ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

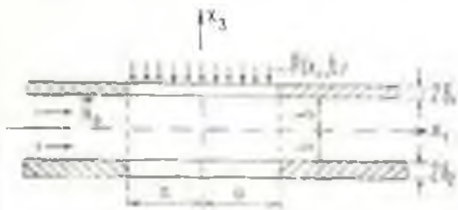
УДК 539.3

БЕСКОНТАКТНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ

БАГДАСАРЯН Г. Е.

Показано, что при помощи постоянного магнитного поля вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует возмущающая сила, можно бесконтактно сообщить ко второй пластинке, свободной от внешних механических нагрузок. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы колебалась только вторая сверхпроводящая пластина с регулируемой амплитудой.

1. Рассмотрим магнитоупругую систему, показанную на фиг. 1. Она состоит из двух параллельных диафрагм, между которыми действует постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$, параллельное координатной линии ox_1 (координатная система $x_1x_2x_3$ и основные геометрические параметры показаны на фиг. 1). Внутренние поверхности диафрагм $x_3=\pm b$ покрыты тонкими слоями сверхпроводящего сплава, толщины которых намного больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (обычно порядка 10^{-6} см). Части диафрагм $|x_1|\leq a$, $|x_2|<\infty$ являются упругими пластинками, изготовленными из различных изотропных материалов (остальные части являются абсолютно жесткими и неподвижными).



Фиг. 1

Пусть на внешней поверхности верхней пластинки действует нормально приложенная нестационарная нагрузка $p(x_1, t)$. Граничные условия на торцах $x_1=\pm a$ таковы, что пластинки колеблятся по форме цилиндрической поверхности с образующими, параллельными координатной линии ox_2. Рассмотрим задачу передачи вынужденных колебаний к нижней пластинке и определим условия резонанса. В дальнейшем, характеристики, относящиеся к верхней пластинке, будем обозначать индексом „1“, а к нижней — „2“.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого на внутренних поверхностях пластинок $x_3 = \pm b$ компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил $\vec{q}$ магнитного происхождения, действующих на поверхностях $x_3 = \pm b$ и определяемых формулой [1]

$$\vec{q} = \vec{n} \cdot \hat{T} \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{n}$—единичный вектор внешней нормали к деформированным поверхностям пластинок, $\hat{T}$—тензор напряжений Максвелла [1]

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{H}\cdot\vec{H}\right] \tag{1.2}$$

где $\vec{H}$—вектор напряженности магнитного поля в вакуумном слое $|x_3| < b$, который складывается из вектора напряженности заданного магнитного поля $\vec{H}_0$ и вектора напряженности индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, обусловленного деформациями пластинок ($\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$).

Пусть для рассматриваемых пластинок справедлива гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие уравнения колебания [2]

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4} + 2\rho_i\delta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \delta_i \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_{13}^{(i)+} + \sigma_{13}^{(i)-}\right) = \sigma_{33}^{(i)+} - \sigma_{33}^{(i)-} \tag{1.3}$$

Здесь w—прогиб, $D_i = 2E_i\delta_i^3/3(1-\nu_i^2)$—цилиндрическая жесткость, E_i—модуль упругости, ν_i—коэффициент Пуассона, $2\delta_i$—толщина, ρ_i—плотность i-той пластинки; $\sigma_{13}^{(i)}$ и $\sigma_{33}^{(i)}$—упругие напряжения. Знаками „+" и „—" отмечены значения напряжений на верхних ($x_3 = b + 2\delta_1$; $x_3 = -b$) и нижних ($x_3 = b$; $x_3 = -b - 2\delta_2$) поверхностях соответственно.

Входящие в уравнения (1.3) неизвестные величины $\sigma_{13}^{(i)\pm}$ и $\sigma_{33}^{(i)\pm}$ определяем, используя условия на поверхностях $x_3 = \pm b \pm 2\delta_i$ и $x_3 = \pm b$ пластинок. В силу того, что магнитное поле в областях $x_3 > b$ и $x_3 < -b$ отсутствует, указанные условия запишутся в виде

$$\sigma_{ij} n_j = T_{ij} n_j \tag{1.4}$$

Из (1.4), с учетом (1.2), после линеаризации имеем

$$\sigma_{13}^{(1)+} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)+} = -p, \quad \sigma_{13}^{(2)-} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)-} = 0$$

$$\sigma_{13}^{(1)-} = \frac{H_0}{4\pi} h_3^-, \quad \sigma_{33}^{(1)-} = -\frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{H_0}{4\pi} h_1^+, \quad \sigma_{13}^{(2)+} = \frac{H_0}{4\pi} h_3^+, \quad \sigma_{33}^{(2)-} = -\frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{H_0}{4\pi} h_1^- \tag{1.5}$$

где

$$h_k^{\pm} = h_k(x_1, \pm b, t), \quad (k = 1, 3)$$

2. Рассматривая систему уравнений (1.3), замечаем, что она не

замкнута. В нее, кроме прогибов w_i пластинок, входят неизвестные граничные значения $h_i^{\pm}$ индуцированного в слое $|x_3|<b$ магнитного поля $\vec{h}$. Их определяем, решая уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{h}=0, \quad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{2.1}$$

в области $|x_3|<b$, при следующих поверхностных условиях непроникновения магнитного поля в толщу пластинок:

$$(\vec{H}_0+\vec{h})\cdot\vec{n}=0 \quad \text{при} \quad x_3=\pm b \tag{2.2}$$

Введя потенциальную функцию φ посредством

$$\vec{h}=\operatorname{grad}\varphi \tag{2.3}$$

и учитывая, что части $|x_1|>a$ поверхностей $x_3=\pm b$ не деформируются, задача определения индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, согласно (2.1) и (2.2), после линеаризации сводится к решению следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в слое $|x_3|<b$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\begin{cases} H_0\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} & \text{при} \quad |x_1|<a, \quad x_3=b \\ H_0\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1} & \text{при} \quad |x_1|<a, \quad x_3=-b \\ 0 & \text{при} \quad |x_1|>a, \quad x_3=\pm b \end{cases}$$

Задача (2.4) решена при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x_1. Используя это решение, из (2.3) определено индуцированное в слое $|x_3|<b$ магнитное поле $\vec{h}$ и путем предельного перехода ($x_3\to\pm b$) получены следующие представления интересующих нас величин $h_i^{\pm}$:

$$h_3^{+}=H_0\frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad h_3^{-}=H_0\frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \quad h_1^{+}=\frac{H_0}{4b}\int_{-a}^{a}\left(\frac{1}{K}\frac{\partial w_1}{\partial\xi}-K\frac{\partial w_2}{\partial\xi}\right)d\xi$$

$$h_1^{-}=\frac{H_0}{4b}\int_{-a}^{a}\left(K\frac{\partial w_1}{\partial\xi}-\frac{1}{K}\frac{\partial w_2}{\partial\xi}\right)d\xi \tag{2.5}$$

где

$$K(x_1,\xi)=\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x_1)}{4b}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и учитывая (2.5), получим следующую систему связанных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений колебания пластинок:

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_1^2} +$$

$$+ \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{\partial w_{3-k}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) d\xi = \frac{1-(-1)^k}{2}\, p - (-1)^k \frac{H_0^2}{8\pi} \quad (k=1,\, 2) \tag{2.6}$$

К системе уравнений (2.6) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1 = \pm a$ пластинок.

Из (2.6) видно, что благодаря магнитному полю, вынужденные колебания верхней пластинки (под действием возмущающей силы p) передаются к нижней пластинке, которая свободна от внешних механических нагрузок.

Так как уравнения (2.6) и соответствующие граничные условия являются линейными, то решения поставленных задач можно искать в виде суммы

$$w_k(x_1, t) = w_k^{(1)}(x_1) + w_k^{(2)}(x_1, t)$$

где $w_k^{(1)}$ есть решения уравнений

$$D_k \frac{d^4 w_k^{(1)}}{d x_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{d w_{3-k}^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{d w_k^{(1)}}{d\xi} \right) d\xi - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{d^2 w_k^{(1)}}{d x_1^2} = (-1)^{k+1} \frac{H_0^2}{8\pi}$$

$$(k=1,\ 2) \tag{2.7}$$

удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и w_k, а $w_k^{(2)}$ являются решениями уравнений

$$D_k \frac{\partial^4 w_k^{(2)}}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial x_1^2} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{\partial w_{3-k}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1-(-1)^k}{2}\, p \tag{2.8}$$

при тех же граничных условиях.

Функции $w_k^{(1)}$ представляют решения задач изгиба пластинок под действием магнитного поля при отсутствии механической нагрузки $p(x_1, t)$. Эти решения представляют интерес при определении прочностных характеристик рассматриваемых пластинок.

Решения $w_k^{(2)}$ характеризуют процесс бесконтактной передачи вынужденных колебаний через зазор между пластинками при помощи постоянного магнитного поля. В дальнейшем будем ограничиваться решением лишь последней задачи, основанной на уравнении (2.8).

