

ԶԵԿՈՒՅՑ ՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXVII, № 1

1988

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. քեկեա-
ծու (պատ. Տարտուղար), Ե. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՍԵՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԲԱԼԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ բղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՍԻԿՅՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի տեղա-
կալ), Վ. Գ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բղթ.
անդամ, Վ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵՐԻԳՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բղթ
անդամ (պատ. Խմբագրի), ԱՐ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻ-
ՔՅԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ.
ՖԱՆԱՐԴՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՑՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա.
ԱՐՅՈՒՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. գիտ. (ժամանակակից առաջատար), Է. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ
ԱՆ ԱրմԱՀ, Ա. Տ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ
ԱՆ ԱրմԱՀ, Ա. Ա. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակա-
դեմիկ ԱՆ ԱրմԱՀ, Վ. Օ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ,
ակադեմիկ ԱՆ ԱրմԱՀ (զամ. ժամանակակից առաջատար), Վ. Գ. ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ
ԱՆ ԱրմԱՀ, Գ. Ս. ՍԱԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ
ԱրմԱՀ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ
ԱՆ ԱրմԱՀ (ժամանակակից առաջատար),
Ա. Ա. ՏԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմԱՀ,
Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ
ԱրմԱՀ, Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԴՅԱՆ, ակա-
դեմիկ ԱՆ ԱրմԱՀ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱՐԵՄԱՏԻԿԱ

Ղ. Ա. Ղազարյան—Հավասարաշափ սահմանափակ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի գասում Ֆուրյեի շարքերի տարամիտության բազմության չափի ճշգրիտ գնահատականը 3

Ա. Ա. Ալեքսանյան—Գծայնացված դիզյունկտիվ նորմալ ձեերով բուլյան ֆունկցիաների ներկայացման հետ կապված գնահատականներ 5

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Հ. Մարգարյան—Հաղորդիչ բարակ գլանական թաղանթի մազնիսախիմագուսային բեռնավարումը 10

ԱՌԱՋԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Միհրարյան, Ս. Զ. Պետրոսյան—Ռուզիկ գծով բաժանվող սահմանային պայմաններով անհամասեռ կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի լուծման մասին 16

Ա. Ֆ. Մինասյան, Վ. Ս. Տոնոյան—Ռուզահայաց վերջավոր ճեղքով անհամասեռ կիսատարածության համար մի խնդրի մասին 22

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Հ. Զրբայյան—Լրիվ մոմենտի պահպանումը ֆուտոնի արձակմամբ ատոմային և միջուկային անցումների ժամանակ 29

Ա. Վ. Հովհաննեսիոյան—Ֆուտորնդունիչի հոսանքի տատանումների բաշխումը տարրուկենտ մթնոլորտով անցած ճառագայթման ընդունման դեպքում 36

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ս. Լ. Մկրտչյան, Ա. Լ. Շալզյան, Ա. Ե. Այանյան, Վ. Գ. Միհրարյան—Ֆուֆուրիպազա Աշ-ի ազդեցությունը լիպիդային գերօքսիդացման վրա 41

Վ. Ն. Տերտով, Խ. Ս. Սայադյան, Ռ. Ա. Սահակյան, Ա. Վ. Զիլֆյան, Ա. Ն. Օրեխով, —Հարվանանածն շնորհերի մզվածքի ազդեցությունը ԴՆԹ-ի սինթեզի վրա մարդու տարրեր իմունոկոմպետենտ օրգաններից ստացված լիմֆոցիտներում 45



СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>К. С. Казарян</i> —Точная оценка меры множества расходимости для рядов Фурье в классе равномерно ограниченных полных ортонормированных систем	3
<i>А. А. Алексанян</i> —Оценки, связанные с представлением булевых функций посредством линеаризированных дизъюнктивных нормальных форм	5

МЕХАНИКА

<i>С. О. Саркисян</i> —Магнитоимпульсное нагружение проводящей токой цилиндрической оболочки	10
--	----

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>С. М. Мхитарян, С. З. Петросян</i> —О решении одной смешанной краевой задачи для неоднородного полупространства с прямой линией раздела граничных условий	16
<i>А. Ф. Минасян, В. С. Тоноян</i> —Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом	22

ФИЗИКА

<i>В. А. Джрабашян</i> —Сохранение полного момента при атомных и ядерных переходах с испусканием фотона	29
<i>А. В. Оганесян</i> —Плотность вероятности тока фотоприемника при приеме излучения, прошедшего турбулентную атмосферу	36

БИОХИМИЯ

<i>С. Л. Мкртчян, А. Л. Шалджян, А. Е. Айанян, В. Г. Мхитарян</i> —Влияние фосфолипазы А ₂ на перекисное окисление липидов	41
<i>В. Н. Тертов, Х. С. Саядян, Р. А. Саакян, Л. В. Зильфян, А. Н. Орехов</i> —Влияние экстракта парашитовидных желез на синтез ДНК в лимфоцитах из различных иммунокомпетентных органов человека	45

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>K. S. Kazarian</i> —The exact estimate of the measure of the set of divergence of Fourier series of the uniformly bounded orthonormal system	3
<i>A. A. Alexanian</i> —Estimations connected with the realization of Boolean functions by linearized disjunctive normal forms	5

MECHANICS

<i>S. O. Sarkissian</i> —Magnetolimpulsive loading of a conducting thin cylindrical shell	10
---	----

THEORY OF ELASTICITY

<i>S. M. Mkhitarian, S. Z. Petrosian</i> —On one of the mixed edge problems for the half-space with circular line of division of boundary conditions	16
<i>A. Ph. Minasian, V. S. Tonoyan</i> —On a problem for a nonhomogeneous halfplane with a vertical finite crack	22

PHYSICS

<i>V. A. Djrbashian</i> —Conservation of total angular momentum during atomic and nuclear transitions with photon emission	29
<i>A. V. Hovhannesian</i> —The probability density of the current of the photo receiver passing the turbulent atmosphere during radiation	35

BIOCHEMISTRY

<i>S. L. Mkrtchyan, A. L. Shatjian, A. E. Atanlian, V. G. Mkhitarian</i> —The effect of phospholipase A ₂ on lipid peroxidation	45
--	----

Техн. редактор Азизбекян Л. А.

Сдано в набор 206 88 г. Подписано к печати 3 II. 88 г. ВФ 04057

Бумага № 2. 70 × 108^{1/16}. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет. нэд. 3,21 л. Тираж 490 Заказ 812. Издат. 7462.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук Армянской ССР. 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

K. C. Казарян

Точная оценка меры множества расходимости для рядов Фурье в классе равномерно ограниченных полных ортонормированных систем

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаяном 18/II 1988)

Исследования, касающиеся расходимости рядов Фурье на множествах положительной меры почти всюду, берут начало со знаменитой работы А. Н. Колмогорова ⁽¹⁾, в которой был построен расходящийся почти всюду ряд Фурье по тригонометрической системе. История развития этой проблематики хорошо известна. Непосвященному читателям отсылаем к статье П. Л. Ульянова ⁽²⁾. Разные математики в различное время ставили задачи о распространении теоремы Колмогорова на ортонормированные системы (ОНС), ограниченные в совокупности. Отметим одну малоизвестную статью П. Л. Ульянова ⁽³⁾, где ставилась подобная задача в следующей формулировке: если задана полная ОНС (ПОНС), ограниченная в совокупности, то существует ли ряд Фурье—Лебега по этой системе, который расходится на множестве положительной меры?

В 1975 г. С. В. Бочкарев (4) доказал, что если ОНС $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на отрезке $[0, 1]$ функций равномерно ограничена, т. е.

$$\|\tilde{\tau}_n\|_\infty \leq M \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1)$$

то существует такая функция $f \in L_{[0,1]}$, что ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \varphi_n(t),$$

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt, \quad (2)$$

расходится на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $|E| > 0$. В работе (3) был дан ограничительный ответ на задачу о существовании почти всюду расходящегося ряда Фурье для ПОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченного в совокупности (см. (6)). Было доказано, что для любого множества $G \subset [0, 1]$, $|G| > 0$, $|G| < 1$, существует ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченная в совокупности, такая, что все ряды Фурье по системе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду сходятся на множестве G .

Определение 1. Множество $G \subset [0, 1]$, $|G| > 0$ называется множеством сходимости для ОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на отрезке $[0, 1]$.

функций, если все ряды Фурье по системе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду сходятся на множестве G .

Теоремы 1 и 2 устанавливают точную оценку мер множеств сходимости и расходимости для рядов Фурье по ПОНС, ограниченным в совокупности через их верхнюю грань. Отметим, что резонансная теорема Сакса в близких вопросах применялась в работах (9, 10).

Теорема 1. Для любого $M > 1$ и любого множества $G \subset [0, 1]$, $|G| = 1 - M^{-2}$ существует удовлетворяющая условию (1) ПОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой G является множеством сходимости.

Используя доказательство теоремы Бочкарева и теорему Сакса (см. (1), а также (10), с. 36), нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ОНС, удовлетворяющая условию (1). Тогда существует такая функция $f \in L_{[0,1]}$, что ряд

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \varphi_n(t),$$

где коэффициенты $a_n(f)$ определены равенствами (2), расходится на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $|E| \geq M^{-2}$.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Դ. Ա Վ Ա Ր Ե Ա Ն

Հավասարաշափ սահմանափակ լրիվ օրբոնորմավորված
համակարգերի դասում Ֆուրյեի շարժերի տարամիտուրյան
բազմուրյան չափի նշղրիտ զնանատականը

Տեղի ունեն Հետևյալ թևորեմները.

Թեորեմ 1. Ցանկացած $M > 1$ թվից կամ $G \subset [0, 1]$, $|G| = 1 - M^{-2}$ բազմուրյան համար գոյուրյուն ունի լրիվ օրբոնորմավորված $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ սխալ, $\|\varphi_n\|_{\infty} \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) այնպիսին, որ G -ն հանդիսանում է զուգամիտուրյան բազմուրյուն:

Թեորեմ 2. Եթեցուք $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ օրբոնորմավորված սխալներ, $\|\varphi_n\|_{\infty} \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$): Այդ դեպքում գոյուրյուն ունի այնպիսի $f \in L_{[0,1]}$ ֆունկցիա, որ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \varphi_n(t), \quad a_n(f) = \int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt,$$

շարքը տարամիտում է $E \subset [0, 1]$ բազմուրյան վրա և $|E| \geq M^{-2}$:

ԼԻՏԵՐԱՏՈՒՐԱ—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. A. N. Kolmogorov, Fund. Math., v. 4 (1923). 2. П. Л. Ульянов, УМН, т. 38 (1983). 3. П. Л. Ульянов, Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. науки, т. 6 (1965).
4. С. В. Бочкарева, Мат. сб., т. 98, с. 140 (1975). 5. К. С. Казарян, Мат. сб., т. 119 (1982). 6. I. Joo, Acta Math. Ac. Sci. Hung., v. 37 (1981). 7. S. Saks, Trans. Amer. Math. Soc., v. 35 (1939). 8. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1958. 9. Р. Д. Гециадзе, Собр. АН ГССР, т. 84 (1976).

УДК 519.7

МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян

Оценки, связанные с представлением булевых функций
посредством линеаризированных дизъюнктивных нормальных форм

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 25/II 1988)

Линеаризированные дизъюнктивные нормальные формы (л.д.н.ф.) введены в качестве естественного обобщения обычных дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.) (см. (1,2)) в связи с задачей решения систем булевых уравнений и представляют собой дизъюнктивные формы, составленные из произведений линейных функций.

Л.д.н.ф. обладают основными теоретико-множественными и структурными свойствами обычных д.н.ф. и в то же время имеют существенные отличия от последних. Например, понятия связности и протяженности д.н.ф. (1) не имеют аналогов для л.д.н.ф., многие сложно реализуемые в классе д.н.ф. функции весьма просто реализуются посредством л.д.н.ф. Естественное алгебраическое описание л.д.н.ф. позволяет строить удобные алгоритмы и даже получать аналитические решения задач, для решения которых средства алгебры д.н.ф. оказываются недостаточно богатыми.

Настоящая работа посвящена изучению метрических (количественных) характеристик, связанных со сложностью реализации булевых функций в классе л.д.н.ф.

1. *Основные понятия.* Пусть E^n — множество вершин n -мерного единичного куба, т. е.

$$E^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\} \text{ и}$$

$$E_{\beta}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x \in E^n, x_1 = \beta\}, \beta \in \{0, 1\}.$$

Множество булевых функций, отображающих E^n в $\{0, 1\}$, зависящих от не более чем n переменных, обозначим через $P(n)$. Каждая функция из $P(n)$ однозначно представима полиномом Жегалкина (многочленом по мод 2 над полем Галуа $GF(2)$) (1).

Класс линейных функций $a_0 + x_1 + \dots + x_n$ обозначается через $L(n)$.

Определение. Функция $f \in P(n)$ называется линеаризуемой, если $f = \prod_{i=1}^m g_i$, где $g_i \in L(n)$, $i = 1, \dots, m$.

Класс линеаризуемых функций, зависящих от не более чем n переменных, обозначим через $PL(n)$.

Определение. Выражение $f_1 \vee \dots \vee f_m$, где $f_i \in PL(n)$, $i =$

$=1, \dots, m$, называется линеаризированной дизъюнктивной нормальной формой (л. д. н. ф.), а число m — длиной л. д. н. ф.

Определение. Л. д. н. ф., имеющая наименьшую длину среди всех л. д. н. ф., реализующих ту же булеву функцию, называется кратчайшей.

Определение. Функция $g \in \Pi L(n)$ называется максимальной для $f \in P(n)$, если $g \leq f$ и из $g \leq g' \leq f$, $g' \in \Pi L(n)$ следует $g = g'$.

Определение. Сокращенной л. д. н. ф. функции $f \in P(n)$ называется л. д. н. ф., составленная из всех максимальных для f функций.

Примеры. Пусть $f = x_1 + \dots + x_n$. Кратчайшая л. д. н. ф. имеет длину 2^{n-1} , а длина кратчайшей л. д. н. ф. равна 1.

Пусть $f = x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots + x_{2n-1} x_{2n}$. Длина кратчайшей л. д. н. ф. равна $\frac{1}{2}(3^n - 1)$, а длина кратчайшей л. д. н. ф. равна $2^n - 1$.

Пусть $f = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, тогда длины кратчайших л. д. н. ф. и д. н. ф. совпадают и равны n .

Задача минимизации булевых функций в классе л. д. н. ф. состоит в построении кратчайшей или близкой к ней по длине л. д. н. ф.

В дальнейшем E^n и $L(n)$ рассматриваются в качестве линейных пространств над полем $GF(2)$.

2. Класс $\Pi L(n)$. Введем множества $N_f = \{x \in E^n | f(x) = 1\}$ и $M(f) = \{g | g \in L(n), g \cdot f = 0\}$. Очевидно, что $M(f)$ является линейным подпространством в $L(n)$.

Предложение. Пусть $f \in \Pi L(n)$, тогда кратчайшее (в смысле количества сомножителей) представление f в виде произведения линейных форм имеет вид $f = \prod_{g \in B} (g + 1)$. B — произвольный базис в $M(f)$.

Размерность ($\dim f$) функции $f \in \Pi L(n)$ определяется как число $n - \dim M(f)$, а степень ($\deg f$) — это степень соответствующего многочлена Жегалкина. Для $f \neq 0$ имеем $\deg f = \dim M(f)$.

Количество m -мерных линейных подпространств n -мерного линейного пространства над $GF(2)$ обозначим через $\left| \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right|$ — коэффициент Гаусса ⁽³⁾.

Обозначим через $|A|$ мощность множества A . Основные свойства линеаризуемых функций описывает следующая

Теорема 1. Пусть $f \in \Pi L(n)$, тогда

а) если $f \equiv 0$, то $\dim M(f) = n - 1$;

б) если $f \neq 0$, то $N_f = M^\perp(f) \cap E^{n-1}$ — смежный класс по подпространству $M^\perp(f) \cap E^{n-1}$. Если $\deg f = m$, то $|N_f| = 2^{n-m}$ и $|M^\perp(f)| = 2 \cdot |N_f|$;

в) $\{|f| \deg f = m, f \in \Pi L(n)\}| = 2^m \cdot \left| \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right|$;

г) $|\Pi L(n)| = 1 + \sum_{m=0}^n 2^m \cdot \left| \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right|$ и

$$2^{n(1-o(\frac{1}{n}))} \leq |\Pi L(n)| \leq 2^{n(1+o(\frac{1}{n}))}$$

3. *Метрические характеристики.* Оценки, излагаемые в этом пункте, получены с помощью методов, развитых в работах (4,5). Принято говорить, что некоторое свойство выполнено для почти всех $f \in P(n)$, если доля функций, для которых указанное свойство выполняется, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $l(n, m, f)$ — количество функций $g \in \Pi L(n)$ таких, что $g \leq f$ и $\dim g = m$.

Теорема 2. Для почти всех $f \in P(n)$ верно

$$\left| \frac{n}{m} \left(\frac{2^{n-m}}{2^{2^m}} - n \sqrt{\frac{2^{n-m}}{2^{2^m}}} \right) \right| \leq l(n, m, f) \leq \left| \frac{n}{m} \left(\frac{2^{n-m}}{2^{2^m}} + n \sqrt{\frac{2^{n-m}}{2^{2^m}}} \right) \right|.$$

В случае д. н. ф. соответствующая оценка получается заменой

$$\left| \frac{n}{m} \right| \text{ на } C_n^m \quad (4).$$

Пусть $[x]$ — целая часть числа x .

Теорема 3. Для почти всех функций $f \in P(n)$ имеет место $\dim g \leq [\log_2 n + \log_2 \log_2 n] + 1$ для всех $g \leq f$, $g \in \Pi L(n)$.

Для д. н. ф. максимальная размерность допустимого интервала у почти всех функций равна $[\log_2 n] + 1$ (см. [1, 2]).

Теорема 4. Для почти всех $f \in P(n)$ длина $l(f)$ сокращенной д. н. ф. удовлетворяет неравенствам

$$n^{n(1-\alpha_n)} \leq l(f) \leq n^{n(1+\beta_n)},$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{\alpha}{\log_2 n}, \quad \beta_n = \frac{\beta}{\log_2 n} \text{ и } 3 < \alpha, \beta < 3 + \varepsilon.$$

Соответствующая оценка длины сокращенной д. н. ф. для почти всех функций имеет вид (1.4)

$$n^{(1-\delta_n)\log_2 \log_2 n} \cdot 2^n \leq l(f) \leq n^{(1+\gamma_n)\log_2 \log_2 n} \cdot 2^n,$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Пусть $l(n) = \max_{f \in P(n)} l(f)$.

