

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXXXVI, № 1

1988

Խմբագրական կոլեգիա

Կ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. գիտ. թեկնածու (պատ. Բաբտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ի. ԲԱՐԱՅՍՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՍՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵՒՐԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ (պատ. խմբագրի), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՍԻՆԵԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՆԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1988, т. 86, № 1, с. 1—48.

Ի Ո Վ Ա Ն Ի Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն Ի Ց

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Մ. Էմինյան—Տարածական կվադրմերոմորֆ արտապատկերման սահմանային
 էզակիությունը՝ ըստ շոշափող կորերի 3

Ա. Ն. Ավետիսյան—Ամրողջ ֆունկցիաների որոշ համակարգերի լրիվության մա-
 տին՝ վերջավոր հատվածների վրա 8

Վ. Ի. Գավրիլով, Վ. Ս. Ղաֆարյան—Կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկ-
 ցիաների չինգելյոֆի կետերի բազմությունը 12

Մ. Կ. Կյուրեղյան—Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների վերածելիության
 տեսության մասին 17

Ի. Վ. Խաչատրյան—Ապտիմալացման սկզբունքների դինամիկական կայունությունը
 բազմաճյուղային բազմաքայլ խաղերում 23

ՍԵՅՍՄՈՂՈՒԴԻԱ

Ն. Կ. Կարապետյան—Ուժեղ երկրաշարժերի կանխագուշակային հատկանիշը . . . 27

Ի Ա Ի Ի Ո Ւ Ն Ս Ա Ր Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ս. Մ. Ավագյան, Կ. Շ. Ոսկանյան, Ն. Վ. Սիմոնյան—Բակտերիաների բջիջների վրա
 խոնիզացնող և լազերային նաոագայթումների ազդեցության մի քանի ընդհանուր օրի-
 նայափոփոխությունների մասին 32

Ի Ի Ք Ի Մ Ի Ա

Կ. Ա. Իսկունց, Մ. Գ. Կեոբյան, Հ. Գ. Գալստյան, Ի. Ա. Ղաֆարյան—Ինտերֆե-
 ռանի ինդուկցիան մարդու ընկերքից անչափած Երկշղթանի ԻՆՔ-ով. 36

Ա. Լ. Շալոյան, Ս. Լ. Մկրտչյան, Շ. Հ. Ղազարյան, Վ. Գ. Մխիթարյան—Առնետների
 ֆոսֆորիլիպիդների ֆերմենտատիվ իդրոլիզի ձևափոխումը կախված ադրենալինից . . . 42

Մ Ի Զ Ա Տ Ա Ր Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ո. Մ. Զարյուկով-Խեճուրյան—Կարծրաթև-մալախիդների նոր տեսակ Ալթայից
 (Coleoptera, Malachidae) 46

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- О. М. Эмирян*—Граничные особенности пространственных квазимероморфных отображений вдоль касательных путей 3
- А. Е. Аветисян*—О полноте некоторых систем целых функций на конечных отрезках 8
- В. И. Гаврилов, В. С. Захарян*—Множества точек Линделёфа произвольных комплексных функций 12
- М. К. Кюрегян*—К теории проводимости полиномов над конечными полями 17
- Р. В. Хачатрян*—Динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных многошаговых играх 23

СЕЙСМОЛОГИЯ

- Н. К. Карапетян*—Прогностический признак сильных землетрясений 27

РАДИОБИОЛОГИЯ

- Ц. М. Авиакян, К. Ш. Восканян, Н. В. Симонян*—О некоторых общих закономерностях действия лазерного и ионизирующего излучений на клетки бактерий 32

БИОХИМИЯ

- К. А. Бакунц, М. Г. Геворкян, Г. Г. Галстян, Р. А. Захарян*—Индукция интерферона дцРНК плаценты человека 36
- А. Л. Шилджян, С. Л. Мкртчян, Ш. А. Кизирян, В. Г. Мхитарян*—Адреналинзависимая модификация ферментативного гидролиза фосфолипидов печени крыс 42

ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков-Хизорян*—Новый вид жесткокрылых-малашек с Алтая (Coleoptera, Malachidae) 46

CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>O. M. Emtin</i> —Boundary singularities of spatial quasimeomorphic mappings along tangent paths	3
<i>A. E. Avetisyan</i> —On the completeness of some systems of entire functions on finite sections	8
<i>V. I. Gavrilov, V. S. Zakharian</i> —Sets of Lindelof points for arbitrary complex functions	12
<i>M. K. Kuregian</i> —On the theory of reducibility of polynomials over finite fields	17
<i>G. H. Khachatryan</i> —Code constructions for two-user switching channel	23

SEISMOLOGY

<i>N. K. Karapetian</i> —The prediction symptom of strong earthquakes	27
---------------------------------------------------------------------------------	----

RADIOBIOLOGY

<i>K. Sh. Voskunan, N. V. Simonyan, Ts. M. Avakian</i> —Some general regularities of laser and ionizing radiation influence on cells	32
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

BIOCHEMISTRY

<i>K. A. Bakunts, M. G. Gevorgian, G. G. Galstian, R. A. Zakharian</i> —Induction of interferon by ds-RNA from human placenta	36
<i>A. L. Shaljian, S. L. Mkrtchian, Sh. H. Kazarian, V. G. Mckitarian</i> —Adrenaline-dependent modification of enzymatic hydrolysis of phospholipids of the rat liver	42

ENTOMOLOGY

<i>S. M. Iablokof Khinzorian</i> —A new species of Malachid beetles from Altai	46
------------------------------------------------------------------------------------------	----

Техн. редактор *Азизбекия Л. А.*

Сдано в набор 4.12.1987 г. Подписано к печати 20.12.1988 г. ВФ 03822

Бумага № 2, 70 × 108^{1/16}. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учетно-изд. л. 3,19. Тираж 445. Заказ 155. Издат. 7299

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

О. М. Эминян

Граничные особенности пространственных квазимероморфных отображений вдоль касательных путей

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21/IV 1987)

В статье изучается строение множества граничных особенностей пространственных квазимероморфных отображений, порождаемых предельными множествами этих отображений вдоль касательных граничных путей. Устанавливается, что эти множества имеют такую же структуру, как и мероморфные функции одного комплексного переменного. Основные свойства пространственных квазирегулярных и квазимероморфных отображений можно найти, например, в монографии (1).

1. Условимся о следующих обозначениях. Для произвольной точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ евклидова пространства R^n , $n \geq 2$, символом x^0 обозначать ее проекцию в R^{n-1} , так что $x^0 = (x^1, \dots, x^{n-1})$ и $x = (x^0; x^n)$. Через R_+^n обозначим верхнее полупространство $R^n = \{(x^0; x^n) \in R^n : x^n > 0\}$. Граница δR_+^n этого полупространства является $(n-1)$ -мерным евклидовым пространством, которое мы отождествим с R^{n-1} . Как обычно, для двух точек $x, y \in R^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, обозначим $|x - y| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$ евклидово расстояние между x и y . Для любых двух точек $x, y \in R^n$ обозначим символом $\sigma(x, y)$ расстояние между x и y относительно метрики Пуанкаре в R_+^n . Шар $\{y \in R^n; |x - y| < r\}$, $r > 0$, обозначим символом $B(x, r)$; шар в метрике Пуанкаре $\{y \in R_+^n; \sigma(y, x) < r\}$, $r > 0$, — символом $D(x, r)$. Одноточечную компактификацию пространства R^n , $n \geq 2$, обозначим через \bar{R}^n , т. е. $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$.

Следующие понятия введены Е. П. Долженко (2). Точку $x \in R^{n-1}$, $n \geq 2$, назовем точкой пористости множества $E \subset R^{n-1}$, если существуют такое число c , $0 < c < 1$, и такая последовательность чисел (r_k) , $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, что в каждом шаре $B^{n-1}(x, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$ можно выбрать шар $B^{n-1}(y, \rho_k)$, $\rho_k \geq c \cdot r_k$, $k = 1, 2, \dots$, который не содержит точек из E . Множество, состоящее из своих точек пористости, называется пористым множеством, а объединение не более чем счетного числа пористых множеств называется σ -пористым множеством в R^{n-1} .

Следуя Рангу (3), неотрицательную непрерывную функцию $h(t)$, определенную на отрезке $[0, 1]$, назовем функцией подхода, если

она монотонно возрастает, выпукла вниз на $[0, 1]$ и $h(0)=0$, $h(1)=1$. Обозначим через μ обратную функцию к h ; $\mu(h(t))=t$, $t \in [0, 1]$. Для любого $a > 0$ полагаем $h^a(t) = h\left(\frac{t}{a}\right)$ и рассматриваем обратную к h^a функцию $\mu^a(t) = a + \mu(t)$.

В произвольной граничной точке $\xi \in \partial R_+^n = R^{n-1}$ рассмотрим кривые $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, $L_h(\xi, \zeta, a) = \{(\xi + \zeta \cdot t; h^a(t)) : t \in [0, a], \zeta \in R^{n-1}, |\zeta|=1\}$, где ζ обозначает произвольный единичный вектор в R^{n-1} .

Обозначим через $A_h(\xi, \zeta, a, b)$, $b > a > 0$ объединение $\cup \{(x^0; \bar{x}^n) \in R_+^n : |x^0 - \bar{x}^n| < \mu^{\frac{b-a}{2}}(\bar{x}^n); (\bar{x}^0; \bar{x}^n) \in L_h\left(\xi, \zeta, \frac{a+b}{2}\right)\}$ всех $(h-1)$ -шаров, параллельных ∂R_+^n , с центрами в точках $(\bar{x}^0, \bar{x}^n) \in L_h\left(\xi, \zeta, \frac{a+b}{2}\right)$

и радиусами $\mu^{\frac{b-a}{2}}(\bar{x}^n)$. Рассмотрим также круговые граничные области $Q_h(\xi, a) = \{(x^0, x^n) \in R_+^n : |x^0 - \xi| < \mu^a(x^n)\}$, $a > 0$

2. Рассмотрим произвольное K -квазимероморфное отображение $f \in R_+^n - \bar{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $l(n, K)$ обозначает универсальную постоянную в теореме типа Пикара, доказанной С. Рикманом (4). Последовательность (x_m) точек $x_m \in R_+^n$, $m = 1, 2, \dots$ называется P -последовательностью отображения $f(x)$, если для любой ее бесконечной подпоследовательности (x_{m_k}) и любого числа $\varepsilon > 0$ в объединении $\bigcup_k D(x_{m_k}, \varepsilon)$ отображение $f(x)$ принимает бесконечно часто все значения $w \in \bar{R}^n$, за возможным исключением не более, чем $l(n, K)$ значений (в случае $n=2$, $K=1$ это понятие введено В. И. Гавриловым (5); случай произвольных $n \geq 2$, $K \geq 1$ см. в (6)).

Для произвольного множества $S \subset R_+^n$, имеющего предельную точку $\xi \in \partial R_+^n$, обозначим $C(f, \xi, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(B^n(\xi, r)) \cap R_+^n}$, где черта означает замыкание множества в пространстве \bar{R}^n . Рассмотрим множество $K_h(f)$ точек $\xi \in \partial R_+^n$, в которых $C(f, \xi, A_h(\xi)) = C(f, \xi, Q_h(\xi))$ для любых областей $A_h(\xi) = A_h(\xi, \zeta, a, b)$ и $Q_h(\xi) = Q_h(\xi, c)$. Точку $\xi \in K_h(f)$ отнесем к множеству $C_h(f)$, если $C(f, \xi, Q_h(\xi)) = C(f, \xi, R_+^n)$. Точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $P_h(f)$, если каждая кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, содержит P -последовательность отображения $f(x)$, и отнесем к множеству $I_h^*(f)$, если ни одна из кривых $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательность отображения $f(x)$ и $C(f, \xi, L_h(\xi)) = \bar{R}^n$ для любой кривой $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$. Точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $M_h(f)$, если $C(f, \xi, R_+^n) \neq \bar{R}^n$ и $C(f, \xi, L_h(\xi)) = C(f, \xi, R_+^n)$ для любой кривой $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$. Наконец, точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $L_h(f)$, если $C(f, \xi, L_h(\xi)) = C(f, \xi, L_h^1(\xi)) \neq \bar{R}^n$ для любых $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a_1)$, $L_h^1(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a_2)$ и ни одна из кривых $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательностей отображения $f(x)$. Из этих определений и лемм 1, 2 из (7) заключаем, что

$$C_h(f) \subset K_h(f), L_h(f) \subset K_h(f), M_h(f) \subset C_h(f) \text{ и } M_h(f) \cap I_h^*(f) =$$

$$= M_h(f) \cap P_h(f) = I_h^*(f) \cap P_h(f) = L_h(f) \cap I_h^*(f) = L_h(f) \cap P_h(f) = \Phi.$$

3. В рассматриваемых ниже теоремах мы считаем $h(t) = t^p$, $p \geq 1$ — действительное число.

Теорема 1. При любом $p \geq 1$ для произвольного K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, справедливо представление $\delta R_+^n = M_h(f) \cup P_h(f) \cup I_h^*(f) \cup E$, в котором E — некоторое множество первой категории на δR_+^n .

Теорема 2. При любом $p \geq 1$ для произвольного K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, справедливо вложение $M_h(f) \subset L_h(f)$ и представление $\delta R_+^n = L_h(f) \cup P_h(f) \cup I_h^*(f) \cup E$, в котором E — некоторое ε -пористое множество на δR_+^n .

Замечание 1. При $p = 1$ теорема 1 доказана в (7). Для мероморфных функций, т. е. $n = 2$, $k = 1$, эти результаты восходят к работе В. И. Гаврилова (8), в которой рассматривался случай $p = 1$ и результаты которой с той же методикой были распространены на случай $p > 1$ в статье (9). Такая же схема применена в настоящей статье.

4. Доказательства теоремы 1 и 2 опираются на вспомогательные результаты, для формулирования которых нам нужно ввести неотрицательную функцию $q_f: R_+^n \rightarrow \overline{R} = R^1 \cup \{+\infty\}$, $q_f(x) = \sup_{y \in R_+^n} |f(x) - f(y)| \cdot |\sigma(x, y)|^{-\alpha}$, в которой $\alpha = K^{\frac{1}{1-p}}$ и \sup берется по всем $y \in (R_+^n \setminus \{x\})$.

Лемма 1. Пусть $p \geq 1$ фиксировано. Для того чтобы кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержала P -последовательностей для K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области $A_h(\xi, \zeta, a_1, a_2)$, $a_2 < a < a_1$, функция $q_f(x)$ была ограничена сверху.

Лемма 2. Пусть $p \geq 1$ фиксировано и $\xi \in K_h(f)$ — произвольная точка. Если кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательностей K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, то $C(f, \xi, L_h(\xi, \zeta, a)) = C(f, \xi, A_h(\xi, \zeta, a_1, b_1))$ для любых $0 < a_1 < b_1$.

Замечание 2. В случае $p = 1$ лемма 1 доказана в (7), лемма 1); ее доказательство в случае $p > 1$ использует простейшие свойства метрики Пуанкаре в R_+^n и лемму 3 из (7). В доказательстве леммы 2 используется лемма 2 из (7). Согласно теореме 3 из (10), для произвольного отображения $g: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, и произвольной функции подхода $h(t)$ множество $\delta R_+^n \setminus C_h(g)$ имеет первую категорию на δR_+^n .

Обозначим $M = C_h(f) \cap C_h(q_f)$; тогда $\delta R_+^n = M \cup E$, где E — некоторое множество первой категории на δR_+^n . В произвольной точке $\xi \in M$ могут быть реализованы следующие возможности:

$$C(f, \xi, R_+^n) \neq \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ ограничено;} \quad (1)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) = \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ не ограничено;} \quad (2)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) = \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ ограничено и} \quad (3)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) \neq \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ не ограничено.} \quad (4)$$

Четвертая возможность на самом деле realizоваться не может, поскольку неограниченность множества $C(q_f, \xi, R_+^n)$ влечет за собой, согласно лемме 1, свойство $C(f, \xi, R_+^n) = \overline{R^n}$. Если реализуется возможность (2), то, согласно лемме 1, $\xi \in P_h(f)$. Если реализуется возможность (1) или (3), то, согласно лемме 2, $\xi \in M_h(f)$ или $\xi \in I_h^*(f)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично и основано на другой теореме о максималности (см. (10), теорема 1), согласно которой для произвольного отображения $g: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, и произвольной функции перехода $h(t)$ множество $\varepsilon R_+^n \setminus K_h(g)$ является ε -пористым множеством на ∂R_+^n .

6. Рассмотрим произвольную функцию подхода $h(t)$ для произвольного $a > 0$ функции $h_a(t) = \frac{h(t)}{a}$ и обратную к ней функцию

$\mu_a(t) = \mu(at)$. В произвольной граничной точке $\xi \in \partial R_+^n$ определим кривые $L^h(\xi, \zeta, a)$ так же, как и кривые $L_h(\xi, \zeta, a)$, заменив функцию $h^a(t)$ на $h_a(t)$. Обозначим через $A^h(\xi, \zeta, a, b)$, $b > a > 0$, объединение

$$\bigcup \left\{ \left(\xi + \zeta \cdot \mu_{\frac{a+b}{2}}(x^n); x^n \right) + \frac{b-a}{2} u; u \subset R^{n-1}, u \perp \xi, |u| < 1 \right\} \text{ всех } (n-1)\text{-}$$

шаров с центрами в точках $(\xi + \zeta \cdot \mu_{\frac{a+b}{2}}(x^n); x^n)$ и радиусом $\frac{b-a}{2}$, ор-

тогональных вектору ζ , $\zeta \subset R^{n-1}$, $|\zeta| = 1$.

При $h(t) = t^p$ $p \geq 1$ — действительное, множества кривых $L^h(\xi, \zeta, a)$ и областей $A^h(\xi, \zeta, a, b)$ совпадают с множествами кривых $L_h(\xi, \zeta, a)$ и областей $A_h(\xi, \zeta, a, b)$; при $h(t) \neq t^p$ $p \geq 1$ — действительное, эти множества различны (см. (11)).

Для произвольного K -квазиморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$ и множеств $\{L^h(\xi, \zeta, a)\}$, $\{A^h(\xi, \zeta, a, b)\}$ определим множества $K^h(f)$, $C^h(f)$, $P^h(f)$, $I^{h*}(f)$, $M^h(f)$, $L^h(f)$, аналогичные множествам с индексом h внизу, которые были введены в пункте 2. Результаты из пункта 3 обобщаются следующим образом.