3. Предполагая, что $p(x_1, t) = p_0(x_1) \sin \omega t$, решение системы (2.8) представим в виде

$$w_k^{(2)}(x_1, t) = u_k(x_1) \sin \omega t$$

где $u_k(x_1)$, согласно (2.8), являются решениями следующей системы:

$$D_k \frac{d^4u_k}{dx_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b}\int\limits_{-a}^{a}\left(K\frac{du_{3-k}}{d\xi} - \frac{1}{K}\frac{du_k}{d\xi}\right)d\xi -$$

$$-\frac{H_0^2\delta_k}{4\pi}\frac{d^2u_k}{dx_1^2} - 2\rho_k\delta_k\omega^2u_k = \frac{1-(-1)^k}{2}p_0(x_1) \tag{3.1}$$

Пусть края пластинок $x_1=\pm a$ шарнирно оперты. Тогда решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, будем искать в виде

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{(n)}\sin\lambda_n(x_1+a), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{2a} \tag{3.2}$$

где $u_k^{(n)}$—неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (3.2) в (3.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующим бесконечным системам неоднородных алгебраических уравнений относительно $u_1^{(n)}$ и $u_2^{(n)}$:

$$(\omega_{1m}^2-\omega^2)u_1^{(m)} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{mn}^{(1)}u_2^{(n)} - b_{mn}^{(1)}u_1^{(n)}\right] = c_m$$

$$(\omega_{2m}^2-\omega^2)u_2^{(m)} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{mn}^{(2)}u_1^{(n)} - b_{mn}^{(2)}u_2^{(n)}\right] = 0 \tag{3.3}$$

где

$$\omega_{km}^2 = \Omega_{km}^2 + \frac{H_0^2}{8\pi\rho_k}\lambda_m^2, \quad \Omega_{km}^2 = \frac{D_k\lambda_m^4}{2\rho_k\delta_k}, \quad a_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k\delta_k}a_{mn}, \quad b_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k\delta_k}b_{mn} \tag{3.4}$$

$$a_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab}\int\limits_{-a}^{a}\int \cos\lambda_n(\xi+a)\sin\lambda_m(x_1+a)\,\mathrm{th}\frac{\pi(x_1-\xi)}{4b}\,dx_1d\xi$$

$$b_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab}\int\limits_{-a}^{a}\int \cos\lambda_n(\xi+a)\sin\lambda_m(x_1+a)\,\mathrm{cth}\frac{\pi(x_1-\xi)}{4b}\,dx_1d\xi$$

$$c_m = \frac{1}{2a\rho_1\delta_1}\int\limits_{-a}^{a}p_0(x_1)\sin\lambda_m(x_1+a)\,dx_1; \quad (k=1,2;\ n,m=1,2,3,\ldots)$$

В (3.4) ω_{km}—частоты магнитоупругих колебаний отдельной пластинки, Ω_{km}—собственные частоты пластин в отсутствии магнитного поля.

Используя (3.4) и имея ввиду, что $|a_{mn}|\leq A$, $|b_{mn}|\leq B$, где A и B некоторые постоянные, можно показать квазивполне регулярность системы (3.3) при любом значении H_0.

Из (3.3) в первом приближении для амплитуд $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$, в случае пластин с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами ($E_1=E_2=E$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\delta_1=\delta_2=h$, $\rho_1=\rho_2=\rho$), при $p_0(x_1)=p_0=\mathrm{const}$, найдем

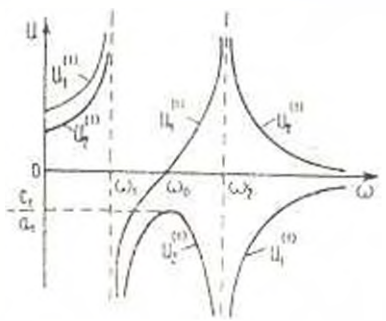
$$u_1^{(1)}=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)c_1}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}, \quad u_2^{(1)}=\frac{a_1c_1}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)} \tag{3.5}$$

где

$$\omega_i^2=\omega_0^2+(-1)^i\frac{H_0^2}{32\pi\rho h}a_{11}, \quad \omega_0^2=\frac{D\lambda_1^4}{2\rho h}+\frac{H_0^2\lambda_1^2}{8\pi\rho}+\frac{H_0^2 b_{11}}{32\pi\rho h}$$

$$a_1=\frac{H_0^2}{32\pi\rho h}a_{11}, \quad c_1=\frac{2p_0}{\pi\rho h}, \quad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \omega_0^2=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2} \tag{3.6}$$

ω_1 и ω_2—первая и вторая частоты собственных колебаний рассматриваемой магнитоупругой системы.



Фиг. 2

Зависимость $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ от частоты возмущающей силы ω показана на фиг. 2. Из этой фигуры видно, что с возрастанием ω обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности, когда ω приближается к первой собственной частоте ω_1 (наступление первого резонанса). В этой области ($0\leqslant\omega<\omega_1$) обе амплитуды положительны, то есть обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда $\omega_1<\omega\leqslant\omega_0$, амплитуды $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ имеют отрицательные значения, то есть обе пластинки колеблются со сдвигом фазы 180° относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале $\omega_0\leqslant\omega<\omega_2$ амплитуда $u_1^{(1)}$ вновь становится положительной (переходя через нуль при $\omega=\omega_0$), тогда как $u_2^{(1)}$ остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе на 180°, причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда ω приближается ко второй собственной частоте ω_2, обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда ω очень велико, колебания обеих пластин почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет $u_1^{(1)}=0$ при $\omega=\omega_0$. Это означает, что возмущающая сила, действуя на верхнюю пластинку, вызывает колебания только нижней пластинки. Амплитуда этих колебаний, как видно из (3.4)—(3.6), равна

$$u_2^{(1)} = \frac{32 b p_0}{\pi H_0^2}\left(\int_0^1\int_0^1 \cos\pi u \sin\pi v \,\mathrm{th}\, \frac{\pi a(u-v)}{2b}\, du\, dv\right)^{-1} \tag{3.7}$$

Таким образом, при помощи магнитного поля колебания (в том числе и резонансные) одной пластинки (на которой действует вынуждающая сила) бесконтактно передаются ко второй пластинке. Причем соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы колебалась только вторая (свободная от механических нагрузок) пластинка с регулируемой амплитудой. Как видно из (3.7), эта амплитуда весьма чувствительна к изменению величины $H_0 \neq 0$ и, следовательно, при помощи достаточно слабого магнитного поля, можно сообщить колебания с достаточно большой амплитудой и наоборот.

A NON-CONTACT METHOD OF RESONANT VIBRATION EXCITEMENT IN A SUPERCONDUCTIVE PLATE

G. E. BAGDASARIAN

ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼՈՒՄ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ ԳՐԳՌԵԼՈՒ ՈՉ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ հաստատուն մագնիսական դաշտի օգնությամբ գերհաղորդիչ սալի ռեզոնանսային տատանումները կարելի է առանց կոնտակտի հաղորդել մի այլ՝ երկրորդ գերհաղորդիչ սալին։ Ընդ որում, խնդրի պարամետրերի համապատասխան ընտրությամբ կարելի է հասնել այն բանին, որ տատանվի (ղեկավարվող ամպլիտուդայով) միայն արտաքին մեխանիկական ազդեցություններից ազատ երկրորդ սալը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.-М.: Гостехиздат, 1957, 532 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977, 272 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 8.VI.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ТОКОНЕСУЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

КАЗАРЯН К. Б.

Работа посвящена магнитоупругой устойчивости двух бесконечных коаксиальных сверхпроводящих цилиндрических оболочек, служащих для транспортировки электрического тока. Рассматриваемая система оболочек является моделью кабеля сверхпроводящего электрического тока. Начальное электрическое и магнитные поля определяются на основе уравнений Лондонов. Получена связанная система уравнений устойчивости для близко расположенных друг к другу оболочек. Определена критическая сила тока, превышение которой приводит к потере упругой устойчивости. Первые результаты, относящиеся к этой задаче, получены в работе [1], где показана возможность потери упругой устойчивости коаксиальной системы, в случае, когда внешняя оболочка системы является абсолютно жесткой.

1. Рассмотрим систему двух коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, изготовленных из сверхпроводящего материала. Оболочки замкнуты на бесконечности: ток течет вдоль образующей внутренней оболочки и возвращается вдоль образующей внешней оболочки. Оболочки разделены диэлектрическим слоем, отождествляемым с вакуумом. Оболочки отнесем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, x) с осью, совпадающей с осью коаксиальной системы. Величины, характеризующие область внутренней оболочки, будут отмечаться индексом (1); область внешней оболочки—индексом (2).

Распределение начального тока и магнитного поля в коаксиальной системе определим на основе уравнений Лондонов [2]:

$$\operatorname{rot} H_0^{(s)} = \frac{4\pi}{c} j_0^{(s)}; \quad \operatorname{rot} j_0^{(s)} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} H_0^{(s)}; \quad \operatorname{div} H_0^{(s)} = 0 \qquad (1.1)$$

где λ есть параметр лондоновской глубины проникновения (обычный порядок $\lambda \sim 10^{-8}$ м), c—электродинамическая постоянная, $H_0^{(s)}$—вектор магнитного поля, $j_0^{(s)}$—вектор плотности сверхтока.

Уравнения (1.1) рассматриваются совместно с уравнениями Максвелла в областях вне материала оболочки

$$\operatorname{rot} H_0^{(s)} = 0; \quad \operatorname{div} H_0^{(s)} = 0 \qquad (1.2)$$

при обычных граничных условиях непрерывности компонент вектора магнитного поля на поверхностях $\rho = \rho_1$; ρ_2; ρ_3; ρ_4. Относительно плотности электрического тока мы имеем условие полного электрического тока

$$2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2} j^{(1)}_{0x}\rho d\rho = J_0, \qquad 2\pi\int_{\rho_3}^{\rho_4} j^{(2)}_{0x}\rho d\rho = -J_0 \tag{1.3}$$

На основе аксиальной симметрии рассматриваемой задачи имеем

$$H^{(i)}_{0x}=H^{(i)}_{0\rho}=H_{0x}=H_{0\rho}=0;\quad j^{(i)}_{0\varphi}=j^{(i)}_{0\rho}=0;\quad H^{(i)}_{0\varphi}=H^{(i)}_{0\varphi}(\rho);\quad j^{(i)}_{0x}=j^{(i)}_{0x}(\rho) \tag{1.4}$$

Решение задачи (1.1)—(1.3) имеет вид ($\gamma=\rho/\lambda$)

$$\begin{aligned} H^{(1)}_{0\varphi} &= \frac{2J_0}{c\rho}\,\frac{I_1(\gamma)K_1(\gamma_1)-K_1(\gamma)I_1(\gamma_1)}{I_1(\gamma_2)K_1(\gamma_1)-K_1(\gamma_2)I_1(\gamma_1)} \\ H^{(2)}_{0\varphi} &= \frac{2J_0}{c\rho}\,\frac{I_1(\gamma)K_1(\gamma_4)-I_1(\gamma_4)K_1(\gamma)}{I_1(\gamma_3)K_1(\gamma_4)-I_1(\gamma_4)K_1(\gamma_3)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$H_0=\frac{2J_0}{c\rho},\quad \rho_2<\rho<\rho_3;\quad H_0=0:\quad \rho>\rho_4;\quad \rho<\rho_1$$

В (1.5) $I_1(\gamma)$; $K_1(\gamma)$ — модифицированные функции Бесселя. Исходя из асимптотического анализа функций Бесселя при $\gamma\gg1$ ($\lambda\ll1$), из (1.5) следует, что магнитное поле и электрический ток локализованы только в поверхностных слоях толщины λ у внешней поверхности первой оболочки $\rho=\rho_2$ и внутренней поверхности $\rho=\rho_3$ второй оболочки. По этой причине мы в дальнейшем примем, что ток в оболочках является поверхностным; магнитное поле распределено в зазоре между оболочками $\rho_2<\rho<\rho_3$ и не проникает в глубь сверхпроводящего материала (эффект Мейснера [2]).

