

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXVI, № 5

1988

Խմբագրական կոլեգիա

Դ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. դիտ. թեկնածու (պատ. Բաբուդյան), Է. Ի. ԱՅՐԻՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ի. ԲԱՐԱՅՍՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԴԱՐՐԻՆՆԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԿԱ թղթ. առդամ, Վ. Հ. ՀԱՍՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Դ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. առդամ, Դ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ի. Մ. ՍԵՒՐԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. առդամ (պատ. խմբագիր), Ո՛. Լ. ՏԵՐ-ՈՒՔԱՅԵՆՆԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Ր. ՆԱՆԱՐԶՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԿԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНИАН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛՅԱՆ, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1988, т. 86, № 5, с. 193—240

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Մ. Էմիլյան—Բիշրջանում ֆունկցիաների սահմանային առանձնահատկությունները	195
Ա. Ա. Վաղարշակյան—Գրգռված բաղմապատկման օպերատորի սինգուլյար սպեկտրի մասին	199
Ա. Մ. Աբամյան—Ողորկ և ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաների լատությունը $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ և $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})$ տարածություններում	202
Ի. Վ. Վաղարյան—Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար սեպի սուր ծայրին թևերումի մասին	205
Յ. Ա. Թալալյան—Զուգամիտությունն ըստ չափի և մետրիկական իզոմորֆիզմ	209

ԿԻՐԱԽԱՆԱՆՆԵՐ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Ալեքսանյան—Բուլյան հավասարումների նեյսոնի համակարգեր և փոքր քանակությամբ զրոներով ֆունկցիաներ	213
---	-----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Վ. Վ. Հակոբյան—Ուղղանկյունների և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական ինդրի մասին	218
Տ. Յու. Սապոնյան—Էլիպսական ներդրակով տեղի ունեցող սալի ծոռումը	222

ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

Ի. Բ. Մելիքսեյան, Ջ. Հ. Մառտիրոսյան, Հ. Մ. Չիլինգարյան—Ֆոսֆորի հիստոքիմիական հայտնաբերումը ճագարի գլխուղեղի և ողնուղեղի նյարդային ըջիջներում	228
Բովանդակություն LXXXVI հատորի	232

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

О. М. Эминян—Граничные особенности функций в полидиске	195
А. А. Вагаршакян—О сингулярном спектре возмущенного оператора умножения	199
А. М. Арамян—Плотность гладких и гладких финитных функций в пространствах $C^{\infty}(\Omega)$ и $W_r^{\infty}(\Omega)$	202
М. В. Казарян—О теореме «острие клина» для мероморфных функций	205
Ф. А. Талалян—Сходимость по мере и метрический изоморфизм	209

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян—Нельсоновские системы булевых уравнений и функции с малым числом нулей	213
--	-----

МЕХАНИКА

В. В. Акопян—О периодической задаче контактного взаимодействия прямоугольников со струнгерами	218
Т. Ю. Сапонджян—Растяжение бесконечной пластинки с эллиптическим включением	222

МОРФОЛОГИЯ

И. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартirosян, А. М. Чилингарян—Гистохимическое выявление фосфора в нервных клетках головного и спинного мозга кроликов	228
Содержание LXXXVI тома	232

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>H. M. Eminentan</i> —Boundary singularities of functions in a polydisk	195
<i>A. A. Vagarshakian</i> —About singular spectrum of self-adjoint operator of multiplication	199
<i>A. M. Aramian</i> —The density of smooth and smooth finite functions in spaces $C^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ and $W_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$	202
<i>M. V. Kazarian</i> —On "edge of the wedge" theorem for meromorphic functions	205
<i>F. A. Talallan</i> —Convergence in measure and metric isomorphism	209

APPLIED MATHEMATIC

<i>A. A. Alexanian</i> —Nelson type systems of Boolean equations and functions with a small number of zeroes	213
--	-----

MECHANICS

<i>V. V. Hacobian</i> —On periodic problem of a contact interaction of rectangles with stiffeners	218
<i>T. Yu. Saponjan</i> —Infinite plate tension with elliptic inclusion	222

MORPHOLOGY

<i>I. V. Meliksetian, J. H. Martirosian, H. M. Chilingarian</i> —Histochemical exposure of phosphorus in nervous cells in rabbit cerebrum and spinal cord	228
Contents of LXXXVI volume	232

Техн. редактор *Азизбеян Л. А.*

Сдано в набор 19.04.88 г. Подписано к печати 7.07.88 г. ВФ 03985

Бумага № 2, 70 × 108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет. изд. 3,27 л. Тираж 445. Заказ 626. Издат 7385

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

О. М. Эчинян

Граничные особенности функций в полидиске

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/XII 1987)

В настоящей статье продолжается начатое в работе. ⁽¹⁾ изучение предельных множеств и граничных особенностей отображений полидиска в сферу Римана и приложений к граничным свойствам мероморфных функций нескольких комплексных переменных. В целях простоты изложение ведется для случая двух комплексных переменных.

1. Обозначим через D декартово произведение двух единичных кругов $D = D_1 \times D_2$, $D_k: |z_k| < 1$, $k = 1, 2$, в комплексных плоскостях z_k , $k = 1, 2$, и пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, где $\Gamma_k: |z_k| = 1$, $k = 1, 2$. Обозначим через $h_k(\zeta_k, \varphi_k)$ хорду круга D_k , оканчивающуюся в точке $\zeta_k \in \Gamma_k$ и образующую с радиусом круга D_k в этой точке угол раствора φ_k , где $-\pi/2 < \varphi_k < \pi/2$. Пусть $\Delta(\zeta_k, \varphi_k, \varphi_k^*)$ обозначает подобласть круга D_k , ограниченную хордами $h_k(\zeta_k, \varphi_k)$ и $h_k(\zeta_k, \varphi_k^*)$, где $\zeta_k \in \Gamma_k$ и $-\pi/2 < \varphi_k < \varphi_k^* < \pi/2$, окружностью $|z_k - \zeta_k| < r_k$, $0 < r_k < 1$, $k = 1, 2$. Если нам безразличны размеры φ_k^* , φ_k угла Штольца $\Delta(\zeta_k, \varphi_k, \varphi_k^*)$, то будем обозначать его короче, $\Delta(\zeta_k)$. Декартовой хордой и декартовым углом Штольца назовем соответственно множество $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2) = h_1(\zeta_1, \varphi_1) \times h_2(\zeta_2, \varphi_2)$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta \in \Gamma$, $\zeta_1 \in \Gamma_1$, $\zeta_2 \in \Gamma_2$, и множество $\Delta(\zeta) = \Delta(\zeta_1, \varphi_1, \varphi_1^*) \times \Delta(\zeta_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$, где $-\pi/2 < \varphi_k < \varphi_k^* < \pi/2$, $k = 1, 2$.

Для произвольного отображения $f: D \rightarrow \Omega$ бидиска D на расширенную комплексную плоскость (сферу Римана) Ω и произвольного надмножества $S \subset D$, для которого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \Gamma$ является предельной точкой, предельным множеством $C(f, \zeta, S)$ функции $f(z_1, z_2)$ в точке ζ по подмножеству S назовем совокупность таких значений $w \in \Omega$, что $w = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_1^n, z_2^n)$ по некоторой последовательности точек $\{(z_1^n, z_2^n)\}_{n=1}^\infty$, $(z_1^n, z_2^n) \in S$, $n = 1, 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_k^n = \zeta_k$, $k = 1, 2$. В качестве множества S можно брать декартову хорду $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ или весь бидиск D .

Точку $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \Gamma$ отнесем к множеству $C(f)$, если $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, D)$ для любого декартова угла Штольца $\Delta(\zeta)$.

Не сильно видоизменяя схему доказательства теоремы 1 из ⁽¹⁾, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. Для произвольного отображения $f: D \rightarrow \Omega$ справедливо представление $\Gamma = C(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории и типа F_σ относительно Γ .

2. Рассмотрим теперь в D функцию $f(z_1, z_2)$, мероморфную по каждой переменной в отдельности и непрерывной по совокупности переменных, и следуя терминологии работы (2), назовем такую функцию $f(z_1, z_2)$ мероморфной функцией в бидиске D . Точку $\zeta \in C(f)$ отнесем к множеству $I(f)$, если $C(f, \zeta, D) = \Omega$, и отнесем ее к множеству $M(f)$, если $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.

Теорема 2. Точка $\zeta \in \Gamma$ принадлежит множеству $M(f)$ для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D в том и только в том случае, когда для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ справедливо $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) = C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.

Теорема 3. Для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D справедливо представление $\Gamma = M(f) \cup I(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории и типа F_σ относительно Γ .

В случае мероморфной функции одной комплексной переменной эти результаты получены в работе (2) и являются уточненной формой известной теоремы К. Мейера (4).

3. Доказательство теоремы 2 опирается на свойства P -последовательностей мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, в свою очередь, основанных на результатах работы (2), в которой впервые изучались нормальные семейства мероморфных функций в D и нормальные мероморфные функции в D .

Следуя (2), для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, определенной в $D = D_1 \times D_2$, рассмотрим функцию $q_f(z_1, z_2)$:

$$q_f(z_1, z_2) = \frac{|f_{z_1}(z_1, z_2)|(1 - |z_1|^2) + |f_{z_2}(z_1, z_2)|(1 - |z_2|^2)}{1 + |f(z_1, z_2)|^2}.$$

Непрерывная функция $q_f(z_1, z_2) \geq 0$ в D играет основную роль в исследованиях свойства нормальности мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, проведенных в (2). Обозначим через $S(D_k)$, $k = 1, 2$, семейство функций, конформно отображающих круг D_k на себя. Мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ названа в (2) нормальной функцией в бидиске $D = D_1 \times D_2$, если семейство функций $\{f(\varphi(z_1), \psi(z_2)) \mid \varphi(z_1) \in S(D_1), \psi(z_2) \in S(D_2)\}$ нормально в D в смысле Монтеля. В работе (2) (теорема 2.2) доказано, что мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ будет нормальной функцией в бидиске D тогда и только тогда, когда $\limsup_{|z_1| \rightarrow 1, |z_2| \rightarrow 1} q_f(z_1, z_2) < +\infty$; в частности, любая ограниченная голоморфная функция $f(z_1, z_2)$ в бидиске D является нормальной функцией.

4. Обозначим через $\sigma(z, w)$ расстояние между точками $z, w \in D$ в метрике Каратеодори. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и произвольной точки $z \in D$ множество $D(z; \varepsilon) = \{w \in D \mid \sigma(w, z) < \varepsilon\}$ назовем поликругом в метрике Каратеодори с центром в точке z и радиуса $\varepsilon > 0$.

Последовательность точек $\{z^m\}_{m=1}^\infty$, $z^m \in D$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} |z^m| = 1$, назовем P -последовательностью для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D , если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z^m\}_{m=1}^\infty$ в объединении поликругов $\bigcup_{m=1}^\infty D(z^m; \varepsilon)$ функция $f(z_1, z_2)$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, за возможным исключением самое большее двух значений $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

В случае мероморфных функций одной комплексной переменной понятие P -последовательности введено в работе (5) и использовалось многими авторами при изучении свойства нормальности мероморфных функций; для голоморфных функций нескольких комплексных переменных, определенных в шаре, это понятие использовалось в работе (6).

5. Опираясь на теорему 2.2 и предложения 1—4 из работы (2), мы доказываем следующие результаты.

Теорема 4. Если мероморфная в бидиске $D: D_1 \times D_2$ функция $f(z_1, z_2)$ обладает P -последовательностью, то $\lim_{|z_1| \rightarrow 1, |z_2| \rightarrow 1} \sup q_1(z_1, z_2) = +\infty$. Более того, каждая последовательность $\{z^m\}_{m=1}^\infty$ точек бидиска D , $z^m = (z_1^m, z_2^m)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} |z_k^m| = 1$, $k = 1, 2$, для которой $\lim_{m \rightarrow \infty} q_1(z_1^m, z_2^m) = +\infty$, является P -последовательностью мероморфной функции $f(z_1, z_2)$.

Теорема 5. Если мероморфная функция $f(z_1, z_2)$ в бидиске D обладает свойством, что существуют две последовательности точек $\{z^m\}_{m=1}^\infty$ и $\{w^m\}_{m=1}^\infty$, для которых $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(z^m, w^m) = 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} f(z^m) = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f(w^m) = b$, $a \neq b$, то каждая из последовательностей $\{z^m\}_1^\infty$ и $\{w^m\}_1^\infty$ является P -последовательностью функции $f(z_1, z_2)$.

6. Сформулированная в пункте 2 теорема 2 является непосредственным следствием теорем 4 и 5 из предыдущего пункта и геометрии декартовых углов Штольца. Более того, эти свойства P -последовательностей позволяют уточнить теорему 3 из пункта 2.

Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$ для мероморфной функции $f(z_1, z_2)$, определенной в бидиске D , если каждая декартова хорда в этой точке содержит P -последовательность функции $f(z_1, z_2)$. Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если ни одна из декартовых хорд в этой точке не содержит P -последовательностей функции $f(z_1, z_2)$ и $C(f, \zeta, h(z_1, z_2)) = \Omega$ для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ в точке ζ . По определению, $P(f) \cap I^*(f) = \emptyset$.

Если $\zeta \in P(f)$, то каждый декартовый угол $\Delta(\zeta)$ содержит некоторую P -последовательность $\{z^m\}_{m=1}^\infty$ функции $f(z_1, z_2)$. Согласно геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори, для каждого декартова угла Штольца $\Delta(\zeta)$ можно указать такое число $\epsilon > 0$, что $\bigcup_m D(z^m; \epsilon) \subset \Delta(\zeta)$. Поэтому $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, и значит $\zeta \in I(f)$.

Если $\zeta \in I^*(f)$, то любой декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ содержит бесконечно много декартовых хорд $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, и значит $\Omega = C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \subset C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \subset \Omega$, т. е. $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$ и $\zeta \in I(f)$.

Теорема 6. Для произвольной мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ в бидиске D справедливо представление $\Gamma = M(f) \cup P(f) \cup I^*(f) \cup E$, в котором E — множество первой категории на Γ .

Доказательство теоремы 6 проходит по схеме доказательства аналогичного утверждения в случае мероморфных функций одной переменной, полученного в работе (7). Применим утверждение теоремы 1 из пункта 1 к функциям $f(z_1, z_2)$ и $q_1(z_1, z_2)$. Тогда $\Gamma = \mathfrak{B} \cup E$, где $\mathfrak{B} = C(f) \cap C(q_1)$ и E — множество первой категории и типа F , на

Г. В каждой точке $\zeta \in \mathbb{B}$ имеем четыре возможности: I) $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$; II) $C(f, \zeta, D) = \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$; III) $C(f, \zeta, D) = \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$; IV) $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$ и $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$.

Возможность IV на самом деле реализоваться не может, так как условие $C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty$ влечет за собой, согласно теореме 4 пункта 5, существование в каждом декартовом угле Штольца $\Delta(\zeta)$ некоторой P -последовательности функции $f(z_1, z_2)$, что, как мы видели выше, приводит к свойству $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, противоречащему условию $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$.

Если реализуется возможность II, то согласно теореме 4 пункта 5, каждый декартов угол Штольца $\Delta(\zeta)$ содержит некоторую P -последовательность функции $f(z_1, z_2)$, откуда, в силу геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори, следует, что каждая декартова хорда в точке ζ содержит P -последовательность функции $f(z_1, z_2)$, т. е. $\zeta \in P(f)$.

