

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

Том 99 № 2

1999

Խմբագրական խորհուրդ

Գ.Ա.ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու
 (պատ. քարտուղար), Է.Գ.ԱՅՐԻՎՅԱՆ, Հայաս-
 տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Գ.Ե.ԲԱՂՊԱՍԱ-
 ՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս,
 Է.Ս.ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադե-
 միկոս, Վ.Վ.ԴՈՎԼԱՏՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ
 ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ),
 Ա.Ա.ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմի-
 կոս, Վ.Գ.ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակա-
 դեմիկոս, Վ.Գ.ՂԱՐԱԳՅՈՋՅԱՆ, Հայաստանի
 ԳԱԱ ակադեմիկոս, Յու.Գ.ՇՈՒՔՈՒՐՅԱՆ, Հա-
 յաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ֆ.Տ.ՍԱՐԳՍՅԱՆ,
 Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ղ.Մ.ՍԵՂՈՒ-
 ՎՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագիր), Վ.Բ.ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, Հայաս-
 տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս

Редакционная коллегия

Գ.Ա.ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э.Г.АФРИКЯН, академик
 НАН Армении, Г.Е.БАГДАСАРЯН, ака-
 демик НАН Армении, Э.С.ГАБРИЭ-
 ЛЯН, академик НАН Армении,
 В.В.ДОВЛАТЯН, академик НАН Арме-
 нии (зам. отв. редактора), В.О.КАЗА-
 РЯН, академик НАН Армении,
 К.Г.КАРАГЕЗЯН, академик НАН
 Армении, Ф.Т.САРКИСЯН, академик
 НАН Армении, Д.М.СЕДРАКЯН, ака-
 демик НАН Армении (отв. редактор),
 А.А.ТАԼԱԼՅԱՆ, академик НАН Арме-
 нии, Ю.Г.ШУКУРЯН, академик НАН
 Армении, В.В.ФАНАРДЖЯН, академик
 НАН Армении

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս.Ա.Նիգիյան, Լ.Օ.Խաչոյան – Տրամաբանական ծրագրերի Δ -համարժեքության պրոբլեմի մասին..... 99

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

Ե.Ա.Հարությունյան, Ա.Ն.Հարությունյան, Ա.Ռ.Ղազարյան – Հուսալիության աստիճանից, գաղտնիության եվ շեղման մակարդակներից կախված ճյուղավորվող կապի համակարգի կողավորման արագությունների մասին..... 104

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Լ.Հ.Լեվոնյան – Սնամեջ գլանի ջերմապլաստիկական վիճակը ներքին ճնշման, ոլորման եվ առանցքային ուժի ազդեցության տակ..... 111

Գ.Չ.Գեվորգյան, Ռ.Մ.Կիրակոսյան – Փոփոխական հաստության օրթուրուպ սալերի ազատ տարանումներն ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ..... 116

Վ.Տ.Ավանյան – Ժամանակի տրված ինտերվալում K_{Δ}^{ω} -կայունության տեսության մասին..... 123

Կ.Ս.Թադևոսյան, Մ.Ա.Չաղոյան – Միացությունների ամրության ուսումնասիրման ինտեգրալային եղանակը..... 127

Կ.Ա.Կարապետյան – Չանգվածային տարրերի ընդլայնական կտրվածքի տարրեր գոյությունում թեթևբերոնի չգման և սեղմման սողքի չափերի համեմատության մասին.... 134

Ս.Հ.Սարգսյան – Առաջգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ սալի հարթ խնդրի ասիմպտոտիկական տեսությունը եվ վարիացիոն հավասարումը..... 138

ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Լ.Ա.Մովսիսյան – Բարակ սալերի առաջգականության մոմենտային տեսության մասին..... 148

Լ.Մ.Խալաթյան – Կոշտ ամրակցված երկայնական եզրերով անիզոտրոպ շերտի սեփական տարանումների համախականությունների մասին..... 153

Ա.Մ.Խաչատրյան – Շերտերի ոչ կոշտ կոնտակտի պայմաններում երկշերտ անիզոտրոպ սալի հավասարումների մասին..... 159

Գ.Չ.Հասանյան – Շարժվող ճարով ֆեռոմագնիսական հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը..... 165

ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա.Հ.Բարլոյան, Ս.Ա.Մեյրումյան – Էլեկտրաառաջգականության տեսության հարթ խնդիրը պինգակերամիկական սեպի համար..... 172

ՖԻԶԻԿԱ

Խ.Ռ.Գյուլումյան, Մ.Լ.Երիցյան, Ա.Գ.Սարգսյան, Կ.Հ.Բեգոյան – Գերհաղորդիչ պոլիմեր-խեցեղեն քաղաղրանյութերի սրացումը ազոտ պարունակող եվ հեղուկոցիկլիկ մոմենտների հիման վրա..... 178

Ն.Ա.Ղորխմազյան – Նեյտրինոյի զանգվածի մասին..... 182

ՀԻՂՐԱՎԼԻԿԱ

Վ.Գ. Սանոյան, Հ.Վ. Թոքմաջյան, Տ.Ա. Քալանթարյան, Ի.Գ. Քրիստոստոյան – Գլորվող ալիքների հաշվարկը փոփոխական թեքության արագահոսներում..... 186

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՔԻՄԻԱ

Ն.Օ.Գյուկչյան, Ա.Ա.Եղիազարյան, Ջ.Ա.Միքայելյան, Հ.Գ.Խաչատրյան – Պլաստիկ(IV) յոդիդային աջիդոկոնյալեթսի փոխազդեցության ուսումնասիրությունը հիմնային ներկանյութ ակրիդինային դեղինի հետ..... 189

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- С.А.Нигиян, Л.О.Хачоян* – К проблеме Δ -эквивалентности логических программ 99

ИНФОРМАТИКА

- Е.А.Арутюнян, А.Н.Арутюнян, А.Р.Казарян* – О скоростях кодирования в зависимости от надежности, мер искажения и секретности для разветвляющейся системы связи 104

МЕХАНИКА

- Л.А.Левонян* – Термопластическое состояние полого цилиндра под воздействием внутреннего давления, кручения и осевой силы 111

- Г.З.Геворкян, Р.М.Киракосян* – Свободные колебания ортотропных пластинок переменной толщины с учетом поперечных сдвигов 116

- В.Т.Аванян* – О K_{Δ}^{ω} -устойчивости на заданном интервале времени 123

- К.С.Тадевосян, М.А.Задоян* – Интегральный способ изучения прочности соединения 127

- К.А.Карапетян* – О сравнении мер ползучести легкого бетона при растяжении и сжатии в различных зонах поперечного сечения массивных элементов 134

- С.О.Саркисян* – Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости 138

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Л.А.Мовсисян* – К моментной теории упругости для тонких пластин 148

- Л.М.Халатян* – О частотах собственных колебаний анизотропной полосы с жестко закрепленными продольными краями 153

- А.М.Хачатрян* – Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежестком контакте слоев 159

- Д.Д.Асанян* – Напряженно-деформированное состояние ферромагнитной плоскости с движущейся трещиной 165

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

- А.А.Баблоян, С.А.Мелкумян* – Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина 172

ФИЗИКА

- Х.Р.Гюлумян, М.Л.Ерицян, А.Г.Саркисян, К.Г.Бегоян* – Сверхпроводящие полимер-керамические композиции, полученные на основе азотсодержащих и гетероциклических мономеров 178

- Н.А.Корхмазян* – О массе нейтрино 182

ГИДРАВЛИКА

- В.Г.Саноян, О.В.Токмаджян, Т.А.Калантарян, И.Г.Кристостурьян* – Расчет катящихся волн на быстротоках с переменным уклоном дна 186

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Н.О.Геокчян, А.А.Егизарян, Дж.А.Микаелян, А.Г.Хачатрян* – Изучение взаимодействия йодидного комплекса платины (IV) с основным красителем акридиновым желтым 189

CONTENTS

MATHEMATICS

S.A.Nigyan, L.O.Khatchoyan – On the Δ -equivalence problem for logic programs ... 99

INFORMATION THEORY

E.A.Haroutunian, A.N.Haroutyunyan, A.R.Kazarian – On coding rates of the branching communication system with respect to reliability, distortion and secrecy criteria 104

MECHANICS

L.H.Levonian – The thermoplastic state hollow cylinder under the influence of internal pressure, bending and axle force 111

G.Z.Gevorgyan, R.M.Kirakosyan – Free vibrations of orthotrope plates of variable thickness with the account of lateral shears 116

V.T.Avanyan – On the theory of K_{Δ}^{ω} -stability for a given interval of time summary .. 123

K.S.Tadevosyan, M.A.Zadoyan – Investigation of the joint strength by integral way ... 127

K.A.Karapetyan – On comparing measures of creep of light concrete under pulling and pressing in different zones of lateral section of massive elements 134

S.O.Sarkisyan – Asymptotic theory and variational equation of plane problem of elasticity of thin plate on momental theory of elasticity 138

THEORY OF ELASTICITY

L.G.Movsisian – About moment theory of elasticity for thin plates 148

L.M.Khalanian – About frequency of own vibrations of anisotropic strip with the fixed longitudinal edges 153

A.M.Khachatrian – On the equations of two-layer anisotropic plates with non rigid contact between layers 159

D.J.Hasanyan – Stress-strain state of ferromagnetic plane with moving crack. 165

THEORY OF ELECTROELASTICITY

A.A.Babloyan, S.A.Melkumyan – A plain problem of electroelasticity for piezoceramic wedge 172

PHYSICS

Kh.H.Gyulumyan, M.L.Erityan, A.G.Sarkisyan, K.G.Begoyan – Superconducting polymer-ceramic composites synthesized on the base of nitrogen-containing and heterocyclic monomers 178

N.A.Korkhmazian – About neutrino mass 182

HYDRAULICS

V.G.Sanoyan, O.V.Tokmajan, T.A.Kalantaryan, I.G.Kristosturyan – Calculation of the rolling waves of the chutes with variable slope of the bottom. 186

ANALITIC CHEMISTRY

N.O.Geokchian, A.A.Eghiazarian, J.A.Mickaelian, A.G.Khachatrian – Investigation of interaction between iodide complex of platinum (IV) and acrydine yellow basic dye. 189

Отпечатано на копи-принтере Rex Rotary CP1280 фирмы RICOH

Заказ №13. Тираж 200. Сдано в набор 14.04.1999. Подписано к печати 6.07.1999.

Печ. лист 6,25. Бумага КУМ-ultra. Цена договорная.

Издательство "Гитутюн" НАН РА Компьютерная редакционно-издательская служба
375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Адр.ред. 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24-г, IIIэт., к.13, т.56-80-67

УДК 519.68:510

С. А. Нигиян, Л. О. Хачоян

К проблеме Δ -эквивалентности логических программ

(Представлено академиком НАН Армении Н.У.Аракелянном 4/IX 1998)

В ⁽¹⁾ введено отношение Δ -эквивалентности логических программ, согласно которому две логические программы будут Δ -эквивалентными, если множество запросов, являющихся логическим следствием одной из программ, совпадает с множеством запросов, являющихся логическим следствием другой программы. В данной работе под логической программой мы будем понимать хорновскую программу, т.е. программу, предложениями которой являются хорновские дизъюнкты (см.⁽²⁾). Из ⁽¹⁾ следует неразрешимость проблемы Δ -эквивалентности хорновских программ. В предлагаемой работе разрабатывается методика так называемых шаблонов наименьших моделей логических программ, которая позволяет устанавливать разрешимость отношения Δ -эквивалентности в некоторых классах логических программ, в частности в тех классах программ, для которых такие шаблоны конечны.

1. *Используемые определения и результаты.* Зафиксируем три непересекающихся счетных множества F , P и X . F – множество функциональных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ F содержит счетное число символов местности n . X – множество (предметных) переменных. Из элементов множеств F и X строятся термы. Через H обозначим множество всех термов, не использующих переменных. P – множество предикатных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ P содержит счетное число символов местности n .

Атом определяется традиционным образом. Атом, не использующий переменных, назовем основным. Традиционным образом определяется формула логики предикатов первого порядка, использующая логические операции \neg , $\&$, \vee , \supset и кванторы \exists , \forall .

Напомним определения подстановки, унификатора, наиболее общего унификатора, взятые из ⁽²⁾. Подстановка σ есть множество вида: $\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$, где t_i – терм, x_i – переменная, $t_i \neq x_i, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$,

$i, j = 1, \dots, n, n \geq 0$. Естественным образом вводится композиция подстановок, которая является ассоциативной операцией.

Пусть A — атом. Через $A\sigma$ обозначим атом, полученный из A путем одновременной подстановки термов t_1, \dots, t_n вместо переменных x_1, \dots, x_n соответственно. Напомним, что для любых подстановок σ, δ и атома A имеем: $(A\sigma)\delta = A(\sigma\delta)$.

Подстановку δ назовем унификатором атомов A_1 и A_2 , если $A_1\delta = A_2\delta$. Унификатор σ назовем наиболее общим унификатором атомов A_1 и A_2 ($\sigma = \text{mgu}(A_1, A_2)$), если для любого их унификатора δ существует подстановка γ такая, что $\sigma\gamma = \delta$.

Опишем рассматриваемые нами интерпретации. Предметным множеством рассматриваемых интерпретаций будет множество H . Функциональные символы интерпретируются следующим образом: каждому 0-местному символу из \mathcal{F} сопоставляется он сам, каждому n -местному ($n > 0$) символу $f \in \mathcal{F}$ сопоставляется отображение $H^n \rightarrow H$, которое n -ке $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$, где $t_i \in H, i = 1, \dots, n$, ставит в соответствие терм $f(t_1, \dots, t_n)$. Каждому 0-местному символу из \mathcal{P} сопоставляется один из элементов множества $\{\text{true}, \text{false}\}$, а каждому n -местному ($n > 0$) символу из \mathcal{P} сопоставляется некоторое отображение $H^n \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$. Обозначим описанное множество интерпретаций через Int . Заметим, что интерпретации из Int могут отличаться одна от другой лишь отображениями, сопоставляемыми символам множества \mathcal{P} . Поэтому каждую интерпретацию $I \in \text{Int}$ можно отождествлять с множеством тех основных атомов, значения которых на I есть true . Легко видеть, что множество Int будет полной решеткой, если в качестве частичного порядка на Int взять отношение включения.

Логическая программа P (далее просто программа) есть множество предложений $\{S_1, \dots, S_u\}$, $u > 0$. Предложение S_i является либо фактом A_i , либо правилом $A_i : -B_{i1}, \dots, B_{im_i}$ представляющим собой хорновский дизъюнкт $A_i \vee -B_{i1} \vee \dots \vee B_{im_i}$, где $A_i, B_{i1}, \dots, B_{im_i}$ — атомы $m_i > 0, i = 1, \dots, u$. Пусть $\{x_1, \dots, x_v\}$ есть множество всех переменных, использованных программой P , $v \geq 0$. Программе P сопоставим формулу $F(P)$:

$$\forall x_1 \dots \forall x_v (S_1 \& \dots \& S_u).$$

Всякую модель формулы $F(P)$ условимся называть моделью программы P . Известно (см. (2)) что всякая программа P имеет наименьшую модель I_P . Каждой программе P сопоставляется отображение $\Psi_P : \text{Int} \rightarrow \text{Int}$ следующим образом. Пусть $I \in \text{Int}$ и A_0 — основной атом, тогда: $A_0 \in \Psi_P(I) \Leftrightarrow$ су-

существуют предложение $A: -B_1, \dots, B_m \in P$ ($m \geq 0$) и подстановка θ такие, что $A\theta = A_0$ и $\{B_1\theta, \dots, B_m\theta\} \subset I$.

Для всякой программы P (см. (2)) имеем:

$$I_P = \sup\{\Psi_P^k(\emptyset) \mid k \geq 0\}, \text{ где } \Psi_P^0(\emptyset) = \emptyset, \Psi_P^{k+1}(\emptyset) = \Psi_P(\Psi_P^k(\emptyset)), k \geq 0.$$

Введем понятие запроса. Запрос Q имеет вид: $?-C_1, \dots, C_k$ где C_i — атом, $i = 1, \dots, k$, $k > 0$. Пусть $\{y_1, \dots, y_r\}$ есть множество всех переменных, использованных запросом Q , $r \geq 0$. Запросу Q сопоставим формулу $F(Q)$:

$$\exists y_1 \dots \exists y_r (C_1 \& \dots \& C_k).$$

Будем говорить, что запрос Q логически следует из программы P , если формула $F(P) \supset F(Q)$ принимает значение true на любой интерпретации из Int.

2. Δ -эквивалентность логических программ. Пусть P программа. Через Yes(P) обозначим множество всех запросов, которые логически следуют из программы P . Программы P_1 и P_2 назовем Δ -эквивалентными (обозначим $P_1 \sim P_2$), если $\text{Yes}(P_1) = \text{Yes}(P_2)$. Из (1) следует неразрешимость проблемы Δ -эквивалентности логических программ, более того ни сама эта проблема, ни ее дополнение не являются частично разрешимыми.

Утверждение 1. Пусть P_1 и P_2 — программы, тогда:

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow I_{P_1} = I_{P_2}$$

Будем говорить, что атом A предшествует атому B (и обозначать $A < B$), если существует такая подстановка σ , что $A\sigma = B$. Легко видеть, что отношение предшествования является рефлексивным и транзитивным.

Будем говорить, что атом A конгруэнтен атому B (и обозначать $A \equiv B$), если $A < B$ и $B < A$. Легко видеть, что отношение конгруэнтности является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Можно показать, что отношения предшествования и конгруэнтности атомов являются разрешимыми.

Будем говорить, что множество атомов A_1 конгруэнтно множеству атомов A_2 (и обозначать $A_1 \equiv A_2$), если существует такое взаимнооднозначное отображение φ множества A_1 на множество A_2 , что $A \equiv \varphi(A)$ для любого атома $A \in A_1$.

Пусть A — некоторое множество атомов. Множество атомов B назовем сверткой множества A если:

- 1) $B \subset A$;
- 2) $A \in B$, $B \in B$, и $A < B \Rightarrow A = B$
- 3) $A \in A \Rightarrow$ существует такой атом $B \in B$, что $B < A$.

Легко видеть, что любые две свертки множества \mathcal{A} конгруэнтны. Условимся свертку множества \mathcal{A} обозначать \mathcal{A}^* . Очевидно, что $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1^* \equiv \mathcal{A}_2^*$, где $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — множества атомов.

Пусть P — программа. Для каждого $i \geq 1$ введем понятие i -подшаблона наименьшей модели программы P (кратко i -подшаблон I_P). $K_P^1 = \text{Facts}_P^*$ — i -подшаблон I_P , где Facts_P множество фактов программы P . Пусть $i \geq 1$ и K_P^i — i -подшаблон I_P . Определим $\tilde{K}_P^{i+1} : A \in \tilde{K}_P^{i+1} \Leftrightarrow$ существуют такие правило $S \in P$, имеющее вид $B : -B_1, \dots, B_m$, и последовательность атомов A_1, \dots, A_m не имеющих общих переменных как между собой, так и с правилом S , что: 1) для каждого $j = 1, \dots, m$ существует атом $A'_j \in K_P^i$ такой, что $A_j \equiv A'_j$; 2) существуют подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ такие, что $\sigma_1 = \text{mgu}(A_1, B_1)$, $\sigma_2 = \text{mgu}(A_2, B_2 \sigma_1), \dots, \sigma_m = \text{mgu}(A_m, B_m \sigma_1 \dots \sigma_{m-1})$ и $A = B \sigma_1 \dots \sigma_m$.

$$K_P^{i+1} = (K_P^i \cup \tilde{K}_P^{i+1})^*.$$

Легко видеть, что для всякого $i \geq 1$ любые два i -подшаблона I_P конгруэнтны.

Утверждение 2. Для всяких программы P , основного атома A_0 и $i \geq 1$ имеем: $A_0 \in \Psi_P^i(\emptyset) \Leftrightarrow$ существует такой атом $A \in K_P^i$, что $A < A_0$.

Введем понятие шаблона наименьшей модели программы P (кратко шаблона I_P). Определим сначала множество атомов $\tilde{K}_P : A \in \tilde{K}_P \Leftrightarrow$ существует такое $i_0 \geq 1$, что для каждого $i \geq i_0$ существует такой атом $A_i \in K_P^i$, что $A \equiv A_i$. Шаблоном I_P назовем множество $K_P = \tilde{K}_P^*$. Легко видеть, что любые два шаблона I_P конгруэнтны.

Утверждение 3. Для всяких программы P , атома A и $i \geq 1$ имеем: $A \in K_P^i \Rightarrow$ существует такой атом $B \in K_P$, что $B < A$.

Из утверждения 2 и утверждения 3 следует утверждение 4.

Утверждение 4. Для всяких программы P и основного атома A_0 имеем: $A_0 \in I_P \Leftrightarrow$ существует такой атом $A \in K_P$, что $A < A_0$.

Используя утверждение 4, доказываем утверждение 5.

Утверждение 5. Пусть P_1, P_2 — программы, тогда:

$$I_{P_1} = I_{P_2} \Leftrightarrow K_{P_1} \equiv K_{P_2}.$$

Из утверждения 1 и утверждения 5 следует теорема 1.

Теорема 1. Пусть P_1, P_2 — программы, тогда:

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow K_{P_1} \equiv K_{P_2}$$

Из теоремы 1 и разрешимости отношений предшествования и конгруэнтности атомов следует теорема 2.

Теорема 2. Если для некоторого класса программ $Prog$ имеем: $P \in Prog \Rightarrow K_P$ – конечно, то проблема Δ -эквивалентности в классе $Prog$ разрешима.

Из теоремы 2 следует теорема 3.

Теорема 3. Проблема Δ -эквивалентности разрешима для программ, не использующих функциональных символов местности >0 .

Отметим, что в случае использования функциональных символов местности >0 проблема Δ -эквивалентности логических программ не является разрешимой (см. (1)).

Ереванский государственный университета

Ս. Ա ՆԻԳԻՅԱՆ, Լ. Յ. ԽԱՉՈՅԱՆ

Տրամաբանական ծրագրերի Δ -համարժեքության պրոբլեմի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է տրամաբանական ծրագրերի Δ -համարժեքության պրոբլեմը: Երկու տրամաբանական ծրագրեր կոչվում են Δ -համարժեք, եթե այդ ծրագրերից մեկի տրամաբանական հետևանքը հանդիսացող հարցումների բազմությունը համընկնում է մյուս ծրագրի տրամաբանական հետևանքը հանդիսացող հարցումների բազմության հետ:

Այս աշխատանքում տրամաբանական ծրագիր ասելով հասկանում ենք Հոռնի ծրագիրը, այսինքն այն ծրագիրը, որի նախադասությունները Հոռնի դիյունկտներն են: Հայտնի է, որ Հոռնի ծրագրերի Δ -համարժեքության պրոբլեմը լուծելու չէ:

Ներկա աշխատանքում մշակվում է տրամաբանական ծրագրերի փոքրագույն մոդելների, այսպես կոչված նմոշների մեթոդիկան, որը թույլ է տալիս հաստատել Δ -համարժեքության հարաբերության լուծելիությունը տրամաբանական ծրագրերի որոշ դասերում, մասնավորապես, ծրագրերի այնպիսի դասերում, որոնց համար այժպիսի նմուշները վերջավոր են:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С.А.Нигяян, Л.О.Хачоян, Программирование, №6, с.17-28, 1997. ² J.W.Lloyd, Foundations of logic programming, Springer-Verlag, 1984.

УДК 621.394.74-503.5

Е. А. Арутюнян, А. Н. Арутюнян, А. Р. Казарян

О скоростях кодирования в зависимости от надежности, мер искажения и секретности для разветвляющейся системы связи

(Представлено академиком НАН Армении Г.Г.Хачатрянном 31/VII 1998)

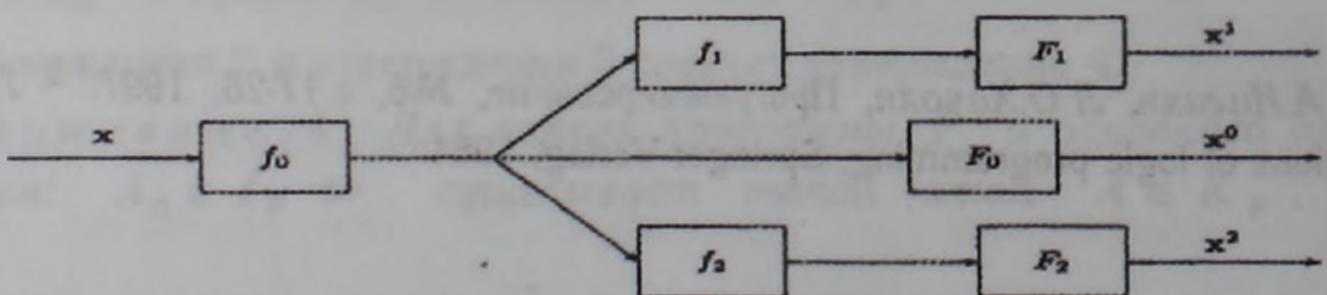
Рассмотрим задачу общего кодирования сообщений K коррелированных источников для передачи по трем направлениям с разными критериями точности, секретности и надежности воспроизведения, предъявляемыми адресатами (см. рисунок). Сообщения коррелированных источников $\{X_k\}$, $k = \overline{1, K}$, кодируются общим кодером и двумя вторичными кодерами. На выходах декодеров требуется:

восстановить сообщения части источников с точностью до заданных уровней искажения,

сохранить в секрете сообщения другой части источников (у декодеров, соединенных с вторичными кодерами); для этого необходимо обеспечить достаточно большие искажения,

игнорировать информацию остальных источников.

Требуется, чтобы для заданной надежности $E > 0$ вероятности ошибки наилучшего блочного кода длины N у каждого из декодеров не превышали 2^{-NE} .



Одноступенчатая разветвляющаяся система связи.

Задача является обобщением ранее решенной Ямамото в ⁽¹⁾ задачи для "двунаправленной разветвляющейся" системы связи (bidirectional branching communication system).

Пусть $X_n, n = \overline{1, N}$ – последовательность N дискретных, независимых, одинаково распределенных случайных K -компонентных векторов $X_n = (X_{1n}, \dots, X_{Kn})$. Случайная величина X_{kn} есть сообщение k -го источника в n -ый момент, $k = \overline{1, K}, n = \overline{1, N}$, принимающая значения из конечного множества $\mathcal{X}_k, k = \overline{1, K}$, соответственно. Множество \mathcal{X}_k называется алфавитом k -го источника, $k = \overline{1, K}$. Обозначим для краткости

$$\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_K = \mathcal{X}, \quad (\mathcal{X}_1)^N \times \dots \times (\mathcal{X}_K)^N = (\mathcal{X})^N.$$

Обозначим строчными буквами значения соответствующих случайных векторов и случайных величин, например,

$$(x_{1n}, \dots, x_{Kn}) = x_n, \quad (x_{k1}, \dots, x_{kN}) = \mathbf{x}_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K) = \mathbf{x}.$$

Множество номеров источников $\{1, \dots, K\}$ для каждого получателя $m = 0, 1, 2$ разделяется на три группы:

$$\{1, \dots, K\} = \mathcal{G}_1^m \cup \mathcal{G}_2^m \cup \mathcal{G}_3^m, \quad \mathcal{G}_2^0 = \emptyset, \quad m = 0, 1, 2.$$

Обозначим через X_{kn}^m случайную величину, представляющую воспроизведение n -го сообщения k -го источника у m -го получателя и принимающую значения из конечного множества \mathcal{X}_k^m , соответственно, $n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}, m = 0, 1, 2$. Множества \mathcal{X}_k^m , возможно отличные от \mathcal{X}_k , называются алфавитами воспроизведения. Пусть

$$\mathcal{X}_1^m \times \dots \times \mathcal{X}_K^m = \mathcal{X}^m, \quad (\mathcal{X}_1^m)^N \times \dots \times (\mathcal{X}_K^m)^N = (\mathcal{X}^m)^N, \quad m = 0, 1, 2.$$

Для получаемых на выходах сообщений используем соответствующие обозначения, например

$$(x_{1n}^m, \dots, x_{Kn}^m) = x_n^m, \quad (x_{k1}^m, \dots, x_{kN}^m) = \mathbf{x}_k^m, \quad (\mathbf{x}_1^m, \dots, \mathbf{x}_K^m) = \mathbf{x}^m, \quad m = 0, 1, 2.$$

Пусть $P^* = \{P^*(x), x \in \mathcal{X}\}$ есть распределение вероятностей векторов сообщений источников.

Учитывая, что набор (X_1, \dots, X_N) является последовательностью независимых, одинаково распределенных случайных векторов, в дальнейшем мы можем опускать индекс n .

Так как мы рассматриваем источник без памяти, то

$$P^{*N}(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^N P^*(x_n).$$

Пусть заданы меры искажения

$$d_k^m : \mathcal{X}_k \times \mathcal{X}_k^m \rightarrow [0, \infty), \quad k = \overline{1, K}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Если множество \mathcal{X}_k совпадает с множеством $\mathcal{X}_k^m, m = 0, 1, 2$, полагаем, что

$$d_k^m(x_k, x_k) = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Меры искажения для N -векторов определяются как средние искажений компонент

$$d_k^m(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^m) = N^{-1} \sum_{n=1}^N d_k^m(x_{kn}, x_{kn}^m),$$

где $\mathbf{x}_k \in (\mathcal{X}_k)^N$, $\mathbf{x}_k^m \in (\mathcal{X}_k^m)^N$, $k = \overline{1, K}$, $m = 0, 1, 2$.

Для рассматриваемой системы кодом $(f, F) = (f_0, f_1, f_2, F_0, F_1, F_2)$ называется семейство шести отображений:

трех кодеров:

$$\begin{aligned} f_0 &: (\mathcal{X}) \rightarrow \{1, \dots, M_0(N)\}, \\ f_1 &: \{1, \dots, M_0(N)\} \rightarrow \{1, \dots, M_1(N)\}, \\ f_2 &: \{1, \dots, M_0(N)\} \rightarrow \{1, \dots, M_2(N)\} \end{aligned}$$

и трех декодеров:

$$F_m : \{1, \dots, M_m(N)\} \rightarrow (\mathcal{X}^m)^N, \quad m = 0, 1, 2.$$

Функции системы связи следующие:

1) у m -го получателя должны восстанавливаться сообщения источников $\{X_k\}$ в пределах заданных уровней искажения Δ_k^m , $k \in \mathcal{G}_1^m$, $m = 0, 1, 2$;

2) сообщения источников $\{X_k\}$, $k \in \mathcal{G}_2^m$ у получателей $m = 1, 2$ должны держаться в секрете от m -го получателя; для этого нужно обеспечить, чтоб искажения между переданным и полученным сообщениями k -го источника на выходе m -го декодера были не меньше заданных уровней Δ_k^m , $k \in \mathcal{G}_2^m$, $m = 1, 2$. Этот способ обеспечения секретности ранее был рассмотрен Ямамото (5) для случая шенноновской системы шифрования (Shannon cipher system) с широкопередаточным каналом;

3) сообщения источников из \mathcal{G}_3^m получателем $m = 0, 1, 2$ игнорируются.