Взаимодействие магнитного поля и поверхностного тока вызывает действие магнитного давления на поверхностях оболочек $\rho=\rho_2$, $\rho=\rho_3$.

Вследствие магнитного давления в оболочках устанавливается начальное напряженное состояние, определяемое мембранными кольцевыми усилиями

$$T^{(1)}_{0\varphi}=-\frac{J_0^2}{2\pi c^2\rho_2};\qquad T^{(2)}_{0\varphi}=\frac{J_0^2}{2\pi c^2\rho_3} \tag{1.6}$$

2. Пусть для рассматриваемых оболочек справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява. Ограничимся рассмотрением технической теории оболочек средней длины [3].

Уравнения статической устойчивости оболочек в нормальных перемещениях срединных поверхностей с учетом (1.6) имеют вид [3] ($s=1;\ 2$)

$$\begin{aligned} D_s\Delta_s^4 w^{(s)} &+ \frac{2E_s d_s}{R_s^2}\frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial x^4} - (-1)^s\frac{T^{(s)}_{0\varphi}}{R_s^2}\Delta_s^2\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial\varphi^2} + (-1)^s\Delta_s^2\left[\sigma^{(s)}_{\rho\rho}(\rho_{s+1})\right] - \\ &- h_s\Delta_s^2\left[\frac{\partial\sigma^{(s)}_{x\rho}(\rho_{s+1})}{\partial x}+\frac{1}{R_s}\frac{\partial\sigma^{(s)}_{\varphi\rho}(\rho_{s+1})}{\partial\varphi}\right]=0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В (2.1) D_s — жесткость, E_s — модуль упругости материалов оболочек, $2d_s$ — толщина, R_s — радиус срединных поверхностей оболочек. $\sigma^{(s)}_{\rho}$, $\sigma^{(s)}_{\rho x}$, $\sigma^{(s)}_{\rho\varphi}$ — есть компоненты тензоров $\hat{\sigma}^{(s)}$ возмущенного напряженного состояния коаксиальной системы, $\Delta_s = \partial^2/\partial x^2 + R_s^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$.

Для тонких оболочек $\sigma^{(s)}_{\rho}(\rho_{s+1})$; $\sigma^{(s)}_{\rho x}(\rho_{s+1})$; $\sigma^{(s)}_{\rho\varphi}(\rho_{s+1})$ определяются из следующих линеаризованных граничных условий, заданных на поверхностях $\rho=\rho_2$; $\rho=\rho_3$ [3]:

$$\sigma^{(s)}_{\rho}=T_{\rho\rho};\quad \sigma^{(s)}_{\rho x}=T_{\rho x};\quad \sigma^{(s)}_{\rho\varphi}=T_{\rho\varphi}\quad \text{при}\quad \rho=\rho_{s+1} \tag{2.2}$$

В (2.2) $T_{\rho\rho}$, $T_{\rho x}$, $T_{\rho\varphi}$ есть компоненты электромагнитного тензора Максвелла $\hat{T}$, линеаризованное выражение которого определяется следующим образом:

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}(H_{i0}h_k+H_{k0}h_i-\delta_{ik}H_{i0}h_i);\quad (i;\ k=\rho,\ \varphi,\ x)$$

$$T_{\rho\rho}=-\frac{H_0}{4\pi}h_\varphi;\quad T_{\rho\varphi}=\frac{H_0}{4\pi}h_\rho;\quad T_{\rho x}=0 \tag{2.3}$$

В (2.3) h_ρ; h_φ есть компоненты вектора малых возмущений магнитного поля в области зазора, обусловленного деформацией оболочек.

Вектор h удовлетворяет уравнениям магнитостатики Максвелла в области $\rho\in(\rho_2;\ \rho_3)$

$$\mathrm{rot}\ h=0;\quad \mathrm{div}\ h=0 \tag{2.4}$$

Из условия, что магнитное поле касательно к поверхности сверхпроводника [2]

$$(H_0+h)n_s=0,\quad \rho=\rho_2;\ \rho_3 \tag{2.5}$$

где n_s есть внешняя нормаль к деформированным поверхностям оболочек $n_s=\pm\left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial x};\ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\varphi};\ -1\right)$ [3], получим следующие линеаризованные граничные условия относительно нормальной компоненты вектора возмущенного магнитного поля

$$h_\rho=\frac{2J_0}{c\rho_2^2}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi};\quad \rho=\rho_2,\quad h_\rho=\frac{2J_0}{c\rho_3^2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\varphi};\quad \rho=\rho_3 \tag{2.6}$$

Введя потенциальную скалярную функцию Φ, $h=\mathrm{grad}\,\Phi$, из (2.4) имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Phi(\rho,\ \varphi,\ x)=0 \tag{2.7}$$

Представляя функцию $\Phi(\rho,\ \varphi,\ x)$ и нормальные перемещения $w^{(s)}$ в виде $\Phi=\Phi_0(\rho)\exp i(kx+m\varphi)$; $w^{(s)}=w_0^{(s)}\exp i(kx+m\varphi)$ (m — целое число) и решая уравнение (2.7), после удовлетворения граничным условиям (2.6) получим

$$\Phi_0(z)=\frac{2J_0im}{c\Delta k}\left\{\frac{w_0^{(1)}}{\rho_2^2}\left[K_m'(z_1)I_m(z)-I_m'(z_1)K_m(z)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{w_0^{(2)}}{\rho_3^2}\left[I_m'(z_2)K_m(z)-K_m'(z_2)I_m(z)\right]\right\} \qquad (2.8)$$

В (2.8) $\Delta=K_m'(z_1)I_m'(z_2)-I_m'(z_1)K_m'(z_2)$; $z=k\rho$; $(\ )'=\frac{d}{dz}$; K_m, I_m — модифицированные функции Бесселя.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, интересным с точки зрения приложений, когда ширина зазора между оболочками мала по сравнению с радиусом коаксиальной системы и толщины оболочек равны $(d_1=d_2=d)$. Используем следующие обозначения: R_0 — радиус срединной поверхности внутренней оболочки; a_0 — ширина зазора, тогда

$$\rho_2=R_0+d;\quad \rho_1=R_0+d+a_0$$

При $d+a_0\ll R_0$ справедливы следующие разложения:

$$K_m'(z_1)\simeq K_m'(z_2)+ka_0K_m''(z_2);\ I_m'(z_1)\simeq I_m'(z_2)+ka_0I_m''(z_2) \qquad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8) и используя известные соотношения функции Бесселя, мы получим следующее выражение для функции $\Phi_0(z)$ при $z=z_2;\ z_1$:

$$\Phi_0(z_2)-\Phi_0(z_1)\simeq-\frac{2J_0im}{cR_0^2a_0}\,\frac{w_0^{(2)}-w_0^{(1)}}{k^2+m^2/R_0^2}$$

Используя формальное операторное обозначение: $\partial/\partial\varphi=im$, $\partial/\partial x=ik$, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\frac{1}{R_0^2}\partial^2/\partial\varphi^2$, мы получим следующие значения компонент h_x, h_φ на поверхностях $\rho=\rho_2$; ρ_1:

$$h_x(\rho_2)=h_x(\rho_1)=\frac{2J_0}{cR_0^2a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]$$
$$h_\varphi(\rho_2)=h_\varphi(\rho_1)=\frac{2J_0}{cR_0^3a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right] \qquad (2.10)$$

Используя (2.10) и (2.6), имеем следующие значения для компонент тензора Максвелла (2.3):

$$T_{\rho\rho}(\rho_2)=T_{\rho\rho}(\rho_1)=-\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^4a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]$$
$$T_{\rho\varphi}(\rho_2)=\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^3}\,\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi};\quad T_{\rho\varphi}(\rho_1)=\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^3}\,\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\varphi} \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.1) с учетом (2.2) и (1.6), получим следующую систему уравнений устойчивости коаксиальной системы в приближении тонких оболочек $(d/R_0\ll1)$

$$D_1\Delta^4 w^{(1)}+\frac{2E_1 d}{R_0^2}\,\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4}+\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R_0^3}\Delta^2\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial\varphi^2}+\frac{J_0^2}{\pi c^2 R_0^4 a_0}\Delta\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]=0$$

$$D_2\Delta^4 w^{(2)}+\frac{2E_2 d}{R_0^2}\,\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4}-\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R_0^3}\Delta^2\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial\varphi^2}-\frac{J_0^2}{\pi c^2 R_0^4 a_0}\Delta\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]=0 \tag{2.12}$$

3. Система связанных уравнений устойчивости (2.12), полученная для оболочек бесконечной длины, может с достаточной точностью использована для оболочек конечной длины.

Приведем решение системы (2.12) для оболочек из одинаковых материалов и длины L шарнирно-опертых по торцам $x=L$, $x=0$.

Представляя решение для $w^{(i)}(x,\varphi)$ в виде

$$w^{(i)}=w_0^{(i)}\cos m\varphi\cdot\sin\frac{\pi n x}{L}$$

где m, n есть целые числа, получим следующее выражение для критической напряженности магнитного поля в зазоре оболочки $H_{0*}=2J_0/cR_0$, превышение которой приводит к магнитоупругой потере упругой устойчивости коаксиальной системы:

$$H_{0*}^2=\frac{32\pi E}{3(1-\nu^2)}\,\frac{d^3}{a_0R_0^2}\min_{(m,n)}\left\{\frac{(p_0^2+m^2)^4+\dfrac{3(1-\nu^2)p_0^4R^2}{d^2}}{m^2(p_0^2+m^2)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sqrt{1+\frac{a_0^2}{4R_0^2}(p_0^2+m^2)^2}+1\right]\right\}$$

где $p_0=\pi nR/L$, ν — коэффициент Пуассона.

В табл. 1 для оболочки с упругими постоянными $E=1{,}2\cdot10^{11}$ Па, $\nu=0{,}34$ для различных отношений R_0/d; R_0/L; R_0/a_0 приведены критические значения магнитного поля H_{0*}.