Если реализуется возможность I или возможность III, то, согласно теореме 4 пункта 5, каждый декартов угол Штольца не содержит P -последовательностей функции $f(z_1, z_2)$, а согласно теореме 5 пункта 5, геометрии декартовых углов Штольца и свойств метрики Каратеодори заключаем, что $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любой декартовой хорды $h(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ в точке ζ , т. е. точка ζ принадлежит либо множеству $M(f)$, либо множеству $I^*(f)$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Մ. ԷՄԻՆՅԱՆ

Բիշդաճում ֆունկցիաների սահմանային առանձնահատկությունները

Աշխատանքում ստացված են եղբայրին թեորեմներ երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Մասնավորաբար նկարագրվում է $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1: |z_1| = 1$, $l = 1, 2$, բաղադրված զերիումումը ըստ Γ -ի ենթաբազմութիւնների՝ որոնք նկարագրվում են $f: D = D_1 \times D_2 \rightarrow \Omega$, $D_l: |z_l| < 1$ ֆունկցիայի սահմանային բազմութիւնների բնութագրման միջոցով: Անբրոմորֆ ֆունկցիաների համար ապացուցվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման $\zeta \in \Gamma$ կետը $M(f) \subset \Gamma$ բազմութիւնը պատկանելու համար: Այնուհետև՝ նշվում են պայմաններ մերոմորֆ ֆունկցիաների համար հաշորդականութիւնը P -հաշորդականութիւն հանդիսանալու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. М. Эминян, ДАН СССР, т. 294, № 4, с. 799—802 (1987).
- ² А. Г. Джваршвайли, Тр. Тбилисского гос. ун-та, т. 259, с. 7—32 (1985).
- ³ В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников, ДАН СССР, т. 233, № 1, с. 15—17 (1977).
- ⁴ К. Е. Meier, Math. Ann., v. 142, № 1, p. 328—344 (1961).
- ⁵ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 151, № 1, с. 19—22 (1963).
- ⁶ П. В. Довбунь, Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех., № 1, с. 38—42, 1981.
- ⁷ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 216, № 1, с. 21—23 (1971).

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

О сингулярном спектре возмущенного оператора умножения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/1 1988)

Пусть A — оператор, действующий в пространстве $L_2(-1, 1)$ по формуле

$$Af(x) = xf(x) + \varphi(x) \int_{-1}^1 f(t) \overline{\varphi(t)} dt. \quad (1)$$

Из результатов статьи Л. Д. Фаддеева ⁽¹⁾ следует, что при условиях $\varphi(x) \in Lip_\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\varphi(\pm 1) = 0$ непрерывный сингулярный спектр у оператора A отсутствует, а дискретный состоит из конечного числа точек. Случай, когда $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, рассмотрен в статье Б. С. Павлова и С. В. Петраса ⁽²⁾. Они показали, что в этом случае оператор A может иметь непрерывный сингулярный спектр и получены метрические оценки этой части спектра.

Здесь рассматривается случай, когда $\varphi(x)$ принадлежит пространству Бесова B_2^α , $0 < \alpha < 1$.

Для формулировки основной теоремы приведем некоторые определения.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $(-1, 1)$, принадлежит пространству $B_2^\alpha(-1, 1)$; это означает, что сходятся интегралы

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy < \infty, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть E — множество, лежащее на действительной оси, и $0 < \alpha < 1$. Тогда α -емкостью множества E называется число

$$C_\alpha(E) = \left(\inf_{\mu \ll E} \int_E \int_E \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|^\alpha} \right)^{-1},$$

где $\mu \ll E$ означает, что μ — неотрицательная, единичная мера с носителем, лежащим в E .

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in B_2^\alpha(-1, 1)$, $\frac{1}{4} < \alpha < 1$, причем в случае,

когда $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, предполагается, что $\varphi(\pm 1) = 0$, а в случае, когда $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \int_{-1}^{-1+\delta} \varphi(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Тогда непрерывный сингулярный спектр оператора (1) имеет нулевую $1-\alpha$ -емкость при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и нулевую $\frac{3}{2} - 2\alpha + \varepsilon$ -емкость при $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$, где $\varepsilon > 0$ — любое число.

Ниже приводится набросок доказательства этой теоремы.

Введем обозначения $H_{\varphi} = L_2(\text{supp } \varphi)$, $H_{\varphi}^{\perp} = L_2(-1, 1) \ominus L_2(\text{supp } \varphi)$. Подпространства H_{φ} и $H_{\varphi}^{\perp}$ приводят оператор A , причем на подпространстве $H_{\varphi}^{\perp}$ оператор A совпадает с оператором умножения на независимую переменную.

Рассмотрим оператор $A|_{H_{\varphi}}$. Спектр этого оператора прост и $\varphi(x)$ является для него порождающим элементом. Для спектральной функции E оператора $A|_{H_{\varphi}}$ справедлива формула

$$\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_t \varphi, \varphi)}{t - z}\right) \left(1 + \int_{-1}^1 \frac{|\varphi(t)|^2}{t - z} dt\right) = 1, \quad \text{Im } z \neq 0.$$

$$\text{Введем обозначение } m(z) = 1 + \int_{-1}^1 \frac{|\varphi(t)|^2}{t - z} dt.$$

Заметим, что $m(z)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция и там имеет положительную мнимую часть.

Для любого отрезка $\Delta \subseteq (-\infty, \infty)$ имеем

$$(E(\Delta)\varphi, \varphi) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \text{Im} \frac{1}{m(x + i\varepsilon)} dx.$$

С другой стороны, в силу теоремы Сохоцкого имеем

$$\lim_{z \rightarrow u + i0} m(z) = 1 + \int_{-1}^1 \frac{|\varphi(x)|^2}{x - u} dx + \pi i |\varphi(u)|^2,$$

если u — точка Лебега для функции $|\varphi(x)|^2$.

Следовательно, сингулярный спектр оператора A сосредоточен в множестве E , где функция $m(z)$ или не имеет граничного значения при приближении z к точке множества E , оставаясь в некотором угле Штольца, или существует некасательное граничное значение и оно

равно нулю. Таким образом, исследование множества, где сосредоточен сингулярный спектр оператора A , приводится к изучению граничных свойств функции $m(z)$.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՀԱՐՇԱԿՅԱՆ

Գրգռված բազմապատկման օպերատորի սինգուլյար սպեկտրի մասին

Տվյալ հոգիվածում բերվում է թեորեմ անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի միաշափ գրգռման սպեկտրի անընդհատ սինգուլյար մասի վերաբերյալ: Դիտարկվում է հետևյալ օպերատորը՝

$$Af(x) = x f(x) + \varphi(x) \int_{-1}^1 f(t) \overline{\varphi(t)} dt$$

$L_2(-1, 1)$ տարածության մեջ: Ենթադրվում է, որ $\varphi(x) \in B_2^a(-1, 1)$, որտեղ $\frac{1}{4} < a < 1$: Տվյալ հոգիվածում ապացուցվում է, A օպերատորի սպեկտրի սինգուլյար մասը կենտրոնացված է մի բաղմունքի վրա, որն ունի զրո ունակություն, կախված α պարամետրից:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. Д. Фаддеев, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXIII (1964). ² Б. С. Павлов, С. В. Петрас, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 2, с. 54—61 (1970)

УДК 517.17

МАТЕМАТИКА

А. М. Арамян

Плотность гладких и гладких финитных функций в пространствах $C^k(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega)$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Б. Нерсисяном 28/1 1988)

Вопросам плотности гладких или гладких финитных функций в различных функциональных пространствах посвящены работы многих авторов. В частности, для пространства С. Л. Соболева $W_p^1(\Omega)$ плотность гладких или гладких финитных в Ω функций при различных предположениях о характере области Ω доказана С. Л. Соболевым ⁽¹⁾, Е. Гальярдо ⁽²⁾ и В. П. Ильиным ⁽³⁾. Для анизотропных пространств $W_p^{\vec{m}}(\Omega)$ подобные вопросы изучены в работах ⁽⁴⁻⁷⁾.

В настоящей заметке приведены аналогичные результаты для более общих функциональных пространств $C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$.

Будем пользоваться следующими обозначениями: E_n — n -мерное евклидово пространство; $\Omega \subset E_n$ — произвольное открытое множество с границей Γ ; N_+^n — множество мультииндексов; $\mathfrak{K}$ — правильный многогранник с вершинами из N_+^n .

Говорят, что функция $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$, если в Ω существуют и непрерывны частные производные $D^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$ для всех $\alpha \in \mathfrak{M}$ и ко-

нечна норма

$$\|f\|_{C^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|D^{\alpha} f\|_{C(\Omega)}.$$

Функция $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$, если $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и для любых $x \in \Gamma(\Omega)$, $\alpha \in \mathfrak{M}$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^{\alpha} f(y) = 0.$$

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Будем говорить, что функция f принадлежит пространству $W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$, если в Ω существуют обобщенные по Соболеву производные $D^{\alpha} f$ при всех $\alpha \in \mathfrak{M} \cap N_+^n$ и конечна норма

$$\|f\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \|D^{\alpha} f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Положим

$$\rho(x, \Gamma(\Omega)) = \inf_{y \in \Gamma(\Omega)} |x - y|, \quad \Omega_\delta = \{x \in \Omega; \rho(x, \Gamma(\Omega)) > \delta\},$$

$$\sqsupset \alpha = \{\beta \in N_+^n; \beta \leq \alpha\}, \quad \sqsubset \alpha = \{\beta \in N_+^n; \beta \geq \alpha\}.$$

Для пространств $C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ справедлива следующая

Теорема 1. Пусть Ω — произвольное открытое множество, $\mathfrak{M}$ — правильный многогранник, $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$.

Тогда для того, чтобы существовала последовательность $\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{C^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = 0, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и в случае неограниченного открытого множества Ω $\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ y \in \Omega}} D^\alpha f(y) = 0, \quad \forall \alpha \in N_+^n \cap \mathfrak{M}.$

Возможность приближения функций $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ гладкими финитными функциями тесно связана с возможностью продолжения функций $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ нулем вне Ω с сохранением класса.

Теорема 2. Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условию $\Gamma(\Omega) = \Gamma(\bar{\Omega})$.

Для того, чтобы для данной функции $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ существовала последовательность $\{\varphi_s\}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{C^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = 0$,

необходимо и достаточно, чтобы $\Phi \in C^{\mathfrak{M}}(E_n)$, где Φ — продолжение нулем на все пространство функции f .

Теорема 3. Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество и $f \in C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Для выполнения условия (1) необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha \in \mathfrak{M} \cap N_+^n$ $\Phi_\alpha(x) \in C(E_n)$, где

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Для пространств $W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ справедливы

Теорема 4. Пусть $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$, где Ω — открытое множество, $1 \leq p < \infty$. Если для любого компакта K и мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{M}^0$

$$\|D^\alpha f\|_{L_1(K(\delta - \delta_0))} = o(\delta)$$

при $\delta \rightarrow 0$, то $\Phi \in W_p^{\mathfrak{M}}(E_n)$, где $\mathfrak{M}^0 = \{\beta \in \mathfrak{M}; \beta = \alpha - \bar{1}, \alpha \in \mathfrak{M}, \bar{1} = (1, 0, \dots, 0)\}$

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases} \quad (2)$$

Лемма. Пусть $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, где Ω — произвольное открытое множество в E_n . Если существует последовательность функций $\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega)$ ($s = 1, 2, \dots$) такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = 0$,

то $\Phi(x) \in W_p^{\mathfrak{M}}(E_n)$, где Φ определяется формулой 2).

Теорема 5. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(E_n)$ и для любого $x \in \mathfrak{M} \setminus \partial \mathfrak{M}$ $D^\alpha f(x) = 0$ при $x \in \Omega$. Тогда существует последовательность $\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega)$ ($s = 1, 2, \dots$) такая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = 0.$$

Теорема 6. Пусть $\Omega \subset E^n$ — произвольное открытое множество, $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{R}$ — правильный многогранник и $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Тогда существует такая последовательность $\varphi_s(x) \in C^\infty(\Omega)$ ($s = 1, 2, \dots$), что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)} = 0,$$

$$\text{причем при } x \in \mathfrak{R} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left\| (D^\alpha f(x) - D^\alpha \varphi_s(x)) \rho(x)^{|\alpha| - l_\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)} = 0,$$

$$\text{а при } x \in \mathfrak{R} \quad \left\| D^\alpha \varphi_s(x) \rho(x)^{|\alpha| - l_\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)} \leq C_{\alpha, s} \|f\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)},$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до границы $\Gamma(\Omega)$, $l_\alpha = \max_{\beta \in \mathfrak{M} \cap \Gamma} |\beta|$, $l^* =$

$$= \max_{\beta \in \mathfrak{M} \cap \Gamma} |\beta|.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Մ. ԱՐԱՄՅԱՆ

Ողորկ և ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաների խտությունը
 $C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ և $W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ տարածություններում

Աշխատանքում բերված են բավարար պայմաններ վերը նշված տարածությունների ֆունկցիաները զրոյով շարունակելու համար: $C^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ և $W_p^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ տարածությունների ֆունկցիաների համար ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի հնարավոր լինի նրանց մոտարկել ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաներով:

Արդյունքները ստացված են որոշակի կշռով միջինացումների միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.
- ² E. Gagliardo, Ricerche di mat., v. 7, № 1 (1958).
- ³ В. И. Ильин, Тр. МИАН СССР, т. 66 (1962).
- ⁴ С. М. Никольский, Изв. АН СССР. Сер. математика, т. 27, № 5 (1963).
- ⁵ Г. Г. Килиан, Мат. заметки, т. 2, № 1 (1967).
- ⁶ В. И. Буренков, Тр. МИАН СССР, т. 117 (1972).
- ⁷ В. И. Буренков, ДАН СССР, т. 202, № 2 (1972).

УДК 517.554

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О теореме «острие клина» для мероморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 11/II 1988)

Классическая теорема об «острие клина» Н. Н. Боголюбова (см., например, (1, 2)) имеет множество различных обобщений как по направлению усложнения областей, так и в связи с различными условиями совпадения функций на острие клина. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые возможные варианты распространения теоремы Боголюбова на мероморфные функции.

Пусть D^+ и D^- — области в $\mathbb{C}^N$ и функции $f^\pm$ голоморфны соответственно в $D^\pm$. Если $D^+ \cap D^-$ — тоже область и функции f^+ , f^- совпадают в вещественной окрестности некоторой точки $z^0 \in D^+ \cap D^-$, то они являются голоморфным продолжением одна другой, т. е. существует функция f , голоморфная в $D^+ \cup D^-$ и такая, что $f|_{D^\pm} = f^\pm$. Теорему об «острие клина» Боголюбова можно рассматривать как граничную теорему о продолжении такого типа, когда $D^+ \cap D^-$ пусто, но $\partial D^+ \cap \partial D^-$ содержит область в $\mathbb{R}^N$ и предельные значения $f^\pm$ в этой области совпадают. Простейший содержательный случай в этом направлении получается при $N=1$. Если $D^\pm$ лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскости и интервал $\Delta \subset \mathbb{R}$ есть общая открытая часть их границ, то, как хорошо известно, функции $f^\pm$, голоморфные в $D^\pm$, непрерывные на $D^\pm \cup \Delta$ соответственно и совпадающие на Δ , образуют единую голоморфную функцию в области $D^+ \cup \Delta \cup D^-$.

Основные трудности, возникающие при переходе от голоморфных функций к мероморфным, связаны с понятием совпадения мероморфных функций f^+ и f^- на общей части границы $D^+ \cup D^-$ (сложным даже в случае $N=1$).

Рассмотрим несколько естественных определений этого понятия в классической ситуации теоремы Боголюбова: D — область в $\mathbb{C}^N$ такая, что $M = D \cap \mathbb{R}^N$ связно и $D^\pm = \{z \in D : \pm y_j > 0, j=1, 2, \dots, N\}$ (здесь $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^N$).

1. Простейший случай — это когда функции $f^\pm$, мероморфные соответственно в $D^\pm$, продолжаются на острие M как отображение в сферу Римана $\bar{\mathbb{C}}$ и эти продолжения совпадают на M (тем самым на M не допускаются точки неопределенности). Тогда для каждой точки $z^0 \in M$ найдется окрестность $U \subset D$ такая, что либо $f^\pm$, либо $1/f^\pm$ голоморфны в $D^\pm \cap U$, непрерывны в $(D^\pm \cup M) \cap U$ и совпадают

на $M \cap U$. По теореме Боголюбова, $f^\pm$ или $1/f^\pm$ голоморфно продолжаются в некоторую окрестность V точки z^0 в $\mathbb{C}^N$ и, значит, в обоих случаях $f^\pm$ продолжается до функции, мероморфной в $D^+ \cup V \cup D^-$. Из теоремы единственности следует, что $f^\pm$ допускают мероморфное продолжение в область $D^+ \cup \Omega \cup D^-$, где Ω — некоторая окрестность M в $\mathbb{C}^N$.

2. Хорошо известно, что функции $f^\pm$, мероморфные соответственно в D^+ , представляются в виде отношений $h^\pm/g^\pm$, где функции h^+ и g^+ голоморфны в D^+ , а h^- и g^- в D^- . Предположим, что каждая из этих функций непрерывно продолжается на острие M и там имеет место равенство $h^+(x) \cdot g^-(x) = h^-(x) \cdot g^+(x)$. Это условие, очевидно, выполняется, когда f^+ и f^- мероморфны в окрестности M и там совпадают. Оказывается, при этом естественном условии совпадения мероморфного продолжения в окрестности острия в общем случае нет. Контрпример получается уже при $N=1$.