Теорема 3. Для произвольной функции подхода $h(t)$ и произвольного K -квазиморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, справедливо представление $\partial R_+^n = M^h(f) \cup P^h(f) \cup I^{h*}(f) \cup E$, в котором E — некоторое множество первой категории на ∂R_+^n .

Такое обобщение возможно в силу того, что теорема 3 из (10) справедлива и для множества $C^h(g)$ при произвольном отображении $g: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$.

Остается не доказанной возможность обобщения теоремы 2 из пункта 3.

Տարածական կվադրատներում արտապատկերման սահմանային
 եզակիությունը՝ ըստ շոշափող կորերի

Տարածական կվադրատներում և կվադրատներում արտապատկերում-
 ների հիմնական հատկությունները կարելի է գտնել, օրինակ, (1) մենա-
 գրությունում:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է $R_+^n = \{(x^0, x^n) \in R^n; x^n > 0\}$
 կիսատարածության ∂R_+^n եզրի նկարագրությունը, կամայական K -կվադրատ-
 րոմորֆ ֆունկցիայի $f: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$ սահմանային բազմությունների միջոցով,
 որոնք առաջանում են շոշափող եզրային կորերով: Աշխատանքում նշված
 լեմմաների 1 և 2 ապացույցների համար ներմուծված է ոչ բացասական
 $q_f(x) = \sup\{f(x), f(y) \mid c(x, y)\}^2$ ֆունկցիան, որտեղ սուպրեմումը վերցրվում
 է ըստ բոլոր $y \in R_+^n \setminus \{x\}$ -ի: Պարզվում է, որ ∂R_+^n -ը ունի նույն նկարա-
 գրությունը, ինչպիսին ունի մեկ փոփոխականի մերոմորֆ ֆունկցիայի դեպ-
 քում:

Աշխատանքի վերջում նշվում է կամայական ֆունկցիաներով մոտեցման
 և կամայական K -կվադրատներում արտապատկերման միջոցով ∂R_+^n եզրի
 վերլուծությունը՝ ըստ ∂R_+^n -ի ենթարաբազմությունների:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Наука, Новосибирск, ² Е. П. Долженко, Изв. АН СССР. Математика, т. 31, № 1 (1967). ³ D. C. Rung, Pacific J. Math. v. 76, № 1 (1978). ⁴ S. Rickman, J. d'Analyse Math., v. 37, № 1 (1980). ⁵ В. И. Гаврилов, Мат. сб., т. 67, № 3 (1965). ⁶ А. А. Симуцев, ДАН СССР, т. 284, № 3 (1985). ⁷ А. А. Симуцев, ДАН СССР, т. 289, № 2 (1986). ⁸ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974). ⁹ М. М. Мирзоян, ДАН АрмССР, т. 66, № 5 (1978). ¹⁰ В. И. Гаврилов, А. И. Канатников, С. В. Кравцев и др., ДАН СССР, т. 289, № 4 (1986). ¹¹ Абду Аль-Рахман Хасон, ДАН СССР, т. 260, № 4 (1981).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

О полноте некоторых систем целых функций на конечных отрезках

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 4/IX 1987)

В настоящей заметке известные результаты Н. Левинсона ⁽¹⁾ и Б. Я. Левина ⁽²⁾ о полноте системы функций $\{e^{i\lambda_n x}\}$ распространяются на более общие системы $\{E_p(\lambda_n u; \mu)\}$, где $E_p(z; \mu) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \frac{n}{p})}$ — целая функция Миттаг-Леффлера.

При этом приходится отдельно рассматривать конкретные интервалы изменения параметра p , что приводит к различным формулировкам результатов.

Для любого $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ обозначим через $\Gamma_\alpha(\alpha)$ контур, состоящий из двух отрезков: $\arg z = \pm \alpha, 0 \leq |z| \leq \sigma^{1/p}$.

Теорема 1. Для того чтобы система функций $\{E_p(i_k x; \mu)\}$ ($p > 1, \mu > 0$), в которой $i_k (k=1, 2, \dots)$ комплексные числа, не была полна в $L^p(\Gamma_\alpha(\alpha))$ ($p \geq 1$), необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция $f(\lambda)$, обращающаяся в нуль во всех точках i_k и допускающая представление

$$f(\lambda) = \int_{\Gamma_\alpha(\alpha)} E_p(i u; \mu) g(u) du,$$

где $g(u) \in L^q(\Gamma_\alpha(\alpha))$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) (при $p=1$ $g(u)$ — ограниченная измеримая функция).

На основании теоремы 1 можно получить различные достаточные условия полноты системы $\{E_p(\lambda_n u; \mu)\}$.

1°. Полнота в $L^p(0, \sigma^{1/p})$.

Теорема 2. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и конечного типа. Пусть далее ее индикатор $h_\rho(\theta)$ удовлетворяет условию

$$h_\rho(0) \geq \sigma \tag{1}$$

и для некоторого $m > 0$ и $p \geq 2$

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{для } |\theta| \geq \frac{\pi}{2p}. \tag{2}$$

Тогда система $\{E_p(\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty \left(\mu = \frac{p-1+p}{p\rho} \right)$ полна в $L^p(0, \sigma^{1/p})$.

Некоторое усиление условия (1) делает условие (2) излишним.

Теорема 3. Если $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка $\rho \left(\frac{1}{2} < \rho < 1 \right)$, конечного типа и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi(re^{i\theta})| e^{-\sigma r^\rho \cos \theta} > 0, \quad |\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho},$$

то система $\{E_p(\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty \left(\mu = \frac{p\rho - \rho + 1}{p\rho} \right)$ полна в $L^p(0, \sigma^{1/p})$ ($\rho > 1$).

При $\rho \geq 1$ справедлива

Теорема 4. Если $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка ρ ($\rho \geq 1$), конечного типа и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi(r)| e^{-\sigma r^\rho} > 0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/\rho}} \text{ для } |\theta| \geq \frac{\pi}{\rho} \quad (\rho > 1),$$

то система $\{E_p(\lambda_n; \mu)\}_1^\infty \left(\mu = \frac{p\rho - \rho + 1}{p\rho} \right)$ полна в $L^p(0, \sigma^{1/p})$ ($\rho > 1$).

2°. Полнота в $L^p(-\sigma^{1/p}, \sigma^{1/p})$.

Теорема 5. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции порядка ρ ($\rho \geq 1$) и конечного типа.

Пусть далее

$$h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \sigma, \quad h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq \sigma \quad (3)$$

и для некоторого $m > 0$ и $\rho \geq 2$

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/\rho}} \text{ для } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}, \quad |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \quad (4)$$

Тогда система $\{E_p(i\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty \left(\mu = \frac{p-1+p}{p\rho} \right)$ полна в $L^p(-\sigma^{1/p}, \sigma^{1/p})$.

И здесь, если условие (3) заменить несколько более сильным, при $1 \leq \rho < 2$ условие (4) становится лишним.

Теорема 6. Если $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка ρ ($1 \leq \rho < 2$), конечного типа и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi(re^{i\theta})| e^{-\sigma r^\rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} > 0 \text{ при } \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho},$$

то система функций $\{E_p(i\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty \left(\mu = \frac{p\rho - \rho + 1}{p\rho} \right)$ полна в $L^p(-\sigma^{1/p}, \sigma^{1/p})$ ($\rho > 1$).

В случае $\rho > 2$ справедлива

Теорема 7. Если $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка $\rho > 2$, конечного типа и

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |\varphi(iy)|e^{-|y|^p} > 0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{для } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}, \quad |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}, \quad (5)$$

то система функций $\{E_\rho(i\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty$ ($\mu = \frac{\rho\rho - \rho + 1}{\rho\rho}$) полна в $L^p(-\sigma^{1/\rho}, \sigma^{1/\rho})$.

Замечание. При $\rho = 2$ заключение теоремы 7 остается в силе, если неравенство (5) имеет место при $|\theta| < \delta$ и $|\theta - \pi| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

3. Полнота в $L^p(\Gamma_\rho)$. Приведем, наконец, теоремы о полноте в $L^p(\Gamma_\rho)$, где $\Gamma_\rho = \Gamma_\rho\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)$.

Теорема 8. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка $\rho \geq 1$, конечного типа. Пусть далее

$$h_\varphi\left(\frac{\pi}{2\rho}\right) \geq \sigma, \quad h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) \geq \sigma$$

и

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{для } |\theta| \geq \frac{\pi}{\rho}, \quad \theta = 0 \quad (\rho \geq 2).$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_k u; \mu)\}_1^\infty$ ($\mu = \frac{\rho - 1 + \rho}{\rho\rho}$) полна в $L^p(\Gamma_\rho)$.

Теорема 9. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка ρ ($1 \leq \rho \leq \frac{3}{2}$), конечного типа. Пусть далее

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi(re^{i\theta})|e^{-\sigma r^{\rho} \sin \rho \theta} > 0 \quad \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leq |\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty$ ($\mu = \frac{\rho\rho - \rho + 1}{\rho\rho}$) полна в $L^p(\Gamma_\rho)$ ($\rho > 1$).

Теорема 10. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ порядка ρ ($\rho > \frac{3}{2}$), конечного типа. Пусть далее

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})|e^{-\sigma r^\rho} > 0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})| > \frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{при } |\theta| \geq \frac{3\pi}{2\rho},$$

$$h_\varphi(0) = 0.$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u; \mu)\}_1^\infty$ ($\mu = \frac{\rho\rho - \rho + 1}{\rho\rho}$) полна в $L^p(\Gamma_\rho)$ ($\rho > 1$).

Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ համակարգերի լրիվության մասին՝
վերջավոր հատվածների վրա

Ներկա աշխատանքում Ն. Լեինսոնի և Բ. Յա. Լեինի որոշ հայտնի արդյունքներ $\{e^{i\lambda_n t}\}$ համակարգի լրիվության մասին տարածվում են ավելի ընդհանուր $\{E_p(\lambda_n; \mu)\}$ համակարգերի վրա: Բերվող թեորեմներում ենթադրվում է, որ $\{\lambda_n\}$ բազմությունը մի $\varphi(t)$ ամբողջ ֆունկցիայի գրոնների բազմությունն է, ընդ որում, այդ ֆունկցիայի վրա դրվում են սրուշակի սլայմաններ, որոնք սահմանափակում են նրա աճը ներքևից ամբողջ կամային հարթության մեջ կամ նրա մի մասում:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ N. Levinson, Cap and density theorems. American Math. Soc. coll. Publications, New York, 1940. ² Б. Р. Левин, Распределение корней целых функций, Гос. изд. техн. теоретич. лит., М., 1956.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. И. Гаврилов, В. С. Захарян

Множества точек Линделёфа произвольных комплексных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 5/IX 1987)

В статье доказывается, что множества точек Линделёфа для произвольных комплексных функций, определенных в единичном круге $D: |z| < 1$ на комплексной плоскости, совпадают с множествами точек Линделёфа мероморфных функций и являются множествами вида $F \setminus E$, где F — некоторое множество типа F_σ на окружности $\Gamma: |z| = 1$, а E — некоторое совершенное пористое множество на Γ .

1. Рассмотрим в круге $D: |z| < 1$ гиперболическую метрику с линейным элементом $ds(z) = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$; $\sigma(z_1, z_2)$ обозначает расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$ в гиперболической метрике. Для произвольной точки ζ границы $\Gamma: |z| = 1$ обозначим через $h(\zeta, \varphi)$ хорду круга D , оканчивающуюся в точке ζ и образующую с радиусом $h(\zeta, 0)$ круга D в точке ζ угол раствора φ , $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$. Подобласть круга D , расположенную между хордами $h(\zeta, \varphi_1)$ и $h(\zeta, \varphi_2)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Следуя ⁽¹⁾, для произвольного множества $E \subset \Gamma$ обозначим через $p(E)$ совокупность неизолированных точек множества E , которые являются точками пористости множества E . Множество E назовем совершенным пористым множеством, если на Γ можно найти такую не более чем счетную совокупность замкнутых множеств $\{F_n\}$, что $E = \bigcup_n p(F_n)$.

Для произвольного отображения $f: D \rightarrow \Omega$ круга D в сферу Римана Ω , произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого точка ζ является предельной точкой, рассмотрим предельное множество $C(f, \zeta, S)$ функции f в точке ζ по множеству S в виде $C(f, \zeta, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(v_r(\zeta) \cap S)}$, где $v_r(\zeta) = \{z \in D; |z - \zeta| < r\}$, $r > 0$ и черта обозначает замыкание множества на сфере Римана Ω .

2. В работе ⁽²⁾ функция $f: D \rightarrow \Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z) = g(T(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $T: D \rightarrow D$, т. е. такого гомеоморфного отображения T круга D на себя, что T и его обратное отображение T^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболических метрик в области определения и в области значений гомео-

морфизма T . В силу хорошо известных оценок искажения гиперболической метрики при плоских квазиконформных отображениях (см., например, (3)) любое квазиконформное отображение $T: D \rightarrow D$ является эквиморфизмом. Поэтому множество эквиморфных функций содержит множество псевдоморфных функций, и, как показано в (2), это вложение строгое.

Последовательность точек $(z_n), z_n \in D, n=1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, называется P -последовательностью для эквиморфной функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности (z_{n_k}) в объединении $\bigcup D(z_{n_k}, \varepsilon)$ гиперболических кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon) = \{z \in D; \rho(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение из сферы Римана Ω , за возможным исключением не более двух значений. Для мероморфных функций это понятие рассматривалось в (4), где доказано, что отсутствие у мероморфной функции P -последовательностей характеризует свойство нормальности этой функции. Этот результат перенесен на эквиморфные функции в (2). Остается открытым вопрос: является ли класс эквиморфных функций максимально широким множеством функций, у которых свойство нормальности характеризуется в терминах P -последовательностей. Частичное подтверждение положительного ответа на этот вопрос содержится в работе (5).

3. Граничную точку $\zeta \in \Gamma$ назовем точкой Линделёфа для функции $f: D \rightarrow \Omega$, если для любых углов $\Delta^1(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2), -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, и $\Delta^2(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1^2, \varphi_2^2), -\frac{\pi}{2} < \varphi_1^2 < \varphi_2^2 < \frac{\pi}{2}$, справедливо $C(f, \zeta, \Delta^1(\zeta)) = C(f, \zeta, \Delta^2(\zeta)) \neq \Omega$. Множество точек Линделёфа функции f обозначим через $L(f)$.

Теорема 1. Точка $\zeta \in \Gamma$ является точкой Линделёфа для эквиморфной функции $f(z)$, определенной в D , в том и только в том случае, когда 1) для любых двух хорд $h(\zeta, \varphi_1), h(\zeta, \varphi_2)$ справедливо $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1)) = C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_2)) \neq \Omega$ и 2) ни одна из хорд $h(\zeta, \varphi)$ не содержит P -последовательностей функции $f(z)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольную точку $\zeta \in L(f)$ для эквиморфной функции $f(z)$. Чтобы проверить выполнение свойства 2), допустим, напротив, что некоторая хорда $h(\zeta, \varphi_0)$ содержит P -последовательность (z_n) функции $f(z)$. Тогда, в силу геометрии круга D , для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой угол $\Delta(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, который содержит хорду $h(\zeta, \varphi_0)$ и в котором содержатся все гиперболические круги $D(z_n, \varepsilon), n \in \mathbb{N}$. Согласно определению P -последовательности $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, что противоречит условию $\zeta \in L(f)$.

Чтобы установить справедливость свойства 1), мы докажем, что $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любой хорды $h(\zeta, \varphi)$ и любого угла $\Delta(\zeta)$. Заметим, прежде всего, что

$$C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi)) \subset C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \quad (1)$$

для любой хорды $h(\zeta, \varphi)$ и любого угла $\Delta(\zeta)$.

Допустим теперь, что существует такая хорда $h(\zeta, \varphi)$, для которой вложение (1) не является совпадением входящих в него множеств. Тогда существует такое значение $w \in \Omega$, что $w \in C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ и $w \notin C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любого угла $\Delta(\zeta)$, содержащего хорду $h(\zeta, \varphi)$. Значит, каждый угол $\Delta(\zeta)$, содержащий хорду $h(\zeta, \varphi)$, содержит некоторую последовательность точек (z_n^Δ) , $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^\Delta = \zeta$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^\Delta) = w$. При этом для любого номера $n \in \mathbb{N}$ гиперболическое расстояние

$$\sigma(z_n^\Delta; h(\zeta, \varphi)) = \inf\{\sigma(z_n^\Delta, z); z \in h(\zeta, \varphi)\}$$

удовлетворяет условию $\sigma(z_n^\Delta; h(\zeta, \varphi)) \leq \varphi(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = 0$. Выбирая произвольную последовательность (ε_m) , $\varepsilon_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, получим множество последовательностей (z_n^m) , $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} z_n^m = \zeta$, $m \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^m) = w$, $m \in \mathbb{N}$. Для последовательности $(z_n^n) = (z_n)$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi)) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим на хорде $h(\zeta, \varphi)$ точку z'_n , для которой $\sigma(z'_n; z_n) = \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi))$. Для последовательностей точек (z_n) и (z'_n) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ и последовательность $(f(z'_n))$ не стремится к w (так как $w \notin C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$). Согласно ((2), теорема 6), каждая из последовательностей (z_n) и (z'_n) является P -последовательностью эквиморфной функции $f(z)$. Противоречие.

Достаточность. Допустим, что существует такой угол $\Delta(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, что $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \neq C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ ни для одной хорды $h(\zeta, \varphi)$. Значит, существует такое значение $w \in \Omega$, что $w \in C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ и $w \notin C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ для всех хорд $h(\zeta, \varphi)$. Поэтому существует такая последовательность точек (z_n) , что $z_n \in \Delta(\zeta)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$. Не ограничивая общности и выбирая, если нужно, соответствующую последовательность, можно считать, что последовательность $(\arg z_n)$ сходится к некоторому числу φ_0 , $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогда, как и выше, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi_0)) = 0$. Рассмотрим на хорде $h(\zeta, \varphi_0)$ последовательность точек (z'_n) , для которых $\sigma(z_n, z'_n) = \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi_0))$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$ и последовательность $(f(z'_n))$ не стремится к w . Как и выше, заключаем, что последовательность (z'_n) является P -последовательностью функции $f(z)$, а это противоречит условию 2) теоремы 1.

4. Установим теперь полную характеристику множества $L(f)$ для произвольных функций.