Таблица

R_0/L	R_0/d	R_0/a_0	H_{0*}(Тл)
0,1	500	500	2,54
0,1	500	50	0,83
0,1	400	50	1,16
0,1	200	50	2,31
0,2	500	50	0,87
0,2	400	50	1,21
9,2	300	50	1,85
0,3	500	50	0,91
0,3	200	200	6,46
0,05	400	50	1,14
0,05	200	50	3,21

В (2.12), устремляя $D_2\to\infty$, получим случай, рассмотренный в работе [1]. Сопоставление численных результатов [1] с результатами таблицы позволяет сделать вывод, что упругая коаксиальная система может быть более стабильной по сравнению с коаксиальной системой, внешняя оболочка которой является жесткой. Это обстоятельство физически объясняется тем, что внешняя упругая оболочка берет на себя часть электромагнитной возмущенной нагрузки.

Аналитическое исследование вопроса устойчивости для коаксиальных оболочек различных толщин, упругие свойства которых не совпадают, представит тему отдельной работы.

STABILITY OF A SYSTEM OF TWO COAXIAL SUPERCONDUCTING CURRENT—CARRYING CYLINDRICAL SHELLS

K. B. KAZARIAN

ԵՐԿՈՒ ՀԱՄԱՌԱՆՑՔԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Հետազոտված է երկու համառանցքի գերհաղորդիչ գլանային թաղանթների կայունության խնդիրը՝ էլեկտրական հոսանքի առկայությամբ։ Ստացված է կայունության հավասարումների կապակցված համակարգ, երբ թաղանթների միջև եղած հեռավորությունը բավականաչափ փոքր է համակարգի չափերից։ Որոշված է հոսանքի կրիտիկական ուժը, որի գերազանցումը բերում է առաձգական կայունության կորստին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, №3, с. 42—55.
2. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников.—М.: Наука, 1982. 238 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.IV.1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989

УДК 539.3:532.59

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ ИЗ КОМПОЗИТОВ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Нелинейные волны модуляции для пластин изучены в [1—4 и др.], а для трехслойных пластин из изотропных слоев—в [5].

В настоящей работе исследуются вопросы устойчивости распространения одномерных волн в слоистых пластинах из композитов. Изучается частный вид определяющих связей и на их основе рассматриваются физически или геометрически нелинейные задачи.

1. Многие композиты, состоящие из взаимно-ортогонально армированных волокон, материал которых, например, металл, а связующее типа полимеров с достаточной для практики точностью, можно считать линейно упругими при наличии небольших напряжений типа сжатия-растяжения в направлениях армирования. По отношению же к касательным напряжениям будут проявляться нелинейные свойства. Зависимость между напряжениями и деформациями в системе координат, связанной с направлениями армирования, можно записать в виде

$$\sigma_x = B_1 e_x + B_2 e_y, \quad \sigma_y = B_2 e_x + B_3 e_y, \quad \sigma_{xy} = G e_{xy} + G_1 e_{xy}^2 \tag{1.1}$$

Добавление нелинейностей в первых двух уравнениях (1.1) приводит только к техническим трудностям (скорее, к громоздким формулам). В [1—5] для изотропных материалов нелинейность бралась кубической, здесь берется квадратичная нелинейность. Дело в том, что если вопрос устойчивости (или неустойчивости) распространения изгибных волн модуляции в однослойной изотропной пластине для связи [1—5] зависит от знака коэффициента нелинейности, то при учете квадратичной нелинейности имеет место неустойчивость независимо от знака коэффициента. Насколько нам известно, этот факт не был отмечен до сих пор.

В координатной системе, оси которой составляют угол φ с направлениями осей армирования, связь напряжений с деформациями запишется в виде

$$\sigma_i = B_{ij} e_j + B_{ijk} e_j e_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Коэффициенты B_{ij} выражаются через B_i, G известным образом [6], а коэффициенты при нелинейных членах выражаются через G_1, в частности,

$$B_{111} = \frac{3}{4} G_1 \sin^2 2\varphi, \qquad B_{113} = -\frac{3}{2} G_1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \tag{1.3}$$

Последние формулы пересчета получаются, как и в линейном случае, преобразованием выражения внутренней энергии.

Будем составлять конструкцию из таких $2n$ монослоев (толщины каждого h) так, что каждых два соседних слоя относительно друг друга повернуты на некоторый угол φ_m, а относительно координатной плоскости (в середине пакета) слои расположим двояким образом:

а) симметрично (φ_m одинаковые для $z_m>0$ и $z<0$)

б) антисимметрично (если $\varphi_m>0$ при $z_m>0$, то $\varphi_m<0$ при $z_m<0$).

Если принять гипотезу недеформируемых нормалей, то необходимые нам одномерные упругие связи примут вид:

для случая а)

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{16}\omega+D_{111}\varkappa_1^2,\quad C_{ij}=2h\sum_{m=1}^{n}B_{ij}^{(m)}$$

$$S=C_{16}\varepsilon_1+C_{66}\omega+D_{116}\varkappa_1^2,\quad D_{ij}=\frac{2h^3}{3}\sum_{m=1}^{n}[m^3-(m-1)^3]B_{ij}^{(m)}$$

$$M_1=D_{11}\varkappa_1+2D_{111}\varepsilon_1\varkappa_1+2D_{116}\omega\varkappa_1,\quad D_{ijk}=\frac{2h^3}{3}\sum_{m=1}^{n}[m^3-(m-1)^3]B_{ijk}^{(m)} \tag{1.4}$$

Так как нами изучаются нелинейные изгибные волны, то в (1.4) будут сохранены только нелинейные члены от прогиба.

В случае б) определяющие соотношения примут вид

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+2K_{111}\varepsilon_1\varkappa_1,\qquad K_{ij}=h^2\sum_{m=1}^{n}[m^2-(m-1)^2]B_{ij}^{(m)}$$

$$S=C_{66}\omega+K_{16}\varkappa_1+D_{116}\varkappa_1^2 \tag{1.5}$$

$$M_1=D_{11}\varkappa_1+K_{16}\omega+d_{111}\varkappa_1^2,\quad d_{ijk}=\frac{h^4}{2}\sum_{m=1}^{n}[m^4-(m-1)^4]B_{ijk}^{(m)}$$

Для простоты исследований при изучении геометрически нелинейных волн (большие прогибы) в (1.4)—(1.5) будут учтены только линейные связи, а при геометрически линейных задачах соотношения (1.4)—(1.5) берутся полностью.

2. В случае больших прогибов одномерные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=\bar\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial S}{\partial x}=\bar\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\bar\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad \bar\rho=2n\rho h \tag{2.1}$$

а компоненты деформаций

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \omega=\frac{\partial v}{\partial x},\quad \varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

Согласно (1.4) (без нелинейных членов) в симметричном случае получим следующие уравнения в перемещениях:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}C_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\bar\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$C_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}C_{16}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\bar{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(C_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+C_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Решение (2.3) ищем в виде

$$u=u_0+u_2\exp(2i\tau)+\bar{u}_2\exp(-2i\tau),\quad v=v_0+v_2\exp(2i\tau)+\bar{v}_2\exp(-2i\tau)$$

$$w=w_1\exp(i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau),\quad \tau=kx-\omega t \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим связи между коэффициентами и следующее нелинейное дисперсионное соотношение:

$$\omega^2=\omega_0^2+Aa^2,\quad \omega_0^2=\frac{D_{11}}{\bar{\rho}}k^4,\quad a^2=4w_1\bar{w}_1$$

$$A=\frac{D_{11}k^2}{8\bar{\rho}\Delta}\left(16C_{11}D_{11}k^2+3C_{11}^2-4C_{11}C_{66}-9C_{16}^2\right) \tag{2.5}$$

$$\Delta=(C_{11}-4D_{11}k^2)(C_{66}-4D_{11}k^2)-C_{16}^2$$

При получении (2.5) в инерционных членах первых двух уравнений (2.3) согласно [7] полагалось $\partial^2/\partial t^2=C^2\partial^2/\partial x^2$, где $C=\partial\omega_0/\partial k$.

Для антисимметрично собранной пластинки уравнениями движения будут

$$C_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=\bar{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\bar{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-K_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(C_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+C_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.6}$$

Решение (2.6) будем искать как

$$u=u_0+u_2\exp(2i\tau)+\bar{u}_2\exp(-2i\tau),\quad v=v_1\exp(i\tau)+\bar{v}_1\exp(-i\tau)$$

$$w=w_1\exp(i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau) \tag{2.7}$$

Следует отметить, что здесь, в отличие от предыдущего случая, компонента перемещения v теперь имеет порядок прогиба w.

Поступая как и выше, получим дисперсионное уравнение (2.5), где теперь

$$\omega_0^2=\frac{\bar{D}_{11}}{\bar{\rho}}k^4,\quad \bar{D}_{11}=D_{11}-\frac{K_{16}^2}{C_{66}},\quad A=\frac{\bar{D}_{11}C_{11}}{16\bar{\rho}}\,\frac{12\bar{D}_{11}k^2-5C_{11}}{(C_{11}-\bar{D}_{11}k^2)(C_{11}-4\bar{D}_{11}k^2)} \tag{2.8}$$

При получении выражения линейной частоты за основу берется изгибная волна в низкочастотном приближении ($k^2h^2\ll 1$).

Как видно из (2.8), коэффициент A, характеризующий устойчивость волны модуляции ($\omega_0''(\partial\omega/\partial a^2)>0$, см., например, [7]), отрицателен, то есть имеется неустойчивость, в то время как для симметрично собранной пластинки по (2.5) A может быть как положительным, так и отрицательным и, следовательно, возможны устойчивость и неустойчивость.

3. В случае малых перемещений соотношения (1.4) и (1.5) возьмем полностью, а (2.1) и (2.2) — без нелинейных членов. В то же время, так как изучаются изгибные волны, инерционными членами в плоскости пластины будем пренебрегать. Тогда уравнения, записанные только через прогибы пластинки, будут иметь вид соответственно для симметричного случая

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.1}$$

и антисимметричного случая

$$\bar{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$A_1=\frac{2}{\Delta_1}\left(C_{11}D_{112}^2+C_{66}D_{111}^2-2C_{16}D_{111}D_{112}\right)$$
$$\Delta_1=C_{11}C_{66}-C_{16}^2,\quad A_2=\frac{K_{16}D_{111}}{C_{66}}-d_{111} \tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.2) видно, что волны для симметрично или асимметрично собранных пластин имеют совершенно различный характер.