Рассмотрим следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{\mathbf{x} : F_0(f_0(\mathbf{x})) = \mathbf{x}^0, d_k^0(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^0) \leq \Delta_k^0, k \in \mathcal{G}_1^0\}, \\ \mathcal{A}_m &= \{\mathbf{x} : F_m(f_m(f_0(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}^m, d_k^m(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^m) \leq \Delta_k^m, k \in \mathcal{G}_1^m, \\ & \quad d_k^m(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^m) \geq \Delta_k^m, k \in \mathcal{G}_2^m\}, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Для простоты обозначим: $(\Delta_1^m, \dots, \Delta_K^m) = \Delta^m$, $(\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2) = \Delta$. Вероятности ошибки кода (f, F) на выходе m -го декодера определяются следующим образом:

$$e_m(f, F, \Delta^m) = 1 - P^{*N}(\mathcal{A}_m), \quad m = 0, 1, 2.$$

Тройка неотрицательных чисел (R_0, R_1, R_2) называется (E, Δ) -достижимой для $E > 0$, $\Delta_k^m \geq 0$, $k = \overline{1, K}$, $m = 0, 1, 2$, если для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно

больших N существует код (f, F) , для которого (мы используем двоичные логарифмическую и показательную функции)

$$\begin{aligned} N^{-1} \log M_m(N) &\leq R_m + \varepsilon, \\ e_m(f, F, \Delta^m) &\leq \exp(-NE), \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим область $\mathcal{R}(E, \Delta)$ всех (E, Δ) -достижимых троек скоростей (rates-reliability-distortions and partial secrecy region). Заметим, что при $E \rightarrow 0$ область $\mathcal{R}(E, \Delta)$ становится областью $\mathcal{R}(\Delta)$ (rates-distortions and partial secrecy region). В случае, когда в системе два коррелированных источника $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$, декодер F_0 отсутствует, а декодер F_m восстанавливает только сообщения источника $\{X_m\}$, $m = 1, 2$, в (1) Ямамото изучена область $\mathcal{R}(\Delta)$. Если $\mathcal{G}_2^m \equiv \mathcal{G}_3^m \equiv \emptyset$, система состоит из одного источника $\{X\}$ и $R_0 = R_1 = R_2$, то скорость как функция искажения (rates-distortions function) $\mathcal{R}(\Delta)$ изучена Эль Гамалем и Ковером в (2) для системы робастного описания источника.

Пусть $P = \{P(x), x \in \mathcal{X}\}$ некоторое распределение вероятностей на \mathcal{X} ,

$$Q = \{Q(x^0, x^1, x^2 | x), x \in \mathcal{X}, x^m \in \mathcal{X}^m, m = 0, 1, 2\}$$

– условное распределение вероятностей на декартовом произведении $\mathcal{X}^0 \times \mathcal{X}^1 \times \mathcal{X}^2$ для данного x , и

$$P_k = \{P(x_k)\}, \quad k = \overline{1, K},$$

где

$$P(x_k) = \sum_{x \in \mathcal{X}, s=1, K, s \neq k} P(x).$$

Введем также следующие обозначения:

$$Q^m = \{Q(x^m | x)\}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где

$$Q(x^m | x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}^m, s=0, 1, 2, s \neq m} Q(x^0, x^1, x^2 | x),$$

и

$$Q_k^m = \{Q(x_k^m | x_k)\}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где

$$Q(x_k^m | x_k) = \sum_{x \in \mathcal{X}, x_s^m \in \mathcal{X}_s^m, s=1, K, s \neq k} Q(x^m | x).$$

Рассмотрим множество

$$\alpha(E) = \{P : D(P \| P^*) \leq E\}.$$

Пусть функция $\Phi(P) = Q_P$ в соответствие каждому распределению вероятностей P ставит такое условное распределение Q_P , что для заданного Δ при $P \in \alpha(E)$ выполняются следующие три условия:

$$E_{P,Q} d_k^m(X_k, X_k^m) = \sum_{x_k, x_k^m} P(x_k) Q_P(x_k^m | x_k) d_k^m(x_k, x_k^m) \leq \Delta_k^m, \quad k \in \mathcal{G}_1^m, \quad m = 0, 1, 2, \quad (2)$$

$$E_{P,Q} d_k^m(X_k, X_k^m) \geq \Delta_k^m, \quad k \in \mathcal{G}_2^m, \quad m = 1, 2, \quad (3)$$

$$E_{P,Q} d_k^m(X_k, X_k^m) \leq \max_{k,m} d_k^m(x_k, x_k^m), \quad k \in \mathcal{G}_3^m, \quad m = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathcal{M}(E, \Delta)$ множество всех таких функций $\Phi(P)$ для заданных Δ и E и через $\mathcal{M}(\Delta)$ – множество всех функций $\Phi(P^*)$, для которых при заданных Δ и P^* имеют место (2)–(4).

Обозначим через $\Phi_i(P)$, $i = 1, 2$, те функции $\Phi(P)$, которые можно представить в следующей форме:

$$\Phi_1(P) = Q(x^1 | x) Q(x^2 | x) Q(x^0 | x^2, x),$$

$$\Phi_2(P) = Q(x^1 | x) Q(x^2 | x) Q(x^0 | x^1, x).$$

Определим множества:

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(E, \Delta, P, \Phi) = \{(R_0, R_1, R_2):$$

$$R_0 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^0, X^1, X^2),$$

$$R_1 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^1),$$

$$R_2 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^1, X^2)\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2(E, \Delta, P, \Phi) = \{(R_0, R_1, R_2):$$

$$R_0 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^0, X^1, X^2),$$

$$R_1 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^1, X^2),$$

$$R_2 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^2)\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_3(E, \Delta, P, \Phi_1) = \{(R_0, R_1, R_2):$$

$$R_0 \geq I_{P, \Phi_1(P)}(X \wedge X^1) + I_{P, \Phi_1(P)}(X \wedge X^2) + I_{P, \Phi_1(P)}(X \wedge X^0 | X^2),$$

$$R_1 \geq I_{P, \Phi_1(P)}(X \wedge X^1),$$

$$R_2 \geq I_{P, \Phi_1(P)}(X \wedge X^2)\},$$

$$\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_4(E, \Delta, P, \Phi_2) = \{(R_0, R_1, R_2):$$

$$R_0 \geq I_{P, \Phi_2(P)}(X \wedge X^1) + I_{P, \Phi_2(P)}(X \wedge X^2) + I_{P, \Phi_2(P)}(X \wedge X^0 | X^1),$$

$$R_1 \geq I_{P, \Phi_2(P)}(X \wedge X^1),$$

$$R_2 \geq I_{P, \Phi_2(P)}(X \wedge X^2)\}.$$

Пусть:

$$\mathcal{R}_1^-(E, \Delta, P, \Phi, \Phi_1, \Phi_2) = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{D}_i$$

и

$$\mathcal{R}^+(E, \Delta, P, \Phi) = \{(R_0, R_1, R_2):$$

$$R_0 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^0, X^1, X^2),$$

$$R_1 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^1),$$

$$R_2 \geq I_{P, \Phi(P)}(X \wedge X^1)\},$$

Мы будем использовать множество

$$\mathcal{R}^-(E, \Delta) = \bigcap_{P \in \mathcal{A}(E)} \bigcup_{\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{M}(E, \Delta)} \mathcal{R}_1^-(E, \Delta, P, \Phi, \Phi_1, \Phi_2)$$

в качестве внутренней границы для $\mathcal{R}(E, \Delta)$, а в качестве внешней границы — множество.

$$\mathcal{R}^+(E, \Delta) = \bigcap_{P \in \mathcal{A}(E)} \bigcup_{\Phi \in \mathcal{M}(E, \Delta)} \mathcal{R}^+(E, \Delta, \Phi).$$

Теорема. Для $E > 0$, $\Delta_k^m \geq 0$, $k \in \mathcal{G}_1^m \cup \mathcal{G}_2^m$ $m = 0, 1, 2$,

$$\mathcal{R}^-(E, \Delta) \subseteq \mathcal{R}(E, \Delta) \subseteq \mathcal{R}^+(E, \Delta).$$

Следствие 1. При $E \rightarrow 0$ мы получаем внутреннюю и внешнюю границы для соответствующей "области скоростей в зависимости от искажений и секретности" $\mathcal{R}(\Delta)$.

Следствие 2. Если в системе два коррелированных источника $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$, декодер F_0 отсутствует, первый декодер восстанавливает только сообщения источника $\{X_1\}$, второй — только сообщения источника $\{X_2\}$ и $E = 0$, мы получаем результат Ямамото ⁽¹⁾ для двунаправленной разветвляющейся системы связи. Однако полученная нами для этой системы внутренняя область шире, так как в ⁽¹⁾ не учтена область, соответствующая области $\bigcup_{\Phi_1 \in \mathcal{M}(E, \Delta)} \mathcal{D}_3(E, \Delta, P, \Phi_1)$ (в этом случае при $E = 0$

$$\mathcal{D}_3(E, \Delta, \Phi_1) = \mathcal{D}_4(E, \Delta, \Phi_2).$$

Систему двух коррелированных источников $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$ при $R_2 = 0$, $\mathcal{G}_2^m \cup \mathcal{G}_3^m \equiv \emptyset$, $m = 0, 1$, Ямамото ⁽¹⁾ назвал каскадной системой связи и получил область $\mathcal{R}(\Delta)$. Для этой системы область $\mathcal{R}(E, \Delta)$ скоростей в зависимости от надежностей и искажений найдена в ⁽⁶⁾.

Если $\mathcal{G}_2^m \cup \mathcal{G}_3^m \equiv \emptyset$, система имеет только один источник $\{X\}$, кодеров f_1 и f_2 нет, т.е. $R_1 = R_2 = R_0$, мы получаем результат Эль Гамала и Ковера ⁽²⁾ о множественном описании источника (более общие задачи множественного описания источника рассмотрены в работах ^(3,4)). Для этой системы, в случае разных требований получателей на надежность E , скорость как функция надежностей и искажений найдена в ⁽⁷⁾.

лее простых задачах кодирования источников с шенноновской постановкой). Трудность заключается в том, что для задач о кодах с требованиями на надежность E не применим метод разделения времени.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении и Ереванского государственного университета

Ե. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅԱՆ, Ա. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ռ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Հուսալիության աստիճանից, գաղտնիության եվ շեղման մակարդակներից կախված ճյուղավորվող կապի համակարգի կոդավորման արագությունների մասին

Դիտարկվում է դիսկրետ առանց հիշողության աղբյուրի կոդավորման խնդիրը միաստիճան ճյուղավորվող կապի համակարգի համար: $\{X_1, \dots, X_k\}$ իրարից հավանականորեն կախված աղբյուրների հաղորդագրությունները կոդավորվում են ընդհանուր կոդավորիչով, և այնուհետև, երկու լրացուցիչ կոդավորիչներով: Պահանջվում է, որ ամեն մի ապակոդավորիչի ելքում տրված շեղման մակարդակների ճշտությամբ վերականգնվեն աղբյուրների մի որոշակի մասի հաղորդագրությունները, լրացուցիչ կոդավորիչների հետ կապված ապակոդավորիչների ելքերում աղբյուրների մյուս մասի հաղորդագրությունները՝ ընդհակառակը, պետք է գաղտնի պահվեն, վերջապես, մնացած աղբյուրների հաղորդագրությունները տվյալ ելքում կարող են արհամարվել: Գաղտնիության աստիճանը ապահովվում է շեղման՝ տրված մակարդակներից մեծ լինելով: Հասցեատերերի պահանջով պետք է ապահովվի տրված ոչբացասական E -ից ոչ պակաս հուսալիություն, դա նշանակում է, որ N երկարության բլոկային կոդի սխալի հավանականությունները բոլոր ելքերում չպետք է գերազանցեն 2^{-NE} :

Հոդվածում գտնված են E հուսալիությունից, թույլատրելի շեղման և գաղտնիության մակարդակից կախված լավագույն կոդերի հասանելի արագությունների տիրույթի արտաքին և ներքին գնահատականները: Ուսումնասիրված են մի շարք կարևոր մասնավոր դեպքեր:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H.Yamamoto, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-27, №3, p.299-308 (1981).
- ² A.El Gamal, T.M.Cover, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-28, №6, p.851-857 (1982).
- ³ R.Ahlsvede, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-31, №6, p.721-726 (1985).
- ⁴ E.A.Haroutunian, R.Sh.Maroutian, Problems of Control and Inform. Theory, v.20, №2, p.165-178 (1991).
- ⁵ H.Yamamoto, IEEE Trans. Inform. Theory, v.43, №3, p.827-835 (1997).
- ⁶ E.A.Haroutunian, A.R.Kazarian, Mathematical problems of computer science, v.18, p.19-32 (1997).
- ⁷ E.A.Haroutunian, A.N.Haroutunian, A.R.Kazarian, Proc. of the 13th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, 1998.

УДК 539.3

Л. А. Левонян

Термопластическое состояние полого цилиндра под воздействием внутреннего давления, кручения и осевой силы

(Представлено академиком НАН Армении М. А. Задоном 22/VII 1998)

Предельное состояние толстостенных цилиндров под воздействием внутреннего давления, осевой силы и крутящего момента рассмотрены в работе (1). Для упрочняющихся материалов задача рассмотрена в работа (2). Термоупруго-пластическое предельное состояние цилиндра под внутренним давлением рассмотрено в работе (3).

Здесь рассматривается напряженно-деформированное состояние толстостенного цилиндра из упрочняющегося несжимаемого материала, находящегося в осесимметричном высоком стационарном температурном поле под внутренним давлением при одновременном кручении и растяжении (рис.1). Упругие и пластические характеристики материала считаются зависящими от температуры и описываются непрерывными функциями от координат поперечного сечения.

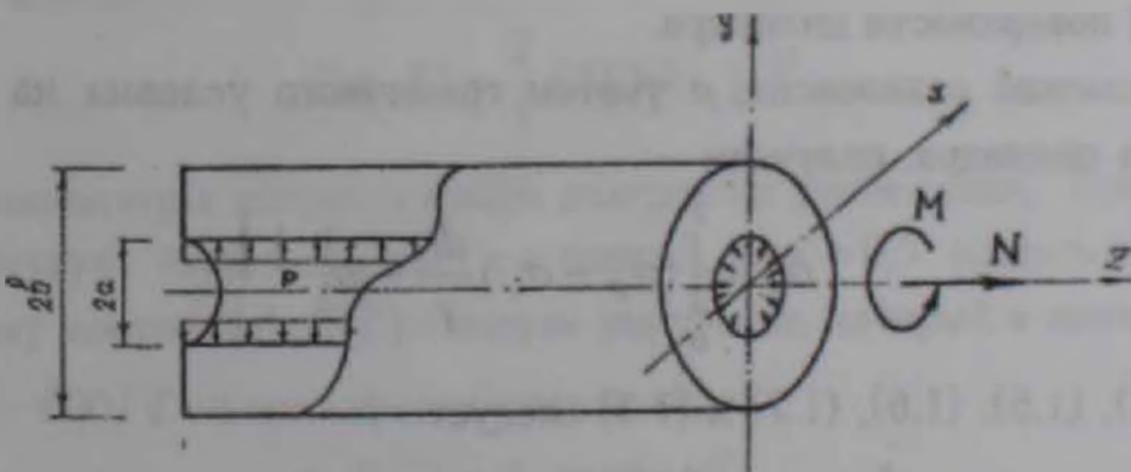


Рис. 1

1. На основе теории малых упруго-пластических деформаций упрочняющихся тел между компонентами напряжений, деформаций и перемещений принимаются зависимости:

$$\sigma_r - \sigma = f(\epsilon_i, T)(\epsilon_r - \alpha T) \dots, \tau_{\theta z} = f(\epsilon_i, T)\gamma_{\theta z} \dots \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \dots, 2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \dots, \quad (1.2)$$

где функция f характеризует закон упрочнения материала цилиндра,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{rz}^2)} \quad (1.3)$$

T – распределение температуры в цилиндре, α – коэффициент линейного расширения материала.

Исходя из характера внешнего воздействия полуобратным способом (2), полагая тензор деформаций лишь функцией от r , а $\tau_{r\theta}$ и τ_{rz} равными нулю по всему объему цилиндра, компоненты перемещений и деформаций можно представить в виде

$$u = -Ar + \frac{B}{r} + \frac{3}{r} \int_a^r \alpha T r dr, \quad (1.4)$$

$$v = 2Crz, \quad w = 2Az,$$

$$\varepsilon_r = -A - \frac{B}{r^2} - \frac{3}{r^2} \int_a^r \alpha T r dr,$$

$$\varepsilon_\theta = -A + \frac{B}{r^2} + \frac{3}{r^2} \int_a^r \alpha T r dr, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_z = 2A,$$

где A, B, C постоянные.

При осесимметричном установившемся поле температуры ее распределение в сечениях цилиндра имеет вид

$$T = T_1 + T_* \ln r / a, \quad (1.6)$$

где $T_* = (T_2 - T_1) / \ln b / a$; T_1, T_2 – соответственно температуры внутренней и наружной поверхности цилиндра.

Из уравнений равновесия, с учетом граничного условия на внутренней поверхности цилиндра, получаем

$$\sigma_r = \int_a^r (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{dr}{r} - p. \quad (1.7)$$

Из (1.1), (1.5), (1.6), (1.7) и (1.3) следует

$$\sigma_r = \int_a^r f(\varepsilon_1, T) \left(\frac{2B}{r^2} + 2Q(r) - 3\alpha T \right) \frac{dr}{r} - p,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + f(\varepsilon_1, T) \left(\frac{2B}{r^2} + 2Q(r) - 3\alpha T \right),$$

$$\sigma_r = \sigma_r + f(\varepsilon_i, T) \left(\frac{2B}{r^2} + Q(r) + 3A - 3\alpha T \right), \quad (1.8)$$

$$\tau_{\theta r} = Cf(\varepsilon_i, T)r,$$

где

$$Q(r) = \frac{3}{4}\alpha \left[(2T_1 - T_*) \frac{r^2 - a^2}{r^2} + 2T_* \ln r/a \right], \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_i^2 = 3A^2 + C^2 r^2 + \frac{B^2}{r^4} + C \frac{Q(r)}{r} - 3\alpha TA - 3\alpha TQ(r) + 3\alpha^2 T^2 + Q^2(r). \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным условиям на внутренней и наружной поверхностях цилиндра при $r=a$, $\sigma_r = -P$; при $r=b$, $\sigma_r = 0$, а также условиям на торцах цилиндра

$$2\pi \int_a^b \sigma_r r dr = N, \quad 2\pi \int_a^b \tau_{\theta r} r^2 dr = M, \quad (1.11)$$

получаем систему уравнений, определяющую постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} 3\pi \int_a^b (2A - \alpha T) f(\varepsilon_i, T) r dr &= N - pa^2, \\ 2\pi C \int_a^b f(\varepsilon_i, T) r^3 dr &= M, \\ \int_a^b \left(\frac{2B}{r^2} + Q(r) - 3\alpha T \right) f(\varepsilon_i, T) \frac{dr}{r} &= p. \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Для жаропрочных сталей и сплавов функцию упрочнения f можно представить в виде

$$f(\varepsilon_i, T) = \frac{2}{3} E(T) (k\varepsilon_i)^{-2\lambda}, \quad (2.1)$$

где λ и k параметры аппроксимации диаграммы растяжения, при этом $\lambda = 0$ соответствует термоупругому состоянию, а $\lambda = 0,5$ предельному термопластическому состоянию, $E(T)$ - модуль упругости, который в интервале температур $(200-600)^\circ\text{C}$ можно представить в виде

$$E(T) = E_0 \exp(-\mu T), \quad (2.2)$$

где μ - параметр аппроксимации, а $E_0 = E(T_1)$.

С учетом (1.6) получаем

$$E = E_1 r^\beta, \quad (2.3)$$

где

$$E_1 = E_0 \exp(-\mu T_1) a^{-\beta}, \quad \beta = -\mu T_*. \quad (2.4)$$



Обозначая $r = \alpha x$, $b/a = \nu$, выражения (1.8) и (1.12) после некоторых преобразований представляются в следующем виде:

$$\sigma_r = E_* \int_{\nu}^x x^{\beta-3} [2B_* + \frac{3}{4} \alpha (T_* - 2T_1 - T_* x^2)] H(x) dx,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + E_* x^{\beta-2} [2B_* + \frac{3}{4} \alpha (T_* - 2T_1 - T_* x^2)] H(x), \quad (2.5)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + E_* x^{\beta-2} [(Q(x) + 3A - 3\alpha T) x^2 + B_*] H(x),$$

$$\tau_{\theta z} = C_* E_* H(x) x^{\beta+1},$$

$$\int_1^{\nu} (2A - \alpha T) x^{\beta+1} H(x) dx = \frac{N - \pi a^2 p}{3\pi E_*},$$

$$C_* \int_1^{\nu} x^{\beta+3} H(x) dx = \frac{M}{2\pi a^3 E_*}, \quad (2.6)$$

$$\int_1^{\nu} x^{\beta-3} [2B_* + \frac{3}{4} \alpha (T_* - 2T_1 - T_* x^2)] H(x) dx = \frac{P}{E_*},$$

где

$$H(x) = (k\varepsilon_i)^{-2\lambda}, \quad B_* = B/a^2, \quad C_* = C \cdot a,$$

$$\varepsilon_i^2 = 3A^2 + C_*^2 x^2 + \frac{B_*^2}{x^4} + B_* \frac{Q(x)}{x^2} + 3\alpha T(x) -$$

$$- 3\alpha T(x) Q(x) + 3\alpha^2 T^2(x) + Q^2(x), \quad (2.7)$$

$$Q(x) = \frac{3}{4} \alpha \left[(2T_1 - T_*) \frac{x^2 - 1}{x^2} + 2T_* \ln x \right], \quad (2.8)$$

$$T(x) = T_1 + T_* \ln x, \quad T_* = (T_2 - T_1) / \ln \nu, \quad (2.9)$$

$$E_* = \frac{2}{3} E(T_1) \exp(-\mu T_1). \quad (2.10)$$

В частном случае, при $\lambda = 0$, из (2.5) и (2.6) получаем решение (2).

3. Для числового примера рассмотрен полый цилиндр из нержавеющей стали марки IX18H9T. При $T_1 = 500^\circ\text{C}$, $T_2 = 200^\circ\text{C}$ модуль упругости, предел прочности, параметры λ и k можно представить в виде:

$$E = 1,7 \cdot 10^5 x^\beta \text{ МПа}, \quad x \in [1; \nu],$$

$$\beta = -\mu T_* \cdot \mu = 4,744 \cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_T = 252,6 \exp(-0,0009T) \text{ МПа},$$

$$\sigma_b = 522,7 \exp(-0,00016T) \text{ МПа},$$

$$\lambda = 0,4015 - 0,0001T(x),$$

$$k = 500(2,676x^{\beta - \frac{0,27}{\ln \nu}})^{\frac{1}{2\lambda}}.$$

Картина напряженного состояния при $a=1,8$ м, $\nu=1,2$, $T_1=500^\circ\text{C}$, $T_2=200^\circ\text{C}$, $\alpha=1,8 \cdot 10^{-7}$ 1/град., $p=20$ МПа, $M=220a^3$ кН.м, $N=\pi a^2 p$, показана на рис.2 и 3 (в МПа).

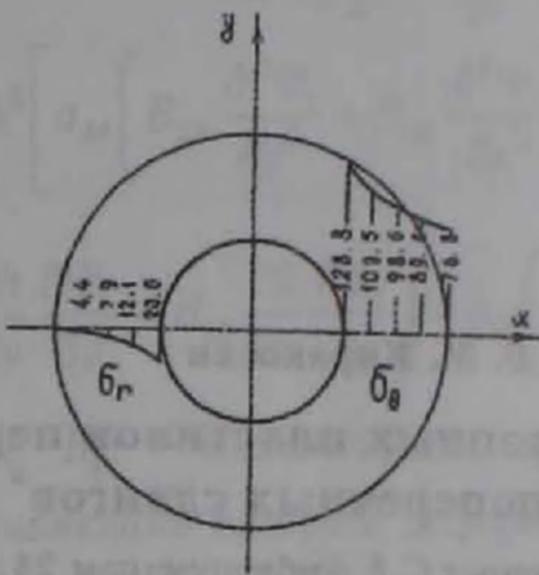


Рис.2.

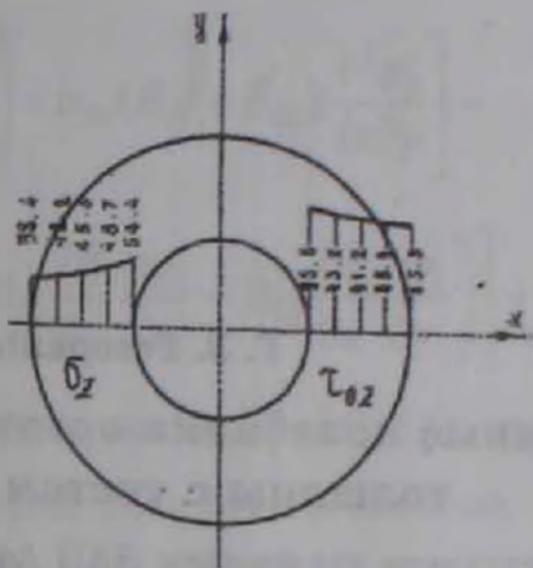


Рис.3.

Институт механики НАН Армении

Լ. Լ. ԼԵՎՈՆՅԱՆ

Սնամեջ գլանի ջերմապլաստիկական վիճակը ներքին ճնշման, ոլորման եվ առանցքային ուժի ազդեցության տակ

Դիտարկված է ստացիոնար բարձր ջերմային դաշտում ներքին ճնշման տակ գտնվող հաստապատ երկար գլան՝ ամրապնդվող անսեղմելի նյութից, որի ճակատային մասերում գործում են ոլորող մոմենտներ և ձգող ուժեր: Նյութի մեխանիկական բնութագրիչները կախված են ջերմային դաշտից և նկարագրվում են շոռավղային կոորդինատից կախված անընդհատ ֆունկցիաներով:

Ջերմապլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության հիման վրա ստացված են լարումների արտահայտությունները աստիճանային ամրապնդումով նյութի համար:

Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքները հրակայուն պողպատից սնամեջ փակ հիմքերով հաստապատ գլանի համար:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ж.Панарелли, П.Ходж, Прикл.механика, Тр. Амер. о-ва инж.-мех., Сер.Е, т.30, №3, с.87-91 (1963).
- ² М.А.Задоян, Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.
- ³ Л.М.Качанов, ЖТФ, №10, 1940.
- ⁴ М.А.Задоян, Л.А.Левонян, Изв.АН АрмССР, Тех. науки, т.28, №6 с.10-16 (1975).
- ⁵ Л.А.Левонян, Инж.пробл. строительной механики. Меж.тем.сб.науч.тр. по строительству и архитектуре, Ереван, с.80-90, 1987.
- ⁶ Б.Боли, Дж.Уэйнер, Теория температурных напряжений, М., Мир, 1964.
- ⁷ Расчет конструкций на тепловые воздействия, М., Машиностроение, 1969.

УДК 539.3

Г. З. Геворкян, Р. М. Киракосян

Свободные колебания ортотропных пластинок переменной толщины с учетом поперечных сдвигов*

(Представлено академиком НАН Армении С.А.Амбарцумяном 24/VII 1998)

Известно (1), что при пренебрежении тангенциальными перемещениями и инерцией вращения систему уравнений свободных поперечных колебаний пластинки можно получить из соответствующей системы изгиба, положив

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

Здесь Z – интенсивность поперечной распределенной нагрузки, приведенной на единицу площади срединной плоскости, ρ – плотность материала, h – толщина, w – прогиб пластинки, t – время. Имея в виду это обстоятельство и пользуясь работой (2), приходим к следующей системе уравнений свободных поперечных колебаний ортотропной пластинки переменной толщины при учете влияния деформаций поперечных сдвигов:

$$\begin{aligned} & h^2 \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\ & - h \left\{ \left[8 + a_{55} h \left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left[8 + a_{44} h \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right\} - \\ & - 2B_{66} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) - 16 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \Psi_1 \right) + 12 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\ & h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2h \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \\ & - h^2 \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} \right] - \end{aligned}$$

* Спонсор работы фирма "Анушик"

$$\begin{aligned}
& -2h \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + a_{44} \left(B_{12} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) \right] + 8\varphi_1 = 0; \\
& h^2 \left[B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2h \left[\left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \\
& - h^2 \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right] - \quad (1.2)
\end{aligned}$$

$$-2h \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) + a_{55} \left(B_{12} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right] + 8\Psi_1 = 0.$$

Здесь a_{ij} и B_{ij} – механические параметры материала (1), φ_1 и Ψ_1 – функции, учитывающие влияние деформаций поперечных сдвигов, x и y – прямоугольные декартовы координаты, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала пластинки. К уравнениям (1.2) следует присоединить краевые условия, которые для краев пластинки $x = \text{const}$ можно представить в виде (2)

а) шарнирное опирание

$$w = 0$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{12} a_{44} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_x = 0) \quad (1.3)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{44} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_{xy} = 0)$$

б) защемление

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55} \varphi_1 = 0, \quad (u_x = 0), \quad \Psi_1 = 0, \quad (u_y = 0), \quad (1.4)$$

в) свободный край

$$B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - B_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{12} a_{44} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_x = 0) \quad (1.5)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{44} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_{xy} = 0), \quad \varphi_1 = 0, \quad (N_x = 0).$$

Здесь через M_x , M_{xy} и N_x обозначены изгибающие моменты и перерезывающая сила, а через u_x и u_y – перемещения пластинки по осям x и y соответственно. Аналогичным образом запишутся краевые условия и для краев $y = \text{const}$.

Таким образом, задача определения частот собственных колебаний ортотропной пластинки переменной толщины сводится к нахождению собственных

чисел однородных уравнений (1.2) при соответствующих краевых условиях.

2. Рассмотрим задачу свободных поперечных колебаний ортотропной полосы-пластинки ширины l , толщина которой меняется по закону .

$$h = h_0 + h_1 x, \quad h_1 > -h_0 / l. \quad (2.1)$$

Здесь h_0 и h_1 – заданные постоянные.

Примем обозначения:

$$x = \bar{x}l, \quad w(x, t) = f(x) \cos \omega_n t, \quad \varphi_1(x, t) = \varphi(x) \cos \omega_n t, \quad \Psi_1(x, t) = \Psi(x) \cos \omega_n t,$$

$$\omega_n^2 = \frac{B_{11} \Omega_n^2}{\rho l^2}, \quad \chi = B_{11} a_{55}, \quad h = h_0 H, \quad s = \frac{h_0}{l}, \quad \gamma = \frac{h_1}{s}, \quad (2.2)$$

где ω_n – круговая частота колебаний, а безразмерная толщина полосы определяется формулой

$$H = 1 + \gamma \bar{x}, \quad \gamma > -1. \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться, что при свободных поперечных колебаниях полосы по цилиндрическим поверхностям последнее уравнение системы (1.2) имеет тривиальное решение

$$\Psi_1 \equiv 0, \quad (2.4)$$

а первые два уравнения с учетом (1.6) и (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{2\gamma}{H} \varphi + \frac{3}{2} \frac{B_{11} \Omega_n^2}{l} f &= 0, \\ \frac{d^3 f}{d\bar{x}^3} + \frac{2\gamma}{H} \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi l}{B_{11}} \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} - \frac{2\chi l \gamma}{B_{11} H} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{8l}{B_{11} s^2 H^2} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эту систему можно привести к одному уравнению

$$\frac{d^4 \varphi}{d\bar{x}^4} + A \frac{d^3 \varphi}{d\bar{x}^3} + B \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} + C \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + D \varphi = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\gamma}{H}, \quad B = \frac{1}{2H^2} (3\chi H^2 \Omega_n^2 - 4\gamma^2), \\ C &= \frac{\gamma}{H^3} (3\chi H^2 \Omega_n^2 + 4\gamma^2), \quad D = -\frac{4}{s^2 H^4} (3H^2 \Omega_n^2 + s^2 \gamma^4). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Взамен краевых условий (1.3)-(1.5) с учетом (2.2) имеем

а) шарнирное опирание

$$\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{2\gamma}{H} \varphi = 0, \quad (w = 0) \quad (2.8)$$

$$\frac{d^3 \varphi}{d\bar{x}^3} + \frac{2\gamma}{H} \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} + \frac{1}{2H^2} (3\chi H^2 \Omega_n^2 - 8\gamma^2) \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{4\gamma^3}{H^3} \varphi = 0, \quad (M_x = 0)$$

б) защемление

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{2\gamma}{H}\varphi &= 0, & (w=0) \\ \frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} + \frac{2\gamma}{H}\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{1}{2H^2}(3\chi H^2\Omega_n^2 - 4\gamma^2)\varphi &= 0, & (u_x=0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

в) свободный край

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{d\bar{x}^3} + \frac{2\gamma}{H}\frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} + \frac{1}{2H^2}(3\chi H^2\Omega_n^2 - 8\gamma^2)\frac{d\varphi}{d\bar{x}} &= 0, & (M_x=0) \\ \varphi &= 0, & (N_x=0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, задача свободных поперечных колебаний ортостропной полосы-пластинки линейно-переменной толщины с учетом влияния поперечного сдвига сводится к задаче определения собственных чисел дифференциального уравнения (2.6) при соответствующих граничных условиях.