Теорема 5.

$$2^{n(1-o(\frac{1}{\log_2 n}))} \leq l(n) \leq 2^{n(1+o(\frac{1}{n}))}.$$

Максимальная длина сокращенной д. н. ф. удовлетворяет неравенствам (1)

$$\frac{3^n}{n} \leq l(n) \leq \frac{3^n}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 6. Почти все максимальные для f функции $g \in \Pi L(n)$ для почти всех функций $f \in F(n)$ имеют размерность, удовлетворяющую неравенствам

$$\log_2 n - 4 \leq \dim g \leq \log_2 n + 3.$$

Здесь следует особо отметить важное отличие л. д. н. ф. от д.

н. ф. В случае д. н. ф. у почти всех функций почти все члены сокращенной д. н. ф. имеют размерность, близкую к $\log_2 \log_2 n$ см. (4), в то время как максимальная размерность равна $\lceil \log_2 n \rceil + 1$. Из теоремы 6 следует, что почти все члены сокращенной л. д. н. ф. имеют размерность порядка максимально возможной — $O(\log_2 n)$.

В изложенных ниже результатах получены оценки для важнейшей характеристики класса л. д. н. ф. — длины кратчайшей л. д. н. ф.

Обозначим через $F(n)$ множество симметрических функций из $P(n)$, т. е. функций, инвариантных относительно любой перестановки переменных.

Пусть $S(f)$ — длина кратчайшей л. д. н. ф. функции $f \in P(n)$. Обозначим через $SF(n) = \max_{f \in F(n)} S(f)$.

Теорема 7 (7).

$$\frac{1}{n+2} \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq SF(n) \leq \text{const} \cdot n \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Теорема 8. Для почти всех $f \in P(n)$ имеет место

$$\frac{(1-\varepsilon_n) \cdot 2^{n-1}}{2n \cdot \log_2 n} \leq S(f) \leq \text{const} \cdot \frac{2^n \cdot \log_2 n}{n}, \text{ где } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Отметим, что в классе симметрических функций достигается максимум длины кратчайшей д. н. ф. Теоремы 7 и 8 показывают, что симметрические функции реализуются в классе л. д. н. ф. существенно проще, чем почти все функции из $P(n)$. Порядок длины кратчайшей д. н. ф. для почти всех функций равен $2^{n-1}/(\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$ (см. (4)). Отсюда из теоремы 8 следует, что почти все функции из $P(n)$ реализуются в классе л. д. н. ф. по крайней мере в $n/(\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$ раз проще, чем в классе д. н. ф.

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Ю. И. Журавлеву за стимулирующие обсуждения.

Ереванский государственный университет

II. ԱՎԵՐԱԿԱՆՆԵՐ

Դժայնացված դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով բուլյան ֆունկցիաների
ներկայացման հետ կապված զնահատականներ

Հետազոտված են բուլյան ֆունկցիաների գծայնացված դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի (գ. դ. ն. ձ.) մետրիկական բնութագրիները՝ կրճատված գ. դ. ն. ձ.-ի երկարությունը և անդամների չափը, կարճագույն գ. դ. ն. ձ.-ի երկարությունը և այլն. Ցույց է տրված, որ համարյա բոլոր ֆունկցիաները կարելի է իրականացնել գ. դ. ն. ձ.-ի դասում առնվազն $\frac{n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ անգամ ա-

վելի կարե բանաձնի օգնությամբ, քան սովորական դիզյուլեկտիվ նորմալ ձևերի դասում։ Միմետրիկ ֆունկցիաների դասի կարեագույն գ. դ. և. և.՝ ներկայացման համար ստացված է բարդության լոգարիթմի ասիմուլուտիկ արժեքը՝ $n(\log_2 3 - 1)$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1. М., Наука, 1974. ² Ю. И. Журавлев. Проблемы кибернетики. вып. 8, с. 5—44 (1962). ³ М. Айнер. Комбинаторная теория. Мир, М., 1982. ⁴ В. В. Глаголев. Проблемы кибернетики, вып. 19, с. 75—94 (1967). ⁵ А. А. Сапоженко. Дискретный анализ. вып. 21, с. 62—71 (1972). ⁶ А. Е. Андреев. Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, № 3, с. 29—35 (1985). ⁷ А. А. Алексанян. ДАН АрмССР, т. 84, № 5, с. 195—197 (1987).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

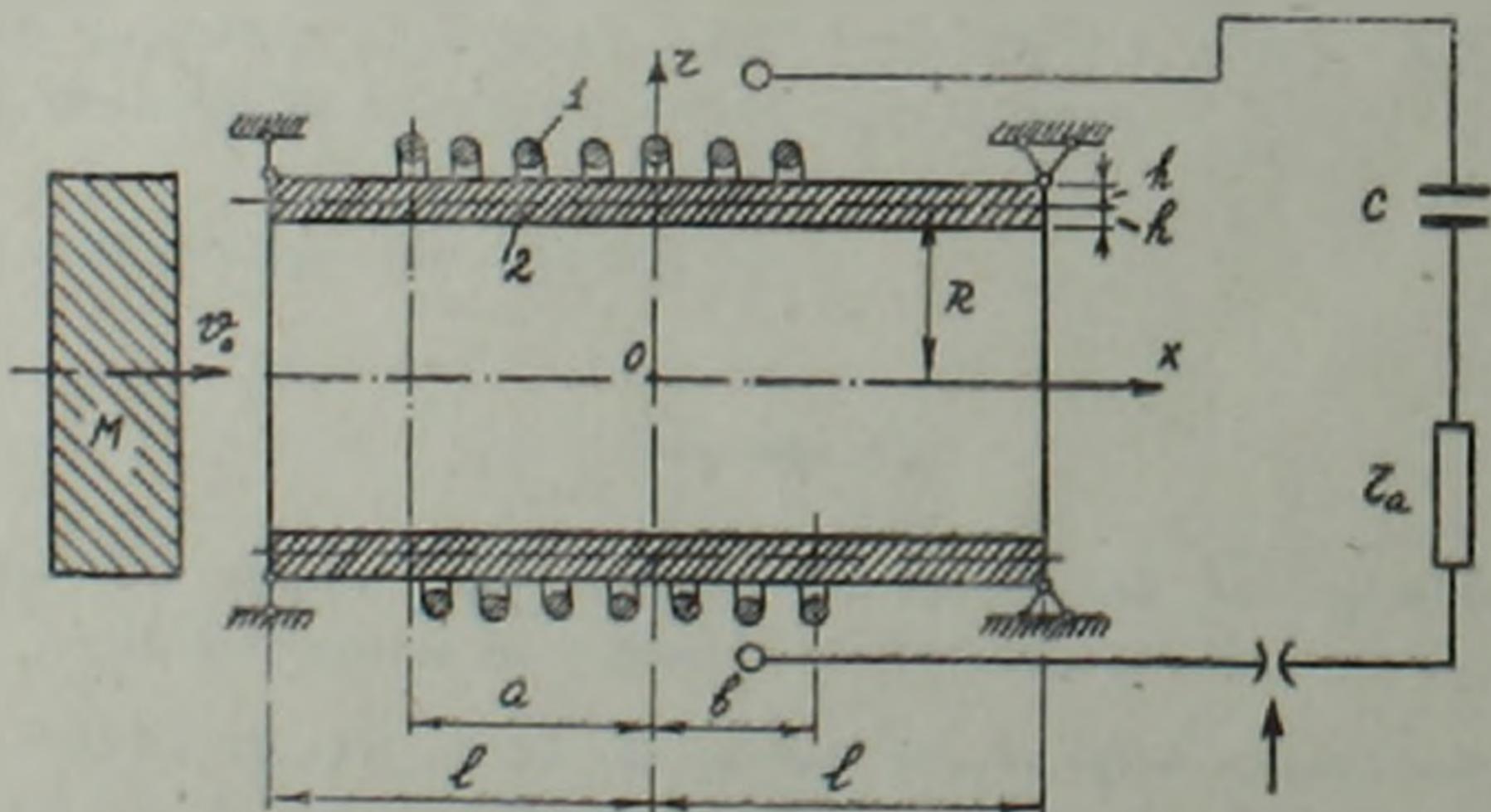
Магнитоимпульсное нагружение проводящей тонкой
цилиндрической оболочки

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18/III 1988)

Развитие техники получения сильных импульсных магнитных полей и создание магнитоаккумулятивных генераторов позволило применять большие давления, действующие на поверхность проводников, что широко используется: при пластической обработке металлов, обжатии труб, насадке их с высокой прочностью и плотностью соединения, формовке плоских листовых деталей, обработке изделий малой толщины из хорошо проводящих металлов и др. Теоретические исследования в этой области и выработка определенных рекомендаций ныне стали возможными благодаря уже созданной математической теории магнитоупругости проводящих тонких тел (1-2).

В данной работе изучается магнитоимпульсное нагружение проводящей тонкой цилиндрической оболочки. Полученные результаты можно рекомендовать для техники «магнитной штамповки» (3-4).

I. Рассматривается осесимметричное движение шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки толщиной $2h$, радиусом срединной поверхности R , длиной $2l$, находящейся в заданном импульсном магнитном поле напряженности B_{01} (рисунок). Магнитное поле



напряженности B_{01} получается при разряде емкостного накопителя на систему магнитосвязанных контуров (с электрической точки зрения индуктор 1 с цилиндрической оболочкой 2, включенный в разрядную цепь магнитоимпульсной установки, можно представить в виде магнитосвязанных контуров). Разряд емкостного накопителя происходит в 10

тот момент ($t=0$), когда тело массой M , движущееся со скоростью v_0 , ударяется о левый конец упругой оболочки.

Отметим, что при линейной постановке задачи должна быть заранее известной напряженность внешнего магнитного поля, в данном случае она выражается формулой (2.5)

$$B_{01}(x, t) = B_0 e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t, \quad (1.1)$$

при этом $B_0 \neq 0$, когда $-l \leq x \leq l$, и равно нулю вне этого отрезка; ω —круговая частота разряда; δ —декремент затухания. В силу тонкостенности оболочки считается, что B_{01} не зависит от поперечной к срединной поверхности оболочки направления.

Выражение (1.1) означает, что электромагнитный процесс в электрической цепи представляет собой колебательный разряд, при этом

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{0.5r_a}{L}, \quad L = L_y + L_{u-0},$$

где L_u —собственная индуктивность магнитоимпульсной установки в режиме короткого замыкания, L_{u-0} —индуктивность системы индуктор-оболочка, C —емкость конденсатора, причем (5)

$$L_{u-0} = \mu_0 \pi N^2 (R_u^2 - R^2) / l,$$

N —число витков индуктора, μ_0 —магнитная постоянная, l —длина индуктора, R_u —внутренний радиус индуктора, r_a —активное сопротивление разрядного контура.

Величина B_0 в выражении (1.1) определяется формулой (2.4)

$$B_0 = 4\pi n U \sqrt{\frac{C}{L}},$$

где U —разность потенциалов между обкатками конденсатора.

При исследовании магнитоупругих осесимметричных движений цилиндрической оболочки рассматриваем основную разрешающую систему двумерных уравнений магнитоупругости тонких оболочек (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{2Eh}{1-v^2} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - 2\rho h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{2Eh}{1-v^2} \frac{w(x, t)}{R^2} + \frac{2Eh}{1-v^2} \cdot \frac{v}{R} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \\ + 2\rho h \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\rho h}{c^2} B_{01} \varphi(x, t) + \\ + \frac{4\pi}{3} \frac{v^2 h^3}{c^2} B_{01} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varphi(x, t) + 2\pi \frac{\rho h^3}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{d w(x, t)}{d t} =$$

$$= \frac{4\pi R h}{c} \int_{-l}^l K(x, x_0) \left[\frac{4\pi v}{c} \frac{\partial \varphi(x_0, t)}{\partial t} + \frac{8\pi^2}{3} \frac{v^2 h^3}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x_0, t)}{\partial t^2} \right] dx_0, \quad -l \leq x \leq l$$

$$\varphi(x, t) = E_{\varphi}(x, t) + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t},$$

где u —осевое перемещение, w —прогиб срединной поверхности оболочки, σ —электропроводимость, E и ν —упругие константы материала оболочки. E_{φ} —азимутальное составляющее напряженности индуцированного в оболочке электрического поля.

К разрешающим уравнениям следует присоединить следующие граничные и начальные условия (считается, что ударяющая масса бесконечно большая):

при

$$x = -l, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1.3)$$

$$x = l, \quad T_x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

при

$$t = 0, \quad -l < x < l, \quad u = \frac{\partial u}{\partial t} = w = \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, задача движения электропроводящей цилиндрической оболочки в заданном осевом импульсном магнитном поле (1.1) приводится к совместному исследованию уравнений (1.2), граничных (1.3) и начальных (1.4) условий.

2. Ядро интегрального уравнения (1.2) представляет собой (2-3) функцию Грина для уравнений Максвелла, имеющую место во всем трехмерном пространстве (вакууме), в данном случае (7) частное решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_v^{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_v^{(r)}}{\partial r} - \frac{E_v^{(r)}}{r^2} + \frac{\partial^2 E_v^{(r)}}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \delta(r - R) \delta(x - x_0), \quad (2.1)$$

где $E_v^{(r)}$ —напряженность электрического поля в окружающем оболочку пространстве (вакууме), $\delta(x)$ —дельта-функция Дирака.

Применяя к уравнению (2.1) преобразование Фурье по переменной x и далее преобразование Ханкеля по переменной r , в окончательном итоге для $E_v^{(r)}$ будем иметь

$$E_v^{(r)}(r, x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x - x_0|\xi} J_1(\xi r) J_1(\xi R) d\xi, \quad (2.2)$$

где $J_1(x)$ —функция Бесселя.

Подставляя в (2.2) $r = R$, приходим к выражению функции Грина на срединной поверхности оболочки, которое и представляет ядро интегрального уравнения (1.2)

$$K(x, x_0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x - x_0|\xi} J_1^2(\xi R) d\xi. \quad (2.3)$$

После введения новой безразмерной координаты $z = \frac{x}{l}$ ядро (2.3) примет следующий вид:

$$K(lz, lz_0) = \frac{1}{2l} K(z, z_0), \quad (2.4)$$

$$K(z, z_0) = \int_0^z e^{-|z-a|k^2} J_0^2(kr) dr, \quad k = \frac{R}{l}.$$

При помощи формулы 6.612 (5) ((⁸) с. 723) ядро $K(z, z_0)$ можно представить так:

$$K(z, z_0) = \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{(z-z_0)^2 + 2k^2}{\sqrt{(z-z_0)^2 + 4k^2}} K\left(\frac{2k}{\sqrt{(z-z_0)^2 + 4k^2}}\right) - \sqrt{(z-z_0)^2 + 4k^2} E\left(\frac{2k}{\sqrt{(z-z_0)^2 + 4k^2}}\right) \right], \quad (2.5)$$

где $K(m)$ и $E(m)$ —полные эллиптические интегралы первого и второго рода (⁸).

Используя разложения эллиптических интегралов в ряды (⁸), легко обнаружить, что первое слагаемое в правой части формулы (2.5) при $a=a_0$ содержит логарифмическую сингулярность $\ln \frac{1}{|z-z_0|}$, выделяя которую (2.5) можно представить в следующем виде:

$$K(z, z_0) = \frac{1}{\pi k} \left[\ln \frac{1}{|z-z_0|} + N(z, z_0) \right], \quad (2.6)$$

где $N(z, z_0)$ представляет регулярную часть ядра $K(z, z_0)$.

3. Можно предложить следующие методы решения начально-границной задачи (1.2)–(1.4) с учетом (2.4) и (2.6).

Первая формулировка базируется на преобразовании интегрально-дифференциального уравнения (1.2) в интегральное. Для этого введем временную сетку, заменив искомые функции сеточной, а производные искомых функций—их разностными аналогами; таким же образом будем поступать и с дифференциальными уравнениями системы (1.2). Итак, для решения рассматриваемой задачи на каждом шаге времени необходимо совместно решать интегральное уравнение Фредгольма второго рода и два обыкновенных дифференциальных уравнения (получаемая система на каждом шагу времени решается на ЭВМ при помощи известных численных методов).

Теперь сформулируем второй метод решения начально-границной задачи (1.2)–(1.4).

Ищем решение системы уравнений (1.2) в виде

$$u = \frac{1}{2} (1-\alpha) v_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \cos \frac{m\pi}{2} (1-\alpha), \quad -1 \leq z \leq 1$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \cdot \sin \frac{m\pi}{2} (1-\alpha). \quad (3.1)$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) T_m(x),$$

удовлетворяющем условиям свободного смыкания на концах (1.3). Величина φ считается на концах линии интегрирования $a = \pm 1$ конечной, так как величина E , по физическому содержанию задачи (1.2) должна быть непрерывной из области оболочки через граничный контур оболочки во внешнюю область. В (3.1) $T_m(x)$ представляют собой многочлены Чебышева (8).

Теперь подставим (3.1) в уравнение (1.2); при рассмотрении первых двух уравнений системы (1.2) примем обычный процесс ортогонализации, а при рассмотрении интеграло-дифференциального уравнения (1.2) примем метод ортогональных многочленов (9, 10).

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических многочленов: они являются собственными функциями многих интегральных операторов. В частности (9, 10), имеет место соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-x_0|} \frac{T_n(x_0)}{\sqrt{1-x_0^2}} dx_0 = \mu_n^0 T_n(x), \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\mu_0^0 = \ln 2, \quad \mu_n^0 = \frac{1}{n}, \quad n=1, 2, \dots, \infty, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3.2)$$

означающее, что многочлены Чебышева $T_n(x)$ — собственные функции интегрального оператора с логарифмическим ядром, а μ_n^0 — его собственные числа.

В результате подстановки (3.1) в систему уравнений (1.2) приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $u_m(t)$, $w_m(t)$, $\varphi_m(t)$, которая с учетом начальных условий (1.4) решается на ЭВМ с помощью метода Рунге—Кутта.

Итак, определяя решение начально-граничной задачи (1.2) — (1.4), тем самым определяем основные разрешающие функции задачи $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $-l \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Зная величины этих основных функций, их можно подставить в известные формулы работ (2, 6) и определить остальные расчетные величины исследуемой задачи. В частности, легко определяется величина $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$ в различных точках числового отрезка $x \in (-l, l)$, которая будет представлять скорость точек срединной поверхности оболочки при магнитоимпульсном нагружении.