Теорема 2. Класс множеств $\{L(f)\}$ для произвольных функций $f: D \rightarrow \Omega$ совпадает с классом $\{L(f)\}$ для мероморфных функций $f(z)$ в D и классом множеств $L \subset \Gamma$, имеющих вид $L = F \setminus E$,

где F — множество типа F , на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ .

Доказательство. Для произвольной функции $f: D \rightarrow \Omega$ обозначим через $K(f)$ множество точек $z \in \Gamma$, в которых $C(f, z, \Delta^1(z)) = C(f, z, \Delta^2(z))$ для любых углов $\Delta^1(z)$ и $\Delta^2(z)$, а через $I(f)$ такое подмножество из $K(f)$, в точках z которого $C(f, z, \Delta(z)) = \Omega$ для любого угла $\Delta(z)$. По определению, $K(f) = L(f) \cup I(f)$ и $L(f) \cap I(f) = \emptyset$. Для произвольной функции $f: D \rightarrow \Omega$ множество $I(f)$ имеет тип G_δ на Γ (см. (6) или (7)) и $\Gamma = K(f) \cup E$, где E — некоторое совершенное пористое множество на Γ (см. (1)). Поэтому $L(f) = F \setminus E$, где $F = \Gamma \setminus I(f)$ — некоторое множество типа F , на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ .

Рассмотрим теперь произвольное множество $L = F \setminus E$, где F — множество типа F , на Γ и E — совершенное пористое множество на Γ . Точку $z \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$ для мероморфной функции $f(z)$ в D , если каждая хорда $h(z, \varphi)$ содержит P -последовательность функции $f(z)$, а точку $z \in \Gamma$ отнесем к множеству $F(f)$, если $C(f, z, \Delta(z))$ состоит из единственного значения $a_z \in \Omega$ для всех углов $\Delta(z)$ и значение a_z одно и то же для всех $\Delta(z)$. Тогда $P(f) \cap L(f) = \emptyset$ и $F(f) \subset L(f)$.

Согласно ((1), теорема 2), существует такая ограниченная голоморфная функция $g_1(z)$ в D , у которой $K(g_1) = \Gamma \setminus E$. Поскольку $I(g_1) = \emptyset$, то $L(g_1) = \Gamma \setminus E$.

Согласно ((8), теорема 2), существует такая мероморфная функция $g_2(z)$ в D , у которой $P(g_2) = \Gamma \setminus F$ и $F = F(g_2)$, причем в каждой точке $z \in F = F(g_2)$ значение a_z конечное.

Функция $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ имеет $L(f) = F \setminus E$. Действительно, каждая точка $z \in F \setminus E$ принадлежит множествам $L(g_1)$ и $F(g_2) \subset L(g_2)$, и значит $z \in L(f)$. Каждая точка $z \in (\Gamma \setminus F) \cap E$ принадлежит множествам $P(g_2)$ и $L(g_1)$, и значит $z \in P(f)$, т. е. $z \notin L(f)$. Наконец, любая точка $z \in E \cap F$ принадлежит множеству $F(g_2)$ и не принадлежит множеству $L(g_1)$, и значит z не принадлежит множеству $L(f)$.

5. Разбиение $\Gamma = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ окружности Γ на три взаимно непесекающиеся множества E_1, E_2, E_3 , для которых существует такая мероморфная в D функция $f(z)$, что $L(f) = E_1, I(f) = E_2$, будем называть линделёфовым разбиением. Простой анализ доказательства теоремы 2 показывает, что нами доказана

Теорема 3. Условия (а) $E_1 = F \setminus E$, где F — множество типа F , на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ , и (б) E_2 — множество типа G_δ на Γ необходимы и достаточны для того, чтобы разложение $\Gamma = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ было линделёфовым.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկցիաների
Լինդելյոֆի կետերի բազմությունը

Օգտվելով P -հաղորդականության հատկություններից, միավոր շրջանում որոշված էկվիմորֆ ֆունկցիայի համար, ապացուցվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $\{ \in \Gamma(\Gamma: |z|=1) \}$ նվրակետը Լինդելյոֆի կետ լինելու համար:

Այնուհետև ապացուցվում է կոմպլեքս հարթության մեջ $|z| < 1$ միավոր շրջանում որոշված կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկցիայի Լինդելյոֆի կետերի բազմությունը շրջանագծի վրա համընկնում է մերոմորֆ ֆունկցիայի Լինդելյոֆի կետերի բազմության հետ և ունի $F \setminus E$ տեսքը, որտեղ F -ը որևէ բազմություն է Γ -ում F , տեսքի, իսկ E -ն որևէ կատարյալ ծակոտկեն բազմություն է Γ -ում:

Աշխատանքի վերջում նշվում է ըստ Լինդելյոֆի շրջանագծի վերլուծման անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. В. Колесников, *Мат. заметки*, т. 28, № 6 (1980). ² Х. Э. Мехия, *ДАН СССР*, т. 265, № 1 (1982). ³ О. Lehto, К. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*. Berlin, Springer—Verlag, 1973. ⁴ В. И. Гаврилов, *Мат. сб.*, т. 67, № 3 (1965). ⁵ J. H. Mathews, *Nagoya math. J.*, v. 39, p. 149—155 (1970). ⁶ P. Lappan, *Bull. London Math. Soc.*, v. 2, № 1 (1970). ⁷ В. И. Гаврилов, *ДАН СССР*, т. 284, № 6 (1985). ⁸ В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников, *ДАН СССР*, т. 232, № 6 (1977)

УДК 512.62

МАТЕМАТИКА

М. К. Кюрегян

К теории приводимости полиномов над
 конечными полями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/IX 1987)

Пусть F_q — поле Галуа порядка $q = p^s$, p — простое число, s — натуральное число.

Введем в рассмотрение оператор Р. Р. Варшамова (1)

$$L^{\theta} f(x) = \frac{1}{\theta(x)} \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^m a_u \theta_v x^{vq^u},$$

где $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ и $\theta(x) = \sum_{v=0}^m \theta_v x^v$ ($\theta(x) \neq 0$), a_u и $\theta_v \in F_q$.

В настоящей работе разработан новый метод построения неприводимых полиномов в явном виде над полями Галуа с помощью известной теоремы Р. Р. Варшамова, которая гласит: если $\theta(x) = \sigma(x)L^{\epsilon}(\tau(x)) + \delta$, где $\sigma(x)$ — произвольный полином над полем F_q , $\tau(x)$ и $f(x)$ — полиномы с ненулевыми свободными членами над полем F_q , $f(1) \neq 0$, δ — произвольный элемент поля F_q , $K(\tau_u, f_u) = L^{\epsilon} L^{\tau_u(\tau)} f_u(x)$, где $\tau_u(x) | \tau(x)$, $f_u(x) | f(x)$, $\tau_u(x) f_u(x) \neq \tau(x) f(x)$, $\epsilon(\delta) = \delta^{q-1} x - 1$ и N — период полинома $S(x) = \epsilon(\delta) \tau(x) f(x)$, то степень $g(x)$ любого неприводимого делителя $L^{\theta} f(x)$, удовлетворяющего условию $g(x) | K(\tau_u, f_u)$, кратна $N^{(1-\epsilon)}$.

Будем говорить, что степень элемента β над полем F_q равна k или же β является собственным элементом поля F_{q^k} , если $\beta \in F_{q^k}$ и $\beta \notin F_{q^d}$, где d — любой собственный делитель k . В этом случае пишем: $\deg_q(\beta) = k$.

В работе рассматриваются только нормированные полиномы, т. е. полиномы, старший коэффициент которых равен единице.

Теорема 1. Пусть p — простое нечетное число, α — произвольный примитивный элемент поля F_p , δ — произвольный элемент поля F_p . Тогда полином $H(x) = \sum_{u=0}^{p-1} x^{p(p-u-1)} (\alpha x - \delta)^u - \alpha$ степени $p(p-1)$ неприводим над полем F_p .

Доказательство. Легко видеть, что $\sum_{u=0}^{p-1} x^{p(p-u-1)} (\alpha x - \delta)^u - \alpha = (x^p - \alpha x + \delta)^{p-1} - \alpha = L^{\alpha L^{\delta(\alpha-\delta)} + \epsilon} (x - \alpha)$. Покажем теперь, что полином $H(x)$ взаимно прост с $L^{\alpha L^{\delta(\alpha-\delta)} + \epsilon} f_u(x)$, где $\tau_u(x) | x - \alpha$, $f_u(x) | x - \alpha$, $\tau_u(x) f_u(x) \neq (x - \alpha)^2$ и $\epsilon(\delta) = \delta^{p-1} x - 1$. В самом деле, из того, что

$$L^x(x-1)(x-a)^2 = L^x(x-1)L^{xL^x(x-1)}(x-a)L^{xL^x(x-1)(x-a)}(x-a) \quad (1)$$

и учитывая, что $L^x(x-1)(x-a)^2$ сепарабельный полином ⁽²⁾, имеем

$$(L^{xL^x(x-1)}(x-a), L^{xL^x(x-1)(x-a)}(x-a)) = 1.$$

Однако согласно ⁽²⁾

$$L^{xL^x(x-1)(x-a)}(x-a) = \prod_{\delta \in F_p} L^{xL^x(x-a)+\delta}(x-a) \quad \text{и}$$

$$L^{xL^x(x-1)}(x-a) = \prod_{\delta \in F_p} L^{x+\delta}(x-a),$$

а это означает, что согласно (1)

$$(L^{xL^x(x-1)}(x-a), L^{xL^x(x-a)+\delta}(x-a)) = 1$$

для любого $\delta \in F_p$. Кроме того, $L^{xL^x(x-a)+\delta} 1 = 1$, следовательно, $(L^{xL^x(x-a)+\delta} f_u(x), H(x)) = 1$.

Заметим, что показатель $p(p-1)$ полинома $e(\delta)(x-a)^2$ совпадает со степенью $H(x)$, поэтому согласно теореме Р. Р. Варшамова ⁽²⁾ полином $H(x)$ неприводим над полем F_p .

Теорема 2. Пусть p — простое нечетное число, α — произвольный примитивный элемент поля F_p , δ — произвольный элемент поля F_p , $f(x)$ — неприводимый над полем F_p полином степени n такой, что $(n, p(p-1)) = 1$, $x^{p^2} - 2\alpha x^p + \alpha^2 x = R(x) \pmod{f(x)}$, $x^p - \alpha x \equiv$

$$\equiv V(x) \pmod{f(x)}, \quad \psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \sum_{u=0}^n \varphi_u x^u, \quad \text{где } \psi_u \text{ и } \varphi_u \text{ — нетривиальные}$$

решения сравнений

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)} \quad \text{и} \quad \sum_{u=0}^n \varphi_u (V(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)} \quad (2)$$

соответственно. Тогда полиномы $\psi(x)$, $\varphi(x)$ степени n и полином

$$F(x) = \frac{\psi(x^{p^2} - 2\alpha x^p + \alpha^2 x + \delta(1-\alpha))}{\varphi(x^p - \alpha x + \delta)} \quad (3)$$

степени $pr(p-1)$ неприводимы над полем F_p .

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая $n=1$. Пусть $f(x) = x + a$. Учитывая, что $x^p - 2\alpha x^p + \alpha^2 x = (x+a)((x+a)^{p^2-1} - 2\alpha(x+a)^{p-1} + \alpha^2(x+a)) - a(1-\alpha)^2$ и $x^p - \alpha x = (x+a)((x+a)^{p-1} - \alpha(x+a)) - a(1-\alpha)$, имеем: $(R(x))^0 = 1$, $R(x) = -a(1-\alpha)^2$, и $(V(x))^0 = 1$, $V(x) = -a(1-\alpha)$. Согласно сравнениям (2) коэффициенты полиномов $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ будут иметь вид: $\psi_0 = a(1-\alpha)^2$, $\psi_1 = 1$ и $\varphi_0 = a(1-\alpha)$, $\varphi_1 = 1$, соответственно, следовательно, $\psi(x) = x + a(1-\alpha)^2$ и $\varphi(x) = x + a(1-\alpha)$. Таким образом,

$$F(x) = \frac{x^{p^2} - 2\alpha x^p + \alpha^2 x - \delta(1-\alpha) + a(1-\alpha)^2}{x^p - \alpha x + \delta + a(1-\alpha)} = ((x+a)^p - \alpha(x+a) + \delta)^{p-1} - a,$$

однако последний полином согласно теореме 1 неприводим над полем F_p . Рассмотрим теперь случай, когда $n > 1$.

По теореме 1 полином $H(x) = (x^p - \alpha x + \delta)^{p-1} - a = \frac{x^p - 2\alpha x^p + \alpha^2 x + \delta(1-\alpha)}{x^p - \alpha x + \delta}$ неприводим над полем F_p . Так как $(n,$

$p(p-1)=1$, то полином $H(x)$ неприводим также и над полем F_{p^n} . Поэтому, если γ — корень уравнения $f(x)=0$, то среди коэффициентов полинома $H(x-\gamma)=h(x)=\sum_{v=0}^{p(p-1)} h_v x^v$ согласно (3), поскольку $n>1$, найдется хотя бы один коэффициент h_v такой, что $\deg_p(h_v)=n$. Далее, вследствие того, что $h^{(u)}(x)=H(x-\gamma^{p^u})=\sum_{v=0}^{p(p-1)} h_v^{p^u} x^v$, согласно (4)

полином $H_1(x)=\prod_{u=0}^{n-1} h^{(u)}(x)$ неприводим над полем F_p . Стало быть

$$H_1(x) = \frac{\prod_{u=0}^{n-1} (x^{p^u} - 2\alpha x^{p^u-1} + \alpha^2 x^{p^u-2} + \delta(1-\alpha) - (\gamma^{p^u} - 2\alpha\gamma^{p^u-1} + \alpha^2\gamma^{p^u-2})^{p^u}}{\prod_{u=0}^{n-1} (x^{p^u} - \alpha x^{p^u-1} + \delta - (\gamma^{p^u} - \alpha\gamma^{p^u-1})^{p^u}}. \quad (4)$$

Покажем теперь, что элементы $\gamma^{p^2} - 2\alpha\gamma^{p^2-1} + \alpha^2\gamma^{p^2-2} = \xi$ и $\gamma^p - \alpha\gamma^{p-1} = \beta$ являются собственным элементом поля F_{p^n} . Допустим противное, а именно предположим, что максимальные степени элементов ξ и β над полем F_p равны k и m соответственно, т. е. $\deg_p(\xi) = k$ и $\deg_p(\beta) = m$, где k и m — собственные делители n . Тогда $\prod_{u=0}^{n-1} (x - \xi^{p^u}) = (\psi(x))^N$ и

$\prod_{u=0}^{n-1} (x - \beta^{p^u}) = (\varphi(x))^M$, где $n = kN$ ($N > 1$) и $n = mM$ ($M > 1$). Следовательно, согласно (4) будем иметь

$$H_1(x) = \frac{(\psi(x^{p^2} - 2\alpha x^{p^2-1} + \alpha^2 x^{p^2-2} + \delta(1-\alpha)))^N}{(\varphi(x^p - \alpha x + \delta))^M}. \quad (5)$$

Отсюда, поскольку полином $H_1(x)$ неприводим над полем F_p , имеем $H_1(x) | \psi(x^{p^2} - 2\alpha x^{p^2-1} + \alpha^2 x^{p^2-2} + \delta(1-\alpha))$, но тогда $np(p-1) \leq kp^2$, что невозможно. Значит, $N=1$ и ξ является собственным элементом поля F_{p^n} , что в свою очередь устанавливает неприводимость полинома

$\psi(x) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \xi^{p^u})$ над полем F_p . Покажем, что $M=1$. Действительно, по теореме Варшамова (2) нетрудно убедиться в том, что полином

$$Q(x) = \left(x - \frac{\delta}{\alpha-1} \right)^{p-1} - \alpha = \frac{x^p - \alpha x + \delta}{x - \frac{\delta}{\alpha-1}}$$

неприводим над полем F_p . Теперь, так как $(n, p-1)=1$, полином $Q(x)$ неприводим также и над полем F_{p^n} . Тогда среди коэффициентов полинома $Q(x-\gamma) = g(x) =$

$= \sum_{u=0}^{p-1} g_u x^u$ согласно (3), поскольку $n > 1$, найдется хотя бы один коэффициент g_u такой, что $\deg_p(g_u) = n$. Если учесть также следующую легко доказываемую формулу $Q(x-\gamma^{p^u}) = g^{(u)}(x) = \sum_{v=0}^{p-1} g_v^{p^u} x^v$, то

согласно (4) полином $Q_1(x) = \prod_{u=0}^{n-1} g^{(u)}(x)$ будет неприводим над полем

F_p . Следовательно, будем иметь $Q_1(x)f\left(x - \frac{\delta}{a-1}\right) = (\psi(x^p - ax + \delta))^M$,

но поскольку полиномы $Q_1(x)$ и $f\left(x - \frac{\delta}{a-1}\right)$ неприводимы над полем F_p , то имеем $M=2$ и $n = n(p-1)$, что невозможно. Следовательно, $M=1$, а β является собственным элементом поля F_{p^n} , что в свою очередь устанавливает неприводимость полинома $\varphi(x) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \beta^u)$

над полем F_p . Таким образом, в силу (5) полином (3) будет неприводим над полем F_p . Наконец, нетрудно убедиться в том, что $\psi(R(x)) \equiv 0 \pmod{f(x)}$ и $\varphi(V(x)) \equiv 0 \pmod{f(x)}$ или $\sum_{u=0}^n \psi_u(R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}$ и

$\sum_{u=0}^n \varphi_u(V(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}$. Теорема доказана.

Лемма. Пусть $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ — произвольный неприводимый над полем F_q полином степени n , принадлежащий показателю e , и среди коэффициентов a_1, a_{n-1} найдется хотя бы один, не равный нулю, $t|q-1$, $x^t \equiv R(x) \pmod{f(x)}$ и $\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — не-

тривиальное решение сравнения

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}. \quad (6)$$

Тогда полином $\psi(x)$ степени n не будет разлагаться над полем F_q и принадлежит показателю $\frac{e}{(t, e)}$.

Доказательство. Пусть γ — корень уравнения $f(x) = 0$. Учитывая (6), нетрудно убедиться в том, что γ^t будет корнем $\psi(x)$. Теперь достаточно показать, что γ^t является собственным элементом поля F_{q^n} . Допустим противное, а именно предположим, что максимальная степень элемента γ^t над полем F_q равна r , т. е. $\deg_q(\gamma^t) = r$, где r — собственный делитель n .