Пусть $D^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \pm y > 0\}$, $M = \mathbb{R}$ и $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - i/k^2}$, где числа a_k такие, что ряд сходится равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus \{0, i, i/4, i/9, \dots\}$. Положим $h^+(z) = z \cdot f(z) \cdot B(z)$, $g^+(z) = z \cdot B(z)$, где $B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - i/k^2}{z + i/k^2}$ — произведение Блешке, голоморфное и равномерно ограниченное в D^+ . Функции $h^+(z)$ и $g^+(z)$, очевидно, голоморфны в D^+ , а $f^+(z) = f|_{D^+} = h^+(z)/g^+(z)$ мероморфна в D^+ . Пусть, далее, $h^-(z) = f(z)$, $g^-(z) \equiv 1$ и $f^-(z) = h^-(z) = f|_{D^-}$ в D^- . Легко видеть, что функции $h^\pm$ и $g^\pm$ непрерывно продолжаются на $D^\pm \cup M$ и на M справедливо равенство $h^+ \cdot g^- = h^- \cdot g^+$. Однако мероморфное продолжение через точку $z=0$ невозможно, потому что она является предельной точкой для полюсов функции f^+ .

Отметим, что в частном случае, когда $g^\pm$ (или $h^\pm$) голоморфно продолжаются в окрестность острия (например, когда $g^\pm$ — многочлены), мероморфное продолжение $f^\pm$ на M следует из теоремы Боголюбова. В самом деле, тогда существует окрестность $U \supset M$, такая, что функции $g^\pm$ голоморфны в U , а $h^+ \cdot g^-$ и $h^- \cdot g^+$ голоморфны соответственно в $D^\pm \cap U$, непрерывно продолжаются на $(D^\pm \cap U) \cup M$ и (по нашему условию) совпадают на M . Пусть φ — голоморфное продолжение $h^\pm \cdot g^\mp$ в окрестность острия из теоремы Боголюбова, тогда функция $f = \varphi/(g^+ \cdot g^-)$ мероморфна в U и $f|_{D^\pm} = h^\pm/g^\pm = f^\pm$, т. е. f — искомое продолжение.

3. Контрпример в случае 2 оказался возможным из-за того, что принятое там условие совпадений не контролирует поведение полюсов (и точек неопределенности в общем случае) в окрестности M . Поэтому можно заранее предположить, что полярные множества функций $f^\pm$ «хорошо согласуются» на M , т. е. существует $(N-1)$ -мерное аналитическое множество A в некоторой окрестности $U \supset M$ такое, что полярные множества $P_{j^\pm} \cap U \subset A$. Вне $M \cap A$ потребуем обычное совпадение голоморфных функций: $f^\pm$ непрерывно продолжаются на $(D^\pm \cup M) \cap (U \setminus A)$ и совпадают на $M \setminus A$. При таком условии совпадения тоже имеет место аналог теоремы Боголюбова, ко-

торый также сводится к голоморфному случаю. Действительно, в окрестности произвольной точки $z^0 \in M$ множество A либо пусто, либо задается одной голоморфной функцией, скажем $A \cap V = \{\varphi = 0\}$ (V — окрестность z^0). Так как $f^\pm$ мероморфны и A есть локально конечное объединение своих неприводимых компонент (см., например, (1)), то существует число s такое, что функции $f^\pm \cdot \varphi^s$ голоморфны соответственно в $D^\pm \cap V$, непрерывны в $(D^\pm \cup M) \cap V$ и совпадают на $M \cap V$. По теореме Боголюбова они голоморфно продолжаются в окрестность z^0 и, значит, $f^\pm$ мероморфно продолжаются в эту окрестность. Глобальное продолжение в окрестность M следует из теоремы единственности.

4. Пусть для простоты D — шар $B(0, r)$ и функции $f^\pm$, голоморфные соответственно в $D^\pm$, удовлетворяют условиям теоремы Боголюбова. Комплексная прямая L вида $z = a + \lambda b$, где $a \in M$, $b \in D^+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, пересекает D по кругу, а $D^\pm \cap L$ — полукруги с общим отрезком границы $\Delta = M \cap L$. На этой плоскости функции $f^\pm$, совпадающие на Δ , образуют единую голоморфную функцию в $D \cap L$. Это свойство дает возможность принять следующие определения совпадений $f^\pm$ на M . Можно требовать, чтобы для каждой комплексной прямой L указанного вида сужения функции $f^\pm$ на L мероморфно продолжались на $L \cap D$ и чтобы для любых L и L' указанного вида эти продолжения совпадали на $L \cap L'$ (как отображения в $\mathbb{C}$). Но это очень сильное условие, и для справедливости теоремы можно брать не все L , а лишь некоторое их подсемейство. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство комплексных прямых в $\mathbb{C}^N$ вида $L: z = a + \lambda b^j$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $a \in M$ — произвольное и $\{b^1, b^2, \dots, b^N\} \subset D^+$ — фиксированный набор линейно-независимых векторов. Предположим, что для каждой прямой $L \in \mathcal{L}$ функции $f^\pm|_{D^\pm \cap L}$ мероморфно продолжаются на $D \cap L$ и для любых различных $L, L' \in \mathcal{L}$ эти продолжения совпадают в точке $L \cap L' \in M$, т. е. образуют единую функцию на M (со значением в $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Сделаем $\mathbb{C}$ -линейное преобразование l пространства $\mathbb{C}^N$ с вещественными коэффициентами, сохраняющее $\mathbb{R}^N$ и переводящее векторы b^j в базисные векторы $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e^j$ (1 на j -ом месте), $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда функции $f^\pm \circ l^{-1}$ определяют единую функцию f на множестве $X = (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_N) \cup \dots \cup (E_1 \times \dots \times E_{N-1} \times D_N) \subset \mathbb{C}^N$, где $D_j = l(D) \cap \mathbb{C}_{x_j}$ и E_j — отрезок вида $|x_j| \leq r$ на оси x_j , $j = 1, 2, \dots, N$. По построению f сепаратно мероморфна на X , а тогда по теореме автора (см. (4), теорема 2) она продолжается до функции $\tilde{f}$, мероморфной в области $\Omega \supset X$. Так как $\tilde{f}|_{X \cap (D^\pm)} = f^\pm|_{X \cap (D^\pm)}$, то из теоремы единственности следует, что функция $\tilde{f}$, равная $\tilde{f}$ в Ω и $f^\pm$ соответственно в $D^\pm$, мероморфна в области $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ и является искомым продолжением $f^\pm$.

По существу мы доказали следующее

Предложение. Пусть функция f мероморфна в областях D^+ и D^- , а на M определена как отображение в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Предположим, что сужение f на каждую комплексную прямую $L \in \mathcal{L}$ является мероморфной функцией в одномерной области $D \cap L$.

Тогда существует окрестность $\Omega \supset M$ в C^N такая, что f продолжается до функции, мероморфной в $D^+ \cup \Omega \cup D^-$.

Отметим, что условие совпадения продолжений $f^\pm|_{D^\pm \cap L}$ на $L \cap L'$ для $L, L' \in \mathcal{L}$ необходима. Это видно из следующего простого примера. Функция $f(z) = \exp\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)$ голоморфна в $D^+ \cup D^-$ (в C^2) и ее сужение на любую комплексную прямую $L: z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in D^+$, голоморфно при $a \neq 0$, так как все особенности f лежат на прямой $z_1 + z_2 = 0$. На прямой $L: z = ib$, $b \in D^+$, сужение f равно $\exp\left(\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right)$, т. е. постоянно (в частности, голоморфно продолжается на $L \cap D$), но эти константы для различных L различны и функция $f|_{D^+ \cup D^-}$, очевидно, не продолжается мероморфно в окрестность M .

В заключение приведем формулировку теоремы «острие клина» для мероморфных функций, аналогичную классической теореме Н. Н. Боголюбова и вытекающую из предыдущих рассуждений.

Теорема. Пусть область D в C^N такая, что $M = D \cap \mathbb{R}_N$ связно, $D^\pm = \{z \in D: \pm y_j > 0, j = 1, 2, \dots, N\}$, функции $f^\pm$ мероморфны соответственно в областях $D^\pm$ и совпадают на M в смысле пунктов 1, 3 или 4. Тогда существует окрестность $\Omega \supset M$ и мероморфная в $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ функция f такая, что $f|_{D^\pm} = f^\pm$.

Вычислительный центр Госплана
Армянской ССР

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար «սեպի սուր ծայրի» բերեմի մասին

Հոդվածում դիտարկվում են Ն. Ն. Բոգոլյուբովի C^N -ում, $N > 1$ անալիտիկ շարունակության մասին հանրահայտ թեորեմի որոշ ընդհանրացումներ մերոմորֆ ֆունկցիաների դասում:

Հիմնական դժվարությունը, որ ծագում է հոլոմորֆ ֆունկցիաներից մերոմորֆներին անցնելու ժամանակ, կապված է երկու մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային արժեքների համընկնելու գաղափարի հետ՝ սեպի սուր ծայրի վրա:

Դա այնքան էլ պարզ չէ անգամ $N = 1$ դեպքում, հարթության վրա, երբ մերոմորֆ ֆունկցիաների բևեռային կետերի բազմությունը դիսկրետ է: Շատ կոմպլեքս փոփոխականների դեպքում մերոմորֆ ֆունկցիաները, բացի բևեռային բազմությունից, որը դիսկրետ չէ, կարող են ունենալ նաև անորոշության կետեր, որոնց կամայական շրջակայքում ֆունկցիան կարող է ընդունել ցանկացած արժեք: Թեորեմի իրավացիությունը կախված է համընկնելիության սահմանումից, որի հնարավոր տարրերակները դիտարկվում են հոդվածում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958. 2 В. С. Владимиров, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 26 с. 825—838 (1962) 3 Е. М. Чирке, Комплексные аналитические множества, Наука, М., 1985 4 М. В. Казарян, Мат. сб., т. 125(167), № 3(11), с. 384—397 (1984)

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалаян

Сходимость по мере и метрический изоморфизм

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР И. У. Аракеляном 11/II 1988)

Сначала напомним некоторые определения.

Отображение одного пространства с мерой на другое называется изоморфным, если оно взаимно-однозначно и как оно, так и обратное ему отображение переводит всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. В том случае, когда оба пространства совпадают, изоморфизм называется автоморфизмом. Два пространства, допускающие изоморфные отображения друг на друга, называются изоморфными. Две функции f и f' , определенные, соответственно, на пространствах M и M' , называются изоморфными, если существуют такие множества $N \subset M$ и $N' \subset M'$ меры нуль и такое изоморфное отображение T пространства $M \setminus N$ на пространство $M' \setminus N'$, что $f(x) = f'(Tx)$ для всякого $x \in M \setminus N$. В этом случае говорят также, что функции f и f' принадлежат к одному метрическому типу ⁽¹⁾.

Для пространств (X, μ) , изоморфных отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега, в работе ⁽²⁾ доказано, что для любой последовательности f_n действительных измеримых функций на X , сходящейся по мере к функции f , существует такая последовательность S_n автоморфизмов пространства X , что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_n(x)) = f(x)$ для μ -п. в. x .

Таким образом, функции, являющиеся членами сходящейся по мере последовательности, можно заменить метрически изоморфными им функциями так, чтобы полученная последовательность сходилась почти всюду. При этом построенная в ⁽²⁾ последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное n_0 , что для всяк $n > n_0$ $\mu\{x \in X : S_n(x) \neq x\} < \epsilon$.

Приведенное автором доказательство этого результата основано на понятии метрического типа измеримых функций и использует классификационную теорему В. А. Рохлина ⁽¹⁾.

В настоящей заметке доказывается указанный результат без помощи классификационной теоремы, используется лишь классическая теорема Н. Н. Лузина. При этом рассматривается несколько более общая ситуация.

Теорема. Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ_X , μ — регулярная борелевская неатомическая мера на X , $\mu(X) < \infty$. Предположим, что измеримые подмножества X с

равными μ -мерами изоморфны. Пусть, далее, (Y, ρ_Y) — сепарабельное метрическое пространство и φ_n — последовательность измеримых функций на X со значениями в Y , сходящаяся по мере на X к функции φ . Тогда существует последовательность автоморфизмов S_n пространства (X, μ) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x) \text{ для } \mu\text{-п. в. } x.$$

При этом последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное n_0 , что для всякого $n > n_0$

$$\mu\{x \in X : S_n(x) \neq x\} < \epsilon.$$

Доказательство. Очевидно, можно считать $\mu(X) = 1$. Предположим сначала, что функция φ непрерывна. Выберем числа $\epsilon_n > 0$ так, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0, \quad (1)$$

где $E_n = \{x \in X : \rho_Y(\varphi_n(x), \varphi(x)) \geq \epsilon_n\}$.

Здесь, без ограничения общности, мы можем считать, что $\mu(E_n) > 0$ для всех n .

Для любого натурального k пусть $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,q_k}\}$ есть $1/k$ -сеть в X . В силу второго равенства в (1) можно построить натуральные числа $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \mu(E_{m_k}) < \infty. \quad (2)$$

Далее, выберем натуральные числа $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$ так, чтобы

$$\mu(E_n) \leq \mu(E_{m_k}) \text{ при } n > p_k. \quad (3)$$

В дальнейшем через $B(x; r)$ мы обозначим открытый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r .

Перейдем к построению автоморфизмов S_n . При $n \leq p_1$ будем считать, что S_n совпадает с тождественным автоморфизмом. Пусть $p_k < n \leq p_{k+1}$. Положим

$$A_{n,1} = E_n \cap B(x_{k,1}; 1/k);$$

$$A_{n,j} = E_n \cap \left[B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right) \right], \quad j=2, \dots, q_k.$$

Так как мера μ неатомическая, то существуют борелевские множества $G_{k,1} \subset B(x_{k,1}; 1/k)$

$$\text{и } G_{k,j} \subset B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right), \quad j=2, \dots, q_k$$

такие, что $\mu(G_{k,1}) = \min(\mu(B(x_{k,1}; 1/k)), \mu(E_{m_k}))$

$$\text{и } \mu(G_{k,j}) = \min\left(\mu\left(B\left(x_{k,j}; \frac{1}{k}\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B\left(x_{k,i}; \frac{1}{k}\right)\right), \mu(E_{m_k})\right), \quad j=2, \dots, q_k$$

Тогда в силу (3) имеем

$$\mu(A_{n,j}) \leq \mu(G_{k,j}) \text{ при } p_k < n \leq p_{k+1}, 1 \leq j \leq q_k. \quad (4)$$

Далее, полагая $G_k = \bigcup_{j=1}^{q_k} G_{k,j}$, в силу (2) будем иметь

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} q_k \mu(E_{m_k}) = 0. \quad (5)$$

Согласно допущениям относительно меры μ и в силу (4), для каждого $j=1, \dots, q_k$ существует изоморфное отображение $\sigma_{n,j}$ множества $A_{n,j} \setminus G_{k,j}$ на некоторое подмножество множества $G_{k,j} \setminus A_{n,j}$. Теперь, учитывая то, что согласно построению множества $A_{n,1}, \dots, A_{n,q_k}$ между собой и множества $G_{k,1}, \dots, G_{k,q_k}$ между собой попарно не пересекаются, положим

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \sigma_{n,j}(x), & \text{если } x \in A_{n,j} \setminus G_{k,j}, j=1, \dots, q_k \\ \sigma_{n,j}^{-1}(x), & \text{если } x \in \sigma_{n,j}(A_{n,j} \setminus G_{k,j}), j=1, \dots, q_k \\ x, & \text{если } x \in \bigcup_{j=1}^{q_k} [(A_{n,j} \setminus G_{k,j}) \cup \sigma_{n,j}(A_{n,j} \setminus G_{k,j})] \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что для любого натурального k

$$\bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \bigcup_{j=1}^{q_k} \sigma_n(A_{n,j}) \subseteq G_k. \quad (7)$$

Положим $S_n = \sigma_n^{-1}$. Очевидно S_n есть автоморфизм пространства с мерой (X, μ) . При этом имеет место неравенство

$$\rho_X(S_n(x), x) < 2/k \text{ для всех } x \in X \text{ и } p_k < n < p_{k+1}.$$

Отсюда, в силу непрерывности φ , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(S_n(x)) = \varphi(x). \quad (8)$$

Далее, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n) &= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=p_l+1}^{\infty} \sigma_n(E_n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \sigma_n(E_n) = \\ &= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} \bigcup_{j=1}^{q_k} \sigma_n(A_{n,j}) \subseteq \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} G_k. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5) следует

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n)\right) = 0. \quad (9)$$

Если $x \in X \setminus \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \sigma_n(E_n)$, то начиная с некоторого номера $S_n(x) \in X \setminus E_n$. Таким образом, почти все точки x обладают тем свойством, что начиная с некоторого (зависящего от x) номера $N(x)$ имеет место неравенство

$$\rho_1(\varphi_n(S_n(x)), \varphi(S_n(x))) < a_n, n > N(x). \quad (10)$$

Тогда в силу (8) и (10) из неравенства

$$\rho_1(\varphi_n(S_n(x)), \varphi(x)) \leq \rho_1(\varphi_n(S_n(x)), \varphi(S_n(x))) + \rho_1(\varphi(S_n(x)), \varphi(x))$$

получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x)$ для μ -п. в. x .