Ленинградский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Ա. 2. ԱՐԳՈՒԱՆ

Հաղորդիչ բարակ գլանական բաղանքի մազնիսախիմպոլսային բեռնավորումը

Ուսումնասիրվում է հողակապորեն ամրացված բարակ գլանական թաղանթի առանցքասիմետրիկ շարժումը, երբ այն գտնվում է իմպուլսային առանցքալին մագնիսական դաշտում:

Բերվում է բարակ թաղանթի մակնիսասուածղականության երկափ տեսության որոշիչ հավասարումների համակարգը։ Ուսումնասիրվում է ինտեղրա-դիֆերենցիալ հավասարման կորիզի ընույթը և ձեակերպվում են դրված խնդրի լուծման մի քանի մեթոդներ։

Л И Т Е Р А Т У Р А - ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Наука, М., 1977. 2 С. О. Саркисян. Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин. Докторская диссертация, Казанский гос. ун-т, 1987. 3 И. В. Белый, С. М. Фертик, Л. Г. Хименко. Справочник по магнитомпульсной обработке металлов. Вища школа. Харьков, 1977. 4 В. И. Дресвянников. Применение методов механики для решения задач по прочности и пластичности. Вып. 11. с. 32—47 (1979). 5 А. А. Дудин. Магнитомпульсная сварка металлов. Металлургия, М., 1979. 6 С. О. Саркисян. Изв. АН АрмССР. Механика, т. 38, № 6, с. 21—34 (1985) 7 С. О. Саркисян, в кн.: III Всесоюз. симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости», Ереван, Ереванский ун-т, 1984. 8 И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. Наука, М., 1971. 9 Г. Я. Полов. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Наука, М., 1982. 10 Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян

О решении одной смешанной краевой задачи для неоднородного полупространства с прямой линией раздела граничных условий

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 9/III 1988)

Основные результаты по исследованию контактных и смешанных задач теории упругости для канонических областей с прямыми линиями раздела граничных условий подтверждены в ⁽¹⁻⁵⁾.

В данной статье, развивая положения ⁽⁶⁾, приводится замкнутое решение одной смешанной задачи для упругого неоднородного по степенному закону полупространства с прямой линией раздела граничных условий.

1. Пусть упругое полупространство $z < 0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, обладает изменяющимся по глубине по степенному закону $E = E_0|z|^\nu$ ($0 \leq \nu < 1$) модулем упругости и постоянным коэффициентом Пуассона. Для него рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z)|_{z=0} &= f(x, y), \quad u_y(x, y, z)|_{z=0} = g(x, y) \quad ((x, y) \in \omega); \\ \tau_{xz}(x, y, z)|_{z=0} &= \tau_{yz}(x, y, z)|_{z=0} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma/\omega); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u_z(x, y, z)|_{z=0} = 0 \quad ((x, y) \in \omega); \quad u_x, u_y, u_z \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty);$$

$$\Pi = \{z = 0; -\infty < x, y < \infty\}; \quad \omega = \{z = 0; x \geq 0, -\infty < y < \infty\},$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты смешанной $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — наперед заданная функция для полупространства ω .

На основе результатов из ⁽¹⁻⁵⁾ решение (1.1) сведем к решению следующей системы интегральных уравнений на ω :

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{-1-\nu} (x - \xi, y - \eta) [\vartheta_1 + \vartheta_2 (x - \xi)^2 R^{-\nu} (x - \xi, y - \eta)] p(\xi, \eta) \, d\eta + \\ + \vartheta_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)(y - \eta) R^{-3-\nu} (x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = f(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)(y - \eta) R^{-3-\nu} (x - \xi, y - \eta) p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{-1-\nu} (x - \xi, y - \eta) [\vartheta_1 + \\ + \vartheta_2 (y - \eta)^2 R^{-\nu} (x - \xi, y - \eta)] q(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = g(x, y), \end{aligned}$$

$$R(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad \vartheta_1 = [\pi(1 - \nu)\gamma]^{-1/2} \Gamma(1 + \nu) [(1 - \nu)A_1^+ - (1 + \nu)A_2^+];$$

$$\theta_2 = 2[\pi(1-\nu)\gamma]^{-1}\theta_1(1+\nu)\Gamma(1+\epsilon)A_1^+; \quad \epsilon = (1+\nu)/2.$$

Здесь $p(x, y)$ и $q(x, y)$ —неизвестные касательные напряжения в области ω вдоль осей Ox и Oy соответственно, а γ , θ_1 , A_1^+ —комбинации упругих постоянных полупространства, которые приведены в (1.3).

Применяя к обеим частям системы (1.2) преобразование Фурье по переменной y , сведем ее к системе одинарных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |t-u|^{-\nu/2} [\theta_1^* K_{\nu/2}(|t-u|) + \theta_2^* |t-u| K_{1+\nu/2}(|t-u|)] p_*(u) du + \\ & + i\theta_2^* \operatorname{sgn} i \int_0^\infty (t-u) |t-u|^{-\nu/2} K_{\nu/2}(|t-u|) q_*(u) du = |i|^{-2\nu} f_*(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & i\theta_2^* \operatorname{sgn} i \int_0^\infty (t-u) |t-u|^{-\nu/2} K_{\nu/2}(|t-u|) p_*(u) du + \int_0^\infty |t-u|^{-\nu/2} \times \\ & \times [\theta_3^* - \theta_2^* |t-u| K_{1+\nu/2}(|t-u|)] q_*(u) du = |i|^{-2\nu} g_*(t); \end{aligned}$$

$$|i|x = t, |i|\xi = u; f_\lambda(x) = f_\lambda(t/|i|) = f_*(t), g_\lambda(x) = g_\lambda(t/|i|) = g_*(t);$$

$$p_\lambda(x) = p_\lambda(t/|i|) = p_*(t), q_\lambda(x) = q_\lambda(t/|i|) = q_*(t); x = (\nu-1)/2;$$

$$\theta_1^* = \sqrt{\pi}(1+\nu)2^{-\nu/2}\Gamma^{-1}(1+\epsilon)\theta_1; \quad \theta_2^* = \sqrt{\pi}2^{-\nu/2}\Gamma^{-1}(1+\epsilon)\theta_2;$$

$$\theta_3^* = [\sqrt{\pi}(1+\nu)\gamma]^{-1}(1+\nu)\theta_1 2^{-\nu/2}[(1-\nu)A_1^+ + (1+\nu)A_1^-];$$

$$\{p_*(x); q_*(x); f_*(x); g_*(x)\} = \int_{-\infty}^\infty \{p(x, y); q(x, y); f(x, y); g(x, y)\} e^{ixy} dy.$$

В (1.3) $K_\nu(x)$ —известная функция Макдональда.

2. Решение системы уравнений (1.3) представим в виде бесконечных рядов ($0 < t < \infty$)

$$p_*(t) = e^{-it} \sum_{n=0}^\infty X_n L_n^1(2t), \quad q_*(t) = e^{-it} \sum_{n=0}^\infty Y_n L_n^1(2t), \quad (2.1)$$

с неизвестными коэффициентами X_n , Y_n . Одновременно положим

$$f_*(t) = e^{-it} \sum_{n=0}^\infty f_n L_n^1(2t), \quad g_*(t) = e^{-it} \sum_{n=0}^\infty g_n L_n^1(2t). \quad (2.2)$$

В (2.1)–(2.2) $L_n^1(t)$ —многочлены Чебышева–Лагерра, причем в (2.2) коэффициенты f_n и g_n считаются известными.

Далее заметим, что на основании свойств четности функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ по y вместо системы (1.2) можно рассматривать эту же самую систему, в которой функции $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ заменены соответственно функциями $p_\pm(\xi, \eta)$, $q_\mp(\xi, \eta)$, $f_\pm(x, y)$, $g_\pm(x, y)$, где

$$p(\xi, \eta) = p_+(\xi, \eta) + p_-(\xi, \eta), \quad q(\xi, \eta) = q_+(\xi, \eta) + q_-(\xi, \eta);$$

$$f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y), \quad g(x, y) = g_+(x, y) + g_-(x, y);$$

$$f_+(x, -y) = \pm f_\pm(x, y); \quad p_\pm(\xi, -\eta) = \pm p_\pm(\xi, \eta); \quad q_\pm(\xi, -\eta) = \pm q_\pm(\xi, \eta),$$

причем без ограничения общности одну из соответствующих друг другу двух функций из $f_+(x, y), g_\pm(x, y)$ можно положить равной нулю. Для определенности возьмем

$$f(x, y) = f_+(x, y), \quad g_-(x, y) = 0.$$

Тогда

$$\overline{p_n(x)} = p_n(x), \quad \overline{q_n(x)} = -q_n(x), \quad \overline{X_n} = X_n, \quad \overline{Y_n} = -Y_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Учитывая эти равенства, можно положить $Y_n = iZ_n$, где Z_n — вещественные коэффициенты, подлежащие вместе с коэффициентами X_n к определению, и можно считать $i > 0$.

Теперь (2.1) и (2.2) подставляем в систему (1.3) и учтем указанное обстоятельство. В результате после использования известного спектрального соотношения для многочленов Чебышева—Лагерра (2.3) и некоторых преобразований и вычислений интегралов систему уравнений (1.3) сведем к следующей системе линейных конечно-разностных уравнений:

$$2\nu_0\bar{\theta}_n(\xi_{n+1} - \eta_{n+1}) + (\nu_1 - 3)(\xi_{n+1} + \eta_{n+1}) - 2(\xi_{n+2} + \eta_{n+2}) = a_n^{(2)} \quad (2.3)$$

$$2\nu_0\bar{\theta}_n(\xi_{n+1} + \eta_{n+1}) - 2(\xi_n - \eta_n) + (\nu_1 - 3)(\xi_{n+1} - \eta_{n+1}) = b_n^{(2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\xi_n = U_{n-1} - U_n, \quad \eta_n = V_{n-1} - V_n; \quad U_{n-1} = \Gamma(n - 1 - \nu) \Gamma^{-1}(n) X_{n-1},$$

$$V_{n-1} = \Gamma(n - 1 - \nu) \Gamma^{-1}(n) Z_{n-1}; \quad \nu_0 = (1 - \nu)/(1 + \nu); \quad \nu_1 = (3 - \nu)/(1 + \nu);$$

$$\bar{\theta}_n = A_n^+ / A_n^-; \quad a_n = -\lambda^{-2\nu} (f_n^+ - f_{n+1}^+) \gamma x 2^{(5+\nu)/2} |(1+\nu)^2 \theta_n \times$$

$$\times A_n^- \Gamma(-\nu)]^{-1}; \quad a_n^{(2)} = a_n^{(1)} + b_n^{(1)}; \quad b_n^{(2)} = a_n^{(1)} - b_n^{(1)}; \quad a_n^{(1)} = a_n + \nu_1 x_n U_{n+1} -$$

$$- \beta_n U_{n+2} + \beta_{n-1} V_{n+1} - \beta_n V_{n+2}; \quad b_n^{(1)} = \beta_{n-1} U_{n+1} - \beta_n U_{n+2} + \nu_1 x_n V_{n+1} - \beta_n V_{n+2};$$

$$\alpha_n = \frac{1 + \nu}{2n + 1 - \nu} - \frac{(3 + \nu)(1 + \nu)}{2(n + 1)(3 - \nu)} - \frac{(3 + \nu)(1 + \nu)^2}{2(n + 1)(2n + 1 - \nu)(3 - \nu)};$$

$$\beta_n = \frac{1 + \nu}{2n + 3 - \nu} - \frac{1 - \nu}{2(n + 2)} - \frac{1 - \nu^2}{2(n + 2)(2n + 3 - \nu)}.$$

Отметим, что в системе уравнений (2.3) в соответствии с поведением коэффициентов при $n \rightarrow \infty$ выделены их главные и регулярные части, которые расположены в левых и правых частях, соответственно, этих уравнений.

Далее положив

$$p_n = \xi_n - \eta_n, \quad q_{n-1} = \xi_n + \eta_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad c_\nu = (2\nu_0\bar{\theta}_n + \nu_1 - 3)/2, \quad (2.5)$$

систему уравнений (2.3) представим в виде

$$q_{n+1} - c_\nu q_n = -a_n^{(2)}/2 - 2\nu_0\bar{\theta}_n\eta_{n+1}; \quad (2.6)$$

$$p_{n+1} - c^{-1} p_n = b_n^{(2)}/2c, - 2v_0 \bar{\theta}_n/c, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

Считая правые части уравнений (2.6) и (2.7) известными, запишем их решения (7):

$$q_n = q_0 c_n^n - 2^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_n^{n-k-1} [a_k^{(2)} + 4v_0 \bar{\theta}_n \eta_{k+1}]; \quad (2.8)$$

$$p_n = p_0 c_n^{-n} + (2c_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_n^{-n+k+1} [b_k^{(2)} - 4v_0 \bar{\theta}_n \eta_{k+1}] \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Теперь при помощи (2.4) и (2.5) в уравнениях (2.8) и (2.9) при $n=1, 2, \dots$ возвратимся к прежним коэффициентам U_n и V_n . В результате после некоторых преобразований относительно этих коэффициентов получим следующую систему линейных уравнений:

$$U_n + \sum_{k=1}^n L_{n,k}^{(1)} U_k + \sum_{k=1}^n L_{n,k}^{(2)} V_k = C_n^{(1)}; \quad (2.10)$$

$$V_n + \sum_{k=1}^n L_{n,k}^{(2)} U_k + \sum_{k=1}^n L_{n,k}^{(1)} V_k = C_n^{(2)} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Ядра $L_{n,k}^{(i)}$ и правые части $C_n^{(i)}$ ($i, j=1, 2$) системы (2.10) выражаются через параметры $v_0, v_1, c, \alpha_n, \beta_n, \bar{\theta}$, формулами весьма простых структур, причем в выражения $C_n^{(i)}$ линейно входят коэффициенты U_0, V_0 . Очевидно, что при помощи определенных формул решение системы (2.10), т. е. коэффициенты U_n, V_n ($n=1, 2, \dots$), можно выразить через коэффициенты U_0, V_0 , для определения которых нужны дополнительные условия.

Для определения этих условий на основании известных асимптотических формул для многочленов Чебышева-Лагерра (8) находим, что для равномерной сходимости рядов (2.1) на любом отрезке $[\varepsilon_0, M]$ ($\varepsilon_0 > 0, M > 0$) оси t достаточно, чтобы $X_n, Y_n = O(n^{3+1/2+\epsilon/4})$ ($\epsilon > 0, n \rightarrow \infty$). Отсюда вытекает, что необходимо, чтобы $U_n, V_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), или $\xi_n, \eta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), или же $p_n, q_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Следовательно, в силу (2.8) искомые дополнительные условия при $c=1$ имеют вид

$$q_0 - 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k^{(2)} + 4v_0 \bar{\theta}_n \eta_{k+1}] = 0; \quad (2.11)$$

$$p_0 + 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [b_k^{(2)} - 4v_0 \bar{\theta}_n \eta_{k+1}] = 0.$$

Если $c > 1$, что, как показывают анализ и необходимые вычисления, имеет место в довольно широком диапазоне изменения параметра в $[0, 1)$ включая окрестность точки $v=0$, то из (2.8) будем иметь

$$q_0 - 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_n^{-k-1} [a_k^{(2)} + 4v_0 \bar{\theta}_n \eta_{k+1}] = 0; \quad (2.12)$$

$$p_0 - 2v_0 \bar{\theta}_n \eta_1 + b_0^{(2)}/2 = 0.$$

Второе условие (2.12) получено при помощи следующих рассуждений. Очевидно, что левые части (2.6) и (2.7) переходят одна в другую формальной заменой c , на c^{-1} . Поэтому ввиду равноправности коэффициентов p_n и q_{n-1} в отношении их поведения при $n \rightarrow \infty$ коэффициенты p_n относительно c^{-1} должны иметь при $n \rightarrow \infty$ такой же порядок, какой имеют коэффициенты q_{n-1} относительно c . Это требование и приводит ко второму условию (2.12). При $c < 1$ условия (2.12) в определенном смысле поменяются местами и нетрудно их выписать из (2.8).

Если теперь условия (2.11) или (2.12) или же подобные им условия при $c < 1$ записать в коэффициентах U_n, V_n ($n=0, 1, 2, \dots$) и принять во внимание сказанное выше относительно системы (2.10), то придет к системе из двух линейных уравнений относительно U_0, V_0 , которая вместе с (2.10) замыкает систему определяющих уравнений обсуждаемой смешанной задачи.

Далее отметим, что введя новые неизвестные коэффициенты

$$W_{2k-1} = U_k, \quad W_{2k} = V_k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

систему (2.10) можем записать в виде

$$\sum_{r=1}^{2n} l_{j,r} W_r = b_j \quad (j=1, 2, \dots, 2n), \quad (2.13)$$

где $l_{j,r}$ и b_j элементарным образом выражаются через $L_n^{(j)}$ и $C_n^{(j)}$. Матрица системы (2.13) $\|l_{j,r}\|$ имеет квазитреугольную форму, которая при помощи элементарных преобразований приводится к треугольному виду. Такая матрица имеет обратную матрицу с элементами, выражющимися через элементы $l_{j,r}$ в явной форме, что позволяет записать решение системы (2.13) и тем самым системы (2.10) в замкнутом виде.

В частном случае $\nu=0$, т. е. в случае обычного упругого полупространства, вследствие того, что $a_n=b_n=0$, регулярные части в системе (2.3) исчезают и эта система в коэффициентах U_n, V_n допускает следующее простое замкнутое решение:

$$\begin{aligned} U_n &= -\vartheta_1^0 a_0 - \vartheta_1^0 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k-1} + a_{k+1}) - 2\vartheta_2^0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k; \\ V_n &= \vartheta_1^0 a_0 + \vartheta_1^0 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_{k-1}) \quad (a_{-1}=0; \quad n=1, 2, \dots); \\ U_0 &= -\vartheta_1^0 a_0, \quad V_0 = \vartheta_1^0 a_0; \\ \vartheta_1^0 &= \sigma^2/16(1-\sigma); \quad \vartheta_2^0 = \sigma(2-\sigma)/16(1-\sigma), \quad a_n = \nu (f_n^+ - f_n^-) 2\sqrt{2} E_0 / \sigma(1+\sigma). \end{aligned}$$

В заключение отметим, что на основании результатов из ⁽⁹⁾ можно найти смещения в области Π/ν .