Если искать решение (3.1) как

$$w=w_1\exp(i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau) \tag{3.4}$$

то нелинейное дисперсионное соотношение будет (2.5), где

$$A=\frac{3}{4}\frac{A_1}{\bar{\rho}}k^8 \tag{3.5}$$

Для уравнения (3.2) решение ищем в виде

$$w=w_1\exp(i\tau)+w_2\exp(2i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau)+\bar{w}_2\exp(-2i\tau) \tag{3.6}$$

и постоянными будут

$$\omega_0^2=\bar{D}_{11}\frac{k^4}{\bar{\rho}},\quad A=-\frac{2}{3}\frac{A_2^2k^6}{\bar{\rho}\bar{D}_{11}} \tag{3.7}$$

Приведенные значения для A по (3.5) и (3.7) показывают, что если в первом случае в зависимости от значений упругих постоянных и расположения слоев пластины нелинейные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, то во втором случае они всегда неустойчивы.

Вообще, интересен такой факт. Как показано в [1—3], для изотропной однослойной пластины из кубически-нелинейного материала волны модуляции неустойчивы для «мягких» материалов (типа металлов) и устойчивы для «жестких» материалов. В случае же квадратичной нелинейности вне зависимости от знака коэффициента нелинейности волны в однослойной изотропной пластинке всегда неустойчивы.

ABOUT STABILITY OF PROPAGATION OF NON-LINEARY WAVE IN SANDWICH-TYPE COMPOSITE PLATES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱԼԵՐՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Քննարկված են կոմպոզիտներից կազմված շերտավոր սալերում միաչափ ալիքների տարածման կայունության հարցերը: Սալի փաթեթը պատրաստված է փոխուղղահայաց մարմնավորված շերտերից, որոնք մեկը մյուսի նկատմամբ ինչ-որ անկյունով պտտված են և դասավորված են կոորդինատական հարթության նկատմամբ սիմետրիկ կամ հակասիմետրիկ: Դիտարկված են ֆիզիկական և երկրաչափական ոչ գծային խնդիրներ: Մոդուլային ալիքների տարածման կայունության և ոչ կայունության համար ստացված են պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения изгибных волн в нелинейно-упругих пластинках.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. *32*, №5, с. 23—37.
2. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках.—Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Ереван, т. *I*, 1980, с. 106—112.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохроматические волны в нелинейно упругих пластинах.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №4, с. 169—176.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, №2, с. 3—9.
5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. *37*, №2, с. 3—11.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки, М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 3.V.1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.319

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИМПУЛЬСАХ, ПРИЛОЖЕННЫХ НА ГРАНИЦАХ ПОЛУПЛОСКОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье дается решение пространственной задачи о распространяющейся полубесконечной трещине, на границах которой заданы нормальные импульсы. Соответствующая плоская задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и сверток, а для случая упругой анизотропной среды—в [2, 3].

В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [4], в замкнутом виде получено решение на плоскости, дополняющей плоскую трещину, и определены коэффициенты интенсивности напряжений.

§ 1. Определение функций Релея

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial x}\nabla+b^2\Delta u_1=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial y}\nabla+b^2\Delta u_2=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \nabla=\frac{\partial}{\partial x}u_1+\frac{\partial}{\partial y}u_2+\frac{\partial}{\partial z}u_3\\
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial z}\nabla+b^2\Delta u_3=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где a, b—скорости продольных и поперечных волн, при $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u_j=0$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}=0$.

На границе трещины имеет место ($y=0$, $|z|<\infty$)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{yy}=\sigma_-(t,\ x,\ z),\quad -\infty<x<l(t)\\
&u_2=u_+(t,\ x,\ z)=0,\quad x>l(t);\quad \sigma_{yz}=\sigma_{xy}=0,\quad |x|<\infty
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где $l(t)$—закон движения края трещины. Функции $\sigma=\sigma_+(t,\ x,\ z)$ при $x>l(t)$ и $u_2=u_-(t,\ x,\ z)$ при $x<l(t)$ неизвестны. Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координатам x, z от компонент смещения по осям x, y, z. Обозначая изображения функ-

ций $\sigma(t, x, z)$, $u_2(t, x, z)$ через $\sigma^{LF}(s, \alpha, \gamma)$, $u_2^{LF}(s, \alpha, \gamma)$, соответственно, и учитывая (1.1), (1.2), можно получить

$$u_2^{LF}(s, \alpha, \gamma)=S^{LF}(s, \alpha, \gamma)\sigma^{LF}(s, \alpha, \gamma),\ S^{LF}(s, \alpha, \gamma)=\omega^2\beta_1[ib^4R(\alpha, \gamma)]^{-1} \tag{1.3}$$

$$R(\alpha,\gamma)=4(\alpha^2+\gamma^2)\beta_1\beta_2+(\beta_2^2-\alpha^2-\gamma^2)^2,\ \beta_n=\sqrt{k_n^2-\alpha^2-\gamma^2},\ k_n=\omega/c_n,\ c_1=a,\ c_2=b$$

Здесь $s=-i\omega$; α, γ—параметры преобразований Лапласа по t и Фурье по x и z; R—функция Релея. Принято, что при $|\gamma|<k$ (γ считается действительным) в плоскости α проведены разрезы вдоль действительной оси от $-\infty$ до $-\sqrt{k^2-\gamma^2}$ и от $\sqrt{k^2-\gamma^2}$ до ∞ и выбрано $\beta>0$ на мнимой оси α, а при $|\gamma|>k$ проведены в плоскости переменной α разрезы, соединяющие точки мнимой оси $\pm i\sqrt{\gamma^2-k^2}$ с точкой $\pm i\infty$, соответственно, и выбрано $\operatorname{Im}\beta>0$ на действительной оси α.

После выбора ветвей функций β_n легко получить [1]

$$S^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=S_+^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)S_-^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right),\ 0<\dot{l}(t)<c_R$$

$$S_+^{LF}=\frac{\sqrt{\omega}\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}-\alpha}D_+}{\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2}-\gamma^2}-\alpha\right)},\quad S_-^{LF}=-\frac{\sqrt{\omega}a^2\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}+\alpha}D_-}{2b^2(a^2-b^2)\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2}-\gamma^2}+\alpha\right)} \tag{1.4}$$

$$D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}}\ln\frac{\overline{R\left(\zeta, \frac{\gamma}{\omega}\right)}}{R\left(\zeta, \frac{\gamma}{\omega}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta\pm\frac{\alpha}{\omega}}\right]$$

Здесь c_R есть скорость волны Релея для плоской задачи. Функции S_+^{LF} и S_-^{LF}—аналитические функции, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях плоскости $\frac{i\alpha}{s}$. Так как $D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости $i\alpha/s$ за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}},\ \pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}\right]$, с помощью интеграла Коши для неограниченной области имеем

$$D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=1+\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{F_1\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)du}{u\pm\frac{\alpha}{\omega}},\ D_\pm^{-1}\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=1+\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{F_2\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)du}{u\pm\frac{\alpha}{\omega}}$$

$$F_1\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\exp\left(\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\right) \tag{1.5}$$

$$F_2\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=-\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\exp\left(-\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\right)$$

$$\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\frac{4}{\pi}\,\frac{\left(u^2+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)\sqrt{u^2-\mu_1^2}\sqrt{\mu_2^2-u^2}}{\left\{\left(\mu_2^2-2u^2-\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)^4+16\left(u^2+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)^2(\mu_2^2-u^2)(u^2-\mu_1^2)\right\}^{1/2}}$$

$$\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\ln\frac{R\left(\overline{\zeta, \frac{\gamma}{\omega}}\right)}{R\left(\zeta, \frac{\gamma}{\omega}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-u},\quad \mu_n=\sqrt{\frac{1}{c_n^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}$$

Обозначая $P_{\pm}^{LF}=1/S_{\pm}^{LF}$, вычислим оригиналы $S_{+}(t, x, z)$, $P_{\pm}(t, x, z)$. В формуле обращения

$$S_{\pm}(t, x, z)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\exp(st+i\alpha x+i\gamma z)S_{\pm}^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)d\alpha \tag{1.6}$$

заменим α, γ через $\omega\alpha$, $\omega\gamma$, соответственно, и подставляя из (1.4) значение $S_{\pm}^{LF}$, получим

$$S_{\pm}(t, x, z)=\frac{1}{8\pi^3 i}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}ds\int_{-\infty}^{+\infty}d\gamma\int_{0}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_1-\alpha}\,D_{\pm}(\alpha, \gamma)\exp(s, p)}{\sqrt{\pi}\,\gamma\sqrt{t'}\left(\sqrt{\frac{1}{c_k^2}-\gamma^2}-\alpha\right)}\,d\alpha$$

$$p=t-t'-\alpha x-\gamma z \tag{1.7}$$

Деформируя контур интегрирования по α в формуле обращения в форме (1.7) в контур, проходящий вблизи действительной оси α в верхней полуплоскости для $x>0$ и в нижней—для $x<0$, получим

$$S_{+}(t, x, z)=\frac{H(x)}{4\pi^3 i}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}ds\int_{0}^{\infty}dt'\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sqrt{\alpha}\,D_{+}(\alpha+\mu_1, \gamma)\exp(sp-sx\mu_1)\,d\gamma}{\sqrt{\pi}\,\gamma\sqrt{t'}\left(\sqrt{c_k^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha\right)} \tag{1.8}$$

где $H(x)$—единичная функция, $D_{\pm}$ выражается формулой (1.5) с заменой α/ω через $\alpha+\mu_1$; γ/ω—через γ.