Рассмотрим отдельно два возможных случая.

1. Пусть $a_1 \neq 0$. Поскольку согласно теореме Виетта имеем $\sum_{u=0}^{n-1} (\gamma^{-1})^{q^u} = -\frac{a_1}{a_0}$ или $\gamma^{-1} \sum_{u=0}^{n-1} (\gamma^{-1})^{q^u - 1} = -\frac{a_1}{a_0}$, то, так как $t|q^n - 1$, будем иметь $(\gamma^{-1})^{q^u - 1} \in F_{q^r}$, а это значит, $\sum_{u=0}^{n-1} (\gamma^{-1})^{q^u - 1} \in F_{q^r}$. Ввиду того, что $\gamma = -\frac{a_0}{a_1} \sum_{u=0}^{n-1} (\gamma^{-1})^{q^u - 1} \in F_{q^r}$, будем иметь $\deg_q(\gamma) < n$, что невозможно.

2. Пусть $a_{n-1} \neq 0$. Тогда, имея в виду, что $\sum_{u=0}^{n-1} \gamma^{q^u} = -a_{n-1}$ или же $\gamma \sum_{u=0}^{n-1} \gamma^{q^u - 1} = -a_{n-1}$ и $t|q^n - 1$, получим $\gamma = -\left(\sum_{u=0}^{n-1} \gamma^{q^u - 1}\right)^{-1} a_{n-1} \in F_{q^r}$ и, следовательно, $\deg_q(\gamma) < n$, что также невозможно. Лемма доказана.

20

Теорема 3. Пусть $\delta \neq 0$ — произвольный элемент поля F_q , $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ неприводимый над полем F_q полином степени n ,

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{u=0}^{s-1} \left(\frac{a_1 \delta}{a_0} \right)^{q^u} \neq 0$,

$x^{p-1} \equiv R(x) \pmod{f(x)}$, $\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — нетривиальное решение

уравнения $\sum_{u=0}^n (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}$ и $\psi_1 = 1$. Тогда полином $F(x) =$

$= x^n \psi \left(\frac{x^n - \delta^p}{x} \right)$ неприводим над полем F_q .

Доказательство. Согласно лемме полином $\psi(x)$ неприводим над полем F_q и $\psi(\gamma^{p-1}) = 0$ ($f(\gamma) = 0$). Теперь, используя (3), получим,

что $x^n \psi \left(\frac{x^p - \delta^p}{x} \right)$ неприводим над полем F_q , если γ^{p-1} и δ удовлет-

воряют условию $\sum_{u=0}^{ps-1} \delta^{p^{u+1}} \gamma^{p^{us} - pu + 1} \neq 0$. Упростим это условие. Легко

видеть, что $\sum_{u=0}^{ps-1} \delta^{p^{u+1}} \gamma^{p^{us} - pu + 1} = \gamma \left(\sum_{u=0}^{s-1} \left(\sum_{v=0}^{p-1} (\delta \gamma^{-1})^{p^{sv}} \right)^{p^u} \right)^p$ и $f(\delta x) =$

$= \sum_{u=0}^n a_u (\delta x)^u = \sum_{u=0}^n h_u x^u$. Отсюда $h_1 = a_1 \delta$ и согласно теореме Виетта

$\sum_{u=0}^{s-1} \left(\sum_{v=0}^{p-1} (\delta \gamma^{-1})^{p^{sv}} \right)^{p^u} = \sum_{u=0}^{s-1} \left(-\frac{a_1 \delta}{a_0} \right)^{p^u}$. Таким образом, если $\sum_{u=0}^{s-1} \left(\frac{a_1 \delta}{a_0} \right)^{p^u} \neq 0$,

то полином $x^n \psi \left(\frac{x^p - \delta^p}{x} \right)$ неприводим над полем F_q . Теорема дока-

зана.

Опираясь на теорему 3 и используя работу (8), можно будет доказать следующий факт.

Теорема 4. Пусть $\delta \neq 0$ — произвольный элемент поля F_{2^s} , $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ — неприводимый над полем F_{2^s} полином степени n ,

коэффициенты которого удовлетворяют условиям $\sum_{u=0}^{s-1} \left(\frac{a_1 \delta}{a_0} \right)^{2^u} = 1$ и

$\sum_{u=0}^{s-1} \left(\frac{a_{n-1}}{\delta} \right)^{2^u} = 1$, $b_m(x)$ и $c_m(x)$ ($m > 1$) — последовательности функ-

ций, заданных рекуррентными уравнениями $b_m(x) = (b_{m-1}(x))^2 +$

$+ (\delta c_{m-1}(x))^2$, $c_m(x) = b_{m-1}(x) c_{m-1}(x)$ при начальных условиях $b_1(x) =$

$= x^2 + \delta^2$, $c_1(x) = x$. Тогда для произвольного натурального m поли-

ном $F(x) = \sum_{u=0}^n a_u b_m^u(x) c_m^{n-u}(x)$ степени $2^m n$ будет неприводим над

полем F_{2^s} .

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамову за полезные советы в процессе работы над статьей.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների
վերածելիության տեսության մասին

Աշխատանքում հետազոտվում են մի քանի ձևափոխություններ, որոնց համար որպես որոշման տիրույթ հանդիսանում է Գալուայի F_n դաշտից վերցված գործակիցներով բազմանդամների օղակալու Ապացուցվում են մի շարք թևորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս անվերծանելի բազմանդամներ կառուցել բացահայտ տեսքով Գալուայի F_n կամայական դաշտի վրա: Բացի այդ, վերջում տրվում է F_{2^s} վերջավոր դաշտի վրա $2^m n$ -րդ աստիճանի (որտեղ m -ը՝ կամայական բնական թիվ է) անվերծանելի բազմանդամների կառուցման մի ռեկուրենտ եղանակ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ P. P. Varshamov, ДАН СССР, т. 156, № 6 (1964). ² P. P. Варшамов, ДАН Арм. ССР, т. 79, № 1 (1984). ³ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 83, № 2 (1986). ⁴ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 81, № 2 (1985). ⁵ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 83, № 4 (1986). ⁶ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 84, № 2 (1987).

УДК 517.977

МАТЕМАТИКА

Р. В. Хачатрян

Динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных многошаговых играх

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 27/X 1987)

Свойство динамической устойчивости принципов оптимальности, впервые введенное в (1) и далее подробно исследованное в (2), относится к важнейшим аспектам теории многошаговых неантагонистических игр. К числу динамически устойчивых принципов оптимальности в этих играх относятся равновесие по Нэшу, M -оптимальность и оптимальность по Парето. Поэтому важным оказывается вопрос исследования динамической устойчивости известных принципов оптимальности для многокритериальных игр.

1. Многокритериальные многошаговые игры. Пусть $G = \langle X; \gamma \rangle$ — древовидный граф, $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$, где $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\gamma_i = \emptyset$ для всех позиций $x \in X_{n+1}$. Множество X_i называется множеством очередности i -го игрока ($i = 1, 2, \dots, n$), а X_{n+1} — множеством окончательных позиций. На множестве X_{n+1} определены вещественные вектор-функции $H_1; H_2; \dots; H_n$, где вектор-функция H_i называется выигрышем i -го игрока, $i = 1, 2, \dots, n$, $H_i = (H_{i1}; H_{i2}; \dots; H_{im})$. Игра происходит следующим образом.

Задано n игроков, перенумерованных натуральными числами $1, 2, \dots, n$. Предположим, что $x_0 \in X_{i_1}$, тогда в вершине (позиции) x_0 „ходит“ игрок i_1 и выбирает вершину $x_1 \in \gamma(x_0)$; если $x_1 \in X_{i_2}$, то в вершине x_1 „ходит“ игрок i_2 и выбирает следующую вершину $x_2 \in \gamma(x_1)$ и т. д.; если на k -ом шаге реализуется позиция $x_{k-1} \in X_{i_k}$, то в ней „ходит“ игрок i_k и выбирает следующую вершину (позицию) $x_k \in \gamma(x_{k-1})$. Игра прекращается, как только достигается вершина $x_l \in X_{n+1} (\gamma(x_l) = \emptyset)$.

В результате последовательного выбора позиций однозначно реализуется некоторая последовательность вершин x_0, x_1, \dots, x_l , определяющая путь в древовидном графе G , исходящий из начальной позиции x_0 и достигающий одной из окончательных позиций игры. Такой путь будем называть в дальнейшем партией.

Из-за древовидности графа G каждая позиция $x_l \in X_{n+1}$ однозначно определяет партию, достигающую этой позиции. В окончательной позиции x_l каждый из игроков $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ получает выигрыш $H_i(x_l) = \{H_{i1}(x_l); \dots; H_{im}(x_l)\}$.

Предполагается, что игрок i при совершенном выборе в позиции $x \in X_i$ знает эту позицию, а следовательно, из-за древовидности графы G может восстановить все предыдущие позиции. В этом случае говорят, что игроки имеют полную информацию.

Функция u_i , которая каждой позиции $x \in X_i$ ставит в соответствие некоторую позицию $u \in X_k$, называется стратегией игрока i . Множество всевозможных стратегий игрока i будем обозначать через D_i ($i = 1, \dots, n$).

Таким образом, стратегия i -го игрока предписывает ему в любой позиции x из множества его очередности X_i однозначный выбор следующей позиции.

Набор стратегий $u = (u_1; \dots; u_n)$, где $u_i \in D_i$, называется ситуацией в игре. Каждая ситуация однозначно определяет партию в игре, а следовательно, и выигрыш игроков.

Действительно, пусть $x_0 \in X_{i_1}$, тогда в ситуации $u = (u_1, \dots, u_n)$ следующая позиция x_1 определяется однозначно по правилу $x_1 = u_{i_1}(x_0)$; пусть теперь $x_1 \in X_{i_2}$, тогда x_2 определяется однозначно по правилу $x_2 = u_{i_2}(x_1)$; если на k -м шаге реализовалась позиция $x_{k-1} \in X_{i_k}$, тогда x_k определяется однозначно по правилу $x_k = u_{i_k}(x_{k-1})$ и т. д.

Пусть ситуации $u = (u_1, \dots, u_n)$ в указанном смысле соответствует партия x_0, x_1, \dots, x_l .

Тогда можно ввести понятие вектор-функции выигрыша, определенной на множестве стратегий $K_i(u) = K_i(u_1; u_2; \dots; u_n) = \{K_{i_1}(u); K_{i_2}(u); \dots; K_{i_m}(u)\} = \{H_{i_1}(x_l); \dots; H_{i_m}(x_l)\} = H_i(x_l)$ i -го игрока, $i = 1, \dots, n$. Совокупность $\Gamma = \langle D_1, D_2, \dots, D_n; K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$ называется многокритериальной игрой с полной информацией n лиц на графе G в нормальной форме.

2. Определение 1. Ситуация $u^* = (u_1^*; \dots, u_n^*)$ называется ситуацией многокритериального равновесия в игре Γ , если не существует такого i и такой стратегии, что $K_i(u^*) \leq K_i(u^* \| u_i)$ и хотя бы для одной компоненты j_0 имеет место $K_{i,j_0}(u^*) < < K_{i,j_0}(u^* \| u_i)$.

Это означает, что отклонение i -ым игроком от стратегии u_i^* при условии неотклонения от стратегий, входящих в ситуацию u^* , другими игроками не может привести к увеличению выигрыша i -го игрока; одновременно по всем компонентам.

Определение 2. Пусть M некоторая коалиционная структура (M — некоторое фиксированное множество подмножества N всех игроков).

Ситуация \bar{u} называется ситуацией многокритериального M -равновесия в игре Γ , если для каждого $S \subset M$ нельзя найти коалиционную стратегию $u_S (u_S = \{u_i; i \in S\})$ такой, что $K_i(\bar{u}) \leq \leq K_i(\bar{u} \| u_S)$ для $i \in S$ и одновременно по всем компонентам. $(\bar{u} \| u_S)$ — ситуация, в которой стратегии $\bar{u}_i, i \in S$ заменены на произвольную коалиционную стратегию $u_S \in \prod_{i \in S} D_i$.

Рассмотрим вспомогательную многошаговую игру $\bar{\Gamma} = \langle D_1, D_2, \dots, D_n; \bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n \rangle$, где $\bar{K}_i = \sum_{l=1}^m K_{il}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, множество стратегий в играх Γ и $\bar{\Gamma}$ совпадают, игра $\bar{\Gamma}$ является игрой с однокритериальным выигрышем, который для каждого игрока полагается равным сумме компонент вектор-выигрыша в игре Γ .

Теорема 1. Пусть $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ ситуация равновесия по Нэшу в игре $\bar{\Gamma}$ с однокритериальным выигрышем, тогда эта же ситуация u^* является ситуацией многокритериального равновесия в игре Γ .

Теорема 2. Пусть \hat{u} является ситуацией M -равновесия в игре $\bar{\Gamma}$, тогда эта же ситуация является ситуацией многокритериального M -равновесия в игре Γ .

Докажем теорему 2. Напомним определение M -равновесия для случая однокритериальной игры $\bar{\Gamma}$. Ситуация $\hat{u} = (\hat{u}_1; \dots; \hat{u}_n)$ называется ситуацией M -равновесия, если для любой коалиции $S \subseteq M$ существует такой индекс $i_0 \in S$, что $K_{i_0}(\hat{u}) > K_{i_0}(\hat{u} \| u_S)$.

Пусть $\hat{u} = (\hat{u}_1; \dots; \hat{u}_n)$ ситуация M -равновесия в игре $\bar{\Gamma}$. Предположим, что теорема 2 неверна. Тогда согласно определению 2 существует такая коалиция $S \subseteq M$, стратегия u_S , что

$$K_i(\hat{u}) \leq K_i(\hat{u} \| u_S), \quad i \in S. \quad (1)$$

Из (1) имеем

$$K_{i_l}(\hat{u}) \leq K_{i_l}(\hat{u} \| u_S), \quad l = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Складывая (2) покомпонентно, получаем

$$\sum_{l=1}^m K_{i_l}(\hat{u}) \leq \sum_{l=1}^m K_{i_l}(\hat{u} \| u_S). \quad (3)$$

Из (3) получаем

$$\bar{K}_i(\hat{u}) \leq \bar{K}_i(\hat{u} \| u_S), \quad i \in S. \quad (4)$$

Неравенство (4) противоречит тому, что \hat{u} ситуация M -равновесия в игре $\bar{\Gamma}$. Теорема доказана. Доказательство теоремы 1 проводится аналогично.

С любым подграфом $G_y = \langle X_y, \gamma \rangle$ графа G свяжем подыгру Γ_y следующим образом: множество очередности игроков в подыгре Γ_y определяется по правилу $X_i^y = X_i \cap X_y$ ($i = 1, 2, \dots, n$), множество окончательных позиций есть $X_{n+1}^y = X_{n+1} \cap X_y$, вектор-выигрыши игроков H_i^y в подыгре полагаются равными: $H_i^y(x) = H_i(x)$ для всех $x \in X_{n+1}^y$, $i = 1, 2, \dots, n$. В соответствии с этим стратегия i -го игрока u_i^y в рассматриваемой подыгре определяется как усечение стратегии того же игрока u_i в игре Γ , т. е. $u_i^y(x) = u_i(x)$, $x \in X_i^y$, $i = 1, \dots, n$. Множество всех таких стратегий обозначим через D_i^y . В результате каждый подграф G_y определяет игру в нормальной форме $\Gamma_y = \langle D_1^y, \dots, D_n^y; K_1^y, \dots, K_n^y \rangle$, где вектор-функция выигрыша K_i^y

определена на $D_1^y \times D_2^y \times \dots \times D_n^y$. Ситуация многокритериального равновесия $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ называется ситуацией абсолютного многокритериального равновесия в игре Γ , если для любой позиции $y \in X$ ситуация $\bar{u}^y = (\bar{u}_1^y, \dots, \bar{u}_n^y)$, где \bar{u}_i^y — усечение стратегии \bar{u}_i , является ситуацией многокритериального равновесия в соответствующей подыгре. Ситуация абсолютного многокритериального M -равновесия определяется аналогично.

В игре $\bar{\Gamma}$ всегда существует ситуация абсолютного равновесия (см. (1)). Отсюда и из теоремы 2 следует существование абсолютного многокритериального равновесия в игре Γ .

3. Динамическая устойчивость. Пусть x^1, x^2, \dots, x^r ($x^r \in X_{n+1}^r$) партия в ситуации многокритериального абсолютного равновесия $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$. Рассмотрим последовательность подыгр $\Gamma_{x^1}, \Gamma_{x^2}, \dots, \Gamma_{x^r}$ вдоль партии x_1, \dots, x_r . По определению абсолютного многокритериального равновесия усечение ситуации $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ на подыгре Γ_{x^k} , $k=1, \dots, r$, является ситуацией многокритериального равновесия в подыгре Γ_{x^k} , $k=1, 2, \dots, r$. Это свойство ситуации абсолютного многокритериального равновесия называется динамической устойчивостью (см. (1)).

Фактически динамическая устойчивость ситуации многокритериального равновесия следует из динамической устойчивости ситуации равновесия в игре $\bar{\Gamma}$. В общем случае нельзя утверждать существование абсолютного M -равновесия в игре $\bar{\Gamma}$, поэтому нельзя априори утверждать существование и динамическую устойчивость ситуации многокритериального M -равновесия в игре Γ .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Օպտիմալացման սկզբունքների դինամիկական կայունությունը
բազմահայտանիշային բազմախաղ խաղերում

Հողվածում դիտարկվում է բազմաբաղբառ բազմահայտանիշային լրիվ ինֆորմացիայով խաղեր, որտեղ ներմուծվում է օպտիմալացման նոր սկզբունքներ և ապացուցվում է նրանց դոմինանտությունը:

Ուսումնասիրվում է բազմահայտանիշային հավասարակշռության դինամիկական կայունությունը:

ЛИТЕРАТУРА—ՌԵՐԵՆՍԻՅՆԵՐ

1. Л. А. Петросян, Вестн. Ленинградского ун-та, т. 19, вып. 4 (1977). 2. Л. А. Петросян, Н. П. Данилов, Кооперативные дифференциальные игры и их приложения, Изд-во Томского ун-та, 1985. 3. Дж. Мак Кинси, Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.