3. Частоты собственных колебаний полосы-пластинки ω_n будем определять по методу коллокаций, для чего решение дифференциального уравнения (2.6) аппроксимируем многочленом с неизвестными коэффициентами $a_i(\omega)$

$$\varphi = \sum_{i=1}^M a_i(\omega) \bar{x}^{i-1}.$$

В соответствии с этим пролет полосы разобьем на $M-3$ участка. Потребуем, чтобы функция u удовлетворяла на краях $\bar{x}_1=0$ и $\bar{x}_{M-2}=1$ полосы соответствующим краевым условиям, а в точках разбиения \bar{x}_i ($i=2,3,\dots,M-3$) – дифференциальному уравнению (2.6). В результате получим систему линейных алгебраических однородных уравнений M -ого порядка относительно M неизвестных коэффициентов. Искомые частоты определяются из условия существования нетривиального решения краевой задачи, т.е. из условия равенства нулю определителя полученной системы уравнений.

Проведено исследование сходимости решения в зависимости от числа узлов разбиения полосы $N=M-4$ для двух способов разбиения. В одном из них в качестве узловых точек взяты корни смещенных полиномов Чебышева $T_n(2x-1)=0$, а в другом – точки, соответствующие равномерному разбиению. Рассмотрены два случая краевых условий. В одном случае полоса заземлена вдоль одной кромки и шарнирно оперта вдоль другой (табл.1). Во втором случае одна кромка полосы заземлена, а другая свободна (табл.2). В этих таблицах приведены значения первых двух частот собственных колебаний ω_n ($n=1,2$) при двух отмеченных способах дискретизации полосы. Чтобы иметь возможность сравнения с аналитическим решением исследование в первом случае проведено в рамках классической теории пластинок ($\chi=0$) для полосы постоянной толщины ($\gamma=0$). В последнем столбце табл.1 представлены результаты, соответствующие аналитическому решению задачи. В табл.2 приведены результаты для полосы переменной

толщины ($\gamma=1$) при учете влияния поперечных сдвигов ($\chi=10$). Из данных табл.1, 2 видно, что разбиение по корням смещенных полиномов Чебышева обеспечивает лучшую сходимость, чем равномерное разбиение.

Таблица 1

Защемление – шарнир, $\chi=0$, $\gamma=0$, $s=0,125$

	№	4	5	6	7	8	10	аналит.
По корням многочленов Чебышева	I	0,5559	0,5565	0,5564	0,5564	0,5564	0,5564	0,5564
	II	2,087	1,788	1,809	1,803	1,803	1,803	1,803
Равноотстоящие точки	I	0,5571	0,5606	0,5563	0,5562	0,5564	0,5564	0,5564
	II	1,896	1,876	1,896	1,798	1,796	1,803	1,803

Таблица 2

Защемление – свободный край, $\chi=10$, $\gamma=1$, $s=0,125$

	№	4	5	6	7	8	10	12
По корням многочленов Чебышева	I	0,1044	0,1126	0,11	0,1104	0,1103	0,1103	0,1103
	II	0,697	0,6929	0,6938	0,6933	0,6934	0,6934	0,6934
Равноотстоящие точки	I	0,1684	0,0855	0,1211	0,1065	0,1105	0,1103	0,1103
	II	0,6633	0,7043	0,6861	0,6971	0,692	0,6932	0,6934

В табл. 3 приведены значения ω_n для первой и второй форм колебаний при различных краевых условиях и значениях параметров s, χ, γ . В последних двух строках каждой части таблицы представлены соответствующие значения поправки

$$\Delta_n = \frac{\omega_n^{KL} - \omega_n}{\omega_n^{KL}} 100\%, \quad (n=1,2)$$

вносимой в значения частот собственных колебаний учетом влияния поперечного сдвига. Здесь через ω_n^{KL} обозначены частоты, соответствующие классической постановке задачи, т.е. случаю $\chi=0$.

Из данных таблиц можно заключить, что

1) учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае переменной толщины приводит к уменьшению значений собственных частот;

2) поправка существенно зависит от характера анизотропии материала и геометрических параметров полосы. Она растет при а) уменьшении относительного модуля поперечного сдвига, т.е. возрастании параметра χ , б) увеличении скорости утолщения полосы вдоль пролета, т.е. возрастании параметра γ .

3) При одинаковых остальных условиях поправка для второй формы колебаний более ощутима, чем для первой.

Таблица 3

		x	0	1	2	5	10
Шарнир- шарнир	$\gamma = 0$	I	0,356	0,353	0,349	0,34	0,326
		II	1,425	1,373	1,326	1,21	1,07
		Δ_1		0,84	1,97	3,68	6,59
		Δ_2		3,65	6,95	11,87	19,31
	$\gamma = 1$	I	0,514	0,504	0,494	0,469	0,434
		II	2,089	1,937	1,814	1,549	1,285
		Δ_1		1,95	3,89	6,94	12,15
		Δ_2		7,28	13,16	20,03	29,16
Защемление- защемление	$\gamma = 0$	I	0,807	0,771	0,739	0,662	0,574
		II	2,223	2,019	1,861	1,546	1,258
		Δ_1		4,46	8,43	14,14	22,33
		Δ_2		9,18	16,28	23,43	32,40
	$\gamma = 1$	I	1,179	1,074	0,993	0,827	0,672
		II	3,25	2,69	2,345	1,793	1,387
		Δ_1		8,91	15,78	23,00	32,33
		Δ_2		17,23	27,85	33,35	40,85
Защемление- свободный	$\gamma = 0$	I	0,127	0,126	0,125	0,124	0,121
		II	0,795	0,771	0,749	0,692	0,622
		Δ_1		0,79	1,57	1,59	3,20
		Δ_2		3,02	5,79	10,25	16,96
	$\gamma = 1$	I	0,118	0,117	0,116	0,114	0,110
		II	1,02	0,963	0,918	0,808	0,693
		Δ_1		0,85	1,69	2,56	5,17
		Δ_2		5,59	10,20	16,10	24,34
Свободный- защемление	$\gamma = 1$	I	0,276	0,273	0,269	0,260	0,247
		II	1,322	1,231	1,155	0,993	0,830
		Δ_1		1,09	2,54	4,76	8,18
		Δ_2		6,88	12,63	19,33	28,14
Защемление- шарнир	$\gamma = 0$	I	0,556	0,542	0,529	0,494	0,449
		II	1,803	1,689	1,594	1,386	1,171
		Δ_1		2,52	4,86	8,86	15,12
		Δ_2		6,32	11,59	17,94	26,54
	$\gamma = 1$	I	0,735	0,699	0,668	0,596	0,515
		II	2,565	2,274	2,065	1,676	1,343
		Δ_1		4,90	9,12	14,74	22,90
		Δ_2		11,35	19,49	26,30	34,96
Шарнир- защемление	$\gamma = 1$	I	0,888	0,838	0,796	0,699	0,593
		II	2,709	2,356	2,112	1,683	1,338
		Δ_1		5,63	10,36	16,59	25,50
		Δ_2		13,03	22,04	28,57	36,65

4) Величина поправки сильно зависит от типа крепления краев полосы. Она получается наибольшей при защемлении обоих краев.

5) В случае, когда тонкая кромка полосы защемлена, а толстая свободна, первая частота колебаний меньше первой частоты той полосы, толщина которой постоянна и равна толщине тонкой кромки исходной полосы. Таким образом, не всегда можно путем какого-либо осреднения толщины получить такую пластинку постоянной толщины, первая частота которой совпала бы с первой частотой исходной пластинки. Разумеется, в зависимости от типа краевых условий такая ситуация возможна и для частот других форм колебаний. Сказанное в равной мере относится как к классической, так и уточненной постановкам задачи.

Институт механики НАН Армении

Գ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի ազատ տատանումները ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Ճշգրտված ⁽¹⁾ տեսության հիման վրա ստացվում են փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի ազատ տատանումների հավասարումները, որոնք հաշվի են առնում ընդլայնական սահքերի ազդեցությունը: Սալի տանգենցիալ տեղափոխությունները և պտտման իներցիան արհամարվում են: Դիտվում են եզրային պայմանների մի քանի տարբերակներ: Որպես օրինակ լուծվում է գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-չերտի ազատ տատանումների խնդիրը երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի մի քանի բնորոշ արժեքների դեպքում: Սալ-չերտի սեփական տատանումների հաճախությունների որոշումը բերվում է փոփոխական գործակիցներով չորրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման սեփական թվերի հաշվմանը համապատասխան համասեռ եզրային պայմանների դեպքում: Կիրառվում է կոլոկացիաների մեթոդը՝ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը աստիճանային բազմանդամով մոտարկելու օգնությամբ: Ուսումնասիրվում է լուծման զուգամիտության հարցը՝ կախված սալ-չերտի դիսկրետացման եղանակներից: Ցույց է տրվում, որ պրոցեսն ավելի արագ է զուգամիտվում, երբ որպես բաժանման հանգույցներ ընտրվում են Չերիչևի տեղաչարժված բազմանդամների արմատները: Վերջում բերվում են սալ-չերտի I և II հաճախությունների աղյուսակ, որտեղ ներկայացված են նաև ընդլայնական սահքի մտցրած ճշգրտումները տոկասներով: Դիտվում են եզրային պայմանների մի քանի տարբերակներ: Արվում են եզրակացություններ ընդլայնական սահքերի ազդեցության վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С.А.Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, М., Наука, 1987. ² Р.М.Киракосян, Изв. АН Армении, Механика, т.44, №3, с.26-33 (1994).

УДК 531.36

В. Т. Аванян

О K_{Δ}^{ω} -устойчивости на заданном интервале времени

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 10/XI 1998)

Рассматривается задача о K_{Δ}^{ω} -устойчивости на бесконечном интервале времени в постановке (1), применяемой и на конечном интервале времени. Получены: а) достаточные условия K_{Δ}^{ω} -устойчивости и асимптотической устойчивости системы с почти постоянной матрицей, б) достаточное условие K_{Δ}^{ω} -устойчивости линейной системы, матрица которого перестановочна со своим интегралом.

1. Постановка задачи (1). Под классом K_{Δ}^{ω} подразумевается совокупность $n \times n$ матриц $G(t) = (G_1(t), \dots, G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на $\Delta = [t_0, \infty)$ условиям: а) $|\det G(t)| \geq K > 0$, б) эрмитова норма столбцов $G_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) совпадает с заданной функцией $\omega(t) > 0$, т.е. $\|G_j(t)\| = \omega(t)$ ($j = 1, \dots, n$).

Этот класс вполне определяется промежутком Δ и функцией $\omega(t) > 0$, причем $K_{\Delta}^{\omega} = \omega K_{\Delta}^1$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Невозмущенный процесс называется устойчивым, если в заданном классе K_{Δ}^{ω} существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho > 0$ числе любое возмущение $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) процесса, начальное значение $x(t_0) = x_0$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2, \tag{1.1}$$

для всех $t > t_0$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t)) \leq \rho^2, \tag{1.2}$$

в противном случае процесс называется неустойчивым.

О п р е д е л е н и е 1.2. Невозмущенный процесс называется асимптотически устойчивым на интервале $[a, \infty)$, если: а) он устойчив на $[a, \infty)$ (в

смысле определения 1.1); б) $\forall t_0 \in [a, \infty) \exists \rho = \rho(t_0) > 0$ такое, что все возмущения $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) процесса, удовлетворяющие условию (1.1), обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (1.3)$$

Из устойчивости в смысле определения 1.1 всегда следует устойчивость по Ляпунову, а обратное имеет место не всегда (2).

2. Теорема 2.1. Если система

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.1)$$

где A — постоянная, $n \times n$ — матрица, K_{Δ}^{ω} -устойчива, то система

$$\dot{y} = [A + B(t)]y, \quad (2.2)$$

где $B(t) \in C(\Delta)$ и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad (2.3)$$

также K_{Δ}^{ω} -устойчива.

Доказательство. Полагая, что $t_0 = 0$, $X(t)$ ($0 \leq t < \infty$) — фундаментальная матрица системы (2.1) и $X(0) = E$ (E — единичная матрица), каждое решение $y(t)$ (возмущение) системы (2.2) будет удовлетворять интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau \quad (t \geq 0). \quad (2.4)$$

В силу устойчивости системы (2.1) $\|X(t)\| \leq K$ ($t \in \Delta$) (2).

Из (2.4) имеем

$$\|y(t)\| \leq K\|y_0\| \exp \left[K \int_0^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau \right] < \infty,$$

согласно которому в силу (2.3) для матрицы $f(t) = B(t)y(t)$ в Δ будем иметь

$$\|f(t)\| \leq \|B(t)\| \cdot \|y(t)\| < \infty. \quad (2.5)$$

В силу (2.5) по теореме 1 (3) тривиальное решение системы (2.2) (т.е. невозмущенный процесс), будет K_{Δ}^{ω} -устойчивым.

Теорема 2.2. Если система (2.1) K_{Δ}^{ω} -асимптотически устойчива и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0, \quad (2.6)$$

то возмущенная система (2.2) также K_{Δ}^{ω} -асимптотически устойчива.

Доказательство. Каждое решение $y(t)$ системы (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)d\tau, \quad (t \in \Delta), \quad (2.7)$$

откуда, применяя лемму Гронуолла - Беллмана и учитывая неравенство

$$\|e^{At}\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad 0 < c = \text{const}, \quad t \in \Delta,$$

получаем

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\| \exp \left[(\alpha + \varepsilon)(t - t_0) + c \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \right]. \quad (2.8)$$

По правилу Лопиталья, обобщенному Штольцем, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0.$$

Значит $\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau < \varepsilon(t - t_0)$ при $t > T$.

Таким образом,

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\| \exp[(\alpha + 2\varepsilon)(t - t_0)] \quad \text{при } t > T. \quad (2.9)$$

В случае K_{Δ}^{ω} -асимптотической устойчивости системы (2.1) имеем $\max \operatorname{Re} \lambda_j(A) = \alpha < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) (2), следовательно, выбирая число $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\alpha + 2\varepsilon < 0$, из (2.9) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0.$$

Теорема доказана.

3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = P(t)x, \quad (3.1)$$

где $P(t) \in C(\Delta)$ и

$$P(t) \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \cdot P(t), \quad t \in \Delta. \quad (3.2)$$

Общее решение (3.1), в силу (3.2), имеет вид

$$x(t) = x(t_0) \exp \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = A, \quad (A = \text{const}) \quad (3.4)$$

и все собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.5)$$

то тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (3.1) (т.е. невозмущенный процесс) K_Δ^ω -асимптотически устойчиво.

Доказательство. В силу (3.2)

$$\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \cdot A = A \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Из (3.4) следует

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = A + B(t), \quad \text{где } \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0. \quad (3.7)$$

В силу (3.5) $\max \operatorname{Re} \lambda_j(A) < \alpha < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), поэтому число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство $\alpha + 2\varepsilon < 0$.

Из (3.7) следует, что $\|B(t)\| < \varepsilon$, $t \in [T, \infty) \subset [t_0, \infty)$. Таким образом, из (3.3) получаем, что тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (3.1) (т.е. невозмущенный процесс) K_Δ^ω -асимптотически устойчиво на $[t_0, \infty)$.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

Ժամանակի տրված ինտերվալում K_Δ^ω -կայունության տեսության մասին

Դիտարկվում է ժամանակի անվերջ ինտերվալում K_Δ^ω -կայունության խնդիրը, որը կիրառվել է նաև վերջավոր ինտերվալում: Ստացվել են. ա) Համարյա Հաստատուն մատրիցայով Համակարգի կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության պայմաններ. բ) գծային Համակարգի կայունության պայման, երբ նրա մատրիցան տեղափոխելի է իր ինտեգրալի Հետ:

ЛИТЕРАТУРА – ՉԲԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К.А.Абгарян, Итоги науки и техники. Общая механика, М., т.3, с.43-124, 1976.
- ² К.А.Абгарян, В.Т.Аванян, ПММ, т.41, вып.5, с.844-849 (1977).
- ³ В.Т.Аванян, Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем, (сб. научных трудов конференции). Ереван, с.10-12, 1997.

УДК 519.68:510

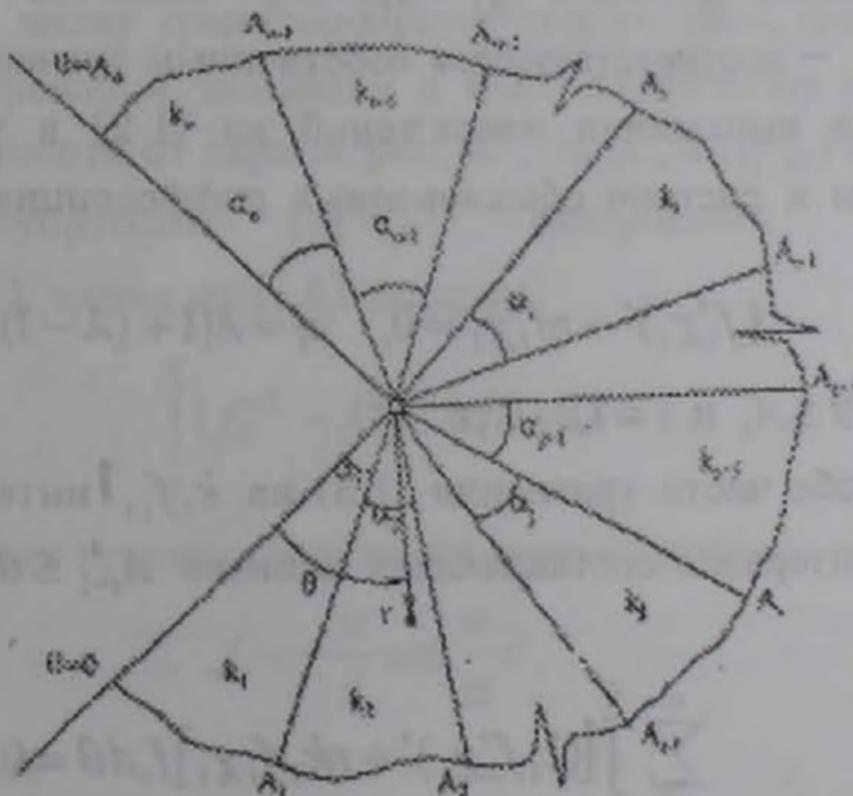
К. С. Тадевосян, академик НАН Армении М. А. Задоян

Интегральный способ изучения прочности соединения

(Представлено 5/XI 1998)

Прочность соединения составного тела можно обеспечить, изучая условия малонапряженности на крае контактной поверхности (1). Это исследование сводится к решению задачи на собственные значения для определенной системы дифференциальных уравнений при однородных гранично-контактных условиях. На этом основании в координатном пространстве физических и геометрических параметров, при помощи которых выбираются комбинации параметров окрестности угловой точки, обеспечивающие нулевые напряжения на рассматриваемом крае, строится область малонапряженности.

Однако подобную задачу о прочности соединения можно исследовать, обходя решение соответствующей системы дифференциальных уравнений (2).



Рассмотрим напряженное состояние в окрестности угловой точки составного клина, изготовленного из l призматических несжимаемых неоднородных тел, материалы которых упрочняются по степенному закону

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m,$$

где σ_0 и ε_0 интенсивности напряжения и деформации, m – параметр, для всех материалов считается одинаковым, k – модуль деформации, принимается различным. Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Введем также обозначения $A_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, причем $A_0 = 0$ (рисунок). Величины в интервалах $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$ отмечаем с индексом i , где $i = 1, 2, \dots, n$.

1. Продольный сдвиг. Когда составной клин испытывает деформацию продольного сдвига, в каждом составляющем клине имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\tau_n}{r} = 0, \quad (1.1)$$

соотношения между деформациями и перемещениями

$$2\gamma_{ri} = \frac{\partial w_i}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta i} = \frac{\partial w_i}{\partial \theta},$$

$$\sigma_{oi} = \sqrt{\tau_{\theta i}^2 + \tau_{ri}^2}, \quad \varepsilon_{oi} = \sqrt{\left(\frac{\partial w_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Компоненты напряжений и перемещений ищем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= \lambda r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_{\theta i} = r^{(\lambda-1)m} \tau_i, \quad \tau_i = k_i f_i' \chi_i, \quad w_i = r^\lambda f_i, \\ \chi_i &= \left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2} \right)^{m-1} \quad A_{i-1} \leq \theta \leq A_i. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь система функции $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ является искомой собственной функцией, а λ – соответствующим собственным значением.

Подставляя выражения напряжений из (1.2) в уравнения равновесия (1.1), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(f_i' \chi_i)' + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m], \quad (1.3)$$

причем $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

Умножая обе части уравнения (1.3) на $k_i f_i$, интегрируя по θ в пределах каждого интервала составляющих клиньев $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$ и суммируя, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_{i-1}}^{A_i} [(k_i f_i' \chi_i)' + \eta k_i f_i \chi_i] f_i d\theta = 0.$$

Произведя интегрирование по частям и преобразуя, получаем

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_{i-1}}^{A_i} k_i (f_i'^2 - \eta f_i^2) \chi_i d\theta - L = 0, \quad (1.4)$$

где

$$L = \sum_{i=1}^n k_i f_i' f_i \chi_i \Big|_{A_{i-1}}^{A_i} = \sum_{i=1}^n \tau_i f_i \Big|_{A_{i-1}}^{A_i}.$$

Преобразовывая, находим

$$L = \tau_n f_n \Big|_{\theta=A_n} - \tau_1 f_1 \Big|_{\theta=0} + \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i f_i - \tau_{i+1} f_{i+1}) \Big|_{\theta=A_i}. \quad (1.5)$$

На контактных поверхностях следует соблюдать условия сопряжения. В нашем случае они пишутся в виде $f_i = f_{i+1}$, $\tau_i = \tau_{i+1}$ при $\theta = A_i$, причем $i = 1, 2, \dots, n-1$. На внешних краях составного клина могут быть поставлены краевые условия: первого рода, тогда $\tau_1(0) = \tau_n(A_n) = 0$; второго рода, $f_1(0) = f_n(A_n) = 0$; третьего рода, $\tau_1(0) = f_n(A_n) = 0$, $f_1(0) = \tau_n(A_n) = 0$.

Легко заметить, что для указанных гранично-контактных условий из (1.5) следует $L = 0$.

Тогда (1.4) переписывается в виде

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{f_i'^2 - \eta f_i^2}{\left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0, \quad (1.6)$$

где $\gamma_i = k_i / k_1$.

Подбирая функции f_i таким образом, чтобы они удовлетворяли по возможности большому числу гранично-контактных условий, подставляя в (1.6) и производя интегрирование, приходим к трансцендентному уравнению относительно λ в зависимости от параметров, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n; m$.

Для линейно-упругого ($m=1$) однородного ($\gamma_i = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$, $f_i = f$) клина из (1.6) находим

$$\int_0^{\alpha} (f_i'^2 - \lambda^2 f_i^2) d\theta = 0. \quad (1.7)$$

Полагая в (1.7) для граничных условий первого рода

$$f = -\frac{\alpha}{\pi} \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta,$$

будем иметь уравнение

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha},$$

совпадающее с соответствующим точным значением.

Принимая в (1.6) $\lambda = 1$, находим

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{f_i'^2 - f_i^2}{\left(\sqrt{f_i'^2 + f_i^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \quad (1.8)$$

В n -мерном координатном пространстве $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ уравнение (1.7) определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений в зависимости от параметров $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n; m$.

2. Плоская деформация. В каждом составляющем клине имеем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

соотношения между компонентами деформации и перемещения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

зависимости между напряжениями и деформацией

$$\sigma_r - \sigma_{\theta} = 2k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \varepsilon_r, \quad \tau_{r\theta} = 2k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \gamma_{r\theta},$$

интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_{0i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_{0i} = 2\sqrt{\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\theta}^2}.$$

Предварительно вводя обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_i &= [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i]' + 4\eta k_i f_i' \chi_i, \\ \tau_i &= k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i, \quad \delta = 1 - \lambda^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

компоненты напряжения и перемещения представим в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{\theta} + 4\lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \sigma_{\theta} = \frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m} \sigma_i, \\ \tau_{r\theta} &= r^{(\lambda-1)m} \tau_i, \quad u_i = r^{\lambda} f_i', \quad v = -(\lambda+1)r^{\lambda} f_i, \\ \chi_i &= \left(\sqrt{(f_i'' + \delta f_i)^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\right)^{m-1}, \quad A_{i-1} \leq \theta \leq A_i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем $i = 1, 2, \dots, n$.

Система функций $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ рассматривается как искомая собственная функция, а λ — соответствующее собственное значение задачи.

Подставляя напряжения из (2.3) в уравнения равновесия (2.1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$[(f_i'' + \delta f_i) \chi_i]'' + \nu(f_i'' + \delta f_i) \chi_i + 4\eta(f_i' \chi_i)' = 0, \quad (2.4)$$

где $\nu = 1 - \eta^2 / \lambda^2$, причем $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

Умножая обе части уравнения (2.4) на $k_i f_i$ и интегрируя по θ в пределах каждого интервала составляющих клиньев $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$, а затем суммируя, находим

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_{i-1}}^{A_i} \left\{ [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i]'' + \nu k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i + 4\eta (k_i f_i' \chi_i)' \right\} f_i d\theta = 0. \quad (2.5)$$

Интегрируя по частям дважды, находим

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i} [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i]'' f_i d\theta = [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i]' f_i \Big|_{A_{i-1}}^{A_i} -$$

$$- [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i] f_i' \Big|_{A_{i-1}}^{A_i} + \int_{A_{i-1}}^{A_i} [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i] f_i'' d\theta,$$

а также

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i} k_i (f_i' \chi_i)' f_i d\theta = k_i f_i' f_i \chi_i \Big|_{A_{i-1}}^{A_i} - \int_{A_{i-1}}^{A_i} k_i f_i'^2 \chi_i d\theta.$$

Из (2.5) с учетом последних преобразований получим

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_{i-1}}^{A_i} \left[(f_i'' + \delta f_i) (f_i'' + \nu f_i) - 4\eta f_i'^2 \right] k_i \chi_i d\theta - L = 0, \quad (2.6)$$

где

$$L = \sum_{i=1}^n \left\{ [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i]' + 4\eta k_i f_i' \chi_i \right\} f_i \Big|_{A_{i-1}}^{A_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^n [k_i (f_i'' + \delta f_i) \chi_i] f_i' \Big|_{A_{i-1}}^{A_i}.$$

Далее, учитывая обозначения (2.2), из (2.7) будем иметь

$$L = \sum_{i=1}^n (\sigma_i f_i - \tau_i f_i') \Big|_{A_{i-1}}^{A_i}. \quad (2.8)$$

Преобразование (2.8) можно представить в следующей форме:

$$L = (\sigma_n f_n - \tau_n f_n')_{\theta=A_n} - (\sigma_1 f_1 - \tau_1 f_1')_{\theta=A_0} + \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_i f_i - \sigma_{i+1} f_{i+1})_{\theta=A_i} - \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i f_i' - \tau_{i+1} f_{i+1}')_{\theta=A_i}. \quad (2.9)$$

На контактных поверхностях следует выполнять условия сопряжения $\sigma_i = \sigma_{i+1}$, $\tau_i = \tau_{i+1}$, $f_i = f_{i+1}$, $f_i' = f_{i+1}'$ при $\theta = A_i$, причем $i = 1, 2, \dots, n-1$. На внешних краях могут быть поставлены граничные условия: первого рода, тогда $\sigma_1(0) = \tau_1(0) = \sigma_n(A_n) = \tau_n(A_n) = 0$, второго рода, тогда $f_1(0) = f_1'(0) = f_n(A_n) = f_n'(A_n) = 0$, третьего рода, тогда $\sigma_1(0) = \tau_1(0) = f_n(A_n) = f_n'(A_n) = 0$, или же $f_1(0) = f_1'(0) = \sigma_n(A_n) = \tau_n(A_n) = 0$.

Для всех приведенных гранично-контактных условий из (2.9) заключаем, что $L = 0$. Тогда из (2.6) следует

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{(f_i'' + \delta f_i)(f_i'' + \lambda f_i') - 4\pi f_i'^2}{\left(\sqrt{(f_i'' + \delta f_i)^2 + 4\lambda f_i'^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \quad (2.10)$$

Подбирая функции f_i , удовлетворяющие по возможности большому числу гранично-контактных условий, подставляя в (2.10) и интегрируя, приходим к трансцендентному уравнению относительно λ в зависимости от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma_2, \dots, \gamma_n, m$.

Полагая в (2.10) $\lambda = 1$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{f_i''^2 - 4f_i'^2}{\left(\sqrt{f_i''^2 + 4f_i'^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \quad (2.11)$$

В координатном n -мерном пространстве $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ уравнение (2.11) определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону мало-напряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Указанная поверхность зависит от n параметров: $\gamma_2, \dots, \gamma_n, m$.

Институт механики НАН Армении

Կ. Ս. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Մ. Ա. ՉԱԴՈՅԱՆ

Միացությունների ամրության ուսումնասիրման ինտեգրալային եղանակը

Բաղադրյալ մարմնի միացությունների ամրությունը կարելի է ասպահովել ուսումնասիրելով միացման մակերևույթի եզրում թերլարվածության պայմանները (1): Այդ ուսումնասիրությունը հանգում է դիֆերենցիալ հավասարումների մի որոշակի համակարգի համար սեփական արժեքների խնդրի ուսումնասիրությանը համասեռ եզրային-կոնտակտային պայմանների դեպքում: Դրա հիման վրա ֆիզիկական և երկրաչափական տարածական կոորդինատային սիստեմում կառուցվում են թերլարվածության տիրույթները, որի օգնությամբ ընտրվում են անկյունային կետի շրջակայքի պարամետրերի կոմ-

բինացիաները, որոնք ապահովում են զրոյական լարումներ ուսումնասիրվող եզրում: Սակայն նման խնդիր միացությունների ամրության վերաբերյալ կարելի է ուսումնասիրել շրջանցելով դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան լուծումը (2): Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է այդ խնդիրը: Առանց ուսումնասիրելու դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները նշված եզրային-կոնտակտային պայմանների համար, երկայնական սահքի և հարթ դեֆորմացիաների խնդիրների համար, սեփական արժեքների որոշումը հանգում է ինտեգրալ պայմանի բավարարմանը, որից ստացվում է որոնելի սեփական արժեքը: Նախապես ֆունկցիաներն ընտրվում են այնպես, որ հնարավորին չափով շատ թվով եզրային պայմանների բավարարեն: Բաղադրիչ սեպերի նյութերն ընդունվում են աստիճանային ամրապնդվող, որոնց ցուցիչները հավասար են, իսկ դեֆորմացիայի մոդուլները տարբեր:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К.С.Чобанян, Напряжение в составных упругих телах, Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1987. ² М.А.Задоян, Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.



