ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXVI, №5
1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1988, т. 86, № 5, с. 193—240

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

МОРФОЛОГИЯ

Индекс

CONTENTS

Техн. редактор *Азизбекян Л. А.*

Сдано в набор 19.04.88 г. Подписано к печати 7.07. 88 г. ВФ 03985
Бумага № 2, 70 $\times$108$^1/_{16}$. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4.2.
Учет. изд. 3,27 л. Тираж 445. Заказ 626. Издат. 7385
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

О. М. Эминян

Граничные особенности функций в полидиске

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/XII 1987)

В настоящей статье продолжается начатое в работе [1] изучение предельных множеств и граничных особенностей отображений полидиска в сферу Римана и приложений к граничным свойствам мероморфных функций нескольких комплексных переменных. В целях простоты изложение ведется для случая двух комплексных переменных.

1. Обозначим через D декартово произведение двух единичных кругов $D=D_1\times D_2$, $D_k:|z_k|<1$, $k=1, 2$, в комплексных плоскостях z_k, $k=1, 2$, и пусть $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$, где $\Gamma_k:|z_k|=1$, $k=1, 2$. Обозначим через $h_k(\zeta_k, \varphi_k)$ хорду круга D_k, оканчивающуюся в точке $\zeta_k\in\Gamma_k$ и образующую с радиусом круга D_k в этой точке угол раствора φ_k, где $-\pi/2<\varphi_k<\pi/2$. Пусть $\Delta(\zeta_k, \varphi_k', \varphi_k'')$ обозначает подобласть круга D_k, ограниченную хордами $h_k(\zeta_k, \varphi_k')$ и $h_k(\zeta_k, \varphi_k'')$, где $\zeta_k\in\Gamma_k$ и $-\pi/2<\varphi_k'<\varphi_k''<\pi/2$, окружностью $|z_k-\zeta_k|<r_k$, $0<r_k<1$, $k=1, 2$. Если нам безразличны размеры φ_k', φ_k'' угла Штольца $\Delta(\zeta_k, \varphi_k', \varphi_k'')$, то будем обозначать его короче, $\Delta(\zeta_k)$. Декартовой хордой и декартовым углом Штольца назовем соответственно множество $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)=h_1(\zeta_1, \varphi_1)\times h(\zeta_2, \varphi_2)$, где $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta\in\Gamma$, $\zeta_1\in\Gamma_1$, $\zeta_2\in\Gamma_2$, и множество $\Delta(\zeta)=\Delta(\zeta_1, \varphi_1', \varphi_1'')\times\Delta(\zeta_2, \varphi_2', \varphi_2'')$, где $-\pi/2<\varphi_k'<\varphi_k''<\pi/2$, $k=1, 2$.

Для произвольного отображения $f:D\to\Omega$ бидиска D на расширенную комплексную плоскость (сферу Римана) Ω и произвольного надмножества $S\subset D$, для которого $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2)\in\Gamma$ является предельной точкой, предельным множеством $C(f, \zeta, S)$ функции $f(z_1, z_2)$ в точке ζ по подмножеству S назовем совокупность таких значений $w\in\Omega$, что $w=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_1^n, z_2^n)$ по некоторой последовательности точек $\{(z_1^n, z_2^n)\}_{n=1}^{\infty}$, $(z_1^n, z_2^n)\in S$, $n=1, 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_k^n=\zeta_k$, $k=1, 2$. В качестве множества S можно брать декартову хорду $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ или весь бидиск D.

Точку $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2)\in\Gamma$ отнесем к множеству $C(f)$, если $C(f, \zeta, \Delta(\zeta))=C(f, \zeta, D)$ для любого декартова угла Штольца $\Delta(\zeta)$.

Не сильно видоизменяя схему доказательства теоремы 1 из [1], мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Для произвольного отображения $f:D\to\Omega$ справедливо представление $\Gamma=C(f)\cup E$, в котором E — множество первой категории и типа F_σ относительно Γ.*

2. Рассмотрим теперь в D функцию $f(z_1, z_2)$, мероморфную по каждой переменной в отдельности и непрерывной по совокупности переменных, и следуя терминологии работы ([2]), назовем такую функцию $f(z_1, z_2)$ мероморфной функцией в бидиске D. Точку $\zeta \in C(f)$ отнесем к множеству $I(f)$, если $C(f, \zeta, D) = \Omega$, и отнесем ее к множеству $M(f)$, если $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.

Теорема 2. *Точка $\zeta \in \Gamma$ принадлежит множеству $M(f)$ для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D в том и только в том случае, когда для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ справедливо $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) = C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.*

Теорема 3. *Для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D справедливо представление $\Gamma = M(f) \cup I(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории и типа F_σ относительно Γ.*

В случае мероморфной функции одной комплексной переменной эти результаты получены в работе ([3]) и являются уточненной формой известной теоремы К. Мейера ([4]).

3. Доказательство теоремы 2 опирается на свойства P-последовательностей мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, в свою очередь, основанных на результатах работы ([2]), в которой впервые изучались нормальные семейства мероморфных функций в D и нормальные мероморфные функции в D.

Следуя ([2]), для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, определенной в $D = D_1 \times D_2$, рассмотрим функцию $q_f(z_1, z_2)$:

$$q_f(z_1, z_2) = \frac{|f_{z_1}(z_1, z_2)|(1-|z_1|^2) + |f_{z_2}(z_1, z_2)|(1-|z_2|^2)}{1+|f(z_1, z_2)|^2}.$$

Непрерывная функция $q_f(z_1, z_2) \geq 0$ в D играет основную роль в исследованиях свойства нормальности мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, проведенных в ([2]). Обозначим через $S(D_k)$, $k=1, 2$, семейство функций, конформно отображающих круг D_k на себя. Мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ названа в ([2]) нормальной функцией в бидиске $D = D_1 \times D_2$, если семейство функций $\{f(\varphi(z_1), \psi(z_2)) | \varphi(z_1) \in S(D_1), \psi(z_2) \in S(D_2)\}$ нормально в D в смысле Монтеля. В работе ([2]) (теорема 2.2) доказано, что мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ будет нормальной функцией в бидиске D тогда и только тогда, когда $\limsup\limits_{|z_1| \to 1, |z_2| \to 1} q_f(z_1, z_2) < +\infty$; в частности, любая ограниченная голоморфная функция $f(z_1, z_2)$ в бидиске D является нормальной функцией.

4. Обозначим через $\sigma(z, w)$ расстояние между точками $z, w \in D$ в метрике Каратеодори. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и произвольной точки $z \in D$ множество $D(z; \varepsilon) = \{w \in D | \sigma(w, z) < \varepsilon\}$ назовем поликругом в метрике Каратеодори с центром в точке z и радиуса $\varepsilon > 0$.

Последовательность точек $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$, $z^m \in D$, $m \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{m\to\infty} |z^m| = 1$, назовем P-последовательностью для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z^{m_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ в объединении поликругов $\bigcup\limits_{\nu} D(z^{m_\nu}; \varepsilon)$ функция $f(z_1, z_2)$ принимает бесконечно часто каждое значение $w \in \Omega$, за возможным исключением самое большее двух значений $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

В случае мероморфных функций одной комплексной переменной понятие P-последовательности введено в работе ([5]) и использовалось многими авторами при изучении свойства нормальности мероморфных функций; для голоморфных функций нескольких комплексных переменных, определенных в шаре, это понятие использовалось в работе ([6]).

5. Опираясь на теорему 2.2 и предложения 1—4 из работы ([2]), мы доказываем следующие результаты.

Теорема 4. *Если мероморфная в бидиске $D: D_1 \times D_2$ функция $f(z_1, z_2)$ обладает P-последовательностью, то* $\limsup\limits_{|z_1|\to 1, |z_2|\to 1} q_f(z_1, z_2) + \infty$. *Более того, каждая последовательность $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$ точек бидиска D, $z^m = (z_1^m, z_2^m)$, $m \in N$, $\lim\limits_{m\to\infty} |z_k^m| = 1$, $k = 1, 2$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} q_f(z_1^m, z_2^m) = +\infty$, является P-последовательностью мероморфной функции $f(z_1, z_2)$.*

Теорема 5. *Если мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ в бидиске D обладает свойством, что существуют две последовательности точек $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{w^m\}_{m=1}^{\infty}$, для которых $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(z^m, w^m) = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f(z^m) = a$, $\lim f(w^m) = b$, $a \neq b$, то каждая из последовательностей $\{z^m\}_1^{\infty}$ и $\{w^m\}_1^{\infty}$ является P-последовательностью функции $f(z_1, z_2)$.*

6. Сформулированная в пункте 2 теорема 2 является непосредственным следствием теорем 4 и 5 из предыдущего пункта и геометрии декартовых углов Штольца. Более того, эти свойства Р-последовательностей позволяют уточнить теорему 3 из пункта 2.

Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$ для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, определенной в бидиске D, если каждая декартова хорда в этой точке содержит P-последовательность функции $f(z_1, z_2)$. Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если ни одна из декартовых хорд в этой точке не содержит P-последовательностей функции $f(z_1, z_2)$ и $C(f, \zeta, h(z_1, z_2)) = \Omega$ для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ в точке ζ. По определению, $P(f) \cap I^*(f) = \varnothing$.

Если $\zeta \in P(f)$, то каждый декартовый угол $\Delta(\zeta)$ содержит некоторую P-последовательность $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$ функции $f(z_1, z_2)$. Согласно геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори, для каждого декартова угла Штольца $\Delta(\zeta)$ можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что $\bigcup\limits_m D(z^m; \varepsilon) \subset \Delta(\zeta)$. Поэтому $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, и значит $\zeta \in I(f)$.

Если $\zeta \in I^*(f)$, то любой декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ содержит бесконечно много декартовых хорд $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, и значит $\Omega = C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \subset C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \subseteq \Omega$, т. е. $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$ и $\zeta \in I(f)$.

Теорема 6. *Для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D справедливо представление $\Gamma = M(f) \cup P(f) \cup I^*(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории на Γ.*

Доказательство теоремы 6 проходит по схеме доказательства аналогичного утверждения в случае мероморфных функций одной переменной, полученного в работе ([7]). Применим утверждение теоремы 1 из пункта 1 к функциям $f(z_1, z_2)$ и $q_f(z_1, z_2)$. Тогда $\Gamma = \mathfrak{W} \cup E$, где $\mathfrak{W} = C(f) \cap C(q_f)$ и E — множество первой категории и типа F_σ на

Г. В каждой точке $\zeta \in \mathfrak{B}$ имеем четыре возможности: I) $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$; II) $C(f, \zeta, D) = \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$; III) $C(f, \zeta, D) = \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \not\ni +\infty$; IV) $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$.

Возможность IV на самом деле реализоваться не может, так как условие $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$ влечет за собой, согласно теореме 4 пункта 5, существование в каждом декартовом угле Штольца $\Delta(\zeta)$ некоторой P-последовательности функции $f(z_1, z_2)$, что, как мы видели выше, приводит к свойству $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, противоречащему условию $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.

Если реализуется возможность II, то согласно теореме 4 пункта 5, каждый декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ содержит некоторую P-последовательность функции $f(z_1, z_2)$, откуда, в силу геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори, следует, что каждая декартова хорда в точке ζ содержит P-последовательность функции $f(z_1, z_2)$, т. е. $\zeta \in P(f)$.

Если реализуется возможность I или возможность III, то, согласно теореме 4 пункта 5, каждый декартов угол Штольца не содержит P-последовательностей функции $f(z_1, z_2)$, а согласно теореме 5 пункта 5, геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори заключаем, что $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ в точке ζ, т. е. точка ζ принадлежит либо множеству $M(f)$, либо множеству $I^*(f)$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Մ. ԷՄԻՆՅԱՆ

Բիշրջանում ֆունկցիաների սահմանային առանձնահատկությունները

Աշխատանքում ստացված են եզրային թեորեմներ երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար։ Մասնավորապես նկարագրված է $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ $\Gamma_i : |z_i| = 1$, $i = 1, 2$, բազմության վերլուծումը ըստ Γ-ի ենթաբազմությունների՝ որոնք նկարագրվում են $f : D = D_1 \times D_2 \to \Omega$, $D_i : |z_i| < 1$ ֆունկցիայի սահմանային բազմությունների բնութագրման միջոցով։ Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար ապացուցվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման $\zeta \in \Gamma$ կետը $M(f) \subset \Gamma$ բազմությանը պատկանելու համար։ Այնուհետև՝ նշվում են պայմաններ մերոմորֆ ֆունկցիաների համար հաջորդականությունը P-հաջորդականություն հանդիսանալու համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. М. Эминян*, ДАН СССР, т. 294, № 4, с. 799—802 (1987). [2] *А. Г. Джваршейшвили*, Тр. Тбилисского гос. ун-та, т. 259, с. 7—32 (1985). [3] *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников*, ДАН СССР, т. 233, № 1, с. 15—17 (1977). [4] *K. E. Meier*, Math. Ann., v. 142, № 1, p. 328—344 (1961). [5] *В. И. Гаврилов*, ДАН СССР, т. 151, № 1, с. 19—22 (1963). [6] *П. В. Довбуш*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., № 1, с. 38—42, 1981. [7] *В. И. Гаврилов*, ДАН СССР, т. 216, № 1, с. 21—23 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 5

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

О сингулярном спектре возмущенного оператора умножения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/I 1988)

Пусть A—оператор, действующий в пространстве $L_2(-1, 1)$ по формуле

$$Af(x)=xf(x)+\varphi(x)\int_{-1}^{1} f(t)\overline{\varphi(t)}dt. \tag{1}$$

Из результатов статьи Л. Д. Фаддеева ([1]) следует, что при условиях $\varphi(x)\in Lip_\alpha$, $\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varphi(\pm 1)=0$ непрерывный сингулярный спектр у оператора A отсутствует, а дискретный состоит из конечного числа точек. Случай, когда $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, рассмотрен в статье Б. С. Павлова и С. В. Петраса ([2]). Они показали, что в этом случае оператор A может иметь непрерывный сингулярный спектр и получены метрические оценки этой части спектра.