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ուղիղ գծով բաժանվող սահմանային պայմաններով անհամասեռ կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի լուծման մասին

Հստ խորության աստիճանային օրենքով փոփոխվող առածգականության մոդուլ ունեցող կիսատարածության համար դիտարկվում է խառը եզրային խնդր, երբ վերջինիս եզրային մակերեսույթի մի տիրույթում՝ կիսահարթության տեսքով տրված ևն հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխությունների բաղադրիչները, իսկ մնացած մասի վրա շոշափող լարումների բաղադրիչները հավասար ևն զրոյի. ընդ որում լարումների նորմալ բաղադրիչը ամենուրեք այդ մակերեսույթի վրա հավասար է զրոյի. Չերիշե-կագերի բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ խնդիրը նկարագրող ինտեգրալ հավասարումների համակարգը բերվում է գծային վերջավոր տարրերությունների հավասարումների համակարգի, որը թույլատրում է փակ լուծում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Развитие теории контактных задач в СССР. Наука. М., 1976. ² Г. Я. Попов. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа. Киев—Одесса, 1982. ³ Г. Я. Попов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. ⁴ В. Л. Рвачев, В. С. Проценко, Контактные задачи теории упругости для неклассических областей, Наукова думка. Киев, 1977. ⁵ Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Л., 1968. ⁶ С. М. Мхитарян, С. З. Петросян, ДАН Арм ССР, т. 82, № 1, с. 28—32 (1986). ⁷ А. А. Самарский, Е. С. Николаев, Методы решения сеточных уравнений, Наука, М., 1978. ⁸ Г. Бейтмен, А. Эрдеи, Высшие трансцендентные функции. т. 2, Наука, М., 1974. ⁹ С. М. Мхитарян, Изв. АН СССР. МТТ, № 1, 1983.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ф. Минасян, В. С. Тоноян

Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 4/IV 1988)

Смешанные задачи для составной плоскости и полуплоскости с трещиной и первая основная задача составной полуплоскости рассмотрены в работах (1-4).

В настоящей работе рассмотрена плоская задача для упругой неоднородной полуплоскости, разрезанной вдоль линии раздела материалов, начиная от горизонтальной границы.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости. Разрез имеет конечную длину. На границе полуплоскости и по краям разреза заданы векторы напряжения. Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадранта и $\Phi_2(x, y)$ в области левого квадранта. Ищем функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) в виде суммы двух интегралов Фурье

$$\Phi_i(x, y) = \int_0^{\alpha} [A_i(\alpha) + (-1)^{i+1} \alpha x B_i(\alpha)] \exp[(-1)^i \alpha x] \cos(\alpha y) d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\alpha} [C_i(\beta) + \beta y D_i(\beta)] \exp[-\beta y] \cos(\beta x) d\beta \quad (1)$$

при $i=1$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, а при $i=2$, $-\infty < x < 0$, $0 < y < \infty$. Здесь $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ ($i=1, 2$) неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий полного контакта двух материалов вне разреза. Граничные условия и условия полного контакта двух материалов вне разреза рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = f_1(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = f_2(x), \quad 0 < x < \infty;$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = f_3(x), \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f_4(x), \quad -\infty < x < 0; \quad (2)$$

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = \varphi(y), \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0, \quad 0 < y < a;$$

$$U_1(0, y) = -U_2(0, y), \quad V_1(0, y) = V_2(0, y), \quad a < y < \infty; \quad (3)$$

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y), \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y), \quad a < y < \infty.$$

Используя обычные формулы для напряжения и перемещения, выраженные через бигармоническую функцию $\Phi_i(x, y)$ (3), удовлетворяя условиям (2) и (3) и используя формулы обращения преобразования Фурье, получаем:

$$\beta C_1(\beta) = -\frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty f_1(x) \cos(\beta x) dx + \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_1(x)}{x^2 + \beta^2} dz - \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2) dx}{(x^2 + \beta^2)^2}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta D_1(\beta) = & \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty f_1(x) \cos(\beta x) dx + \\ & + \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_1(x) dx}{x^2 + \beta^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2)}{(x^2 + \beta^2)^2} dz; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta C_2(\beta) = & -\frac{2}{\pi \beta} \int_{-\infty}^0 f_3(x) \sin(\beta x) dx + \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_2(x) dx}{x^2 + \beta^2} - \\ & - \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty x^3 B_2(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2) dx}{(x^2 + \beta^2)^2}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta D_2(\beta) = & -\frac{2}{\pi \beta} \int_{-\infty}^0 f_4(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta} \int_{-\infty}^0 f_3(x) \sin(\beta x) dx - \\ & - \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty x^3 A_1(x) \frac{x^2 + 5\beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} dx + \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{x^2 + 3\beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} dx + \\ & + \frac{16}{\pi^2} \beta \int_0^\infty \gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 + \gamma^2)^2} - \frac{16}{\pi^2} \beta \int_0^\infty \gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 + \gamma^2)^2} - \\ & - \frac{8}{\pi^2} \beta \int_0^\infty f_2(x) dx \int_0^\infty \frac{ae^{-ax} dx}{(a^2 + \beta^2)^2} + \frac{8}{\pi^2} \beta \int_0^\infty f_4(x) dx \int_0^\infty \frac{ae^{-ax} dx}{(a^2 + \beta^2)^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a^2 A_2(a) = & a^2 A_1(a) - \frac{4}{\pi} a^2 \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} + \frac{4a^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(x) e^{-ax} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_4(x) e^{-ax} dx; \end{aligned} \quad (8)$$

$$a^2 B_2(a) = 2a^2 A_1(a) - a^2 B_1(a) - \frac{4a^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} +$$

$$+ \frac{4\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(x) e^{-\alpha x} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_4(x) e^{-\alpha x} dx \quad (9)$$

и системы парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty [A_1^*(\alpha)l_1 + B_1^*(\alpha)l_2 - E_1^*(\alpha)] \cos(\alpha y) d\alpha = 0, \quad a < y < \infty; \quad (10)$$

$$\int_0^\infty [A_1^*(\alpha)l_1 - B_1^*(\alpha)l_2 - E_2^*(\alpha)] \sin(\alpha y) d\alpha = 0, \quad a < y < \infty;$$

$$\int_0^\alpha \alpha A_1^*(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha = f(y), \quad 0 < y < a; \quad (11)$$

$$\int_0^\alpha \alpha [A_1^*(\alpha) - B_1^*(\alpha)] \sin(\alpha y) d\alpha = 0, \quad 0 < y < a;$$

где

$$l_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}; \quad l_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2};$$

$$l_3 = \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2}; \quad l_4 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}; \quad \alpha A_1(\alpha) = A_1^*(\alpha);$$

$$\alpha A_2(\alpha) = A_2^*(\alpha); \quad \alpha B_1(\alpha) = B_1^*(\alpha); \quad \alpha B_2(\alpha) = B_2^*(\alpha);$$

$$f(y) = -\varphi(y) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{xf_2(x) dx}{x^2 + y^2} + \int_0^\infty \gamma^2 (\gamma y - 1) D_1(\gamma) e^{-\gamma y} d\gamma;$$

$$\alpha E_1^*(\alpha) = \frac{8\alpha^2}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} - \frac{8\alpha^2}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} -$$

$$- \frac{4}{\pi E_2} \int_0^\infty f_2(x) e^{-\alpha x} dx + \frac{4}{\pi E_2} \int_0^\infty f_4(x) e^{-\alpha x} dx;$$

$$\alpha E_2^*(\alpha) = \frac{4\alpha^2}{\pi E_2} \int_0^\infty \gamma D_2(\gamma) \frac{(\alpha^2 + 3\gamma^2) d\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} - \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \gamma D_1(\gamma) \left[\frac{2}{E_1} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \gamma^2} + \right.$$

$$+ \frac{2l_4\gamma^2}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} \left. \right] d\gamma - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(x) e^{-\alpha x} dx + \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2 - 1}{E_2} \int_0^\infty f_2(x) e^{-\alpha x} dx -$$

$$- \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2 - 1}{E_2} \int_0^\infty f_4(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Для решения системы (10) и (11) введем новые неизвестные $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ следующим образом:

$$A_1^*(a)l_1 + B_1^*(a)l_2 - E_1^*(a) = \int_0^a \Phi(t) J_0(at) dt; \quad (12)$$

$$A_1^*(a)l_1 - B_1^*(a)l_2 - E_2^*(a) = \int_0^a \Psi(t) J_1(at) dt.$$

Подстановка (12) дает возможность тождественно удовлетворить уравнениям (10). Для удовлетворения уравнениям (11) преобразуем правые части уравнений (12) следующим образом. Заменяя функции $J_0(at)$ и $J_1(at)$ на $\cos(at)$ и $\sin(at)$ с помощью интегрального представления Пуассона, меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям полученные выражения, учитывая при этом, что $H'(a) = 0$; $S'(a) = 0$; $S(0) = 0$, затем решая систему уравнений (12) относительно $aA_1^*(a)$ и $aB_1^*(a)$, подставляя найденное значение $aA_1^*(a)$ и $aB_1^*(a)$ в уравнение (11), продолжая при этом функции $H'(r)$ и $S'(r)$ на интервале $(-a, 0)$ соответственно нечетным и четным образом, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$S'(y) - \frac{l_3}{\pi l_2} \int_{-a}^a \frac{H'(r)}{r-y} dr = \Psi_1(y); \quad (13)$$

$$H'(y) + \frac{l^3}{\pi l_2} \int_{-a}^a \frac{S'(r)}{r-y} dr = \Psi_2(y),$$

где

$$H'(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad S'(r) = \frac{2}{\pi} r \int_r^a \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (14)$$

Умножая второе уравнение системы (13) на i и складывая с первым уравнением, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\chi(y) + \frac{i}{\pi} \cdot \frac{l_2}{l_1} \int_{-a}^a \frac{\chi(r) dr}{r-y} = \Psi(y), \quad (15)$$

где введены обозначения

$$S(y) + iH'(y) = \chi(y); \quad \Psi_1(y) + i\Psi_2(y) = \Psi(y). \quad (16)$$

Такое уравнение рассматривалось в работах (3, 6). Используя результаты работы (6), получаем:

$$\chi(y) = \frac{\Psi(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu \pi i (y+a)^{1-m} (y-a)^m} \int_{-a}^a \frac{(r+a)^{1-m} (r-a)^m}{r-y} \Psi(r) dr +$$

$$+ \frac{C}{(y+a)^{1-m}(y-a)^m}; \quad (17)$$

$$m = \frac{1}{2} - i\delta; \quad k = \frac{(1+\nu_1)E_2 + (3-\nu_2)E_1}{(3-\nu_1)E_2 + (1+\nu_2)E_1}; \quad (18)$$

$$\mu = 1 - l_3^2/l_2^2; \quad \delta = \ln k / 2\pi;$$

$$\Psi_1(y) = \int_0^\infty \gamma D_1(\gamma) W_1(\gamma y) d\gamma + \int_0^\infty \gamma D_2(\gamma) W_2(\gamma y) d\gamma + \omega_1(y);$$

$$\Psi_2(y) = \int_0^\infty \gamma D_1(\gamma) W_3(\gamma y) d\gamma - \int_0^\infty \gamma D_1(\gamma) W_4(\gamma y) d\gamma + \omega_2(y);$$

$$W_1(\gamma y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_1(l_2 + l_3)(\gamma y - 1)}{l_2} + \left[\frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} \gamma(1 - \gamma y) - \frac{2}{\pi E_1} + \frac{2}{\pi} y l_4(1 - \gamma y) \right] e^{-\gamma y};$$

$$W_3(\gamma y) = \left[\frac{4}{\pi E_2} y \gamma^2 - \frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_3}{l_1} \gamma(1 - \gamma y) \right] e^{-\gamma y}; \quad (19)$$

$$\omega_1(y) = \left(\frac{8}{\pi^2} \frac{\nu_1 - 1}{E_2} \frac{l_2}{l_3} - \frac{8}{\pi^2 E_2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{l_3}{l_2} \right) y \int_0^\infty \frac{f_3(x)}{x^2 + y^2} dx + \left(\frac{8}{\pi^2 E_2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{\nu_2 - 1}{E_2} \right) y \int_0^\infty \frac{f_4(-x)}{x^2 + y^2} dx;$$

$$W_4(\gamma y) = \frac{4}{\pi} \frac{l_3}{l_2 E_1} e^{-\gamma y} - \frac{2}{\pi} \frac{l_3}{l_2} \gamma e^{-\gamma y} l_4 + \frac{4}{\pi E_2} y \gamma e^{-\gamma y};$$

$$W_3(\gamma y) = \frac{4}{\pi E_2} \gamma y e^{-\gamma y} + \frac{2}{\pi} \frac{l_3}{l_2 E_2} (2 + 3y - 4\gamma y) e^{-\gamma y}.$$

Подставляя значения функций $A_1^*(\alpha)$, $B_1^*(\alpha)$ из (12) в (5) и (7), учитывая при этом (19) для определения $G_1(\beta) = \beta D_1(\beta)$; $G_2(\beta) = \beta D_2(\beta)$, получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований примет вид:

$$G_1(\beta) = \Omega_1(\beta) + \int_0^\infty G_1(\gamma) K_1(\gamma; \beta) d\gamma + \int_0^\infty G_2(\gamma) K_2(\gamma; \beta) d\gamma; \quad (20)$$

$$G_2(\beta) = \Omega_2(\beta) + \int_0^\infty G_1(\gamma) K_3(\gamma; \beta) d\gamma + \int_0^\infty G_2(\gamma) K_4(\gamma; \beta) d\gamma,$$

где $K_l(\gamma; \beta)$ — функции, выраженные через $W_l(\gamma, y)$ ($l = 1, 2, 3, 4$), а $\Omega_j(\beta)$ — выраженные через функции $\omega_j(y)$ ($j = 1, 2$) и $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$).

Для решения системы уравнений (20) сперва покажем, что

$$\int_0^\infty |K_1(\gamma, \beta)| d\gamma + \int_0^\infty |K_2(\gamma, \beta)| d\gamma < 1 \quad (21)$$

$$\int_0^\infty |K_3(\gamma, \beta)| d\gamma + \int_0^\infty |K_4(\gamma, \beta)| d\gamma < 1$$

Действительно, каждое ядро $K_i(\gamma, \beta)$ ($i=1, 2, 3, 4$) имеет вид, аналогичный приведенному в работе (3). Используя результаты оценок, приведенных в работе (3), доказывается, что неравенства (21) имеют место. Решая систему интегральных уравнений (20) методом последовательных приближений, получим выражения функций $G_1(\beta)$ и $G_2(\beta)$. Далее по формулам (19), (14), (12), (8), (9), (4), (6) последовательно можно определить все искомые функции, а следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Напряжения $\sigma_x^{(1)}(x, 0)$ и $\sigma_x^{(2)}(x, 0)$ вне разреза на линии $x=0$ выражаются через функции $G_1(\gamma)$ и $G_2(\gamma)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = & -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_2 C}{l_1(l_2 + l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \cos \delta \ln \frac{y+a}{y-a} + \\ & + \int_0^\infty G_1(\gamma) \left\{ \left| \frac{2}{E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \gamma(1 - \gamma y) - \frac{2}{E_1} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2 + l_3)} y + \frac{2l_2 l_3}{l_1(l_2 + l_3)} (1 - \gamma y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma(\gamma y - 1) \right| e^{-\gamma y} - \frac{\pi}{2} \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \cdot \frac{W_1(\gamma y)}{\mu} + \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2 + l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \times \right. \\ & \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| W_1(\gamma r) \sin \delta \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} - W_3(\gamma r) \cos \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} \right| \right\} d\gamma + \\ & + \int_0^\infty G_2(y) \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{l_2}{l_1(l_2 + l_3)} \cdot \frac{W_2(\gamma y)}{\mu} - \frac{l_2}{2\mu l_1(l_2 + l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \times \right. \\ & \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| W_2(\gamma r) \sin \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \cdot \frac{y-a}{y+a} + W_4(\gamma r) \cos \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} \right| dr - \\ & - \left| \frac{2}{E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \gamma(1 - \gamma y) + \frac{l_2 \gamma}{E_2 l_1(l_2 + l_3)} (1 - \gamma - 3\gamma v) \right| e^{-\gamma y} \right\} d\gamma + \\ & + \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \int_0^a \frac{r H'(r)}{r^2 - y^2} dr - \frac{\pi}{2} \frac{l_2 w_1(y)}{\mu l_1(l_2 + l_3)} + \frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \int_0^\infty \frac{xf_2(x)}{x^2 + y^2} dx - \\ & - \frac{4}{\pi E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2 + l_3)} \int_0^\infty \frac{xf_4(x) dx}{x^2 + y^2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2 + l_3)} \int_0^\infty \frac{xf_3(x) dx}{x^2 + y^2} - \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_1}{l_1(l_1 + l_2)} \frac{v_1 - 1}{E_2} \int_0^{\infty} \frac{xf_1(x)dx}{x^2 + y^2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_2(v_2 - 1)}{E_1l_1(l_1 + l_2)} \int_0^{\infty} \frac{xf_2(x)dx}{x^2 + y^2}, \quad (22)$$

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Л. Յ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ա. ՏՈՆՈՅԱՆ

Ուղղանայաց վերշավոր նեղինվ տնհամասեռ կիսահարության համար
մի խնդրի մասին

Ներկա աշխատանքում դիտարկված է, որիզոնական եզրից սկսած նյութերի բաժանման գծի երկայնքով ճեղքված, անհամասեռ առաձգական կիսահարթության համար հարթ խնդիրը: Կիսահարթությունը կազմված է տարրեր առաձգական հատկություններով երկու համասեռ և իզոտրոպ քառորդ հարթություններից, որոնց նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին: Ճեղքը ունի վերջավոր երկարություն: Կիսահարթության եզրագծի և ճեղքի եզրի վրա տրված են լարումների վեկտորը: Խնդիրը լուծված է ֆուրյեի մեթոդով: Խստեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը սկզբում բերվել է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որն էլ իր հերթին բերվել է Ֆրեդհոլմի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Ապացուցված է այդ համակարգի լուծելիությունը: Ստացված են բանաձեռ կոնտակտային նորմալ լարումների որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Հ. Ե. Աշբայչ, Պրկլ. մեխаниկա (Տր. ամեր. օ-վա մեխանիկով), տ. 40, № 2, ս. 312—314 (1973). ² Դ. Վ. Բօջի, Պրկլ. մեխаниկա (Տր. ամեր. օ-վա մեխանիկով), տ. 35, № 3, ս. 29—37 (1968). ³ Ա. Փ. Մինասյան, Վ. Ս. Տոնօյան, Իշխ. ԱՆ ԱրմՀՀ, Մեխаниկա, տ. 33, № 6, ս. 18—42 (1980). ⁴ Վ. Ս. Տոնօյան, Ս. Ա. Մելքոնյան, Իշխ. ԱՆ Արմ. ՀՀ, Մեխаниկա, տ. 25, № 3, ս. 3—17 (1972). ⁵ Ս. Պ. Տիմոշենկո, Տեօրիա սուրյուտի, ՕНՏԻ, Մ., 1937. ⁶ Ս. Ի. Միխլին, Ինտեգրալ սուրյուտի, Գոտեխիզդատ, Մ.—Լ., 1949.