УДК 551.24

СЕЙСМОЛОГИЯ

Н. К. Карапетян

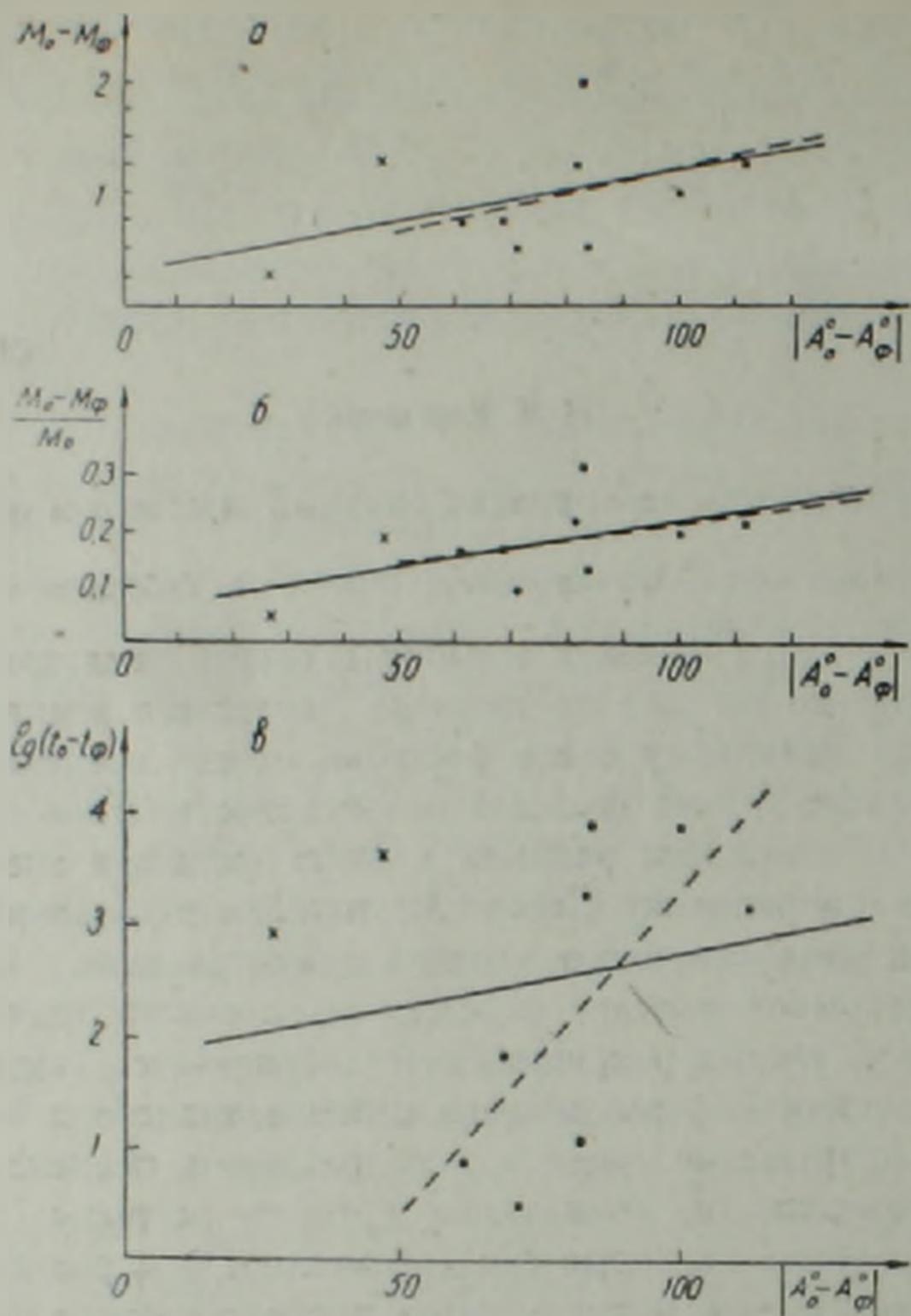
Прогностический признак сильных землетрясений

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Габриеляном 10/VI 1987)

В работе (1) при изучении механизма очагов землетрясений Эрзинджан-Бингельского региона на примере Вартоского землетрясения показано, что по механизму очага форшока можно предсказать возникновение основного толчка большей интенсивности. Было отмечено, что обе возможные плоскости разрыва в очаге форшока значительно отклоняются от направления Северо-Анатолийского разлома, к которому приурочен очаг основного толчка землетрясения. Несовпадение плоскостей разрывов в очаге форшока и основного толчка согласно дислокационной теории разрушения (2) объясняется тем, что при повышенной скорости деформирования сейсмоактивного района происходит хрупкое разрушение среды и в направлении, перпендикулярном к фокальной поверхности, появляются хрупкие разрывы. Следовательно, хрупкие разрывы, которые свидетельствуют о нарастании скорости деформирования среды, могут служить прогностическим признаком появления сильного землетрясения (2).

В настоящей работе исследованы механизмы очагов десяти наиболее крупных землетрясений Армянского нагорья, которые имели форшоки с магнитудой $M \geq 3\frac{1}{2}$. Данные об этих землетрясениях, в том числе координаты эпицентров форшоков, основных толчков и афтершоков, приведены в таблице. Их форшоки определены при детальном изучении землетрясений по макросейсмическим и инструментальным наблюдениям. В виду ограниченности объема в настоящей статье эти исследования не приводятся. Форшоки в основном устанавливались исходя из того, что они происходили в эпицентральной области основного толчка. В той же таблице даны результаты определения азимутов разрывов в очагах основного толчка, форшока и афтершоков землетрясений по инструментальным и макросейсмическим данным. Азимуты разрывов в очагах землетрясений по инструментальным данным получены нами при изучении механизма очагов землетрясений по методу, основанному на теории дислокаций (3). При этом все построения велись на сетке Вульфа в проекции верхней полусферы. Азимуты разрывов в очагах землетрясений по макросейсмическим данным определены по направлению большой оси первой изосейсты на картах балльности.

Проведено сопоставление полученных результатов по разрывам в очагах землетрясений с направлениями известных тектонических раз-



Корреляционные зависимости. Объяснение в тексте

ломов на территории Армянского нагорья (4,5) и линейментов, выявленных по космическим снимкам (6). Получено, что направление одной из двух возможных плоскостей разрывов в очагах основных землетрясений и их афтершоков в основном совпадает с направлениями известных тектонических разломов, а направления разрывов в очагах форшоков отличаются. Как следует из таблицы, отличие в направлениях разрывов в очагах основного толчка и форшока у различных землетрясений неодинаковое.

Нами сделана попытка установить зависимость разности магнитуд основного толчка (M_0) и форшока (M_ϕ) от разности азимутов простираний разрывов в их очагах ($A_0 - A_\phi$). Получение такой корреляционной зависимости является существенным, так как представится возможность по силе форшока судить об интенсивности ожидаемого землетрясения. Данные по использованным землетрясениям приведены на рисунке, а. Точками отмечены землетрясения, происшедшие на Малом Кавказе, а крестиками — в Турции. Способом наименьших квадратов получено уравнение прямой (сплошная линия), осредняющей эти данные:

$$M_0 - M_\Phi = 0,278 + 0,009(A_0 - A_\Phi), \quad (1)$$

а в случае, когда использованы данные землетрясений только Малого Кавказа, эта зависимость выражается уравнением прямой (пунктирная линия на рисунке, а):

$$M_0 - M_\Phi = 0,092 + 0,011(A_0 - A_\Phi). \quad (2)$$

В обоих случаях средняя квадратическая ошибка равна 0,5. Коэффициент корреляции для зависимости (1) составляет 0,44. Слабая корреляция может быть следствием в основном трех причин: 1) рассмотренные землетрясения произошли в различных районах обширного Армянского нагорья; 2) указанная зависимость получена для большого интервала магнитуд основных землетрясений от 4 до $6\frac{3}{4}$; 3) могли появиться ошибки при измерениях азимутов простирания разрывов в очагах землетрясений. Как следует из рисунка, а, первая причина в данном случае исключается, так как зависимости $(M_0 - M_\Phi)$ от $(A_0 - A_\Phi)$ для всей территории Армянского нагорья и Малого Кавказа получаются примерно одинаковыми.

С целью исключения второй причины взята зависимость от $(A_0 - A_\Phi)$ отношения разности магнитуд основного толчка и форшока $(M_0 - M_\Phi)$ к магнитуде основного толчка, которая приведена на рисунке, б. Эта зависимость для всей территории Армянского нагорья выражается в виде

$$\frac{M_0 - M_\Phi}{M_0} = 0,0501 + 0,0016(A_0 - A_\Phi). \quad (3)$$

Как и следовало ожидать, корреляция между величинами $\left(\frac{M_0 - M_\Phi}{M_0}\right)$ и $(A_0 - A_\Phi)$ оказалась лучше, чем между $(M_0 - M_\Phi)$ и $(A_0 - A_\Phi)$. В данном случае коэффициент корреляции равен 0,55.

Для землетрясений Малого Кавказа эта зависимость имеет вид

$$\frac{M_0 - M_\Phi}{M_0} = 0,0619 + 0,0014(A_0 - A_\Phi). \quad (4)$$

Как следует из рисунка, б, зависимость $\frac{M_0 - M_\Phi}{M_0}$ от $(A_0 - A_\Phi)$ для всего Армянского нагорья (сплошная прямая) и Малого Кавказа (пунктирная прямая) примерно одинаковая. Средняя квадратическая ошибка в обоих случаях равна 0,06.

Представляет также определенный интерес установление зависимости разности времен возникновения основного землетрясения (t_0) и форшока (t_Φ) от разности азимутов простирания разрывов в очагах основного толчка и форшока. На рисунке, в даны эти значения, взятые из табл. 1. При этом разность времен возникновения основного землетрясения и форшока дана в часах и выражена в логарифмическом масштабе.

Для землетрясений всего Армянского нагорья эта зависимость получена в виде

$$\lg(t_0 - t_\Phi) = 1,8163 + 0,0092(A_0 - A_\Phi), \quad (5)$$

Основные параметры землетрясений

№ пп.	Дата землетрясе- ния, число, месяц, год	Время возникнове- ния землетрясения	Координаты эпцентра		Магнитуда	Λ_0 по инструмен- тным данным	Λ_0 по макро сейсми- ческим данным	Название землетрясения
			γ_0°	λ_0°				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	20 II 1920	00 01	41 59	44 07	4 ^{3/4}		30	Форшок Карглийского
2	20 II 1920	11 44	41 59	44 07	6		112	Карглийское
3	22 X 1926	16 44	40 42	43 44	5 ^{1/4}		104	Форшок Ленинаканского
4	22 X 1926	19 59	40 41	43 45	5 ^{3/4}		33	Ленинаканское
5	27 X 1926	21 20	40 42	43 47	4 ^{3/4}		36	Афтершок Ленинаканского
6	3 XI 1926	15 44	40 41	43 47	4		28	Афтершок Ленинаканского
7	12 II 1931	05 35	39 29	46 03	4 ^{1/2}		110	Форшок Зангезурского I
8	27 IV 1931	16 50	39 20	46 01	6 ^{1/2}		27	Зангезурское I
9	8 V 1931	09 05	39 12	46 24	4 ^{1/2}		42	Афтершок Зангезурского I
10	7 I 1937	13 23	40 09	44 23	4		110	Форшок Ереванского II
11	7 I 1937	20 47	40 08	44 26	4 ^{3/4}		49	Ереванское II
12	12 I 1937	05 03	40 08	44 25	4 ^{1/2}		22	Афтершок Ереванского II
13	23 I 1937	06 57	41 07	44 23	4		58	Афтершок Ереванского II
14	27 I 1937	17 50	40 10	44 24	4		56	Афтершок Ереванского II
15	9 III 1940	20 08	41 25	43 33	4 ^{3/4}		151	Форшок Табацкурского
16	7 V 1940	22 23	41 42	43 43	6		49	Табацкурское
17	23 V 1940	19 10	41 50	43 52	4 ^{1/4}		44	Афтершок Табацкурского
18	10 VII 1940	13 10	41 30	44 00	5		56	Афтершок Табацкурского
19	7 III 1966	01 16	31 12	41 36	5 ^{1/2}	64	61	Форшок Вартоского
20	19 VIII 1966	12 22	39 10	41 34	6 ^{3/4}	106	114	Вартоское
21	19 VIII 1966	13 15	39 25	41 18	5 ^{1/4}	134		Афтершок Вартоского
22	19 VIII 1966	13 54	39 00	41 46	5 ^{1/4}	127		Афтершок Вартоского
23	19 VIII 1966	14 17	39 20	41 15	5	100		Афтершок Вартоского
24	19 VIII 1966	18 41	39 08	41 29	4 ^{3/4}	118		Афтершок Вартоского
25	20 VIII 1966	11 59	39 25	40 59	6 ^{1/4}	114		Афтершок Вартоского
26	20 VIII 1966	12 01	39 10	40 42	5 ^{1/2}	126		Афтершок Вартоского
27	31 XII 1966	12 06	41 46	43 29	4	133	142	Форшок Боржомского
28	3 I 1970	05 54	41 49	43 23	4 ^{3/4}	70	68	Боржомское
29	21 V 1970	10 14	41 49	43 30	4 ^{1/4}	64		Афтершок Боржомского
30	1 VI 1973	09 35	41 22	43 53	3 ^{1/2}	144		Форшок Шахназарского
31	30 III 1974	00 34	41 24	43 58	4	60	55	Шахназарское
32	25 III 1976	11 55	41 01	42 57	4 ^{3/4}	37		Форшок Ардаханского II
33	29 IV 1976	22 18	40 55	42 49	5	64		Ардаханское II
34	29 IV 1976	23 23	40 50	42 53	4 ^{1/2}	68		Афтершок Ардаханского II
35	4 VI 1976	05 08	40 49	42 56	4 ^{1/2}	68		Афтершок Ардаханского II
36	6 II 1977	04 40	40 48	42 55	3 ^{3/4}	68		Афтершок Ардаханского II
37	14 III 1977	19 42	41 20	44 00	4 ^{1/4}	58	51	Форшок Дманисского
38	2 I 1978	05 31	41 24	44 07	5 ^{1/4}	156	153	Дманисское
39	1 III 1978	10 20	41 18	43 58	3 ^{1/2}	139		Афтершок Дманисского
40	2 III 1978	05 29	41 12	44 02	3 ^{3/4}	164		Афтершок Дманисского
41	14 VI 1978	13 25	41 22	44 00	4	162		Афтершок Дманисского
42	17 VI 1978	18 58	41 20	43 54	3 ^{3/4}	163		Афтершок Дманисского
43	27 VI 1978	04 45	41 08	44 00	4	163	155	Афтершок Дманисского
44	15 VIII 1978	09 04	41 14	44 00	4 ^{1/2}	159	156	Афтершок Дманисского

а для землетрясений Малого Кавказа в виде

$$\lg(t_0 - t_\phi) = 2,4722 + 0,0577 (\Lambda_0 - A_\phi). \quad (6)$$

Как следует из рисунка, в и формул (5) и (6), зависимость $\lg(t_0 - t_\phi)$ от $(\Lambda_0 - A_\phi)$ для землетрясений всего Армянского нагорья (сплошная прямая) сильно отличается от таковой для Малого Кавказа (пунктирная прямая). Эта зависимость, полученная по имеющимся данным для землетрясений всего Армянского нагорья, плохо коррелируется. Коэффициент корреляции равен всего 0,17. Для зем-

летрясений Малого Кавказа между $\lg(t_0 - t_\phi)$ и $(A_0 - A_\phi)$ имеется хорошая корреляция. Коэффициент корреляции равен 0,70. При этом отличаются также средние квадратические ошибки, согласно которым ошибка во времени возникновения сильного землетрясения по (5), т. е. для территории Армянского нагорья, составляет примерно 20 ч, а по (6), т. е. для территории Малого Кавказа, 10 ч.

Полученные зависимости позволяют по разности азимутов простирания разрыва в очаге землетрясения и направления тектонических разломов, к которым приурочены очаговые зоны сейсмоактивных регионов Армянского нагорья, судить о том, последует ли за этим землетрясением более сильное, а также оценить в среднем, когда и какой примерно силы будет оно.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук Армянской ССР

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ուժեղ երկրաշարժերի կանխագուշակային հատկանիշը

Հայկական լեռնաշխարհի ուժեղ երկրաշարժերի ֆորշոկների օջախների մեխանիզմներով հաստատված է հիմնական ցնցմանը հավասարազոր երկրաշարժի առաջացման կանխագուշակային հատկանիշը:

Ստացված են համահարարերակցական կախումներ երկրաշարժի ու ֆորշոկի օջախներում խզումների հարթությունների սարածման ադիմուտների սարբերության և $M_0 - M_\phi$, $\frac{M_0 - M_\phi}{M_0}$ և $\lg(t_0 - t_\phi)$ միջև:

Այդ հավասարումները թույլ են տալիս որոշել սպասվելիք երկրաշարժի առաջացման պահը և ինտենսիվությունը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. К. Каралетян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 39, № 2 (1986). ² А. В. Введенская, Сейсмогеодинамика. Наука, М., 1984. ³ А. В. Введенская, Исследование напряжений и разрывов в очагах землетрясений при помощи теории дислокаций, Наука, М., 1969. ⁴ А. Т. Асланян, Региональная геология Армении, Айпетрат, Ереван, 1958. ⁵ А. А. Габриелян, О. А. Саркисян, Г. П. Симонян, Сеймотектоника Армянской ССР, Изд. Ереванского ун-та, 1981. ⁶ А. С. Кираханян, Изв. высших учебных заведений, Геология и разведка, № 3, 1981.

УДК 577.391; 621.375.8; 576.8

РАДИОБИОЛОГИЯ

Շ. Մ. Արաքյան, Կ. Շ. Վոսկանյան, Ն. Վ. Տիմոնյան

О некоторых общих закономерностях действия лазерного
 и ионизирующих излучений на клетки бактерий

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Африкьяном 5/VIII 1987)

Широкое применение оптических квантовых генераторов в различных областях народного хозяйства обуславливает необходимость всестороннего изучения биологического действия лазерного излучения. Особый интерес представляет изучение биологического действия низкоинтенсивного лазерного излучения, используемого в терапевтических целях. Имеются данные как о повреждающем действии гелий-неонового лазерного излучения, так и о стимулировании метаболической активности клеток излучением небольших энергий (¹⁻²). Однако механизмы того или иного действия лазерного излучения неизвестны. Не исключено, что одним из перспективных путей разработки подходов к пониманию механизмов биологического действия лазерного излучения на клетки может явиться поиск общих закономерностей действия всего спектра электромагнитных излучений. Выявлению этих закономерностей и посвящена данная работа.