Здесь рассматривается случай, когда $\varphi(x)$ принадлежит пространству Бесова B_2^α, $0<\alpha<1$.

Для формулировки основной теоремы приведем некоторые определения.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $(-1, 1)$, принадлежит пространству $B_2^\alpha(-1, 1)$; это означает, что сходятся интегралы

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\alpha}}dxdy<\infty,\ 0<\alpha<1.$$

Пусть E—множество, лежащее на действительной оси, и $0<\alpha<1$. Тогда α-емкостью множества E называется число

$$C_\alpha(E)=\left(\inf_{\mu\prec E}\int_E\int_E\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}\right)^{-1},$$

где $\mu\prec E$ означает, что μ—неотрицательная, единичная мера с носителем, лежащим в E.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)\in B_2^\alpha(-1, 1)$, $\frac{1}{4}<\alpha<1$, *причем в случае,* *когда $\frac{1}{2}<\alpha<1$, предполагается, что $\varphi(\pm 1)=0$, и в случае, когда $\alpha=\frac{1}{2}$,*

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\delta}\int_{-1}^{-1+\delta}\varphi(t)dt=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\delta}\int_{1-\delta}^{1}\varphi(t)dt=0.$$

Тогда непрерывный сингулярный спектр оператора (1) *имеет нулевую $1-\alpha$-емкость при $\frac{1}{2}<\alpha<1$ и нулевую $\frac{3}{2}-2\alpha+\varepsilon$-емкость при $\frac{1}{4}<\alpha\leq\frac{1}{2}$, где $\varepsilon>0$ — любое число.*

Ниже приводится набросок доказательства этой теоремы.

Введем обозначения $H_\varphi=L_2(\operatorname{supp}\varphi)$, $H_\varphi^\perp=L_2(-1,1)\ominus L_2(\operatorname{supp}\varphi)$. Подпространства H_φ и $H_\varphi^\perp$ приводят оператор A, причем на подпространстве $H_\varphi^\perp$ оператор A совпадает с оператором умножения на независимую переменную.

Рассмотрим оператор $A|_{H_\varphi}$. Спектр этого оператора прост и $\varphi(x)$ является для него порождающим элементом. Для спектральной функции E_t оператора $A|_{H_\varphi}$ справедлива формула

$$\left(1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(E_t\varphi,\varphi)}{t-z}\right)\left(1+\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)|^2}{t-z}dt\right)=1,\ \operatorname{Im}z\neq 0.$$

Введем обозначение $m(z)=1+\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)|^2}{t-z}dt.$

Заметим, что $m(z)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция и там имеет положительную мнимую часть.

Для любого отрезка $\Delta\subseteq(-\infty,\infty)$ имеем

$$(E(\Delta)\varphi,\varphi)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\Delta}\operatorname{Im}\frac{1}{m(x+i\varepsilon)}dx.$$

С другой стороны, в силу теоремы Сохоцкого имеем

$$\lim_{z\to u+i0}m(z)=1+\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(x)|^2}{x-u}dx+\pi i|\varphi(u)|^2,$$

если u — точка Лебега для функции $|\varphi(x)|^2$.

Следовательно, сингулярный спектр оператора A сосредоточен в множестве E, где функция $m(z)$ или не имеет граничного значения при приближении z к точке множества E, оставаясь в некотором угле Штольца, или существует некасательное граничное значение и оно равно нулю. Таким образом, исследование множества, где сосредоточен сингулярный спектр оператора A, приводится к изучению граничных свойств функции $m(z)$.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ

Գրգռված բազմապատկման օպերատորի սինգուլյար սպեկտրի մասին

Տվյալ հոդվածում բերվում է թեորեմ անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի միաչափ գրգռման սպեկտրի անընդհատ սինգուլյար մասի վերաբերյալ։ Դիտարկվում է հետևյալ օպերատորը՝

$$Af(x) = xf(x) + \varphi(x)\int_{-1}^{1} f(t)\overline{\varphi(t)}dt$$

$L_2(-1, 1)$ *տարածության մեջ։ Ենթադրվում է, որ* $\varphi(x)\in B_2^{\alpha}(-1, 1)$, *որտեղ* $\frac{1}{4}<\alpha<1$։ *Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է,* A *օպերատորի սպեկտրի սինգուլյար մասը կենտրոնացված է մի բազմության վրա, որն ունի զրո ունակություն, կախված* α *պարամետրից։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Д. Фаддеев*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXIII (1964). [2] *Б. С. Павлов, С. В. Петрас*, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 2, с. 54—61 (1970)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.17

МАТЕМАТИКА

А. М. Арамян

Плотность гладких и гладких финитных функций в пространствах $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Б. Нерсесяном 28/I 1988)

Вопросам плотности гладких или гладких финитных функций в различных функциональных пространствах посвящены работы многих авторов. В частности, для пространства С. Л. Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ плотность гладких или гладких финитных в Ω функций при различных предположениях о характере области Ω доказана С. Л. Соболевым (1), Е. Гальярдо (2) и В. П. Ильиным (3). Для анизотропных пространств $W_p^{\bar{l}}(\Omega)$ подобные вопросы изучены в работах (4–7).

В настоящей заметке приведены аналогичные результаты для более общих функциональных пространств $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$.

Будем пользоваться следующими обозначениями: E_n—n-мерное евклидово пространство; $\Omega\subseteq E_n$—произвольное открытое множество с границей Г; N^n_+—множество мультииндексов; $\mathfrak{N}$—правильный многогранник с вершинами из N^n_+.

Говорят, что функция $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$, если в Ω существуют и непрерывны частные производные $D^\alpha f=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}f$ для всех $\alpha\in\mathfrak{N}$ и конечна норма

$$\|f\|_{C^{\mathfrak{N}}(\Omega)}=\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}}\|D^\alpha f\|_{C(\Omega)}.$$

Функция $f\in\overset{\circ}{C}{}^{\mathfrak{N}}(\Omega)$, если $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и для любых $x\in\Gamma(\Omega)$, $\alpha\in\mathfrak{N}$

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} D^\alpha f(y)=0.$$

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. Будем говорить, что функция f принадлежит пространству $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$, если в Ω существуют обобщенные по Соболеву производные $D^\alpha f$ при всех $\alpha\in\mathfrak{N}\cap N^n_+$ и конечна норма

$$\|f\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)}=\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}}\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Положим

$$\rho(x, \Gamma(\Omega)) = \inf_{y\in\Gamma(\Omega)} |x-y|, \quad \Omega_\delta = \{x\in\Omega;\ \rho(x, \Gamma(\Omega)) > \delta\},$$

$$\urcorner\alpha = \{\beta\in N_+^n;\ \beta\leqslant\alpha\}, \quad \llcorner\alpha = \{\beta\in N_+^n;\ \beta\geqslant\alpha\}.$$

Для пространств $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть Ω — произвольное открытое множество, $\mathfrak{N}$ — правильный многогранник, $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$.*

Тогда для того, чтобы существовала последовательность $\varphi_s\in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \left\| f - \varphi_s \right\|_{C^{\mathfrak{N}}(\Omega)} = 0, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и в случае неограниченного открытого множества Ω $\lim\limits_{\substack{y\to\infty\\ y\in\Omega}} D^\alpha f(y) = 0, \quad \forall\alpha\in N_+^n \cap \mathfrak{N}$.

Возможность приближения функций $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ гладкими финитными функциями тесно связана с возможностью продолжения функций $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ нулем вне Ω с сохранением класса.

Теорема 2. *Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условию $\Gamma(\Omega) = \Gamma(\overline{\Omega})$.*

Для того, чтобы для данной функции $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ существовала последовательность $\{\varphi_s\}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \left\| f - \varphi_s \right\|_{C^{\mathfrak{N}}(\Omega)} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi\in C^{\mathfrak{N}}(E_n)$, где Φ продолжение нулем на все пространство функции f.

Теорема 3. *Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество и $f\in C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$. Для выполнения условия (1) необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha\in\mathfrak{N}\cap N_+^n$ $\Phi_\alpha(x)\in C(E_n)$, где*

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha f(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\notin\Omega. \end{cases}$$

Для пространств $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ справедливы

Теорема 4. *Пусть $f\in W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$, где Ω — открытое множество, $1\leqslant p<\infty$. Если для любого компакта K и мультииндекса $\alpha\in\mathfrak{N}^0$*

$$\|D^\alpha f\|_{L_p(K\cap(\Omega-\Omega_\delta))} = o(\delta)$$

при $\delta\to 0$, то $\Phi\in W_p^{\mathfrak{N}}(E_n)$, где $\mathfrak{N}^0 = \{\beta\in\mathfrak{N};\ \beta = \alpha - \overline{1},\ \alpha\in\mathfrak{N},\ \overline{1} = (1, 0, \ldots, 0)\}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\notin\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Лемма. *Пусть $f\in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N})$, $1\leqslant p<\infty$, где Ω — произвольное открытое множество в E_n. Если существует последовательность функций $\varphi_s\in C_0^\infty(\Omega)$ $(s=1, 2, \ldots)$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \left\| f - \varphi_s \right\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)} = 0$,* то $\Phi(x)\in W_p^{\mathfrak{N}}(E_n)$, где Φ определяется формулой 2).

Теорема 5. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$, $f\in W_p^{\mathfrak{N}}(E_n)$ *и для любого* $\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\partial\mathfrak{N}$ $D^\alpha f(x)=0$ *при* $x\notin\Omega$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_s\in C_0^\infty(\Omega)$ $(s=1,2,\ldots)$ *такая, что*

$$\lim_{s\to\infty}\left\|f-\varphi_s\right\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)}=0.$$

Теорема 6. *Пусть* $\Omega\subseteq E^n$ — *произвольное открытое множество,* $1\leqslant p<\infty$, $\mathfrak{N}$ — *правильный многогранник и* $f\in W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$. *Тогда существует такая последовательность* $\varphi_s(x)\in C(\Omega)$ $(s=1,2,\ldots)$, *что*

$$\lim_{s\to\infty}\left\|f-\varphi_s\right\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)}=0,$$

причем при $\alpha\in\mathfrak{N}$ $\quad\lim_{s\to\infty}\left\|(D^\alpha f(x)-D^\alpha\varphi_s(x))\rho(x)^{|\alpha|-l_\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)}=0,$

а при $\alpha\notin\mathfrak{N}$ $\quad\left\|D^\alpha\varphi_s(x)\rho(x)^{|\alpha|-l_\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant c_{\alpha,s}\left\|f\right\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)},$

где $\rho(x)$ — *расстояние от точки* x *до границы* $\Gamma(\Omega)$, $l_\alpha=\max\limits_{\beta\in\mathfrak{N}\cap\llcorner_\alpha}|\beta|$, $l^\alpha=\max\limits_{\beta\in\mathfrak{N}\cap\urcorner_\alpha}|\beta|$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Մ. ԱՐԱՄՅԱՆ

Ողորկ և ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաների խտությամբ $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ և $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ տարածություններում

Աշխատանքում բերված են բավարար պայմաններ վերը նշված տարածությունների ֆունկցիաները զրոյով շարունակելու համար։ $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ և $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ տարածությունների ֆունկցիաների համար ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի հնարավոր լինի նրանց մոտարկել ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաներով։

Արդյունքները ստացված են որոշակի կշռով միջինացումների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962. [2] *E. Gagliardo*, Ricerche di mat., v. 7, № 1 (1958). [3] *В. П. Ильин*, Тр. МИАН СССР, т. 66 (1962). [4] *С. М. Никольский*, Изв. АН СССР. Сер. математика, т. 27, № 5 (1963). [5] *Г. Г. Казарян*, Мат. заметки, т. 2, № 1 (1967). [6] *В. И. Буренков*, Тр. МИАН СССР, т. 117 (1972). [7] *В. И. Буренков*, ДАН СССР, т. 202, № 2 (1972).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.554

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О теореме «острие клина» для мероморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 11/II 1988)

Классическая теорема об «острие клина» Н. Н. Боголюбова (см., например, ([1,2])) имеет множество различных обобщений как по направлению усложнения областей, так и в связи с различными условиями совпадения функций на острие клина. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые возможные варианты распространения теоремы Боголюбова на мероморфные функции.