УДК 531.539.376

Կ. Ա. Կարապետյան

**О сравнении мер ползучести легкого бетона
при растяжении и сжатии в различных зонах поперечного
сечения массивных элементов**

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 23/ХІ 1998)

Как известно, меры ползучести бетона при сжатии и растяжении отличаются друг от друга, что предопределяет их учет при осуществлении расчетов массивных конструкций.

В работах (1,2) установлено, что увеличение размеров поперечного сечения опытных образцов от 7x7 до 20x20 см приводит к увеличению значения отношения меры ползучести бетона при растяжении (C^+) к мере ползучести при сжатии (C^-), независимо от рода заполнителя, влажности образцов и направления нагрузки по отношению к слоям укладки бетона. В этих работах на основании экстраполяции опытных данных делается прогноз о величине отношения C^+ / C^- для бетонных массивов с размерами поперечного сечения 200x200 см.

Следует, однако, отметить, что деформационные свойства бетонных массивов неоднородны: вблизи поверхности (наружный слой) ползучесть как при растяжении, так и при сжатии выражена намного больше, чем в глубине (3). В работе (4) показано также, что в климатических условиях Армении у массивных элементов из легкого бетона толщина высыхающих наружных слоев в радиальном направлении составляет примерно 9 см.

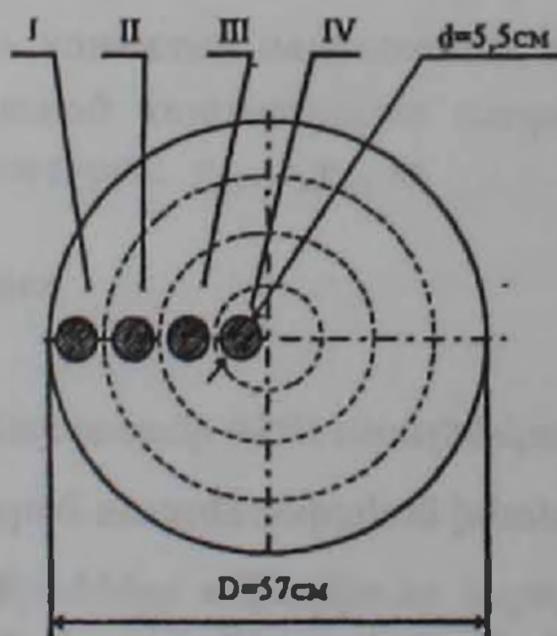
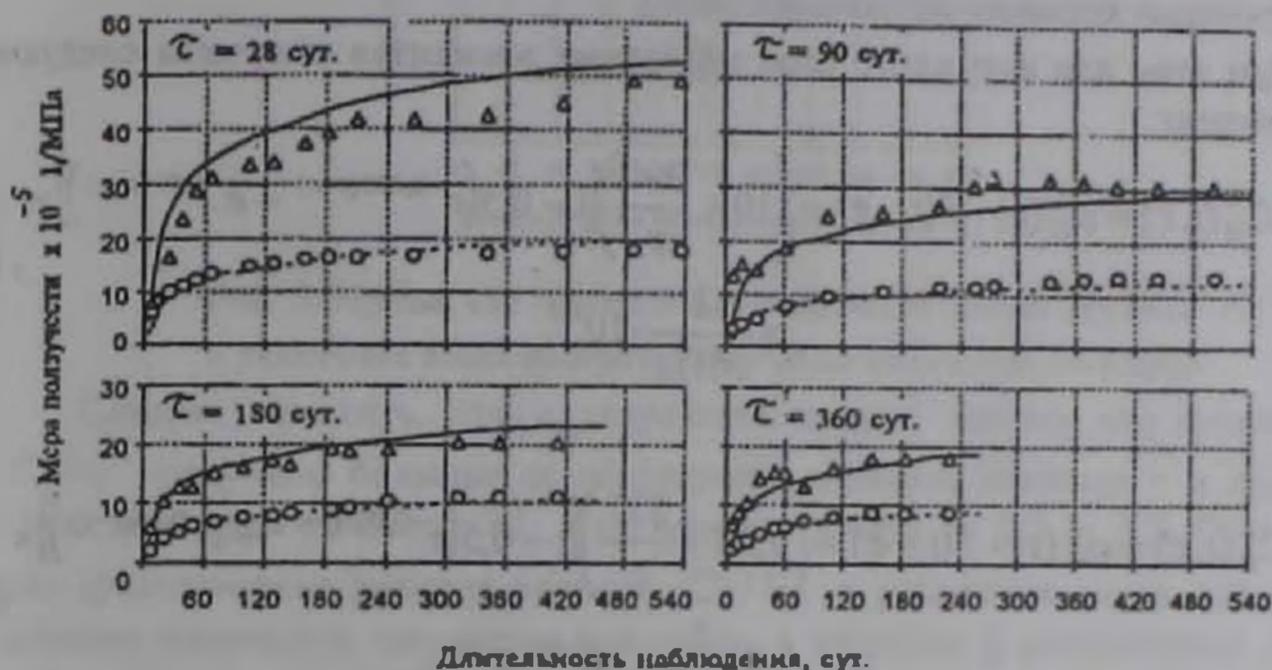


Рис. 1. Зоны поперечного сечения большого цилиндра,
из которого выбуривали опытные образцы

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования отношения мер ползучести легкого бетона при его растяжении и сжатии в зависимости от координат поперечного сечения массивных элементов с учетом возраста.

Экспериментальные исследования проводили на цилиндрических образцах диаметром 5,5 и высотой 22 см, выбуренных из различных зон поперечного сечения массивных цилиндров диаметром 57 и высотой 25 см (рис.1) в возрасте 28, 90, 180 и 360 сут. Состав бетона (по массе) 1:1,43:2,50, В/Ц=0,86, расход цемента составил 294 кг/м³. Для приготовления бетона применяли песок ($\gamma_p = 1117$ кг/м³) и щебень ($\gamma_{\text{ш}} = 834$ кг/м³) с фракцией 5-20 мм из литондной пемзы, взятой из карьера Джрабер (Республика Армения), и портландцемент активностью 50 МПа из Араратского цементного завода.

а) Зона I выбуривания опытных образцов



б) Зоны II и III выбуривания опытных образцов



Рис. 2. Кривые мер ползучести бетона в различных зонах поперечного сечения массивных элементов

Опыты проводили на пружинных силовых установках. Для имитации работы бетона в различных зонах поперечного сечения массивных элементов образцы, выбуренные из зон II и III (ядровая часть), сразу гидроизолировали и в таком состоянии подвергали длительному испытанию. Образцы, выбуренные из зоны I (наружный слой), толщина которой по радиусу составляет 8-10 см, испытывали без гидроизоляции. Величина напряжения для всех образцов при сжатии составляла 5 МПа, а при растяжении — 0,4 МПа. В каждом случае испытывали по 3 образца. На таком же количестве образцов-близнецов измеряли усадочные деформации. В период проведения опытов температура воздуха в лабораторном помещении составляла $22 \pm 5^\circ\text{C}$, а относительная влажность — $58 \pm 12\%$.

Согласно полученным результатам величины мер ползучести опытных образцов, взятых из зон II и III поперечного сечения массивных элементов, в каждом рассматриваемом возрасте оказались практически одинаковыми. Учитывая это при обсуждении результатов, исходили из сравнения мер ползучести, полученных в наружном слое и в ядровой части массивных элементов.

Экспериментальные данные о мерах ползучести бетона в указанных выше зонах поперечного сечения массивных элементов в различных возрастах показаны на рис.2. Там же показаны соответствующие кривые мер ползучести при растяжении C^+ (сплошные линии) и сжатии C^- (пунктирные линии), построенные согласно аппроксимациям (5).

При этом для наружного слоя массивных элементов получены следующие выражения:

$$C_H^+(t, \tau) = \varphi_H^+(\tau) \cdot f(t - \tau) = \left(19 + \frac{990}{\tau}\right) \left[1 - 0,5(e^{-0,005(t-\tau)} + e^{-0,06(t-\tau)})\right] \times \frac{1}{\text{МПа}} \cdot 10^{-5}, \quad (1)$$

$$C_H^-(t, \tau) = \varphi_H^-(\tau) \cdot f(t - \tau) = \left(9,53 + \frac{312}{\tau}\right) \left[1 - 0,5(e^{-0,005(t-\tau)} + e^{-0,06(t-\tau)})\right] \times \frac{1}{\text{МПа}} \cdot 10^{-5}, \quad (2)$$

а для их ядра —

$$C_{\text{я}}^+(t, \tau) = \varphi_{\text{я}}^+(\tau) \cdot f(t - \tau) = \left(8,3 + \frac{663}{\tau}\right) \left[1 - 0,5(e^{-0,005(t-\tau)} + e^{-0,06(t-\tau)})\right] \times \frac{1}{\text{МПа}} \cdot 10^{-5}, \quad (3)$$

$$C_{\text{я}}^-(t, \tau) = \varphi_{\text{я}}^-(\tau) \cdot f(t - \tau) = \left(0,9 + \frac{120}{\tau}\right) \left[1 - 0,5(e^{-0,005(t-\tau)} + e^{-0,06(t-\tau)})\right] \times \frac{1}{\text{МПа}} \cdot 10^{-5}. \quad (4)$$

Из приведенных зависимостей очевидно, что отношение меры ползучести при растяжении к мере ползучести при сжатии как в наружных слоях, так и в ядровой части массивных элементов в любой момент времени наблюдения не зависит от длительности действия нагрузки $t - \tau$. Отношение это является только функцией возраста бетона τ к моменту нагружения образцов и имеет следующий вид:

для наружного слоя массивов

$$\lambda_H(\tau) = \frac{C_H^+(t, \tau)}{C_H^-(t, \tau)} = 1,99 \frac{\tau + 52,10}{\tau + 32,74}, \quad (5)$$

для ядра массивов

$$\lambda_{\text{я}}(\tau) = \frac{C_{\text{я}}^+(t, \tau)}{C_{\text{я}}^-(t, \tau)} = 9,22 \frac{\tau + 79,88}{\tau + 133,33}. \quad (6)$$

На рис.3 изображены кривые функции соотношения мер ползучести $\lambda(\tau) = C^+ / C^-$ в различных зонах поперечного сечения массивных элементов, в зависимости от возраста бетона к моменту нагружения, построенные согласно выражениям (5) и (6).

Из рис.3 следует, что начиная с 28 суток с дальнейшим увеличением возраста бетона значение функции $\lambda(\tau)$ в наружных слоях массивов уменьшается, стремясь асимптотически к некоторой величине, существенно большей единицы. В ядровой же части массивов наблюдается обратное явление: увеличение возраста приводит к существенному увеличению значения $\lambda(\tau)$.



Рис. 3. Кривые соотношений мер ползучести бетона $\lambda(\tau) = C^+ / C^-$ в различных зонах поперечного сечения массивных элементов

Следует отметить, что в результате прямых опытов для соотношения C^+ / C^- получены большие по абсолютной величине значения – в наружных слоях массивов от 2,6 до 2,1, в их ядровых частях от 6,2 до 8,2. Обнаруженная существенная разница величин C^+ / C^- в различных зонах поперечного сечения массивных элементов находится в согласии с результатами опытов, поставленных соответственно на обычных и гидронзолированных образцах, приготовленных из тяжелого бетона (2) и из бетона на песке и щебне из вулканического шлака (6).

Таким образом, на основании результатов исследований, представленных в настоящей работе, можно заключить, что отношение мер ползучести легкого бетона при его растяжении и сжатии по поперечному сечению массивных элементов неоднородно: его значение в ядровых частях массивов намного больше, чем в их наружных слоях.

Институт механики НАН Армении

Կ Ա Կ Ա Ր Ա Պ Ե Տ Յ Ա Ն

Չանգվածային տարրերի ընդլայնական կտրվածքի տարրեր գոտիներում բերված բնտոնի ձգման և սեղմման սողքի չափերի համեմատության մասին

Աշխատանքում բերված են լիթոիդպեմզաբետոնե գլանական զանգվածային տարրերի ընդլայնական կտրվածքի տարրեր գոտիներում բետոնի ձգման և սեղմման սողքի չափերի հարաբերակցության ուսումնասիրման արդյունքները: Փորձարկվել են փորձանմուշներ, որոնք կտրված-հանված են բետոնե տարրի կտրվածքի համապատասխան գոտիներից:

Ստացված է, որ բետոնի ձգման և սեղմման սողքի չափերի հարաբերակցության մեծությունը՝ ըստ զանգվածային տարրի ընդլայնական կտրվածքի, խիստ անհամասեռ է և հապես կախված է բետոնի հասակից:

Ստացված փորձերի արդյունքում ստացված են հիշյալ հարաբերության մեծության բացարձակ մեծ արժեքներ. 2,1-ից մինչև 2,6 տարրի արտաքին, չորացող գոտում, որի լայնությունը հայաստանի բնակլիմայական պայմաններում կազմում է 8-10 սմ, և 6,2-ից մինչև 8,2 տարրի միջուկում:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 К.С. Каралетян, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т.17, №4, с.71-90 (1964).
- 2 К.С. Каралетян, Р.А. Котикян, Изв. АН СССР, МТТ, №5, с.192-201 (1972).
- 3 К.С. Каралетян, К.А. Каралетян, Изв. АН АрмССР, Механика, т.36, №2, с.37-53 (1983).
- 4 К.С. Каралетян, К.А. Каралетян, Изв. АН АрмССР, Механика, т.35, №4, с.56-67 (1982).
- 5 Н.Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М.-Л., Гостехтеориздат, 1952.
- 6 Ф. Крумл, Р.А. Котикян, К.С. Каралетян, Изв. АН АрмССР, Механика, т.32, №3, с.75-86 (1979).

УДК 539.3

С. О. Саркисян

Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости

(Представлено академиком НАН Армении С.А. Амбарцумяном 5/1 1999)

Плоская задача несимметричной теории упругости излагается в (1-5). В (6,7) приведен обзор работ, посвященных решению прикладных задач теории концентрации напряжений в рамках плоской задачи несимметричной теории упругости.

Построение прикладной плоской теории (обобщенного плоского напряженного состояния) и теории изгиба тонких пластин по несимметричной теории упругости можно осуществлять, применяя асимптотический метод интегрирования трехмерных уравнений несимметричной теории упругости в области тонкой пластинки (8,9).

В данной работе излагается асимптотическая теория плоского напряженного состояния (симметричная по x_3 задача) тонкой пластинки по моментной теории упругости. Построен функционал общего вариационного принципа прикладной теории плоского напряженного состояния тонкой пластинки по несимметричной теории упругости, на основе которого выводятся основные разрешающие уравнения и граничные условия указанной теории.

При построении и изучении асимптотических разложений в трехмерной области тонкой пластинки будем руководствоваться общезвестным асимптотическим методом (10-12) изучения проблем теории пластин и оболочек.

1. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Отнесем срединную плоскость к декартовой прямоугольной системе координат Ox_1, Ox_2 . Ось Ox_3 будет направлена по нормали к срединной плоскости пластинки.

Будем исходить из основных уравнений теории несимметричной упругости с независимыми полями перемещений и вращений (1).

Уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad \nabla_j \mu^{ij} + \varepsilon^{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0, \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{ik}\delta_{ij}, \\ \mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{ik}\delta_{ij}, \end{cases} \quad (1.2)$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases} \gamma_{ij} = (\mu' + \alpha')\sigma_{ij} + (\mu' - \alpha')\sigma_{ij} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}, \\ \chi_{ij} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{ij} + \beta'\delta_{ij}\mu_{kk}, \end{cases} \quad (1.3)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = \nabla_i u_j - \varepsilon_{kij}\omega^k, \quad \chi_{ij} = \nabla_i \omega_j, \quad (1.4)$$

где σ^{ij}, μ^{ij} — компоненты силовых и моментных напряжений, γ_{ij}, χ_{ij} — компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения, u — вектор перемещения, ω — вектор независимого поворота точек тела, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ или $\lambda', \mu', \alpha', \beta', \gamma', \varepsilon'$ — упругие константы.

На плоскостях $x_3 = \pm h$ пластинки заданы условия

$$\sigma_{3i} = p_i^\pm, \quad \mu_{3i} = m_i^\pm \quad \text{при } x_3 = \pm h. \quad (1.5)$$

На боковой поверхности пластинки ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) заданы условия смешанного типа

$$\begin{cases} \sigma^{\bar{n}} n_j = p_j^i, \quad \mu^{\bar{n}} n_j = m_j^i \quad \text{на } \Sigma_1, \\ u = u_*(x_i), \quad \omega = \omega_*(x_i) \quad \text{на } \Sigma_2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Решение поставленной задачи складывается из суммы решений симметричной по x_3 и обратно-симметричной задач.

Рассмотрим симметричную по x_3 задачу.

2. В уравнениях трехмерной несимметричной теории упругости перейдем к безразмерной координатной системе $(10-12)$

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad \eta = \frac{x_2}{l}, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \quad (2.1)$$

где l — характерный размер пластинки. В результате на основе (1.1)-(1.4) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром и $\delta = \frac{x}{l}$, решение которой складывается из двух типов решений: незатухающего при удалении от боковой поверхности в глубь области и типа погранслоя.

Будем изучать определение незатухающего (внутреннего) напряженно-деформированного состояния.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)}, \quad (2.2)$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов.

После подстановки (2.2) в систему уравнений (1.1)-(1.4) с учетом (2.1)

получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов $Q^{(s)}$ разложения при симметричной по ζ задаче лишь при

$$\begin{cases} q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, u_1, u_2, \omega_3, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, u_3, \omega_1, \omega_2, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{33}, \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{33}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Полученную систему уравнений можно интегрировать по ζ , в результате чего получим

$$\begin{cases} u_1^{(s)} = v_1^{(s)}(\xi, \eta) + u_1^{*(s)}, & \omega_1^{(s)} = \zeta \Omega_1^{(s)}(\xi, \eta) + \omega_1^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ u_3^{(s)} = \zeta w_3^{(s)}(\xi, \eta) + u_3^{*(s)}, & \omega_3^{(s)} = \Omega_3^{(s)}(\xi, \eta) + \omega_3^{*(s)}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(s)} = \tau_{11}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{11}^{*(s)}, & \sigma_{12}^{(s)} = \tau_{12}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{12}^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{31}^{(s)} = \zeta \tau_{31}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{31}^{*(s)}, & \sigma_{13}^{(s)} = \zeta \tau_{13}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{13}^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{33}^{(s)} = T_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \zeta^2 \tau_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{33}^{*(s)}, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \mu_{31}^{(s)} = v_{31}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{31}^{*(s)}, & \mu_{13}^{(s)} = v_{13}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{13}^{*(s)}, \\ \mu_{11}^{(s)} = \zeta v_{11}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{11}^{*(s)}, & \mu_{33}^{(s)} = \zeta v_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{33}^{*(s)}, \\ \mu_{12}^{(s)} = \zeta v_{12}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{12}^{*(s)}, & \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$\{w^{(s)} = l\lambda'(\tau_{11}^{(s)} + \tau_{22}^{(s)}), \quad \Omega_1^{(s)} = l[(\gamma' + \varepsilon')v_{31}^{(s)} + (\gamma' - \varepsilon')v_{13}^{(s)}], \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \tau_{11}^{(s)} = \frac{2\mu' + \lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{12}^{(s)} = \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi} - \Omega_3^{(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \eta} + \Omega_3^{(s)} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{31}^{(s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{21}^{(s)}}{\partial \eta} \right), \\ \tau_{13}^{(s)} = \frac{1}{\mu' + \alpha'} \frac{1}{l} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu' + \alpha'} \Omega_2^{(s)} - \frac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} \tau_{31}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{33}^{(s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{23}^{(s)}}{\partial \eta} \right), \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_{13}^{(s)} &= \frac{1}{\gamma' + \varepsilon' l} \frac{1}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} u_{31}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 u_{33}^{(s)} &= - \left(\frac{\partial u_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{23}^{(s)}}{\partial \eta} \right) - l(\tau_{12}^{(s)} - \tau_{21}^{(s)}), \\
 u_{11}^{(s)} &= \frac{\beta' + 2\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_2^{(s)}}{\partial \eta} - \\
 &\quad - \frac{2\beta'\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} u_{33}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 u_{12}^{(s)} &= \frac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon' l} \frac{1}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega_2^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon' l} \frac{1}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega_1^{(s)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2),
 \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Величины со звездочками определяются по формулам

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_1^{*(s)} &= l \int_0^\zeta \omega_2^{(s-2)} d\zeta + l \int_0^\zeta [(\mu' + \alpha') \sigma_{31}^{(s-2)} + (\mu' - \alpha') \sigma_{13}^{(s-2)}] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 u_3^{*(s)} &= l \int_0^\zeta [\lambda' (\sigma_{11}^{*(s)} + \sigma_{22}^{*(s)}) + (\lambda' + 2\mu') \sigma_{33}^{(s-2)}], \\
 \omega_3^{*(s)} &= l \int_0^\zeta [\beta' (\mu_{11}^{(s-2)} + \mu_{22}^{(s-2)}) + (\beta' + 2\gamma') \mu_{33}^{(s-2)}] d\zeta, \\
 \omega_1^{*(s)} &= l \int_0^\zeta [(\gamma' + \varepsilon') \mu_{31}^{*(s)} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{13}^{*(s)}] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2),
 \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sigma_{11}^{*(s)} &= \left[\frac{2\mu' + \lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial u_1^{*(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial u_2^{*(s)}}{\partial \eta} \right] - \frac{2\mu'\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \sigma_{33}^{(s-2)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 \sigma_{12}^{*(s)} &= \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u_2^{*(s)}}{\partial \xi} - \omega_3^{*(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u_1^{*(s)}}{\partial \eta} + \omega_3^{*(s)} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 \sigma_{31}^{*(s)} &= - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{21}^{*(s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
 \sigma_{13}^{*(s)} &= \frac{1}{\mu' + \alpha' l} \frac{1}{\partial \xi} \frac{\partial u_3^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu' + \alpha'} \omega_2^{*(s)} - \frac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} \sigma_{31}^{*(s)}, \\
 \sigma_{33}^{*(s)} &= - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{*(s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta,
 \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
\mu_{31}^{*(S)} &= -\int_0^\zeta \left[\left(\frac{\partial \mu_{11}^{*(S-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu_{21}^{*(S-2)}}{\partial \eta} \right) + l(\sigma_{23}^{*(S-2)} - \sigma_{32}^{*(S-2)}) \right] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\mu_{13}^{*(S)} &= \frac{1}{\gamma' + \varepsilon' l} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_3^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \mu_{31}^{*(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\mu_{33}^{*(S)} &= -\int_0^\zeta \left[\left(\frac{\partial \mu_{13}^{*(S)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu_{23}^{*(S)}}{\partial \eta} \right) + l(\sigma_{12}^{*(S)} - \sigma_{21}^{*(S)}) \right] d\zeta, \\
\mu_{11}^{*(S)} &= \frac{\beta' + 2\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \eta} - \\
&\quad - \frac{2\beta'\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \mu_{33}^{*(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\mu_{12}^{*(S)} &= \frac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon' l} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon' l} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2),
\end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

и являются полиномами по ζ . При $S=0;1$ они равны нулю, так как $Q^{(S)} \equiv 0$ при $S < 0$. Формулы (2.10)-(2.12) имеют рекуррентный характер и позволяют определить без решения каких-либо уравнений величины со звездочкой для приближения S , если известны все величины, относящиеся к приближениям $0, 1, \dots, (S-1)$.

Из формул (2.4) будем иметь следующую картину качественного распределения перемещений и поворотов по толщине пластинки при $S=0$ и $S=1$: тангенциальные компоненты вектора перемещения и нормальный компонент вектора поворота не зависят от поперечной координаты ζ , т.е. постоянны по толщине пластинки. Отметим, что эти качественные результаты асимптотического метода интегрирования можно принимать как основу или гипотезу при построении прикладной теории тонких пластин в смысле плоского напряженного состояния по моментной теории упругости.

Будем требовать, чтобы определяемые по формулам (2.5), (2.6) силовые и моментные напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.5) (в смысле симметричной по x_3 задачи), в результате получим

$$\tau_{31}^{(S)} = \frac{1}{2} X_1^{(S)}, \quad \nu_{31}^{(S)} = \frac{1}{2} m_1^{(S)}, \quad T_{33}^{(S)} + \frac{1}{2} \tau_{33}^{(S)} = \frac{1}{2} Z_1^{(S)}, \quad \nu_{33}^{(S)} = \frac{1}{2} q_1^{(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned}
X_1^{(0)} &= X_1, \quad X_1^{(1)} = 0, \quad X_1^{(k)} = -2\sigma_{31}^{*(k)}(\xi=1), \quad m_1^{(0)} = m_1, \\
m_1^{(1)} &= 0, \quad m_1^{(k)} = -2\mu_{31}^{*(k)}(\xi=1),
\end{aligned}$$

$$X_1 = p_1^+ + p_1^-, \quad m_1 = m_1^+ - m_1^-, \quad (1 \rightarrow 2), \quad (X \rightarrow Y \rightarrow Z), \quad (m \rightarrow p \rightarrow q).$$

Уравнения (2.7)-(2.9) и (2.13) составляют полную систему относительно неизвестных

$$v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, w^{(s)}, \Omega_1^{(s)}, \Omega_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}, \tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, \tau_{31}^{(s)}, \tau_{32}^{(s)}, \\ \tau_{13}^{(s)}, \tau_{23}^{(s)}, \tau_{33}^{(s)}, T_{33}^{(s)}, \\ u_{13}^{(s)}, u_{23}^{(s)}, u_{31}^{(s)}, u_{32}^{(s)}, u_{33}^{(s)}, u_{11}^{(s)}, u_{22}^{(s)}, u_{12}^{(s)}, u_{21}^{(s)}.$$

При этом основная разрешающая система уравнений будет относительно девяти величин $\tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, u_{23}^{(s)}, u_{13}^{(s)}, v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{21}^{(s)}}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} X_1^{(s)}, & (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial u_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{23}^{(s)}}{\partial \eta} + l(\tau_{11}^{(s)} - \tau_{21}^{(s)}) = -\frac{1}{2} q_1^{(s)}, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \tau_{11}^{(s)} = \frac{2\mu' + \lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \eta}, & (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{12}^{(s)} = \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi} - \Omega_3^{(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \eta} + \Omega_3^{(s)} \right), & (1 \leftrightarrow 2), \\ u_{13}^{(s)} = \frac{1}{\gamma' + \varepsilon' l} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \frac{1}{2} m_1^{(s)}, & (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p), \end{cases} \quad (2.15)$$

Систему (2.14), (2.15), в свою очередь, можно свести к трем уравнениям относительно $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}$. Найдя неизвестные, входящие в (2.14), (2.15), по соответствующим формулам определяем все величины внутренней задачи.

3. Введем теперь интегральные по толщине пластинки усилия и моменты. Для симметричной (по ζ) задачи эти понятия будут тангенциальными усилиями $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ и моментами L_{13} и L_{23} , которые определяются по формулам

$$\begin{cases} T_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3, & S_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_3, & L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dx_3, & (1 \rightarrow 2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим через $T_{11}^{(s)}, S_{12}^{(s)}, L_{13}^{(s)}, (1 \rightarrow 2)$ значения этих величин для приближения S . Учитывая (2.5) (2.6) и (3.1), для этих величин получим

$$\begin{cases} T_{11}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2\tau_{11}^{(s)} + T_{11}^{\alpha(s)}), & S_{12}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2\tau_{12}^{(s)} + S_{12}^{\alpha(s)}), \\ L_{13}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2u_{13}^{(s)} + L_{13}^{\alpha(s)}), & (1 \rightarrow 2), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{cases} (T_{11}^{\alpha(s)}, T_{12}^{\alpha(s)}, S_{12}^{\alpha(s)}, S_{21}^{\alpha(s)}) = \int_{-1}^1 (\sigma_{11}^{\alpha(s)}, \sigma_{22}^{\alpha(s)}, \sigma_{12}^{\alpha(s)}, \sigma_{21}^{\alpha(s)}) d\zeta, \\ (L_{13}^{\alpha(s)}, L_{23}^{\alpha(s)}) = \int_{-1}^1 (\mu_{13}^{\alpha(s)}, \mu_{23}^{\alpha(s)}) d\zeta, \end{cases} \quad (3.3)$$

причем

$$\left\{ T_{11} = \sum_{s=0}^S T_{11}^{(s)}, S_{12} = \sum_{s=0}^S S_{12}^{(s)}, L_{13} = \sum_{s=0}^S L_{13}^{(s)}, (1 \leftrightarrow 2). \right. \quad (3.4)$$

Используя (3.2), выразим $\tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, \nu_{13}^{(s)}, \nu_{23}^{(s)}$ через усилия и моменты соответственно и, подставляя их в систему (2.14), (2.15), будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}^{(s)}}{\partial x_2} &= \delta^{-1+s} \left[-X_1^{(s)} + l \left(\frac{\partial T_{11}^{*(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}^{*(s)}}{\partial x_2} \right) \right], (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial L_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^{(s)}}{\partial x_2} + (S_{12}^{(s)} - S_{21}^{(s)}) &= \\ &= \delta^{-1+s} \left[-q_1^{(s)} + l \left(\frac{\partial L_{13}^{*(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^{*(s)}}{\partial x_2} \right) + (S_{21}^{*(s)} - S_{12}^{*(s)}) \right], \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_{11}^{(s)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}^{(s)} + \nu \Gamma_{22}^{(s)}) + l \delta^{-1+s} T_{11}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \\ S_{12}^{(s)} &= 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{12}^{(s)} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{21}^{(s)} + l \delta^{-1+s} S_{12}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \\ L_{13}^{(s)} &= \frac{2h}{\gamma' + \varepsilon'} k_{13}^{(s)} - l \delta^{-1+s} \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} m_1^{(s)} + l \delta^{-1+s} L_{13}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{11}^{(s)} &= \delta^{-2+s} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12}^{(s)} = \delta^{-2+s} \left(\frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial x_1} - \Omega_3^{(s)} \right), \\ k_{13}^{(s)} &= \delta^{-2+s} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial x_1}, (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Здесь $\Gamma_{11}^{(s)}, \Gamma_{22}^{(s)}, \Gamma_{12}^{(s)}, \Gamma_{21}^{(s)}, k_{13}^{(s)}, k_{23}^{(s)}$ — компоненты тангенциальной деформации и изгиба-кручения в срединной плоскости пластинки.

Уравнения (3.5)-(3.7) при $S = 0$ дадут уравнения равновесия плоского напряженного состояния пластинки с соответствующими соотношениями упругости по несимметричной теории упругости (с независимыми полями перемещений и вращений).

Исключив из (3.5)-(3.7) $T_{11}^{(s)}, T_{22}^{(s)}, S_{12}^{(s)}, S_{21}^{(s)}, L_{13}^{(s)}, L_{23}^{(s)}$, решение задачи сведем к решению системы из трех уравнений относительно перемещений $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}$ и вращений $\Omega_3^{(s)}$.

4. Построение математически обоснованной теории тонких пластин по несимметричной теории упругости, в рамках приближений получаемой асимптотической теории, требует также применения общего вариационного принципа. Применение общего вариационного принципа позволяет наряду с уравнениями равновесия, соотношениями упругости, геометрическими соотношениями вывести соответствующие им граничные условия.