Заметим, что $S_{+}(t, x, z)$—четная функция от переменной z, поэтому $S_{+}(t, x, z)$ можно представить в виде

$$2S_{+}(t, x, z)=S_{+}(t, x, z)+S_{+}(t, x, -z)$$

Интегрирование по γ в правой части равенства (1.8) заменим на контур Γ_{1+} при $z>0$ и на контур Γ_{2+}—при $z<0$, соответственно проходящие через γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и $-\gamma_0$, $-\bar{\gamma}_0$, для которых выражение в экспоненте (1.8) обращается в нуль. На этих линиях $\operatorname{Im} f(\gamma, z)=0$, где $f(\gamma, z)=p-x\mu_1$. Можно убедиться, что в плоскости (γ_1, γ_2), где $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$, указанные линии состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{a^2(x^2+z^2)}{z^2}\gamma_1^2-\frac{a^2(x^2+z^2)}{x^2}\gamma_2^2=1$$

а также из отрезков действительной оси $|\gamma_1|<1/a$. Пусть $z>0$, тогда, так как $x>0$, предполагая, что $\sqrt{a^{-2}-\gamma^2}>0$ на мнимой оси плоскости γ, можно показать, что $\operatorname{Im} f(\gamma, z)<0$ в тех областях, где проходят дуги C_1, C_2. Окончательно можно убедиться, что

$$S_+(t, x, z) = \frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \int_0^t dt' \int_0^\infty d\alpha \left[\int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\sqrt{\alpha} D_+ \delta(f(\gamma, z)) d\gamma H\left(t'^2 - \frac{x^2+z^2}{a^2}\right)}{\gamma\sqrt{t'}(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \pi i \frac{\sqrt{\alpha} D_+\left(\alpha + \frac{1}{a}, 0\right) H\left(\frac{x^2+z^2}{a^2} - t'^2\right)}{\sqrt{t'}\left(\frac{1}{c_R} - \frac{1}{a} - \alpha\right)} \right] \tag{1.9}$$

Вычисляя в (1.9) интегралы от δ-функций по t', получим

$$S_+(t, x, z) = -\frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \int_0^\infty d\alpha \left[\int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\sqrt{\alpha} D_+(\alpha+\mu_1, \gamma) d\gamma H(a^2t^2-x^2-z^2)}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}} + \right.$$

$$\left. + \pi i \frac{\sqrt{\alpha} D_+\left(\alpha + \frac{1}{a}, 0\right) H(x^2+z^2-a^2t^2)}{(c_R^{-1}-a^{-1}-\alpha)\sqrt{t-xa^{-1}-\alpha x}} \right] \tag{1.10}$$

Выбирая однозначную ветвь функции $\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}$ в области (D), где проведен разрез между точками γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и $-\gamma_0$, $-\bar{\gamma}_0$ для $z>0$ и $z<0$, соответственно, и применяя теорему Коши к этой функции, получим

$$\int_{\Gamma_1} \frac{D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\sqrt{\alpha}\, d\gamma}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x}} +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \frac{D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\sqrt{\alpha}\, d\gamma}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x}} = \frac{2\pi i\sqrt{\alpha} D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right)}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\frac{x}{a}-\alpha x}} \tag{1.11}$$

В формуле (1.10) заменим z через $-z$, тогда, так как на контурах Γ_1, Γ_2, γ зависит от z, учитывая уравнение гиперболы, можно убедиться, что на Γ_1, Γ_2 функция $t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x$ принимает значение $t-\gamma_1 \frac{x^2+z^2}{z} - \alpha x$.

Из уравнения гиперболы имеем

$$t-\gamma_1\frac{x^2+z^2}{z} - \alpha x = t - \frac{x^2+z^2}{x}\sqrt{\gamma_1^2 + \frac{x^2}{a^2(x^2+z^2)}} - \alpha x$$

Кроме этого, из уравнения гиперболы видно, что координата γ_1 не зависит от первой степени z, а только γ_1 зависит от первой степени z, поэтому после замены z на $-z$, контур интегрирования по $\Gamma_{1\gamma}$ изменит направление на той же плоскости γ по контуру Γ_{2}, и окончательно имеем

$$S_{-}(t, x, -z)=$$

$$=-\frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\int_0^\infty d\alpha\left[-\int_{\Gamma_{1\gamma}}\frac{\sqrt{\alpha}\,D_{+}(\alpha+\mu_1,\gamma)d\gamma\, H(a^2t^2-x^2-z^2)}{\gamma\left(\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha\right)\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi i\sqrt{\alpha}\,D_{+}\left(\alpha+\frac{1}{a},0\right)H(x^2+z^2-a^2t^2)}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\frac{x}{a}-\alpha x}}\right] \tag{1.12}$$

Учитывая (1.11), четность функции $S_{-}(t, x, z)$ по z, складывая (1.10) и (1.12), имеем

$$2S_{+}(t, x, z)=-\frac{H(x)}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}H\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{a^2}\right)H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\times$$

$$\times\int_0^{t/x-\frac{1}{a}}\frac{\sqrt{\alpha}\,D_{+}\left(\alpha+\frac{1}{a},0\right)d\alpha}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\alpha x-\frac{x}{a}}} \tag{1.13}$$

Вычисление интеграла (1.13) дает для любого z

$$S_{+}(t, x, z)=\frac{H(x)\operatorname{sgn}z}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}H\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{a^2}\right)H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\left\{1-\right. \tag{1.14}$$

$$\left.-B\frac{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}}}H\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right)-\int_{t/x}^{1/b}\frac{F_1(u)\sqrt{u-\frac{1}{a}}}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)\sqrt{u-\frac{t}{x}}}du\,H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)\right\}$$

$$B=1-\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{F_1(u)du}{\frac{1}{c_R}-u}$$

где $F_1(u)$ дается формулой (1.5) при $\gamma=0$.

Аналогичным образом можно получить

$$P_{+}(t, x, z)=\frac{\operatorname{sgn}z}{2\sqrt{\pi}}\left[\delta\left(\sqrt{a^2t^2-x^2}+z\right)-\delta\left(\sqrt{a^2t^2-x^2}-z\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[A\delta(t-c_R^{-1}x)+\int_{1/b}^{1/a}F_3(h)\delta(t-hx)dh\right]\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\right\} \tag{1.15}$$

$$A=1+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)\,du}{u-\frac{1}{a}},\qquad F_3(h)=\int\limits_{h}^{1/b}\frac{d}{du}\left|\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-\frac{1}{a}}}\right|\frac{du}{\sqrt{u-h}}$$

и $F_2(u)$ дается формулой (1.5) при $\gamma=0$.

Аналогичные формулы получатся для S_- и P_- соответственно из (1.14) и (1.15), если заменить x на $-x$ и умножить на постоянную (1.4).

§ 2. *Решение граничной задачи*

Как видно из (1.13) и (1.14)

$$\begin{gathered} S_+(t,x,z)=P_+(t,x,z)=0 \quad \text{при} \quad x<c_Rt \\ S_-(t,x,z)=P_-(t,x,z)=0 \quad \text{при} \quad x>-c_Rt \end{gathered} \tag{2.1}$$

Представим функции σ^{LF}, u_z^{LF} в виде [1]

$$\sigma^{LF}=\sigma_+^{LF}+\sigma_-^{LF},\quad u_z^{LF}=u_+^{LF}+u_-^{LF},\quad u_+^{LF}=0 \tag{2.2}$$

где σ_+^{LF}, u_-^{LF} неизвестны. При этом

$$u_z(t,x,z)=u_+(t,x,z)H(x-l(t))+u_-(t,x,z)H(l(t)-x)$$

$$\sigma(t,x,z)=\sigma_+(t,x,z)H(x-l(t))+\sigma_-(t,x,z)H(l(t)-x)$$

Подставляя (2.2) в (1.3) и учитывая (2.1), можно, как и в [1], получить решение поставленной задачи в форме сверток по t, x, z

$$\begin{gathered} \sigma_+=-P_+***(S_+***\sigma_-)H(x-l+0) \\ u_-=S_-***(S_+***\sigma_-)H(l-x+0) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Для граничных значений на трещине в виде сосредоточенного импульса $\sigma_-^{e}(t,x,z)=-P\delta(x-\xi)\delta(z-\eta)H(t-\tau)$ можно получить нормальные напряжения вне трещины в виде (2.3). После вычисления интегралов получим

$$\sigma_+^0=\frac{P\operatorname{sgn}z}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}H\left(\sqrt{a^2(t_0-\tau)^2-(l(t_0)-\xi)^2}-|z-\eta|\right)\left\{AN^0\left(t,\tau,x,\xi,\frac{1}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3(h)N^0(t,\tau,x,\xi,h)\,dh\right\}H\left(T-\frac{1}{a}\right) \tag{2.4}$$

где

$$N^0(t,\tau,x,\xi,h)=\frac{1-lc_R^{-1}}{1-hl}\,\frac{N_1^0H(L_0-a^{-1})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}}-\frac{N_2^0H(L_0-a^{-1})}{x-\xi}-\frac{N_3^0H(a^{-1}-L_0)}{x-\xi}$$

$$N_1^0=\Phi(L_0,c_R^{-1})-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{c_R^{-1}-L_0}}\,H(c_R^{-1}-L_0),\qquad N_3^0=\left(\frac{x-l}{l-\xi}\right)^{1/2}\Phi(L_0,T)$$

$$\Phi(p_1,p_2)=1-\int\limits_{p_1}^{1/b}\frac{F_1(u)\sqrt{u-a^{-1}}}{(p_2-u)\sqrt{u-p_1}}\,du\,H(b^{-1}-p_1)$$

$$N_2^0 = N_3^0 + \pi F_1(T) \sqrt{\frac{T-a^{-1}}{T-h}}\, H(b^{-1}-L_0),$$

$$T = \frac{t-\tau}{x-\xi}, \quad L_0 = \frac{t_0-\tau}{l-\xi}, \quad l = l(t_0), \quad t-t_0 = h(x-l(t_0))$$

В формуле (2.4), исключая множитель $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} H(\sqrt{a^2(t_0-\tau)^2-(l(t_0)-\xi)^2} -$ $- |z-\eta|)$, получится решение плоской задачи, которое отличается от [1] последним слагаемым N_3^0, не влияющим на концентрацию напряжений.