Пусть D^+ и D^-—области в $\mathbf{C}^N$ и функции $f^\pm$ голоморфны соответственно в $D^\pm$. Если $D^+\cap D^-$—тоже область и функции f^+, f^- совпадают в вещественной окрестности некоторой точки $z^0\in D^+\cap D^-$, то они являются голоморфным продолжением одна другой, т. е. существует функция f, голоморфная в $D^+\cup D^-$ и такая, что $f|_{D^\pm}=f^\pm$. Теорему об „острие клина" Боголюбова можно рассматривать как граничную теорему о продолжении такого типа, когда $D^+\cap D^-$ пусто, но $\partial D^+\cap\partial D^-$ содержит область в $\mathbf{R}^N$ и предельные значения $f^\pm$ в этой области совпадают. Простейший содержательный случай в этом направлении получается при $N=1$. Если $D^\pm$ лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскости и интервал $\Delta\subset\mathbf{R}$ есть общая открытая часть их границ, то, как хорошо известно, функции $f^\pm$, голоморфные в $D^\pm$, непрерывные на $D^\pm\cup\Delta$ соответственно и совпадающие на Δ, образуют единую голоморфную функцию в области $D^+\cup\Delta\cup D^-$.

Основные трудности, возникающие при переходе от голоморфных функций к мероморфным, связаны с понятием совпадения мероморфных функций f^+ и f^- на общей части границы $D^+\cup D^-$ (сложным даже в случае $N=1$).

Рассмотрим несколько естественных определений этого понятия в классической ситуации теоремы Боголюбова: D—область в $\mathbf{C}^N$ такая, что $M=D\cap\mathbf{R}^N$ связно и $D^\pm=\{z\in D:\pm y_j>0,\ j=1, 2, \ldots, N\}$ (здесь $z=x+iy$, x, $y\in\mathbf{R}^N$).

1. Простейший случай — это когда функции $f^\pm$, мероморфные соответственно в $D^\pm$, продолжаются на острие M как отображение в сферу Римана $\overline{\mathbf{C}}$ и эти продолжения совпадают на M (тем самым на M не допускаются точки неопределенности). Тогда для каждой точки $z^0\in M$ найдется окрестность $U\subset D$ такая, что либо $f^\pm$, либо $1/f^\pm$ голоморфны в $D^\pm\cap U$, непрерывны в $(D^\pm\cup M)\cap U$ и совпадают

на $M\cap U$. По теореме Боголюбова, f^+ или $1/f^\pm$ голоморфно продолжаются в некоторую окрестность V точки z^0 в $\mathbb{C}^N$ и, значит, в обоих случаях $f^\pm$ продолжается до функции, мероморфной в $D^+\cup V\cup D^-$. Из теоремы единственности следует, что $f^\pm$ допускают мероморфное продолжение в область $D^+\cup\Omega\cup D^-$, где Ω — некоторая окрестность M в $\mathbb{C}^N$.

2. Хорошо известно, что функции $f^\pm$, мероморфные соответственно в $D^\pm$, представляются в виде отношений $h^\pm/g^\pm$, где функции h^+ и g^+ голоморфны в D^+, а h^- и g^- в D^-. Предположим, что каждая из этих функций непрерывно продолжается на острие M и там имеет место равенство $h^+(x)\cdot g^-(x)=h^-(x)\cdot g^+(x)$. Это условие, очевидно, выполняется, когда f^+ и f^- мероморфны в окрестности M и там совпадают. Оказывается, при этом естественном условии совпадения мероморфного продолжения в окрестности острия в общем случае нет. Контрпример получается уже при $N=1$.

Пусть $D^\pm=\{z\in\mathbb{C}:\ \pm y>0\}$, $M=\mathbb{R}$ и $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{z-i/k^2}$, где числа a_k такие, что ряд сходится равномерно внутри области $\mathbb{C}\setminus\{0, i, i/4, i/9, \dots\}$. Положим $h^+(z)=z\cdot f(z)\cdot B(z)$, $g^+(z)=z\cdot B(z)$, где $B(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{z-i/k^2}{z+i/k^2}$ — произведение Бляшке, голоморфное и равномерно ограниченное в D^+. Функции $h^+(z)$ и $g^+(z)$, очевидно, голоморфны в D^+, а $f^+(z)=f|_{D^+}=h^+(z)/g^+(z)$ мероморфна в D^+. Пусть, далее, $h^-(z)=f(z)$, $g^-(z)\equiv 1$ и $f^-(z)=h^-(z)=f|_{D^-}$ в D^-. Легко видеть, что функции $h^\pm$ и $g^\pm$ непрерывно продолжаются на $D^\pm\cup M$ и на M справедливо равенство $h^+\cdot g^-=h^-\cdot g^+$. Однако мероморфное продолжение через точку $z=0$ невозможно, потому что она является предельной точкой для полюсов функции f^+.

Отметим, что в частном случае, когда $g^\pm$ (или $h^\pm$) голоморфно продолжаются в окрестность острия (например, когда $g^\pm$ — многочлены), мероморфное продолжение $f^\pm$ на M следует из теоремы Боголюбова. В самом деле, тогда существует окрестность $U\supset M$, такая, что функции $g^\pm$ голоморфны в U, а $h^+\cdot g^-$ и $h^-\cdot g^+$ голоморфны соответственно в $D^\pm\cap U$, непрерывно продолжаются на $(D^\pm\cap U)\cup M$ и (по нашему условию) совпадают на M. Пусть φ — голоморфное продолжение $h^\pm\cdot g^\mp$ в окрестность острия из теоремы Боголюбова, тогда функция $f=\varphi/(g^+\cdot g^-)$ мероморфна в U и $f|_{D_\pm}=h^\pm/g^\pm=f^\pm$, т. е. f — искомое продолжение.

3. Контрпример в случае 2 оказался возможным из-за того, что принятое там условие совпадений не контролирует поведение полюсов (и точек неопределенности в общем случае) в окрестности M. Поэтому можно заранее предположить, что полярные множества функций $f^\pm$ „хорошо согласуются" на M, т. е. существует $(N-1)$-мерное аналитическое множество A в некоторой окрестности $U\supset M$ такое, что полярные множества $P_{f^\pm}\cap U\subset A$. Вне $M\cap A$ потребуем обычное совпадение голоморфных функций: $f^\pm$ непрерывно продолжаются на $(D^\pm\cup M)\cap(U\setminus A)$ и совпадают на $M\setminus A$. При таком условии совпадения тоже имеет место аналог теоремы Боголюбова, ко-

торый также сводится к голоморфному случаю. Действительно, в окрестности произвольной точки $z^0 \in M$ множество A либо пусто, либо задается одной голоморфной функцией, скажем $A \cap V = \{\varphi = 0\}$ (V — окрестность z^0). Так как $f^{\pm}$ мероморфны и A есть локально конечное объединение своих неприводимых компонент (см., например, ([1])), то существует число s такое, что функции $f^{\pm} \cdot \varphi^s$ голоморфны соответственно в $D^{\pm} \cap V$, непрерывны в $(D^{\pm} \cup M) \cap V$ и совпадают на $M \cap V$. По теореме Боголюбова они голоморфно продолжаются в окрестность z^0 и, значит, $f^{\pm}$ мероморфно продолжаются в эту окрестность. Глобальное продолжение в окрестность M следует из теоремы единственности.

4. Пусть для простоты D — шар $B(0, r)$ и функции $f^{\pm}$, голоморфные соответственно в $D^{\pm}$, удовлетворяют условиям теоремы Боголюбова. Комплексная прямая L вида $z = a + \lambda b$, где $a \in M$, $b \in D^+$, $\lambda \in \mathbf{C}$, пересекает D по кругу, а $D^{\pm} \cap L$ — полукруги с общим отрезком границы $\Delta = M \cap L$. На этой плоскости функции $f^{\pm}$, совпадающие на Δ, образуют единую голоморфную функцию в $D \cap L$. Это свойство дает возможность принять следующие определения совпадений $f^{\pm}$ на M. Можно требовать, чтобы для каждой комплексной прямой L указанного вида сужения функции f на L мероморфно продолжались на $L \cap D$ и чтобы для любых L и L' указанного вида эти продолжения совпадали на $L \cap L'$ (как отображения в $\overline{\mathbf{C}}$). Но это очень сильное условие, и для справедливости теоремы можно брать не все L, а лишь некоторое их подсемейство. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство комплексных прямых в $\mathbf{C}^N$ вида $L: z = a + \lambda b^j$, $\lambda \in \mathbf{C}$, где $a \in M$ — произвольное и $\{b^1, b^2, \ldots, b^N\} \subset D^+$ — фиксированный набор линейно-независимых векторов. Предположим, что для каждой прямой $L \in \mathcal{L}$ функции $f^{\pm}|_{D^{\pm} \cap L}$ мероморфно продолжаются на $D \cap L$ и для любых различных $L, L' \in \mathcal{L}$ эти продолжения совпадают в точке $L \cap L' \in M$, т. е. образуют единую функцию на M (со значением в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$). Сделаем $\mathbf{C}$-линейное преобразование l пространства $\mathbf{C}^N$ с вещественными коэффициентами, сохраняющее $\mathbf{R}^N$ и переводящее векторы b^j в базисные векторы $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = e^j$ (1 на j-ом месте), $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда функции $f^{\pm} \circ l^{-1}$ определяют единую функцию f на множестве $X = (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_N) \cup \ldots \cup (E_1 \times \ldots \times E_{N-1} \times D_N) \subset \mathbf{C}^N$, где $D_j = l(D) \cap \mathbf{C}_{z_j}$ и E_j — отрезок вида $|x_j| \leq r$ на оси x_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. По построению f сепаратно мероморфна на X, а тогда по теореме автора (см. ([4]), теорема 2) она продолжается до функции $\tilde{f}$, мероморфной в области $\Omega \supset X$. Так как $\tilde{f}|_{X \cap l(D^{\pm})} = f^{\pm}|_{X \cap l(D^{\pm})}$, то из теоремы единственности следует, что функция $\hat{f}$, равная $\tilde{f}$ в Ω и $f^{\pm}$ соответственно в $D^{\pm}$, мероморфна в области $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ и является искомым продолжением $f^{\pm}$.

По существу мы доказали следующее

Предложение. *Пусть функция f мероморфна в областях D^+ и D^-, а на M определена как отображение в $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Предположим, что сужение f на каждую комплексную прямую $L \in \mathcal{L}$ является мероморфной функцией в одномерной области $D \cap L$.*

Тогда существует окрестность $\Omega \supset M$ *в* $\mathbb{C}^N$ *такая, что* f *продолжается до функции, мероморфной в* $D^+ \cup \Omega \cup D^-$.

Отметим, что условие совпадения продолжений $f^\pm|_{D^\pm \cap L}$ на $L \cap L'$ для $L, L' \in \mathcal{L}$ необходима. Это видно из следующего простого примера. Функция $f(z) = \exp\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)$ голоморфна в $D^+ \cup D^-$ (в $\mathbb{C}^2$) и ее сужение на любую комплексную прямую $L: z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in D^+$, голоморфно при $a \neq 0$, так как все особенности f лежат на прямой $z_1 + z_2 = 0$. На прямой $L: z = ib$, $b \in D^+$, сужение f равно $\exp\left(\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right)$, т. е. постоянно (в частности, голоморфно продолжается на $L \cap D$), но эти константы для различных L различны и функция $f|_{D^+ \cup D^-}$, очевидно, не продолжается мероморфно в окрестность M.

В заключение приведем формулировку теоремы «острие клина» для мероморфных функций, аналогичную классической теореме Н. Н. Боголюбова и вытекающую из предыдущих рассуждений.

Теорема. *Пусть область* D *в* $\mathbb{C}^N$ *такая, что* $M = D \cap \mathbb{R}_N$ *связно,* $D^\pm = \{z \in D: \pm y_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, N\}$, *функции* $f^\pm$ *мероморфны соответственно в областях* $D^\pm$ *и совпадают на* M *в смысле пунктов 1, 3 или 4. Тогда существует окрестность* $\Omega \supset M$ *и мероморфная в* $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ *функция* f *такая, что* $f|_{D^\pm} = f^\pm$.