Пусть теперь φ есть произвольная измеримая функция на X со значениями в сепарабельном метрическом пространстве Y . Применяя теорему Лизина (¹), с. 89), можно построить последовательность попарно непересекающихся компактных множеств A_k таких, что функция φ , рассмотренная только на A_k , является непрерывной функцией на A_k для каждого $k=1, 2, \dots$ и имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 1.$$

В силу доказанного частного случая, для каждого k существует последовательность автоморфизмов $S_{k,n}$, $n=1, 2, \dots$ множества A_k такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(S_{k,n}(x)) = \varphi(x)$, для μ -п. в. $x \in A_k$.

Теперь очевидно, что полагая при любом n

$$S_n(x) = S_{k,n}(x) \text{ при } x \in A_k, k=1, 2, \dots,$$

мы получим последовательность автоморфизмов, удовлетворяющую всем утверждениям теоремы.

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армянской ССР

Յ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Չուգամիտությունը ըստ չափի և մետրիկական իզոմորֆիզմ

Ապացուցվում է հետևյալը:

Թեորեմ. Ենթադրենք X -ը կոմպակտ մետրիկական տարածություն է, μ -ն ռեզոլյար բորելյան չափ X -ի վրա անպիսին, որ $\mu(X) < \infty$ և X -ի հավասար μ -չափ ունեցող չափելի ենթաբազմությունները իզոմորֆ են: Ենթադրենք, բացի այդ, որ Y -ը սեպարաբել մետրիկական տարածություն է, և $\{\varphi_n: X \rightarrow Y, n=1, 2, \dots\}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է, որը X -ի վրա ըստ չափի չուգամիտում է φ ֆունկցիային: Այդ դեպքում գոյություն ունի (X, μ) տարածության ավտոմորֆիզմների անպիսի S_n հաջորդականություն, որ

1) Զանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի անպիսի n_0 բնական թիվ, որ երբ $n > n_0$, ապա $\mu\{x \in X: S_n(x) \neq x\} < \varepsilon$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x)$ համարյա մեծությամբ

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. А. Рохлин, УМН, т. 12, вып. 2(74), с. 169—174 (1957). ² Н. Н. Требукова, УМН, т. 15, вып. 2(92), с. 195—199 (1960) ³ Г. Федерер, Геометрическая теория меры, Наука, М., 1987.

УДК 519.7

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян

Нельсоновские системы булевых уравнений и функции с малым числом нулей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 12/XI 1987)

Одной из широко распространенных на практике моделей алгоритмов распознавания является модель алгоритмов с представительными наборами. Важной и трудоемкой частью алгоритмов данной модели является реализация с помощью дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.) функции, заданной таблицей нулей и эквивалентной произведению левых частей Нельсоновской системы булевых уравнений:

$$x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee \dots \vee x_n^{\beta_n} = 1, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad \text{где } x^{\beta} = \begin{cases} x, & \beta=1 \\ x+1, & \beta=0 \end{cases} \quad (1)$$

(Здесь и далее $+$ обозначает сложение по mod 2.)

Эта задача исследована в работах (1-2), из которых следует возможность практического уменьшения количества уравнений в системе (1) без существенного увеличения числа членов в уравнениях.

В настоящей работе рассмотрен новый способ реализации функций с малым числом нулей, позволяющий уменьшать количество уравнений Нельсоновской системы не менее, чем в 10 раз.

Все не определяемые понятия теории д. н. ф. изложены в (3). Через E^n обозначается множество вершин n -мерного единичного куба $\{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n\}$. Множество булевых функций, зависящих от n переменных, обозначается через $P(n)$. Множество единиц функции f — это $N_f \equiv \{x \in E^n | f(x) = 1\}$. Множество нулей — это $E^n \setminus N_f$.

Определение. Функция $f \in P(n)$ называется *линеаризируемой*, если $f = \prod_i g_i$, где g_i — линейная функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем Галуа $GF(2)$.

Класс линеаризируемых функций обозначается через $PL(n)$.

Пусть $M_f \equiv \{g | g \text{ — линейная функция и } g \cdot f \equiv 0\}$ — линейное подпространство $n+1$ -мерного пространства линейных над $GF(2)$ функций.

Определение. Пусть $f \in PL(n)$. Размерность $\dim f$ определяется как число $n - \dim M_f$.

Предложение. Пусть $f \in PL(n)$, тогда кратчайшее в смысле

количества сомножителей представление f имеет вид $f = \prod_{g \in B} (g + 1)$, где B — базис M_f , а $|N_f| = 2^{\dim f}$.

Определение. Выражение $f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_m$ называется *линеаризированной дизъюнктивной нормальной формой* (л. д. н. ф.), если $f_i \in \Pi L(n)$. Число m называется *длиной* л. д. н. ф.

Следует особо отметить, что длина л. д. н. ф. инвариантна относительно действия аффинной группы преобразований вида $y = Ax + b$ вершин куба E^n .

Задача реализации булевой функции f , заданной матрицей нулей, ставится следующим образом. Задана бинарная матрица M_0 размера $k \times n$ с попарно различными строками (каждая строка соответствует нулю функции f). Требуется построить л. д. н. ф. возможно меньшей длины, реализующую функцию f . Очевидно, что f эквивалентна произведению левых частей Цельсоновской системы (1), для которой $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ — i -ая строка матрицы M_0 .

Пусть $m \leq n + 1$.

Определение. Система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq E^n$ находится в общем положении, если из условий $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 0$ следует: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, где $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Эквивалентным является следующее определение: векторы $x_1, x_2, \dots, x_m$ находятся в общем положении, если размерность наименьшей в $\Pi L(n)$ функции, содержащей $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, равна $m - 1$.

Опишем метод л. д. н. ф.-реализации функции f , заданной матрицей k нулей M_0 .

Пусть $r = \text{rank } M_0$, тогда $\lceil \log_2 k \rceil \leq r \leq k$, где $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее a . Для простоты предположим, что линейно-независимы первые столбцы в M_0 . Столбцу с номером i сопоставим переменную x_i . Все столбцы с номерами, большими r , представляются в виде линейных комбинаций первых r столбцов. Поэтому строки матрицы M_0 удовлетворяют системе линейных уравнений над $GF(2)$: $x_{r+i} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r$, $i = 1, 2, \dots, n - r$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Ясно, что $g \equiv \prod_{i=1}^{n-r} (a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r + x_{r+i} + 1)$ — функция из $\Pi L(n)$, содержащая

M_0 . Поэтому $N_{g+1} \subseteq E^n \setminus M_0$ и $g+1 \equiv \bigvee_{i=1}^{n-r} (a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r + x_{r+i})$ покрывает часть N_f . Для получения покрытия N_f достаточно покрыть $N_g \setminus M_0$. Но N_g — смежный класс размерности r , и он изоморфен E^r , следовательно, задача сводится к построению л. д. н. ф. функции, зависящей от переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$, имеющей матрицу нулей, состоящую из первых r столбцов матрицы M_0 .

Обозначим через $L(n, r, k)$ наибольшую длину кратчайшей л. д. н. ф., реализующей функцию от n переменных с k нулями, ранг матрицы нулей которой равен r . Из вышеизложенного следует, что

$$L(n, r, k) \leq n - r + L(r, r, k) \text{ и } L(n, r, k) \leq n - r + \lceil 2^{r-1} - \frac{k}{2} \rceil.$$

Последнее неравенство следует из того факта, что в $N_g \setminus M_0$ содер-

жится $2^r - k$ векторов, а всякие два вектора образуют функцию из $PL(n)$.

Всюду далее через $\varphi(n)$ обозначается функция, сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Теорема 1. Если $r \leq \log_2 n - \varphi(n)$ или $2^r - k = o(n)$, то

$$L(n, r, k) \leq n(1 + o(1)).$$

Пусть $k \leq n+1$ и матрица нулей M_0 состоит из строк, находящихся в общем положении. Тогда подходящим аффинным преобразованием подматрица матрицы M_0 , состоящая из $k-1$ -го линейно-независимого столбца, переводится в матрицу, состоящую из k различных строк, содержащих не более одной 1. Следовательно, л. д. н. ф. функции f имеет длину не более, чем $n - (k-1) + d$, где d — длина л. д. н. ф. функции h , зависящей от $k-1$ переменных, равной 1 на всех векторах длины $k-1$, содержащих не менее двух 1. Нетрудно видеть, что $h = x_1 x_2 \vee (x_1 + x_2) x_3 \vee (x_1 + x_2 + x_3) x_4 \vee \dots \vee (x_1 + \dots + x_{k-2}) x_{k-1}$ и $d = k-2$. Следовательно, длина л. д. н. ф. функции f равна $n-1$.

Теорема 2. Если $f \in P(n)$ и имеет $k \leq n+1$ нулей, находящихся в общем положении, то f реализуется л. д. н. ф. длины $n-1$.

Рассмотрим теперь функции $f \in P(n)$ с k нулями при $k \leq 10$. Ясно, что длина $l(f)$ л. д. н. ф. функции f не больше $n - r + d$, где $r = \text{rank } M_0$, d — длина л. д. н. ф. функции $h \in P(r)$, множество нулей которой содержит все r -мерные векторы с не более, чем одной 1. Ввиду того, что $\lceil \log_2 k \rceil \leq r \leq k$, для получения $l(f)$ необходимо рассмотреть следующие случаи:

- а) $k=1$, тогда $h = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_r$ и $l(f) = n$;
- б) $k=2, 3$, векторы находятся в общем положении и $l(f) = n-1$;
- в) $k=4$, при $r=3$ — общее положение — $l(f) = n-1$, при $r=2$ нули составляют подпространство размерности 2, поэтому $l(f) = n-2$;
- г) $k=5$, при $r=4$ — общее положение — $l(f) = n-1$, а при $r=3$ имеем $2^r - k = 3$, для покрытия достаточно 2 смежных класса и $l(f) = n-1$;
- д) $k=6$, при $r=5$ — общее положение — $l(f) = n-1$, при $r=4$ в E^4 можно выбрать 3 смежных класса, покрывающих N_n и $l(f) = n-1$, при $r=3$ имеем $2^r - k = 2$ и $l(f) = n-2$;
- е) $k=7$, при $r=6$ — общее положение — $l(f) = n-1$, при $r=5$ в E^5 можно выбрать 5 смежных классов, покрывающих N_n и $l(f) = n$, при $r=4$ в E^4 N_n покрывают 3 класса и $l(f) = n-1$, при $r=3$ имеем $2^r - k = 1$ и $l(f) = n-2$.

Для $k=8, 9, 10$ был использован алгоритм построения л. д. н. ф. функции, заданной таблицей нулей. $PL/1(O)$ -реализация этого алгоритма была применена ко всем функциям h , получающимся при $k=8, 9, 10$ и не переводящимся друг в друга перестановкой переменных. При $k=8$ таких функций имеется 37, при $k=9$ — 107, при $k=10$ — 582. Получены следующие результаты:

- а) $k=8$, при $r=4$ — $l(f) = n-1$, при $r=5$ — $l(f) = n+1$, при $r=6$ — $l(f) =$

$=n+1$, при $r=3$ имеем $2^r-k=0$ и $l(f)=n-3$, при $r=7$ — общее положение $-l(f)=n-1$;

б) $k=9$, при $r=4$ имеем $2^r-k=7$ и для покрытия N_h достаточно 4 члена — $l(f)=n$, при $r=5$ — $l(f)=n+1$, при $r=6$ — $l(f)=n+2$, при $r=7$ — $l(f)=n+1$, при $r=8$ — общее положение — $l(f)=n-1$;

в) $k=10$, при $r=4$ имеем $2^r-k=6$ и достаточно для покрытия N_h всего 3 члена и $l(f)=n-1$, при $r=5$ — $l(f)=n+1$, при $r=6$ — $l(f)=n+2$, при $r=7$ — $l(f)=n+2$, при $r=8$ — $l(f)=n+1$, при $r=9$ — общее положение — $l(f)=n-1$.

Итак, всякая Нельсоновская система может быть сокращена в 10 раз, при этом количество членов в одном уравнении не больше, чем $n+2$.

Изложим теперь „частотное“ решение поставленной задачи.

Теорема 3. Пусть $m \cdot k = o(2^{n/2})$, $m = o(2^{n-k})$ и $k \leq n$. Тогда почти все бинарные матрицы, состоящие из $m \cdot k$ строк и n столбцов, состоят из последовательных групп из k , находящихся в общем положении строк.

Следствие. а) если $k \leq n - \varphi(n)$, то почти все наборы из k векторов находятся в общем положении;

б) если $k = \text{const}$, то утверждение теоремы 3 верно при $m = o(2^{n/2})$.

Отсюда получаем, что почти все функции $f \in P(n)$ с $k \leq n - \varphi(n)$ нулями реализуются л. д. н. ф. длины не более, чем $n-1$. Для любой постоянной k количество уравнений системы (1) может быть почти всегда уменьшено в k раз, если общее количество уравнений системы имеет порядок $o(2^{n/2})$, причем количество членов в новых уравнениях не больше, чем $n-1$.

Сравним теперь полученные результаты с результатами работ (1,2) относительно л. н. ф.-реализации функций с малым числом нулей.

В (1) показано, что при $k \leq \log_2 n - \varphi(n)$ длина л. н. ф. функции f асимптотически равна n . Следствие теоремы 3 улучшает эту оценку. Далее, в (2) отмечается, что л. н. ф.-реализация почти всегда неэффективна, в то время как л. д. н. ф.-реализация почти всегда дает длину $n-1$. Более того, почти всегда количество уравнений системы (1) уменьшается в любое постоянное число раз. В (1) получено, что при л. н. ф.-реализации получаются формулы длины $n + m(k)$, где $m(k)$ принимает следующие значения:

$k=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;

$m(k)=4, 14, 31, 66, 133, 271, 537$.

В случае л. д. н. ф. имеем: $m(k)=-1, -1, -1, 0, 1, 2, 2$. Т. е. система (1) практически уменьшается в 10 раз. И, наконец, оценка для $L(n, r, k)$ в худшем случае равна $n-k + \lceil 2^{k-1} - \frac{k}{2} \rceil$, что лучше со-

ответствующей оценки для длины л. н. ф. — $n + 2^{k-1} + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 3$.