Функционал общего вариационного принципа трехмерной теории несимметричной упругости имеет вид

$$\begin{aligned}
 I = & \int_V \left\{ W(\gamma_{ij}, \chi_{ij}) - \sigma_{ij} [\gamma_{ij} - (\nabla_i u_j - \varepsilon_{kij} \omega_k)] - \mu_{ji} (\chi_{ij} - \nabla_i \omega_j) \right\} dv - \\
 & - \int_{s^+} (p_*^i u_i + m_*^i \omega_i) dS - \int_{s^-} (\bar{p}_*^i u_i + \bar{m}_*^i \omega_i) dS - \int_{\Sigma_1} (p_*^i u_i + m_*^i \omega_i) dS - \\
 & - \int_{\Sigma_2} [p^i (u_i - u_i^*) + m^i (\omega_i - \omega_i^*)] dS,
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $W(\gamma_{ij}, \chi_{ij})$ — плотность потенциальной энергии деформации (1).

Варьируя функционал (4.1) по всем функциональным аргументам, приходим (как в качестве уравнений Эйлера и в качестве естественных эйлеровых граничных условий) к уравнениям (1.1)–(1.4) и граничным условиям (1.5), (1.6) трехмерной теории несимметричной упругости.

На основе результатов асимптотической теории тонких пластин возможно приведение функционала (4.1) к двумерному континууму.

После перехода к координатам (2.1) и подстановки (2.2) в выражение (4.1), будем удерживать в нем члены, имеющие наибольший асимптотический порядок (т.е. δ^{-2}), в итоге получим формулу, определяющую функционал теории плоского напряженного состояния пластинки по несимметричной теории упругости

$$\begin{aligned}
 I_0 = & \int_S \left\{ W_0 - \left[T_{11} \left(\Gamma_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + T_{22} \left(\Gamma_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + S_{21} \left[\Gamma_{21} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3 \right) \right] + \right. \right. \\
 & + S_{12} \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3 \right) \right] + L_{13} \left(k_{13} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \right) + L_{23} \left(k_{23} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} \right) \left. \right\} dS - \\
 & - \int_S (m_1 h k_{31} + p_1 h k_{32}) dS - \int_S (X_1 u_1 + Y_1 u_2 + q_1 \Omega_3) dS - \\
 & - \int_{l_1} (p_{\nu\nu}^* u_\nu + p_{\alpha}^* u_\alpha + M_3^* \Omega_3) dl - \int_{l_2} [T_{\nu\nu} (u_\nu - u_\nu^*) + S_{\alpha} (u_\alpha - u_\alpha^*) + L_\nu (\Omega_3 - \Omega_3^*)] dl,
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где плотность (поверхностная) потенциальной энергии деформации выражается так:

$$\begin{aligned}
 W_0 = & \frac{2Eh}{2(1-\nu^2)} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu \Gamma_{12} \Gamma_{21}) + \frac{1}{2} 2h\mu (\Gamma_{21} + \Gamma_{12})^2 + \\
 & + \frac{1}{2} 2h\alpha (\Gamma_{21} - \Gamma_{12})^2 + \frac{1}{2} 2h\gamma (k_{31} + k_{13})^2 + \frac{1}{2} 2h\varepsilon (k_{31} - k_{13})^2 + \\
 & + 2h \frac{1}{2} \gamma (k_{32} + k_{23})^2 + \frac{1}{2} 2h\varepsilon (k_{32} - k_{23})^2
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{21}, \Gamma_{12}, k_{13}, k_{23}$ представляют собой компоненты тангенциальной деформации и изгиба-кручения в срединной плоскости пластинки; u_1, u_2 — тангенциальные перемещения, а Ω_3 — поворот (независимый) вокруг оси

Ox_3 точек срединной плоскости пластинки; u_ν, u_t – нормальное и касательное составляющие вектора перемещения точек контура (l) срединной плоскости пластинки; $P_{\nu\nu}^*, P_{\alpha}^*, M_3^*$ – внешние контурные (на l_1) усилия и момент; $\tilde{u}_\nu^*, \tilde{u}_t^*, \tilde{\Omega}_3^*$ – заданные перемещения и поворот точек контура (l_2) срединной плоскости пластинки.

Следует отметить, что k_{31} и k_{32} не содержат дополнительных степеней свободы, они выражаются так:

$$\left\{ k_{31} = \frac{1}{2(\gamma + \varepsilon)} m_1 - \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} k_{13}, (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p). \right. \quad (4.4)$$

Варьируя функционал (4.2) по всем функциональным аргументам, приходим к уравнениям теории плоского напряженного состояния при несимметричной теории упругости, а именно:

уравнения равновесия

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} &= -X_1, (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) &= -q_1, \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

соотношения упругости

$$\left\{ \begin{aligned} T_{11} = \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{11}} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11} + \nu \Gamma_{22}), (1 \leftrightarrow 2), \\ S_{12} = \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{12}} &= 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{21}, (1 \leftrightarrow 2), \\ L_{13} = \frac{\partial W}{\partial k_{13}} &= 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} k_{13} + hm_1 \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p), \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (4.7)$$

граничные условия

$$\left\{ \begin{aligned} \text{на } l_1: \quad T_{\nu\nu} &= P_{\nu\nu}^*, \quad S_{\alpha t} = P_{\alpha}^*, \quad L_\nu = M_3^*, \\ \text{на } l_2: \quad u_\nu &= \tilde{u}_\nu^*, \quad u_t = \tilde{u}_t^*, \quad \Omega_3 = \tilde{\Omega}_3^*. \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

При подстановке (4.6), (4.7) в уравнения равновесия (4.5) получим уравнения плоского напряженного состояния по несимметричной теории упругости в перемещениях и поворотах (независимых).

Гюмрийский государственный педагогический институт им.М.Налбандяна

Ս. Հ. ՄԱՐԳՍՅԱՆ

Առաձգականության մոմենտային տեսությանը բարակ սալի հարթ խնդրի ասիմպտոտիկական տեսությունը եվ վարիացիոն հավասարումը

Աշխատանքում շարադրվում է առաձգականության մոմենտային տեսությանը բարակ սալի հարթ լարվածության վիճակի ասիմպտոտիկական տեսությունը:

Երկրաչափական փոքր պարամետրերի առկայությունը բարակ սալի առաձգականության մոմենտային տեսության հավասարումներում այնպիսի է, որ դիֆերենցիալ հավասարումների նշված համակարգը դառնում է ոչ կանոնավոր (սինգուլյար) գրգռվող, որի դեպքում լուծումը արտահայտվում է ներքին խնդրի (չմարող լուծում) և սահմանային շերտի լուծումների գումար:

Կառուցվում են ներքին խնդրի ասիմպտոտիկական վերլուծումը ըստ ասիմպտոտիկական մոտավորումների:

Ելնելով ելակետային ասիմպտոտիկական վերլուծության որակական արդյունքներից, կառուցվում է առաձգականության մոմենտային տեսությանը բարակ սալի լարվածային վիճակի (կիրառական տեսությունը) վարիացիոն հավասարումը, որի հիման վրա արտածվում են այդ տեսության հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և եզրային պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Новацкий, Теория упругости, М., Мир, 1975. ² В.А.Пальмов, ПММ, т.28, в.6, с.1117-1120 (1964). ³ А.Н.Булыгин, Е.В.Кувшинский, ПММ, т.31, в.3, с.543-547 (1967). ⁴ Г.Н.Савин, в сб."Концентрация напряжений", Киев, Наукова думка, 1968. ⁵ Н.Ф.Морозов, Математические вопросы теории трещин, М., Наука, 1984. ⁶ Г.Н.Савин, Д.Н.Немиш, ПМ, т.4, вып.12, с.1-17 (1968). ⁷ Ю.В.Кириллов, А. А.Постников, А.И.Тюленев, в сб." Исследования пластин и оболочек", Казань, Изд-во КГУ, 1990. ⁸ Р.А.Дудников, С.А.Назаров, ДАН, т. 262, с.306-309 (1982). ⁹ С.О.Саркисян, Актуальная проблема механики оболочек. Тр.международ.конфер. посвященной памяти засл. деят. науки ТАССР проф. А.В.Сеченкова, Казань: 9-11 сентября 1998г., Казанское мат. о-во, Унипресс, с.198-203, 1998. ¹⁰ А.Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, М., Наука, 1976. ¹¹ Л.А.Агаловлян, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997. ¹² С.О.Саркисян, Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек, Ереван, Изд-во АН Армении, 1992.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Л. А. Мовсисян

К моментной теории упругости для тонких пластин

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Саркисяном 8/V 1998)

Как всегда “возмутителем спокойствия” оказался С.А.Амбарцумян.

Казалось бы, интерес к несимметричной теории упругости давно уже отпал. И вот в последние годы им предложено несколько теорий изгиба пластин несимметричной теории упругости ^(1,2) (по нашим сведениям, еще некоторые находятся в печати).

1. В данной статье предлагается вариант сведения трехмерных задач моментной теории упругости к двумерным. В основу положена гипотеза прямых в обобщенном смысле. В конечном счете основными отличиями настоящей постановки от ^(1,2) являются:

а) первоначально независимыми величинами предполагаются углы поворота,

б) учитывается поперечное обжатие.

С предлагаемой точностью последнее обстоятельство приводит только к уточнению плоской задачи. По этим же соображениям здесь основное внимание сосредоточено на плоской задаче. Ради краткости изложение ведется для одномерной задачи (считается, что в направлении оси y пластинка простирается до бесконечности и от нее ничего не зависит).

Согласно предложенной схеме принимается

$$\begin{aligned}u_x &= u(x,t) + z'u_1(x,t); \\u_z &= w(x,t) + z'w_1(x,t); \\ \omega_y &= \omega(x,t) + z'\omega_1(x,t), \quad z' = \frac{2}{h}z.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Вычисляя по этим величинам компоненты деформаций, для необходимых здесь силовых и моментных напряжений ⁽³⁾ получим

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + 2\frac{\lambda}{h}w_1;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + z' \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + (\mu - \alpha) \frac{2}{h} u_1 + 2\alpha(\omega + z' \omega_1); \\
\sigma_{31} &= (\mu + \alpha) \frac{2}{h} u_1 + (\mu - \alpha) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + z' \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - 2\alpha(\omega + z' \omega_1); \\
\sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) \frac{2}{h} w_1 + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u_1}{\partial x} \right); \\
\mu_{12} &= (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + z' \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right); \quad \mu_{32} = (\gamma + \varepsilon) \frac{2}{h} \omega_1.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

При сведении трехмерных задач к двумерным третье уравнение движения интегрируется только по высоте. Здесь, помимо этого, есть необходимость интегрировать его и после умножения на z . В связи с этим появляются новые усилия и моменты, отсутствующие в классической постановке, например,

$$T_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}, \mu_{ij}) z dz. \tag{1.3}$$

Уравнениями движения в усилиях и моментах будут

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + (X_1 - X_2) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x} - T_{33} + \frac{h}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{\rho h^2}{6} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x} - M_{13} + M_{31} - Q_{32} + \frac{h}{2} (\mu_{32}^{(1)} + \mu_{32}^{(2)}) = \frac{I h^2}{6} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + (Z_1 - Z_2) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{31} + \frac{h}{2} (X_1 + X_2) = \frac{\rho h^2}{6} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x} - T_{13} + T_{31} + (\mu_{32}^{(1)} - \mu_{32}^{(2)}) = I h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Здесь

$$T_{11} = h(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda w_1;$$

$$T_{33} = h\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + 2(\lambda + 2\mu) w_1;$$

$$T_{13} = 2(\mu - \alpha) u_1 + h(\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x} + 2\alpha h \omega;$$

$$T_{31} = (\mu + \alpha) u_1 + h(\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x} - 2\alpha h \omega; \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{h^2}{6}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x}; & M_{33} &= \frac{h^2}{6} \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x}; \\
M_{13} &= \frac{h^2}{6} \left[(\mu + \alpha) \frac{\partial w_1}{\partial x} + 2\alpha \omega_1 \right]; & M_{31} &= \frac{h^2}{6} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2\alpha \omega_1 \right]; \\
M_{12} &= \frac{h^2}{6}(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x}; & Q_{12} &= h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial x}; & Q_{32} &= 2(\gamma + \varepsilon) \omega_1.
\end{aligned}$$

Система (1.4) описывает плоскую задачу, а (1.5) – изгиб.

Подставляя (1.6) в (1.4) и (1.5), получим уравнения движений в перемещениях. Так как нас, в основном, будет интересовать плоская задача, то приведем только эту систему:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{h} \lambda \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{h} (X_1 - X_2) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
(\mu + \alpha) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h} \left[\frac{2}{h} (\lambda + 2\mu) w_1 + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\
+ 2\alpha \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{3}{h} (Z_1 + Z_2) &= \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - 4 \left[\alpha + \frac{3(\gamma + \varepsilon)}{h^2} \right] \omega_1 + \frac{3}{h} (\mu_{32}^{(1)} + \mu_{32}^{(2)}) = I \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}.$$

2. Будем изучать две задачи – до статике и по динамике.

Пусть один конец полосы заделан, а на другом действует растягивающее усилие:

$$u = w_1 = \omega_1 = 0 \text{ при } x = 0; \tag{2.1}$$

$$T_{11} = p, \quad M_{13} = 0, \quad \omega_1 = 0 \text{ при } x = L.$$

"Связывающий" коэффициент α , как правило, – малая величина, поэтому при определении расчетных величин можно довольствоваться точностью по α/μ включительно. Приведем выражение продольного перемещения

$$\begin{aligned}
u &= \frac{px}{h(\lambda + 2\mu)} + \frac{12\lambda^2 p}{\mu(\lambda + 2\mu)^2 h^3 s^3} \left\{ sx - \left(1 - \frac{\alpha}{2\mu} \right) \text{shsx} + \right. \\
&\quad \left. + \left[\text{thsL} + \frac{\alpha}{2\mu} (\text{thsL} + sL \text{th}^2 sL - sL) \right] \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{chsx} + \frac{\alpha}{2\mu} sx (\text{chsx} - \text{thsLshsx}) \right\} \\
s^2 &= \frac{48(\lambda + \mu)}{h^2(\lambda + 2\mu)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В классическом случае для перемещения в (2.2) присутствует только первый член в правой части. Следует отметить, что здесь помимо нормального усилия появляются новые усилия T_{33} , Q_{32} и моменты M_{13} , M_{31} , M_{12} .

Теперь рассмотрим распространение волн в бесконечной пластинке. Решение системы (1.7) без внешних нагрузок ищем в виде

$$(u_1, w_1, \omega_1) = C_j \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2.3)$$

В системе (1.7) учтены как поперечное обжатие, так и несимметричность НДС. В случае $\alpha = 0$ она расщепляется. Тогда в получаемой системе уточняется характер продольного движения (заодно появляется новое движение — от w_1). При пренебрежении же эффектом Пуассона ($\lambda = 0$) система опять расщепляется и здесь совместно явствуют движения, обусловленные w_1 и ω_1 . К тому же, так как динамическая характеристика среды I очень малая величина и, следовательно, скорость волны от моментности во много раз больше, чем другие, то при определении первых двух скоростей можно пренебречь инерционным членом $I \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}$. По этим соображениям приведенные случаи будем рассматривать в отдельности.

В случае $I \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} = 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} (v^2 - a) \left[v^2 - \frac{1-\nu}{2}(1+\theta) - \frac{12}{k^2 h^2} a \right] + \\ + \frac{4\theta^2}{\Phi} (v^2 - a) + \frac{12}{k^2 h^2} a^2 \frac{v^2}{(1-\nu)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad a = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}, \\ \theta = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon + \gamma}{\mu h^2}, \quad \Phi = 4(\theta + 3\varphi) + \varphi k^2 h^2. \end{aligned}$$

В случае, когда $\lambda = 0$, дисперсионное уравнение от w_1 и ω_1 имеет вид ($I = \beta \rho h^2$)

$$\begin{aligned} \beta v^4 - v^2 \left[\beta(1+\theta) + \varphi + \frac{4}{k^2 h^2} (\theta + 6\beta + 3\varphi) \right] + \\ + \left(1 + \theta + \frac{24}{k^2 h^2} \right) \left[\varphi + \frac{4}{k^2 h^2} (\theta + 3\varphi) \right] - \frac{4\theta^2}{k^2 h^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В таблице приведены корни уравнений (относительные фазовые скорости) (2.4) и (2.5) (v_1 — от продольного движения, v_2 — от обжатия, v_3 — от моментности) для различных kh при $\nu = 0,25$; $\theta = 0,1$; $\varphi = 0,2$.

Корни уравнения (2.4) при $\theta = 0$ помещены в первых двух строках. При $\theta = 0,1$ эти же корни с приведенной точностью не отличаются от табличных данных (в четвертых знаках). Однако, как правило, и v_1 , и v_2 при учете эффекта моментности увеличиваются.

kh	0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2
v_1	0,999	0,999	0,998	0,997	0,995	0,993	0,990	0,986
(2,4)	14,71	7,382	4,950	3,742	3,025	2,552	2,220	1,975
(2,5)	1,967	0,994	0,674	0,518	0,428	0,369	0,329	0,301
v_2 10^2								
v_3 10^2	66,94	33,47	22,31	16,74	13,38	11,16	9,571	8,377

Корни уравнения (2.5) определены при $\beta = 10^{-4}$, и приведенные в таблице значения надо умножить на 10^2 .

Как видно из таблицы, при увеличении толщины пластинки скорости, как правило, уменьшаются и уже для сравнительно толстых пластин скорости от продольного движения (напомним, что в классической постановке такая скорость равна единице) и поперечного обжатия одного порядка величины.

Институт механики НАН Армении

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Բարակ սալերի առաձգականության մոմենտային տեսության մասին

Վերջին տարիներին ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսությունը նոր շունչ է ստացել շնորհիվ ^(1,2) և այլ աշխատանքների:

Ներկայացվող հոդվածի հիմքում դրվում է ուղիղների վարկածն ընդհանրացված տեսքով: Շարադրանքը կարծության պատճառով տրվում է միաչափ խնդիրների համար: Հաշվի է առնվում ընդլայնական սեղմումը, որը բերում է հարթ խնդրի ճշգրտմանը:

Վերջինս առաջ է բերում նոր մեծությունների սահմանման անհրաժեշտությունը:

Դիտարկված է ստատիկայի և ալիքների տարածման խնդիրներ: Ցույց է տրվում, որ շերտի հաստության մեծացումը բերում է ալիքների արագությունների փոքրացմանը:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С.А.Амбарцумян, Механика композиционных материалов, т.32, №1, с.42-52 (1996). ² С.А.Амбарцумян, Изв.РАН. МТТ, №1, с.152-165, 1997. ³ В.Новацкий, Теория упругости, М., Мир, 1975.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Л. М. Халатян

**О частотах собственных колебаний анизотропной полосы
 с жестко закрепленными продольными краями**

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 21/VIII 1998)

На основе динамических уравнений теории упругости анизотропного тела проведено исследование собственных колебаний анизотропной полосы с жестко закрепленными продольными краями. Асимптотическим методом выведены уравнения частот, построены собственные функции. Доказано, что возникающие в полосе с общей анизотропией собственные колебания в отличие от случаев изотропных и ортотропных полос не являются чисто сдвиговыми и продольными.

1. Требуется найти решение однородных динамических уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела ⁽¹⁾ в области $\Omega = \{x, y \mid x \in [0, l], |y| \leq h, h \ll l\}$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{16} \sigma_{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{26} \sigma_{xy}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a_{16} \sigma_{xx} + a_{26} \sigma_{yy} + a_{66} \sigma_{xy}.$$

При граничных условиях

$$u(-h) = u(h) = 0, \quad v(-h) = v(h) = 0 \quad (1.2)$$

могут быть заданы также начальные условия

$$u = u^0(x, y), \quad u_t = \dot{u}^0(x, y),$$

$$v = v^0(x, y), \quad v_t = \dot{v}^0(x, y), \quad \text{при } t = 0 \quad (1.3)$$

и условия при $x = 0, l$. Последние для данного класса задач не влияют на частоты собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в

зоне пограничного слоя.

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{11}(x, y)e^{i\alpha x}, \sigma_{yy} = \sigma_{22}(x, y)e^{i\alpha x}, \sigma_{xy} = \sigma_{12}(x, y)e^{i\alpha x} \\ u &= u_1 e^{i\alpha x}, v = v_1 e^{i\alpha x}.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Перейдя затем к безразмерным переменным $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, решение полученной сингулярно возмущенной системы ищем в виде (2.3)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{11}^{(s)}(\xi, \zeta), \sigma_{12} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{12}^{(s)}(\xi, \zeta), \sigma_{22} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{22}^{(s)}(\xi, \zeta), \\ u_1 &= l\varepsilon^s U^{(s)}, v_1 = l\varepsilon^s V^{(s)}, s = \overline{0, N}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \omega_*^2 U^{(s)} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \omega_*^2 V^{(s)} = 0, \\ \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{11}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22}^{(s)} + a_{16} \sigma_{12}^{(s)}, \quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{12} \sigma_{11}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22}^{(s)} + a_{26} \sigma_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{16} \sigma_{11}^{(s)} + a_{26} \sigma_{22}^{(s)} + a_{66} \sigma_{12}^{(s)}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Из системы (1.6) $\sigma_{11}^{(s)}$, $\sigma_{12}^{(s)}$, $\sigma_{22}^{(s)}$ можно выразить через $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(s)} &= \frac{A_{21}}{A_{61}} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{A_{26}}{A_{61}} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_{61}} \left(A_{26} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{A_{16}}{A_{61}} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{A_{21}}{A_{61}} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_{61}} \left(A_{21} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{26} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{22}^{(s)} &= \frac{A_{66}}{A_{61}} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{A_{16}}{A_{61}} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_{61}} \left(A_{16} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned}A_{12} &= a_{16} a_{26} - a_{12} a_{66}, \quad A_{22} = a_{22} a_{66} - a_{26}^2, \quad A_{26} = a_{12} a_{26} - a_{16} a_{22}, \\ A_{21} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{16} = a_{12} a_{16} - a_{11} a_{26}, \quad A_{66} = a_{11} a_{66} - a_{16}^2, \\ A_{61} &= a_{16} A_{26} + a_{26} A_{16} + a_{66} A_{21}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Для определения же $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$ вытекает система

$$L_1 U^{(s)} + L_{12} V^{(s)} = f_1^{(s-1)}, \quad L_2 V^{(s)} + L_{12} U^{(s)} = f_2^{(s-1)},\quad (1.9)$$

где операторы L_1, L_2, L_{12} имеют вид

$$L_1 = A_{21} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad L_2 = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},\quad (1.10)$$

а

$$\begin{aligned}
 f_1^{(s-1)} &= 2A_{26} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + (A_{21} + A_{12}) \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial^2 U^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + A_{26} \frac{\partial^2 V^{(s-2)}}{\partial \xi^2}, \\
 f_2^{(s-1)} &= 2A_{16} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + (A_{21} + A_{12}) \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{26} \frac{\partial^2 U^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + A_{21} \frac{\partial^2 V^{(s-2)}}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Считая, что $A_{16} \neq 0$ (случай $A_{16} = 0$ имеет место для изотропных и ортотропных полос, он исследован в (4)), введя функцию перемещений $\Phi^{(s)}$ по формулам

$$U^{(s)} = -L_{12} \Phi^{(s)} + L_1^{-1} f_1^{(s-1)}, \quad V^{(s)} = L_1 \Phi^{(s)}, \tag{1.12}$$

первое уравнение (1.9) можно превратить в тождество, а из второго вытекает следующее уравнение относительно $\Phi^{(s)}$:

$$(L_1 L_2 - L_{12}^2) \Phi^{(s)} = \Psi^{(s-1)}, \quad \Psi^{(s-1)} = f_2^{(s-1)} - L_1^{-1} L_{12} f_1^{(s-1)}. \tag{1.13}$$

В развернутом виде уравнение (1.13) имеет вид

$$\begin{aligned}
 &(A_{21} A_{66} - A_{16}^2) \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^4} + A_{21} A_{61} \omega_*^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \\
 &+ A_{66} A_{61} \omega_*^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{61}^2 \omega_*^4 \Phi^{(s)} = \Psi^{(s-1)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Решением уравнения (1.14) при $s = 0$ является

$$\Phi^{(0)} = A_1 \cos K_1 \omega_* \zeta + A_2 \sin K_1 \omega_* \zeta + B_1 \cos K_2 \omega_* \zeta + B_2 \sin K_2 \omega_* \zeta,$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \sqrt{\frac{(A_{21} + A_{66}) - \sqrt{(A_{21} - A_{66})^2 + 4A_{16}^2}}{2a_{11}}}, \\
 K_2 &= \sqrt{\frac{(A_{21} + A_{66}) + \sqrt{(A_{21} - A_{66})^2 + 4A_{16}^2}}{2a_{11}}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Для остальных величин имеем

$$\begin{aligned}
 U^{(0)} &= A_{16} K_1^2 \omega_*^2 (A_1 \cos K_1 \omega_* \zeta + A_2 \sin K_1 \omega_* \zeta) + \\
 &+ A_{16} K_2^2 \omega_*^2 (B_1 \cos K_2 \omega_* \zeta + B_2 \sin K_2 \omega_* \zeta), \\
 V^{(0)} &= (-A_{21} K_1^2 \omega_*^2 + A_{61} \omega_*^2) (A_1 \cos K_1 \omega_* \zeta + A_2 \sin K_1 \omega_* \zeta) + \\
 &+ (-A_{21} K_2^2 \omega_*^2 + A_{61} \omega_*^2) (B_1 \cos K_2 \omega_* \zeta + B_2 \sin K_2 \omega_* \zeta), \\
 \sigma_{12}^{(0)} &= A_{16} \omega_*^3 [K_1 (-A_1 \cos K_1 \omega_* \zeta + A_2 \sin K_1 \omega_* \zeta) + \\
 &+ K_2 (B_1 \cos K_2 \omega_* \zeta + B_2 \sin K_2 \omega_* \zeta)].
 \end{aligned}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2), получим однородную алгебраическую систему относительно постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 , которая разбивается на две независимые — относительно (A_1, B_1) и (A_2, B_2) . Из разрешимости этих

систем вытекают следующие уравнения частот:

$$\cos K_1 \omega_* = 0, \cos K_2 \omega_* = 0, \sin K_1 \omega_* = 0, \sin K_2 \omega_* = 0, \quad (1.16)$$

$$\omega_*^I = \frac{\pi}{2K_1}(2n+1), \omega_*^{II} = \frac{\pi}{2K_2}(2n+1), \omega_*^{III} = \frac{\pi n}{K_1}, \omega_*^{IV} = \frac{\pi n}{K_2}, n \in N, \quad (1.17)$$

которым соответствуют собственные функции (формы собственных колебаний)

$$U^{(0)} = A_{16} K_2^2 \omega_*^{I^2} B_1 \cos K_2 \omega_*^I \zeta,$$

$$\text{а) } V^{(0)} = (-A_{21} K_2^2 \omega_*^{I^2} + A_{61} \omega_*^2) B_1 \cos K_2 \omega_*^I \zeta, \quad (1.18)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = -A_{16} \omega_*^3 K_2 B_1 \cos K_2 \omega_*^I \zeta,$$

$$U^{(0)} = A_{16} K_2^2 \omega_*^{II^2} B_1 \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta,$$

$$\text{б) } V^{(0)} = (-A_{21} K_2^2 \omega_*^{II^2} + A_{61} \omega_*^2) B_1 \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta, \quad (1.19)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = -A_{16} \omega_*^3 K_2 B_1 \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta,$$

$$U^{(0)} = A_{16} K_2^2 \omega_*^{III^2} B_1 \cos K_2 \omega_*^{III} \zeta,$$

$$\text{в) } V^{(0)} = (-A_{21} K_2^2 \omega_*^{III^2} + A_{61} \omega_*^2) B_1 \cos K_2 \omega_*^{III} \zeta, \quad (1.20)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = -A_{16} \omega_*^3 K_2 B_1 \cos K_2 \omega_*^{III} \zeta,$$

$$U^{(0)} = A_{16} K_2^2 \omega_*^{IV^2} B_1 \cos K_2 \omega_*^{IV} \zeta,$$

$$\text{г) } V^{(0)} = (-A_{21} K_2^2 \omega_*^{IV^2} + A_{61} \omega_*^2) B_1 \cos K_2 \omega_*^{IV} \zeta, \quad (1.21)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = -A_{16} \omega_*^3 K_2 B_1 \cos K_2 \omega_*^{IV} \zeta.$$

2. Рассмотрим случай при $s > 0$. Решение системы (1.9) будет зависеть от того, какое из значений частот (1.17) будет принято за основу вычислений. Поочередно принимая все значения частот (1.17) и решив уравнение (1.14), будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)} = & A_1^{I(s)} \cos K_1 \omega_*^I \zeta + B_1^{I(s)} \cos K_2 \omega_*^I \zeta + \\ & + A_1^{II(s)} \cos K_1 \omega_*^{II} \zeta + B_1^{II(s)} \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta + \\ & + A_2^{III(s)} \sin K_1 \omega_*^{III} \zeta + B_2^{III(s)} \sin K_2 \omega_*^{III} \zeta + \\ & + A_2^{IV(s)} \sin K_1 \omega_*^{IV} \zeta + B_2^{IV(s)} \sin K_2 \omega_*^{IV} \zeta + \overline{\Phi}^{(s-1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\overline{\Phi}^{(s-1)}$ частное решение уравнения (1.14).