Вычислительный центр Госплана
Армянской ССР

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար «սեպի սուր ծայրի» թեորեմի մասին

Հոդվածում դիտարկվում են Ն. Ն. Բոգոլյուբովի $\mathbb{C}^N$*-ում,* $N > 1$ *անալիտիկ շարունակության մասին հանրահայտ թեորեմի որոշ ընդհանրացումներ մերոմորֆ ֆունկցիաների դասում։*

Հիմնական դժվարությունը, որ ծագում է հոլոմորֆ ֆունկցիաներից մերոմորֆներին անցնելու ժամանակ, կապված է երկու մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային արժեքների «համընկնելու» գաղափարի հետ սեպի սուր ծայրի վրա։

Դա այնքան էլ պարզ չէ անգամ $N = 1$ *դեպքում, հարթության վրա, երբ մերոմորֆ ֆունկցիաների բևեռային կետերի բազմությունը դիսկրետ է։ Շատ կոմպլեքս փոփոխականների դեպքում մերոմորֆ ֆունկցիաները, բացի բևեռային բազմությունից, որը դիսկրետ չէ, կարող են ունենալ նաև անորոշության կետեր, որոնց կամայական շրջակայքում ֆունկցիան կարող է ընդունել ցանկացած արժեք։ Թեորեմի իրավացիությունը կախված է համընկնելիության սահմանումից, որի հնարավոր տարբերակները դիտարկվում են հոդվածում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов*, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958. [2] *В. С. Владимиров*. Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 26, с. 825—838 (1962). [3] *Е. М. Чиркс*, Комплексные аналитические множества, Наука, М., 1985. [4] *М. В. Казарян*, Мат. сб., т. 125(167), № 3(11), с. 384—397 (1984).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Сходимость по мере и метрический изоморфизм

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 11/II 1988)

Сначала напомним некоторые определения.

Отображение одного пространства с мерой на другое называется изоморфным, если оно взаимно-однозначно и как оно, так и обратное ему отображение переводит всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. В том случае, когда оба пространства совпадают, изоморфизм называется автоморфизмом. Два пространства, допускающие изоморфные отображения друг на друга, называются изоморфными. Две функции f и f', определенные, соответственно, на пространствах M и M', называются изоморфными, если существуют такие множества $N \subset M$ и $N' \subset M'$ меры нуль и такое изоморфное отображение T пространства $M \setminus N$ на пространство $M' \setminus M'$, что $f(x) = f'(Tx)$ для всякого $x \in M \setminus N$. В этом случае говорят также, что функции f и f' принадлежат к одному метрическому типу ([1]).

Для пространств (X, μ), изоморфных отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега, в работе ([2]) доказано, что для любой последовательности f_n действительных измеримых функций на X, сходящейся по мере к функции f, существует такая последовательность S_n автоморфизмов пространства X, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(S_n(x)) = f(x)$ для μ— п. в. x.

Таким образом, функции, являющиеся членами сходящейся по мере последовательности, можно заменить метрически изоморфными им функциями так, чтобы полученная последовательность сходилась почти всюду. При этом построенная в ([2]) последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n_0, что для всякого $n > n_0$ $\mu\{x \in X : S_n(x) \neq x\} < \varepsilon$.

Приведенное автором доказательство этого результата основано на понятии метрического типа измеримых функций и использует классификационную теорему В. А. Рохлина ([1]).

В настоящей заметке доказывается указанный результат без помощи классификационной теоремы, используется лишь классическая теорема Н. Н. Лузина. При этом рассматривается несколько более общая ситуация.

Теорема. *Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ_X, μ — регулярная борелевская неатомическая мера на X, $\mu(X) < \infty$. Предположим, что измеримые подмножества X с* *равными μ-мерами изоморфны. Пусть, далее, (Y, ρ_Y) — сепарабельное метрическое пространство и φ_n — последовательность измеримых функций на X со значениями в Y, сходящаяся по мере на X к функции φ. Тогда существует последовательность автоморфизмов S_n пространства (X, μ) такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x) \text{ для } \mu\text{— п. в. } x.$$

При этом последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное n_0, что для всякого $n>n_0$

$$\mu\{x\in X : S_n(x) \neq x\}<\varepsilon.$$

Доказательство. Очевидно, можно считать $\mu(X)=1$. Предположим сначала, что функция φ непрерывна. Выберем числа $\alpha_n>0$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0, \tag{1}$$

где $E_n = \{x\in X : \rho_Y(\varphi_n(x), \varphi(x)) \geq \alpha_n\}$.

Здесь, без ограничения общности, мы можем считать, что $\mu(E_n)>0$ для всех n.

Для любого натурального k пусть $\{x_{k,1}, \ldots, x_{k,q_k}\}$ есть $1/k$-сеть в X. В силу второго равенства в (1) можно построить натуральные числа $m_1<m_2< \ldots <m_k< \ldots$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \mu(E_{m_k})<\infty. \tag{2}$$

Далее, выберем натуральные числа $p_1<p_2< \ldots <p_k< \ldots$ так, чтобы

$$\mu(E_n) < \mu(E_{m_k}) \text{ при } n>p_k. \tag{3}$$

В дальнейшем через $B(x; r)$ мы обозначим открытый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r.

Перейдем к построению автоморфизмов S_n. При $n\leq p_1$ будем считать, что S_n совпадает с тождественным автоморфизмом. Пусть $p_k<n\leq p_{k+1}$. Положим

$$A_{n,1}=E_n\cap B(x_{k,1}; 1/k);$$

$$A_{n,j}=E_n\cap\left[B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right)\right], \; j=2, \ldots, q_k.$$

Так как мера μ неатомическая, то существуют борелевские множества $G_{k,1}\subset B(x_{k,1}; 1/k)$

и $G_{k,j}\subset B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right)$, $j=2, \ldots, q_k$

такие, что $\mu(G_{k,1})=\min(\mu(B(x_{k,j}; 1/k)), \mu(E_{m_k}))$

и $\mu(G_{k,j})=\min\left(\mu\left(B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right)\right), \mu(E_{m_k}), \right), j=2, \ldots, q_k$

Тогда в силу (3) имеем

$$\mu(A_{n,j}) \leq \mu(G_{k,j}) \text{ при } p_k < n \leq p_{k+1},\ 1 \leq j \leq q_k. \tag{4}$$

Далее, полагая $G_k = \bigcup_{j=1}^{q_k} G_{j,k}$, в силу (2) будем иметь

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} q_k \mu(E_{m_k}) = 0. \tag{5}$$

Согласно допущениям относительно меры μ и в силу (4), для каждого $j = 1, \ldots, q_k$ существует изоморфное отображение $\sigma_{n,j}$ множества $A_{n,j} \setminus G_{k,j}$ на некоторое подмножество множества $G_{k,j} \setminus A_{n,j}$. Теперь, учитывая то, что согласно построению множества $A_{n,1}, \ldots, A_{n,q_k}$ между собой и множества $G_{k,1}, \ldots, G_{k,q_k}$ между собой попарно не пересекаются, положим

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \sigma_{n,j}(x), \text{ если } x \in A_{n,j} \setminus G_{k,j},\ j = 1, \ldots, q_k \\ \sigma_{n,j}^{-1}(x), \text{ если } x \in \sigma_{n,j}(A_{n,j} \setminus G_{k,j}),\ j = 1, \ldots, q_k \\ x, \text{ если } x \notin \bigcup_{j=1}^{q_k} [(A_{n,j} \setminus G_{k,j}) \cup \sigma_{n,j}(A_{n,j} \setminus G_{k,j})] \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что для любого натурального k

$$\bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \bigcup_{j=1}^{q_k} \sigma_n(A_{n,j}) \subset G_k. \tag{7}$$

Положим $S_n = \sigma_n^{-1}$. Очевидно S_n есть автоморфизм пространства с мерой (X, μ). При этом имеет место неравенство

$$\rho_X(S_n(x), x) < 2/k \text{ для всех } x \in X \text{ и } p_k < n < p_{k+1}.$$

Отсюда, в силу непрерывности φ, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(S_n(x)) = \varphi(x). \tag{8}$$

Далее, в силу (7) имеем

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=p_l+1}^{\infty} \sigma_n(E_n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \sigma_n(E_n) =$$

$$= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \bigcup_{j=1}^{q_k} \sigma_n(A_{n,j}) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} G_k.$$

Отсюда и из (5) следует

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n)\right) = 0. \tag{9}$$

Если $x \in X \setminus \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n)$, то начиная с некоторого номера $S_n(x) \in X \setminus E_n$. Таким образом, почти все точки x обладают тем свойством, что начиная с некоторого (зависящего от x) номера $N(x)$ имеет место неравенство

$$\rho_Y(\varphi_n(S_n(x)), \varphi(S_n(x))) < \alpha_n,\ n > N(x). \tag{10}$$

Тогда в силу (8) и (10) из неравенства

$$\rho_Y(\varphi_n(S_n(x)),\ \varphi(x))\leqslant\rho_Y(\varphi_n(S_n(x)),\ \varphi(S_n(x)))+\rho_Y(\varphi(S_n(x)),\ \varphi(x))$$

получим $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(S_n(x))=\varphi(x)$ для μ—п. в. x.

Пусть теперь φ есть произвольная измеримая функция на X со значениями в сепарабельном метрическом пространстве Y. Применяя теорему Лизина ([3], с. 89), можно построить последовательность попарно непересекающихся компактных множеств A_k таких, что функция φ, рассмотренная только на A_k, является непрерывной функцией на A_k для каждого $k=1, 2, \ldots$ и имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)=1.$$

В силу доказанного частного случая, для каждого k существует последовательность автоморфизмов $S_{k,n}$, $n=1, 2, \ldots$ множества A_k такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(S_{k,n}(x))=\varphi(x)$, для μ—п. в. $x\in A_k$.

Теперь очевидно, что полагая при любом n

$$S_n(x)=S_{k,n}(x) \text{ при } x\in A_k,\ k=1, 2, \ldots,$$

мы получим последовательность автоморфизмов, удовлетворяющую всем утверждениям теоремы.

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армянской ССР

Յ. Ա. ԹԱԼԱՅԱՆ

Զուգամիտություն ըստ չափի և մետրիկական իզոմորֆիզմ

Ապացուցվում է հետևյալը։

Թեորեմ. *Ենթադրենք X-ը կոմպակտ մետրիկական տարածություն է, μ-ն ռեգուլյար բորելյան չափ X-ի վրա այնպիսին, որ $\mu(X)<\infty$ և X-ի հավասար μ-չափ ունեցող չափելի ենթաբազմությունները իզոմորֆ են։ Ենթադրենք, բացի այդ, որ Y-ը սեպարաբել մետրիկական տարածություն է, և $\{\varphi_n: X\to Y,\ n=1, 2, \ldots\}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է, որը X-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է φ ֆունկցիային։ Այդ դեպքում գոյություն ունի (X, μ) տարածության ավտոմորֆիզմների այնպիսի S_n հաջորդականություն, որ*

1) *Յանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ երբ $n>n_0$, ապա $\mu\{x\in X: S_n(x)\neq x\}<\varepsilon$*

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(S_n(x))=\varphi(x)$ *համարյա ամենուրեք։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Рохлин*, УМН, т. 12, вып. 2(74), с. 169—174 (1957). [2] *И. И. Требукова*, УМН, т. 15, вып. 2(92), с. 195—199 (1960) [3] *Г. Федерер*, Геометрическая теория меры, Наука, М., 1987.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 519.7

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян

Нельсоновские системы булевых уравнений и функции с малым числом нулей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 12/XI 1987)

Одной из широко распространенных на практике моделей алгоритмов распознавания является модель алгоритмов с представительными наборами. Важной и трудоемкой частью алгоритмов данной модели является реализация с помощью дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф) функции, заданной таблицей нулей и эквивалентной произведению левых частей Нельсоновской системы булевых уравнений:

$$x_1^{\beta_{i1}} \vee x_2^{\beta_{i2}} \vee \ldots \vee x_n^{\beta_{in}} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, k, \ \text{где } x^\beta = \begin{cases} x, & \beta = 1 \\ x+1, & \beta = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(Здесь и далее $+$ обозначает сложение по mod 2.)

Эта задача исследована в работах [1,2], из которых следует возможность практического уменьшения количества уравнений в системе (1) без существенного увеличения числа членов в уравнениях.

В настоящей работе рассмотрен новый способ реализации функций с малым числом нулей, позволяющий уменьшать количество уравнений Нельсоновской системы не менее, чем в 10 раз.

Все не определяемые понятия теории д. н. ф. изложены в [3,4]. Через E^n обозначается множество вершин n-мерного единичного куба $\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Множество булевых функций, зависящих от n переменных, обозначается через $P(n)$. Множество единиц функции f—это $N_f = \{\alpha \in E^n | f(\alpha) = 1\}$. Множество нулей — это $E^n \setminus N_f$.

Определение. Функция $f \in P(n)$ называется *линеаризируемой*, если $f = \prod\limits_i g_i$, где g_i—линейная функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем Галуа $GF(2)$.

Класс линеаризируемых функций обозначается через $\Pi L(n)$.

Пусть $M_f = \{g | g$—линейная функция и $g \cdot f \equiv 0\}$—линейное подпространство $n+1$-мерного пространства линейных над $GF(2)$ функций.

Определение. Пусть $f \in \Pi L(n)$. Размерность $\dim f$ определяется как число $n - \dim M_f$.

Предложение. *Пусть $f \in \Pi L(n)$, тогда кратчайшее в смысле* *количества сомножителей представление f имеет вид $f=\prod_{g\in B}(g+1)$, где B — базис M_f, а $|N_f|=2^{\dim f}$.*

Определение. Выражение $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_m$ называется ***линеаризированной дизъюнктивной нормальной формой*** (л. д. н. ф.), если $f_i \in \Pi L(n)$. Число m называется длиной л. д. н. ф.