УДК 593.12.14

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. А. Джрабашян

Сохранение полного момента при атомных и ядерных переходах с испусканием фотона

(Представлено 15/II 1988)

Трудности в понимании полных угловых моментов, испытываемые традиционной теорией, особенно наглядно проявляются при рассмотрении переходов между вращательными уровнями в четно-четных ядрах. Энергетические спектры большого числа таких ядер содержат уровни с $I^2 = 0+, 2+, 4+, \dots$ (1). Например, при возбуждении ядер $^{72}\text{Ni}^{180}$ нейtronами наблюдалась (2) схематическая картина, изображенная на рисунке. Энергии возбужденных уровней ядра найдены измерением энергий фотонов, испускаемых при девозбуждении ядра, а для определения квантовых чисел квадрата момента измерялись также угловые корреляции фотонов. В качестве γ -спектрометра и детектора при определении направления фотона использовался кристалл NaI .

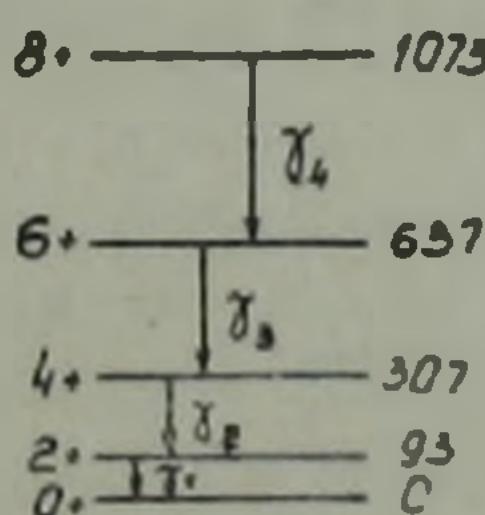


Схема вращательных уровней ядра $^{72}\text{Ni}^{180}$. Слева приведены квантовые числа квадрата момента и четность, справа—энергии в кэВ

Из схемы следует, что эти уровни являются вращательными, т. е. описываются формулой.

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1), \quad (1)$$

где J —момент инерции ядра, одинаковый для всех уровней.

Эксперимент

$E_{\gamma_1} : E_{\gamma_2} \approx 2.30$

$E_{\gamma_2} : E_{\gamma_3} \approx 1.54$

$E_{\gamma_3} : E_{\gamma_4} \approx 1.34$

Теория

$7 : 3 \approx 2.33$

$11 : 7 \approx 1.57$

$15 : 11 \approx 1.36$

Поскольку энергии и углы, определяющие направления испускаемых фотонов, измерены, свободные фотоны имеют определенный импульс k . Они описываются компонентами вектора-потенциала, которые

являются собственной функцией оператора импульса. Определенным моментом обладают циклические компоненты

$$A_q = e_q c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V_v}} e^{i\mathbf{k}r/\hbar} \quad (q=0, \pm 1), \quad (2)$$

где

$$e_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x \pm ie_y), \quad e_0 = e_z \quad (3)$$

— компоненты вектора поляризации.

По определению (14) оператора спина фотона \hat{s}^Φ , обуславливающего оператор поворота компонентов поляризации, имеет место

$$\hat{s}^\Phi e_q = \hbar \sqrt{2} \langle 1q, 1s | 1q + s \rangle e_{q+s}, \quad (s=0, \pm 1). \quad (4)$$

Т. е. оператор \hat{s}^Φ удовлетворяет теореме Вигнера-Эккарта для спинов, с квантовым числом квадрата, равным единице. При этом в качестве спиновых функций выступают циклические компоненты поляризации e_q .

Мы уже установили (5), что плоская волна удовлетворяет соотношению

$$(\hat{L}_z^r + \hat{L}_z^k) e^{i\mathbf{k}r/\hbar} = 0 \quad (s=0, \pm 1), \quad (6)$$

где орбитальные операторы

$$\hat{L}' = -i\hbar[r \nabla_r] \quad (6a)$$

и

$$\hat{L}^k = -i\hbar[k \nabla_k] \quad (7)$$

связаны с вращением компонентов радиус-вектора r и импульса k , соответственно. Принимая во внимание также (4) и вводя оператор полного момента свободного фотона

$$\hat{J}^\Phi = \hat{L}' + \hat{L}^k + \hat{s}^\Phi, \quad (8)$$

получаем

$$\hat{J}^\Phi A_q = \hbar^2 J(J+1) A_q, \quad (9)$$

$$\hat{J}_z^\Phi A_q = \hbar q A_q. \quad (10)$$

Здесь квантовое число квадрата полного момента $J=s_\Phi=1$. Таким образом вектор-потенциал, описывающий фотон, удовлетворяет уравнениям того же вида, что и волновая функция свободного электрона (5-7) или электрона в центрально-симметричном поле (8), но с другими квантовыми числами полного момента.

При повороте на угол $-\varphi$ вокруг оси z компоненты вектора-потенциала в новой системе A'_q получатся от исходных A_q с помощью оператора поворота \hat{R}_z^Φ

$$A'_q = \hat{R}_z^\Phi A_q = e^{i\varphi J_z^\Phi \hbar} A_q = e^{i\varphi q} A_q. \quad (11)$$

Мы пришли к заключению, что свободные вдали от ядра фотоны с измеренными, т. е. определенными, импульсами, не могут иметь квантового числа квадрата момента, отличного от единицы. Этот факт никем не оспаривается. Никем не оспаривается также утверждение, что при ядерных и атомных переходах должен иметь место закон сохранения момента количества движения.

нения момента. В частности, квантовое число L квадрата момента, уносимого, по выражению Ферми ⁽⁹⁾, фотоном, должно удовлетворять соотношению

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f. \quad (12)$$

Поскольку, согласно сказанному выше, принимается, что для фотонов с измеренными импульсами $L=1$, а из упомянутого эксперимента с H_f^{180} следует, что $|I_i - I_f| = 2$, то соотношение (12), вытекающее из закона сохранения, не удовлетворяется. Установлено, что упомянутые переходы являются электрическими квадрупольными. Нельзя преодолеть возникающее затруднение в рамках традиционной теории. Ссылка на то, что свободные фотонны могут находиться как в состояниях с определенным импульсом и поляризацией, так и состояниях с определенным моментом (отличным от единицы) и четностью, не выдерживает критики. Состояния этих двух типов взаимоисключающие. Свободные частицы в состояниях с определенным моментом в традиционном понимании никем еще не обнаружены. Наблюдение свободных частиц с произвольным определенным импульсом исключает эти состояния также для фотонов.

Таким образом возникает дилемма. Либо мы должны принять, что не существует закона сохранения момента при излучениях, либо существует недопонимание в вопросе о том, что такое угловой момент.

Ранее мы обратили внимание на то, что такое недопонимание существует в традиционной теории при определении полного момента частицы в центрально-симметричном поле ⁽⁸⁾ и свободной частицы ⁽⁶⁻⁷⁾. Была предложена возможность преодоления затруднений. Под физическими величинами в квантовой механике понимают собственные значения операторов, действующих на волновые функции. Сохранение квадрата и проекции полного момента как собственных значений операторов, полученных из вращательной симметрии пространства, имеет место как для частиц в центрально-симметричном поле, так и для свободных частиц. Это позволяет ожидать, что при использовании указанных правильных операторов величины квадрата и проекции полного момента будут сохраняться также при атомных и ядерных переходах.

Волновая функция Ψ системы, состоящей из атома или ядра, взаимодействующего с излучением, дается решением волнового уравнения ⁽¹⁰⁾

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + H_{int} + H_{rad})\Psi, \quad (13)$$

где H_0 — гамильтониан атома или ядра, H_{int} — гамильтониан поля излучения в формализме вторичного квантования

$$H_0 \Psi_{EJM} = E \Psi_{EJM}, \quad H_{int} \Phi(N_{kq}) = \sum_{k'q'} c_{k'q'}^* c_{kq} \hbar \nu' \Phi(N_{kq}) = N_{kq} \hbar \nu \Phi(N_{kq}).$$

Гамильтониан взаимодействия атома или ядра с полем излучения H_{int} имеет отличные от нуля матричные элементы, если числа фотонов в начальном и конечном состояниях отличаются на единицу.

В нашем случае, когда рассматривается лишь переход $i-j$ (не

рассматриваются последовательные переходы), Вайскопфом и Вигнером показано (10–12), что решением (13) является

$$\Psi = b_i \Psi_{E_i J_i M_i} \Phi(0_{\alpha i}) + \sum_{M_j \neq M_i} b_j \langle E_j J_j M_j, 1_{\alpha i} | H_{\alpha i} | E_i J_i M_i, 0_{\alpha i} \rangle \Psi_{E_j J_j M_j} \Phi(1_{\alpha i}). \quad (14)$$

Здесь

$$b_i = e^{-(\Gamma_i/2 + iE_i/\hbar)t}, \quad b_j = \frac{1}{E_i - E_j - \hbar\nu - i\hbar\Gamma_i/2} [e^{-(\Gamma_i/2 + iE_i/\hbar)t} - e^{-(iE_j + \hbar\nu)t/\hbar}].$$

При строгом рассмотрении атомных переходов в качестве оператора энергии взаимодействия следует пользоваться выражением, вытекающим из уравнения Дирака

$$H_{\alpha i} = -ie\gamma_i(\gamma A + \gamma_4 A_4) = -ie\gamma_i \left[\sum_{q=0, \pm 1} (-1)^q \gamma_{-q} A_q + \gamma_4 A_4 \right], \quad (15)$$

где λ —компонент оператора четырехмерного потенциала в формализме вторичного квантования

$$A_i = c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_k \frac{1}{V_k} (c_{ki} e^{ikr/\hbar} + c_{ki}^* e^{-ikr/\hbar}) e_k \quad (16)$$

При $i = 0, \pm 1$ компоненты поляризации e_k совпадают с e_q формулы (2). $e_i = l$.

Используя уравнение Дирака и условие Лоренца, вклад компоненты $\lambda = 4$ в волновой функции (14) можно выразить через остальные компоненты. Это приводит к замене $H_{\alpha i}$ на $H_{\alpha i}$ и вероятности испускания лишь поперечно поляризованных фотонов.

Рассмотрение излучения по своему характеру задача нерелятивистская. В этом приближении из уравнения Дирака получается, что биспиноры $\Psi_{E J M}$ заменяются на спиноры $\Phi_{E J M}$, а матричный элемент $\langle E_j J_j M_j, 1_{\alpha i} | H_{\alpha i} | E_i J_i M_i, 0_{\alpha i} \rangle$ —на матричный элемент, следующий из уравнения Паули, т. е. на выражение, являющееся частным случаем предыдущего в нерелятивистском смысле. Однако если в нем величины, касающиеся электрона (волновую функцию, массу, заряд, магнитный момент), заменить соответствующими величинами, согласно уравнению Паули, оно будет применимо для произвольной частицы с конечной массой. Согласно Ферми (9), этот матричный элемент может быть использован также при рассмотрении ядерных переходов.

Покажем, что применение упомянутых выше правильных операторов момента позволяет доказать сохранение полного момента при атомных и ядерных переходах.

Этот закон заключается в том, что волновая функция системы (14), кроме волнового уравнения (13), удовлетворяет также уравнениям

$$\hat{J}_{\text{сист}}^2 \Psi = \hbar^2 j_i(j_i + 1) \Psi, \quad \hat{J}_z \Psi = \hbar M_i \Psi, \quad (17)$$

где оператор полного момента системы

$$\hat{J}_{\text{сист}} = \sum_{\sigma=0, \pm 1} (-1)^{\sigma} \xi_{-\sigma} \hat{J}_{\sigma}^{\text{сист}}, \quad (18)$$

$$\hat{J}_z^{\text{сист}} = \hat{L}'_z + \hat{S}_z + \sum_{k'q'} c_{k'q'}^+ c_{k'q'} L_z^k + \sum_{k'q'} c_{k'q'}^+ c_{k'q'} \hat{S}_z^{\Phi}.$$

Здесь \hat{e}_{\pm} —циклические единичные векторы $\hat{e}_{\pm} = \pm(\hat{i} \pm \hat{j})/\sqrt{2}$, $\hat{e}_0 = \hat{k}$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ —единичные векторы, направленные вдоль осей координат.

Выражение (18) фактически представляет собой сумму соответствующих выражений связанных электрона, для которого \hat{L}' не дает вклада (6), (или ядра) и фотонов. Оператор \hat{L}' не повторяется, по principle того, что имеет дифференциальный характер и что электрон (ядро) и фотон взаимодействуют в одинаковых точках r . Справедливость уравнений (17) для первого члена волновой функции системы (14) очевидна. Оператор (18) не действует на коэффициенты b_i и b_f . $|b_i|^2$ равняется вероятности остаться в начальном состоянии системы в промежутке времени $[0; t]$. Вторая часть волновой функции (14) описывает переход системы с начального состояния в конечные с испусканием фотона. Квадрат модуля коэффициента при $\psi_{E_f J_f M_f} \Phi(1_{kq})$ равен вероятности перехода в данное конечное состояние в том же промежутке времени $[0; t]$. Используя (15) и (16) для части волновой функции, относящейся к переходу, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{M_f q k} b_f \langle E_f J_f M_f, 1_{kq} | H_m | E_f J_f M_f, 0_{kq} \rangle \psi_{E_f J_f M_f} \Phi(1_{kq}) = \\ & = \sum_{LM} b_f F(L) \sum_{M_f M_q q} \langle j_f M_f, LM | j_f M_f \rangle \psi_{E_f J_f M_f} \langle LM, s^{\Phi} q | LM \rangle Y_{lm}(\theta_k \varphi_k) e_q \Phi(1_{kq}). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь функция $F(L)$ выражается через произведения 9-, 6-, 3-й символов Вигнера и радиальных интегралов. Не приведя конкретного вида этой функции, отметим лишь, что благодаря ее свойству выражение (19) представляется как сумма двух членов, соответствующих электрическому и магнитному переходам. Выражение под знаком второй суммы является двойным рядом Клебша—Гордана. Таким же образом представляется выражение, полученное из уравнения Паули. Оно имеет более простой вид

$$\begin{aligned} & \sum_{M_f q k} b_f \langle E_f J_f M_f, 1_{kq} | H_m | E_f J_f M_f, 0_{kq} \rangle \psi_{E_f J_f M_f} \Phi(1_{kq}) = \\ & = -2\pi c \sum_{Lk} b_f \sqrt{\frac{2\hbar}{V_s}} (-i)^L \left(\frac{s}{c}\right)^L \sqrt{\frac{L+1}{L(2L+1)}} \frac{1}{(2L+1)!!} \sum_{\lambda=0,1} \langle I_f | Q_L^{(\lambda)} | I_f \rangle \times \\ & \times \sum_{M_f M} \langle I_f M_f, LM | I_f M_f \rangle \psi_{E_f J_f M_f} Y_{LM}^{(\lambda)}(\theta_k, \varphi_k). \end{aligned} \quad (20)$$

где $\langle I_f | Q_L^{(\lambda)} | I_f \rangle$ —приведенный матричный элемент 2^L -польного электрического (при $\lambda=1$) и магнитного (при $\lambda=0$) момента, а $Y_{LM}^{(\lambda)}(\theta_k, \varphi_k)$ —соответствующая векторная шаровая функция с компонентом вектора $e_q \Phi(1_{kq})$. Из (20) следуют как известные вероятности для указанных переходов (4), так и вероятность смешанного перехода.

Воздействуя оператором $\hat{J}_z^{\text{сист}}$ на выражение (19), учитывая уравнения

$$\hat{S}_z^{\Phi} e_q = \hbar q e_q, \hat{L}_z^k Y_{lm}(\theta_k \varphi_k) = \hbar m Y_{lm}(\theta_k \varphi_k), (\hat{L}_z^k + \hat{S}_z) \psi_{E_f J_f M_f} = \hbar M_f \psi_{E_f J_f M_f} \quad (21)$$

и свойства коэффициентов векторного сложения, получаем то же выражение (19), умноженное на $\hbar M_l$, т. е. второе из уравнений (17) имеет место. Притом

$$\hbar M_l = \hbar(M_l + M), \text{ где } \hbar M = \hbar(m + q). \quad (22)$$

Если вместо оператора $J_z^{\text{сист}}$ воздействовать общим циклическим компонентом $J_z^{\text{сист}}$ ($\sigma = 0, \pm 1$), получим выражения, частными случаями которых (при $\sigma = 0$) являются (22). Согласно теории углового момента (13) эти выражения можно представить в векторном виде

$$\mathbf{j}_l = \mathbf{j}_l + \mathbf{L}, \text{ где } \mathbf{L} = \mathbf{l} + \mathbf{s}^{\Phi}. \quad (23)$$

Из упомянутых выражений получается также первое из уравнений (17). Таким образом ясно, что закон сохранения полного момента имеет место благодаря тому, что оператор (18) содержит как оператор L^r , действующий на углы θ, φ , радиус-вектора, так и оператор L^k , действующий на углы θ_k, φ_k импульса фотона.

В векторных равенствах (23) L -момент, который теряет атом или ядро при испускании фотона. Часть этого момента s^{Φ} расходуется на спин фотона, а другая часть l -на создание анизотропии в распределении излучения. Последняя возникает благодаря взаимодействию фотона со связанным электроном или ядром, вследствие чего излучение может быть недипольным. Т. е. квантовое число L , удовлетворяющее равенству

$$(L^k + s^{\Phi})^2 Y_{lm} = \hbar^2 L(L+1) Y_{lm}, \text{ где } Y_{lm} = \\ = \sum_{mq} \langle lm, s^{\Phi} q | L M \rangle Y_{lm}(\theta_k \varphi_k) e_q \Phi(l_{kq}), \quad (24)$$

может быть больше единицы. Из свойств коэффициентов векторного сложения и векторных шаровых функций, входящих в (19) и (20), следует, что L удовлетворяет соотношению (12) и не может быть меньше единицы. Т. е. объяснение результата опыта с $^{72}\text{Hf}^{180}$, приведенного вначале, состоит в том, что момент начального уровня ядра I_l расходуется на момент конечного состояния I_l , спин фотона s^{Φ} и на то, что вероятность излучения оказывается зависящей от направления испускания фотона (14). Собственной функцией проекции и квадрата этой части момента является $Y_{lm}(\theta_k \varphi_k)$. Для нее имеет место второе из уравнений (21) и

$$L^k Y_{lm}(\theta_k \varphi_k) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta_k \varphi_k). \quad (25)$$

При отсутствии оператора L^k в уравнениях (17) в суммах (19) и (20) остался бы лишь член с $l=m=0$. Это противоречит как известной теории излучения, так и многочисленным экспериментам. В частности, в эксперименте с $^{72}\text{Hf}^{180}$ переходы с наблюденными испусканиями фотонов были бы запрещены, потому что из свойств коэффи-

циентов векторного сложения следует соотношение $|l_1 - l_2| \leq l_1 + l_2$. Кроме того, из-за $Y_{00}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$ излучение всегда должно было быть изотропным, что противоречит, в частности, известному эксперименту Ву (14).