Քուլյան հավասարումների նեյտոնի համակարգեր և
փոխ Բանակոյաւմը գրոնեռով ֆունկցիաներ

Աշխատանքում հետազոտված են նեյտոնի համակարգերի կրճատման և նրանց համապատասխանող քուլյան ֆունկցիաների հարակից դասերի միավորումով ներկայացման հարցերը: Ցույց է տրված, որ կամայական նեյտոնի համակարգը կարելի է կրճատել 10 անգամ: Եթե համակարգը կաղմված է $m \cdot k = O(2^{n/2})$ հավասարումներից և $m = O(2^{n-k})$, $k \leq n$, ապա համարյա միշտ այն կարելի է կրճատել k անգամ: Եթե քուլյան ֆունկցիայի գրոնեռը գտնվում են ընդհանուր վիճակում, ապա այն ներկայացվում է $n-1$ հարակից դասերի միավորումով: Համարյա բոլոր $k \leq n - \varphi(n)$ դրո՞ւ պարունակող քուլյան ֆունկցիաները ներկայացվում են $n-1$ հարակից դասերի միավորումով, այստեղ $\varphi(n) = O(n)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А — Г Р Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

- ¹ Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган, ДАН СССР, т. 285, № 4, с. 795—799 (1985).
- ² Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган, ЖВМ и МФ, т. 26, № 8, с. 1243—1249 (1986).
- ³ Ю. И. Журавлев, Проблемы кибернетики, вып. 8, с. 5—44 (1962). ⁴ Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Наука, М., т. 1, 1974.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

В. В. Акопян

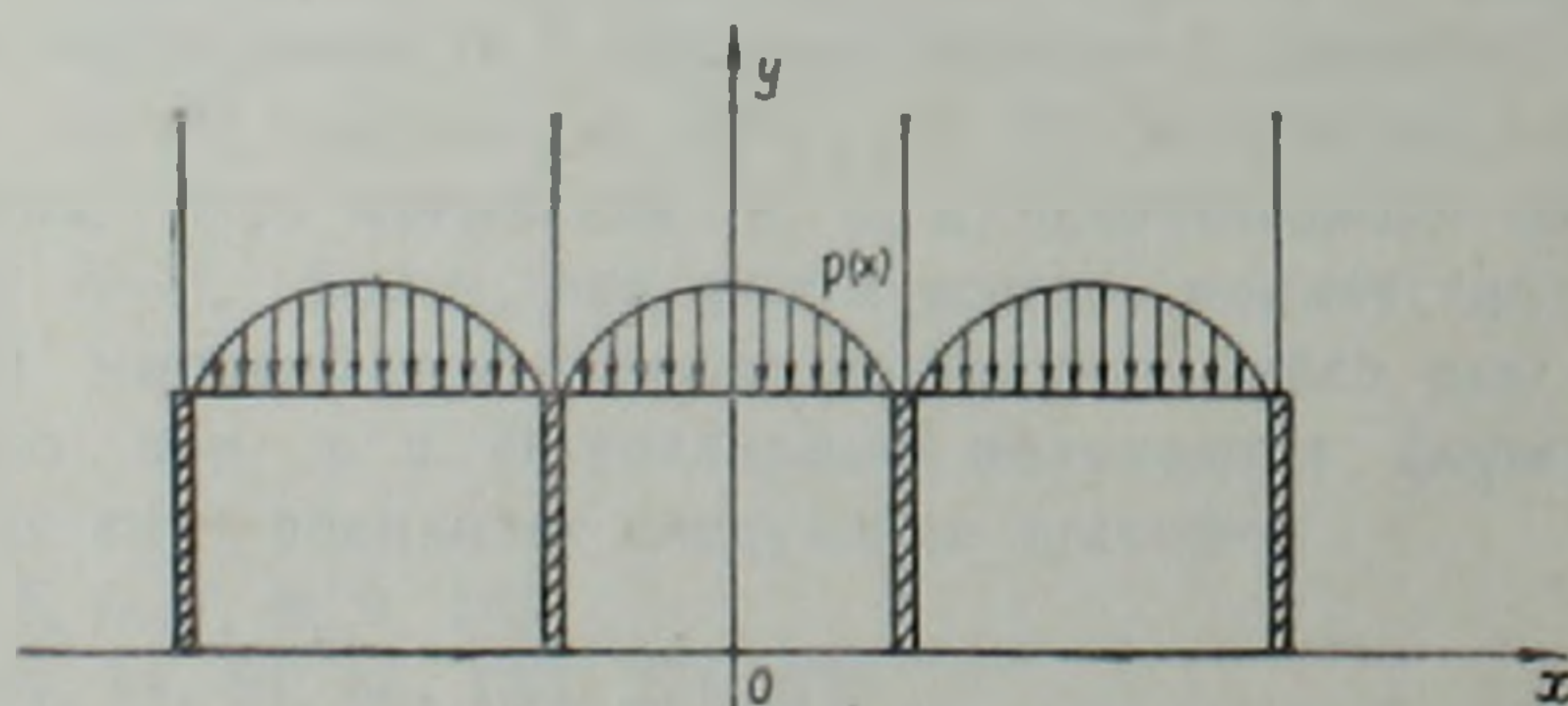
О периодической задаче контактного взаимодействия прямоугольников со струнгерами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 12/1 1988)

Результаты многочисленных исследований по задачам контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде струнгеров с массивными деформируемыми телами, обычно связанные с практическими вопросами передачи нагрузок, отражены в (1-2). При этом массивные тела моделируются в форме различных канонических областей, в частности, прямоугольных областей. Контактные задачи для прямоугольных областей рассмотрены в (3). Задачи контактного взаимодействия струнгеров с прямоугольниками обсуждались в (4-6).

В данной статье рассматривается плоская периодическая задача для полосы, составленной из периодических прямоугольников и струнгеров (рисунок).

Рассматривая основной период, приходим к задаче для прямоугольника ($-l \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq b$) с упругими характеристиками E_2 , ν_2 , усиленного по краям $x = \pm l$ струнгерами длины b и малой толщины h с упругими характеристиками E_1 , ν_1 . Предполагается, что рассматриваемая система с помощью двух нерастяжимых лент через струнгеры подвешена к двум неподвижным точкам, а на кромке $y = b$ прямоугольника действует симметричная относительно оси Oy нормальная нагрузка $p(x)$.



Предполагается также, что, как обычно (7), струнгеры находятся в одноосном напряженном состоянии, притом на их свободных краях задается условие $u_1 = 0$ (8). В такой постановке задачи на линии соединения струнгеров с прямоугольниками будут действовать тангенциальные напряжения $\tau(y)$ и $\varepsilon(y)$ соответственно. Требуется определить эти контактные напряжения.

Для прямоугольника имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, y) = \tau_y(x, 0) = 0, \\
\sigma_y(x, y) = -P(x), \\
\tau_x(\pm l, y) = \tau(y), \\
\tau_{xy}(\pm l, y) = \tau(y), \quad (-l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq b).
\end{aligned}
\tag{1}$$

Далее, следуя (9), выбираем бигармоническую функцию соответствующим образом и удовлетворяем граничным условиям (1). Тогда для прямоугольника относительно коэффициентов X_n, Y_n ($n=1, 2, \dots$) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_{p,n}^{(1)} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{p,n}^{(1)} X_n + N_p^{(1)} - \\
- \left[1 + 2(\nu_2 - 1) \frac{\operatorname{th} \mu_p}{\varphi_p^{(1)}} \right] Z_p, \quad \mu_p = \beta_p l, \quad \beta_p = \frac{p\pi}{l} \quad (p=1, 2, \dots)
\end{aligned}
\tag{2}$$

где выражения коэффициентов $A_{p,n}^{(1)}, B_{p,n}^{(1)}, N_p^{(1)}$ и $\varphi_p^{(1)}$ аналогичны приведенным в (8).

Теперь на линии соединения стрингера и прямоугольника запишем условия контакта:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_y^{(2)}, \\
u_2 = 0 \quad (0 \leq y \leq b),
\end{aligned}
\tag{3}$$

где $\varepsilon_y^{(1)}, \varepsilon_y^{(2)}, u_2$ вертикальные деформации и горизонтальное перемещение для стрингера и прямоугольника соответственно.

Учитывая условия (3), приходим к бесконечной системе:

$$\begin{aligned}
X_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2)} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(2)} X_n + N_m^{(2)} - \frac{Z_m \varphi_m^{(1)} \operatorname{ch} \mu_m}{2(\nu_2 - 1)}; \\
Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}^{(1)} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}^{(2)} X_n + M_m;
\end{aligned}
\tag{4}$$

где

$$X_m = \frac{2 \operatorname{th} \mu_m}{b} \int_0^b \tau(s) \sin \beta_m s ds; \quad Y_m = \beta_m^2 \varphi_m^{(1)} \operatorname{ch} \mu_m D_m^{(2)};$$

$$Z_p = \frac{2}{b} \int_0^b \tau(s) \cos \beta_p s ds \quad \left(\begin{matrix} m=1, 2, \dots \\ p=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right),$$

а $D_m^{(2)}$ — коэффициенты бигармонической функции (9), подлежащие определению.

Из условия равновесия стрингера имеем

$$\int_0^b \tau(s) ds = T,
\tag{5}$$

где T — сила натяжения в нерастяжимых лентах.

Из условия же равновесия всей системы стрингеры — прямоугольник можем записать

$$2T = \int_{-l}^l p(s)ds. \quad (6)$$

Далее, положив

$$z(y) = Z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cos \beta_k y; \quad (7)$$

$$z(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\operatorname{th} \beta_k} \sin \beta_k y \quad (0 \leq y \leq b),$$

из (5) — (7) получим

$$Z_0 = \frac{T}{b} = \frac{1}{2b} \int_{-l}^l p(s)ds. \quad (8)$$

Теперь, как обычно, подставляем выражения Z_k в системы (2) и (4), в результате чего окончательно получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} X_m &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n} X_n + E_m; \\ Y_m &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{m,n} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n} X_n + F_m. \end{aligned} \quad (9)$$

После определения X_m и Y_m из бесконечной системы (9) искомые неизвестные контактные напряжения находим по формулам (7).

Для исследования бесконечной системы (9) на регулярность при помощи изложенной в (2-9) методики показывается, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |C_{m,n}| + \sum_{n=1}^{\infty} |D_{m,n}| \right| &= 0; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{m,n}| + \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}| \right| &= 0, \end{aligned}$$

а свободные члены системы (9) для больших m имеют, по крайней мере, порядок m^{-1} . Отсюда вытекает, что бесконечная система (9) квазиполне регулярна.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Ուղղանկյունների և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության
պարբերական խնդրի մասին

Հողվածում դիտարկված է վերադիրների և առաձգական ուղղանկյունների կոնտակտային փոխազդեցության մի խնդիր, երբ ուղղանկյունները իրենց ուղղահայաց կողերով ուժեղացված են վերադիրներով և ամբողջ հասակարգը հորիզոնական ուղղությամբ առաջացնում է շերտ:

խնդրի լուծումը բերվում է դժային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծմանը: Յույց է տրված այդ համակարգի բվադի լինելի հնգույնարությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² В. М. Александров, С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями, Наука, М., 1983. ³ В. Т. Гринченко, Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. ⁴ В. В. Микаелян, ДАН АрмССР, т. 58, № 1, с. 21—27 (1974). ⁵ В. В. Микаелян, Изв. АН АрмССР Механика, т. 28 № 2, с. 3—14 (1975). ⁶ P. S. Theocaris, K. Dafertios, J. Appl. Mech. ser. E, v. 31, № 4 (1964) (рус. пер.: Прикл. механика, труды Амер. о на инж.-мех., ser. E., т. 31, № 4, с. 159—162 (1964)). ⁷ E. Melan, Ing. Arch. 1932, Bd. 3, № 2, S. 123—129 (1932). ⁸ H. Bufler, VDT—Forschungsheft 485, Ausgabel. Bd. 27, S. 5—44 (1961). ⁹ Б. Л. Абрамян, Прикл. мат. и мех. АН СССР, т. 21, № 1, с. 89—100 (1957).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Т. Ю. Сапогджян

Растяжение бесконечной пластинки с эллиптическим включением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 15/1 1988)

В статье приводится решение задачи о растяжении бесконечной пластинки с эллиптическим включением (с полуосями a и b) из другого материала, под действием постоянных напряжений, приложенных на бесконечности. Случаям анизотропных тел и плоским задачам для эллиптических включений посвящены работы (1-5).

1. Для случая, когда напряжения p направлены по большей оси эллипса (ось x), формулы Колосова-Мусхелишвили (6) представляются:

в области эллипса (область G_0)

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(\bar{z})}], \quad (1.1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_0''(z) + \Psi_0''(\bar{z})],$$

$$2\mu_0(u + iv) = \kappa_0\varphi_0(z) - \overline{z\varphi_0'(z)} - \overline{\Psi_0'(z)}; \quad (1.2)$$

для внешней области эллипса (область G_1)

$$\sigma_x + \sigma_y = p + 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(\bar{z})}], \quad (1.3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -p + 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \Psi_1''(\bar{z})],$$

$$2\mu_1(u + iv) = (\kappa_1 - 1)\frac{p}{4}z + \frac{p}{2}\bar{z} + \kappa_1\varphi_1(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\Psi_1'(z)}, \quad (1.4)$$

здесь $\varphi_1'(z)$ и $\Psi_1''(z)$ голоморфны в области G_1 и обращаются в нуль на бесконечности.

Для определения искомых аналитических функций применим метод конформного отображения. Отобразим известной функцией

$$z = R\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad \left(R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\right), \quad (1.5)$$

внешность единичной окружности ($\rho = 1$) на внешность разреза длиной $4R$ с центром, совпадающим с началом координат плоскости z , при этом ось x проходит вдоль разреза. Окружностям $\rho = \text{const}$ соответствуют конфокальные эллипсы на плоскости z , один из которых, для $\rho = 1$, обращается в указанный разрез. Обозначим через $\rho_0 =$

$= \sqrt{(a+b)(a-b)}$ радиус окружности на плоскости ζ , соответствующей эллипсу с полуосями a и b . Голоморфные в указанном кольце ($\rho=1$ и $\rho=\rho_0$) функции разлагаются в ряд Лорана. Н. И. Мусхелишвили⁽⁶⁾ подчинил коэффициенты этого ряда условию, при котором новый ряд оказывается голоморфным в области неразрезанного эллипса. Такими рядами будем пользоваться при разложении в ряд функций

$$\varphi_0(\zeta) = \varphi_0^*(z), \quad \Psi_0(\zeta) = \Psi_0^*(z). \quad (1.6)$$

Учитывая симметрию задачи относительно осей x и y , будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{pR}{4} \sum_1^\infty a_{2k-1}^{(0)} \left(\zeta^{2k-1} + \frac{1}{\zeta^{2k-1}} \right), \quad (1.7)$$

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{pR}{4} \sum_1^\infty b_{2k-1}^{(0)} \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \left(\zeta^{2k-1} - \frac{1}{\zeta^{2k+1}} \right).$$

Голоморфные в области G_1 функции

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi_1^*(z), \quad \Psi_1(\zeta) = \Psi_1^*(z) \quad (1.8)$$

разлагаются в ряды

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{pR}{4} \sum_1^\infty \frac{a_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}}, \quad \Psi_1(\zeta) = \frac{pR}{4} \sum_1^\infty \frac{b_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}}. \quad (1.9)$$

Главный вектор усилий, приложенных к дуге (s_0s) , в области G_0 определяется по формуле

$$i \int_{s_0}^s (X_n + iY_n) ds = \varphi_0^*(z) + z \overline{\varphi_0'^*(z)} + \overline{\Psi_0^*(z)}, \quad (1.10)$$

аналогично, в области G_1

$$i \int_{s_0}^s (X_n + iY_n) ds = \frac{p}{2} (z - \bar{z}) + \varphi_1^*(z) + z \overline{\varphi_1'^*(z)} + \overline{\Psi_1^*(z)}. \quad (1.11)$$

2. Условия сопряжения упругих областей G_0 и G_1 получаются приравниванием выражений (1.10) и (1.11), а также перемещений (1.2) и (1.4). Переходя по (1.5) от z к ζ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta_1) + \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}}{1 - \bar{\zeta}_1^{-2}} \overline{\varphi_0'(\zeta_1)} + \overline{\Psi_0(\zeta_1)} &= \varphi_1(\zeta_1) + \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}}{1 - \bar{\zeta}_1^{-2}} \overline{\varphi_1'(\zeta_1)} + \\ &+ \overline{\Psi_1(\zeta_1)} + \frac{pR}{4} (\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1} - \bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_1^{-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} x_0 \varphi_0(\zeta_1) - \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}}{1 - \bar{\zeta}_1^{-2}} \overline{\varphi_0'(\zeta_1)} - \overline{\Psi_0(\zeta_1)} &= \lambda \left[x_1 \varphi_1(\zeta_1) - \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}}{1 - \bar{\zeta}_1^{-2}} \overline{\varphi_1'(\zeta_1)} - \right. \\ &\left. - \overline{\Psi_1(\zeta_1)} + (x_1 - 1) \frac{pR}{4} (\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}) + \frac{pR}{2} (\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{где} \quad \lambda = \mu_0 / \mu_1. \quad (2.3)$$

Умножая обе части этих уравнений на $(1 - \bar{\zeta}_1^{-2}) = (1 - \rho_0^{-4\tau_1^2})$ и заменяя входящие в них искомые функции соответствующими рядами, далее сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\theta}$ этих рядов, получаем алгебраические уравнения относительно указанных коэффициентов ⁽⁶⁾. Для случая первой основной внешней задачи, согласно ⁽⁶⁾, функция $\varphi(\zeta)$ определяется по формуле

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1, \quad (2.4)$$

где $f(\theta)$ — заданная на γ функция.