Следует особо отметить, что длина л. д. н. ф. инвариантна относительно действия аффинной группы преобразований вида $y=Ax+b$ вершин куба E^n.

Задача реализации булевой функции f, заданной матрицей нулей, ставится следующим образом. Задана бинарная матрица M_0 размера $k \times n$ с попарно различными строками (каждая строка соответствует нулю функции f). Требуется построить л. д. н. ф. возможно меньшей длины, реализующую функцию f. Очевидно, что f эквивалентна произведению левых частей Нельсоновской системы (1), для которой $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in})$ — i-ая строка матрицы M_0.

Пусть $m \leq n+1$.

Определение. Система векторов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subseteq E^n$ находится в общем положении, если из условий $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m=0$ следует: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$, где $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Эквивалентным является следующее определение: векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ находятся в общем положении, если размерность наименьшей в $\Pi L(n)$ функции, содержащей $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, равна $m-1$.

Опишем метод л. д. н. ф.-реализации функции f, заданной матрицей k нулей M_0.

Пусть $r=\operatorname{rank} M_0$, тогда $\lceil \log_2 k \rceil \leq r \leq k$, где $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее a. Для простоты предположим, что линейно-независимы первые столбцы в M_0. Столбцу с номером i сопоставим переменную x_i. Все столбцы с номерами, большими r, представляются в виде линейных комбинаций первых r столбцов. Поэтому строки матрицы M_0 удовлетворяют системе линейных уравнений над $GF(2)$: $x_{r+i}=\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{ir}x_r$, $i=1, 2, \ldots, n-r$, $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$. Ясно, что $g=\prod_{i=1}^{n-r}(\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{ir}x_r+x_{r+i}+1)$ — функция из $\Pi L(n)$, содержащая M_0. Поэтому $N_{g+1} \subseteq E^n \setminus M_0$ и $g+1=\bigvee_{i=1}^{n-r}(\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{ir}x_r+x_{r+i})$ покрывает часть N_f. Для получения покрытия N_f достаточно покрыть $N_g \setminus M_0$. Но N_g — смежный класс размерности r, и он изоморфен E^r, следовательно, задача сводится к построению л. д. н. ф. функции, зависящей от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, имеющей матрицу нулей, состоящую из первых r столбцов матрицы M_0.

Обозначим через $L(n, r, k)$ наибольшую длину кратчайшей л. д. н. ф., реализующей функцию от n переменных с k нулями, ранг матрицы нулей которой равен r. Из вышеизложенного следует, что

$$L(n, r, k) \leq n-r+L(r, r, k) \text{ и } L(n, r, k) \leq n-r+\left\lceil 2^{r-1}-\frac{k}{2}\right\rceil.$$

Последнее неравенство следует из того факта, что в $N_g \setminus M_0$ содержится 2^r-k векторов, а всякие два вектора образуют функцию из $\Pi L(n)$.

Всюду далее через $\varphi(n)$ обозначается функция, сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $n\to+\infty$.

Теорема 1. *Если* $r\leqslant\log_2 n-\varphi(n)$ *или* $2^r-k=o(n)$, *то*

$$L(n, r, k)\leqslant n(1+o(1)).$$

Пусть $k\leqslant n+1$ и матрица нулей M_0 состоит из строк, находящихся в общем положении. Тогда подходящим аффинным преобразованием подматрица матрицы M_0, состоящая из $k-1$-го линейно-независимого столбца, переводится в матрицу, состоящую из k различных строк, содержащих не более одной 1. Следовательно, л. д. н. ф. функции f имеет длину не более, чем $n-(k-1)+d$, где d — длина л. д. н. ф. функции h, зависящей от $k-1$ переменной, равной 1 на всех векторах длины $k-1$, содержащих не менее двух 1. Нетрудно видеть, что $h=x_1x_2\vee(x_1+x_2)x_3\vee(x_1+x_2+x_3)x_4\vee\ldots\vee(x_1+\ldots+x_{k-2})x_{k-1}$ и $d=k-2$. Следовательно, длина л. д. н. ф. функции f равна $n-1$.

Теорема 2. *Если* $f\in P(n)$ *и имеет* $k\leqslant n+1$ *нулей, находящихся в общем положении, то* f *реализуется л. д. н. ф. длины* $n-1$.

Рассмотрим теперь функции $f\in P(n)$ с k нулями при $k\leqslant 10$. Ясно, что длина $l(f)$ л. д. н. ф. функции f не больше $n-r+d$, где $r=\operatorname{rank} M_0$, d — длина л. д. н. ф. функции $h\in P(r)$, множество нулей которой содержит все r-мерные векторы с не более, чем одной 1. Ввиду того, что $\rceil\log_2 k\lceil\leqslant r\leqslant k$, для получения $l(f)$ необходимо рассмотреть следующие случаи:

а) $k=1$, тогда $h=x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_r$ и $l(f)=n$;

б) $k=2, 3$, векторы находятся в общем положении и $l(f)=n-1$;

в) $k=4$, при $r=3$ — общее положение — $l(f)=n-1$, при $r=2$ нули составляют подпространство размерности 2, поэтому $l(f)=n-2$;

г) $k=5$, при $r=4$ — общее положение — $l(f)=n-1$, а при $r=3$ имеем $2^r-k=3$, для покрытия достаточно 2 смежных класса и $l(f)=n-1$;

д) $k=6$, при $r=5$ — общее положение — $l(f)=n-1$, при $r=4$ в E^4 можно выбрать 3 смежных класса, покрывающих N_h и $l(f)=n-1$, при $r=3$ имеем $2^r-k=2$ и $l(f)=n-2$;

е) $k=7$, при $r=6$ — общее положение — $l(f)=n-1$, при $r=5$ в E^5 можно выбрать 5 смежных классов, покрывающих N_h и $l(f)=n$, при $r=4$ в E^4 N_h покрывают 3 класса и $l(f)=n-1$, при $r=3$ имеем $2^r-k=1$ и $l(f)=n-2$.

Для $k=8, 9, 10$ был использован алгоритм построения л. д. н. ф. функции, заданной таблицей нулей. $PL/1(O)$-реализация этого алгоритма была применена ко всем функциям h, получающимся при $k=8, 9, 10$ и не переводящимся друг в друга перестановкой переменных. При $k=8$ таких функций имеется 37, при $k=9$ — 107, при $k=10$ — 582. Получены следующие результаты:

а) $k=8$, при $r=4$ — $l(f)=n-1$, при $r=5$ — $l(f)=n+1$, при $r=6$ — $l(f)=$

$=n+1$, при $r=3$ имеем $2^r-k=0$ и $l(f)=n-3$, при $r=7$—общее положение $-l(f)=n-1$;

б) $k=9$, при $r=4$ имеем $2^r-k=7$ и для покрытия N_h достаточно 4 члена— $l(f)=n$, при $r=5$ — $l(f)=n+1$, при $r=6$ — $l(f)=n+2$, при $r=7$ — $l(f)=n+1$, при $r=8$ — общее положение— $l(f)=$ $=n-1$;

в) $k=10$, при $r=4$ имеем $2^r-k=6$ и достаточно для покрытия N_h всего 3 члена и $l(f)=n-1$, при $r=5$ — $l(f)=n+1$, при $r=6$ — $l(f)=n+2$, при $r=7$ — $l(f)=n+2$, при $r=8$ — $l(f)=n+1$, при $r=9$—общее положение — $l(f)=n-1$.

Итак, всякая Нельсоновская система может быть сокращена в 10 раз, при этом количество членов в одном уравнении не больше, чем $n+2$.

Изложим теперь „частотное" решение поставленной задачи.

Теорема 3. *Пусть* $m \cdot k=o(2^{n/2})$, $m=o(2^{n-k})$ *и* $k \leqslant n$. *Тогда почти все бинарные матрицы, состоящие из* $m \cdot k$ *строк и* n *столбцов, состоят из последовательных групп из* k, *находящихся в общем положении строк.*

Следствие. а) *если* $k \leqslant n-\varphi(n)$, *то почти все наборы из* k *векторов находятся в общем положении;*

б) *если* $k=\text{const}$, *то утверждение теоремы* 3 *верно при* $m=$ $=o(2^{n/2})$.

Отсюда получаем, что почти все функции $f \in P(n)$ с $k \leqslant n-\varphi(n)$ нулями реализуются л. д. н. ф. длины не более, чем $n-1$. Для любой постоянной k количество уравнений системы (1) может быть почти всегда уменьшено в k раз, если общее количество уравнений системы имеет порядок $o(2^{n/2})$, причем количество членов в новых уравнениях не больше, чем $n-1$.

Сравним теперь полученные результаты с результатами работ ([1,2]) относительно д. н. ф.-реализации функций с малым числом нулей.

В ([1]) показано, что при $k \leqslant \log_2 n-\varphi(n)$ длина д. н. ф. функции f асимптотически равна n. Следствие теоремы 3 улучшает эту оценку. Далее, в ([2]) отмечается, что л. н. ф.-реализация почти всегда неэффективна, в то время как л. д. н. ф.-реализация почти всегда дает длину $n-1$. Более того, почти всегда количество уравнений системы (1) уменьшается в любое постоянное число раз. В ([1]) получено, что при д. н. ф.-реализации получаются формулы длины $n+m(k)$, где $m(k)$ принимает следующие значения:

$k=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;$

$m(k)=4, 14, 31, 66, 133, 271, 537.$

В случае л. д. н. ф. имеем: $m(k)=-1, -1, -1, 0, 1, 2, 2$. Т. е. система (1) практически уменьшается в 10 раз. И, наконец, оценка для $L(n, r, k)$ в худшем случае равна $n-k+\rceil 2^{k-1}-\frac{k}{2}\lceil$, что лучше соответствующей оценки для длины д. н. ф.—$n+2^{k-1}+2^{\left|\frac{k}{2}\right|}+2^{\left|\frac{k}{2}\right|}-3$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

Բուլյան հավասարումների Նելսոնի համակարգեր և փոքր ռանկությամբ զրոներով ֆունկցիաներ

Աշխատանքում հետազոտված են Նելսոնի համակարգերի կրճատման և նրանց համապատասխանող բուլյան ֆունկցիաների հարակից դասերի միավորումով ներկայացման հարցերը: Ցույց է տրված, որ կամայական Նելսոնի համակարգը կարելի է կրճատել 10 անգամ: Եթե համակարգը կազմված է $m \cdot k = o(2^{n/2})$ հավասարումներից և $m = o(2^{n-k})$, $k \le n$, ապա համարյա միշտ այն կարելի է կրճատել k անգամ: Եթե բուլյան ֆունկցիայի զրոները գտնվում են ընդհանուր դիրքում, ապա այն ներկայացվում է $n-1$ հարակից դասերի միավորումով: Համարյա բոլոր $k \le n-\varphi(n)$ զրո պարունակող բուլյան ֆունկցիաները ներկայացվում են $n-1$ հարակից դասերի միավորումով, այստեղ $\varphi(n)=o(n)$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган*, ДАН СССР, т. 285, № 4, с. 795—799 (1985). [2] *Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган*, ЖВМ и МФ, т. 26, № 8, с. 1243—1249 (1986). [3] *Ю. И. Журавлев*, Проблемы кибернетики, вып. 8, с. 5—44 (1962). [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Наука, М., т. 1, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