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Ереванский физический институт

Հայկական ԱՊՀ ԳԱ բղակից անդամ Վ. Հ. ԶՐՈԱՅԱՆ

Երիվ մոմենտի պահպանումը ֆոտոնի արձակմամբ ատոմային
և միջուկային անցումների ժամանակ

Ցույց է տրված, որ ազատ ֆոտոնո ունի լրիվ մոմենտ, որի քառակուսու քվանտային թիվը հավասար է 1-ի: Ատոմների և միջուկների ճառագայթման ժամանակ լրիվ մոմենտի պահպանությունը (17) ապացուցվում է միայն համակարգի օպերատորի ճիշտ ընտրության դեպքում (18): Վերջինիս համար որպես հիմք է ծառայել հեղինակի նախորդ աշխատանքներում գտնված, տարածության իզոտրոպությունից բխող մասնիկի լրիվ մոմենտի օպերատորը: Բազմաթիվ փորձերի արդյունքների բացատրությունը կայանում է նրանում, որ ֆոտոնի արձակման ժամանակ ատոմի կամ միջուկի կորցրած մոմենտի մի մասը ծախսվում է ֆոտոնի սպինի վրա, իսկ մնացածը՝ ճառագայթման բաշխման մեջ անհզուրուսիա ստեղծելու վրա:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԽԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. Бор, Б. Моттельсон, Структура атомного ядра. т. 2, Мир. М., 1977. ² J. Mihellch, G. Sharff-Goldhaber, M. McKeown, Phys. Rev., v. 91 (1954). ³ И. Роуз, Поля мультиполей, ИЛ, М., 1957. ⁴ А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969. ⁵ В. А. Джрабашян, ДАН СССР, т. 254, № 5 (1980). ⁶ В. А. Джрабашян, Изв АН АрмССР, Физика, т. 16, № 1 (1981). ⁷ В. А. Джрабашян, ДАН АрмССР, т. 80, № 3 (1985). ⁸ В. А. Джрабашян, ДАН АрмССР, т. 82, № 2 (1986). ⁹ Э. Ферми, Ядерная физика, ИЛ, М., 1951. ¹⁰ В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1966. ¹¹ V. Weisskopf, E. Wigner, Zeit f. Phys., v. 63 (1930). ¹² В. А. Джрабашян, Канд. дис. М., 1957. ¹³ А. Эдмондс, в сб.: Деформация атомных ядер, ИЛ, 1958. ¹⁴ C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward e. a., Phys. Rev., v. 105 (1957).

УДК 621.396.22.029.7

ФИЗИКА

А. В. Оганесян

Плотность вероятности тока фотоприемника при приеме излучения, прошедшего турбулентную атмосферу

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Казаряном 21/III 1988)

При исследовании высокоэффективных оптических информационных систем возникает необходимость определения статистики флюктуаций тока фотоприемника при наличии флюктуаций принимаемого излучения, а также дробовых и аддитивных тепловых шумов, сопровождающих преобразование оптического излучения в электрический сигнал. В (1) получены выражения плотности вероятности $p_0(i)$ тока i для фотоприемника, работающего в режиме ограничения тепловыми шумами. В этом случае предполагается, что коэффициент внутреннего усиления фотоприемника G достаточно мал, и поэтому дисперсия тепловых шумов i значительно превосходит дисперсию σ_D^2 дробовых шумов. При приеме относительно слабых оптических сигналов, когда возникает необходимость применения фотоприемников с достаточно большим G , условие $\sigma_D^2 \gg \sigma_i^2$ нарушается и полученные ранее выражения $p_0(i)$ неприменимы. В работе получены выражения $p_0(i)$, применимые при любых соотношениях между σ_D^2 и σ_i^2 , тем самым снимается ограничение на режим работы фотоприемника.

В атмосферных турбулентных каналах без наличия рассеивателей время когерентности τ_c прошедшего через канал амплитудно-стабилизированного излучения $\leq 10^{-3}$ с (2). При этом для высоконформативных оптических систем с шириной полосы пропускания ΔF практически всегда реализуется условие $\tau_c \gg \frac{1}{\Delta F}$ (2,3). Тогда, принимая, что при приеме амплитудно-стабилизированного излучения плотность вероятности флюктуаций тока фотоприемника описывается нормальным распределением (2,4), для временных интервалов $\Delta t < \tau_c$ плотность вероятности тока i можно представить в виде

$$p_1(i) = \frac{\exp \left[-\frac{(i - \bar{i}_c - \bar{i}_w)^2}{2(\tau_c \bar{i}_c - \bar{i}_w)} \right]}{\sqrt{2\pi(\tau_c \bar{i}_c + \bar{i}_w^2)}}, \quad (1)$$

где \bar{i}_c —среднее значение тока, обусловленного информативным излучением, \bar{i}_w —среднее значение аддитивного шумового тока, обусловленного фоновым излучением и темновым током фотоприемника, $\sigma_w^2 =$

$=(\bar{i}_w + \sigma_T^2)$ — дисперсия аддитивных шумов, $\sigma_T^2 = \frac{kT\Delta F}{R}$, T — температура, R — эквивалентное сопротивление падающей фотоприемника, k — постоянная Больцмана, $a=2e\Delta F G$, e — заряд электрона. Величина z в (1) соответствует значению нормированных к среднему флюктуаций мощности информативного излучения на входе фотоприемника. Кorrectность (1) ограничивается ошибкой аппроксимации $\epsilon(i)$ (2)

$$\epsilon(i) = \frac{1 - \operatorname{erf}(c_2, \sqrt{c_1})}{2\sqrt{2\pi(\gamma(\bar{i}_c + \bar{i}_w) + \sigma_T^2)}} \exp\left(-\frac{\bar{i}_c + \bar{i}_w}{2a} - \frac{i^2}{2\sigma_T^2} + \frac{c_1 c_2^2}{4}\right), \quad (2)$$

где

$$c_1 = \frac{a\sigma_T^2(\bar{i}_c + \bar{i}_w)}{2(a(\bar{i}_c + \bar{i}_w) + \sigma_T^2)}, \quad c_2 = \frac{i}{\sigma_T^2} + \frac{1}{a},$$

$$\operatorname{erf}(c_2, \sqrt{c_1}) = (2\sqrt{c_1/\pi}) \int_0^{c_2} \exp(-c_1 x^2) dx.$$

Численный анализ (2) показывает наличие максимума $\epsilon_{\max}(i_0)$ у $\epsilon(i)$ (i_0 — точка максимума). При этом с ростом $(\bar{i}_c + \bar{i}_w)$ $\epsilon_{\max}(i_0)$ быстро убывает. Так, при $\sigma_T^2 = 0.8 \text{ мкА}^2$, $G = 10^3$, $\Delta F = 10^6 \text{ Гц}$, $(\bar{i}_c + \bar{i}_w)$, равном 1 и 10 мкА , $\epsilon_{\max}(i_0)$ равны соответственно $\sim 1.5 \cdot 10^{-8}$ и $2.9 \cdot 10^{-50}$, что составляет $6.4 \cdot 10^{-4}$ и $2 \cdot 10^{-43}\%$ от значения $p(i_0)$, задаваемого (1) при отсутствии флюктуаций принимаемого излучения ($z=1$). Наряду с этим наблюдается увеличение $\epsilon_{\max}(i)$ с ростом G . Так, при увеличении G до 10^4 ошибка в $p(i_0)$ для $\bar{i}_c + \bar{i}_w = 1 \text{ мкА}$ составляет 14% , в то время как при $G = 10^3$ составляла $6.4 \cdot 10^{-6}\%$. Таким образом, соблюдая определенную осторожность в выборе соотношения между параметрами, входящими в (2), можно добиться требуемого уровня $\epsilon_{\max}(i)$, ограничивающего сверху величину ошибки в $p(i)$.

Для временных интервалов, больших τ_c , величина z в (1) является случайной и плотность ее для турбулентных атмосферных каналов хорошо аппроксимируется логнормальным распределением (1.5). Тогда для достаточно больших временных интервалов $\Delta t \gg \tau_c$ стационарную плотность вероятности $p_0(i)$ тока i можно представить в виде

$$p_0(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(i - z\bar{i}_c - \bar{i}_w)^2}{2(a z \bar{i}_c + \sigma_c^2)} - \frac{(\ln z + \sigma_c^2/2)^2}{2\sigma_c^2}\right)}{\sqrt{\sigma_c^2(a z \bar{i}_c + \sigma_c^2)z}} dz, \quad (3)$$

где σ_c^2 — задаваемая турбулентным каналом дисперсия $\ln z$. Переходя в (3) к интегрированию по $\ln z$ и применив метод наискорейшего спуска (1.5), для $p_0(i)$ можно получить следующее выражение:

$$p_0(i) = \frac{\exp\left(-\gamma^2/2\beta - \frac{(\ln z_0 + \sigma_c^2/2)^2}{2\sigma_c^2}\right)}{\sqrt{2\pi \left[(\alpha\gamma^2 z_0 \bar{i}_c / \beta)^2 + 2\sigma_c^2 z_0 \bar{i}_c (\beta^2 z_0 - \gamma^2 - z_0 \bar{i}_c) / 2\beta + z_0 \bar{i}_c \sigma_c^2 \left(\gamma - \bar{i}_c z_0 - \frac{\sigma_c^2}{2} \right) + \beta \right]}}, \quad (4)$$

* Соответствующая формула в (2) содержит опечатки.

где $\gamma = i - \bar{i}_c z_0 - \bar{i}_w$, $\beta = \alpha z_0 \bar{i}_c + \sigma_w^2$, а z_0 определяется из уравнения

$$\gamma z_0 \bar{i}_c / \beta + \gamma^2 \alpha z_0 \bar{i}_c / 2\beta^2 - \alpha z_0 \bar{i}_c / 2\beta - (\ln z_0 + \sigma_c^2 / 2) / \sigma_c^2 = 0. \quad (5)$$

На рис. 1 изображены кривые $p_0(i)$. По оси ординат отложены значения $p_0(i)$, по оси абсцисс — значения i в микроамперах. Для

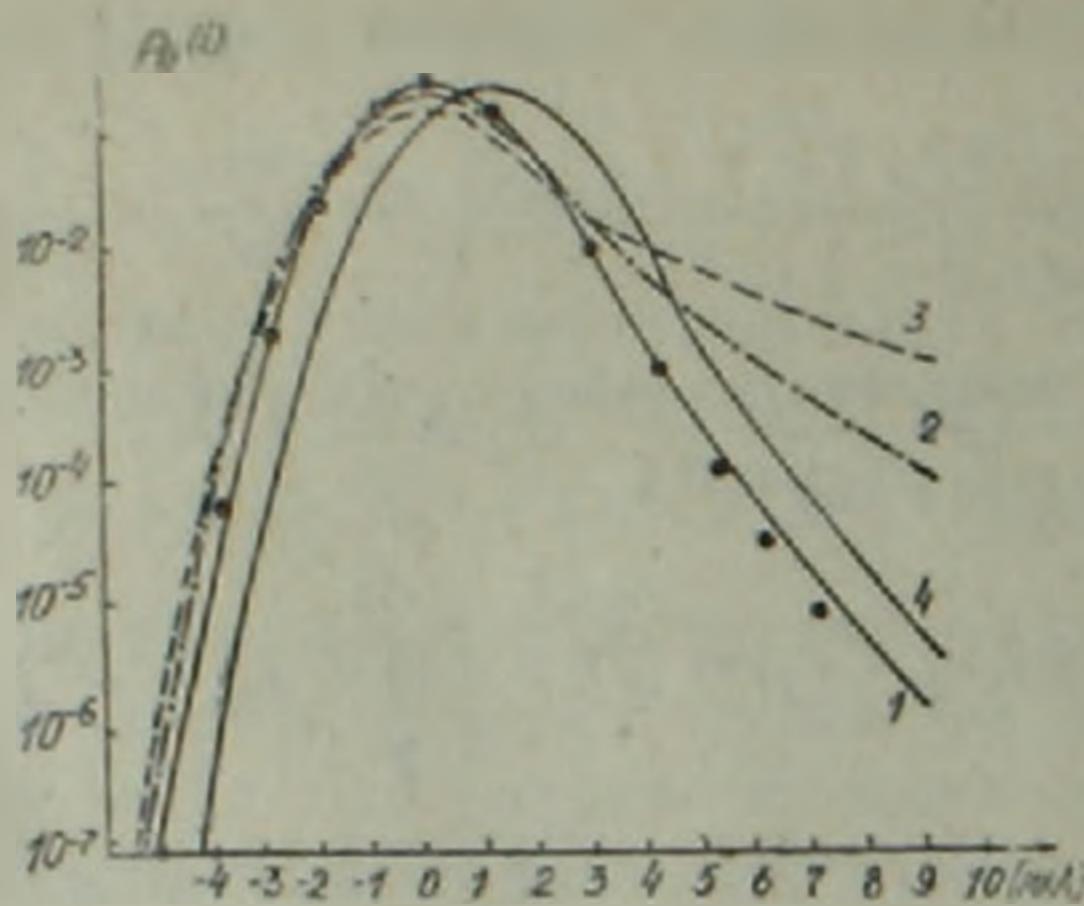


Рис. 1 Кривые плотности вероятности флюктуаций тока на выходе фотоприемника при доминировании тепловых шумов.

всех кривых $\Delta F = 10^6$ Гц, $G = 10^3$, $\bar{i}_c = 1$ мкА, $\sigma_T^2 = 0,8$ мкА². Из кривых 1, 2, 3 (σ_c^2 соответственно равно 0,25, 0,5, 1,5 и $\bar{i}_w = 0,1$ мкА) видно влияние уровня турбулентности атмосферного канала на статистику флюктуаций тока фотоприемника. Кривая 4 соответствует случаю $\bar{i}_w = 1$ мкА, $\sigma_c^2 = 0,25$. Для всех кривых $\sigma_D^2 = \alpha(\bar{i}_c + \bar{i}_w) \approx 0,032$ мкА² $< \sigma_T^2 = 0,8$ мкА². Несмотря на это, сравнение кривой 4 с 1 показывает, что даже в случае ограничения режима работы фотоприемника тепловыми шумами, когда G относительно велико, влияние дробовых шумов может быть значительным. Так, помимо смещения кривой 4 вправо по сравнению с 1, что характерно для режима ограничения тепловыми шумами (см. (2)), происходит увеличение дисперсии флюктуаций i ; кривая 4 шире кривой 1. Более того, даже при пренебрежимо малом $\bar{i}_w = 0,1$ мкА по сравнению с \bar{i}_c также наблюдается некоторое различие. Для сравнения на кривую 1 наложены дискретные значения $p_0(i)$, взятые из (1) для случая $\sigma_D^2 = 0$. Из рисунка видно, что при совпадении параметров \bar{i}_c , σ_T^2 , σ_c^2 все же существуют различия между плотностями вероятностей в обоих случаях, особенно при больших отклонениях i от \bar{i}_c . Различия являются следствием больших отклонений мощности принимаемого оптического сигнала от его среднего уровня, когда вклад дробовых шумов сигнального тока может быть значителен из-за большой величины z , задающей величину дисперсии дробовых шумов сигнального тока — $\sigma_D^2 = \alpha z \bar{i}$, на временных интервалах $\Delta t < z_c$. На рис. 2 показаны кривые $p_0(i)$ для случая, когда $\sigma_D^2 > \sigma_T^2$. Кривым 1, 2, 3 соответствуют значения G , равные $10^3, 10^4, 10^5$. Для всех кривых $\bar{i}_c = 100$ мкА, $\bar{i}_w = 10$ мкА, $\sigma_T^2 = 0,8$ мкА².

$\sigma_c^2 = 1.5$. Из кривых видно, как меняется статистика i , когда для сохранения заданного уровня $i_c = 100 \text{ мкА}$ уменьшение уровня оптического сигнала на входе фотоприемника компенсируется увеличением

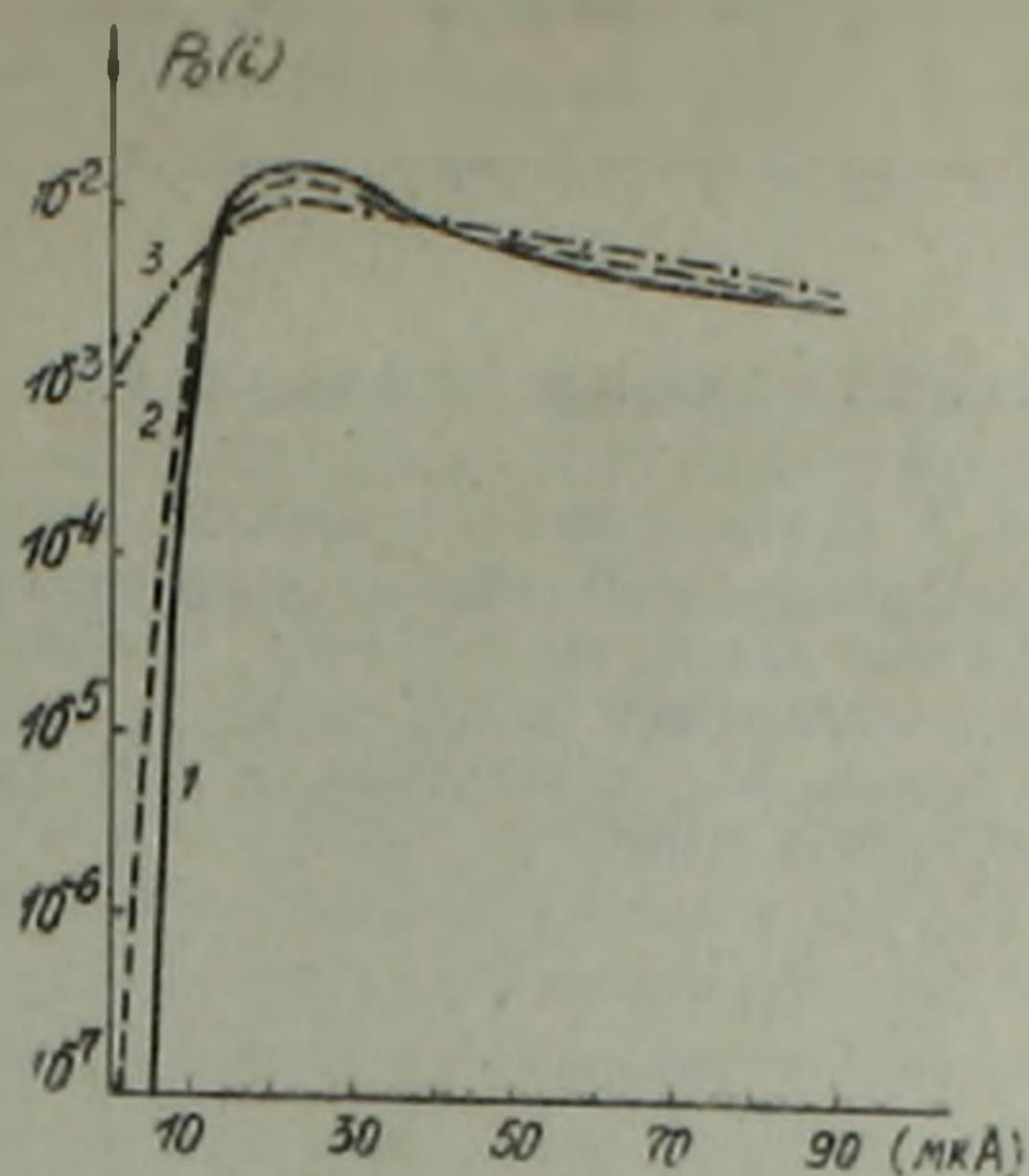


Рис. 2. Кривые плотности вероятности флюктуаций тока на выходе фотоприемника при доминировании дробовых шумов

коэффициента усиления фотоприемника. С ростом G дисперсия флюктуаций i резко возрастает. При этом существенное изменение претерпевает статистика i в области малых значений i , в то время как в области положительных i при больших отклонениях i от i_c статистика флюктуаций i определяется в основном уровнем турбулентности атмосферы. Наряду с этим, из кривых видно, что их максимумы задаются в основном величиной $i_{\text{ш}}$. Указанные особенности будут играть решающую роль в формировании эффективности приема относительно слабых оптических сигналов оптимальными и квазиоптимальными приемными системами.