Учитывая, что

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}, \quad (2.5)$$

из (2.4) находим

$$a_1 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \varphi(\zeta) = \frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta. \quad (2.6)$$

Для нашей задачи, согласно (2.1),

$$f(\theta) = \left| \varphi_0(\zeta_1) + \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1}}{1 - \bar{\zeta}_1^{-2}} \overline{\varphi_0(\zeta_1)} + \overline{W_0(\zeta_1)} - \frac{pR}{2} (\zeta_1 + \bar{\zeta}_1^{-1} - \bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_1^{-1}) \right| \frac{4}{pR}. \quad (2.7)$$

Учитывая (1.7) и (1.8), а также равенства

$$\frac{1}{1 - \rho_0^{-4\tau_1^2}} = \frac{1}{1 - \rho_0^{-2} e^{2i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2ki\theta}}{\rho_0^{2k}}, \quad (2.8)$$

из (2.6) с учетом (2.7) для нашей задачи находим

$$a_1^{(1)} = \rho_0^2 [-(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) a_1^{(0)} + A + 2(1 - \rho_0^{-2})], \quad (2.9)$$

$$\text{где } A = (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) a_{2k-1}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}^{(0)}. \quad (2.10)$$

Аналогично из (2.2) имеем

$$\lambda x_1 a_1^{(1)} = \rho_0^2 [(x_0 \rho_0^{-2} + \rho_0^2) a_1^{(0)} - \lambda (x_1 - 1) \rho_0^{-2} - 2]. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.9) и (2.11) являются теми уравнениями, которые требуются в ⁽⁶⁾ при решении задачи с помощью рядов. Поэтому полную систему уравнений, определяющих коэффициенты примененных рядов, мы получим, присоединив (2.9) и (2.11) к уравнениям, способ получения которых указан выше.

$$\begin{aligned} (\rho_0^4 - 1) a_1^{(0)} + a_1^{(1)} - \rho_0^2 A &= 2(\rho_0^2 - 1), \\ 2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) a_1^{(0)} + 2\rho_0^{-2} a_1^{(1)} - a_1^{(1)} &= 2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}), \\ (x_0 + \rho_0^4) a_1^{(0)} - \lambda x_1 a_1^{(1)} - \rho_0^2 A &= \lambda (x_1 - 1) + 2\rho_0^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$(x_0 - 1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})a_1^{(0)} + \lambda(x_1 - 1)\rho_0^{-2}a_1^{(1)} + \lambda d_1^{(1)} = \lambda(x_1 - 1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}),$$

$$(3\rho_0^4 - \rho_0^{-4})a_3^{(0)} + \rho_0^2 b_1^{(0)} + \rho_0^{-4}a_3^{(1)} = -2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(1 - \rho_0^2),$$

$$(x_0 \rho_0^{-4} + 3\rho_0^4)a_3^{(0)} + \rho_0^2 b_1^{(0)} - \lambda x_1 \rho_0^{-4}a_3^{(1)} = (x_0 - 1)a_1^{(0)} - \lambda x_1 a_1^{(1)} - \lambda(x_1 - 1 + 2\rho_0^2),$$

$$(\rho_0^4 - 3\rho_0^{-4})a_3^{(0)} - \rho_0^{-2}b_1^{(0)} + 3\rho_0^{-4}a_3^{(1)} - \rho_0^{-2}d_3^{(1)} = 2a_1^{(0)} - a_1^{(1)} + 2(\rho_0^{-2} - 1), \quad (2.13)$$

$$(x_0 \rho_0^4 + 3\rho_0^{-4})a_3^{(0)} + \rho_0^{-2}b_1^{(0)} - 3\lambda \rho_0^{-4}a_3^{(1)} + \lambda \rho_0^{-2}d_3^{(1)} = (x_0 - 1)a_1^{(0)} + \lambda a_1^{(1)} - \lambda(x_1 - 1 + 2\rho_0^{-2}).$$

Покажем теперь, что $a_3^{(0)} = 0$. Из первых двух уравнений (2.13) имеем

$$(x_0 + 1)a_3^{(0)} - (\lambda x_1 + 1)a_3^{(1)} = \rho_0^4[(x_0 + 1)a_1^{(0)} - (\lambda x_1 + 1)a_1^{(1)} - \lambda(x_1 - 1 + 2\rho_0^2) - 2(1 - \rho_0^2)],$$

а из первого и третьего уравнений (2.12) получаем

$$(x_0 + 1)a_1^{(0)} - (\lambda x_1 + 1)a_1^{(1)} = \lambda(x_1 - 1) + 2(\rho_0^2 - 2(\rho_0^2 - 1)), \quad (2.14)$$

отсюда следует, что $a_3^{(1)} = \frac{x_0 + 1}{\lambda x_1 + 1} a_3^{(0)}$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение (2.13), имеем

$$\rho_0^2 b_1^{(0)} + \left(\frac{x_0 + 1}{\lambda x_1 + 1} + 3\rho_0^8 - 1 \right) a_3^{(0)} = -2\rho_0^4 a_1^{(0)} + \rho_0^4 a_1^{(1)} + 2\rho_0^4 (1 - \rho_0^2),$$

далее из третьего и четвертого уравнений (2.13) получаем

$$[\lambda(\rho_0^4 - 3\rho_0^{-4}) + x_0 \rho_0^4 + 3\rho_0^{-4}]a_3^{(0)} + \rho_0^{-2}(1 - \lambda)b_1^{(0)} = (2\lambda + x_0 - 1)a_1^{(0)} - \lambda(x_1 + 1),$$

учитывая последнее равенство, находим

$$\left\{ (1 - \lambda) \left(\frac{x_0 + 1}{\lambda x_1 + 1} + 3\rho_0^8 - 1 \right) - \rho_0^8 [\lambda(\rho_0^4 - 3\rho_0^{-4}) + x_0 \rho_0^4 + 3\rho_0^{-4}] \right\} a_3^{(0)} =$$

$$-\rho_0^4 \{ (1 - \lambda) [-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(1 - \rho_0^2)] - \rho_0^4 [(2\lambda + x_0 - 1)a_1^{(0)} + \lambda(x_1 + 1)] \}.$$

С другой стороны, из второго и четвертого уравнений (2.12) имеем

$$(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(2\lambda + x_0 - 1)a_1^{(0)} + \rho_0^{-2}\lambda(x_1 + 1)a_1^{(1)} = \lambda(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(x_1 + 1).$$

Учитывая последнее равенство, а также (2.14), после очевидных преобразований получаем

$$(1 - \lambda) [-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(1 - \rho_0^2)] - \rho_0^4 [(2\lambda + x_0 - 1)a_1^{(0)} + \lambda(x_1 + 1)] = 0,$$

что совпадает с правой частью (2.15). Отсюда легко заключить, что

$$a_{2k-1}^{(0)} = b_{2k-1}^{(0)} = a_{2k-1}^{(1)} = 0 \text{ при } k = 2, 3, \dots, \quad d_{2k-1}^{(1)} = 0 \text{ при } k = 3, 4, \dots$$

Таким образом,

$$a_1^{(0)} = \frac{\lambda(x_1 + 1)[(\lambda x_1 + 1)(\rho_0^4 - 1) + \lambda(x_1 - 1) + 2\lambda\rho_0^2 - 2(\rho_0^2 - 1)]}{(\rho_0^4 - 1)(2\lambda + x_0 - 1)(\lambda x_1 + 1) + \lambda(x_1 - 1)(x_0 + 1)}$$

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda x_1 + 1} [(x_0 + 1)a_1^{(0)} - \lambda(x_1 - 1) - 2\lambda\rho_0^2 + 2(\rho_0^2 - 1)],$$

$$A = \rho_0^{-2}[(\rho_0^4 - 1)a_1^{(0)} + a_1^{(1)} - 2(\rho_0^2 - 1)], \quad (2.16)$$

$$d_1^{(1)} = \rho_0^{-2}[2(\rho_0^4 - 1)a_1^{(0)} + 2a_1^{(1)} - 2(\rho_0^4 - 1)],$$

$$b_1^{(0)} = \rho_0^{-2} [-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(\rho_0^2 - 1)],$$

$$d_3^{(1)} = (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) (-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2),$$

где $d_{2k-1}^{(1)} = b_{2k-1}^{(1)} - b_{2k-3}^{(1)}$, ($k = 1, 2, \dots$), при этом $b_{-1}^{(0)} = 0$, $b_1^{(1)} = d_1^{(1)}$, $b_3^{(1)} - b_5^{(1)} = b_7^{(1)} = \dots = d_1^{(1)} + d_3^{(1)}$.

Тогда с учетом (1.7) и (1.9) решение задачи получим в замкнутом виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \frac{pR}{4} a_1^{(0)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \Psi_0(\zeta) = \frac{pR}{4} b_1^{(0)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \\ \varphi_1(\zeta) &= \frac{pR}{4} a_1^{(1)} \frac{1}{\zeta}, \quad \Psi_1(\zeta) = \frac{pR}{4} \frac{1}{\zeta} \left[d_1^{(1)} + (d_1^{(1)} + d_3^{(1)}) \frac{1}{\zeta^2} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\zeta^6} + \dots \right) \right] = \frac{pR}{4} \frac{1}{\zeta} \left[d_1^{(1)} + (d_1^{(1)} + d_3^{(1)}) \frac{1}{\zeta^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Замечание. Для величины A имеем два значения (2.10) и (2.16). Учитывая найденные выражения для коэффициентов $a_1^{(0)}$ и $b_1^{(0)}$, непосредственно видим, что указанные два значения одинаковы.

Отметим также, что при переходе от эллипса к кругу ($a = b$) полученные результаты полностью совпадают с (6).

3. Аналогично первому случаю найдено замкнутое решение для второго случая, когда напряжения p направлены по малой оси эллипса (ось y). Для внешней области

$$\sigma_x + \sigma_y = p + 2[\varphi_1''(z) + \overline{\varphi_1''(z)}],$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p + 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \Psi_1''(z)],$$

$$2\mu_1(u + iv) = \frac{p}{4} (x_1 - 1)z - \frac{p}{2} \cdot \bar{z} + x_1 \varphi_1'(z) - z \cdot \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\Psi_1'(z)},$$

а в области эллипса выражения совпадают с (1.1) и (1.2).

Аналитические функции φ_i , Ψ_i ($i = 0, 1$) определяются по формулам (2.17), где отличные от нуля коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_1^{(1)} = \frac{\lambda(x_1 + 1)[(\lambda x_1 + 1)(\rho_0^4 - 1) + \lambda(x_1 - 1) - 2\lambda\rho_0^2 + 2(\rho_0^2 + 1)]}{(\rho_0^4 - 1)(2\lambda + x_0 - 1)(\lambda x_1 + 1) + \lambda(x_1 + 1)(x_0 + 1)},$$

$$a_1^{(0)} = \frac{1}{\lambda x_1 + 1} [(\lambda x_0 + 1)a_1^{(0)} - \lambda(x_1 - 1) + 2\lambda\rho_0^2 - 2(\rho_0^2 + 1)],$$

$$A = \rho_0^{-2} [(\rho_0^4 - 1)a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(\rho_0^2 + 1)],$$

$$d_1^{(1)} = \rho_0^{-2} [2(\rho_0^4 - 1)a_1^{(0)} + 2a_1^{(1)} - 2(\rho_0^4 - 1)],$$

$$b_1^{(0)} = \rho_0^{-2} [-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + 2(\rho_0^2 + 1)],$$

$$d_3^{(1)} = \rho_0^2 [-2a_1^{(0)} + a_1^{(1)} - \rho_0^{-2}b_1^{(0)} + 2(\rho_0^{-2} + 1)].$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Էլիպսական ներդրակով անվերջ սալի ձգումը

Աշխատանքում ստացված է առաձգական էլիպսական ներդրակով, անվերջ իզոտրոպ սալի անվերջությունում կիրառված հաստատուն լարումներով ձգման խնդրի փակ լուծումը, որի մեթոդը հիմնված է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության կիրառման վրա:

Խնդրի ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է Կոլոսով-Մուսխելիշվիլի հիմնական բանաձևերով:

Վերածելով որոշակի ֆունկցիաները չորանի շարքի և կիրառելով Կոշուտիսի ինտեգրալը, խնդրի լուծումը բերվում է վերջավոր թվով դժային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՐԵՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Швецов, в кн.: «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел», вып. 3, Саратов, 1967
- ² С. А. Калоев, в кн.: «Механика твердого тела», вып. 2, Киев, 1970
- ³ С. А. Калоев, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 20, № 3 (1967)
- ⁴ В. В. Меченский, Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной среде, Изв. АН СССР, МТТ, № 6 (1970).
- ⁵ О. С. Космодамианский, М. М. Нескордов, в кн.: «Теоретическая и прикладная механика», вып. 2, Харьков, 1971.
- ⁶ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Изд-во АН СССР, 1954.

УДК 611.576

МОРФОЛОГИЯ

Н. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян

Гистохимическое выявление фосфора в нервных клетках головного и спинного мозга кроликов

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 17/II 1988)

Как было показано в (¹), на срезах из фиксированного материала возможно получить воспроизводимые результаты по выявлению клеточных ортофосфатов в нейронах головного и спинного мозга кошки. Поскольку данные в этом направлении практически отсутствуют, то дальнейшие исследования могли бы дать новые сведения о гистохимии фосфорных соединений, занимающих одно из центральных мест в обменных энергетических процессах. В этом аспекте определенный интерес представляет выявление особенностей реакционной способности фосфора в клеточных структурах мозга у разных видов животных. Для выяснения этого вопроса в настоящем сообщении предпринята попытка проводить исследования по гистохимии фосфора в клеточных структурах мозга кроликов.

Объектом исследования служили головной и спинной мозг 15 половозрелых кроликов. Животных подвергали нембуталовому наркозу. После декапитации извлекали головной и спинной мозг. Из них готовили тонкие кусочки, которые фиксировали в 5%-ном нейтральном формалине или формол кальциевом фиксаторе 48 ч при 4°C. После фиксации из кусочков коры больших полушарий, среднего, продолговатого, спинного мозга и мозжечка готовили замороженные срезы, толщиной 60 мкм, которые после тщательной промывки в дистиллированной воде обрабатывали по свинцовому методу (А. М. Чилингаряна (^{2,3})).

Поскольку реакционная способность ортофосфатов в мозгу кролика является неизученным вопросом, то для всестороннего его исследования и выявления преципитационных пиков различных структур эксперименты проводили с учетом закономерности концентрационного взаимоотношения по А. М. Чилингаряну (⁴), с инкубацией срезов в смесях с разными количествами буфера. Часть срезов до инкубации обрабатывали в 70%-ном ацетоне 1 ч, с последующей 30-минутной промывкой в дистиллированной воде. Инкубационные смеси готовили из расчета: к 100 мл 0,01 М раствора уксуснокислого свинца добавлялся 1 М ацетатный буфер с pH 5,6 от 5 до 60 млс интервалом 5 мл. Срезы в этих смесях инкубировали от 3 до 10 дней, после чего выявляли сернистым натрием, промывали и заключали в глицерин-желатину.

Результаты исследований показали, что при формалиновой фиксации на срезах, инкубированных в смеси с 5 мл буфера (рН 5,6), отсутствует реакция сосудов и лишь местами заметны единичные отрывчатые капилляры. С 10—15 мл буфера в смеси наблюдается смешанная окраска ядер глиальных клеток и единичных капилляров. С 20—25 мл окрашиваются только ядра глиальных клеток, а с 35—40 мл наряду с ядрами глиальных клеток реагируют и нервные клетки. На срезах, инкубированных в смесях с 45—50 мл буфера, происходит избирательная окраска нервных клеток, которые выявляются за счет мелкозернистого осадка, откладывающегося в перикарионах и отростках. При дальнейшем увеличении количества буфера нейроклеточная реакция ослабевает. Следовательно, наиболее оптимальным пиком для выявления нервных клеток мы считаем количество буфера в смеси 45—50 мл.

О наличии фосфора в клеточных структурах свидетельствует образование преципитатов, которые в последнем этапе превращаются в черный осадок сульфида свинца. Осадок носит мелкозернистый характер и откладывается в перикарионах и дендритах различного порядка. После формалиновой фиксации на срезах, инкубированных от 3 до 5 дней, в основном выявляются нервные клетки с короткими отростками, ядра клеток не окрашиваются. В последних мелкозернистый осадок наблюдается на 6—10-ый день инкубации, вследствие чего становится трудным провести четкую границу между цитоплазмой и ядром. При формол кальциевой фиксации наблюдается ускорение реакции. Нервные клетки выявляются со 2-го дня инкубации, а мелкозернистый осадок в ядрах клеток образуется на 4—5-ый день инкубации. При этом увеличивается количество выявляемых клеток и отростки можно проследить на далеком от тела расстоянии. В морфологическом отношении более четкие результаты наблюдаются после обработки срезов в ацетоне.