В. В. Акопян

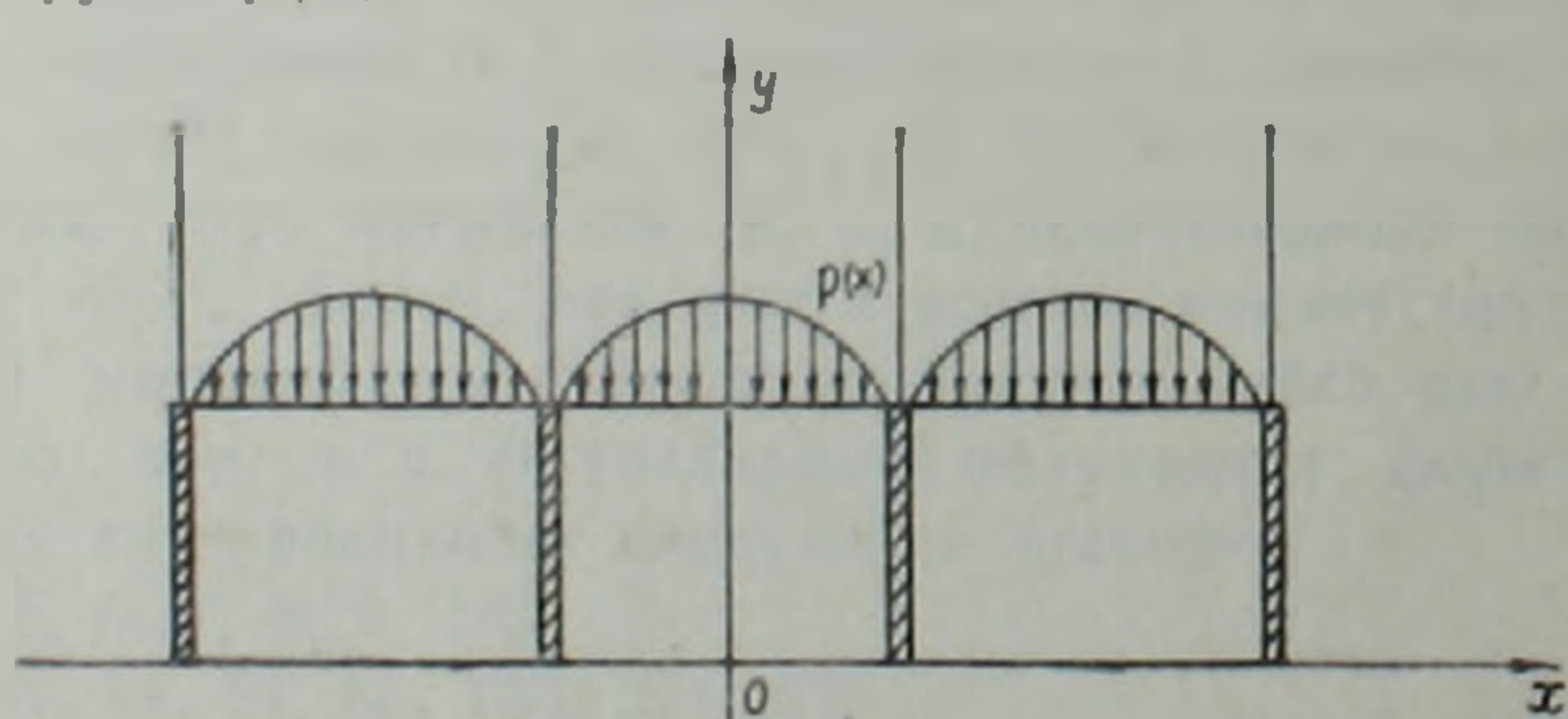
О периодической задаче контактного взаимодействия прямоугольников со стрингерами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 12/I 1988)

Результаты многочисленных исследований по задачам контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными деформируемыми телами, обычно связанные с практическими вопросами передачи нагрузок, отражены в ([1,2]). При этом массивные тела моделируются в форме различных канонических областей, в частности, прямоугольных областей. Контактные задачи для прямоугольных областей рассмотрены в ([3]). Задачи контактного взаимодействия стрингеров с прямоугольниками обсуждались в ([4-6]).

В данной статье рассматривается плоская периодическая задача для полосы, составленной из периодических прямоугольников и стрингеров (рисунок).

Рассматривая основной период, приходим к задаче для прямоугольника ($-l\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant y\leqslant b$) с упругими характеристиками E_2, ν_2, усиленного по краям $x=\pm l$ стрингерами длины b и малой толщины h с упругими характеристиками E_1, ν_1. Предполагается, что рассматриваемая система с помощью двух нерастяжимых лент через стрингеры подвешена к двум неподвижным точкам, а на кромке $y=b$ прямоугольника действует симметричная относительно оси Oy нормальная нагрузка $p(x)$.



Предполагается также, что, как обычно ([7]), стрингеры находятся в одноосном напряженном состоянии, притом на их свободных кромках задается условие $u_1=0$ ([5]). В такой постановке задачи на линии соединения стрингеров с прямоугольниками будут действовать тангенциальные напряжения $\tau(y)$ и $\sigma(y)$ соответственно. Требуется определить эти контактные напряжения.

Для прямоугольника имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xy}(x,0)=\tau_{xy}(x,y)=\sigma_y(x,0)=0,\\
&\sigma_y(x,y)=-P(x),\\
&\sigma_x(\pm l,y)=\sigma(y),\\
&\tau_{xy}(\pm l,y)=\tau(y),\quad(-l\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant b).
\end{aligned}\tag{1}$$

Далее, следуя ([9]), выбираем бигармоническую функцию соответствующим образом и удовлетворяем граничным условиям (1). Тогда для прямоугольника относительно коэффициентов X_n, Y_n $(n=1,2,\ldots)$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
Y_p=\sum_{n=1}^{\infty}A^{(1)}_{p,n}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty}B^{(1)}_{p,n}X_n+N^{(1)}_p-\\
-\left[1+2(\nu_2-1)\frac{\operatorname{th}\mu_p}{\varphi^{(1)}_p}\right]Z_p,\ \mu_p=\beta_p l,\ \beta_p=\frac{p\pi}{l}\quad(p=1,2,\ldots)
\end{gathered}\tag{2}$$

где выражения коэффициентов $A^{(1)}_{p,n}$, $B^{(1)}_{p,n}$, $N^{(1)}_p$ и $\varphi^{(1)}_p$ аналогичны приведенным в ([9]).

Теперь на линии соединения стрингера и прямоугольника запишем условия контакта:

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{(1)}_y=\varepsilon^{(2)}_y,\\
u_2=0\quad(0<y\leqslant b).
\end{gathered}\tag{3}$$

где $\varepsilon^{(1)}_y$, $\varepsilon^{(2)}_y$, u_2 вертикальные деформации и горизонтальное перемещение для стрингера и прямоугольника соответственно.

Учитывая условия (3), приходим к бесконечной системе:

$$\begin{gathered}
X_m=\sum_{n=1}^{\infty}A^{(2)}_{m,n}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty}B^{(2)}_{m,n}X_n+N^{(2)}_m-\frac{Z_m\varphi^{(1)}_m\operatorname{ch}\mu_m}{2(\nu_2-1)};\\
Z_m=\sum_{n=1}^{\infty}C^{(1)}_{m,n}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty}C^{(2)}_{m,n}X_n+M_m;
\end{gathered}\tag{4}$$

где $\quad X_m=\dfrac{2\operatorname{th}\mu_m}{b}\displaystyle\int_0^b\sigma(s)\sin\beta_m s\,ds;\quad Y_m=\beta^2_m\varphi^{(1)}_m\operatorname{ch}\mu_m D^{(2)}_m;$

$$Z_p=\frac{2}{b}\int_0^b\tau(s)\cos\beta_p s\,ds\quad\begin{pmatrix}m=1,2,\ldots\\ p=0,1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

а $D^{(2)}_m$—коэффициенты бигармонической функции ([9]), подлежащие определению.

Из условия равновесия стрингера имеем

$$\int_0^b\tau(s)\,ds=T,\tag{5}$$

где T—сила натяжения в нерастяжимых лентах.

Из условия же равновесия всей системы стрингеры—прямоугольник можем записать

$$2T=\int_{-l}^{l} p(s)ds. \tag{6}$$

Далее, положив

$$\sigma(y)=Z_0+\sum_{k=1}^{\infty} Z_k\cos\beta_k y;$$

$$\tau(y)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\operatorname{th}\mu_k}\sin\beta_k y \quad (0\leqslant y\leqslant b), \tag{7}$$

из (5)—(7) получим

$$Z_0=\frac{T}{b}=\frac{1}{2b}\int_{-l}^{l} p(s)ds. \tag{8}$$

Теперь, как обычно, подставляем выражения Z_k в системы (2) и (4), в результате чего окончательно получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$X_m=\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n}X_n+E_m;$$

$$Y_m=\sum_{n=1}^{\infty} Q_{m,n}Y_n+\sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n}X_n+F_m. \tag{9}$$

После определения X_m и Y_m из бесконечной системы (9) искомые неизвестные контактные напряжения находим по формулам (7).

Для исследования бесконечной системы (9) на регулярность при помощи изложенной в [2-9] методики показывается, что

$$\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}|C_{m,n}|+\sum_{n=1}^{\infty}|D_{m,n}|\right|=0;$$

$$\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}|Q_{m,n}|+\sum_{n=1}^{\infty}|R_{m,n}|\right|=0,$$

а свободные члены системы (9) для больших m имеют, по крайней мере, порядок m^{-1}. Отсюда вытекает, что бесконечная система (9) квазивполне регулярна.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ուղղանկյունների և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկված է վերադիրների և առաձգական ուղղանկյունների կոնտակտային փոխազդեցության մի խնդիր, երբ ուղղանկյունները իրենց ուղղահայաց կողերով ուժեղացված են վերադիրներով և ամբողջ համակարգը հորիզոնական ուղղությամբ առաջացնում է շերտ:

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծմանը։ Ցույց է տրված այդ համակարգի քվազի լիովին ռեգուլյարությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [2] *В. М. Александров, С. М. Мхитарян,* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями, Наука, М., 1983. [3] *В. Т. Гринченко,* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. [4] *В. В. Микаелян,* ДАН АрмССР, т. 58, № 1, с. 21—27 (1974). [5] *В. Б. Микаелян,* Изв. АН АрмССР Механика, т. 28 № 2, с. 3—14 (1975). [6] *P. S. Theocaris, K. Dafermos,* J. Appl. Mech. сег. E, v. 31, № 4 (1964) (рус. пер.: Прикл. механика, труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. Е., т. 31, № 4, с. 159—162 (1964)) [7] *E. Melan,* Ing. Arch. 1932, Bd, 3, № 2, S 123—129 (1932). [8] *H. Bufler,* VDT-Forchungsheft 485, Ausgable B. Bd. 27, S. 5—44 (1961). [9] *Б. Л. Абрамян,* Прикл. мат. и мех. АН СССР, т. 21, № 1, с. 89—100 (1957).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Т. Ю. Сапонджян

Растяжение бесконечной пластинки с эллиптическим включением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 15/I 1988)

В статье приводится решение задачи о растяжении бесконечной пластинки с эллиптическим включением (с полуосями a и b) из другого материала, под действием постоянных напряжений, приложенных на бесконечности. Случаям анизотропных тел и плоским задачам для эллиптических включений посвящены работы ([1-5]).

1. Для случая, когда напряжения p направлены по большей оси эллипса (ось x), формулы Колосова—Мусхелишвили ([6]) представляются:

в области эллипса (область G_0)

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi_0^{*\prime}(z)+\overline{\varphi_0^{*\prime}(z)}],$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi_0^{*\prime\prime}(z)+\Psi_0^{*\prime}(z)], \tag{1.1}$$

$$2\mu_0(u+iv)=\varkappa_0\varphi_0^*(z)-\overline{z\varphi_0^{*\prime}(z)}-\overline{\Psi_0^*(z)}; \tag{1.2}$$

для внешней области эллипса (область G_1)

$$\sigma_x+\sigma_y=p+2[\varphi_1^{*\prime}(z)+\overline{\varphi_1^{*\prime}(z)}],$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=-p+2[\bar{z}\varphi_1^{*\prime\prime}(z)+\Psi_1^{*\prime}(z)], \tag{1.3}$$

$$2\mu_1(u+iv)=(\varkappa_1-1)\frac{p}{4}z+\frac{p}{2}\bar{z}+\varkappa_1\varphi_1^*(z)-\overline{z\varphi_1^{*\prime}(z)}-\overline{\Psi_1^*(z)}, \tag{1.4}$$

здесь $\varphi_1^*(z)$ и $\Psi_1^*(z)$ голоморфны в области G_1 и обращаются в нуль на бесконечности.