Резюмируя, можно заключить, что помимо того, что полученные выражения снимают необходимость выбора режима работы фотоприемника, они более точно описывают статистику флюктуаций тока на выходе фотоприемника, чем ранее известные ⁽¹⁾, полученные для фотоприемников, работающих в режиме ограничения тепловыми шумами.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ա. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԵՍՅԱՆ

Ֆոտորեզունիչի հոսանքի տատանումների բաշխումը
տուրբուլենտ մրնողայտով անցած նառագայրման
ընդունման դեպքում

Դիտարկվում է մրնողային կանաչի աղմուկների ազդեցությունը ֆոտորեզունիչի ելային հոսանքի տատանումների հավանականության բաշխման վրա: Հաշվի են առնվազ ինչպես կոտորակային, այնպես էլ չերմային

աղմուկները։ Ստացված արտահայտությունները հանում են ֆոտորնդունիչի ռեժիմի ընտրման անհրաժեշտությունը, բացի այդ նրանք ավելի ճշգրտորեն են նկարագրում ելային ազդանշանի տատանումների վիճակագրությունը, քան մինչ այդ հայտնի արտահայտությունները, որոնք նկարագրում են ազդանշանի տատանումների վիճակագրությունը ջերմային աղմուկներով սահմանափակման ռեժիմում աշխատող ֆոտորնդունիչի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *P. A. Կազարյան, A. B. Օգանեսյան*, Իշխանություն, 1978, 13, 491.
² *P. A. Կազարյան, A. B. Օգանեսյան, K. P. Պօղօսյան և այլն*, Օպտիկական սարքեր և ապահովագրություն, Հայաստան, 1985.
³ *M. C. Teich, S. C. Rosinberg*, Appl. Opt., v. 12, p. 2616 (1973).
⁴ *E. N. Gilbert, H. O. Pollak*, The Bell System Technical Journal, №3, p. 333 (1960).
⁵ *J. H. Churnside, Ch. M. McIntyre*, Appl. Opt., v. 17, p. 2141 (1978).

С. Л. Мкртчян, А. Л. Шалдյян, А. Е. Айанян,
член-корреспондент АН Армянской ССР В. Г. Мхитарян

Влияние фосфолипазы A_2 на перекисное окисление липидов

(Представлено 31/III 1988)

В последнее время широко дискутируется вопрос о взаимосвязи процессов перекисного окисления липидов (ПОЛ) биомембран и их ферментативного гидролиза при состояниях, характеризующихся усилением перекисного окисления, в частности при стрессе. В недавних наших сообщениях на эту тему были представлены данные об усилении ПОЛ⁽¹⁾ и активированной фосфолипазы A_2 (ФЛ A_2)⁽²⁾ при иммобилизационном стрессе. В некоторых работах⁽³⁾ усиление ПОЛ прямо связывают с активированием ФЛ A_2 как поставщика основных субстратов переокисления—ненасыщенных жирных кислот. Однако в последнее время появилось несколько сообщений⁽⁴⁻⁵⁾ об ингибировании ФЛ A_2 липидной пероксидации. Для внесения ясности в этот вопрос мы задались целью изучить непосредственное влияние ФЛ A_2 на ПОЛ в модельной системе.

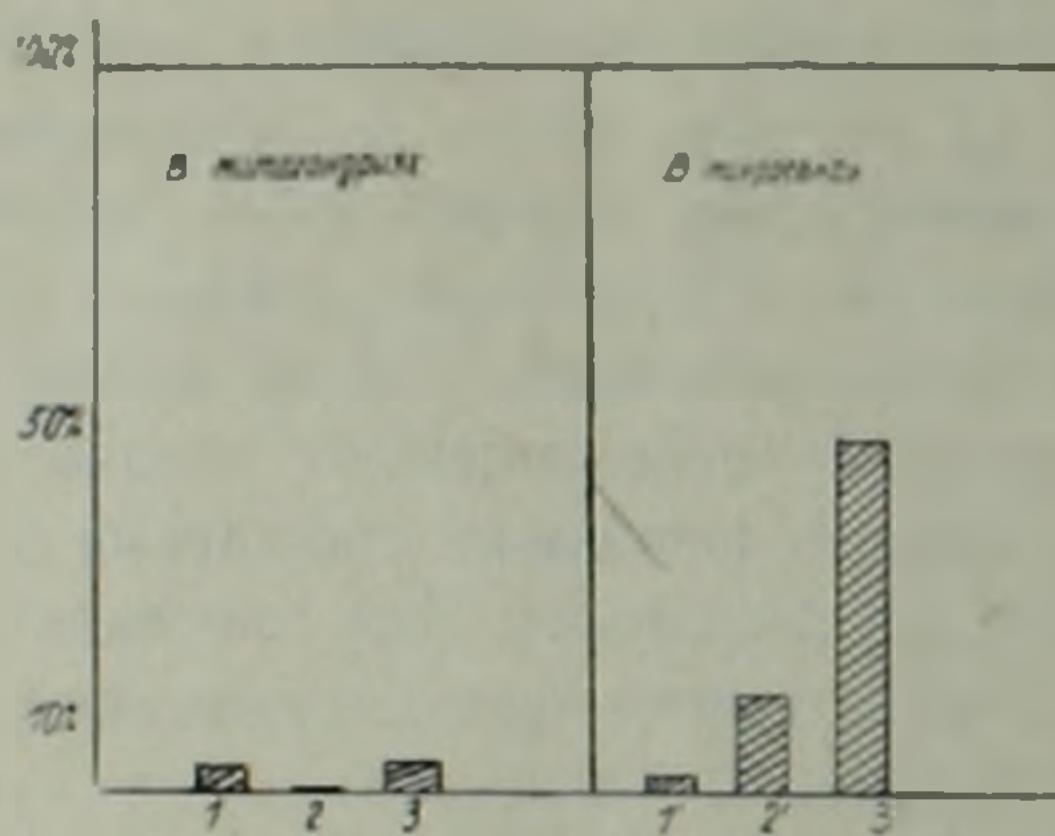
Эксперименты проводили на субклеточных фракциях печени интактных крыс—микросомальной и митохондриальной, которые получали методом дифференциального центрифугирования в 0,15 М KCl⁽⁶⁻⁷⁾. Полученную суспензию митохондрий (0,7—0,9 мг белка) инкубировали 30 мин при 37°C в среде, содержащей 5 мМ сукцината Na, 120 мМ K₂PO₄, 5 мМ трис-HCl, pH=7,6, 1 мМ CaCl₂ и 0,1—10 мкг/мл ФЛ A_2 , полученной из яда N. kaaja NaJa. Микросомы инкубировали аналогичным образом, но в среде содержался лишь трис-HCl, pH=7,6, CaCl₂, 0,1—10 мкг/мл ФЛ A_2 , (белок 1—1,2 мг). После инкубации определяли уровень ПОЛ по накоплению малонового диальдегида (МДА), измеряемый ТБК-тестом в НАДФН₂-зависимой системе⁽⁸⁾. Кроме того, изучали также фракционный состав и количество свободных жирных кислот (СЖК) методом газожидкостной хроматографии⁽⁹⁾. Белок определяли по Лоури. Полученные результаты обрабатывали статистически, применяя непараметрический критерий Уилкоксона—Манна—Уитни⁽¹⁰⁾.

Как и следовало ожидать, количество СЖК под влиянием ФЛ A_2 резко увеличивалось (табл. 1, 2) в обеих исследованных фракциях, в основном, за счет ненасыщенных жирных кислот (НЖК). Если содержание основного компонента ненасыщенной фракции—пальмитиновой кислоты практически не изменилось, то уровень НЖК, особенно архидоновой кислоты, возрос в 22,5 раза в митохондриях и в 16,2 раза—

в микросомах. Все это свидетельствует о чистоте и активности используемого образца ФЛ А₂.

Активность ФЛ А₂ обнаруживается больше в митохондриях, нежели в микросомах (11). Возможно, это следует из большей ненасыщенности митохондриальных фосфолипидов по сравнению с микросомальными. Этот феномен хорошо иллюстрируется нашими данными, по которым ФЛ А₂ высвобождает из фосфолипидов митохондрий намного больше НЖК (табл. 1), чем из фосфолипидов микросом. Это отражается также на росте индекса ненасыщенности (+167,4% в митохондриях и +20% в микросомах).

Одновременное изучение ПОЛ при действии ФЛ А₂ выявило резкое ингибирующее действие этого фермента на липоперекисление. Инкубация ФЛ А₂ с микросомами приводила к подавлению ПОЛ в зависимости от концентрации фермента, в то время как в митохондриях наблюдалось полное подавление при всех использованных концентрациях ФЛ А₂ (рисунок).



Подавление накопления МДА в митохондриях и микросомах печени крыс при действии различных концентраций ФЛ А₂: 1—10 мкг/мл ФЛ А₂; 2—5 мкг/мл ФЛ А₂; 3—1 мкг/мл ФЛ А₂; 1'—10 мкг/мл ФЛ А₂; 2'—1 мкг/мл ФЛ А₂; 3'—0,1 мкг/мл ФЛ А₂.

Роль ФЛ А₂ при подавлении ПОЛ некоторыми исследователями (4) трактуется как одно из звеньев антиоксидантного ферментативного процесса, осуществляемого в клетке системой глутатион-глутатион-трансфераза-глутатионпероксидаза. Так как эти ферменты находятся в цитоплазме и проникнуть в гидрофобную зону мембран, где идет цепной процесс перекисления, они не могут, то по мнению этих авторов происходит активирование ФЛ А₂, отщепляющей уже окисленные жирнокислотные остатки, которые, диффундируя в цитоплазму, подвергаются восстановлению этой системой и уже не могут служить источниками радикалобразования для дальнейшего продолжения ПОЛ. Эта точка зрения довольно обоснована, однако, по нашему мнению, остается пока недоказанной первичность индукции ПОЛ и вызванного этим активирования липолиза. Возможно, что последовательность событий тут как раз обратная, и продукты липолиза (СЖК, лизофос-

Таблица 1

Влияние ФЛ A_2 на качественный и количественный состав СЖК (в нм/мг белка и %) в митохондриях

Фермент	14:0	15:0	16:0	16:1	18:0	18:1	18:2	20:4	Сумма	Индекс ненасыщенности
С ФЛ A_2	2.3 0.8%	1.0 0.3%	40.2 14.4%	0.6 0.2%	18.75 6.7%	75.0 26.8%	6.8 2.4%	135.6 48.4%	279.6 100%	225.4
Без ФЛ A_2	1.15 1.6%	0.3 0.4%	33.85 18.4%	0.4 0.5%	3.6 5.1%	14.5 40.8%	10.0 14.3%	6.0 8.6%	69.8 100%	84.3

Таблица 2

Влияние ФЛ A_2 на качественный и количественный состав СЖК (в нм/мг белка и %) в микросомах

Фермент	14:0	15:0	16:0	16:1	18:0	18:1	18:2	20:4	22:6	Сумма	Индекс ненасыщенности
С ФЛ A_2	2.9 1.4%	2.8 1.3%	20.4 9.9%	4.6 2.2%	7.2 3.5%	27.7 13.5%	18.8 9.2%	105.6 51.5%	15.1 7.3%	205.2 100%	283.9
Без ФЛ A_2	3.4 4.1%	1.2 1.5%	14.0 17.2%	6.2 7.6%	3.4 4.2%	14.9 18.4%	6.1 7.5%	16.2 19.9%	15.7 19.3%	100%	236.4

фолипида) могут сами подавлять ПОЛ. Последнее предположение может оказаться весьма полезным при обсуждении вопроса о разных видах ингибирования ПОЛ в микросомах и митохондриях. Можно думать, что причиной этому может быть, как уже отмечалось выше, большая ненасыщенность фосфолипидов митохондриальных мембран по сравнению с микросомальными, хотя даже низкие концентрации ФЛ A_2 высвобождают значительное количество НЖК, подавляющих ПОЛ. В то же время относительно меньшая ненасыщенность микросомальных фосфолипидов приводит к тому, что при падении концентрации ФЛ A_2 так же резко уменьшается уровень свободных НЖК и соответственно усиливается ПОЛ.

Ереванский медицинский институт

Ս. Լ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ա. Լ. ՇԱՀՅԱՆ, Ա. Ե. ԱՅԱՆՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ
բղբակից անդամ Վ. Գ. ՄԵԽԻՄԱՐՅԱՆ

Յսոֆոլիպազա A_2 -ի ազդեցությունը լիպիդային գերօսիդացման վրա

Աւումնասիրված է ֆուֆոլիպազա A_2 -ի ազդեցությունը ազատ լիազեցած ճարպաթթուների կուտակման վրա: Առուց է տրված, որ միտոքոնդրիումներում ֆուֆոլիպազա A_2 -ի ակտիվությունը ավելի բարձր է, քան միկրոսոմներում, որը հավանական է, պայմանավորված է նրանով, որ միտոքոնդրիումներում ֆուֆոլիպազիդները առավել լիազեցած են, որի հետևանքով ֆուֆոլիպազա A_2 -ի ազդեցության տակ միտոքոնդրիալ թաղանթներից անջատվում են մեծ քանակությամբ լիազեցած ճարպաթթուներ: Բացահայտված է ֆուֆոլիպազա A_2 -ի արգելակիլ ազդեցությունը լիպիդային գերօսիդացման պրոցեսի վրա: Միկրոսոմներում այդ պրոցեսը կախված է՝ ի տարրերություն միտոքոնդրիումներից: Ֆերմենտի քանակից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ф И З И Ч Е С К И Е В О Д О К

- 1 С. Л. Мкртчян, К. А. Алексанян, Э. А. Ааратян, В. Г. Мхитарян, Журн. экспер. и клинич. медицины, т. 27., № 1, с. 17-21 (1987) 2 А. Л. Шалджен, С. Л. Мкртчян, Тезисы докл. IV Респ. мол. конф. по физико-химической биологии, Севан, 15-18 января, 1987 3 С. Е. Наровлянская, Н. А. Листратова, Вопр. туберкулеза, № 8, с. 59-63 (1985). 4 K. Hong Tan, D. V. Meyer, I. Bettin e. a., Biochem. J., v. 220, p. 243-252 (1984). 5 A. Sevanian, S. F. Muia Kassab-Helly, S. Montestruque, Arch. Biochem. Biophys., v. 223, № 2, p. 441-452 (1983) 6 W. C. Schnelder e. a., J. Biol. Chem., v. 176, p. 259 (1948). 7 И. А. Кирузина, А. И. Арчиков, в кн.: Современные методы в биохимии, Наука, М., с. 49, 1977. 8 И. Д. Стальская, Г. Г. Гаришвили, в кн.: Современные методы в биохимии, Наука, М., с. 66, 1977. 9 J. C. Chern, G. Bruckner, J. E. Kinsella, Nutr. Res., № 3, p. 571-581 (1983) 10 Е. В. Гублер, Вычислительные методы анализа и распознавание патологических процессов, Медицина, Л., 1978 11 Х. Брокерхоф, Р. Дженсен, Липопитические ферменты, ИЛ. М., 1978.

УДК 547.963.32+591.143.3+591.144 [591.147.1/2]

БИОХИМИЯ

В. Н. Тертов, Х. С. Саядян, Р. А. Саакян, А. В. Зильфян, А. Н. Орехов

Влияние экстракта паращитовидных желез на синтез ДНК
в лимфоцитах из различных иммунокомпетентных органов человека

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Мирзояном 1/IV 1988)

Рядом исследователей было показано, что паращитовидные железы (ПЩЖ) могут осуществлять гормональный контроль пролиферативной активности тимоцитов (1-2), клеток костного мозга крыс (3), селезеночных лимфоцитов (4) и др. Гормоны ПЩЖ осуществляют свое действие обязательно в присутствии инициирующего количества ионов Са (5), однако механизм их воздействия до настоящего времени неясен. Известно, что в ряде случаев в процессах активации задействована система циклических нуклеотидов (6).

Нами была сделана попытка выявить роль митогенных рецепторов в активации лимфоидных клеток человека гормонами ПЩЖ.

Эксперименты проводили на лимфоидных клетках человека. Их получали не позже, чем через 2-3 ч после смерти в патанатомическом отделении НИИ скорой помощи им. Склифософского. Стерильно забирали аортальные или легочные лимфоузлы, селезенку, тимус. Весь материал обрабатывали тут же и готовили стерильные лимфоцитарные суспензии, которые отмывали два раза средой 199, центрифугировали при 1200 об/мин 10 мин, затем насыщали на градиент фиколла 1,077 г/мл и центрифугировали при комнатной температуре от 25 до 30 мин. В контрольных экспериментах в полученной фракции с плотностью меньше 1,077 г/мл в основном обнаруживались лимфоциты (более 95%) и в небольших количествах моноциты. Полученные лимфоциты разводили до концентрации клеток $\times 10^6$ в 1 мл и культивировали по методике, описанной ранее (7).

Во время получения суспензии лимфоузлов приходилось неоднократно отмывать клетки от смолистых веществ и угольной пыли, в большом количестве присутствующих в этой ткани. Отмывали клетки столько раз, чтобы первоначальный серый цвет суспензии сменился на бледно-розовый. В некоторых случаях остатки эритроцитов лизировали при помощи раствора хлористого аммония с бикарбонатом калия и Na_4EDTA . В качестве модулирующего агента использовали экстракт ПЩЖ, получаемый из паращитовидных желез половозрелых быков и коров.

