և բորբոքային հիվանդությունների ժամանակ* . . . 179

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յարլոկով-Խնձորյան—*Կովկասյան երկու նոր ներկայացուցիչ* Geodromicus Redt. *սեռից* (Coleoptera, Staphylinidae) . . . 134

ԷՆԴԱԳՈՐՏՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ա. Թարխանյան, Ա. Է. Հակոբով—*Արյան պլազմայի ազդեցությունը պրոստացիկլինի և կալցիումի անտագոնիստների թրոմբոցիտաբ-անոթային էֆեկտների վրա* . . . 93

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Հ. Եպիսկոպոսյան—*Սրտամկանի սուր ինֆարկտի ժամանակ տրոմբոցիտների ռեֆրակտերության ինքնակարգավորման մեխանիզմի խափանումը որպես դիսֆունկցիայի արագացման գործոններից մեկը* . . . 110

Ա. Ս. Եզրիկյան, Ա. Վ. Ասլանյան—*Միզամուղ ուղիների սուր վարակի դեպքում հակամանրէային թերապիայի ռեժիմի ընտրությունը* . . . 189

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян—Точная оценка меры множества расходимости для рядов Фурье в классе равномерно ограниченных полных ортонормированных систем . . 3

А. А. Алексанян—Оценки, связанные с представлением булевых функций посредством линеаризированных дизъюнктивных нормальных форм . . 5

М. К. Киреян—Новый метод построения неприводимых полиномов над конечными полями 51

Р. В. Арутюнян—О максимальной сходимости рядов Фурье—Якоби . 56

Р. В. Даллакян—О нулях аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы 99

Ю. М. Мовсисян—Сверхтождества и группы . . . 104

М. В. Казарян—О голоморфном продолжении функций с плюриполярными особенностями 106

С. В. Бабасян, И. Г. Хачатрян—Разложение Фурье при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций самосопряженного дифференциального оператора 111

Б. Е. Торосян—Об оценках числа $\{\delta\}$-отделимых подмножеств конечного множества . . . 147

А. В. Абрамян—О нулях ядра Сеге 152

Ю. М. Мовсисян—Алгебры и клоны . . . 195

Ф. А. Шамоян, И. М. Геворкян—Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и уточнение теоремы Р. Салинаса 198

А. А. Петросян—Оценки спектров дискретных преобразований Фурье . 203

А. Г. Багдасарян—Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств 207

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян—Магнитоимпульсное нагружение проводящей тонкой цилиндрической оболочки 10

А. Н. Оганесян—О напряженном состоянии тяжелого круглого кольца, усиленного накладками 113

С. А. Назаров—Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя 156

М. А. Задоян—Задачи малонапряженности составных тел . . . 160

Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов—Оптимизация процесса кристаллизации сферической отливки 212

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

К. Ш. Мкртчян—Стационарные колебания балки на упругой полуплоскости 60

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян—О решении одной смешанной краевой задачи для неоднородного полупространства с прямой линией раздела граничных условий 16

А. Ф. Минасян, В. С. Тоноян—Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом . . . 22

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян—Об одной смешанной краевой задаче для полупространства с круговой линией раздела граничных условий . . . 65

С. З. Петросян—О двух плоских смешанных задачах теории упругости для неоднородной по степенному закону полуплоскости 70

Б. Л. Айрапян—Об одной несимметричной задаче для упругого тела с круглым цилиндрическим ослаблением бесконечной длины . . . 165

Э. К. Оганесян—К осесимметричной контактной задаче о взаимодействии упругого полубесконечного цилиндра с круглой шайбой малой толщины . 216

К. Г. Гулян, Г. Г. Мхитарян, С. М. Мхитарян—О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации . . . 221

ФИЗИКА

Н. А. Джрбашян—Сохранение полного момента при атомных и ядерных переходах с испусканием фотона 29

А. В. Оганесян—Плотность вероятности тока фотоприемника при приеме излучения, прошедшего турбулентную атмосферу 36

Н. С. Погосян—Энергетический спектр черенковского излучения от сгустка электромагнитных волн 75

А. В. Оганесян—Сравнительный анализ и синтез оптимальных систем гетеродинного приема оптических импульсов при наличии ошибок синхронизации 121

АСТРОФИЗИКА

В. С. Айрапетян, В. В. Вихрев, А. Г. Нижегосян—О генерации «свободного» магнитного поля при всплытии магнитных силовых трубок в атмосфере Солнца 171

ГЕОФИЗИКА

Г. М. Авчян, Г. Г. Маркосян, С. Р. Оганесян—Роль магнитного поля при осаждении частиц 79

Г. М. Авчян, О. П. Гукюджян, Г. В. Маркосян—О направленном истирании пород с позиции палеомагнитной слоистости 126