Для определения искомых аналитических функций применим метод конформного отображения. Отобразим известной функцией

$$z=R\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\quad \zeta=\rho e^{i\theta},\quad \left(R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\right), \tag{1.5}$$

внешность единичной окружности ($\rho=1$) на внешность разреза длиной $4R$ с центром, совпадающим с началом координат плоскости z, при этом ось x проходит вдоль разреза. Окружностям $\rho=\text{const}$ соответствуют конфокальные эллипсы на плоскости z, один из которых, для $\rho=1$, обращается в указанный разрез. Обозначим через $\rho_0=$

$=\sqrt{(a+b)/(a-b)}$ радиус окружности на плоскости ζ, соответствующей эллипсу с полуосями a и b. Голоморфные в указанном кольце ($\rho=1$ и $\rho=\rho_0$) функции разлагаются в ряд Лорана. Н. И. Мусхелишвили (⁶) подчинил коэффициенты этого ряда условию, при котором новый ряд оказывается голоморфным в области неразрезанного эллипса. Такими рядами будем пользоваться при разложении в ряд функций

$$\varphi_0(\zeta)=\varphi_0^*(z),\quad \Psi_0(\zeta)=\Psi_0^*(z). \tag{1.6}$$

Учитывая симметрию задачи относительно осей x и y, будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty a_{2k-1}^{(0)}\left(\zeta^{2k-1}+\frac{1}{\zeta^{2k-1}}\right),$$

$$\Psi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty b_{2k-1}^{(0)}\frac{1}{1-\zeta^{-2}}\left(\zeta^{2k-1}-\frac{1}{\zeta^{2k+1}}\right). \tag{1.7}$$

Голоморфные в области G_1 функции

$$\varphi_1(\zeta)=\varphi_1^*(z),\quad \Psi_1(\zeta)=\Psi_1^*(z) \tag{1.8}$$

разлагаются в ряды

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty\frac{a_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}},\quad \Psi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty\frac{b_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}}. \tag{1.9}$$

Главный вектор усилий, приложенных к дуге (s_0s), в области G_0 определяется по формуле

$$i\int_{s_0}^{s}(X_n+iY_n)ds=\varphi_0^*(z)+z\overline{\varphi_0^{*\prime}(z)}+\overline{\Psi_0^*(z)}, \tag{1.10}$$

аналогично, в области G_1

$$i\int_{s_0}^{s}(X_n+iY_n)ds=\frac{p}{2}(z-\bar z)+\varphi_1^*(z)+z\overline{\varphi_1^{*\prime}(z)}+\overline{\Psi_1^*(z)}. \tag{1.11}$$

2. Условия сопряжения упругих областей G_0 и G_1 получаются приравниванием выражений (1.10) и (1.11), а также перемещений (1.2) и (1.4). Переходя по (1.5) от z к ζ, будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}+\overline{\Psi_0(\zeta_\gamma)}=\varphi_1(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_1'(\zeta_\gamma)}+$$
$$+\overline{\Psi_1(\zeta_\gamma)}+\frac{pR}{4}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}-\bar\zeta_\gamma-\bar\zeta_\gamma^{-1}), \tag{2.1}$$

$$\varkappa_0\varphi_0(\zeta_\gamma)-\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}-\overline{\Psi_0(\zeta_\gamma)}=\lambda\Big[\varkappa_1\varphi_1(\zeta_\gamma)-\frac{\zeta_\gamma+\bar\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_1'(\zeta_\gamma)}-$$
$$-\overline{\Psi_1(\zeta_\gamma)}+(\varkappa_1-1)\frac{pR}{4}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1})+\frac{pR}{2}(\bar\zeta_\gamma+\bar\zeta_\gamma^{-1})\Big], \tag{2.2}$$

где

$$\lambda=\mu_0/\mu_1. \tag{2.3}$$

Умножая обе части этих уравнений на $(1-\bar{\zeta}_\gamma^{-2})=(1-\rho_0^{-4}\zeta_\gamma^{2})$ и заменяя входящие в них искомые функции соответствующими рядами, далее сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\theta}$ этих рядов, получаем алгебраические уравнения относительно указанных коэффициентов ([6]). Для случая первой основной внешней задачи, согласно ([6]), функция $\varphi(\zeta)$ определяется по формуле

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\theta)}{\zeta_\gamma-\zeta}\,d\zeta_\gamma, \tag{2.4}$$

где $f(\theta)$—заданная на γ функция.

Учитывая, что

$$\varphi(\zeta)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta^k}, \tag{2.5}$$

из (2.4) находим

$$a_1=\lim_{\zeta\to\infty}[\zeta\varphi(\zeta)]=\frac{\rho_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)d\theta. \tag{2.6}$$

Для нашей задачи, согласно (2.1),

$$f(\theta)=\Big[\varphi_0(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar{\zeta}_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}+\overline{\Psi_0(\zeta_\gamma)}-\frac{pR}{2}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}-$$

$$-\bar{\zeta}_\gamma-\bar{\zeta}_\gamma^{-1})\Big]\frac{4}{pR}. \tag{2.7}$$

Учитывая (1.7) и (1.8), а также равенства

$$\frac{1}{1-\rho_0^{-4}\zeta_\gamma^2}=\frac{1}{1-\rho_0^{-2}e^{2i\theta}}=\sum_0^\infty\frac{e^{2ki\theta}}{\rho_0^{2k}}, \tag{2.8}$$

из (2.6) с учетом (2.7) для нашей задачи находим

$$a_1^{(1)}=\rho_0^2[-(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+A+2(1-\rho_0^{-2})], \tag{2.9}$$

где
$$A=(\rho_0^2+\rho_0^{-2})\sum_1^\infty(2k-1)a_{2k-1}^{(0)}+\sum_1^\infty b_{2k-1}^{(0)}. \tag{2.10}$$

Аналогично из (2.2) имеем

$$i\varkappa_1a_1^{(1)}=\rho_0^2[(\varkappa_0\rho_0^{-2}+\rho_0^2)a_1^{(0)}-i(\varkappa_1-1)\rho_0^{-2}-2]. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.9) и (2.11) являются теми уравнениями, которые теряются в ([6]) при решении задачи с помощью рядов. Поэтому полную систему уравнений, определяющих коэффициенты примененных рядов, мы получим, присоединив (2.9) и (2.11) к уравнениям, способ получения которых указан выше.

$$(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-\rho_0^2A=2(\rho_0^2-1),$$

$$2(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+2\rho_0^{-2}a_1^{(1)}-d_1^{(1)}=2(\rho_0^2-\rho_0^{-2}),$$

$$(\varkappa_0+\rho_0^4)a_1^{(0)}-i\varkappa_1a_1^{(1)}-\rho_0^2A=i(\varkappa_1-1)+2i\rho_0^2, \tag{2.12}$$

$$(\varkappa_0-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1-1)\rho_0^{-2}a_1^{(1)}+\lambda d_1^{(1)}=\lambda(\varkappa_1-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2}),$$

$$\begin{gathered}(3\rho_0^4-\rho_0^{-4})\,a_3^{(0)}+\rho_0^2 b_1^{(0)}+\rho_0^{-4}a_3^{(1)}=-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2),\\ (\varkappa_0\rho_0^{-4}+3\rho_0^4)a_3^{(0)}+\rho_0^2 b_1^{(0)}-\lambda\varkappa_1\rho_0^{-4}a_3^{(1)}=(\varkappa_0-1)a_1^{(0)}-\lambda\varkappa_1 a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^2),\\ (\rho_0^4-3\rho_0^{-4})a_3^{(0)}-\rho_0^{-2}b_1^{(0)}+3\rho_0^{-4}a_3^{(1)}-\rho_0^{-2}d_3^{(1)}=2a_1^{(0)}-a_1^{(1)}+2(\rho_0^{-2}-1),\qquad (2.13)\\ (\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4})a_3^{(0)}+\rho_0^{-2}b_1^{(0)}-3\lambda\rho_0^{-4}a_3^{(1)}+\lambda\rho_0^{-2}d_3^{(1)}=(\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^{-2}).\end{gathered}$$

Покажем теперь, что $a_3^{(0)}=0$. Из первых двух уравнений (2.13) имеем

$$(\varkappa_0+1)a_3^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_3^{(1)}=\rho_0^4[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^2)-2(1-\rho_0^2)],$$

а из первого и третьего уравнений (2.12) получаем

$$(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_1^{(1)}=\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2-1),\qquad (2.14)$$

отсюда следует, что $a_3^{(1)}=\dfrac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}a_3^{(0)}$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение (2.13), имеем

$$\rho_0^6 b_1^{(0)}+\left(\frac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}+3\rho_0^8-1\right)a_3^{(0)}=-2\rho_0^4a_1^{(0)}+\rho_0^4a_1^{(1)}+2\rho_0^4(1-\rho_0^2),$$

далее из третьего и чертвертого уравнений (2.13) получаем

$$[\lambda(\rho_0^4-3\rho_0^{-4})+\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4}]a_3^{(0)}+\rho_0^{-2}(1-\lambda)b_1^{(0)}=(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1+1),$$

учитывая последнее равенство, находим

$$\begin{gathered}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}+3\rho_0^8-1\right)-\rho_0^8[\lambda(\rho_0^4-3\rho_0^{-4})+\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4}]\right\}a_3^{(0)}=\\ \qquad (2.15)\\ =\rho_0^4\{(1-\lambda)[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2)]-\rho_0^4[(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1+1)]\}.\end{gathered}$$

С другой стороны, из второго и четвертого уравнений (2.12) имеем

$$(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\rho_0^{-2}\lambda(\varkappa_1+1)a_1^{(1)}=\lambda(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(\varkappa_1+1).$$

Учитывая последнее равенство, а также (2.14), после очевидных преобразований получаем

$$(1-\lambda)[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2)]-\rho_0^4[(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1+1)]=0,$$

что совпадает с правой частью (2.15). Отсюда легко заключить, что $a_{2k-1}^{(0)}=b_{2k-1}^{(0)}=a_{2k-1}^{(1)}=0$ при $k=2, 3, \ldots$, $d_{2k-1}^{(1)}=0$ при $k=3, 4, \ldots$.

Таким образом,

$$\begin{gathered}a_1^{(0)}=\frac{\lambda(\varkappa_1+1)[(\lambda\varkappa_1+1)(\rho_0^4-1)+\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2-1)]}{(\rho_0^4-1)(2\lambda+\varkappa_0-1)(\lambda\varkappa_1+1)+\lambda(\varkappa_1+1)(\varkappa_0+1)}\\ a_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda\varkappa_1+1}[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1-1)-2\lambda\rho_0^2+2(\rho_0^2-1)],\\ A=\rho_0^{-2}[(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-2(\rho_0^2-1)],\qquad (2.16)\\ d_1^{(1)}=\rho_0^{-2}[2(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+2a_1^{(1)}-2(\rho_0^4-1)],\end{gathered}$$

$$b_1^{(0)}=\rho_0^{-2}[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^{-2}-1)],$$

$$d_3^{(1)}=(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2),$$

где $d_{2k-1}^{(1)}=b_{2k-1}^{(1)}-b_{2k-3}^{(1)}$, $(k=1, 2, \ldots)$, при этом $b_{-1}^{(0)}=0$, $b_1^{(1)}=d_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}=b_5^{(1)}=b_7^{(1)}=\ldots=d_1^{(1)}+d_3^{(1)}$.

Тогда с учетом (1.7) и (1.9) решение задачи получим в замкнутом виде

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}a_1^{(0)}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\quad \Psi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}b_1^{(0)}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}a_1^{(1)}\frac{1}{\zeta},\quad \Psi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\frac{1}{\zeta}\left[d_1^{(1)}+(d_1^{(1)}+d_3^{(1)})\frac{1}{\zeta^2}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^4}+\frac{1}{\zeta^6}+\ldots\right)\right]=\frac{pR}{4}\frac{1}{\zeta}\left[d_1^{(1)}+(d_1^{(1)}+d_3^{(1)})\frac{1}{\zeta^2-1}\right]. \tag{2.17}$$

Замечание. Для величины A имеем два значения (2.10) и (2.16). Учитывая найденные выражения для коэффициентов $a_1^{(0)}$ и $b_1^{(0)}$, непосредственно видим, что указанные два значения одинаковы.

Отметим также, что при переходе от эллипса к кругу $(a=b)$ полученные результаты полностью совпадают с ([6]).

3. Аналогично первому случаю найдено замкнутое решение для второго случая, когда напряжения p направлены по малой оси эллипса (ось y). Для внешней области

$$\sigma_x+\sigma_y=p+2[\varphi_1'^{*}(z)+\overline{\varphi_1'^{*}(z)}],$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=p+2[\bar{z}\varphi_1''^{*}(z)+\Psi_1'^{*}(z)],$$

$$2\mu_1(u+iv)=\frac{p}{4}(\varkappa_1-1)z-\frac{p}{2}\cdot\bar{z}+\varkappa_1\varphi_1^{*}(z)-z\cdot\overline{\varphi_1'^{*}(z)}-\overline{\Psi_1^{*}(z)},$$

а в области эллипса выражения совпадают с (1.1) и (1.2).

Аналитические функции φ_i, Ψ_i $(i=0, 1)$ определяются по формулам (2.17), где отличные от нуля коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_1^{(1)}=\frac{\lambda(\varkappa_1+1)[(\lambda\varkappa_1+1)(\rho_0^4-1)+\lambda(\varkappa_1-1)-2\lambda\rho_0^2+2(\rho_0^2+1)]}{(\rho_0^4-1)(2\lambda+\varkappa_0-1)(\lambda\varkappa_1+1)+\lambda(\varkappa_1+1)(\varkappa_0+1)},$$

$$a_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda\varkappa_1+1}[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2+1)],$$

$$A=\rho_0^{-2}[(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^2+1)],$$

$$d_1^{(1)}=\rho_0^{-2}[2(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+2a_1^{(1)}-2(\rho_0^4-1)],$$

$$b_1^{(0)}=\rho_0^{-2}[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^2+1)],$$

$$d_3^{(1)}=\rho_0^2[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-\rho_0^{-2}b_1^{(0)}+2(\rho_0^{-2}+1)].$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Տ. ՅՈՒ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

Էլիպսական ներդրակով անվերջ սալի ձգումը

Աշխատանքում ստացված է առաձգական էլիպսական ներդրակով, անվերջ իզոտրոպ սալի անվերջությունում կիրառված հաստատուն լարումներով ձգման խնդրի փակ լուծումը, որի մեթոդը հիմնված է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության կիրառման վրա։

Խնդրի ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է Կոլոսով-Մուսխելիշվիլիի հիմնական բանաձևերով։

Վերածելով որոնելի ֆունկցիաները Լորանի շարքի և կիրառելով Կոշու տիպի ինտեգրալը, խնդրի լուծումը բերվում է վերջավոր թվով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Швецов*, в кн.: «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел», вып. 3, Саратов, 1967. [2] *С. А. Калоеров*, в кн.: «Механика твердого тела», вып. 2, Киев, 1970. [3] *С. А. Калоеров*. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 20, № 3 (1967). [4] *В. В. Мечменский*. Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной среде. Изв. АН СССР, МТТ, № 6 (1970). [5] *О. С. Космодамiанський, М. М. Нескородов*, в кн.: «Теоретична i прикладная механiка», вып. 2, Харкiв, 1971. [6] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Изд-во АН СССР, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 5

УДК 611.576

МОРФОЛОГИЯ

И. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян

Гистохимическое выявление фосфора в нервных клетках головного и спинного мозга кроликов

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 17/II 1988)

Как было показано в [1], на срезах из фиксированного материала возможно получить воспроизводимые результаты по выявлению клеточных ортофосфатов в нейронах головного и спинного мозга кошки. Поскольку данные в этом направлении практически отсутствуют, то дальнейшие исследования могли бы дать новые сведения о гистохимии фосфорных соединений, занимающих одно из центральных мест в обменных энергетических процессах. В этом аспекте определенный интерес представляет выявление особенностей реакционноспособности фосфора в клеточных структурах мозга у разных видов животных. Для выяснения этого вопроса в настоящем сообщении предпринята попытка проводить исследования по гистохимии фосфора в клеточных структурах мозга кроликов.