В работе использованы следующие штаммы бактерий *E. coli* K-12: «дикий» тип АВ 1157, радиорезистентный мутант ВЛ 1114 и радиочувствительные мутанты АВ 2463 и Р 3478.

Перед облучением клетки выращивали на твердой полноценной питательной среде УЕР (дрожжевой экстракт—10 г/л, NaCl—10 г/л, пептон—10 г/л) в течение 24 ч при 37°С. Облучение клеток лазерным излучением (гелий-неоновый лазер ЛГ-75 непрерывного действия, $\lambda = 633$ нм, мощность излучения 4,8 мВт) проводили при комнатной температуре в монослое на поверхности «голодного» агара. Лазерное излучение при необходимости ослабляли нейтральными светофильтрами с пропусканиями 41 и 31%. Выживаемость клеток определяли по методу макроколоний.

Для регистрации промежутков времени, по истечении которых клетки делятся, контрольные и облученные клеточные пробы рассеивали на лавсановые ядерные фильтры (диаметр пор—0,53 мкм), нанесенные на поверхность твердой питательной среды, и помещали в термостат при 37°С. Через определенные сроки выдерживания в таких условиях клетки смывали с пленок и высевали на твердую питательную среду. О происшедшем делении судили по увеличению числа колониеобразующих клеток. Каждый опыт повторялся 5—10 раз. Стандартная ошибка определения средних значений выживаемости клеток при

усреднении результатов разных опытов, как правило, не превышала 5%.

На рис. 1 показана зависимость выживаемости клеток 4 штаммов бактерий *E. coli* K-12 от продолжительности облучения их гелий-

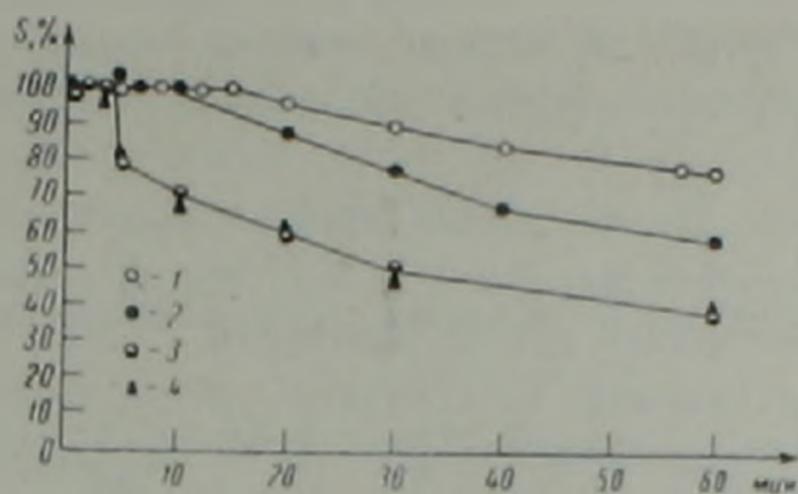


Рис. 1. Зависимость выживаемости клеток бактерий *E. coli*: K-12 BL 1114 (1), AB 1157 (2), AB 2463 (3) и P 3478 (4) в зависимости от времени лазерной экспозиции. Мощность лазерного излучения 2 мВт. По оси абсцисс—время облучения, мин; по оси ординат—выживаемость, %

неоновым лазерным излучением. Видно, что кривые выживания всех исследованных штаммов бактерий имеют по меньшей мере два качественно различающихся участка: малых и больших доз. На участке малых доз летальный эффект не обнаруживается. На участке больших доз кривая доза-эффект имеет обычный характер—с увеличением дозы выживаемость клеток уменьшается. Чувствительность клеток к лазерному излучению в ряду исследованных штаммов уменьшается в следующем порядке: радиочувствительные мутанты, «дикий» тип, суперрезистентный мутант. Т. е. чувствительность клеток изученных нами штаммов бактерий *E. coli* K-12 к лазерному и редкоионизирующему излучениям (3-4) описывается сходным по направленности рядом.

При количественном изучении биологического действия радиации обычно исследуют зависимость биологического эффекта от дозы облучения. Однако для ряда реакций эффект облучения зависит и от мощности дозы (5). Уменьшение эффективности облучения при малых мощностях регистрируется обычно в случаях, когда величины исследуемых мощностей различаются не менее, чем на порядок. Для того, чтобы выяснить, играет ли существенную роль «фактор времени» в биологической эффективности лазерного излучения, нами были проведены опыты по изучению зависимости выживаемости клеток бактерий *E. coli* K-12 «дикого» типа от продолжительности облучения их лазерным излучением разных мощностей. Результаты свидетельствуют о том (рис. 2), что эффект, вызванный данной дозой, определяется только ее величиной: интенсивность излучения не играет практически никакой роли. Так например, 40-минутная лазерная экспозиция при мощности лазерного излучения 1,9 мВт и 16-минутная экспозиция при

мощности 4,8 мВт приводят к одинаковому эффекту: выживаемость клеток снижается на 30%. Плотность энергии в обоих случаях соответствует величине $6,4 \cdot 10^5$ Дж/м². Аналогичная картина наблюдается и при любых других значениях выживаемости клеток.

Таким образом, в изученном интервале мощностей доз лазерного излучения (различающихся меньше, чем на порядок), как и в случае ионизирующих излучений, эффект облучения не зависит от мощности дозы.

Известен также другой общий эффект облучения клеток—временное подавление деления клеток (6). На рис. 3 приведены результаты опытов по выдерживанию клеток бактерий *E. coli* К-12 «дикого» типа на поверхности твердой питательной среды в течение разных промежутков времени при температуре 37°C. Видно, что контрольные

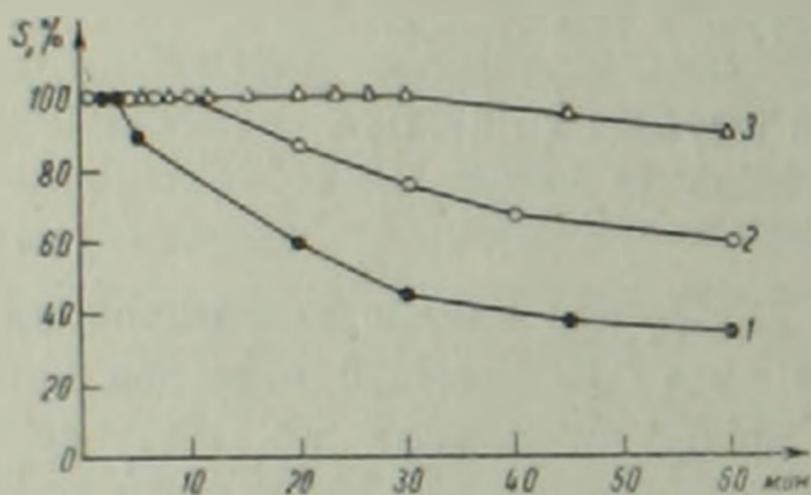


Рис. 2. Зависимость выживаемости клеток бактерий *E. coli* К-12 штамма АВ 1157 от времени лазерной экспозиции при различных мощностях лазерного излучения. По оси абсцисс—время лазерного облучения, мин; по оси ординат—выживаемость, %. 1—4.8; 2—1.96; 3—0.6 мВт

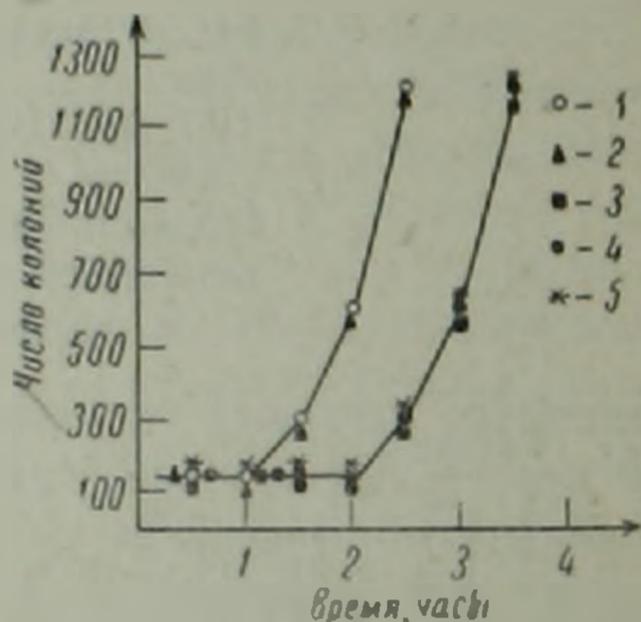


Рис. 3. Влияние лазерного облучения на сроки деления клеток бактерий *E. coli* К-12 штамма АВ 1157. По оси абсцисс—время, ч; по оси ординат—число колоний. 1—контроль; 2—5—лазерное облучение в течение 5, 12, 60 и 120 с соответственно

клетки так же, как и клетки, облученные лазерным излучением в течение 5 с, делятся через 1,5 ч, в то время как клетки, подвергнутые более длительному лазерному воздействию (12 с, 1 и 2 мин), делятся только через 2,5 ч.

Таким образом, облучение клеток лазерным излучением, как и ионизирующим, приводит к временной задержке их деления. При этом регистрируется зависимость данного эффекта от дозы: при малых дозах лазерного облучения задержка деления клеток отсутствует.

Все вышесказанное свидетельствует о некоторых общих закономерностях действия ионизирующих и лазерного излучений на клетки бактерий. Поэтому можно допустить, что в случае лазерного облучения клеток гибель их также связана с повреждениями молекулы ДНК. На данном уровне наших знаний невозможно однозначно объяснить, как это происходит, поскольку ни нуклеиновые кислоты, ни протеины в данной спектральной области не поглощают. Однако не исключено опосредованное действие лазерного света на молекулу ДНК через

первичные фоторецепторы. Первичными фоторецепторами при воздействии на клетку лазерного света с длиной волны 633 нм могут быть клеточные цитохромы, имеющие максимум поглощения при $\lambda=630$ нм (7).

Երևանский физический институт, ГКАЭ
Научно-исследовательский институт
физики конденсированных сред
Ерևանского государственного университета

Ս. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆ, Կ. Շ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ, Ե. Վ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Բակտերիաների բջիջների վրա իոնիզացնող և լազերային ճառագայթումների ազդեցության մի քանի ընդհանուր օրինաչափությունների մասին

Կատարված հետազոտություններն ի հայտ են բերում *E. coli* K-12 տարրեր վերականգնման գենոտիպով բակտերիաների վրա իոնացնող և լազերային ճառագայթման ազդեցությունների որոշ ընդհանուր օրինաչափություններ:

Ցույց է տրված, որ բակտերիաների հետազոտված շտամների զգայնությունը իոնիզացնող և լազերային ճառագայթների նկատմամբ նկարագրվում է նմանօրինակ ուղղված շարքով:

Պարզվել է, որ լազերային ճառագայթմամբ պայմանավորված էֆեկտը կախված է միայն տրված դոզայի չափից, անկախ հզորությունից (հզորությունների տարբերության մեկ կարգից փոքր հատվածում):

Գրանցված է լազերային ճառագայթման ենթարկված բջիջների կիսման մասնակափոր դադար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Т. П. Кару, Сообщ. н.-и. центра по технологическим лазерам АН СССР, № 8, Троицк, 1985. ² Н. В. Симонян, К. Ш. Воскарян, Ц. М. Авакян, *Studia biophysica*, с. 116, № 2 (1986). ³ К. Г. Амиртаев, Е. А. Красавин, С. Козубек и др., Сообщ. ОИЯИ Р19—83—904, Дубна, 1983. ⁴ С. Е. Бреслер, В. И. Вербенко, В. Л. Калинин, *Генетика*, т. 16, № 101 (1980). ⁵ В. Г. Петин, П. Полит, *Радиобиология*, т. 9, № 4 (1969). ⁶ Д. Е. Ли, *Действие радиации на живые клетки*, Атомиздат, М., 1963. ⁷ Т. П. Кару, Сообщ. научно-исследовательского центра по технологическим лазерам АН СССР, № 7, Троицк, 1985.

УДК 577.2.575

БИОХИМИЯ

К. А. Бакунц, М. Г. Геворкян, Г. Г. Голстян, Р. А. Захарян

Индукция интерферона дцРНК плаценты человека

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР К. Г. Карагезяном 6/VII 1987)

Круг известных синтетических и природных индукторов интерферона в настоящее время достаточно широк. Вместе с тем ни один из известных интерферогенов не отвечает тем критериям, которые предъявляются к этим веществам в практической медицине как к препаратам профилактического или лечебного действия. Наиболее перспективным на сегодня является получение и изучение индукторов интерферона на основе полирибонуклеотидов—двухцепочечных РНК, являющихся наиболее эффективными (1,2).

Целью настоящей работы явилось изучение в эксперименте на мышах способности к индукции интерферона дцРНК плаценты человека. Одновременно была изучена активность данной дцРНК в форме Ca^{2+} преципитата, устойчивого к нуклеазному расщеплению (3).

Препарат дцРНК был выделен из плаценты человека горячей фенольной экстракцией при 65°C (4). Плаценту гомогенизировали с помощью двухножевого гомогенизатора МР 324 в 0,14 М NaCl. Выделенные ядра суспендировали в 0,14 М NaCl и дважды депротенизировали фенолом рН 6,0 при 65°C 20 мин при интенсивном встряхивании. Один раз депротенизацию провели в присутствии хлороформа. РНК осадили спиртом, осадок растворили в 2XSSC и обработали РНК-азой (50 мкг/мл). Двухспиральную РНК отделяли на колонке с немодифицированной целлюлозой элюцией буфером TES (0,01 М NaCl, 0,001 М ЭДТА, 0,05 М трис HCl рН 6,9) (5). Фракцию, содержащую дцРНК, осадили спиртом и хранили при -15°C.

Использовали кальциевую форму препарата дцРНК, которую получали по методу, описанному ранее (6), и дцРНК в комплексе с ДЭАЭ декстраном в соотношении 1:5.

Интерферониндуцирующую активность препарата дцРНК изучали на мышах линии СВА, противовирусное действие—на белых беспородных.

Интерферон определяли в сыворотке крови и экстрактах мозговой ткани мышей через определенные сроки после внутрибрюшинного введения животным препарата в дозе 50 мкг/мышь.

Выделение интерферона из мозга проводили по известному методу (7). Титрование интерферона проводили на пластиковых микропанелях по подавлению цитопатического действия вируса энцефаломиокардита мышей (ЕМС) на клетках L-929 (8). За титр интерферона

принимали то максимальное разведение, которое защищало клетки от цитодеструктивного действия вируса на 50%.

Концентрацию циклических нуклеотидов определяли радиоиммунным методом (9), используя стандартный набор реактивов «Amersham».

Рядом авторов было показано, что при добавлении к клеткам в различных интерферониндуцирующих системах избыточных концентраций ионов Ca^{2+} интенсивность индукции интерферона двуспиральными полинуклеотидами существенно повышается. Возможными факторами стимуляции рассматриваются: стабилизация кальцием молекулы полинуклеотида при контакте с клеточной поверхностью, повышение синтеза и интенсивности трансляции мРНК интерферона, блокирование активности репрессора интерферонообразования (10, 11).

Ранее нами в экспериментах *in vitro* на модельных системах было показано, что дцРНК является мембранно-активным соединением, в основе действия которого лежат механизмы, связанные и с активацией трансмембранных токов экстрацеллюлярного Ca^{2+} , более выраженных при использовании индуктора в форме Ca^{2+} преципитата (12, 13). Целесообразность использования дцРНК в виде преципитата Ca^{2+} в экспериментах *in vivo* следует также и из большей устойчивости данного комплекса к нуклеазам, в том числе и специфическим нуклеазам, гидролизующим полинуклеотид (14).

Интерферониндуцирующая активность кальциевой формы дцРНК плаценты была исследована на мышах линии СВА. Динамика накопления интерферона в мозгу и сыворотке крови индуцированных животных показана на рис. 1, 2.

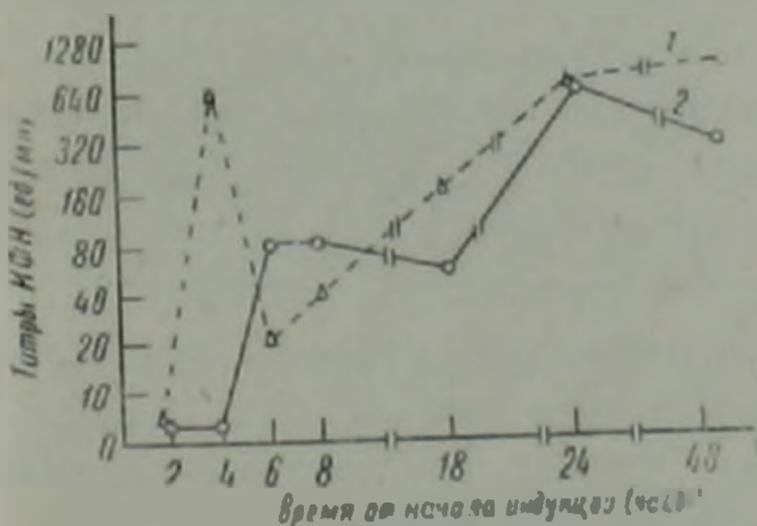


Рис. 1. Динамика накопления интерферона в мозгу (1) и сыворотке крови (2) мышей в ответ на введение Ca^{2+} дцРНК плаценты

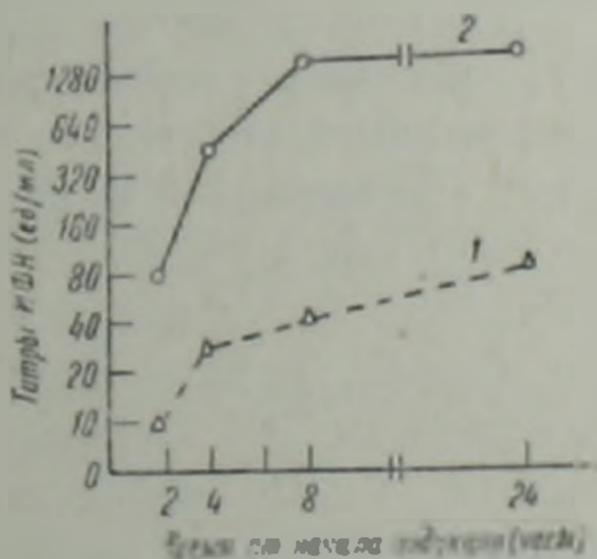


Рис. 2. Динамика накопления интерферона в мозгу (1) и сыворотке крови (2) мышей в ответ на введение плацентарной дцРНК с ДЭАЭ декстраном

Образование интерферона в мозгу мышей, которым вводилась Ca^{2+} дцРНК, протекало довольно интенсивно (рис. 1, кривая 1). Первый ранний пик интерферонообразования наблюдался через 4 ч после индукции и составлял 640 ед/мл. В период между 6—8 ч происходит заметный спад продукции интерферона до 20—40 ед/мл, по-видимому, обусловленный развитием состояния гипореактивности в клетках. Ин-

тервал между 8—24 ч характерен постепенным восстановлением синтеза интерферона, обусловленного, по всей вероятности, наличием активного индуктора, циркулирующего в тканях мозга, а также постепенным уменьшением уровня фактора гипореактивности (репрессора продукции интерферона).