Для величин $U^{(s)}, V^{(s)}$ имеем

$$\begin{aligned} U^{(s)} = & A_{16} (A_1^{I(s)} K_1^2 \omega_*^{I^2} \cos K_1 \omega_*^I \zeta + B_1^{I(s)} K_2^2 \omega_*^{I^2} \cos K_2 \omega_*^I \zeta + \\ & + A_1^{II(s)} K_1^2 \omega_*^{II^2} \cos K_1 \omega_*^{II} \zeta + B_1^{II(s)} K_2^2 \omega_*^{II^2} \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta + \\ & + A_1^{III(s)} K_1^2 \omega_*^{III^2} \cos K_1 \omega_*^{III} \zeta + B_1^{III(s)} K_2^2 \omega_*^{III^2} \cos K_2 \omega_*^{III} \zeta + \end{aligned}$$

$$+ A_1^{IV(s)} K_1^2 \omega_*^{IV^2} \cos K_1 \omega_*^{IV} \zeta + B_1^{IV(s)} K_2^2 \omega_*^{IV^2} \cos K_2 \omega_*^{IV} \zeta + \\ + A_{16} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} + L_1^{-1} f^{(s-1)},$$

$$V^{(s)} = a_1 A_1^{I(s)} K_1^2 \omega_*^{I^2} \cos K_1 \omega_*^I \zeta + a_2 B_1^{I(s)} K_2^2 \omega_*^{I^2} \cos K_2 \omega_*^I \zeta + \\ + a_3 A_1^{II(s)} K_1^2 \omega_*^{II^2} \cos K_1 \omega_*^{II} \zeta + a_4 B_1^{II(s)} K_2^2 \omega_*^{II^2} \cos K_2 \omega_*^{II} \zeta + \\ + a_5 A_1^{III(s)} K_1^2 \omega_*^{III^2} \cos K_1 \omega_*^{III} \zeta + a_6 B_1^{III(s)} K_2^2 \omega_*^{III^2} \cos K_2 \omega_*^{III} \zeta + \\ + a_7 A_1^{IV(s)} K_1^2 \omega_*^{IV^2} \cos K_1 \omega_*^{IV} \zeta + a_8 B_1^{IV(s)} K_2^2 \omega_*^{IV^2} \cos K_2 \omega_*^{IV} \zeta + \\ + A_{21} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} + A_{61} \omega_*^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}, \quad (2.2)$$

$$a_1 = -A_{21} K_1^2 \omega_*^{I^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad a_5 = -A_{21} K_1^2 \omega_*^{III^2} + A_{61} \omega_*^2, \\ a_2 = -A_{21} K_2^2 \omega_*^{I^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad a_6 = -A_{21} K_2^2 \omega_*^{III^2} + A_{61} \omega_*^2, \\ a_3 = -A_{21} K_1^2 \omega_*^{II^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad a_7 = -A_{21} K_1^2 \omega_*^{IV^2} + A_{61} \omega_*^2, \\ a_4 = -A_{21} K_2^2 \omega_*^{II^2} + A_{61} \omega_*^2, \quad a_8 = -A_{21} K_2^2 \omega_*^{IV^2} + A_{61} \omega_*^2.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2) и учитывая данные при $s = 0$, найдем следующие значения постоянных $B_1^{I(s)}$, $A_1^{II(s)}$, $B_2^{III(s)}$, $A_2^{IV(s)}$:

$$B_1^{I(s)} = \frac{\Psi_3^{(s-1)} K_1^2 \omega_*^{II^2} - \Psi_1^{(s-1)} a_3}{\cos K_2 \omega_*^I (a_3 K_2^2 \omega_*^{I^2} - a_2 K_1^2 \omega_*^{II^2})}, \\ B_2^{III(s)} = \frac{\Psi_4^{(s-1)} K_1^2 \omega_*^{IV^2} - \Psi_2^{(s-1)} a_7}{\sin K_2 \omega_*^{III} (a_7 K_2^2 \omega_*^{III^2} - a_6 K_1^2 \omega_*^{IV^2})}, \\ A_1^{II(s)} = \frac{\Psi_3^{(s-1)} a_3 - \Psi_1^{(s-1)} K_2^2 \omega_*^{II^2}}{\cos K_1 \omega_*^{II} (a_3 K_2^2 \omega_*^{I^2} - a_2 K_1^2 \omega_*^{II^2})}, \\ A_2^{IV(s)} = \frac{\Psi_7^{(s-1)} a_7 - \Psi_2^{(s-1)} K_2^2 \omega_*^{IV^2}}{\sin K_2 \omega_*^{IV} (a_7 K_2^2 \omega_*^{III^2} - a_6 K_1^2 \omega_*^{IV^2})}, \quad (2.3)$$

$$\Psi_1^{(s-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(1, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1}{A_{16}} L_1^{-1} f^{(s-1)},$$

$$\Psi_2^{(s-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(1, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right),$$

$$\Psi_3^{(s-1)} = -\frac{1}{2} \left[A_{21} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_{61} \omega_*^2 (\bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta) + \bar{\Phi}^{(s-1)}(1, \zeta)) \Big], \\
\Psi_4^{(s-1)} = & \frac{1}{2} \left[A_{21} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(s-1)}(1, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right) + \right. \\
& \left. + A_{61} \omega_*^2 (\bar{\Phi}^{(s-1)}(-1, \zeta) + \bar{\Phi}^{(s-1)}(1, \zeta)) \right],
\end{aligned}$$

т.е. рассмотрение приближений $s > 0$ не приводит к появлению в общем решении новых произвольных постоянных. Напряжения, соответствующие (2.2), вычисляются по формулам (1.7).

Отметим также, что при $s > 0$ формы собственных колебаний взаимосвязаны и задаются формулами (2.2), (2.3).

Институт механики НАН Армении

Լ. Մ. Խալատյան

Կոշտ ամրացված երկայնական եզրերով անիզոտրոպ շերտի սեփական տատանումների հաճախականությունների մասին

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության դինամիկ հավասարումների հիման վրա կատարված է կոշտ ամրացված երկայնական եզրերով անիզոտրոպ շերտի սեփական տատանումների հաճախականությունների հավասարումները, կառուցված են սեփական ֆունկցիաները:

Ապացուցված է, որ, ի տարբերություն իզոտրոպ և օրթոտրոպ շերտերի, ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտում առաջացած սեփական տատանումները չեն հանդիսանում զուտ սաՀքային և երկայնական:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով ստացված են հաճախականությունների համար չորս դասերի պատկանող արժեքներ, որոնք որոշվում են ներքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծման սկզբնական մոտավորությունից:

Ցույց է տրված, որ ասիմպտոտիկ վերլուծության բարձր մոտավորությունները չեն ազդում հաճախականությունների արժեքների վրա, այլ ազդում են սեփական տատանումների ամպլիտուդաների վրա: Ապացուցված է, որ, ի տարբերություն իզոտրոպ դեպքի, չկան բացահայտ կապեր տատանման հաճախականությունների և սեյսմիկ սաՀքային և երկայնական ալիքների տարածման արագությունների միջև:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С.Г.Левецкий, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977.
² Л.А.Агаловян, Межвуз.сб. Механика. Изд. ЕГУ, вып.2, 1982. ³ Л.А.Агаловян, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997.
⁴ Л.А.Агаловян, В сб. Юбилейной науч. конфер. к 60-летию ГПИ, Гюмри, 1994

УДК 539.3

А. М. Хачатрян

**Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при
нежестком контакте слоев**

(Представлено академиком НАН Армении Л. А. Агаловяном 22/X 1998)

Асимптотическим методом из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы значения напряжений, а на плоскости контакта – закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений.

1. При расчете слоистых тонкостенных тел чаще всего используют гипотезу о недеформируемых нормалях для всего пакета в целом. В последующем были предложены другие гипотезы и различные уточненные теории, обзор которых можно найти, например, в (1,2).

В работе (3) методом асимптотического интегрирования построена приближенная теория изгиба изотропных пластин. В (4-6) асимптотическим методом исследованы напряженно-деформированные состояния однослойных и многослойных пластин, материал которых обладает анизотропией самого общего вида. В (7) выведены уравнения для расчета анизотропной двухслойной полосы-балки, когда контакт между слоями неполный.

В данной работе асимптотический метод применяется для вывода двумерных уравнений анизотропной двухслойной пластинки при нежестком контакте слоев.

Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют толщину h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2$). Общая толщина пластинки – $2h$. Плоскость отсчета Oxy совпадает с плоскостью раздела слоев, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Введем безразмерные переменные $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l, V^{(k)} = v^{(k)}/l, W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный

тангенциальный размер пластинки ($h \ll l$). Условия на лицевых плоскостях $z = h_1$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= l/hX^+(x,y), \sigma_{yz} = l/hY^+(x,y), \sigma_z = Z^+(x,y), & z = h_1, \\ \sigma_{xz} &= -l/hX^-(x,y), \sigma_{yz} = -l/hY^-(x,y), \sigma_z = -Z^-(x,y), & z = h_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы условия неполного контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)}, \\ u^{(2)} - u^{(1)} &= f_1(x,y), v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(x,y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В зависимости от выбранной модели контакта функции $f_k(x,y)$ считаются заданными.

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоев (1.2). Условия на боковой поверхности пластинки пока не конкретизируются.

Решение внутренней задачи ищется в виде (3-5)

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (1.3)$$

где $Q^{(k)}$ – любое из компонентов тензора напряжений или безразмерных перемещений k -го слоя, $\varepsilon = h/l$ – малый параметр. Непротиворечивые значения q_k выбираются следующим образом (3-5):

$$\begin{aligned} q_k &= 2 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, q_k = 0 \text{ для } \sigma_z^{(k)} \\ q_k &= 3 \text{ для } W^{(k)}, q_k = 1 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставив (1.3) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения уравнения теории упругости анизотропного тела, с учетом (1.4) получим систему для определения $Q^{(k,s)}$. Решив указанную систему, получим

$$\begin{aligned} W^{(k,s)} &= w^{(k,s)}(\xi, \eta) + w^{*(k,s)}, \\ U^{(k,s)} &= -\zeta \frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \xi} + u^{(k,s)}(\xi, \eta) + u^{*(k,s)} \quad (u, v), \\ \sigma_x^{(k,s)} &= \zeta \tau_{x1}^{(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)} \quad (x, y), \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \zeta \tau_{xy1}^{(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \\ \sigma_{xz}^{(k,s)} &= 1/2 \zeta^2 \tau_{xz2}^{(k,s)} + \zeta \tau_{xz1}^{(k,s)} + \tau_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)} \quad (x, y), \\ \sigma_z^{(k,s)} &= 1/6 \zeta^3 \tau_{z3}^{(k,s)} + 1/2 \zeta^2 \tau_{z2}^{(k,s)} + \zeta \tau_{z1}^{(k,s)} + \tau_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned}
\tau_{x1}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \chi_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \chi_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \tau^{(k,s)} \quad (x, y), \\
\tau_{xy1}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \chi_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \chi_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \tau^{(k,s)}, \\
\tau_{x0}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)} \quad (x, y), \\
\tau_{xy0}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)}, \\
\tau_{xz(i+1)}^{(k,s)} &= -(\tau_{xi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{xyi,\eta}^{(k,s)}) \quad i = 0, 1 \quad (x, y), \\
\tau_{z(i+1)}^{(k,s)} &= -(\tau_{xzi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{yzi,\eta}^{(k,s)}) \quad i = 0, 1, 2, \\
\varepsilon_1^{(k,s)} &= u_{,\xi}^{(k,s)}, \varepsilon_2^{(k,s)} = v_{,\eta}^{(k,s)}, \omega^{(k,s)} = u_{,\eta}^{(k,s)} + v_{,\xi}^{(k,s)}, \\
\chi_1^{(k,s)} &= -w_{,\xi\xi}^{(k,s)}, \chi_2^{(k,s)} = -w_{,\eta\eta}^{(k,s)}, \tau^{(k,s)} = -2w_{,\xi\eta}^{(k,s)}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Коэффициенты $B_y^{(k)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(k)} &= (a_{22}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{26}^{(k)})^2) / \Omega_k, \quad (1, 2), \quad B_{12}^{(k)} = (a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{66}^{(k)}) / \Omega_k, \\
B_{16}^{(k)} &= (a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{16}^{(k)} a_{22}^{(k)}) / \Omega_k, \quad (1, 2), \quad B_{66}^{(k)} = (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) / \Omega_k \quad (1.7) \\
\Omega_k &= (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)} (a_{26}^{(k)})^2 - a_{22}^{(k)} (a_{16}^{(k)})^2.
\end{aligned}$$

Величины со звездочкой функции от ξ, η, ζ и для каждого приближения s известны, если построены предыдущие приближения. Они приведены в работе (5).

Удовлетворив условиям контакта (1.2), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(2,s)}, \\
u^{(2,s)} &= u^{(1,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta), v^{(2,s)} = v^{(1,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(l\xi, l\eta), \quad f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0 \quad s > 0.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), с учетом (1.8) получим следующую систему уравнений относительно неизвестных перемещений $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}, w^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
L_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{13}(K_{ij})w^{(s)} + \\
+ L_{11}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(2)} &= p_1^{(s)}, \\
L_{12}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{23}(K_{ij})w^{(s)} + \\
+ L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{22}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)} &= p_2^{(s)}, \\
L_{13}(K_{ij})u^{(1,s)} + L_{23}(K_{ij})v^{(1,s)} + L_{33}(D_{ij})w^{(s)} + \\
+ L_{13}(K_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{23}(K_{ij}^{(2)})f_2^{(s)} &= q^{(s)},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
p_1^{(s)} &= -(X^{+(s)} + X^{-s}) + \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2), \\
p_2^{(s)} &= -(Y^{+(s)} + Y^{-s}) + \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\zeta_2), \\
q^{(s)} &= Z^{+(s)} + Z^{-s} + \zeta_1 \frac{\partial X^{+(s)}}{\partial \xi} + \zeta_2 \frac{\partial X^{-s}}{\partial \xi} + \zeta_1 \frac{\partial Y^{+(s)}}{\partial \eta} + \\
&+ \zeta_2 \frac{\partial Y^{-s}}{\partial \eta} - \zeta_1 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} + \zeta_2 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{\partial \xi} - \zeta_1 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} + \\
&+ \zeta_2 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{\partial \eta} - \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1) + \sigma_z^{*(2,s)}(\zeta_2) \\
X^{\pm(0)} &= X^\pm, Y^{\pm(0)} = Y^\pm, Z^{\pm(0)} = Z^\pm, X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} = 0, s > 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Операторы $L_\nu(B_\nu^{(k)})$ совпадают с известными операторами из классической теории (2). Жесткости определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(k)} &= (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)}, K_{ij}^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \zeta_k^2 B_{ij}^{(k)}, D_{ij}^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{3} \zeta_k^3 B_{ij}^{(k)}, \\
C_{ij} &= C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}, K_{ij} = K_{ij}^{(1)} + K_{ij}^{(2)}, D_{ij} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Из граничных условий (1.1) определяются также неизвестные функции $\tau_{xz}^{(k,s)}$, $\tau_{yz}^{(k,s)}$, $\tau_{z0}^{(k,s)}$

2. Остановимся более подробно на модели нежесткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жесткостью G_0 между контактирующими средами. Отношение

$$\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ G_0 \rightarrow 0}} \frac{h_0}{G_0} \tag{2.1}$$

может принимать любое значение от 0 до ∞ . Предельному случаю $\chi = 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ — скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются (7.9)

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi \frac{l}{h} \sigma_{xz}(z=0), v^{(2)} - v^{(1)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz}(z=0). \tag{2.2}$$

Постоянные χ_1, χ_2 имеют размерность $\text{м}^3/\text{Н}$ и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z = \text{const}$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1 = \chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда из (1.2) и (2.2) следует

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \tau_{xz}^{(k,s)}, f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \tau_{yz}^{(k,s)}. \tag{2.3}$$

Неизвестные функции $\tau_{x0}^{(k,s)}, \tau_{y0}^{(k,s)}$ определяются из граничных условий (1.1) при помощи формул (1.5), (1.6). После определения $\tau_{x0}^{(k,s)}, \tau_{y0}^{(k,s)}$ будут определяться также функции $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$. Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ в (1.9), получим

$$\begin{aligned} & \left[L_{11}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{13}(K_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \bar{p}_1^{(s)}, \\ & \left[L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{22}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{23}(K_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \bar{p}_2^{(s)}, \\ & \left[L_{13}(K_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{23}(K_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[L_{33}(D_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \bar{q}^{(s)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{p}_1^{(s)} &= p_1^{(s)} + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)) + \\ & + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)), \\ \bar{p}_2^{(s)} &= p_2^{(s)} + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)) + \\ & + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)), \\ \bar{q}^{(s)} &= q^{(s)} + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)) + \\ & + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{\alpha(1,s)}(\zeta_1)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, q^{(s)}$ определяются по формулам (1.10).

Если $\chi_1 = \chi_2 = 0$, будем иметь полный контакт. Тогда системы уравнений (1.9) и (2.4) совпадают с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин (2).

В частном случае, когда $h_1 = h_2 = h$, продифференцировав первое уравнение (2.4) по ξ , а второе — по η , умножив оба уравнения на $h/2$ и складывая с третьим уравнением той же системы, получим

$$L_{33}(D_{ij})w^{(s)} = 4\bar{q}^{(s)} + 2h \left(\frac{\partial \bar{p}_1^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_2^{(s)}}{\partial \eta} \right). \quad (2.6)$$

После определения $w^{(j)}$ из системы (2.4) для определения тангенциальных перемещений получим систему, которая равносильна одному уравнению восьмого порядка. Следовательно, система уравнений (2.4) равносильна одному уравнению двенадцатого порядка и в каждом торце необходимо удовлетворять шести граничным условиям.

Вопрос удовлетворения граничным условиям – предмет отдельного исследования.

Институт механики НАН Армении

Ա Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Շերտերի ոչ կոշտ կոնտակտի պայմաններում երկչերտ անիզոտրոպ սալի հավասարումների մասին

Առաձգականության տեսության տարածական խնդրի հավասարումներից ասիմպտոտիկ մեթոդով դուրս են բերված երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկչերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկի համար, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ կոնտակտի հարթության վրա՝ տանգենցիալ տեղափոխությունների տարրերության թռիչքի բաշխման օրենքը: Ստացված հավասարումները համեմատված են դասական տեսության հավասարումների հետ: Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումներն ընդհանուր դեպքում իրենց կարգով տարրերովում են շերտավոր սալի դասական տեսության հավասարումներից: Նշված է այն մասնավոր դեպքը, երբ դրանք համընկնում են:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С.Г.Лехницкий, Анизотропные пластинки, М., Гостехиздат, 1957. ² С.А.Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, М., Наука, 1987. ³ А.Л.Гольденвейзер, ПММ, т.26, вып.4 (1962). ⁴ Л.А.Агаловян, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек., М., Наука, 1997. ⁵ Л.А.Агаловян, Ю.М.Багдасарян, А.М.Хачатрян, Изв.НАН РА. Механика, т. 49, №3, с.10-22, 1996. ⁶ Л.А.Агаловян, Инж. журн. МТТ, №6, с.114-121 (1966). ⁷ Л.А.Агаловян, А.М.Хачатрян, Изв.НАН РА, Механика, т.50, №3-4, с.34-41, (1997). ⁸ А.А.Анисимов, С.Ю.Ермаков, Е.Н.Фролова и др., Физика земли, №11, с.37-43, 1993. ⁹ Композиционные материалы. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. Под ред. Н.А.Шульги и В.Т.Томашевского, Киев, ПТОО "А.С.К", 1997.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Д. Д. Асанян

**Напряженно-деформированное состояние ферромагнитной
 плоскости с движущейся трещиной**

(Представлено академиком НАН Армении Г.Е.Багдасаряном 19/XI 1998)

1. Пусть магнитоупругая плоскость с конечной трещиной находится в магнитном поле $H_0 = (0, H_0)$, $H_0 = \text{const}$. Трещина, распространяющаяся с постоянной скоростью $V < c_R$ (c_R – скорость распространения волн Релея), расположена вдоль линии $y_1 = 0$, $-a + Vt < x_1 < a + Vt$. Введем подвижную систему координат $\{x = x_1 - Vt; t = t_1; y_1 = y\}$ и предположим, что развитие трещины происходит в течение промежутка времени, необходимого для того, чтобы в подвижной системе координат магнитоупругое состояние не зависело от времени. Зависимость между магнитным полем H_0 , намагниченностью M_0 и магнитной индукцией B_0 задается в виде

$$M_0 = \chi(H_0) \cdot H_0, \quad B_0 = \mu_0(1 + \chi(H_0)) \cdot H_0,$$

где $\chi(x)$ – некоторая дифференцируемая функция своего аргумента. В частном случае, когда $\chi(x) = \text{const}$, имеем магнитомягкий материал с линейной зависимостью.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) ферромагнитной магнитомягкой среды с нелинейным законом намагничивания (в неподвижной системе координат) описывается следующими соотношениями (1):

$$c_2^2 \nabla^2 \bar{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } u - \bar{u}_{,11} + c_2^2 \cdot \bar{X} = 0, \quad (1.1)$$

$$\phi_{,x_1 x_1} + \gamma^{-2} \phi_{,y_1 y_1} = 0, \quad X_1 = \lambda_1 \phi_{,x_1 y_1}, \quad X_2 = \lambda_2 \phi_{,y_1 y_1}, \quad (1.2)$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial y_1^2$; \bar{u} – вектор перемещения точек среды; $c_2^2 = \rho / \mu$; $c_1^2 = 2(1 - \nu) / (1 - 2\nu) c_2^2$; μ, ν – упругие постоянные; $\lambda_1 = 2\chi(H_0)(1 + \chi(H_0))h_c^2$; $\lambda_2 = \lambda_1 [2(\chi(H_0) + H_0 \cdot \chi(H_0)) / \chi(H_0) - H_0 \chi(H_0) / (1 + \chi(H_0))] / 2$; ϕ – потенциал магнитного поля $h = \text{grad } \phi$;

$\gamma^2 = (1 + \chi(H_0)) / (1 + \chi(H_0) + H_0 \chi(H_0))$; $h_c^2 = \mu_0 H_0^2 / \mu$. Введем потенциалы φ, ψ следующим образом:

$$u_{x_1} = \varphi_{,x_1} + \psi_{,y_1}; \quad u_{y_1} = \varphi_{,y_1} - \psi_{,x_1}. \quad (1.3)$$

В неподвижной системе координата в силу (1.1), (1.3) функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi - \varphi_{,t_1 t_1} + \delta_1^2 \phi_{,y_1} = 0, \quad c_2^2 \nabla^2 \psi - \psi_{,t_1 t_1} + \delta_2^2 \phi_{,x_1} = 0, \quad (1.4)$$

где $\delta_1 = \frac{\gamma^2 \lambda_2 - \lambda_1}{\gamma^2 - 1} c_2^2$; $\delta_2 = -\frac{\gamma^2 \lambda_2 - \lambda_1}{\gamma^2 - 1} c_2^2$. Таким образом, определение НДС

сводится к совместному решению уравнений (1.2), (1.4). В уравнениях (1.2), (1.4) перейдем от неподвижной системы координат (x_1, y_1, t_1) к подвижной системе координат (x, y, t) . При предположении, что в подвижной системе координат магнитоупругое состояние не зависит от времени) соотношения (1.1), (1.2) преобразуются к виду

$$\text{где } s_1^2 \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} + r_1 \phi_{,y} = 0, \quad s_2^2 \psi_{,xx} + \psi_{,yy} + r_2 \phi_{,y} = 0, \quad \gamma^2 \phi_{,xx} + \phi_{,yy} = 0, \quad (1.5)$$

Граничные условия для поставленной задачи будут (1)

$$u_y(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad (1.6)$$

$$\phi(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad (1.7)$$

$$\phi_{,x}(x, 0) + d_1 \cdot u_{y,x} = 0 \quad \text{при } |x| < a, \quad (1.8)$$

$$u_{y,x}(x, 0) + u_{x,y}(x, 0) + L \cdot \phi_{,x} = 0 \quad \text{при } |x| < \infty, \quad (1.9)$$

$$\frac{2\nu}{1-2\nu} u_{x,x}(x, 0) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} u_{y,y}(x, 0) - e_1 \cdot \phi_{,y}(x, 0) = \text{при } |x| < a, \quad (1.10)$$

$$= -P_{0\text{mec}} + P_{0\text{mag}} = -P_0$$

где $P_{0\text{mag}} = b_c^2 \cdot \chi(H_0) \cdot (\chi(H_0) - 2) / (\chi(H_0) + 1)^2$; $\mu \cdot P_{0\text{mec}}$ механическая сила, действующая на берег трещины,, $e_1 = h_c^2 (1 + \chi(H_0)) [\chi^2(H_0) - 2\chi(H_0)]$; $d_1 = -\frac{\chi(H_0)}{\chi(H_0) + 1}$; $L = \lambda_1 / 2$. Таким образом, определение НДС

для поставленной задачи сводится к совместному решению уравнений (1.2), (1.5) с граничными условиями (1.6) - (1.10).

2. Решение системы (1.2), (1.5) представим в виде

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\alpha) \exp[-\beta_1 y] +$$

$$+ \frac{\delta_1}{c_1^2} \frac{|\alpha|}{\alpha^2 - \beta_1^2} C(\alpha) \exp[-|\alpha| y]\} \exp[-i\alpha x] d\alpha, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \exp[-\beta_2 y] \exp[-i\alpha x] d\alpha, \quad (2.2)$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \exp[-|\alpha| y] \exp[-i\alpha x] d\alpha, \quad (2.3)$$

где $\beta_i^2 = \alpha^2 (1 - M_i^2)$. Введем функцию $D(\alpha)$ следующим образом:

$$B(\alpha) = \frac{i}{\alpha^2 - \beta_2^2} \{-2\alpha - d_1 [\alpha Q_2^*(\alpha) + i\gamma |\alpha| Q_1^*(\alpha) - \alpha L]\} D(\alpha), \quad (2.4)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\beta_1} \{1 + d_1 Q_2^*(\alpha) +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta_2^2} [-2\alpha - d_1 (\alpha Q_2^*(\alpha) + i\gamma |\alpha| Q_1^*(\alpha) - \alpha L)]\} D(\alpha), \quad (2.5)$$

где

$$Q_1^*(\alpha) = -i \frac{|\alpha|}{\alpha} Q_1^0, \quad d_1 Q_2^*(\alpha) = -Q_1^0, \quad Q_1^0 = \frac{\delta_1^*}{c_1^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - M_1^2} + \frac{\delta_2^*}{c_2^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - M_2^2}.$$

Нетрудно показать, что для определения $D(\alpha)$ получается парное интегральное уравнение

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) \exp[-i\alpha x] d\alpha = 0 & |x| > a \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) [f_e(\alpha) + d_1 f_m(\alpha)] \exp[-i\alpha x] d\alpha = P_0 & |x| < a \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$f_e(\alpha) = |\alpha| R_e(M_1^2, M_2^2); \quad R_e(M_1^2, M_2^2) = \frac{4\sqrt{1-M_1^2} \sqrt{1-M_2^2} - (2-M_2^2)^2}{M_2^2 \sqrt{1-M_1^2}};$$

$$f_m(\alpha) = |\alpha| R_m(M_1^2, M_2^2); \quad R_m(M_1^2, M_2^2) = \frac{(2-M_2^2)^2}{\sqrt{1-M_1^2}} \left[Q_2^0 - \frac{1}{M_2^2} (Q_2^0 + \gamma Q_1^0 - L) \right] +$$

$$+ \frac{2\sqrt{1-M_2^2}}{M_2^2} (Q_2^0 + \gamma Q_1^0 - L) - \frac{2\nu}{1-2\nu} Q_1^0 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \gamma Q_2^0 + \gamma e_1.$$

значение $t_{yy}^c(x, 0) / \mu$ выражается через $D(\alpha)$ следующим образом (1):

$$t_{yy}^c(x, 0) = P_{0mag} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) [f_e(\alpha) + d_1 f_m^*(\alpha)] \exp[-i\alpha x] d\alpha, \quad (2.7)$$

$$\text{где} \quad f_m^*(\alpha) = f_m(\alpha) - e_1 \cdot \gamma |\alpha| - R_0 \cdot \gamma |\alpha|; \quad R_0 = b_c^2 \frac{2a_{22} - 2\chi(H_0)}{\chi(H_0) + 1};$$

$$a_{22} = \chi(H_0) + H_0 \cdot \chi(H_0).$$

Если ввести функцию

$$E(s) = \frac{P_0}{F_{em}(M_1^2, M_2^2)} \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}, \quad (2.8)$$

то прямой постановкой можно убедиться, что

$$D(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a E(s) \exp[-i\alpha s] ds \quad (2.9)$$

удовлетворяет системе парных интегральных уравнений (2.6). В (2.8) введено следующее обозначение: $F_{em}(M_1^2, M_2^2) = R_*(M_1^2, M_2^2) + d_1 R_m(M_1^2, M_2^2)$.

Из (2.7) определяем

$$t_{yy}^c(x, 0) / \mu = P_{0mag} + \frac{k_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}} \cdot \frac{1}{s - x} ds = P_{0mag} +$$

$$+ k_2 \begin{cases} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & x > a \\ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & x < -a \\ 1 & |x| \leq a \end{cases} \quad (2.10)$$

В (2.10) принято

$$k_2 = a^{1/2} \cdot \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2(x-a)} t_{yy}^c(x, 0) = \frac{F_{em}^*(M_1^2, M_2^2) \cdot a^{1/2}}{F_{em}(M_1^2, M_2^2)} P_0, \quad (2.11)$$

где

$$F_{em}^*(M_1^2, M_2^2) = R_*(M_1^2, M_2^2) + d_1 R_m(M_1^2, M_2^2) - e_1 - \gamma R_0.$$

Отдельно рассмотрим случай $\chi(H_0) = \chi = \text{st}$. Тогда (2.11) упрощается и принимает вид

$$k_2 = -a^{1/2} \left\{ R_*(M_1^2, M_2^2) + \frac{L_1}{M_2^2} \left[\frac{2 - M_2^2}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 2\sqrt{1 - M_2^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_1}{c_1^2 M_1^2} \left[2 - \frac{2 - M_2^2}{\sqrt{1 - M_1^2}} \right] \right\}.$$

$$\left\{ R_*(M_1^2, M_2^2) + \frac{L_1}{M_2^2} \left[\frac{2 - M_2^2}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 2\sqrt{1 - M_2^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\delta_1}{c_1^2 M_1^2} \left[2 - \frac{2 - M_2^2}{\sqrt{1 - M_1^2}} \right] - \frac{\chi^3}{\mu_r^2} b_c^2 \right\}^{-1}, \quad (2.12)$$

где $L_1 = \frac{\chi b_c^2}{\mu_r}$; $\frac{\delta_1}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot L_1$; $b_c^2 = (\chi + 1)^2 h_c^2$. В случае, когда скорость

движения трещины равна нулю (т. е. $V = 0$), из (2.12) следует, что $k_2 \approx a^{1/2} P_0 [1 - \chi(1 - \nu)b_c^2]^{-1}$, что совпадает с результатом работы (2).

3. При численных расчетах рассматривались следующие законы намагничивания:

$$\chi(H_0) = \mu_r = \text{const} \quad (3.1)$$

$$\chi(H_0) = \kappa_r + b_r H_0; \quad \kappa_r, b_r = \text{const} \quad (3.2)$$

$$\chi(H_0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{B_s}{\mu_0 H_0} \arctg \left(\kappa_0 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu_0 H_0}{B_s} \right); \quad B_s, \kappa_0 = \text{const}. \quad (3.3)$$

На основе формулы (2.11) проведен численный анализ зависимости коэффициента интенсивности (КИ) $\bar{k}_2 = k_2 a^{1/2} P_0$ от h_c^2 и V^2 / c_1^2 при различных законах намагничивания.

Из соотношения (2.11) можно заключить, что при $b_c^2 = 0$ и $V \neq 0$ коэффициент интенсивности $k_2 = a^{1/2} P_{0\text{мес}}$ (т. е. коэффициент интенсивности не зависит от скорости движения трещины). А когда $b_c^2 \neq 0$, коэффициент интенсивности $\bar{k}_2 \rightarrow \infty$ при $V \rightarrow V_* < c_2$, где V_* — значение скорости движения трещины, при котором знаменатель выражения (2.12) обращается в нуль. Итак, коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений существенно зависит от внешнего магнитного поля, скорости распространения трещины и от физических параметров задачи.

На рис.1 показан график зависимости \bar{k}_2 от при различных значениях h_c^2 , когда закон намагничивания задается формулой (3.1). Расчеты приведены при $\mu_r = 10^5$, $\nu = 0,35$. Как видно из рис.1, внешнее магнитное поле существенно меняет значение КИ магнитоупругих напряжений \bar{k}_2 по сравнению с чисто упругим случаем (на рис.1 линия, соответствующая значению $h_c^2 = 0$). На рис.2-4 приведен график зависимости \bar{k}_2 от приложенного магнитного поля при различных значениях скорости движения трещины. При расчетах во всех случаях принималось $\nu = 0,3$. Рис.2,3 и рис.4 относятся к случаям

нелинейных законов намагничивания, задаваемых формулой (3.2) и (3.3) соответственно. Во всех случаях наблюдается сильная зависимость КИ \bar{k}_2 от приложенного магнитного поля и скорости движения трещины.