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. М. Айрапетян, А. Ф. Амбартумян, В. А. Даниелян, Л. А. Акопян—Полимеризационная модификация наполнителей—частный случай полимеризационного наполнения 174

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

К. В. Даноян, С. А. Агаджанян, С. Г. Аветисян, Л. В. Карабашян—Модификация глутаматдегидрогеназы печени быка 1-этил-3 (3-диметиламинопропил) карбодиимидом 85

МОРФОЛОГИЯ

Л. А. Камалян, И. Г. Джасацпанян, К. Р. Минвелян, А. А. Чачоян, В. О. Грабевска, И. И. Савенкова—Влияние индуктора интерферона—дсРНК на опухолевый рост in vitro и in vivo 227

БИОХИМИЯ

С. Л. Мкртчян, А. Л. Шалджян, А. Е. Айвазян, В. Г. Мхитарян—Влияние фосфолипазы A_2 на перекисное окисление липидов 41

В. Н. Тертов, Х. С. Саядян, Р. А. Саакян, А. В. Зильфян, А. Н. Орехов—Влияние экстракта паращитовидных желез на синтез ДНК в лимфоцитах из различных иммунокомпетентных органов человека . . . 45

К. Г. Карагезян, Г. О. Меликсетян, З. С. Мкртчян, С. С. Овакимян, А. Р. Мартикян, Ж. И. Акопян—Участие фосфолипидов в регуляции активности креатинкиназы сердечной мышцы человека 90

М. И. Агаджанов, Л. М. Межлумян, Ж. Е. Миракян, В. Г. Мхитарян—Влияние α-токоферола на содержание гликозилированного гемоглобина при аллоксановом диабете 131

ФИЗИОЛОГИЯ

Р. А. Арутюнян, Л. А. Саикова, Д. С. Саркисян, Дж. К. Хачатрян—Роль вещества Р в регуляции температурного гомеостаза организма у кроликов 181

ИММУНОЛОГИЯ

Л. А. Кцоян, Г. С. Карганян, Д. В. Элоян—Сравнительный анализ чувствительности β-адренорецепторов Т-лимфоцитов при воспалительных и функциональных заболеваниях толстой кишки . . . 179

ЭТНОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян—Два новых кавказских представителя из рода Geodromicus Redt. (Coleoptera, Staphylinidae) 134

ФАРМАКОЛОГИЯ

Э. С. Габриелян, С. Э. Акопов—Влияние плазмы крови на тромбоцитарно-сосудистые эффекты простациклина и антагонистов кальция . . . 93

МЕДИЦИНА

Н. Г. Епископосян—Срыв ауторегуляторного механизма рефрактерности тромбоцитов как один из факторов развития их дисфункции при остром инфаркте 14

А. С. Ездокян, А. В. Ухин—Выбор режима антибиотикотерапии острой инфекции мочевыводящих путей 189

CONTENTS of LXXXVII volume

MATHEMATICS

K. S. Kazarian— The exact estimate of the measure of the set of divergence of Fourier series of the uniformly bounded erthonomal system. . . . 3

A. A. Alexanian—Estimations connected with the realization of Boolean functions by linearized disjunctive normal forms 5

M. K. Kureghian—A new method for constructing irreducible polynomials over finite fields 51

R. V. Harutyunian—On the maximal convergence of the Fourier—Jackobi series 56

R. V. Dallakian—On zeroes of analytical functions in the disk allowing the growth near the boundary. 99

Yu. M. Movsisian—Hyperidentities and groups. 104

M. V. Kazarian—On the holomorphic continuation of the functions with pluripolar singularities 106

S. V. Babasian, I. G. Khachatrian—The Fourier expansion by means of minimal system of general eigen-function of the self-adjoint differential operasor. 111

B. E. Torossian—On the estimates of the numbers of $\{F\}$-separable subsets of the finite sets. 147

A. V. Abrahamian—On the zeroes of the kernel Szegö 152

Yu. M. Movsissian—Algebras and clones 195

F. A. Shamoyan, I. M. Gevorkian—Description decrease speed of the Fourier coefficients of bounded type function and the precise theorems of R. Salinas 198

A. A. Petrosian—Estimates of spectrums of discrete Fourier transforms . 203

A. G. Bagdasarian—Interpolation and function traces from several functional spaces 207

MECHANICS

S. O. Sarkissian—Magnetoimpulsive loading of a conducting thin cylindrical shell 10

A. N. Hovhannisian—On stressed state of heavy circular ring, intensified with stringers 115

S. A. Nazarov—Behavior at infinity of solutions of Lame and Stockes systems in a sector of a layer 156

M. A. Zadoyan—Few-stressed problems of composed bodies . . . 160

N. Kh. Arutiunian, A. D. Drozdov—Optimal crystallization of the spherical casting 212

STRUCTURAL MECHANICS

K. h. Mkrtchian—Stationary oscillations of thebeam on the plastic half-plane. 60

THEORY OF ELASTICITY

S. M. Mehitarian, S. Z. Petrosian—On one of the mixed edge problems for the half-space with circular line of division of boundary conditions . . 16