Анализ препаратов показывает, что в коре больших полушарий головного мозга на светлоокрашенном фоне препарата выявляются клетки разных слоев. В основном встречаются пирамидные клетки малой и средней величины с короткими отростками, а также клетки многоугольной формы. Окраска цитоплазмы носит мелкогранулярный характер, ядра клеток не окрашиваются.

На препаратах мозжечка обнаруживаются тела клеток Пуркинье без отростков или с коротким основным дендритом. В молекулярном слое превалирует гранулярная зернистость. В зернистом слое выявляются небольших размеров клетки-зерна, тела которых бедны цитоплазмой и заняты в основном ядром. В белом веществе окрашиваются клетки собственных ядер мозжечка, с четко выступающей цитоплазмой и довольно длинными отростками.

На срезах продолговатого мозга довольно постоянно выявляются нервные клетки разных ядерных групп. Особенно четко окрашиваются нейроны ядерных групп лицевого, подъязычного, блуждающего нервов. Следует отметить, что наиболее рано, уже на 3-ий день инкубации, выявляются клетки ретикулярной формации (рис. 1). У них можно проследить первичные, вторичные, и третичные дендриты. Довольно

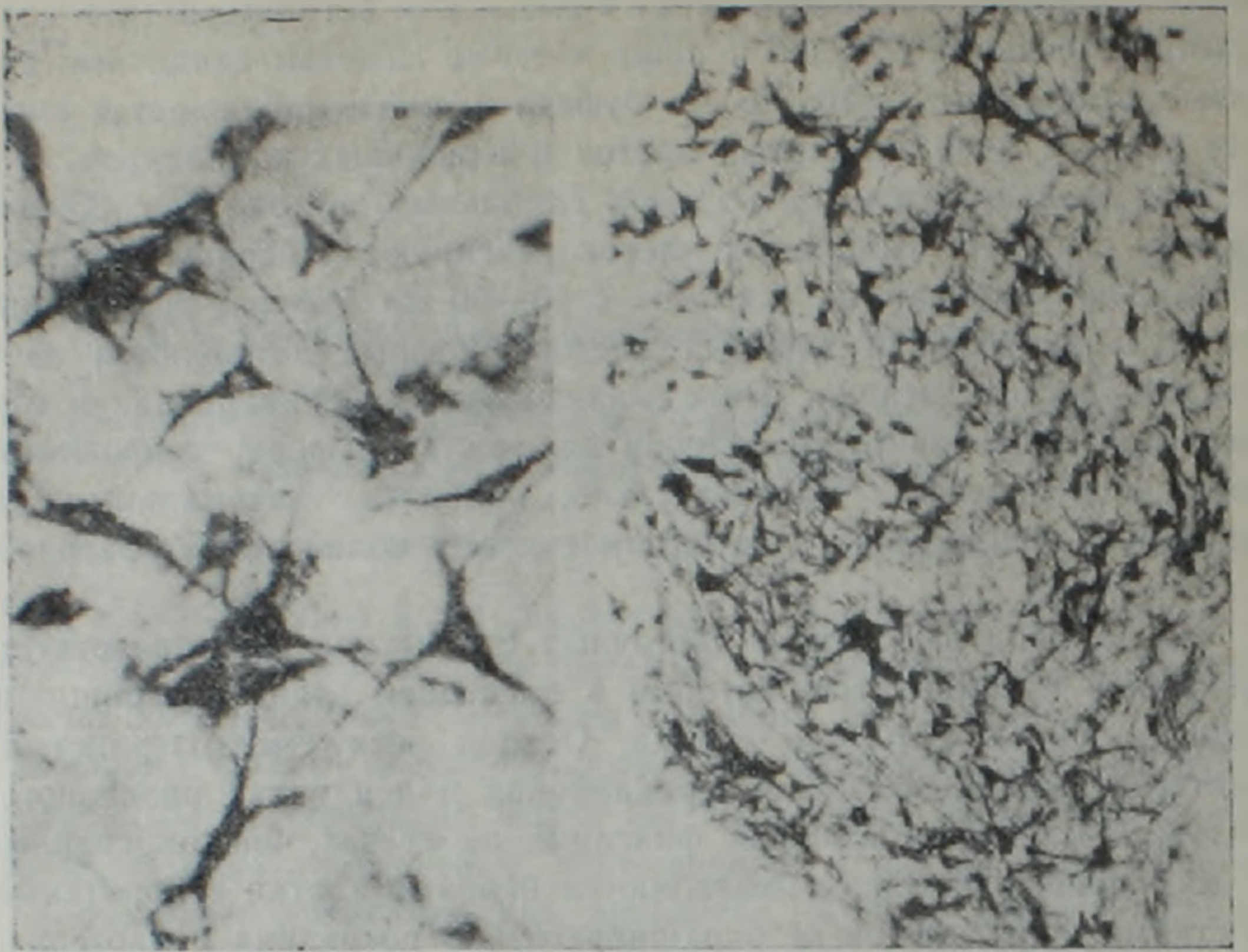


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Продолговатый мозг кролика. Показана реакция перикарионов и отростков крупных клеток ретикулярной формации. Ок. 8X, об. 24X

Рис. 2. Спинальный мозг кролика. Видны нервные клетки с отростками. Ок. 8X, об. 6X

но постоянно выявляются также и клетки оливы без отростков. Ядра их не окрашиваются.

Изучение срезов спинного мозга показывает, что наиболее рано выявляются мотонейроны в основном с гранулярной зернистостью, но встречаются также и темноокрашенные клетки. На 4—5-ый день реагирует большинство нейронов задних и боковых рогов, а уже на 7—10-ый день выявляется почти вся масса клеток серого вещества спинного мозга (рис. 2).

Таким образом, полученные в настоящем сообщении данные и их анализ показывают, что при выявлении ортофосфатов в мозгу кроликов наблюдается сходная и равномерная реакция нейронов различных отделов головного и спинного мозга. Эти данные в значительной степени отличаются от данных, полученных нами ранее у кошек (¹). В противоположность кроликам, у кошек в тех же условиях ортофосфаты выявляются далеко не во всех отделах мозга. В основном осаждение продукта реакции наблюдается в мотонейронах спинного мозга и нейронах большинства ядерных групп продолговатого мозга. Кроме того, у кошек преципитационные пики разных типов нейронов значительно отличаются.

В целом результаты, полученные нами при исследовании мозга кроликов, позволяют утверждать, что выявление клеточных ортофосфатов в нейронах мозга кроликов могут представлять определенный интерес как в гистохимическом, так и морфологическом отношении.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Ֆոսֆորի հիստոքիմիական հայտնաբերումը ճագարի գլխուղեղի
և ողնուղեղի նյարդային բջիջներում

Փորձի արդյունքները ցույց են տալիս, որ օրթոֆոսֆատների նստեցման պիկերը ուղեղի տարրեր բաժինների նյարդային բջիջներում գրեթե նույնն են: Միաժամանակ ցայտուն ուսկցիա է նկատվում ինչպես առանձին բջիջներում, այնպես էլ մեծ մաս բջջախմբերում: Իկյս տվյալները մեզ հիմք են տալիս եզրակացնելու, որ ճագարի ուղեղի ներթոններում բջջային օրթոֆոսֆատների հայտնաբերումը կարող է Հական նշանակություն ունենալ մորֆոլոգիական և հիստոքիմիական ուսումնասիրության ասպարեզում:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меликсетян, ДАН АрмССР, т. 85, № 2 (1987). ² А. М. Чилингарян, ДАН АрмССР, т. 40, № 2 (1965) ³ А. М. Чилингарян, Журн. exper. и клинич. медицины, т. 5, № 1 (1965) ⁴ А. М. Чилингарян, Микроскопическое изучение кровеносных сосудов и нервной ткани, основанное на применении соединений свинца. Докт. дисс., Л., 1968

ԾԱԹԵՄԱՏԻՒԱ

Հ. Մ. Էմինյան—Տարածական կվադրմորմորֆ արտապատկերման սահմանային եղակիությունը՝ ըստ շոշափող կորերի	3
Ա. Ն. Ավետիսյան—Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ համակարգերի լրիվության մասին՝ վերջավոր հատվածների վրա	8
Վ. Ի. Գավրիլով, Վ. Ս. Ջաֆարյան—Կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկցիաների չինդելյոֆի կետերի բազմությունը	12
Մ. Կ. Լյուբեդյան—Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների վերածելիության տեսության մասին	17
Թ. Վ. Խաչատրյան—Օպտիմալացման սկզբունքների դինամիկական կայունությունը բազմահայտանիշային բազմաթափ խաղերում	23
Կ. Հ. Խաչատրյան—Որկու սպառիչներով փոխանջատիչ կապուղու համար կողային կառուցվածքները	51
Ս. Ն. Մերգելյան, Ա. Ա. Իանիկյան— F_2 տիպի բազմությունների վրա զուգամիտվող բազմանդամների հաջորդականությունների մասին	51
Հ. Ս. Մարկոսյան—Ցրման խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումները դիֆերենցիալ հավասարումների մի համակարգի համար	58
Վ. Ի. Դավրիլով, Վ. Ս. Ջաֆարյան—Հոլոմորֆ արտապատկերումների ընտանիքի նորմալության հայտանիշեր	62
Կ. Վ. Գալստյան—Էքսպոնենցիալ սեմիմարտինգալների մուլտիպլիկատիվ վերլուծության մասին	67
Ն. Ա. Շիրոկով—Բազմանդամների հավասարաչափ փակումը խիստ պսևդոուուցիկ տիրույթներում	99
Կ. Ս. Հակոբյան, Թ. Ա. Ալեքսանդրյան—Էլիպսոիդալ տիրույթներում գծային դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի սեփական վեկտոր-բազմանդամների համակարգի լրիվության վերաբերյալ	147
Հ. Մ. Էմինյան—Բիշրջանում ֆունկցիաների սահմանային առանձնահատկությունները	195
Ա. Ա. Վաղարշակյան—Գրգռված բազմապատկման օպերատորի սինգուլյար սպեկտրի մասին	199
Ա. Մ. Արամյան—Ողորկ և ողորկ ֆինիտ ֆունկցիաների խտությունը տարածություններում $C^1(\Omega)$ և $W_p^1(\Omega)$	202
Մ. Վ. Ղազարյան—Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար «սեպի սուր ծայրի» թևերի մի մասին	205
Ն. Ա. Թալալյան—Ջուգամիտությունն ըստ չափի և մետրիկական իզոմորֆիզմ	209

ԿԻՐԱԹԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻՒԱ

Ա. Ա. Ալեքսանյան—Ռույան հավասարումների նեյտոնի համակարգեր և փոքր բանակության մոտ զրոներով ֆունկցիաներ	213
---	-----

ՄԱԿԱՆԻՒԱ

Գ. Լ. Պետրոսյան, Հ. Կույումյան—Թույլ առաձգական մոդուլի մասին	153
Վ. Վ. Հակոբյան—Ուղղանկյուն մարմնի և վերադիրների փոխադրելիության մասին	157
Ա. Մ. Սարգսյան, Ա. Ս. Խաչիկյան—Մի բանի ֆիզիկական դաշտերի վարքը բազմադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում	161
Վ. Վ. Հակոբյան—Ուղղանկյունների և վերադիրների կոնտակտային փոխադրելիության պարբերական խնդրի մասին	218

ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԿԱՆԻԿԱ

Ս. Վ. Ղանդիլյան, Վ. Վ. Մինասյան — Մագնիսակլեկտրաինդուկցիոն էլեկտրական յնքենաներ	102
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Մ. Իշխանյան, Դ. Յու. Մելիքանով — Հավասարահո եռմակարդակային ասումը ու մոնոթրոմատիկ ալիքի դաշտում	71
Ա. Հ. Մելիքյան, Ս. Մ. Սահակյան — Քվադրիարմոնիկ մոտավորության շրջանակներում նկն ցանցի հալման ջերմաստիճանի հաշվարկ	109
Ա. Ա. Սահարյան — էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիա-իմպուլսի տենզորի վա-կուումային միջինները դաշնային համաչափությամբ սահմաններով տիրույթների համար	112
Ս. Թ. Դեոբգյան, Դ. Յու. Կոյուչկով — Բարձր կարգի քվանտային ֆլուկտուացիաները և սեղմված վիճակները օպտիկական ուղղնատորում	118
Ն. Բ. Նեգիրարյան, Մ. Հ. Մուրադյան — Տեղափոխման տեսության որոշ հակադարձ խնդիրներ	122

ԻԱԴԻՈՖԻԶԻԿԱ

Հ. Մ. Այվազյան — Նեյամիլիմետրանոց ալիքների ուղիղուկացիոն անդրադարձման մեթոդով ամպերում հեղուկ կաթիլների սառույցին անցնելու՝ կարկտագոյացման սկզբնա-վորման հայտնաբերումը	166
--	-----

ԴԵՈՖԻԶԻԿԱ

Լ. Ս. Բեզուզյան, Ա. Ն. Կոզլով, Դ. Մ. Հովհաննիսյան, Յու. Պ. Սկովորոդկին — Ֆիտրա-ցիոն բնույթի տեղային երկրամագնիսական փոփոխությունները զիլատանսիայի շրջաններում	75
Ա. Խ. Բադրամյան — Փոքր կովկասի բլուկային կառուցվածքը և նարավոր մարսիմալ երկրաշարժերը	79

ՍԵՅՍՄՈԼՈԳԻԱ

Ն. Կ. Կարապետյան — Ուժեղ երկրաշարժերի կանխագուշակային հատկանիշը	37
---	----

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ռ. Հ. Բախչաջյան, Ի. Ա. Վարդանյան, Ա. Ռ. Նալբանդյան — Ալդենիդների ցածր ջերմաստիճանային օքսիդացումը հոմոգեն չղթաների զարգացման բացառման պայման-ներում	170
---	-----

ԻԱԴԻՈԿԵՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Մ. Ավագյան, Կ. Շ. Սսկանյան, Ն. Վ. Սիմոնյան — Բակտերիաների բջիջների վրա իոնիզացիոն և լազերային ճառագայթումների ազդեցության մի քանի ընդհանուր օրի-նաչափությունների մասին	32
---	----

ԼՐԱԿԱՌՈՒՅԱԼ ԿԵՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Ա. Ջաֆարյան, Կ. Հ. Բակունց, Ն. Ա. Սկոբելևա — Եշ-ԻնԻ-ի առանձնահատուկ ունեցվածքի ընդհանուր սլադմատիկ թաղանթի վրա	174
---	-----

ՌԻՐԻՄԻԱ

Կ. Ա. Բակունց, Մ. Դ. Դեոբգյան, Հ. Դ. Դալստյան, Ռ. Ա. Ջաֆարյան — Ինտերֆե-րոնի ինդուկցիան մարդու ընկերքից անջատված երկչոթանի ԻնԻ-ով	36
Ա. Լ. Շալչյան, Ս. Լ. Մկրտչյան, Շ. Հ. Ղազարյան, Վ. Դ. Մխիթարյան — Առնեսաների ֆուֆոլիպիդների ֆերմենտատիվ հիպոթիզի ձևափոխումը կախված ադրենալինից	42
Ա. Ա. Սիմոնյան, Բ. Դ. Հազլիդ — Նյարդային հյուսվածքի էներգետիկ փոխանակության հետազոտությունը S - 100A և S - 100B սպիտակուցներով	82
Ռ. Ա. Սահակյան, Խ. Ս. Սալադյան, Ա. Ա. Ջաֆարյան — Հարվահանած գոգմերի մզվածքների թրոմատոգրաֆիկ բաժանումը	127

Գ. Լ. Հաբույրյունյան, Ա. Ա. Պողոսյան, Ա. Գ. Մխիթարյան—Խոշոր և զգեքավոր անասունների ուղեղի (ԱԴՖ-տիրոգա) պոլիմերագայի անջատումը: Հիմնական ֆիզիկա- յիմիական հատկությունները	178
Խ. Ս. Սայազյան, Ա. Վ. Զիլֆյան, Ռ. Ա. Սահակյան, Գ. Գ. Գևորգյան, Մ. Ի. Գե- վորգյան—Հարվահանաձև գեղձերի մզվածքների ազդեցությունը ԴՆԹ-ի սինթեզի վրա լաբորատոր կենդանիների լիմուսի և փայծաղի լիմֆոցիտներում	181
Ա. Լ. Շալոյան, Ս. Լ. Մկրտչյան, Վ. Գ. Մխիթարյան—Զնագեցած ճարպաթթուները և գերօքսիդացման պրոցեսը առեծտների լյարդում	187

ՄՈՐՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Ի. Պողոսյան—Կատվի կարմիր կորիզի խոշոր ըջջային մասի վենտրալ շրջանի աֆե- րենտ մուտքերի ազդեցությունները	85
Ի. Բ. Մելիքսերյան, Զ. Հ. Մարտիրոսյան, Հ. Մ. Զիլինգարյան—Ֆոսֆորի հիստո- րիմիական հայտնաբերումը ճագարի գլխուղեղի և ողնուղեղի նյարդային ըջիջներում	228

ՐՈՒՅՍՆԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Գ. Բ. Սեդյախով, Ա. Վ. Գուսկով—Պերօքսիդազայի ակտիվության փոփոխու- թյունը լորու գողունային կոթունների ածուկից արմատների ուղեղնեղացիայի ընթացքում ԴՊԹ-ի և ԶԴ—ԴՊԹ-ի ազդեցությամբ	132
--	-----

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլոկով-Խնձորյան—Կարծրաթև-մալախիդների նոր տեսակ Ալթայից (Coleoptera, Malachidae)	46
Ս. Մ. Յաբլոկով-Խնձորյան—Մրջնասեր կարծրաթևավորների նոր ենթակայացուցիչ Հայ- կական ՍՍՀ-ից (Coleoptera, Cholevidae)	90
Մ. Յու. Քալաշյան—Anthaxia Eschsch. (Coleoptera, Buprestidae) սեռի երկու նոր տեսակ Հայաստանից	137

ՐԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ս. Դամբաբով, Տ. Վ. Սեդյախով, Լ. Գ. Միլեյան, Վ. Ա. Շեկոյան, Ա. Մ. Խզաբյան, Ա. Վ. Շախուբաբով—Իմունակարգավորող ռզակի խանգարումները միտրալ կապա- նահատումից հետո	93
Վ. Վ. Թոդինով, Ռ. Գ. Խաչատրյան—Լյարդի ծորանների դրենավորման նոր մեթոդ լյարդի զրուների շրջանի բաղնիքի ժամանակ	141

СОДЕРЖАНИЕ LXXXVI тома

МАТЕМАТИКА

О. М. Эминян—Граничные особенности пространственных квазимероморфных отображений вдоль касательных путей	3
А. Е. Аветисян—О полноте некоторых систем целых функций на конечных отрезках	8
В. И. Гаврилов, В. С. Захарян—Множества точек Линделёфа произвольных комплексных функций	12
М. К. Кюресян—К теории проводимости полиномов над конечными полями	17
Р. В. Хачатрян—Динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных многошаговых играх	23
Г. Г. Хачатрян—Конструкции кодов для переключающего канала с двумя пользователями	51
С. Н. Мергелян, А. А. Даниелян—О последовательностях полиномов, сходящихся на множествах типа F^2	54
Г. С. Маркосян—Асимптотическое решение задачи рассеяния для одной системы дифференциальных уравнений	58
В. И. Гаврилов, В. С. Захарян—Признаки нормальности семейств голоморфных отображений	62
К. В. Гаспарян—О мультипликативном разложении экспоненциальных семимартингалов	67
Н. А. Широков—О равномерном замыкании полиномов в строго псевдотупых областях	99
Г. С. Акопян, Г. А. Александрян—О полноте системы собственных вектор-полиномов линейного пучка дифференциальных операторов в эллипсоидальных областях	147
О. М. Эминян—Граничные особенности функций в полидиске	195
А. А. Вагаршакян—О сингулярном спектре возмущенного оператора умножения	199
А. М. Арамян—Плотность гладких и гладких финитных функций в пространствах $C^1(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$	202
М. В. Казарян—О теореме «острие клина» для мероморфных функций	205
Ф. А. Талалян—Сходимость по мере и метрический изоморфизм	209

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян—Нельсоновские системы булевых уравнений и функции с малым числом нулей	213
--	-----

МЕХАНИКА

Г. Л. Петросян, Г. Кузяк—О модуле упругости чугуна	153
В. В. Акопян—О взаимодействии прямоугольного тела со струнгерами	157
А. М. Сарсян, А. С. Хачикян—Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела	161
В. В. Акопян—О периодической задаче контактного взаимодействия прямоугольников со струнгерами	218
Т. Ю. Сапонджян—Растяжение бесконечной пластинки с эллиптическим включением	222
	235

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

- С. В. Гандилян, В. В. Минасян—Магнитоэлектрондукционные электрические машины 102

ФИЗИКА

- А. М. Ишханян, Д. М. Меликджанов—Эквидистантный трехуровневый атом в поле немонохроматической волны 71

- А. О. Меликян, С. М. Саакян—Вычисление температуры плавления ГЦК решетки в высокотемпературном приближении 108

- А. А. Саарян—Вакуумные средние тензоры энергии-импульса электромагнитного поля для областей с границами цилиндрической симметрии . . . 112

- С. Т. Геворкян, Г. Ю. Крючков—Квантовые флуктуации высших порядков и сжатые состояния в оптическом резонаторе 118

- Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян—Некоторые обратные задачи теории переноса 122

РАДИОФИЗИКА

- Г. М. Аивазян—Обнаружение начала градообразования—перехода жидких капель в лед в облаках по радиолокационному отражению субмиллиметровых волн 166

ГЕОФИЗИКА

- Л. С. Безуглая, А. Н. Козлов, Г. М. Огангсян, Ю. П. Сковородкин—Локальные геомагнитные вариации фильтрационной природы в зонах дилатансии . . 75

- А. Х. Багриян—Блоковое строение и максимально возможные землетрясения Малого Кавказа 79

СЕЙСМОЛОГИЯ

- Н. К. Карапетян—Прогностический признак сильных землетрясений . . . 27

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Р. А. Бахчаджян, И. А. Варданян, А. Б. Налбандян—Низкотемпературное окисление альдегидов в условиях, исключающих гомогенное развитие цепей . . 170

РАДИОБИОЛОГИЯ

- Ц. М. Авакян, К. Ш. Восканян, Н. В. Симонян—О некоторых общих закономерностях действия лазерного и ионизирующих излучений на клетки бактерий 32

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

- Р. А. Захарян, К. А. Бакунц, Н. А. Скобелева—Специфическая рецепция дс-РНК на плазматической мембране клетки 174

БИОХИМИЯ

- К. А. Бакунц, М. Г. Геворкян, Г. Г. Галстян, Р. А. Захарян—Индукция интерферона дсРНК плаценты человека 36

- А. Л. Шалджян, С. Л. Мкртчян, Ш. А. Кизарян, В. Г. Мхитарян—Адреналинзависимая модификация ферментативного гидролиза фосфолипидов печени крыс 42

- А. А. Симонян, К. Г. Хагалид—Возможная регуляция энергетического метаболизма нервной ткани белками S—100a и S—100b 82

- Р. А. Саакян, Х. С. Саядян, А. А. Чарчоглян—Хроматографическое разделение экстрактов парашитовидных желез 127

- Д. Л. Арутюнян, А. А. Погосян, А. Г. Мхитарян—Выделение (АДФ-рибо-
236

за) полимеразы из мозга крупного рогатого скота. Основные физико-химические свойства	178
Х. С. Саядян, А. В. Зильфян, Р. А. Сапкян, М. И. Геворкян, Г. Г. Геворкян—Влияние экстракта парашитовидных желез на синтез ДНК в лимфоцитах тимуса и селезенки лабораторных животных	181
А. Л. Шалджян, С. Л. Мкртчян, В. Г. Мхитарян—Ненасыщенные жирные кислоты и перекисное окисление в печени крыс	187

МОРФОЛОГИЯ

В. И. Погосян—Источники афферентных входов вентрального отдела крупноклеточной части красного ядра кошки	85
И. В. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян—Гистохимическое выявление фосфора в нервных клетках головного и спинного мозга кроликов	228

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Г. Б. Агаларзаде, А. В. Гуськов—Изменение активности пероксидазы в процессе регенерации придаточных корней у стеблевых черенков фасоли под действием ИУК и 2,4-Д	132
--	-----

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян—Новый вид жесткокрылых-малашек с Алтая (Coleoptera, Malachidae)	46
С. М. Яблоков-Хнзорян—Новый представитель мимеркофильных жесткокрылых из Армянской ССР (Coleoptera, Cholevidae)	90
М. Ю. Калашян—Два новых вида рода Anthraxia Eschsch (Coleoptera, Euprestitidae) из Армении	137

МЕДИЦИНА

С. С. Гамбаров, Т. В. Агасарян, Л. Д. Мхейн, В. А. Шекоян, А. М. Хзарджян, А. В. Шахсуваров—Нарушение иммунорегуляторного звена после митральной комиссуротомии	93
В. В. Родионов, Р. Г. Хачатрян—Новый способ дренирования печеночных протоков Т-образным дренажом при раке	141

C O N T E N T S of LXXXVI volume

MATHEMATICS

<i>O. M. Eminian</i> —Boundary singularities of spatial quasimeromorphic mappings along tangent paths	3
<i>A. E. Avetisyan</i> —On the completeness of some systems of entire functions on finite sections	8
<i>V. I. Gavrilov, V. S. Zakharian</i> —Sets of Lindelof points for arbitrary complex functions	12
<i>M. K. Kuregian</i> —On the theory of reducibility of polynomials over finite fields	17
<i>G. H. Khachatrian</i> —Code constructions for two-user switching channel .	23
<i>R. V. Kechachatrian</i> —Dynamic stability principles of optimality in polynomial polystep games	51
<i>S. N. Mergelian, A. A. Daniellian</i> —On sequences of polynomials converging on the sets of F_σ type	54
<i>H. S. Markosian</i> —Asymptotic solution of the problem of dispersion for one system of differential equations	58
<i>V. I. Gavrilov, V. S. Zakharian</i> —Conditions for normality of holomorphic mapping classes	62
<i>K. V. Gasparian</i> —On a multiplicative decomposition for exponential semimartingales	67
<i>N. A. Shirokov</i> —On the uniform closure of polynomials in the strictly pseudoconvex domains	99
<i>G. S. Hakobian, [R. A. Aleksandrian]</i> —On completeness of the system of eigen-vector polynomials of linear bundle of differential operators in ellipsoidal ranges	147
<i>O. M. Eminian</i> —Boundary singularities of functions in a polydisk . .	195
<i>A. A. Vagarshakian</i> —About singular spectrum of self-adjoint operator of multiplication	199
<i>A. M. Aramian</i> —The density of smooth and smooth finite functions in spaces $C^k(\Omega)$ and $W_p^{l,k}(\Omega)$	202
<i>M. V. Kazarian</i> —On "edge of the wedge" theorem for meromorphic functions	205
<i>F. A. Talalian</i> —Convergence in measure and metric isomorphism . .	209

APPLIED MATHEMATICS

<i>A. A. Alexanian</i> —Nelson type systems of Boolean equations and functions with a small number of zeroes	213
--	-----

MECHANICS

<i>G. L. Petrossian, G. Kujavlac</i> —Module of cast iron elasticity	153
<i>V. V. Hakobian</i> —On interactions of rectangle bodies with stiffeners .	157
<i>A. M. Sargsian, A. S. Khachikian</i> —The behaviour of certain physical fields at the vicinity of the edge of contact surface of piecewise-homogeneous body	161
<i>V. V. Hakobian</i> —On periodic problem of a contact interaction of rectangles with stiffeners	218
<i>T. Yu. Saponjian</i> —Infinite plate tension with elliptic inclusion . . .	222

ELECTROMECHANICS

S. W. Gandellian, W. W. Minasian—Magneto-electroinductive electrical machines 102

PHYSICS

A. M. Ishkhanian, D. Yu. Melikjanov—Equidistant three-level atom in the field of nonmonochromatic wave. 71

A. H. Meliklan, S. M. Sahakian—The calculation of melting temperature of PCC lattice in high-temperature approximation 105

A. A. Saharian—Vacuum expectation values of the energy-momentum tensor of the electromagnetic field for the regions with the boundaries of a cylindrical symmetry 112

S. T. Gevorkian, G. Yu. Kryuchkov—Intensity time correlation functions of the four-wave mixing process in an optical resonator. 115

N. B. Yengtharian, M. H. Muradian—On some inverse problems of transfer theory 122

RADIOPHYSICS

H. M. Ayvazian—Hall-forming Initiation discovery—transition of liquid drops into ice in the clouds by backscattering of submillimeter waves . . . 166

GEOPHYSICS

L. S. Bezuglaya, A. N. Kozlov, G. M. Oganessian, Yu. P. Skovorodkin—Local geomagnetic variations of the filtration nature in dilatational regions. . 75

A. Kh. Bagramian—Block structure and maximum possible earthquakes of Maly Caucasus 79

SEISMOLOGY

N. K. Karapetian—The prediction symptom of strong earthquakes . . . 27

PHYSICAL CHEMISTRY

R. H. Bakhchadjian, L. A. Vardanian, A. B. Nalbandian—The low temperature oxidation of the aldehydes in conditions excluding the homogeneous propagation of the chains 170

RADIOBIOLOGY

K. Sh. Voskanian, N. V. Simonian, Ts. M. Avakian—Some general regularities of laser and ionizing radiation influence on cells 32

MOLECULAR BIOLOGY

R. A. Zakharian, K. A. Bakunts, N. A. Skobeleva—Specific reception of ds-RNA on plasmatic membrane of the cell 171

BIOCHEMISTRY

K. A. Bakunts, M. G. Gevorkian, G. G. Galstian, R. A. Zakharian—Induction of Interferon by ds-RNA from human placenta 26

A. L. Shaljian, S. L. Mkrtchian, Sh. H. Kazarian, V. G. Mkhitarian—Adrenaline-dependent modification of enzymatic hydrolysts of phospholipids of the rat liver 42

A. A. Simonian, K. G. Haglidi—The possible regulation of energetic metabolism of nervous tissue by proteins S—100a and S—100b 82

R. A. Sahakian, Ch. S. Sayadian, A. V. Zilphian, A. A. Charchoghlian—The chromatographic separation of parathyroid extract 127

D. L. Harutunian, A. A. Pogossian, A. G. Mkhitarian—Purification of (ADP-ribose) polymerase from bovine brain. Main physico-chemical properties . 178

Ch. S. Sayadian, A. V. Zilphian, R. A. Sahakian, M. I. Gevorgian, G. 239

<i>G. Gevorgian</i> —The parathyroid extract influence on the DNP synthesis in thymocytes and splenocytes of laboratory animals	181
<i>A. L. Shalgian, S. L. Mkrtchian, V. G. Mkhitarian</i> —Unsaturated fatty acids and peroxidation processes in the rat liver.	187

MORPHOLOGY

<i>V. I. Pogostan</i> —Afferent inputs to the ventral regions of the magnocellular part of the cat's red nucleus	85
<i>I. V. Meliksetian, J. H. Martirosian, H. M. Chilingarian</i> —Histochemical exposure of phosphorus in nervous cells in rabbit cerebrum and spinal cord	228

PLANT PHYSIOLOGY

<i>G. B. Agalarzade, A. V. Guskov</i> —Change of peroxidase activity during the process of regeneration of adventitious roots in kidney bean stem cutting under the influence of IAA and 2,4—D	132
--	-----

ENTOMOLOGY

<i>S. M. Iablokoff-Khnzorian</i> —A new species of Malachid beetles from Altai	46
<i>S. M. Iablokoff-Khnzorian</i> —A new species of myrmecophilous beetles from the Armenian SSR (Coleoptera, Cholevidae)	90
<i>M. Y. Kalashian</i> —Two new species of the genus <i>Anthaxia</i> Eschsch. (Coleoptera, Buprestidae) from Armenia.	137

MEDICINE

<i>S. S. Gambarov, T. V. Agasarian, L. D. Mkheyan, V. A. Shekoyan, A. M. Khazarjian, A. V. Shakhshvarov</i> —Disturbed immunoregulatory link following mitral commissurectomy	93
<i>V. V. Rodionov, R. G. Khachatryan</i> —The new way of draining of hepatic ducts by T-form drainages in cancer	141