Второго—позднего пика (640 ед/мл) продукция интерферона достигает через 24 ч после индукции и сохраняется на этом уровне до конца срока наблюдения—до 48 ч.

Параллельно у тех же животных была определена активность сывороточного интерферона (рис. 1, кривая 2). Согласно приведенным на рисунке данным, интерферон с активностью 80 ед/мл начинает секретироваться в кровь через 6 ч после введения мышам препарата. Продукция достигает максимума—640 ед/мл через 24 ч после индукции. При сопоставлении этих двух кривых видно, что ранний интерферон, продуцируемый мозговой тканью, практически не переходит через гематоэнцефалический барьер в кровь.

Исходя из стимулирующего эффекта ДЭАЭ декстрана на интерферониндуцирующую активность дцРНК (¹⁵), на другой группе животных была испытана дцРНК плаценты с полианионом. Из рис. 2 следует, что в крови имеет место активная продукция интерферона с титрами 320—640 ед/мл уже через 4 ч после индукции с максимумом накопления через 8 ч от начала эксперимента. Накопление же интерферона в мозгу протекает довольно слабо (40—80 ед/мл), по всей видимости, из-за того, что комплекс дцРНК-ДЭАЭ декстран с трудом проникает через гематоэнцефалический барьер. В данном случае не исключена возможность переноса малых количеств сывороточного интерферона в мозг с током крови.

Пролонгированное действие Ca^{2+} -дцРНК является, по-видимому, следствием стабильности молекулы к нуклеазному расщеплению и относительно медленного разрушения индуктора в организме животного, а повышенной вторичной индукции интерферона благоприятствует, скорее всего, возрастание в клетке уровня цАМФ, входа экстрацеллюлярного Ca^{2+} , индуцируемого преципитатом Ca^{2+} дцРНК (¹⁶).

Особый интерес представляют вопросы, касающиеся механизма действия дцРНК. Согласно полученным нами ранее данным (¹⁷), Ca^{2+} -дцРНК *in vitro* эффективно пересекает барьер плазматической мембраны, проникает в клетки и обнаруживается в ядрах.

В то же время препарат модифицирует мембранно-зависимые процессы, протекающие в клетке. В частности, контакт дцРНК с тканями мозга как *in vivo*, так и *in vitro* способствует увеличению уровня цАМФ в клетках в 2—3 раза (табл. 1). В соответствии с приведенными в таблице данными действие индуктора наиболее выражено проявляется через 30 и 90 мин после введения дцРНК *in vivo* и к 30, 45 мин в условиях *in vitro*.

Полученная кинетика свидетельствует, что повышение уровня цАМФ предшествует индукции интерферона в мозгу и в условиях *in vivo* носит двухфазный характер. Из литературных источников известно, что относительно высокий уровень цАМФ в клетке потенцирует противовирусное состояние клеток, вызываемое интерфероном (¹⁸). На

Действие Ca^{2+} дцРНК плаценты на уровень цАМФ

Длительность обработки клеток, мин	Условия проведения эксперимента	
	in vivo	in vitro
Контрольные клетки	1,95; 1,8	1,24; 1,32
30	3,42; 4,2	3,15; 4,65
45	Н. Д.	3,05; 4,05
60	2,26; 3,3	Н. Д.
90	3,75	1,32
120	2,05*	1,38

* Количество цАМФ, выраженное в нМ/г мозга.

рис. 3 изображена радиоэлектрофорграмма фосфорилированных по γ [^{32}P] АТФ в присутствии дцРНК белков плазматической мембраны клеток головного мозга. Полученный спектр молекулярных масс фосфорилированных белков в целом близок к полученному ранее для белков

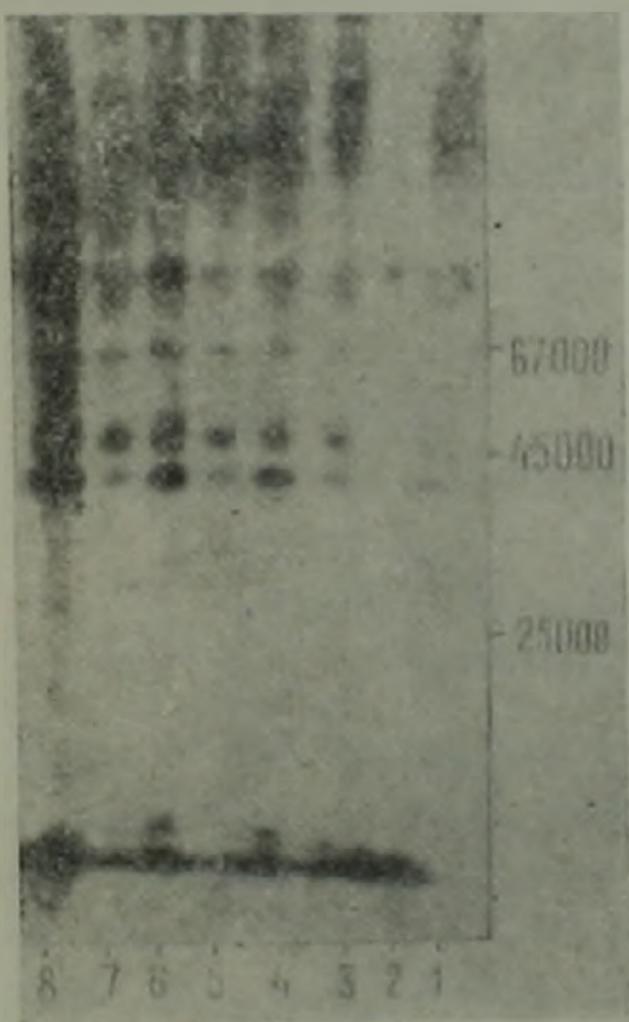


Рис. 3. Авторадиография электрофореграммы мембранных белков, фосфорилированных γ [^{32}P] АТФ в присутствии дцРНК, слева направо: 1,3,5,7 — фосфорилирование в отсутствие дцРНК (контроль); 2, 4, 6, 8 — фосфорилирование в присутствии дцРНК за 5, 10, 20, 30 мин соответственно.

фракции мозга по цАМФ-зависимому фосфорилированию. Представленные результаты в совокупности с полученными ранее данными (¹², ¹³) показывают, что индукции интерферона предшествуют изменения в метаболизме плазматической мембраны: увеличение цАМФ, стимуляция трансмембранных токов экстрацеллюлярного кальция, повышение уровня фосфорилирования белков плазматической мембраны (¹², ¹³), — являющиеся частью системы, обеспечивающей индукцию интерферона и противовирусную защиту клетки.

Противовирусное действие Ca^{2+} дцРНК плаценты изучали при экспериментальной вирусной инфекции, вызванной вирусом ЕМС. В табл. 2 приведены данные по защитному действию препарата на животных. Они получены на 10-й день после заражения животных летальной дозой ЕМС. Как следует из этих данных, при введении препарата за 4—24 ч до вируса выживаемость животных повышалась до 52—48%, степень защиты по сравнению с контролем составляла 34—

Противовирусное действие Ca²⁺ дцРНК на мышах (вирус ЭМК)

Индуктор	Время введения индуктора до заражения, час	Выживаемости, %	Степень защиты	P
—		18		
дцРНК	4	52	34	0.01
дцРНК	24	48	30	0.01
Ca ²⁺ дцРНК	24	72	50	0.01

30%. Индуктор же, вводимый в форме Ca²⁺ преципитата, оказался более эффективным, что выражалось в повышении выживаемости до 72% и степени защиты до 50%.

Исходя из представленных данных относительно интерферониндуцирующего и противовирусного действия Ca²⁺ дцРНК плаценты на экспериментальных животных, можно рекомендовать кальциевую форму дцРНК различного происхождения при профилактике вирусных заболеваний, в частности, поражающих нервную систему. Более того, в отличие от комплекса ДЭАЭ-декстран-дцРНК кальциевая форма полинуклеотида способна преодолевать гематоэнцефалический барьер.

Институт экспериментальной биологии Академии наук Армянской ССР

Կ. Ա. ԲԱԿՈՒՆՅ, Մ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Հ. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Ինտերֆերոնի ինդուկցիան մաքուր ընկերֆից անջատված Երկշղթանի ՌՆՔ-ով

Կիրառվել է մաքուր ընկերֆից մաքրված երկշղթանի ՌՆՔ-ի կալցիումական ձևի ֆուկցիոնալ ազդեցությունը, որ ինտերֆերոնի ինդուկցիայի հարցում այն ունի երկարացված ազդեցություն, որն ըստ երևույթին բացատրվում է նրա կայունությամբ: Երկշղթա ՌՆՔ-ի կալցիումական ձևը in vitro փորձի պայմաններում արդյունավետորեն անցնում է պլազմատիկ թաղանթի արգելքը և նպաստում է բջիջներում ցիկլիկ ԱՄՖ-ի քանակի զգալի բարձրացմանը՝ 2—3 անգամ: Երկշղթա ՌՆՔ-ի կալցիումական ձևը in vivo փորձի պայմաններում անցնում է հեմատոէնցեֆալիկ արգելքը և կենդանիների ուղեղում խթանում ինտերֆերոնի բավականին բարձր մակարդակ:

Ի մի բերելով ստացված արդյունքները՝ ինտերֆերոնի խթանումը, երկշղթա ՌՆՔ-ի հակավիրուսային ազդեցությունը փորձարկվող կենդանիների մոտ, նշված պատրաստուկը կարելի է առաջարկել վիրուսային հիվանդությունների, հատկապես նյարդային համակարգի հիվանդությունների, պրոֆիլակտիկայի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. Я. Фелдмане, Ю. Б. Умбрашко, А. Х. Куйкис и др., Вопросы вирусологии, № 4, 1984. ² А. Н. Фомина, С. С. Григорян, О. В. Зайцева и др., Антибиотики, № 1, 1980. ³ Р. А. Захарян, Тезисы докл. II респ. конф. посвященной проблемам физ.-хим. биологии, Ереван, 1986. ⁴ D. A. Kramerov, A. P. Ryskov, G. P. Georgiev, B. B. A., v. 475, p. 461 (1977). ⁵ L. Kronenberg, T. Humphreys, Biochemistry, v. 11, 40

р. 2020 (1972). ⁴ F. Graham, Vender, Ebb A., *Virology*, v. 55, p. 456 (1973). ⁷ Н. Н. Амитина, Б. А. Завизион, Э. Б. Тазулахова, Методические рекомендации по применению совр. методов исследований в общей и мед. вирусологии, М., 1984. ⁸ J. Campbell, T. Greenberg, M. Kochman, *Can. J. Microbiol.*, v. 21, p. 1247—1253 (1975). ⁹ A. L. Steiner, A. S. Paglara, J. R. Chase e. a., *J. Biol. Chem.*, v. 247, p. 1114—1120 (1972). ¹⁰ Т. Г. Орлова, А. Н. Бохонько, Т. В. Мамонтова и др., Вопросы вирусологии, № 3, 1985. ¹¹ A. Meager, H. E. Graves, T. R. Bradshaw, *FEBS Lett.*, v. 87, № 2, p. 303 (1978). ¹² С. Н. Айрапетян, Р. А. Захарян, Г. Е. Рычков и др., ДАН СССР, т. 284, № 6, с. 1499—1502 (1985). ¹³ Р. А. Захарян, Г. Е. Рычков, С. С. Дадалян и др., Нейрохимия, т. 5, № 3, с. 239 (1986). ¹⁴ J. Nordlung, S. Wolf, H. Levy, *PNAS and Med.*, v. 133, p. 439 (1970). ¹⁵ V. Trautman, *FEBS Lett.*, v. 98, № 1, p. 107—111 (1979). ¹⁶ Р. А. Захарян, Тезисы докл. респ. конф. „Макромолекулы и функционирование клетки“, Ереван, 1986. ¹⁷ К. А. Бакунц, Н. У. Наджарян, Н. Г. Гаспарян и др., Тезисы докл. 5-го съезда АО ВОГиС, 1987, 16—17 марта. ¹⁸ J. M. Weber, R. B. Stewart, *J. Gen. Virol.*, v. 24, p. 363—372 (1975).

УДК 577.174.5:577.153.211:612.35.576.314+577.156:541.459

БИОХИМИЯ

А. Л. Шалджян, С. Л. Мкртчян, Ш. А. Казарян
 член-корреспондент АН Армянской ССР В. Г. Мхитарян

Адреналинзависимая модификация ферментативного гидролиза фосфолипидов печени крыс.

(Представлено 2/IX 1987)

Одним из обязательных компонентов стресс-реакции, как известно, являются процессы перекисного окисления липидов (ПОЛ), роль и механизмы запуска которых при стрессе пока мало изучены. Согласно нашим представлениям (1) в развитии этих процессов чрезвычайно важную роль играют катехоламины, количество которых резко увеличивается при стрессе, а также метаболизм основных субстратов ПОЛ—фосфолипидов биомембран. Целью настоящей работы явилось изучение взаимосвязи этих основных механизмов инициации ПОЛ путем исследования активности ферментов, деацилирующих фосфолипиды—фосфолипаз А (ФЛ А) у животных на фоне предварительного введения адреналина.

Адреналин (Sigma, США) вводили 80 белым крысам-самцам (150—180 г) в дозе 0.1 мг/кг массы за 15 мин до декапитации. Контрольным животным вводили физиологический раствор. Субклеточные фракции печени (микросомы, митохондрии, плазматические мембраны) получали методом дифференциального центрифугирования в градиенте плотности сахарозы (2-4). Активность ФЛ А определяли по выходу свободных жирных кислот (СЖК) из эндогенных фосфолипидов, индуцированному ионами кальция после инкубации в соответствующих средах каждой указанной фракции в течение 1 ч при 37° С (5). В дальнейшем СЖК выделяли последовательным экстрагированием хлороформом, метанолом, гексаном, метилировали обработкой диазометаном и полученные метиловые эфиры анализировали на газожидкостном хроматографе «Хром-5» (УССР). Количественный анализ проводили с использованием маргаритовой кислоты (C₁₇O) в качестве внутреннего стандарта. Активность ФЛ А определяли по разнице между количеством СЖК в опытных и контрольных пробах, в которые хлороформ добавлялся до инкубации. ПОЛ определяли по накоплению малонового диальдегида (МДА) (6), белок—по Лоури. При статистической обработке был использован непараметрический критерий Уилкоксона—Манна—Уитни (7).

Несмотря на то, что избранный нами метод изучения фосфолипазной активности не позволял дифференцированно измерять активности ФЛ А₁ и А₂, нам кажется, что об этом можно косвенно судить по на-

коплению насыщенных и полиненасыщенных жирных кислот (ПНЖК), а также по индексу ненасыщенности (сумма произведений относительного содержания отдельных ПНЖК на количество двойных связей в их молекулах), так как известно, что ФЛ A_1 отщепляет в основном насыщенные кислоты, в то время как ФЛ A_2 — ненасыщенные. Судя по этим данным, у интактных крыс (таблица) во всех исследованных фракциях отмечается аналогичное общепринятому мнению распределение активностей ФЛ A_1 и A_2 , т. е. превалирование ФЛ A_1 в микросомах, ФЛ A_2 в митохондриях.

Действие адреналина на состав СЖК субклеточных фракций печени крыс

Жирные кислоты, мм/мг белка	Микросомы				Митохондрии				Плазматические мембраны			
	контроль		ИМО		контроль		ИМО		контроль		ИМО	
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14:0	1.1	1.8	0.55	1.9	1.05	1.5	0.49	1.4	2.35	1.35	0.3	0.7
15:0	0.3	0.85	0.4	1.1	0.6	1.1	0.2	0.9				
16:0	24.3	98.8	52.3	134.75	18.3	66.6	21.1	56.0	42.1	89.25	54.85	151.3
18:0	0.6	1.2	0.4	2.35	0.5	1.1	0.3	1.1	0.5	0.4	0.3	2.3
18:1	8.4	31.5	27.4	58.8	7.05	22.2	10.5	23.1	18.5	27.75	19.1	85.4
18:2	4.2	18.0	10.9	29.6	1.1	3.1	0.7	3.9	9.8	15.45	10.3	31.9
20:4	20.3	51.0	40.3	156.0		18.6	2.7			23.05	10.3	81.7
Сумма	57.2	206.1	132.3	384.5	29.3	111.4	31.0	98.3	73.0	157.25	101.12	352.5
И. Н.	165.4	132.9	159.1	193.1	34	89.6	64.8	79.7	52.5	54.8	91.9	133.8

Примечание: 0—пробы, инкубированные с хлороформом; 1—пробы, где хлороформ добавлялся после инкубации, И. Н.—индекс ненасыщенности; $x-p > 0.5$.

Введение животным адреналина изменяет как качественный состав СЖК, так и их количество (таблица). Это относится в основном к микросомам и плазматическим мембранам. Количество СЖК увеличивается уже в пробах, инкубированных с хлороформом, свидетельствуя, очевидно, об уже возросшей интенсивности липолиза в этих фракциях. Инкубация с Са²⁺ также резко повышает уровень СЖК и активность фосфолипаз по сравнению с интактными животными—на 70% в микросомах и на 198% в плазматических мембранах (рис. 1). Надо отметить, что судя по увеличению индекса ненасыщенности возрастание уровня СЖК в значительной степени обеспечивается ненасыщенными жирными кислотами, т. е. активируется ФЛ A_2 . В митохондриях активность фосфолипаз не только не увеличивается, но и снижается ниже контрольного уровня на 36,1% (рис. 1).