§ 3. *Коэффициент интенсивности напряжений*

Учитывая, что при $x \to l(t)$, $t_0 \to t$ и $\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)} \to 1 - h\dot{l}(t)$, можно из (2.4) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \to l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l(t))}\,\sigma_+^0 = P \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sgn} z}{2}\, \frac{\partial}{\partial z} H(\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(l(t)-\xi)^2} -$$

$$- |z-\eta|)\, \frac{1-c_R^{-1}\dot{l}(t)}{\sqrt{1-\dot{l}(t)a^{-1}}}\, \frac{g(t)k(\dot{l})}{\sqrt{l-\xi}}\, H(L_0-a^{-1}) \tag{3.1}$$

$$g(t) = 1 - B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{c_R^{-1}-L_0}}\, H(c_R^{-1}-L_0) - \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_1(u)\sqrt{u-a^{-1}}}{c_R^{-1}-u}\, \frac{du}{\sqrt{u-L_0}}\, H(b^{-1}-L_0)$$

$$K(\dot{l}) = 1 - \dot{l}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_2(u)}{1-u\dot{l}}\, du, \quad L_0 = \frac{t-\tau}{l-\xi}, \quad l = l(t)$$

При произвольной нагрузке $\sigma_-(t, x, z)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины в виде полуплоскости получается из решения (2.4) суперпозицией ($P=1$)

$$\sigma_-(t, x, z) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial\sigma_-(\tau, \xi, \eta)}{\partial\tau}\, \sigma_+^0(t, \tau, x, \xi, z, \eta)\, d\tau\, d\xi\, d\eta \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), можно получить коэффициент интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x \to l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l(t))}\,\sigma_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{(1-c_R^{-1}\dot{l})k(\dot{l})}{\sqrt{1-a^{-1}\dot{l}}}\, (-I_1+I_2+I_3) \tag{3.3}$$

$$I_1 = \int_{l-at}^{l} d\xi \int_0^{t-\frac{l-\xi}{a}} [\sigma'_-(\tau, \xi, \eta_1) + \sigma'_-(\tau, \xi, \eta_2)]\, \frac{d\tau}{\sqrt{l-\xi}}$$

$$I_2 = \frac{B\sqrt{a-c_R}}{\sqrt{ac_R}} \int\limits_{tc_R}^{l_0} \left(\frac{u}{c_R} - t\right)^{-1/2} \int\limits_0^{\lambda} [\sigma'_-(\tau, l+\tau c_R - u, \eta_3) + \sigma'_-(\tau, l+\tau c_R - u, \eta_4)\, d\tau\, du$$

$$I_3 = \int\limits_{1/a}^{b^{-1}} F_4(u) \int\limits_0^t \left| \sigma'_-\left(t-\tau,\ l-\frac{\tau}{u},\ \eta_5\right) + \sigma'_-\left(t-\tau,\ l-\frac{\tau}{u},\ \eta_6\right)\right| \sqrt{\tau}\, d\tau\, du$$

$$\eta_{1,2} = z \pm \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-\xi)^2}, \quad \eta_{3,4} = z \pm \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (u-\tau c_R)^2}$$

$$\eta_{5,6} = z \pm \sqrt{a^2 - u^{-2}}, \quad F_4(u) = u^{-\frac{3}{2}} \int\limits_u^{b^{-1}} \frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1} - \omega} \sqrt{\frac{\omega - a^{-1}}{\omega - u}}\, d\omega$$

$$\lambda = \frac{l - ua^{-1}}{1 - c_R a^{-1}}, \quad l = l(t), \quad \sigma'_-(\tau, g(\tau), q(\tau)) = \frac{\partial}{\partial\tau} \sigma_-(\tau, \xi, \eta) \text{ при } \xi = g(\tau),\ \eta = q(\tau)$$

Пусть $c_R < l(t) < b$. Тогда вместо (1.4) можно записать [1]

$$S_+^{LF} = \sqrt{\frac{s}{\omega}} \sqrt{\sqrt{k_1^2 - \gamma^2} - \alpha}\, D_+, \quad S_-^{LF} = -\frac{a^2 \omega^{3/2} \sqrt{\sqrt{k_1^2 - \gamma^2} + \alpha}\, D_-}{2b^2(a^2 - b^2) s\sqrt{s} \left(\frac{\omega^2}{c_R^2} - \gamma^2 - \alpha^2\right)} \tag{3.4}$$

Вычисляя оригиналы S_+, P_+ и подставляя в формулу (2.3), можно получить, как и в (3.1), коэффициент интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x \to l-0} \sqrt{2\pi(x-l)}\, \sigma_+^0 = \frac{P \operatorname{sgn}(z-\eta)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial z} H\left(\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (l-\xi)^2} - |z-\eta|\right) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{1 - a^{-1} l}}{\sqrt{l - \xi}}\, g(t) K(l) H(L_0 - a^{-1}) \tag{3.5}$$

$$g(t) = 1 + \int\limits_{L_0}^{b^{-1}} \frac{F_1(u)}{\sqrt{u - a^{-1}}\sqrt{u - L_0}} H(b^{-1} - L_0), \quad K(l) = 1 - l \int\limits_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_2(u)}{1 - ul}\, du, \quad l = l(t)$$

Подставляя (3.5) в (3.2), для произвольной нагрузки получим коэффициент интенсивности напряжений в виде (3.3), где $I_2 = 0$, I_1, I_3 остаются прежними кроме функции $F_4(u)$, которая имеет следующий вид:

$$F_4(u) = -\frac{1}{u\sqrt{u}} \int\limits_u^{b^{-1}} \frac{F_1(\omega)\, d\omega}{\sqrt{\omega - a^{-1}}\sqrt{\omega - u}}$$

Таким образом, при заданных нагрузках на краях трещины в форме полуплоскости, так же, как и в плоской задаче, коэффициент интенсивности напряжений дается двукратными интегралами. Функция $F_4(u)$ для обоих случаев вычисляется независимо и совпадает с плоской задачей.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные замечания.

SOLUTION OF SPACE PROBLEM ON IMPULSES APPLIED AT BOUNDARIES OF SEMI-PLANE MOVING CRACK

A. N. MARTIROSIAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԻՍԱՀԱՐԹ ՃԱՔԻ ԵԶՐԵՐԻ ՎՐԱ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսահարթության տեսքով կամայական արագությամբ կիսատարածության մակերևույթով ճաքի տարածման խնդիրը։ Լուծումը տրվում է փաթույթի տեսքով։ Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները։ Արդյունքները համեմատված են հարթ խնդրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, №4, с. 54—73.
2. *Мартиросян А. Н.* Движение трещины в анизотропной среде.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т. *40*, №6, с. 32—42.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, №1, с. 100—110.
4. *Мартиросян А. Н.* О нестационарном движении упругого пространства со щелью.—ПММ, 1976, т. *40*, №3, с. 544—553.

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию 4.VII.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

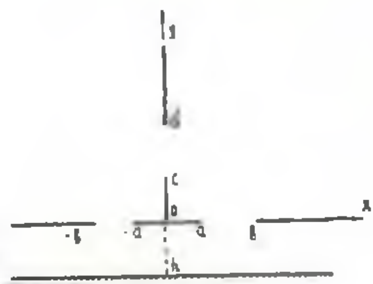
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Особое значение в механике разрушения имеют задачи о конечной и полубесконечной трещинах в полуплоскости, поскольку с их помощью можно оценить влияние границы тела на распределение напряжений, когда трещина расположена вблизи границы.

В данной работе получено приближенное решение плоской задачи теории упругости для полуплоскости с конечными и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко защемлена, а на поверхностях трещин заданы самоуравновешанные нагрузки:

$$\sigma_{yy}(x, 0)=p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, 0)=q_0(x)$$
$$|x|\in(0, a)U(b, +\infty)$$
$$\sigma_{xx}(0, y)=\sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y)=0$$
$$y\in(0, c)U(d, +\infty)$$
$$u(x, -h)=v(x, -h)=0, \quad x\in(-\infty, +\infty)$$



Фиг. 1

1. Вывод интегрального уравнения. Рассматриваются следующие задачи теории упругости:

а) первая основная задача теории упругости для квадранта $(0<x, y<+\infty)$

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}(0, y)=\sigma_1(y), \quad \tau_{xy}(0, y)=0, \quad (0<y<\infty)\\ &\sigma_{yy}(x, 0)=p_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0)=q_1(x) \qquad (0<x<\infty)\end{aligned} \tag{1.1}$$

б) смешанная задача теории упругости для полосы $(-\infty<x<\infty, -h<y<0)$

$$\sigma_{yy}(x, 0)=p_1(x), \ \tau_{xy}(x, 0)=q_1(x), \ u(x, -h)=v(x, -h)=0, \ (-\infty<x<\infty) \tag{1.2}$$

где

$$p_1(x)=\begin{cases} p_0(x), & x\in(0, a)U(b, +\infty)\\ p(x), & x\in(a, b)\end{cases}$$

$$q_1(x)=\begin{cases} q_0(x), & x\in(0, a)\ U(b, +\infty)\\ q(x), & x\in(a, b)\end{cases}$$

соответственно симметричная и антисимметричная функции относительно точки 0,

$$\sigma_1(y) = \begin{cases} \sigma_0(y), & y \in (0, c) \cup (d, +\infty) \\ \sigma(y), & y \in (c, d) \end{cases}$$

В [1] найдены перемещения от неизвестных напряжений $p(x)$, $q(x)$ и $\sigma(y)$ $(x \in (a, b),\ y \in (c, d))$

для задачи (1.1):

$$Eu_x'(x, 0^+) = (1-\nu)p_1(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t}\right]q_1(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty R_1(t, x)p_1(t)dt + \int_0^\infty R_2(t, x)q_1(t)dt - \int_0^\infty R_7(t, x)\sigma_1(t)dt$$

$$Ev_x'(x, 0^+) = (\nu-1)q_1(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t}\right]p_1(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty R_3(t, x)p_1(t)dt - \int_0^\infty R_4(t, x)q_1(t)dt - \int_0^\infty R_6(t, x)\sigma_1(t)dt$$

$$Eu_x'(0, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{y-t} - \frac{1}{y+t}\right]\sigma_1(t)dt - \int_0^\infty R_6(t, y)p_1(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty R_4(t, y)q_1(t)dt + \int_0^\infty R_5(t, y)\sigma_1(t)dt$$

для задачи (1.2):

$$Eu_x'(x, 0^-) = (1-\nu)p(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t}\right]q_1(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty K_1(t, x)p_1(t)dt + \int_0^\infty K_2(t, x)q_1(t)dt$$

$$Ev_x'(x, 0^-) = (\nu-1)q_1(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t}\right]p_1(t)dt -$$

$$- \int_0^\infty K_3(t, x)p_1(t)\,dt - \int_0^\infty K_4(t, x)q_1(t)dt$$

где E и ν—модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно; $R_i(t, x)$ и $K_j(t, x)$, $(i = \overline{1, 7},\ j = \overline{1, 4})$—регулярные функции [1].