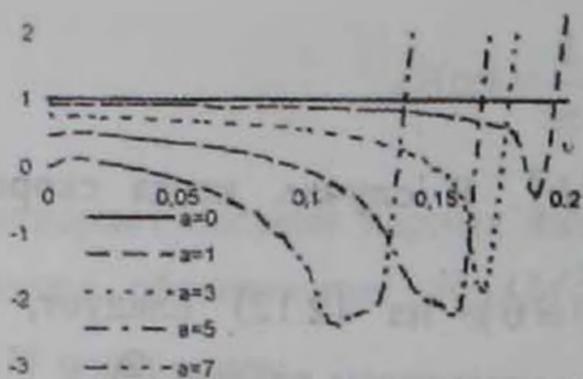


Рис.1. Зависимость \bar{k}_2 от v , при различных значениях магнитного поля ($h_c^2 = a \cdot 10^{-16}$)

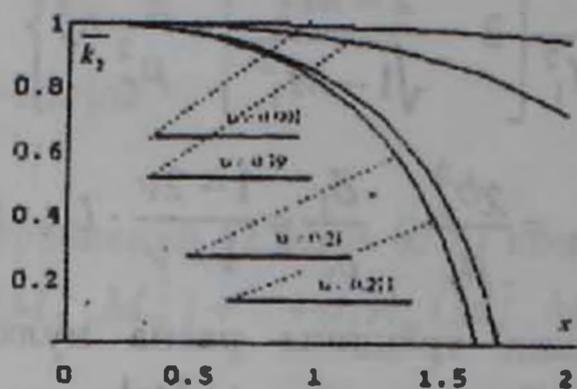


Рис.2. Зависимость \bar{k}_2 от x ($h_c^2 = x \cdot 10^{-17}$, $k_r = 10^5$, $b_r = 10^3$) при различных значениях скорости движения

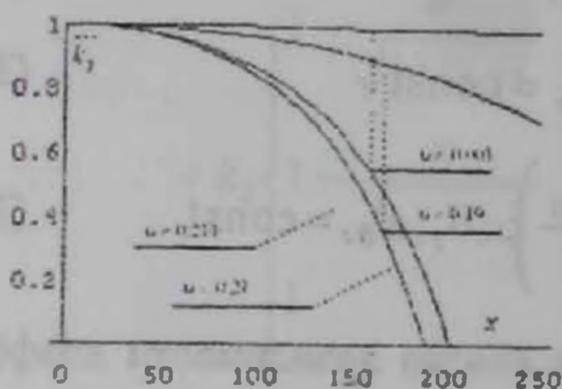


Рис.3. Зависимость \bar{k}_2 от x ($h_c^2 = x \cdot 10^{-17}$, $k_r = 10^4$, $b_r = 10^4$) при различных значениях скорости движения

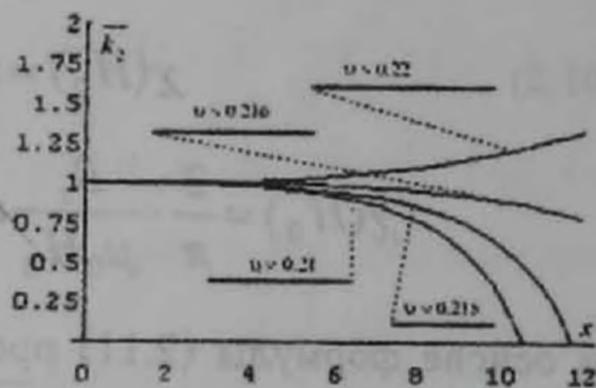


Рис.4. Зависимость \bar{k}_2 от x ($h_c^2 = x \cdot 10^{-17}$, $B_s = 5 \text{ il}$, $k_0 = 5 \cdot 10^3$) при различных значениях скорости движения

Численные расчеты показывают также: а) при $V^2/c_1^2 = v < 0,21$ с увеличением магнитного поля КИ \bar{k}_2 сначала уменьшается и, переходя через нуль, принимает некоторое отрицательное значение, а потом резко возрастает; б) когда $V^2/c_1^2 = v \rightarrow 0,22$ (т. е. когда скорость движения трещины близка к скорости распространения волн Релея) КИ $\bar{k}_2 \rightarrow 2$ при увеличении магнитного поля. Из рис 2-4 видно, что нелинейный закон намагничивания может значительно поменять НДС около трещины. Отметим, что линейный закон (3.1) имеет место при довольно слабом магнитном поле. Нелинейными законами (3.2)-(3.3) описываются среды при воздействии сильных магнитных полей.

Таким образом, определено НДС ферромагнитной плоскости с движущейся трещиной, при предположении, что ферромагнитная плоскость с нелинейным законом намагничивания находится в однородном магнитном поле. Показано, что учет магнитного поля и скорости движения трещины могут существенно изменить НДС плоскости около трещины. Показано также, что нели-

нейный закон намагничивания тоже может значительно повлиять на НДС около трещины.

Институт механики НАН Армении

Դ. Ջ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ

Շարժվող ճաքով ֆեռոմագնիսական հարթության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը

Ուսումնասիրվում է շարժվող ճաքով ֆեռոմագնիսական հարթության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը: Միջավայրը, որը հանդիսանում է մագնիսորեն փափուկ, ոչ գծային մագնիսացման օրենքով, գտնվում է համասեռ մագնիսական դաշտում: Օգտագործելով Ֆուլրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը, խնդրի լուծումը հանգում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը: Նշված զույգ ինտեգրալ հավասարման լուծումը կառուցվում է անալիտիկորեն: Մագնիսաառաձգական լարումները և ինտենսիվության գործակիցը որոշված են անալիտիկորեն: Ստացված անալիտիկ բանաձևերի հիման վրա ուսումնասիրվում է ճաքի շարժման արագության, մագնիսական դաշտի և մագնիսացման ոչ գծային օրենքի ազդեցությունն ինտենսիվության գործակցի վրա: Ցույց է տրված, որ նշված պարամետրերը կարող են էապես ազդել մագնիսաառաձգական լարումների և ինտենսիվության գործակցի վրա:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Д.Д.Асанян, Г.Е.Багдасарян, Изв. НАН Армении. Физика, т.30, №6 (1995).
- ² Y.Shindo, ASME, J. of Applied Mechanics, v.44, p.47-50 (1977).

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

А. А. Баблоян, С. А. Мелкумян

Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина

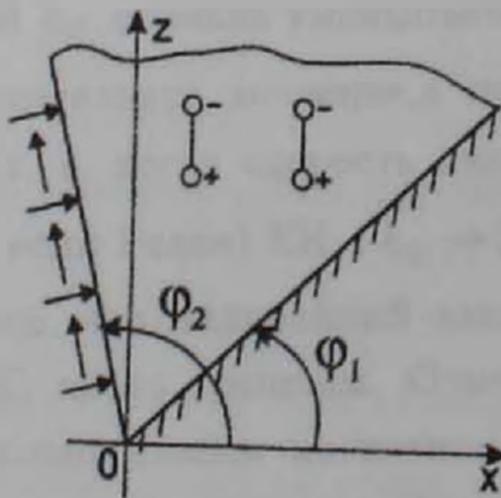
(Представлено академиком НАН Армении В.С.Саркисяном 22/IV 1998)

В работе рассматривается плоское деформированное состояние клина из упругого пьезокерамического материала. Одна граница клина жестко закреплена, а на другую действует произвольно распределенная нагрузка. На заделанной границе задан электрический потенциал, а на нагруженной границе – нормальный компонент электрической индукции.

Таким образом, граничные условия для рассматриваемой задачи будут:

$$\begin{aligned} U_r(r, \varphi_1) = V_\varphi(r, \varphi_1) = 0; \quad \Psi(r, \varphi_1) = \Psi_0(r) & \quad (0 < r < \infty) \\ \sigma_\varphi(r, \varphi_2) = \sigma(r); \quad \tau_{r\varphi}(r, \varphi_2) = \tau(r); \quad D_\varphi(r, \varphi_2) = D_0(r) & \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что вектор предварительной поляризации материала в любой его точке имеет постоянное направление и с биссектрисой клина составляет произвольный угол. Такой клин можно получить из поляризованной бесконечной плоскости, отрезав от нее клин любой ориентации и с любым углом раскрытия (рис.).



Введем полярные (r, φ) и обобщенные полярные (ρ, θ) координатные системы

$$x = r \cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad az = ar \sin \varphi = \rho \sin \theta$$

и ищем решение уравнений равновесия теории электроупругости ⁽¹⁾ для плоского деформированного состояния в координатной системе (ρ, θ) в виде (2-6):

$$\begin{aligned} U_x &= \gamma_1(\alpha) \lambda^{-1} \Phi'(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \quad U_z = \gamma_2(\alpha) \Phi(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \\ \Psi &= -\Phi(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \quad \Phi'' + k^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь считалось, что направление вектора поляризации в любой точке материала совпадает с положительным направлением осей oz , U_x, U_y, U_z — проекции вектора перемещения \bar{U} в декартовой системе координат, Ψ — потенциал электрического поля, а λ — произвольный комплексный параметр.

Рассматривается случай, когда $U_y = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = 0$.

Подставляя выражение (2) в уравнения равновесия статики ⁽¹⁾ для определения неизвестных $(\gamma_1, \gamma_2, 1)$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (C_{11}^E - \alpha^2 C_{44}^E) \gamma_1(\alpha) - (C_{13}^E + C_{44}^E) \alpha \gamma_2(\alpha) + (e_{31} + e_{15}) \alpha &= 0; \\ (C_{13}^E + C_{44}^E) \alpha \gamma_1(\alpha) + (C_{44}^E - \alpha^2 C_{33}^E) \gamma_2(\alpha) - (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) &= 0; \\ (e_{31} + e_{15}) \alpha \gamma_1(\alpha) + (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) \gamma_2(\alpha) + (\varepsilon_{11}^S - \alpha^2 \varepsilon_{33}^S) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда функции $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ определяются единственным образом, а параметр α определяется из условия равенства нулю детерминанта системы (3).

Нетрудно заметить, что это уравнение имеет только три корня $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, для которых $\text{Re} \alpha_p > 0$. Доказывается, что один из корней (α_0) всегда действителен, так как $\alpha_0^2 > 0$.

Таким образом, на основании вышесказанного, общее решение уравнений равновесия теории электроупругости при плоском деформированном состоянии для клиновидной области можно представить в виде ^(2,3):

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_1(\alpha_p) \lambda^{-1} \Phi'_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda; \\ U_z &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_2(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda; \\ \Psi &= -\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\text{Re} \theta_p$ и φ находятся в одной и той же четвертьплоскости:

$$\begin{aligned} \rho_p &= r b_p(\varphi), \quad \text{tg} \theta_p = \alpha_p \text{tg} \varphi, \quad (p=0,1,2) \\ b_p^2(\varphi) &= \cos^2 \varphi + \alpha_p^2 \sin^2 \varphi, \quad \text{Re} b_p(\varphi) > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Пользуясь уравнениями состояния (1) и формулами поворота координатных осей для напряжений и перемещений (7), на основании выражений (4) получим:

$$\begin{aligned}
 U_r &= U_x \cos \varphi + U_z \sin \varphi; \quad U_\varphi = -U_x \sin \varphi + U_z \cos \varphi; \\
 \sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \alpha_p^{-1} \gamma_3(\alpha_p) [\Phi'_p \cos \theta_p + \lambda \Phi_p \sin \theta_p] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 \sigma_r + \sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \frac{\alpha_p^2 - 1}{\alpha_p} \gamma_3(\alpha_p) [\lambda \Phi_p \sin \theta_p - \Phi'_p \cos \theta_p] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_3(\alpha_p) \left[\Phi'_p \frac{\sin \theta_p}{\alpha_p^2} - \lambda \Phi_p \cos \theta_p \right] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \quad (6) \\
 D_\varphi &= -\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) \Phi'_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 D_r &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) \left[\left(\frac{\alpha_p^2 + 1}{2\alpha_p} + \frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \cos 2\theta_p \right) \lambda \Phi_p + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \Phi'_p(\lambda, \theta_p) \sin 2\theta_p \right] b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda,
 \end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
 \gamma_3(\alpha) &= C_{44}^E \alpha \gamma_1(\alpha) + C_{44}^E \gamma_2(\alpha) - e_{15} = C_{11}^E \alpha^{-1} \gamma_1(\alpha) - C_{13}^E \gamma_2(\alpha) + e_{31} = \\
 &= -\alpha [C_{13}^E \gamma_1(\alpha) - C_{33}^E \alpha \gamma_2(\alpha) + \alpha e_{33}]; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_4(\alpha) = e_{31} \gamma_1(\alpha) - e_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) - \alpha \varepsilon_{33}^S = -\alpha^{-1} [e_{15} \alpha \gamma_1(\alpha) + e_{15} \gamma_2(\alpha) + \varepsilon_{11}^S].$$

Пусть угол раствора пьезокерамического клина — φ_0 , а вектор предварительной поляризации с биссектрисой клина составляет угол $\tilde{\varphi}_0$.

В этом случае углы φ_1 и φ_2 , входящие в граничные условия (1), определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 2\varphi_1 &= \pi - \varphi_0 - 2\tilde{\varphi}_0, \quad 2\varphi_2 = \pi + \varphi_0 - 2\tilde{\varphi}_0, \\
 0 < \varphi_0 &\leq 2\pi, \quad 0 \leq \tilde{\varphi}_0 \leq \pi. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Представим решение уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \Phi_p(\lambda, \theta_p) &= A_p \sin \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) + B_p \cos \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) \\
 (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad p &= 0, 1, 2), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sin \theta_{pk} &= \alpha_p b_p^{-1}(\varphi_k) \sin(\varphi_k), \quad \cos \theta_{pk} = b_p^{-1}(\varphi_k) \cos(\varphi_k), \\ \operatorname{tg} \theta_{pk} &= \alpha_p \operatorname{tg} \varphi_k, \quad \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \theta_{p0} = \theta_{p2} - \theta_{p1}, \quad (p = 0, 1, 2; k = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что пара $\operatorname{Re} \theta_{pk}$ и φ_k , так же как и пара $\operatorname{Re} \theta_p$ и φ обязательно должны находиться в одном и том же квадранте.

Удовлетворяя граничным условиям (1) и применяя обратное преобразование Мелина к полученным соотношениям для определения неизвестных функций $A_p(\lambda)$ и $B_p(\lambda)$, входящих в (9), получим систему из шести уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^2 \alpha_p^{-1} \gamma_3(\alpha_p) [A_p \cos(\lambda \theta_{p0} - \theta_{p2}) - B_p \sin(\lambda \theta_{p0} - \theta_{p2})] b_p^{-\lambda+1}(\varphi_2) &= \tilde{\sigma}(\lambda); \\ \sum_{p=0}^2 \gamma_3(\alpha_p) [A_p (\sin \lambda \theta_{p0} \cos \lambda \theta_{p2} - \alpha_p^{-2} \cos \lambda \theta_{p0} \sin \theta_{p2}) + \\ + B_p (\cos \lambda \theta_{p0} \cos \lambda \theta_{p2} + \alpha_p^{-2} \sin \lambda \theta_{p0} \sin \theta_{p2})] b_p^{-\lambda+1}(\varphi_2) &= \tilde{\tau}(\lambda); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) (A_p \cos \lambda \theta_{p0} - B_p \sin \lambda \theta_{p0}) b_p^{-\lambda}(\varphi_2) = -\tilde{D}_0(\lambda);$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_1(\alpha_p) A_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = 0; \quad \sum_{p=0}^2 B_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = -\tilde{\Psi}_0(\lambda);$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_2(\alpha_p) B_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = 0, \quad (-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0),$$

где введены следующие обозначения:

$$\lambda \tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^{\infty} \sigma(r) r^{\lambda} dr, \quad \lambda \tilde{\tau}(\lambda) = \int_0^{\infty} \tau(r) r^{\lambda} dr, \quad (12)$$

$$\lambda \tilde{D}_0(\lambda) = \int_0^{\infty} D_0(r) r^{\lambda} dr, \quad \tilde{\Psi}_0(\lambda) = \int_0^{\infty} \Psi_0(r) r^{\lambda-1} dr,$$

Здесь предполагалось, что граничные функции (1) абсолютно интегрируемы.

В частном случае, когда биссектриса клина совпадает с осями ox или oy :

$$\varphi_1 = \frac{k\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\varphi_0}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (13)$$

введением новых неизвестных функций

$$X_p(\lambda) = A_p(\lambda) b_p^{-\lambda}(\varphi_1), \quad Y_p(\lambda) = B_p(\lambda) b_p^{-\lambda}(\varphi_1), \quad (p = 0, 1, 2) \quad (14)$$

систему (11) можно привести к более удобному для решения виду.

Те же обозначения (14) можно использовать и в тех случаях, когда клин представляет собой полуплоскость ($\varphi_0 = \theta_{p0} = \pi$) или плоскость с полубесконечной трещиной ($\varphi_0 = \theta_{p0} = 2\pi$).

В теории электроупругости часто бывает необходимым совместно с внутренней (для материальной области) задачей рассматривать также внешнюю (для нематериальной области) задачу, в которой неизвестной функцией является только потенциал электрического поля (1).

Согласно граничным условиям (1), для нашего случая внешняя задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \varphi^2} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{\varphi=\varphi_2} = rD_0(r), \quad \Psi_0(r, 2\pi + \varphi_1) = \Psi_0(r) \quad (0 \leq r < \infty, \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_1).$$
(15)

Используя обозначения (12), решение задачи (15) представляется в виде интеграла Мелина (5)

$$\Psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\tilde{\Psi}_0(\lambda) \cos \lambda(\varphi - \varphi_2) - \tilde{D}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi + \varphi_1 - \varphi) \right] \frac{r^{-\lambda} d\lambda}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)}.$$
(16)

Используя условия непрерывности электрической индукции и потенциал электрического поля на границах материального клина, на основании решения (4), (6) и (16) для определения неизвестных функций $\tilde{\Psi}_0(\lambda)$ и $\tilde{D}_0(\lambda)$ получим следующие уравнения:

$$\sum_{p=0}^2 (A_p \sin \lambda \theta_{p0} + B_p \cos \lambda \theta_{p0}) b_p^{-\lambda}(\varphi_2) = \frac{\tilde{D}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi - \varphi_0) - \tilde{\Psi}_0(\lambda)}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)};$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) A_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = \varepsilon_0 \frac{\tilde{\Psi}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi - \varphi_0) - \tilde{D}_0(\lambda)}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)},$$
(17)

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Таким образом, задача о пьезокерамическом клине с учетом внешней (нематериальной) среды приводится к совместному решению систем уравнений (11) и (17) относительно восьми неизвестных функций $\tilde{\Psi}_0, \tilde{D}_0, A_p$ и B_p ($p = 0, 1, 2$). Та же задача, без учета внешней среды, приводится только к решению системы (11), где необходимо принять $\tilde{\Psi}_0 = \tilde{D}_0 = 0$.

В конце отметим, что поведение напряжений на вершине клина, без учета внешней среды, определяется корнями основного детерминанта системы

$\Delta_0(\lambda)$. При учете внешней среды поведение напряжений на малой окрестности вершины клина определяется уже корнями основного детерминанта совместных систем уравнений (11) и (17) – $\Delta(\lambda)$. После решения систем уравнений (11) и (17) компоненты электрического и механического полей можно получить из формул (16), если к ним применить теорию вычетов.

Разработаны алгоритмы определения корней целых функций $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$, а также вычисленных интегралов, входящих в формулы (6), с использованием при этом системы (11) и (17).

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ա. Յ. ԲԱՐԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼԻՔՈՒՄՅԱՆ

Էլեկտրատառձգականության տեսության հարթ խնդիրը պիեզակերամիկական սեպի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է նախապես բեռնացված պիեզակերամիկական առաձգական նյութից պատրաստված անվերջ սեպի հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրա եզրերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս եզրի վրա ազդում է կամայական ձևով բաշխված արտաքին բեռ: Ամրակցված եզրի վրա հայտնի է էլեկտրական պոտենցիալի արժեքը, իսկ բեռնավորված եզրի վրա տրված է էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը: Ենթադրվում է, որ նյութի նախնական բեռնացման վեկտորը նրա յուրաքանչյուր կետում ունի հաստատուն ուղղութիւն և սեպի կիսորդի հետ կազմում է կամայական անկյուն:

Միաժամանակ դիտարկվում է նաև արտաքին (ոչ նյութական միջավայրի համար) խճնդիրը:

Խնդրի լուծումը փնտրված է Մելիքի ինտեգրալների տեսքով: Բավարարելով խնդրի եզրային, ինչպես նաև սեպի եզրային էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի ու էլեկտրական ինդուկցիայի անընդհատության պայմաններին և օգտվելով Մելիքի հակադարձ ձևափոխութայն բանաձևից, խնդիրը բերվում է հանրահաշվական ութ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Սեպի գազաթում լարումների վարքը որոշվում է համակարգի հիմնական դետերմինանտի մոդուլով ամենափոքր արմատների արժեքներով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга, Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. ² А.А.Баблоян, ДАН АрмССР, т.65, №5 (1977). ³ С.А.Мелкумян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.226-229, 1997. ⁴ В.С.Сарксян, Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд. ЕГУ, 1976. ⁵ А.А.Баблоян, С.А.Мелкумян, Г.Н.Шахвердян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.201-204, 1997. ⁶ А.А.Баблоян, Л.М.Варданян, С.М.Саакян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.198-200, 1997. ⁷ С.Г.Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977.

УДК 547.491.8 + 547.715

Х. Р. Гюлумян, М. Л. Ерицян, А. Г. Саркисян, К. Г. Бегоян

**Сверхпроводящие полимер-керамические композиции,
полученные на основе азотсодержащих и гетероциклических
мономеров**

(Представлено академиком НАН Армении В.М. Арутюняном 10/VI 1998)

Методами дифференциально сканирующей калориметрии, инфракрасной спектроскопии и термогравиметрическим анализом изучена полимеризация диаллилизотиоциануровой, диаллилбарбитуровой кислоты, а также акриламидных комплексов нитратов металлов в присутствии высокотемпературных сверхпроводящих керамик (ВТСК) $Yb_{a_2}Cu_3O_{7-x}$ и $Bi_{1.7}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_{7-x}$.

Установлено, что реакция протекает при температуре 110-150°C, в течение 60-80 мин в твердой фазе, в отсутствие взрывоопасных радикальных инициаторов. В результате получают полимер-керамические композиции.

После открытия высокотемпературной сверхпроводящей керамики ⁽¹⁾ возник большой интерес к созданию композиционных сверхпроводящих материалов ^(2,3). Это объясняется следующими обстоятельствами: сверхпроводники не стабильны из-за слабо связанного кислорода, они хрупкие, не формуются, что создает некоторые трудности для получения деталей различных конфигураций (трубки, стержни, кольца, проволоки и т.д.).

На наш взгляд, наиболее перспективным для получения композиционных сверхпроводящих материалов является применение полимеризующих мономеров или уже готовых полимеров. Это позволит упростить и удешевить технологию получения сверхпроводящих материалов, придаст керамике легкость и эластичность и даст возможность получать детали различных конфигураций.

Известны различные работы по синтезу сверхпроводящих полимер-керамических композиций ^(4,5). Однако в них синтез композиции осуществляется многоэтапно, применяется множество реактивов. Кроме того, после синтеза полученные соединения не сверхпроводящие. Для восстановления сверхпроводящих свойств необходима термообработка этих соединений в атмосфере чистого кислорода.

Целью настоящей работы является разработка принципиально новых подходов синтеза сверхпроводящих полимер-керамических композиций.

Синтез диаллилизотиоциануровой кислоты (ДАИЦ) проводили по стандартной методике, описанной в работе (6).

Смесь ДАИЦ с нитратом металла готовилась путем механического перемешивания в твердой фазе или в ацетоновой пасте. После образования гомогенной массы смесь держали сутки в эксикаторе и сушили при температуре 60-70°C. Для получения сверхпроводящих полимер-керамических композиций ее тщательно перемешивали с сверхпроводящей керамикой. Для изучения полимеризации в стеклянных ампулах из порошка вышеуказанной смеси готовили таблетки различного диаметра в прессформах с помощью пресса с усилением 39,2 кН.

Полимеризация изучалась на дифференциально сканирующем калориметре марки ДСМ-2М со скоростью нагрева 16,6 °/мин.

Термогравиметрические исследования проводились на дериватографе "Derivatograph Q" с микропроцессором.

Нами в качестве полимеризующих агентов были выбраны гетероциклические и азотсодержащие мономеры, такие как диаллилизотиоциануровая кислота, диаллилбарбитуровая кислота (ДАБК) и акриламидные комплексы нитратов металлов.

Установлено, что полимеризация, а также сополимеризация указанных мономеров в присутствии высокотемпературной сверхпроводящей керамики, таких как $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ и $Bi_{1,7}Pb_{0,3}Sr_2Ca_2Cu_3O_{7-x}$, происходит в твердой фазе, с большой скоростью в области относительно низких температур (110-150°C). За ходом реакции следили методом дифференциально сканирующей калориметрии и инфракрасной спектроскопии. Согласно калориметрическим исследованиям на системе нитрат металла-ДАИЦ-ВТСК после небольшого эндотермического пика появляется сильный экзотермический пик.

По данным инфракрасной спектроскопии, в продуктах реакции пики в области длин волн 940 и 1640 cm^{-1} , соответствующие полосам поглощения ненасыщенных двойных связей в ДАИЦ, отсутствуют. Аналогичные результаты были получены при полимеризации ДАИЦ в присутствии сверхпроводящей керамики. На кривой ДТА чистого ДАИЦ или нитрата металла имеются эндотермические пики, соответствующие плавлению ДАИЦ (136°C) и разложению нитрата металла. В обоих случаях не имеется экзотермический пик, характерный для систем нитрат металла-ДАИЦ-ВТСК.

Таким образом, по результатам "холостых" опытов можно сделать вывод, что экзотермический пик, наблюдаемый у вышеуказанных систем, связан именно с реакцией ненасыщенных двойных связей аллильных групп ДАИЦ.

Аналогичные результаты получены для систем нитрат металла-ДАБК-ВТСК.

В случае использования акриламидных комплексов с общей формулой $Me(AA_m)_4(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$ (где $Me=Co, Ni, Mn, Zn, Cu, Y, Yb, La, Bi, Cd, In, AA_m$ – акриламид) реакция образования сверхпроводящей композиции протекает как в объеме, так и во фронтальном режиме. Последний более четко наблюдается, когда $Me=Co, Ni, Mn, In$, при использовании медного комплекса реакция идет в объем.

После полимеризации на поверхности композиции видны спиралевидные линии, что свидетельствует о фронтальном протекании реакции. Известны (7) мономеры, способные полимеризоваться во фронтальном режиме. Однако эти процессы протекают при высоких давлениях (до 5 тыс. атмосфер) и высоких температурах или в присутствии взрывоопасных радикальных инициаторов.

Природа активных центров, ответственных за полимеризацию вышеуказанных мономеров, в настоящее время неизвестна. Однако предполагается, что иницирующим агентом может быть молекула NO_2 , образовавшаяся в результате частичного разложения нитратных групп при нагреве.

Сверхпроводящий переход полученных композиций регистрировался индуктивным методом по сдвигу частоты криогенного автогенератора на туннельном диоде с образцом в катушке колебательного контура.

Сопротивление образцов при комнатной температуре измерялось на термометре со специальным приспособлением.

Результаты исследования свойств сверхпроводящих полимер-керамических композиций приведены в таблице.

Состав исходной смеси						Температура сверхпроводящего перехода, К					
$Bi_{1.7}Pb_{0.3}Ca_xSr_yCu_zO_{7-x}$											
Керамика			ДАИЦ-нитрат металла			Температура реакции, °С	Время реакции, мин	композиита		исходной керамики	
№	Состав, г	Масса, %	Состав, г	Масса, %	Металл			T_H	T_K	T_H	T_K
1	0,4	70	0,17	30	Yb	110	80	115	113	112	110
2	0,24	60	0,16	40	Yb	150	70	116	113	112	110
3	0,18	50	0,18	50	Yb	170	60	113	110	112	110
4	0,20	30	0,47	70	La	150	60	114	111	112	110

Удельная электрическая проводимость указанных композиций в зависимости от условия эксперимента (температура, глубина полимеризации) изменяется в пределах $1-2,5 \cdot 10^6$ Ом·см. Применение других металлов (In, Y) в составе нитрата приводит к снижению на два порядка удельного электрического сопротивления сверхпроводящих полимер-керамических композиций.

Таким образом, разработан простой по технологии и чистый с экологической точки зрения способ (8,9) получения сверхпроводящих полимер-керамических композиций, который может найти широкое применение, в частности, для изготовления экранов магнитного, СВЧ поля, сверхпроводящих

магнитов, веществ с магнитными свойствами, обладающих джозевсоновской средой, и др.

Армянский государственный педагогический институт
Ереванский государственный университет

Խ. Ռ. ՉՅՈՒԼՈՒՄՅԱՆ, Մ. Լ ԵՐԻՑՅԱՆ, Ա. Գ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Կ. Հ. ԲԵԳՈՅԱՆ

Գերհաղորդիչ պոլիմեր-խեցեղեն բաղադրանյութերի ստացումը ազոտ պարունակող եվ
հետերոցիկլիկ մոմենտների հիման վրա

Դիֆերենցիալ տեսաձրող կալորիաչափության, ԻՎ-սպեկտրոսկոպիայի և ջերմազրավիմետրիկ անալիզի միջոցով ուսումնասիրվել է դիալիզոցիանուրաթթվի, դիալիզիբարբիտորաթթվի, ինչպես նաև մետաղների նիտրատների ակրիլամիդային կոմպլեքսների պոլիմերիզացիան $Yb_{a_2}Cu_3O_{7-x}$ և $Bi_{1.7}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_{7-x}$ բարձր-ջերմաստիճանային գերհաղորդիչ խեցեղենի առկայությամբ:

Սահմանվել է, որ ռեակցիան ընթանում է $110-150^{\circ}C$ ջերմաստիճանային միջակայքում, 60-80ր. ընթացքում, պինդ ֆազայում, առանց պայթունավտանգ ռադիկալային ակտիվատորների: Արդյունքում ստացվում են պոլիմեր-խեցեղեն բաղադրանյութեր:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J.Bednorz, K.A.Muller, Phys.,v. B64, №2, p.189 (1986).
- ² М.Ж.Свистунов, Ж.Ю.Таренков, А.И.Дьяченко, Сверхпроводимость: Физика, химия, техника, т.5, №3, с.495 (1992).
- ³ Г.Е.Ведерников, Б.В.Великанов, Ю.С.Федяев и др. Изв.АН СССР. Неорганические материалы, т.26, №3, с.214 (1990).
- ⁴ T.Goto, M.Kada, J.Appl.Phys., v.26, №9, p.1527 (1987).
- ⁵ C.Gann, S.Sen. Appl,Phys.Lett., v.52, №16, p.1355 (1988).
- ⁶ Г.М.Погосян, В. А.Панкратов, В.Н.Заплишный и др., Политриазины, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987.
- ⁷ С.П.Давтян, П.В.Жирков, С.А.Вольфсон, Успехи химии, т.53, №2, с.251 (1984).
- ⁸ Х.Р.Гюлумян, М.Л.Ерицян, Р.А.Карамян и др., Авторское свидетельство СССР, №1829319, приорит.изобр. 23.07.1990.
- ⁹ Х.Р.Гюлумян, М.Л.Ерицян, Р.А.Карамян и др., Авторское свидетельство СССР, №1831198, приорит.изобр. 20.04.1990.