Объектом исследования служили головной и спинной мозг 15 половозрелых кроликов. Животных подвергали нембуталовому наркозу. После декапитации извлекали головной и спинной мозг. Из них готовили тонкие кусочки, которые фиксировали в 5%-ном нейтральном формалине или формол кальциевом фиксаторе 48 ч при 4°C. После фиксации из кусочков коры больших полушарий, среднего, продолговатого, спинного мозга и мозжечка готовили замороженные срезы, толщиной 60 мкм, которые после тщательной промывки в дистиллированной воде обрабатывали по свинцовому методу (А. М. Чилингаряна [2,3]).

Поскольку реакционноспособность ортофосфатов в мозгу кролика является неизученным вопросом, то для всестороннего его исследования и выявления преципитационных пиков различных структур эксперименты проводили с учетом закономерности концентрационного взаимоотношения по А. М. Чилингаряну [4], с инкубацией срезов в смесях с разными количествами буфера. Часть срезов до инкубации обрабатывали в 70°-ном ацетоне 1 ч, с последующей 30-минутной промывкой в дистиллированной воде. Инкубационные смеси готовили из расчета: к 100 мл 0,01 М раствора уксуснокислого свинца добавлялся 1 М ацетатный буфер с pH 5,6 от 5 до 60 млс интервалом 5 мл. Срезы в этих смесях инкубировали от 3 до 10 дней, после чего выявляли сернистым натрием, промывали и заключали в глицерин-желатин.

Результаты исследований показали, что при формалиновой фиксации на срезах, инкубированных в смеси с 5 мл буфера (pH 5,6), отсутствует реакция сосудов и лишь местами заметны единичные отрывчатые капилляры. С 10—15 мл буфера в смеси наблюдается смешанная окраска ядер глиальных клеток и единичных капилляров. С 20—25 мл окрашиваются только ядра глиальных клеток, а с 35—40 мл наряду с ядрами глиальных клеток реагируют и нервные клетки. На срезах, инкубированных в смесях с 45—50 мл буфера, происходит избирательная окраска нервных клеток, которые выявляются за счет мелкозернистого осадка, откладывающегося в перикарионах и отростках. При дальнейшем увеличении количества буфера нейроклеточная реакция ослабевает. Следовательно, наиболее оптимальным пиком для выявления нервных клеток мы считаем количество буфера в смеси 45—50 мл.

О наличии фосфора в клеточных структурах свидетельствует образование преципитатов, которые в последнем этапе превращаются в черный осадок сульфида свинца. Осадок носит мелкозернистый характер и откладывается в перикарионах и дендритах различного порядка. После формалиновой фиксации на срезах, инкубированных от 3 до 5 дней, в основном выявляются нервные клетки с короткими отростками, ядра клеток не окрашиваются. В последних мелкозернистый осадок наблюдается на 6—10-ый день инкубации, вследствие чего становится трудным провести четкую границу между цитоплазмой и ядром. При формол кальциевой фиксации наблюдается ускорение реакции. Нервные клетки выявляются со 2-го дня инкубации, а мелкозернистый осадок в ядрах клеток образуется на 4—5-ый день инкубации. При этом увеличивается количество выявляемых клеток и отростки можно проследить на далеком от тела расстоянии. В морфологическом отношении более четкие результаты наблюдаются после обработки срезов в ацетоне.

Анализ препаратов показывает, что в коре больших полушарий головного мозга на светлоокрашенном фоне препарата выявляются клетки разных слоев. В основном встречаются пирамидные клетки малой и средней величины с короткими отростками, а также клетки многоугольной формы. Окраска цитоплазмы носит мелкогранулярный характер, ядра клеток не окрашиваются.

На препаратах мозжечка обнаруживаются тела клеток Пуркинье без отростков или с коротким основным дендритом. В молекулярном слое превалирует гранулярная зернистость. В зернистом слое выявляются небольших размеров клетки-зерна, тела которых бедны цитоплазмой и заняты в основном ядром. В белом веществе окрашиваются клетки собственных ядер мозжечка, с четко выступающей цитоплазмой и довольно длинными отростками.

На срезах продолговатого мозга довольно постоянно выявляются нервные клетки разных ядерных групп. Особенно четко окрашиваются нейроны ядерных групп лицевого, подъязычного, блуждающего нервов. Следует отметить, что наиболее рано, уже на 3-ий день инкубации, выявляются клетки ретикулярной формации (рис. 1). У них можно проследить первичные, вторичные, и третичные дендриты. Доволь-

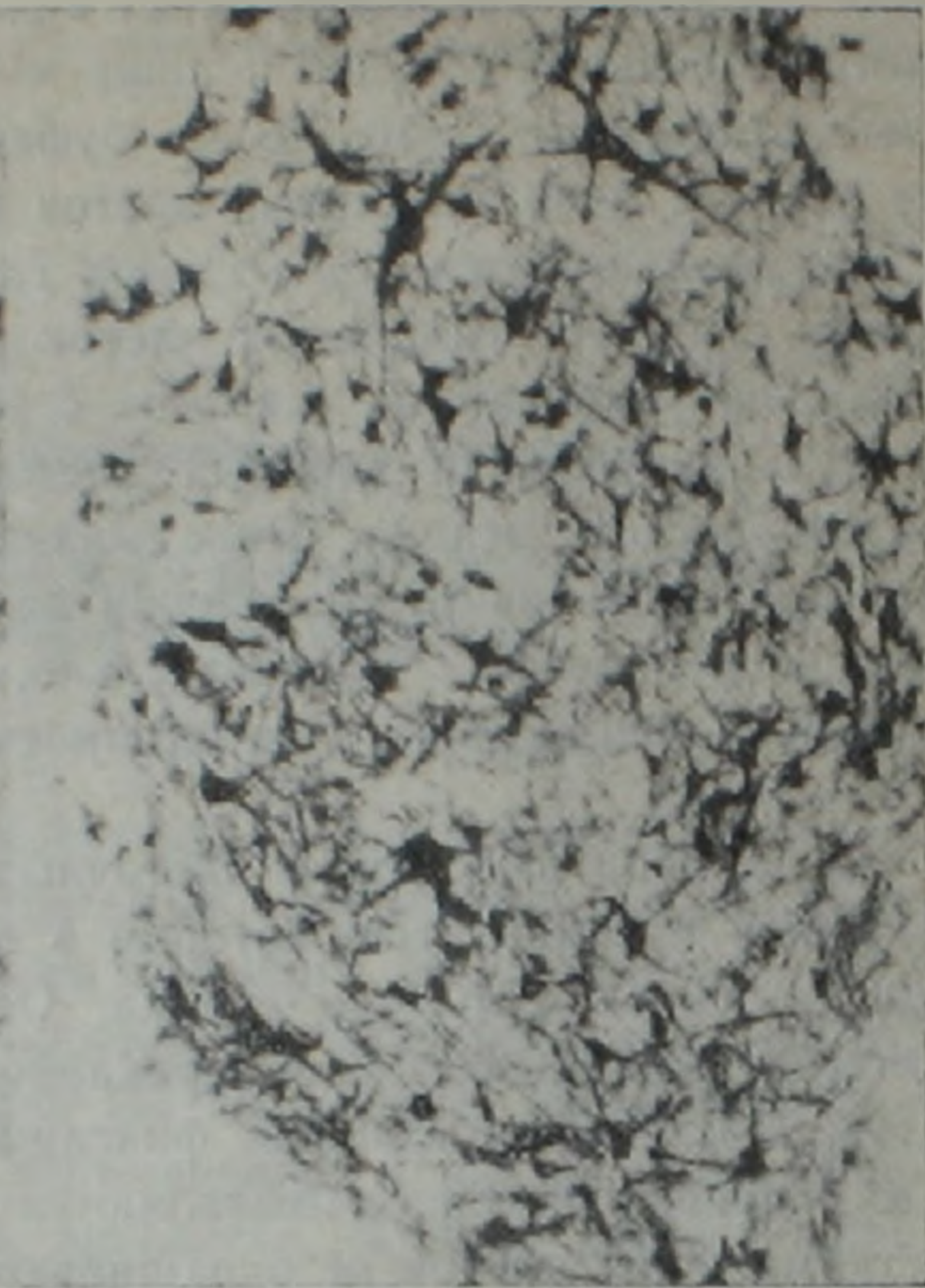


Рис. 1 Рис. 2

Рис. 1. Продолговатый мозг кролика. Показана реакция перикарионов и отростков крупных клеток ретикулярной формации. Ок. 8×, об. 24×

Рис. 2. Спинной мозг кролика. Видны нервные клетки с отростками. Ок. 8×, об. 6×

но постоянно выявляются также и клетки оливы без отростков. Ядра их не окрашиваются.

Изучение срезов спинного мозга показывает, что наиболее рано выявляются мотонейроны в основном с гранулярной зернистостью, но встречаются также и темноокрашенные клетки. На 4—5-ый день реагирует большинство нейронов задних и боковых рогов, а уже на 7—10-ый день выявляется почти вся масса клеток серого вещества спинного мозга (рис. 2).

Таким образом, полученные в настоящем сообщении данные и их анализ показывают, что при выявлении ортофосфатов в мозгу кроликов наблюдается сходная и равномерная реакция нейронов различных отделов головного и спинного мозга. Эти данные в значительной степени отличаются от данных, полученных нами ранее у кошек ([1]). В противоположность кроликам, у кошек в тех же условиях ортофосфаты выявляются далеко не во всех отделах мозга. В основном осаждение продукта реакции наблюдается в мотонейронах спинного мозга и нейронах большинства ядерных групп продолговатого мозга. Кроме того, у кошек преципитационные пики разных типов нейронов значительно отличаются.

В целом результаты, полученные нами при исследовании мозга кроликов, позволяют утверждать, что выявление клеточных ортофосфатов в нейронах мозга кроликов могут представлять определенный интерес как в гистохимическом, так и морфологическом отношении.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Ի. Բ. ՄԵԼԻՔՍԵԹՅԱՆ, Ջ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Հ. Մ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Ֆոսֆորի հիստոքիմիական հայտնաբերումը ճագարի գլխուղեղի և ողնուղեղի նյարդային բջիջներում

Փորձի արդյունքները ցույց են տալիս, որ օրթոֆոսֆատների նստեցման պիկերը ուղեղի տարբեր բաժինների նյարդային բջիջներում գրեթե նույնն են։ Միաժամանակ ցայտուն ռեակցիա է նկատվում ինչպես առանձին բջիջներում, այնպես էլ մեծ մաս բջջախմբերում։ Այս տվյալները մեզ հիմք են տալիս եզրակացնելու, որ ճագարի ուղեղի նեյրոններում բջջային օրթոֆոսֆատների հայտնաբերումը կարող է էական նշանակություն ունենալ մորֆոլոգիական և հիստոքիմիական ուսումնասիրության ասպարեզում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меликсетян*, ДАН АрмССР, т. 85, № 2 (1987). [2] *А. М. Чилингарян*. ДАН АрмССР. т. 40, № 2 (1965) [3] *А. М. Чилингарян*, Журн. экспер. и клинич медицины, т. 5, № 1 (1965) [4] *А. М. Чилингарян*. Микроскопическое изучение кровеносных сосудов и нервной ткани, основанное на применении соединений свинца. Докт. дисс., Л., 1968

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXXXVI հատորի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ LXXXVI тома

МАТЕМАТИКА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

ФИЗИКА

РАДИОФИЗИКА

ГЕОФИЗИКА

СЕЙСМОЛОГИЯ

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

РАДИОБИОЛОГИЯ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

БИОХИМИЯ

МОРФОЛОГИЯ

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

ЭНТОМОЛОГИЯ

МЕДИЦИНА

CONTENTS of LXXXVI volume

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

MECHANICS