О синтезе ДНК судили по скорости включения меченого тимидина («Ргаха» ЧССР) в ДНК, определяемого методом (7).

Как видно из рис. 1,а, введение полученного грубого экстракта

ПШЖ в культуральную среду, содержащую лимфоциты из селезенки, в дозе 0,01 мг/мл вызывало небольшое (на 1,4 раза) увеличение включения меченого тимидина в ДНК, увеличение дозы до 0,04 мг/мл приводило к снижению синтеза ДНК в 1,2 раза, а 10-кратное увеличение

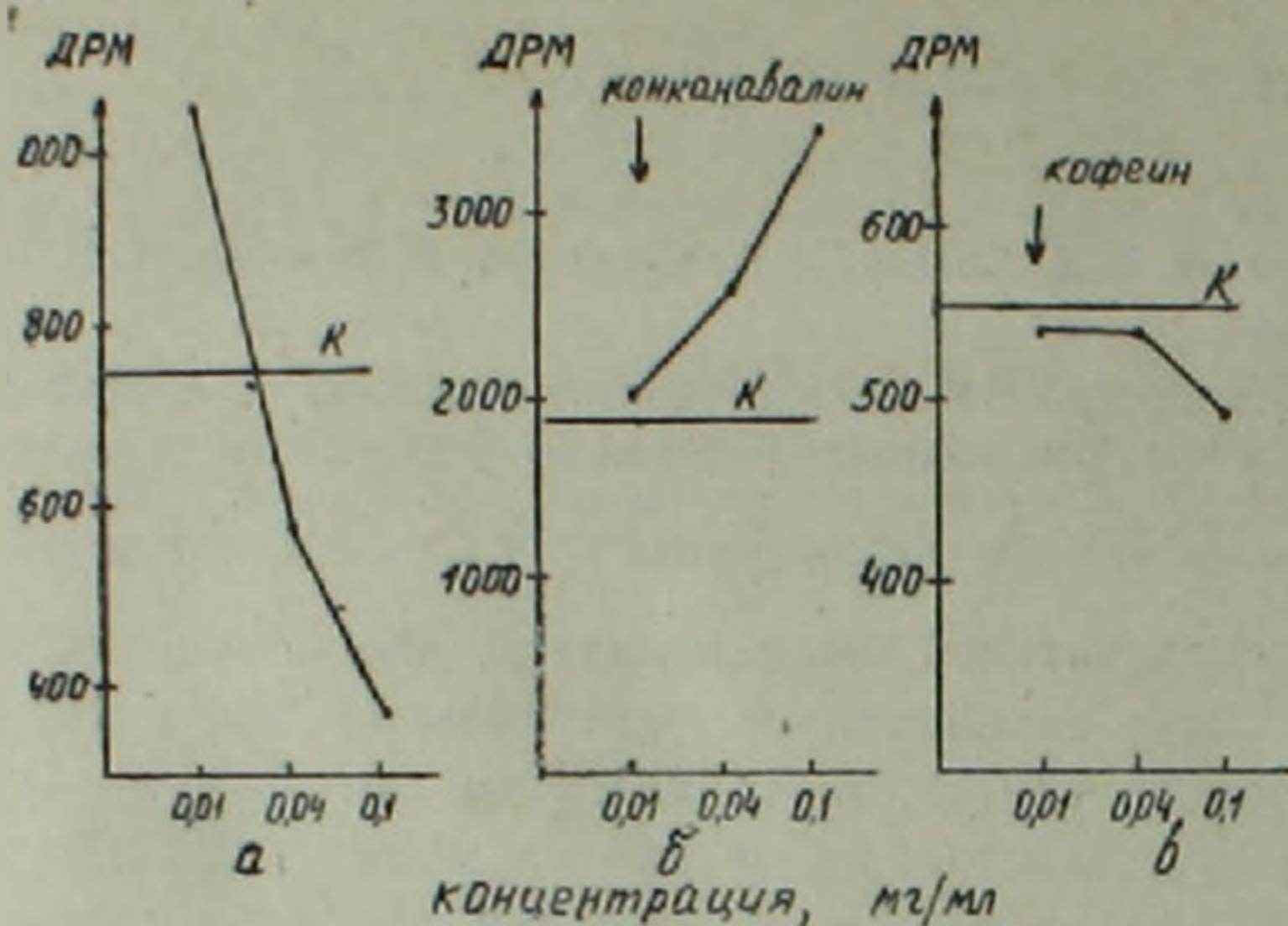


Рис. 1. Включение меченого тимидина в ДНК в спленоцитах человека. а—под действием различных доз грубого экстракта ПШЖ; б—при добавлении 0,08 мг/мл конканавалина А; в—при добавлении 0,3 мМ/мл кофеина

первоначальной дозы вызывало снижение синтеза ДНК приблизительно в 2 раза.

В тимоцитах (рис. 2, а) доза препарата 0,01 мг/мл практически не влияла на синтез ДНК, 4-кратное увеличение дозы снижало синтез в 1,5 раза, а 10-кратное увеличивало включение меченого тимидина в 1,4 раза.

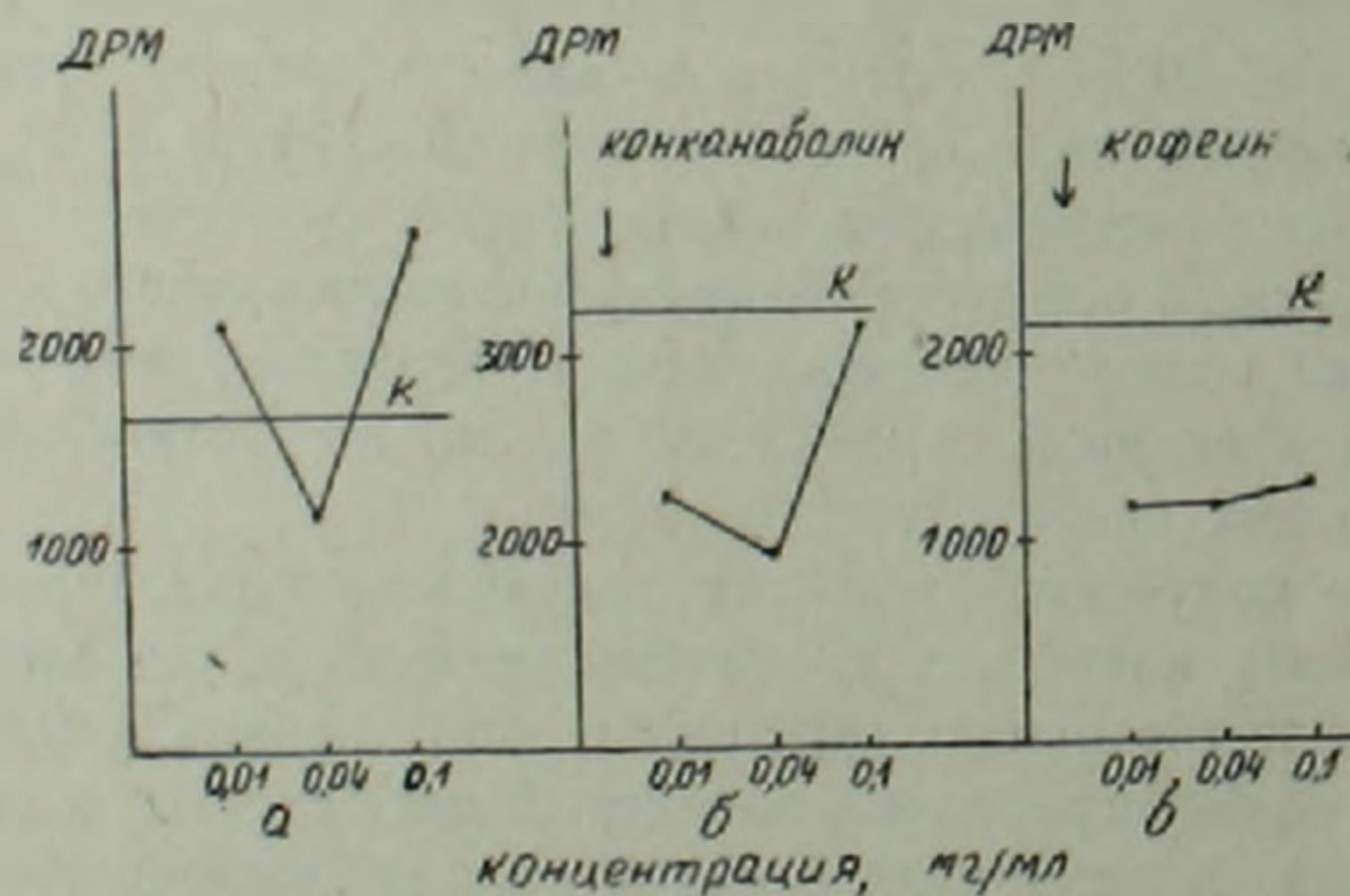


Рис. 2. Включение меченого тимидина в ДНК в тимоцитах человека. Обозначения те же, что на рис. 1

В лимфоцитах, выделенных из лимфоузлов, 0,01 мг/мл препарата не влиял на включение меченого тимидина в ДНК, а дозы препарата 0,04 и 0,1 мг/мл вызывали увеличение включения меченого тимидина в ДНК в 1,6 и 1,5 раза соответственно (рис. 3, а).

Эти данные свидетельствуют о том, что препарат обладает имму-

номодуляторной активностью и способен изменять пролиферативную активность лимфоцитов из различных иммунокомpetентных органов человека.

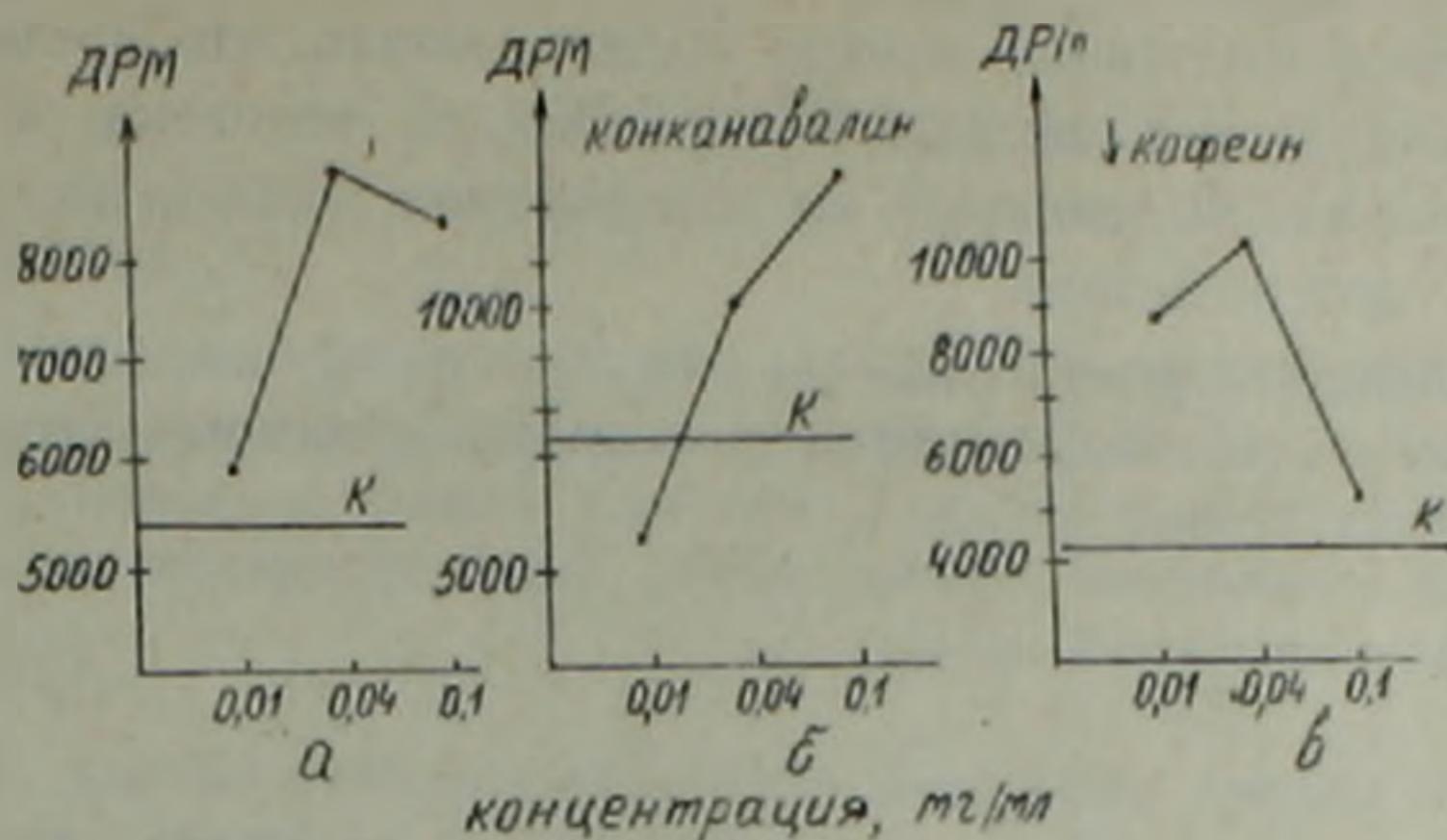


Рис. 3. Включение меченого тимидина в ДНК в лимфоцитах, выделенных из лимфоузлов человека. Обозначение те же, что на рис. 1

Для выявления возможности конкурирования исследуемых гормонов за митогенные рецепторы был использован конканавалин А (Sigma, США).

Добавление в культуральную среду, содержащую спленоциты человека, конканавалина А в дозе 0,08 мг/мл или 0,004 мг на лунку не приводило к изменению синтеза ДНК при дозе экстракта 0,01 мг/мл. Увеличение дозы препарата в 4 раза приводило к увеличению синтеза ДНК в 1,3 раза, а 10-кратное увеличение дозы — к 2-кратному увеличению включения меченого тимидина в ДНК (рис. 1, б). В тимусе (рис. 2, б) добавление конканавалина А уменьшает включение меченого тимидина в ДНК при дозах препарата в 0,01 и 0,04 мг/мл в 2 и 1,6 раза соответственно, а в дозе 0,1 мг/мл не влияет на синтез ДНК. В лимфоцитах, выделенных из лимфоузлов (рис. 3, б), в присутствии конканавалина А препарат в дозе 0,01 мг/мл уменьшает синтез ДНК в 1,4 раза и увеличивает его в дозах 0,04 и 0,1 мг/мл в 1,4 и 1,7 раза соответственно.

Эти результаты позволяют предположить, что не существует конкуренции за митогенные рецепторы между грубым экстрактом ПЩЖ и конканавалином А в лимфоцитах из всех трех органов.

Известно, что кофеин потенцирует действие гормонов, работающих через цАМФ (8). Было показано, что паратиреоидный гормон стимулирует пролиферацию тимоцитов, причем кофеин потенцирует его действие (9). Для проверки возможности действия исследуемых гормонов через циклазную систему был использован кофеин (Sigma, США) в концентрации 0,3 мМ/мл.

Добавление кофеина в культуральную жидкость, содержащую спленоциты, практически не вызывало изменений в синтезе ДНК при всех дозах экстракта ПЩЖ (рис. 1, а).

В тимоцитах введение кофеина приводило к уменьшению включения меченого тимидина в ДНК во всех дозах: в дозе 0,01 мг/мл в 2 раза, в дозах 0,04 и 0,1 мг/мл — приблизительно в 1,7 раза (рис. 2, в).

Добавление кофеина в культуральную среду, содержащую лимфоциты из лимфоузлов, увеличивало синтез ДНК во всех трех дозах препарата: в 2 раза при дозе 0,01 мг/мл, в 2,4 раза при дозе 0,04 мг/мл и в 1,2 раза при дозе 0,1 мг/мл.

Исходя из этих данных можно предположить, что препарат действует через циклазную систему в спленоцитах человека, в тимоцитах же и лимфоцитах, выделенных из лимфоузлов, возможно, существуют независимые пути действия.

Необходимо также учитывать, что в полученном грубом экстракте ПЦЖ, возможно, содержится несколько активных гормональных факторов.

Ереванский медицинский институт

Վ. Ն. ՏԵՐՄՈՂ, Ե. Ս. ՄԱԶԱԴՐԱՆ, Ռ. Ա. ՄԱՂԱՅԻՆ, Ա. Վ. ԳԻՂՅԱՆ, Ա. Ն. ՕՐԵԽՈՎ

Հարվածանածե գեղձերի մզվածի ազդեցությունը ԴՆԹ-ի սինթեզի վրա մարդու և աղրեր իմունոկոմպետենտ օրգաններից ստացված լիմֆոցիտներում

Հետազոտվել է հարվածանածե գեղձերի հորմոնների մարդու լիմֆոցիտներում ԴՆԹ-ի սինթեզի ակտիվությունը փոփոխելու ունակությունը *in vitro*. Հայտնաբերված է, որ ուսումնասիրված հորմոնները ոչ միայն ազդում են Ըստ փոփոխակության տարբեր օղակների վրա, այլև մի քանի անգամ ակտիվացնում ԴՆԹ-ի սինթեզը նորմայում և ուժեղացնում միտոզների ազդեցությունը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. S. P. MacManus, A. D. Perris, S. F. Whitfield e. a., In Proceeding of the Fifth Leukocyte Culture Conference Ed. by J. Harris, Acad. Press. Inc., New-York—London, p. 125 (1970).
2. A. D. Perris, L. A. Weiss, J. F. Whitfield, J. Cell Physiol., v. 76, p. 141 (1970).
3. A. D. Perris, J. F. Whitfield, Canad. J. Physiol., v. 49, p. 22 (1971).
4. A. A. Bialasiewicz, T. Jurrens, V. Dichtl e. a., Biochemical et Biophysical Acta, v. 584, p. 467—478 (1979).
5. Н. А. Држевецкая, Ю. М. Држевецкий. Итоги науки и техники. Сер. физиология человека и животных, т. 27 (1983).
6. J. P. MacManus, T. Youdale, J. F. Whitfield e. a., In: Calcitonin, Parathyroid Hormone and the Calcitonin. Ed. by R. V. Talmage, P. C. Munson, p. 338—350 (1971).
7. X. C. Саядян, А. В. Зильфян, Р. А. Саакян и др., ДАН АрмССР т. 86, №1 (1987).
8. G. A. Robinson, R. W. Butcher, E. W. Sutherland, Ann. Rev. Biochem., v. 37, p. 149—186 (1968).
9. J. F. Whitfield, J. P. MacManus, R. H. Rixon, J. Cell Physiology, v. 75, №2, p. 213—224 (1970).