УДК 539.12.01

Н. А. Корхмазян

О массе нейтрино

(Представлено академиком НАН Армении А.Ц.Аматуни 20/XII 1998)

Как известно, верхние и нижние кварки расположены асимметрично на “оси” заряда. С целью некоторой симметризации указанной асимметрии будем приписывать кваркам новое аддитивное квантовое число σ с таким расчетом, чтобы в сочетании с электрическим зарядом q того же кварка получить заряд одноименного лептона. Тогда, например, для u и d кварков получим $\sigma_u = \frac{1}{3}$ и $\sigma_d = -\frac{2}{3}$. В общем виде σ -числа всех кварков (и антикварков) определяются единой формулой

$$\sigma = q - \frac{1}{3}, \tilde{\sigma} = \tilde{q} + \frac{1}{3}, \quad (1)$$

где знак \sim символ античастицы. Теперь кварки (и лептоны) размещаются на плоскости (q, σ) симметричным образом по обеим сторонам прямой $\sigma = -q$. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что наряду с законом сохранения электрического заряда имеет место также второй точный закон сохранения – закон сохранения σ -числа. Легко убедиться, что мы вправе положить это утверждение в основу дальнейших размышлений. Для этого сначала покажем, что σ -числа барионов, мезонов, лептонов и γ -квантов определяются по формулам

$$\sigma_B = Q_B - 1, \sigma_M = Q_M, \sigma_L = Q_L + 1, \sigma_\gamma = 0, \tilde{\sigma} = -\sigma, \quad (2)$$

где Q – заряд частицы. В самом деле, для барионов и мезонов приведенные формулы очевидны в силу их кваркового состава: (qqq) и $(q\tilde{q})$. Эти формулы применимы также для экзотических барионов и мезонов ^(1,2) типа $(qqqq\tilde{q})$ и $(qq\tilde{q}\tilde{q})$. Дибарион $(qqqqqq)$ надо рассматривать как два бариона. Из (2), в частности, следует, что $\sigma(p) = 0, \sigma(n^0) = -1, \sigma(\pi^0) = 0, \sigma(\tilde{\Lambda}^0) = 1, \sigma(\Sigma^-) = -2$ и т.д. Согласно реакции $e^- + e^+ \Rightarrow 2\gamma$ для фотона получим $\sigma_\gamma = 0$. Остается определить σ -число лептонов. При этом будем приписывать одно и то же квантовое число (как и заряд) всем заряженным лептонам ($\sigma_e = \sigma_\mu = \sigma_\tau$) и другое число всем незаряженным лептонам

$(\sigma_{\nu_e} = \sigma_{\nu_\mu} = \sigma_{\nu_\tau})$. Эти числа, однако, связаны формулой $\sigma_{\nu_e} = 1 + \sigma_{e^-}$, что следует, например из распада $n^0 \Rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$. Для определения σ_{e^-} приведем цитату из монографии (3). "Таким образом, один и тот же бозон может переходить как в пару антилептон + антикварк, так и в пару кварков ии $\Leftarrow x \Rightarrow e^+ \tilde{d}$ ". Из этой схемы следует, что σ -число для позитрона (и для электрона) равно нулю: $\sigma_{e^+} = -\sigma_{e^-} = 0$, а для нейтрино $\sigma_{\nu_e} = 1$, что согласуется с (2). После этого уже непосредственной проверкой можно убедиться в том, что предлагаемый закон сохранения σ -числа на самом деле имеет место во всех наблюдавшихся по сей день реакциях (см. например (4)). Это число сохраняется также для возможного распада протона по каналам $p \Rightarrow e^+ \pi^0; e^+ \pi^+ \pi^-$ и др., где нарушено сохранение барионного и лептонного чисел (3). Оказывается, сохранение σ -числа имеет вполне закономерный характер, так как из него непосредственно следует закон сохранения разности барионного и лептонного чисел Джорджи и Глэшоу, полученный ими как следствие SU(5) симметрии (5).

На самом деле, если в реакциях участвуют барионы, мезоны, лептоны и γ -кванты, то закон сохранения σ -числа, согласно (2), можно написать в виде

$$\begin{aligned} \sum Q_B - N_B + \sum \tilde{Q}_B + \tilde{N}_B + \sum Q_M + \sum \tilde{Q}_M + \sum Q_L + \\ + N_L + \sum \tilde{Q}_L - \tilde{N}_L = \text{const}, \end{aligned} \quad (3)$$

где N — число частиц. Учитывая закон сохранения электрического заряда, вместо (3) получим

$$(N_B - \tilde{N}_B) - (N_L - \tilde{N}_L) = \text{const}, \quad (4)$$

т.е. закон сохранения разности барионного и лептонного чисел. Заметим, что в формуле (4) число барионов может быть заменено на полное число всех кварков N_k , входящих в барионы и мезоны. В самом деле, так как для барионов $(N_k - \tilde{N}_k) = 3(N_B - \tilde{N}_B)$, а для мезонов $(N_k - \tilde{N}_k) = 0$, то из (4) получим связь между числами кварков и лептонов:

$$(N_k - \tilde{N}_k) - 3(N_L - \tilde{N}_L) = \text{const} \quad (5)$$

Как мы убедимся чуть позже, из закона сохранения σ -числа следует, что масса электронного нейтрино равна нулю. В связи с этим следует напомнить, что по вопросу о массе нейтрино имеются две противоречащие друг другу теории. Согласно теории Дирака - Вейля (1929) масса нейтрино в точности равна нулю, и лептонное число сохраняется (6). В противоположность этому, в теории Майорана (1936) масса нейтрино не должна в точности равняться нулю, и поэтому лептонное число не сохраняется (7,8). Теория Майорана делает возможным явление безнейтринного двойного β -распада (202β), когда

два d -кварка (в ядре) одновременно переходят в два u -кварка по схеме $d \Rightarrow u + e^-$, с нарушением лептонного числа.

К тем же противоречивым результатам приводят также и две более современные теории, базирующиеся на теории групп: SU(5) и SO(10) симметрии. По этому вопросу в (3) читаем: "Группа SO(10) допускает существование некоторых явлений, которые запрещены в группе SU(5). В частности, в рамках SU(5) несохранение барионного квантового числа B жестко связано с несохранением лептонного квантового числа L , так что $B-L$ сохраняется. В группе SO(10) закон сохранения $B-L$ может нарушаться при достаточно богатом наборе хиггсовых полей". Примерно то же самое сказано в докладе Гелл-Манна (9).

Таким образом, главные вопросы, связанные с проблемой нейтрино, и в частности вопрос о его массе, остаются открытыми. На протяжении вот уже шестидесяти лет ни экспериментально, ни теоретически не удалось разрешить эту важнейшую дилемму (10-12).

В последние годы во многих лабораториях мира делаются настойчивые попытки обнаружить безнейтринный двойной β -распад и нейтринные осцилляции, которые дадут ответ на обсуждаемый вопрос. Для этих целей в настоящее время осуществляются поистине грандиозные проекты, рассчитанные на ближайшие годы.

В проекте MINOS (США) участвуют 23 научных центра разных стран, в том числе Китая, Великобритании и России (13). Планируется провести подземный эксперимент для детектирования нейтринных пучков на расстоянии 730 км от Ферми-лаборатории (шт. Висконсин) до Соудан (шт. Миннесота). Ожидается, что часть генерируемых в Ферми-лаборатории мюонных нейтрино вследствие осцилляции в конце пути будет иметь другой аромат.

В Японском проекте KEK нейтринный пучок может осциллировать на длине пробега в 230 км, от ускорителя до детектора Супер-Камиоканде (13). В Германском проекте GENIUS рассчитывают улучшить точность измерения массы нейтрино от 0,1 до 0,01 и даже до 0,001 eV и др. (10).

Возвращаясь к закону сохранения σ -числа, отметим, что он, как и теории Дирака-Вейла и SU(5)-симметрии, запрещает 202β распад, который в эксперименте не наблюдался.

Таким образом, резюмируя полученные в настоящей работе результаты, можно сказать, что вводится новое сохраняющееся квантовое число σ , из сохранения которого получается закон сохранения разности барионного и лептонного чисел. Запрещая 202β распад, закон сохранения σ -числа утверждает, что по крайней мере масса электронного нейтрино в точности равна нулю.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна.

Ն. Ա. ՆՈՐԻՍԱԶՅԱՆ

Նեյտրինոյի զանգվածի մասին

Քվարկներին վերագրված է մի նոր σ -լիցք: Դրա հիման վրա ստացված են ադրոնների, լեպտոնների և γ -ֆոտոնի σ -լիցքը: Ցույց է տրված, որ գոյություն ունի σ -լիցքի պահպանության օրենք:

Այդ օրենքից ստացված է Ջորջիի և Գլեշոույի բարիոնային և լեպտոնային լիցքերի տարբերության պահպանության օրենքը (1974): Դրանով իսկ բերված է լրացուցիչ փաստարկ այն բանի օգտին, որ արգելված է առանց նեյտրինոյի կրկնակի β -տրոհումը, և այդ պատճառով, առնվազն էլեկտրոնային նեյտրինոյի զանգվածը ճշգրիտ զրո է:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐՈՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л.Г.Ландсберг, УФН, т.164, №11, с.1129 (1994). ² В.В.Акисович, УФН, т.165, №11, с.1225, (1995). ³ Л.Б.Окунь, Физика элементарных частиц, М., Наука, 1987. ⁴ European Physical journal. C. Review of particle Physics, v.3, №1-4, p.1-794 (1998). ⁵ H.Georgi, Sh.Glashow. Phys.Rev.Lett., v.32, №8, p.438 (1974). ⁶ Ф.Холзбен, А.Мартин. Кварки и лептоны, М., Мир, 1987. ⁷ Х.Умедзава. Квантовая теория поля, М., ИЛ., 1958. ⁸ Cem Courier, Inter. jour. of high energy physics, v.38, №6 (1998). ⁹ М.Гел-Манн. УФН, т.151, №4, с.683 (1987). ¹⁰ H.V.Klapdor-Kleingrothaus, ЯФ-61, №6, p.967 (1998). ¹¹ С.С.Герштейн, Е.П.Мартемьянов, К.Н.Мухин, УФН, т.167, №8, с.811 (1997). ¹² Л.Б.Окунь, УФН, т.168, №6, с:625 (1998). ¹³ Fermi News. Fermi National Accelerator Laboratory, v.21, №15 (1997).

УДК 532.543

**Վ.Գ. Սանոյան, Հ.Վ. Թորմաջյան, Տ.Ա. Քալանթարյան,
Ի.Գ. Քրիստոստուրյան**

Գլորվող ալիքների հաշվարկը փոփոխական թեքության արագահոսներում

(Ներկայացված է Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Ֆ.Տ. Սարգսյանի կողմից 13/X 1998)

Ինչպես հայտնի է, արագահոսներում գլորվող ալիքների առաջացման և զարգացման օրինաչափությունների կանխորոշումն էական նշանակություն ունի այդ կառուցվածքների հիմնական չափերը սահմանելու համար: Գլորվող ալիքների շարժման օրինաչափությունները կրում են բարդ և բազմագործոն բնույթ և հաճախ միևնույն գործոնի ազդեցությունը երևույթի վրա կրում է երկակի բնույթ: Ուշագրավ է օրինակ նկատել, որ շփման բացակայության դեպքում գլորվող ալիքների առաջացումը բացատրվում է ⁽¹⁾, բայց միևնույն ժամանակ շփման մեծացման միջոցով կարելի է մեղմել կամ իսպառ վերացնել գլորվող ալիքների առաջացումը ⁽²⁾: Վերջին հանգամանքը հաճախ է օգտագործվում ոչ ալիքային արագահոսների լայնական կտրվածքների ձևեր մշակելու ժամանակ:

Վերը նշված պատճառներով է բացատրվում այն հանգամանքը, որ ալիքային երևույթների հաշվարկման բանաձևերը կրում են խիստ մոտավոր բնույթ: Ներկայումս որպես նորմատիվ փաստաթուղթ, օգտագործվում են նախկին Խորհրդային Միության առաջատար՝ Լենինգրադի Հիդրոտեխնիկայի գիտահետազոտական ինստիտուտի կողմից մշակված հանձնարարականները ⁽³⁾: Հիշյալ հանձնարարականներում, որպես թերություն կարելի է նշել այն հանգամանքը, որ հաշվարկային մեթոդիկայում արագահոսի երկայնական թեքությունը ընդունվում է հաստատուն, այն դեպքում, երբ կախված տեղանքի ռելիեֆա-տոպոգրաֆիական պայմաններից այն հատված առ հատված փոխվում է: Ներկա հոդվածի նպատակն է հաշվի առնել այդ գործոնի առկայությունը: Դրա համար օգտագործվում է հանձնարարականներում առաջարկված առնչությունն ալիքի α բարձրության (ամպլիտուդի) և l փոփոխական երկարության միջև: Արագահոսի հաստատուն թեքության դեպքում այն գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$a_l = \frac{h_l}{2} = a_s \exp\left(\frac{ix^*l}{h_0\Pi^2 Fr_0}\right), \quad (1)$$

որտեղ՝ a_s -ն ալիքի ամպլիտուդն է նրա ծնման հարվածում ($a_s = a_{l=0}$); x^* -ը հունի հիդրավիկական ցուցիչն է; $\Pi = \frac{x^*\omega}{2bh}$; h_0 -ն և Fr_0 -ն համապատասխանաբար հոսանքի խորությունը և ֆրուդի թիվն են հավասարաչափ շարժման պայմաններում; $i = l g \varphi$ (φ -ն հատակի թեքության անկյունն է եորիզոնի նկատմամբ):

Փոփոխական թեքության դեպքում, նշանակելով $i(l) = -\frac{dz}{dl}$, կարելի է գրել

$$\int_0^l i(l) dl = -\int_0^l \frac{dz}{dl} dl = z_0 - z_l, \quad (2)$$

որտեղ՝ z_0 -ն և z_l -ը արագահոսի հատակի նիշերն են համապատասխանաբար ալիքի ծնման հատվածում և նրանից l հեռավորության վրա:

(2) առնչությունից բխում է, որ փոփոխական թեքության դեպքում (1) արտահայտության էքսպոնենտում մասնակցող il մեծությունը պետք է փոխարինել հատվածի ծայրակետերի նիշերի տարբերությամբ անկախ այն բանից, թե ինչպիսի օրինաչափությամբ է փոփոխվում արագահոսի հատակի թեքությունը այդ հատվածում: Ուրիշ խոսքով կարելի է գրել $il = z_0 - z_l$ առնչությունը ընդհանուր դեպքում, որի եիման վրա համաձայն (1)-ի կունենանք՝

$$a_l = a_s \exp \frac{x^*(z_l - z_0)}{h_0\Pi^2 Fr_0}. \quad (3)$$

Համաձայն եիշյալ հանձնարարականների ալիքի սահմանային բարձրությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$h_{ալ.սահ} = 2a_{l_{սահ}} = \quad (4)$$

$$= \left[0,25\sqrt{Fr_0} + 1 - 0,5(0,25\sqrt{Fr_0} + 1) \left(\sqrt{1 + \frac{8}{(0,25\sqrt{Fr_0} + 1)^3}} - 1 \right) \right] \frac{\Pi^2 V_0^2}{g(\sqrt{Fr_0} + 1)^2},$$

որտեղ V_0 -ն հոսանքի արագությունն է l հատվածի սկզբում ($l = 0$), g -ն՝ ծանրության ուժի արագացումը:

Տեղադրելով (3) արտահայտության մեջ $a_l = a_{l_{սահ}}$, կստանանք

$$\frac{a_{l_{սահ}}}{a_s} = \exp \frac{x^*(z_0 - z_{l_{սահ}})}{h_0\Pi^2 Fr_0}, \quad (5)$$

որտեղ՝ $a_{l_{սահ}}$ արժեքը կորոշվի (4)-ի միջոցով: Այդ դեպքում (5) առնչությունից կարող ենք որոշել, թե հաշված ալիքի առաջացման նիշից ինչպիսի ուղղածիք հեռավորության վրա կգտնվի ալիքի սահմանային բարձրությանը

համապատասխանող արագահոսի հատակի նիշը: Համաձայն (3)-ի և (5)-ի կարող ենք գրել՝

$$z_0 - z_{\text{սահմ}} = 2.3 \frac{h_0 \Pi^2 Fr_0}{x^*} \lg \frac{a_{\text{սահմ}}}{a_s} \text{ կամ } z_{\text{սահմ}} = z_0 - 2.3 \frac{h_0 \Pi^2 Fr_0}{x^*} \lg \frac{a_{\text{սահմ}}}{a_s} : (6)$$

Այս արտահայտության միջոցով մենք կարող ենք որոշել արագահոսի այն հատվածը, որից հետո գլորվող ալիքները ստանում են իրենց հաստատուն սահմանային արժեքները և այլևս չեն փոփոխվում ըստ երկարության:

Նկատենք, որ Գյումուշի հիդրոկայանի նոր արագահոսի նախագծման ժամանակ (6) առնչության բացակայության պատճառով մենք օգտագործել ենք (3) - ում ներկայացված առնչությունը՝ կատարելով արագահոսի փոփոխական թերությունների միջինացում ըստ երկարության: Ստացված բանաձևերը թույլ են տալիս հետագայում չդիմելու այդպիսի կամայական քայլի:

Ջրային հիմնահարցերի և հիդրոտեխնիկայի գիտաարտադրական միավորում

В. Г. Саноян, О. В. Токмаджян, Т.А.Калантарян, И.Г.Кристостурьян

Расчет катящихся волн на быстротоках с переменным уклоном дна

Существующая методика определения места образования развитых катящихся волн на быстротоке (3) предполагает постоянство продольного уклона последнего. Однако во многих практических случаях этот уклон переменный. Для устранения этого недостатка в экспоненте известной закономерности изменения амплитуды катящихся волн с расстоянием (1) ставится заданный переменный по длине уклон, начиная со створа зарождения волн. В результате получена формула для определения нарастания амплитуды по длине быстротока в форме (3), в экспоненте которой содержится разность нивелирных отметок дна быстротока в створе зарождения волн и в заданном створе на расстоянии l . В частности, для определения отметки створа, где амплитуда катящихся волн достигает своего предельного значения, левая часть (3) приравнивается к величине максимального значения амплитуды, определяемого по выражению (4). Окончательно для определения отметки дна быстротока в створе образования развитых катящихся волн с предельным значением амплитуды получена формула (6). Очевидно, что, имея эту отметку, легко установить местоположение створа в продольном направлении быстротока.

ԳՐԱԿՐԱԿՆԵՐՆԵՐ – ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R.F.Dressler, Communication on Pure and applied mathematics, v.2, №2-3 (1949).
- ² С.М.Слисский, Гидравлические расчеты высоконапорных гидравлических сооружений, М., Энергоатомиздат, 1986.
- ³ Рекомендации по гидравлическому расчету водопропускных трактов безнапорных вадобросов на аэрацию и волнообразование, Пбб-74, ВНИИГ, Л., Энергия 1978.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК542.61+535.2+546.92+668.813

Н. О. Геокчян, А. А. Егназарян, Дж. А. Микаелян,
А. Г. Хачатрян

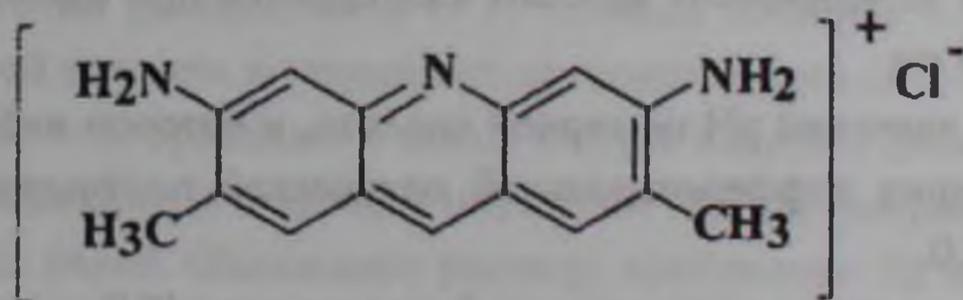
Изучение взаимодействия йодидного комплекса платины (IV)
с основным красителем акридиновым желтым

(Представлено академиком НАН Армении Р.С.Вартаняном 10/Х 1998)

Реакции образования комплексных ионных ассоциатов с использованием основных красителей для определения микроколичеств платины (IV) экстракционно-абсорбциометрическим методом применяются редко. Для определения платины экстракционно-абсорбциометрическим методом применялись в основном азот- и серусодержащие органические соединения. Экстракционно-абсорбциометрические методы определения платины указанными реагентами имеют ряд недостатков, из которых следует отметить недостаточно высокую чувствительность и избирательность, а также небольшой диапазон определяемых содержаний платины (IV). Невысокая чувствительность наблюдается также и при использовании антипирина и его производных (1-2).

Для методов с применением трифенилметановых и родаминовых красителей характерна достаточно высокая чувствительность, однако они не всегда обеспечивают необходимую воспроизводимость получаемых результатов (3-7).

Настоящее исследование посвящено изучению возможностей применения основного красителя акридинового ряда акридинового желтого для экстракционно-абсорбциометрического определения платины. Строение молекулы акридинового желтого может быть представлено следующей формулой.



Акридиновые красители являются хорошими реагентами для экстракционно-абсорбциометрического определения микроколичеств различных элемен-

тов. Однако для определения благородных металлов они до настоящего времени применялись редко. Акридиновый желтый был использован ранее нами для определения микроколичеств золота и палладия в солянокислой и серно-кисло-бромидной средах (8,9).

Данные о применении акридиновых красителей для экстракционно-абсорбциометрического определения платины в литературе отсутствуют, и настоящая работа призвана в какой-то степени восполнить этот пробел.

Известно, что йодидный комплекс $[PtI_6]^{2-}$ наиболее устойчив из всех гексагалогеноплатинатов (IV) (10). Известно также, что комплексная кислота $H_2[PtI_6]$ образует соли с органическими основными красителями.

Естественно было предположить, что гексаиодоплатинат(IV) будет взаимодействовать и с акридиновыми красителями, в частности, с акридиновым желтым. Нами это было экспериментально подтверждено.

Стандартный раствор платины (IV) готовили растворением точной навески металлической платины (99,99%) в смеси соляной и азотной кислот с последующей "денитрацией" полученного раствора при помощи разбавленной соляной кислоты. Разбавлением исходного раствора получали растворы платины (IV) необходимой концентрации. Реакционноспособный комплексный йодоплатинат (IV) образуется при добавлении раствора йодида калия.

Раствор красителя – акридинового желтого готовили растворением навески препарата квалификации "чда" в дистиллированной воде.

Равновесные значения pH водной фазы контролировали при помощи рН-метра рН-121 со стеклянным электродом, оптическую плотность водных растворов и органических экстрактов измеряли на спектрофотометре СФ-16.

С целью выбора подходящего экстрагента были испробованы различные органические растворители: бензол и его гомологи, хлорзамещенные углеводороды, алкилацетаты, а также их бинарные смеси. Наиболее эффективным экстрагентом, обеспечивающим максимальные значения оптической плотности экстрактов ионного ассоциата при минимальной плотности "холостых" экстрактов, оказался изобутилацетат. Соотношение объемов водной и органических фаз составляет 2:1.

Максимум светопоглощения изобутилацетатных экстрактов образующегося ионного ассоциата, "холостых" экстрактов простой соли красителя и водных растворов акридинового желтого наблюдается при одной и той же длине волны $\lambda = 460$ нм.

Интервал значений pH по серной кислоте, в котором наблюдаются максимальные значения дифференциальной оптической плотности экстрактов, составляет pH 2,0.

Практически полное извлечение йодоплатината(IV) акридинового желтого имеет место при концентрации йодида калия (1,0-2,0) 10^{-2} моль/л, а опти-

мальная концентрация красителя создается добавлением 1,4-2,0 мл 0,05%-ного раствора акридинового желтого.

Для практически полной экстракции образующегося ионного ассоциата достаточно однократного экстрагирования в течение одной минуты, степень извлечения $R = 96,5\%$.

Комплексный ионный ассоциат устойчив в течение 2 ч.

Оптическая плотность изобутилацетатных экстрактов зависит от порядка сливания растворов. Оптимальный порядок сливания следующий: раствор серной кислоты, раствор йодида калия, раствор йодоплатината (IV), раствор акридинового желтого.

Оптическую плотность экстрактов ионного ассоциата йодоплатината (IV) акридинового желтого и "холостых" экстрактов измеряли сразу после экстракции и отделения от водной фазы.

В найденных оптимальных для образования ионного ассоциата и его экстракции условиях при эффективной длине волны градуировочный график зависимости $A=f(C_{pl})$ прямолинеен до содержаний платины 36,0 мкг/мл.

Нижний предел обнаружения $C_{min}(0,95)$, рассчитанный из данных градуировочного графика по $3s$ -критерию, равен 0,016 мкг/мл. Из данных градуировочного графика было рассчитано также значение кажущегося молярного коэффициента светопоглощения, $\epsilon(460) = 2,1 \cdot 10^4$.

Мольное соотношение компонентов в образующемся ионном ассоциате установлено методом прямой линии Асмуса. Кривые $1/V_R^n = f(1/m_A)$ прямолинейны только при $n = 1$, что свидетельствует о том, что в указанных условиях йодоплатинат (IV) взаимодействует с катионом акридинового оранжевого в мольном соотношении 1:1.

Изучено влияние ряда посторонних ионов на экстракцию ионного ассоциата гексайодоплатината (IV) акридинового оранжевого. Данные приведены в табл.1.

На основании полученных результатов разработан экстракционно-абсорбциометрический метод определения платины, который апробирован на различных образцах платиносодержащих катализаторов.

Навеску тонкоизмельченного образца катализатора (0,5 г) переносят в коническую колбу вместимостью 100 мл, смачивают 2-3 мл дистиллированной воды, добавляют 10 мл разбавленной (1:1) соляной кислоты, 1-2 мл разбавленной (1:1) азотной кислоты и упаривают на водяной бане до 2-3 мл.

Охлаждают раствор, прибавляют новые порции кислот и снова упаривают до объема 2-3 мл. Указанную операцию повторяют 4-5 раз, упаривая в последний раз до влажных солей. Охлаждают раствор, прибавляют 20 мл разбавленной соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л, нагревают до кипения и фильтруют через бумажный фильтр (красная лента) в стакан вместимостью 250 мл. Промывают остаток на фильтре 100 мл горячей 0,01 моль/л соляной

кислоты и упаривают объединенный фильтрат на водяной бане до влажных солей.

Таблица 1

Допустимые количества ионов при экстракционно-абсорбциометрическом определении 12,44 мкг/мл платины акридиновым желтым (условия оптимальные, см. текст)

Сопутствующий ион	$K = C_{\text{ион}}/C_{\text{Pt}}$
Ni^{2+}	$1,3 \cdot 10^3$
Co^{2+}	$8,1 \cdot 10^3$
Cd^{2+}	$4,1 \cdot 10^2$
Cr^{3+}	$1,9 \cdot 10^4$
Al^{3+}	$2,6 \cdot 10^4$
Mg^{2+}	$3,2 \cdot 10^4$
NO_3^-	$7,8 \cdot 10^3$

Определению платины мешают золото (III), палладий (II)

Сухой остаток несколько раз обрабатывают разбавленной кислотой (1:20), в каждом случае упаривая до влажных солей. Растворяют остаток влажных солей, полученный после последней операции в 0,01 моль/л соляной кислоте, фильтруют в мерную колбу вместимостью 100 мл и доводят объем до метки этим же раствором соляной кислоты.

Аликвотную часть раствора (1,0 мл) переносят в делительную воронку, добавляют 9,0 мл серной кислоты с концентрацией 0,005 моль/л, 1,0 мл 0,01 моль/л раствора йодида калия, 1,4 мл 0,05%-ного раствора акридинового желтого и 6,0 мл изобутилацетата.

Таблица 2

Определение платины в катализаторе:

$m = 0,5 \text{ г}; n = 6; \alpha = 0,95; t_{\alpha} = 2,45$

Содержание платины в стандартном образце по паспорту, %	Найдено платины, %	Оптическая плотность	$\bar{A}_{\text{ср}}$	s	s_r	$\bar{A}_{\text{ср}} \pm \Delta x$
0,500	0,498	0,280	0,285	$4,47 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-2}$	$0,285 \pm 0,005$
		0,290				
		0,285				
		0,285				
		0,280				
		0,290				

Встряхивают в течение двух минут, отделяют органическую фазу и измеряют оптическую плотность экстрактов при длине волны 460 нм. Содержание платины определяют по градуировочному графику.

Результаты определения платины в катализаторе приведены в табл.2.

Ереванский государственный университет

Ն. Օ. ԳՅՈՎՉՅԱՆ, Ա. Ա. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ, Զ. Ա. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Հ. Գ. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ
ՊԼԱՏԻՆԻ(IV) ՅՈՂԻՏԱՅԻՆ ԱՑԻԴՈԿՈՄՊԼԵՔՍԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ
ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԻՄՆԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՆՅՈՒԹ՝
ԱԿՐԻԴԻՆԱՅԻՆ ԴԵՂԻՆԻ ՀԵՏ

Հետազոտվել է պլատինի (IV) յողիտային ացիդոկոմպլեքսի փոխազդեցությունը ակրիդինային շարքի օրգանական հիմնային ներկանյութ՝ ակրիդինային դեղինի հետ: Առաջացած միացությունը լուծազանվում է իզոբուտիլացետատով: Մաքսիմալ լուսակլանումը, ինչպես գոյացող միացության, այնպես էլ "կոլոր" էքստրակտների համար, դիտվում է 460 նմ ալիքի երկարության տակ:

Օպտիմալ թթվության պայմաններում (рН 2,0 ըստ ծծմբական թթվի) միանվագ մեկ րոպե տևողությամբ էքստրակցիայով պլատինը (IV) գործնականորեն լրիվ լուծազանվում է օրգանական լուծիչի ֆազը (R = 96,5%): Գոյացող իոնական ասոցիատը կայուն է երկու ժամվա ընթացքում: Կալիումի յողիտի օպտիմալ կոնցենտրացիան (1,0-2,0) 10⁻² մոլ/լ է, իսկ ներկանյութինը՝ ապազոտվում է (1,4-2,0 մլ) 0,05%-անոց լուծույթի ավելացմամբ:

Գունավոր միացության իզոբուտիլացետատային էքստրակտները ֆոտոմետրիայի հիմնական օրենքին (Բերի օրենք) ենթարկվում են մինչև ջրային ֆազում պլատինի(IV) 36,0 մկգ/մլ պարունակությունները: Լուսակլանման մոլային թվացող գործակիցը $\epsilon(460) = 2,1 \cdot 10^4$:

Ուսումնասիրվել է խանգարիչ և ուղեկցող մի շարք տարրերի ազդեցությունը ակրիդինային դեղինով պլատինի (IV) որոշման վրա:

Մշակվել է պլատինի (IV) էքստրակցիոն-արսորրցիոմետրական որոշման եղանակ, որը կիրառվել է պլատին պարունակող կատալիզատորների վրա:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А.Т.Пилипенко, П.Ф.Ольхович, Укр.хим.журн., т.34, №1, с.83 (1968). ² В.К.Акимов, И.А.Емельянова, А.И.Бусев, ЖАХ, т.26, №2, с.2416-2418 (1971). ³ Е.Н.Овсепян, Дж.А.Микаелян, Чан Ким Тьен, ЖАХ, т.38, №7, с.1277-1278 (1983). ⁴ Е.Н.Овсепян, Дж.А.Микаелян, Чан Ким Тьен, Арм.хим.журн., т.37, №2, с.86-91 (1984). ⁵ Е.Н.Овсепян, Дж.А.Микаелян, Чан Ким Тьен, Межвуз. сб. науч. тр. "Химия и химическая технология", Изд-во ЕГУ, №3, с.76-81 (1985). ⁶ Е.Н.Овсепян, Дж.А.Микаелян, Чан Ким Тьен, Межвуз. сб. науч. тр. "Химия и химическая технология", Изд-во ЕГУ, №4, с.146-149 (1987). ⁷ Е.Н.Овсепян, Дж.А.Микаелян, А.Г.Хачатрян, Уч.зап.ЕГУ, №3 (169), с.109-111 (1988). ⁸ В.М.Тараян, Дж.А.Микаелян, Арм.хим. журн., т.34, №7, с.545-548 (1981). ⁹ Дж.А.Микаелян, А.Г.Хачатрян, Уч.зап.ЕГУ, №2 (165), с.105-108 (1987). ¹⁰ А.Рос, М. Vaielga, J.Chem.Soc., p.3431-3433 (1960).