Сопоставляя эти данные с интенсивностью ПОЛ (рис. 2), можно видеть, что наиболее значительное активирование фосфолипаз в плазматических мембранах сопровождается падением уровня МДА, в то время как в микросомах, где наблюдалось не столь выраженное активирование, и в митохондриях, где имело место даже инактивирование, интенсивность ПОЛ практически не изменялась.

В последнее время появились работы (8, 9), где в экспериментах *in vitro* прямо подтверждено ингибирующее воздействие ФЛ A_2 на ПОЛ. Интерпретируются эти данные в плане большей доступности гидропероксицилов фосфолипидов биомембран для ФЛ A_2 и даль-

нейшего их выхода в цитоплазму для восстановления их глутатион-пероксидазой, т. е. активирование ФЛ A_2 необходимо в качестве одного из звеньев защитного механизма при увеличении уровня ПОЛ. Вероятно, неизменный (в микросомах) и даже уменьшенный (в плазм-

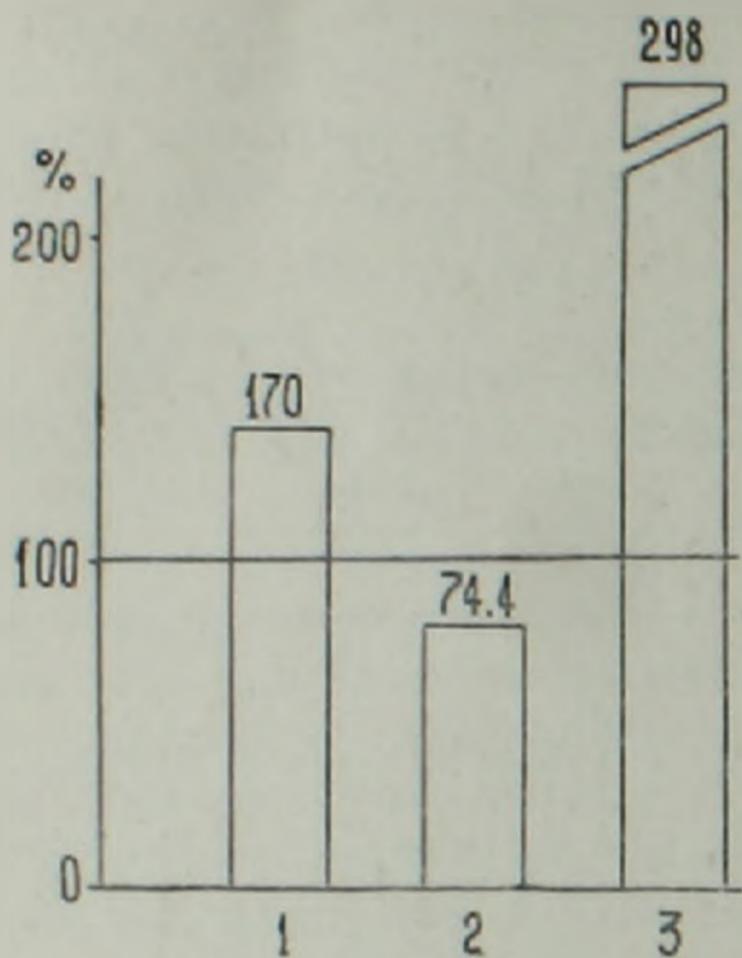


Рис. 1. Активность ФЛ А в микросомах (1), митохондриях (2), плазматических мембранах (3) печени крыс при действии адреналина (в процентах от контрольного уровня)

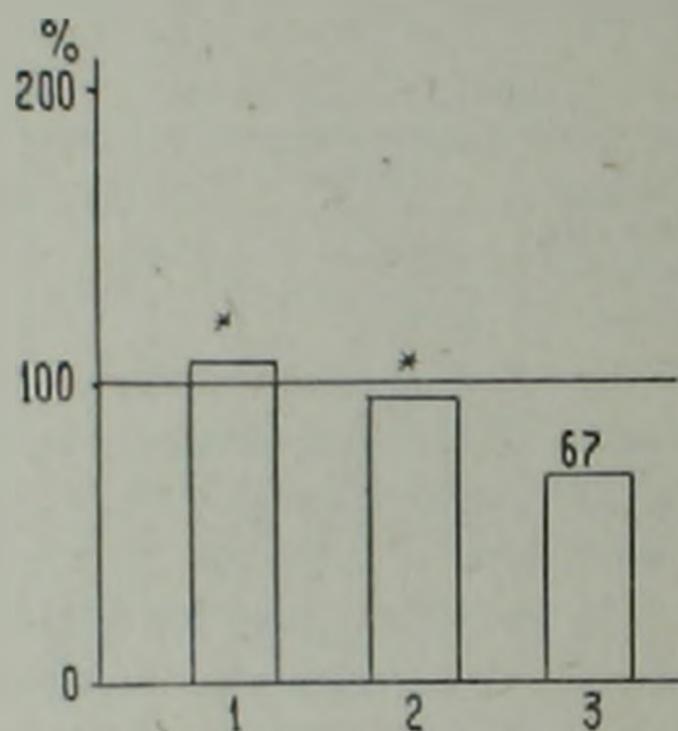


Рис. 2. Уровень МДА в микросомах (1) митохондриях (2), плазматических мембранах (3) печени крыс при действии адреналина (в процентах от контрольного уровня); *— $p > 0,5$

матических мембранах) уровни ПОЛ являются следствием соответствующего повышения активности ФЛ A_2 , наблюдаемого в наших экспериментах, тем более, что, как было показано выше, активируется именно ФЛ A_2 . В то же время наблюдается некоторое несоответствие этой гипотезе данных по ПОЛ и активности ФЛ А в митохондриях — уменьшение уровня ПОЛ не сопровождается активированием ФЛ А. Можно думать, что если в первых двух фракциях снижение ПОЛ адреналином было вызвано стимулированием липазной активности, то для митохондрий данная доза адреналина была чрезмерно высока, что и вызвало уменьшение ПОЛ, так как большие концентрации адреналина оказывают антиоксидантное действие (¹⁰).

Ереванский медицинский институт

Ա. Լ. ՇԱԼՋՅԱՆ, Ս. Լ. ՄԿՐՏԳՅԱՆ, Շ. Շ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ
բրաժկից անդամ Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ

Առնետների ֆոսֆոլիպիդների ֆերմենտատիվ հիդրոլիզի
ձևափոխումը կախված ադրենալինից

Հայտնի է, որ ստրեսս ունակցիայի անպայման բաղկացուցիչ մասերից մեկը հանդիսանում է գերօրօրիդացման պրոցեսը, որի դերը և սկզբնական մեխանիզմը դեռևս քիչ է ուսումնասիրված:

Համաձայն մեր տվյալների, այդ պրոցեսի պարզացման ընթացքում առավել կարևոր նշանակություն ունեն, ինչպես կատեխոլամինները, որոնց բանակը ստրեսի պայմաններում խիստ շատանում է, այնպես էլ լիպիդային գերօքսիդացման հիմնական սուբստրատ-բիոթաղանթների ֆոսֆատիդների փոխանակությունը:

Տվյալ հետազոտության նպատակն է եղել ուսումնասիրել այդ երկու հիմնական մեխանիզմների փոխադարձ կապը գերօքսիդացման պրոցեսի նախաձեռնության վրա, հետազոտելով ֆոսֆոլիպիդները դիպլոլացնող ֆերմենտի—ֆոսֆոլիպազա A ակտիվությունը նախօրոք ադրենալին ներարկված կենդանիների մոտ:

Հետազոտությունները կատարվել են առնետների վրա, որոնց նախօրոք ներարկվել է ներորովայնային 0,1 կգ/կգ բաշին ադրենալին: Անջատված լյարդից առանձնացված են փորձի համար միկրոսոմները, միտոքոնդրիաները և պլազմատիկ թաղանթը: Ֆոսֆոլիպազայի ակտիվությունը որոշվել է էնցիմիկ ֆոսֆոլիպիդներից անջատված ազատ հարպաթթուների քանակով, որը որոշվել է դադա-հեղուկային բրոմատոգրաֆիկ մեթոդով: Լիպիդային գերօքսիդացման մակարդակը որոշվել է մալոնդիալդեհիդի բանակի էուտակմամբ:

Ստացած տվյալները ցույց են տվել, որ միկրոսոմներում և պլազմատիկ թաղանթում ֆոսֆոլիպազայի ակտիվությունը բարձրանում է, իսկ միտոքոնդրիաներում նրա ակտիվությունը իջնում է:

Միաժամանակ որոշվել է լիպիդային գերօքսիդների քանակը, որը միկրոսոմներում և միտոքոնդրիաներում մնում է անփոփոխ, իսկ պլազմատիկ թաղանթում իջնում:

Ստացված տվյալներից կարելի է եզրակացնել, որ ադրենալինից ակտիվանում է առավել շարժվող ֆոսֆոլիպազա A-ի ակտիվությունը և միաժամանակ նկատվում փոխադարձ կապ լիպիդային գերօքսիդացման պրոցեսի միջև:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Л. Мкртчян, К. А. Алексанян, Э. А. Араратян, В. Г. Мхитарян, Журн. экпер. и клинич. медицины, т. 27, № 1 (1987).
- ² И. А. Карузина, А. И. Арчаков, в кн.: Современные методы в биохимии, Медицина, М., 1977.
- ³ W. C. Schneider, J. Biol. Chem., v. 176, p. 259 (1948).
- ⁴ А. В. Поспелова, в кн.: Современные методы в биохимии, Медицина, М., 1977.
- ⁵ V. C. Chern, G. Bruchner, V. E. Kinsella, Nutr. Res., v. 3, p. 571—581 (1983).
- ⁶ И. Д. Стальная, Т. Б. Гаришвили, в кн.: Современные методы в биохимии, Медицина, М., 1977.
- ⁷ Е. В. Гублер, Вычислительные методы анализа и распознавания патологических процессов, Медицина, Л., 1978.
- ⁸ A. Sevastian, S. F. Miakkasah, S. Nontestique, Arch. Biochem. Biophys., v. 223, № 2 (1983).
- ⁹ Hong Tan K., D. V. Meyer, J. Bellin e. a., Biochem J., v. 220, p. 243—252 (1984)
- ¹⁰ В. М. Гукасов, В. К. Федоров, Тр. Моск. 2-го мединститута, вып. 1, 1977.

УДК. 595.766.17

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Новый вид жесткокрылых-малашек с Алтая
(Coleoptera, Malachidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 6/VII 1987)

Trog'ocolops eversti Jabl'okoff-Khnzorian sp. nov.

Голотип: самка: РСФСР, Алтай, Чуйский тракт, км 490. около Курая, на высоте около 2000 м над ур. м., 23/VI 1966, в колл. Ин-та зоологии АН Армянской ССР. Рис. 1 и 2.

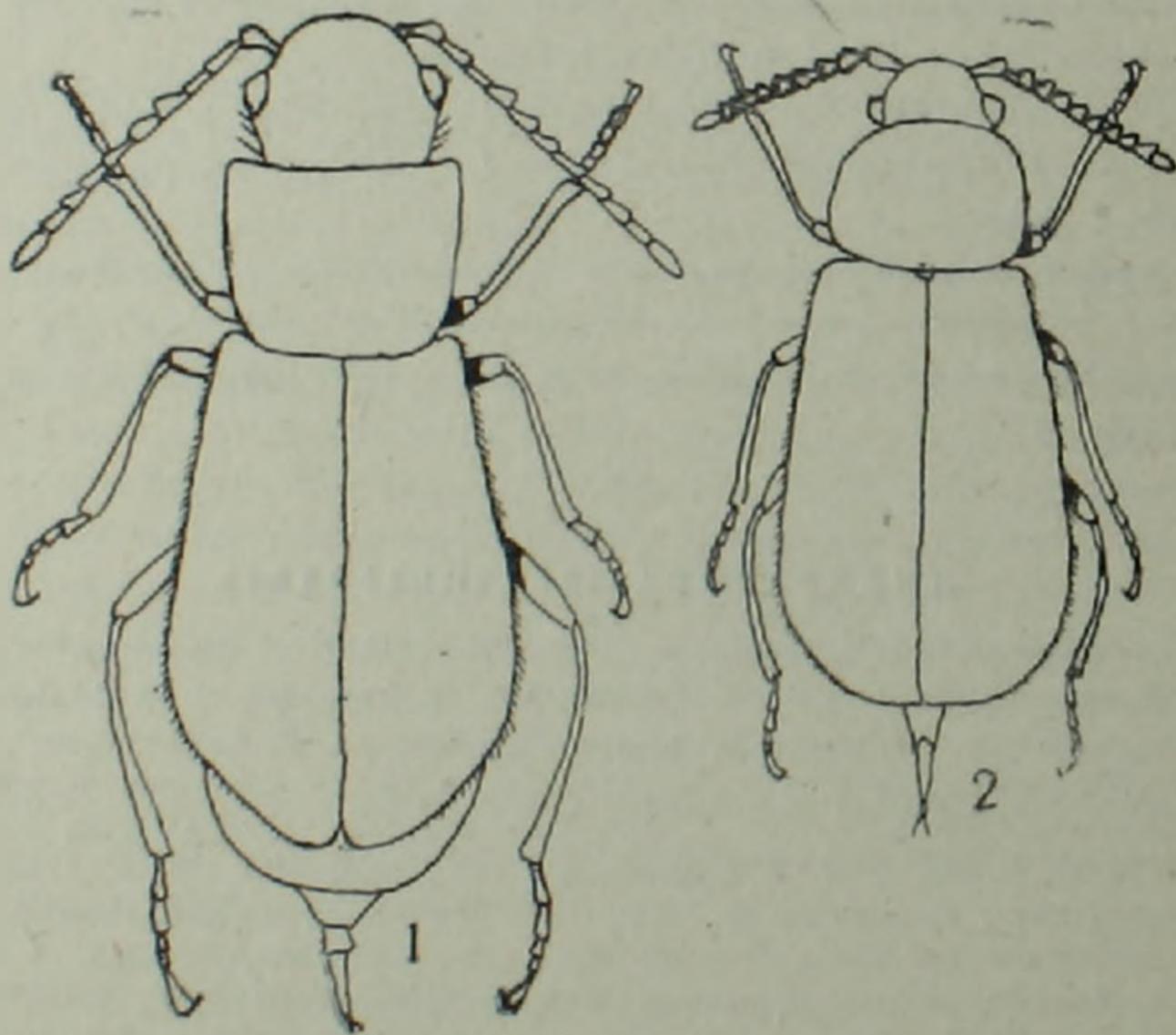


Рис. 1. *T. eversti* nov. Рис. 2. *T. obscuricornis* Motsch.

Тело и усики черно-бурые, матовые, волосистость светлая, надкрылья со слабым фиолетовым отливом. 3 первых членика усиков осветлены, верхняя губа желтая, бедра черно-бурые, голени и лапки слегка осветлены. Длина 6 мм.

Лоб уплощен. очень густо точечный на шагренированном, но блестящем фоне, покрыт короткими прилегающими волосками, длинные виски с пучком длинных торчащих волосков. Последний членик че-

люстных щупиков сильно треугольно расширен. Усики узко четковидные, кажутся, как обычно у этого рода, 10-члениковыми, так как 2-членик спрятан под 1-м. Все членики удлиненные, 1-й изогнут слабо, у вершины обрублен, 4-й слегка короче 3-го и 5-го, который расширен треугольно. Переднеспинка поперечная, почти 4-угольная, со слабо выступающими передними и закругленными задними углами, с выпрямленным боковым краем, в такой же скульптуре и волосистости, как лоб. Щиток маленький, прикрыт краем переднеспинки. Надкрылья расширены кзади, с закругленными, но выраженными плечами, без плечевых бугорков, их боковой край почти прямолинейный до косо закругленной вершины, с бахромой косо торчащих щетинок, пришовный угол закруглен, шов узко приподнят по всей длине, у вершины коротко зияющий. Покровы очень густо и нежно поперечноморщинистые, со следами точечности, в короткой приподнятой волосистости. Из-под надкрылий выступают пигидий и пропигидий.

Ноги типичного для этого рода строения, задние голени изогнуты дугообразно, прочие прямые, коготки с острым основным зубцом.

Этот вид является типичным представителем рода *Troglocolops* Wittmer, 1965, распространенного от Средней Азии до Камчатки, согласно последней ревизии (1) насчитывающего 12 видов; экология неизвестна, но имаго считается пыльцеедом, встречается обычно на горных лугах, летом на разных цветах. От нового вида большинство прочих отличается уже по окраске, но трое из них окрашены сходно. Некоторые виды описаны по самцам, лоб которых несет специфические рельефы, но усики у обоих полов одинаковые, что позволяет определять и самок. От сходно окрашенных видов новый отличается по следующим признакам:

- 1(2) Переднеспинка со срединной бороздкой. 3,8—4 мм. Монголия, Восточная Сибирь до Амура *T. sulcithorax* Pic, 1914
- 2(1) Переднеспинка без бороздки, но иногда с вдавлениями.
- 3(6) Виски голые и очень короткие. 3-й членик усиков сильно закругленно расширенный. Боковые края переднеспинки закругленные, с закругленными углами.
- 4(5) 3-й членик усиков расширен сильно, последующие расширены меньше, постепенно сужены до предпоследнего, 2-й членик заметен. 3,8 мм. Лена *T. niger* Wittmer, 1979
- 5(4) 3-й членик усиков лишь немного крупнее 4-го, последующие до 10-го сходные, короче длины (рис. 2). 4—4,5 мм. От Алтая до Камчатки *T. obscuricornis* Motsch., 1860
- 6(3) Виски длинные, с пучком волосков. Все членики усиков удлиненные, 3-й и 4-й узкие, почти цилиндрические, 5-й шире прочих. Боковой край переднеспинки выпрямлен, со слабо выступающими передними углами (рис. 1). 6 мм. Алтай ... *T. eversti* Klitz.sp. nov.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Կարծրարև-մալախիդների նոր տեսակ Ալթայից
(Coleoptera, Malachidae)

Հստ մեկ էգի Ալթայից նկարագրված է նոր տեսակ՝ *Troglocolops ever-*
si Khnz. sp. nov.: Այս տեսակը շատ մոտ է Ալթայում սովորական *T. obs-*
curlicornis Motsch. տեսակին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ A. M. V. Evers, Synopsis der Gattung *Apalochrus* Er. und der verwandten Gattungen der Welt. Musée r. Afrique Centrale, Tervuren, Sci. Zool., p. 253 (1987).