A. Ph. Minasian, V. S. Tonoyan—On a problem for a nonhomogeneous halfplane with a vertical finite crack 22

S. M. Mchitarian, S. Z. Petrosian—On the solution of one mixed edge problem for the inhomogeneous half-space with straight line of division of boundary conditions 65

S. Z. Petrosian—On two plane mixed problems of theory of elasticity for degree law nonhomogeneous halfplane 70

B. L. Abramian—On an asymmetric problem for elastic solid with cylindrical weakening of infinite length 165

E. K. Oganessian—The axisymmetrical contact problem on interaction of elastic semiinfinite cylinder with a circular ring of small thickness . . . 216

K. G. Gulian, G. G. Mchitarian, S. M. Mchitarian—On concentration of stresses near the cracks or thin enclusions in a nonhomogeneous medium with the antiplane strain 221

PHYSICS

V. A. Djrbashian—Conservation of total angular momentum during atomic and nuclear transitions with photon emission 29

A. V. Hovhannisian—The probability density of the current of the photo receiver passing the turbulent atmosphere during radiation 36

P. S. Poghosian—Power spectrum of Cherenkov radiation from the cluster of electromagnetic waves 75

A. V. Hovhannisian—The comparable analysis and synthesis of optimal systems of the heterodyne detection of optical pulses in the presence of error of synchronization 121

ASTROPHYSICS

V. S. Hayrapetian, V. V. Vichrev, A. G. Nikoghossian—On the generation of „free" magnetic field when force magnetic tubes lift in the solar atmosphere 179

GEOPHYSICS

G. M. Avchian, G. G. Markosian, S. R. Hovhannisian—The role of the magnetic field in the sedimentation of particles 71

G. M. Avchian, O. P. Gouyoumjian, G. B. Markosian—On the directed grating of rocks from a position of paleomagnetic schistosity 126

ORGANIC CHEMISTRY

S. M. Hayrapetian, A. F. Hambartsumian, V. A. Danielian, L. A. Hakopian—The polymeric modification of fillers is a private case of polymeric filling. 174

MOLECULAR BIOLOGY

K. V. Danoyan, S. A. Aghadjanian, S. H. Avetissian, L. V. Karabashian—Modification of bovine liver glutamate dehydrogenase by 1-ethil-3—(3-dimethylaminopropyl) carbodiimide. 85

MORPHOLOGY

L. A. Kamalian, N. E. Dzhagazpanian, K. R. Mancelian, A. A. Chachalian, V. O. Grabovska, I. N. Savenkova—Influence of interferon's inductor—dsRHA on tumor growth in vitro and in vivo 227

BIOCHEMISTRY

S. L. Mkrtchian, A. L. Shaljian, A. E. Atmian, V. G. Mkhitarian—The effect of phospholipase A_2 on lipid peroxidation 41

M. A. Tertov, Ch. S. Sayadian, R. A. Sahakian, A. V. Zilphian, N. N.

Orechov—Parathyroid extract ability to exchange on the synthesis of DNP in human lymphocytes from different immunocompetent organs 45

K. G. Karageuzian, G. O. Melikseitian, Z. S. Mkrtchian, S. S. Hovakimian, H. R. Martirosian, J. I. Akopian—The participation of phospholipids in human heart creatine kinase activity regulation 90

M. J. Agadjanov, L. A. Meglumian, J. E. Marakian, V. G. Melkitarian—The α-tocopherol action on glycosylized hemoglobin in alloxandiabeted rat blood 131

PHYSIOLOGY

P. A. Harutunian, L. A. Soakova, D. S. Sarkisian, D. K. Khachaturian—The role of substance *P* in the regulation of temperature gomeostasis organism of rabbits 184

IMMUNOLOGY

L. A. Ktsoyan, G. S. Karganian, D. V. Eloyan—Comparative analysis of *T*-lymphocytes β-adrenoreceptors in inflammatory and functional bowel diseases 179

ENTOMOLOGY

S. M. Iablokoff-Khnzorian—Two new species of the genus Geodromicus Redt. 134

PHARMACOLOGY

E. S. Gabrielian, S. E. Akopov—Influence of blood plasma on the effect of platelet-vessels induced by prostacyclin and calcium antagonists . . . 93

MEDICINE

N. H. Eptskoposian—Failure of autoregulatory mechanism of thrombocyte refraction as one of the factors of disfunctional development in acute myocardial infarction 140

A. S. Ezdokian, A. V. Uchin—Antibacterial regime choice of urinary tract infection 189