Требуя обращения в нуль скачков перемещений

$$u_x'(x, 0^+) - u_x'(x, 0^-) = 0, \quad v_x'(x, 0^+) - v_x'(x, 0^-) = 0 \tag{1.3}$$

и удовлетворяя условию симметрии

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

получим интегральные уравнения поставленной задачи

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt + \int_a^b M_{1,1}(t, x)p(t)dt + \int_a^b M_{1,2}(t, x)q(t)dt +$$

$$+ \int_c^d R_4(t, x)\sigma(t)dt = F_1(x), \quad x \in (a, b)$$

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)}{x-t}\,dt + \int_a^b M_{2,1}(t, x)p(t)dt + \int_a^b M_{2,2}(t, x)q(t)dt -$$

$$- \int_c^d R_7(t, x)\sigma(t)dt = F_2(x), \quad x \in (a, b) \tag{1.5}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_c^d \frac{\sigma(t)}{x-t}\,dt - \int_a^b R_6(t, x)p(t)dt + \int_a^b R_5(t, x)q(t)dt +$$

$$+ \int_c^d R_8(t, x)\sigma(t)dt = F_3(x), \quad x \in (c, d)$$

Здесь ядра $M_{ij}(t, x)$ $(i, j = 1, 2)$ и правые части $F_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ определяются из (1.3) и (1.4). Уравнения (1.5) представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши и регулярной частью. Функции $p(t)$, $q(t)$ и $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям равновесия

$$\int_a^b p(t)dt = -\int_0^a p_0(t)dt - \int_b^\infty p_0(t)dt, \quad \int_a^b q(t)dt = -\int_0^a q_0(t)dt - \int_b^\infty q_0(t)dt$$

$$\int_c^d \sigma(t)dt = -\int_0^c \sigma_0(t)dt - \int_d^\infty \sigma_0(t)dt \tag{1.6}$$

После замены переменных $x = \frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}$, $t = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$ при $t, x \in (a, b)$ и $x = \frac{d-c}{2}z + \frac{d+c}{2}$, $t = \frac{d-c}{2}y + \frac{d+c}{2}$ при $t, x \in (c, d)$, уравнения (1.5) и (1.6) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(y)}{z-y}dy+\sum_{j=1}^{3}\int_{-1}^{1}N_{ij}(y,z)\Phi_j(y)dy=\varphi_i(z),\ z\in(-1,1) \tag{1.7}$$

$$\int_{-1}^{1}\Phi_i(y)dy=c_i,\quad (i=1,2,3) \tag{1.8}$$

где $\Phi_1(y)=p\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)$, $\Phi_2(y)=q\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)$, $\Phi_3(y)=$ $=s\left(\frac{d-c}{2}y+\frac{d+c}{2}\right)$, а остальные функции $\varphi_i(z)$, $N_{ij}(y,z)$ $(i,j=1,2,3)$ определяются аналогичным образом.

2. *Определение коэффициентов интенсивности напряжений.* Решение системы (1.7) при условии (1.8) в классе функций, не ограниченных при $y=\pm 1$, то есть

$$\Phi_i(y)=(1-y^2)^{-1/2}W_i(y)\quad (i=1,2,3)$$

где $W_i(y)$—непрерывные функции на отрезке $[-1,1]$, существует и единственно [2].

Численное решение (1.7) получим с помощью квадратурных формул Гаусса [3]

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-y_m)}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_k-y_m} \tag{2.1}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \tag{2.2}$$

где

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad y_m=\cos\frac{\pi m}{n},\quad (k=1,2,\dots,n;\ m=1,2,\dots,n-1) \tag{2.3}$$

Применим квадратурные формулы (2.1) и (2.2) к уравнениям (1.7) и интегралам (1.8). В результате получим систему $3n$ линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}W_i(x_k)\left[\frac{1}{y_m-x_k}+\pi\sum_{j=1}^{3}N_{ij}(x_k,y_m)\right]=\varphi_i(y_m)$$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}W_i(x_k)=c_i\quad (i=1,2,3)$$

для определения $3n$ неизвестных $W_i(x_k)$ $(i=1,2,3;\ k=1,2,\dots,n)$.

Заметим, что сходимость процесса при гладких функциях $\varphi_i(z)$ и $N_{ij}(y,z)$ следует из сходимости квадратурных формул (2.1) и (2.2) и единственности решения уравнения (1.7) при условии (1.8).

Воспользовавшись интерполяционным полиномом Лагранжа [4]

$$W_i(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}W_i(x_k)\frac{T_n(y)\sqrt{1-x_k^2}}{y-x_k}$$

($T_n(y)=\cos(n \arccos y)$ — многочлены Чебышева), по узлам (2.3) найдем значения искомых функций $W_i(y)$ в точках $y=\pm 1$, через которые выражаются коэффициенты интенсивности напряжений.

В табл. 1 и 2 при различных значениях параметров d/a, b/a и h/a $(a=c)$ приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений, в случае единичной нагрузки на трещинах $(-a, a)$ и $(0, c)$.

Таблица 1

$h/a=1, \quad b/a=4$

K/σ_0 \ d/a	2	2,5	3	3,5	4	5
$K_1(a)/\sigma_0$	0,360	0,357	0,356	0,355	0,354	0,353
$K_2(a)/\sigma_0$	0,014	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019
$K_1(b)/\sigma_0$	0,056	0,057	0,058	0,058	0,059	0,059
$K_2(b)/\sigma_0$	0,001	0,001	0,0	0,0	0,0	0,0
$K_1(c)/\sigma_0$	1,280	0,798	0,574	0,445	0,362	0,261
$K_1(d)/\sigma_0$	0,387	0,188	0,112	0,074	0,053	0,032

Таблица 2

$h/a=5, \quad b/a=4$

K/σ_0 \ d/a	2	2,5	3	3,5	4	5
$K_1(a)/\sigma_0$	0,399	0,397	0,395	0,395	0,394	0,393
$K_2(a)/\sigma_0$	0,024	0,025	0,026	0,026	0,026	0,027
$K_1(b)/\sigma_0$	0,041	0,042	0,042	0,043	0,043	0,044
$K_2(b)/\sigma_0$	−0,003	−0,004	−0,004	−0,005	−0,005	−0,005
$K_1(c)/\sigma_0$	1,279	0,798	0,574	0,445	0,362	0,261
$K_1(d)/\sigma_0$	0,386	0,187	0,111	0,074	0,053	0,031

ABOUT INTERACTION OF FINITE AND SEMI-FINITE CRACKS IN ELASTIC HALF-PLANE

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՎ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՃԱՔԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Բ. Լ. ԱՖՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է վերջավոր և կիսաանվերջ ճաքերով թուլացված կիսահարթության հավասարակշռությունը, երբ կիսահարթության եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ ճաքերի վրա դրված են ինքնահավասարակշռված բեռներ։ Ուսումնասիրված է եզրի ազդեցությունը լարումների բաշխման վրա։ Ճաքերի ծայրակետերում լարումների ինտենսիվության գործակիցների համար բերված են թվային արժեքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афян Б. Л., Степанян С. П.* Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №2, с. 50—57.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962 511 с.
3. *Erdogan F. E., Gupta G.* On the numerical solutions of singular integral equations.—Quart. Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.III.1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.37

НОРМАЛЬНЫЙ УДАР И ПРОБИВАНИЕ ТОНКОЙ ПЛИТЫ ЦИЛИНДРОМ В УСЛОВИЯХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

РОМАНОВ Н. Н., САГОМОНЯН А. Я.

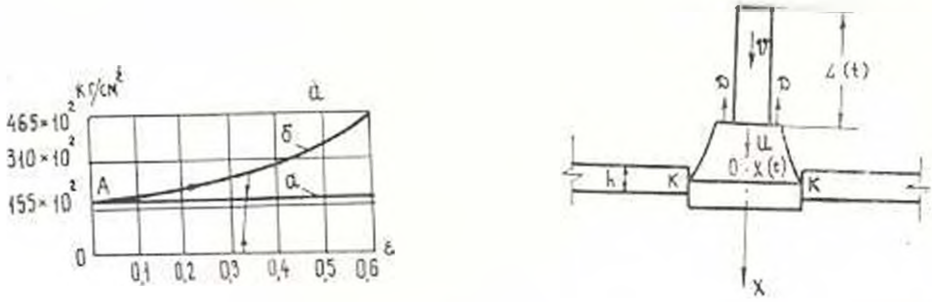
Толщина плиты меньше диаметра поперечного сечения цилиндра, который, в свою очередь, значительно меньше длины цилиндра [7]. Волновым процессом в отходе (пробке), образовавшемся в тонкой плите, пренебрегается. Деформации взаимодействующих тел происходят без упрочнения материалов. Эти приближения упрощают расчеты, но не являются принципиальными: указанным здесь путем можно исследовать задачу пробивания с учетом волновых процессов в преграде и упрочнения материалов тел. В отличие от работы [1], в настоящем исследовании рассматривается процесс торможения недеформированной хвостовой части цилиндра и допускается изменение скачком площади поперечного сечения цилиндра на фронте пластической волны [2, 3].

1. Модель. Опыты показывают [1], что при нормальном ударе цилиндрическим металлическим бойком о плоскость тонкой металлической плиты, толщина которой значительно меньше длины цилиндра и не превосходит его диаметра поперечного сечения, может быть выбита часть преграды—отход (пробка). В настоящем исследовании принимается, что пробивание плиты сопровождается образованием и выбиванием пробки из плиты. Отход (пробка) представляет собой цилиндр, диаметр которого равен диаметру расширившейся при ударе площади переднего среза бойка, прошедшего сквозь плиту [4]. Этот факт позволяет считать, что основное действие бойка на преграду локализовано в цилиндрическом объеме под поверхностью контакта. Механизм явления выбивания пробки можно представить следующим образом. При ударе в преграде непосредственно под передним срезом цилиндра образуется плоская ударная волна, приводящая к большим локальным пластическим деформациям, большому тепловыделению и высоким значениям температуры. В этом процессе температура повышается до 10^3 градусов по Цельсию, а скорости деформации сдвига достигают значений порядка 10^7 С$^{-1}$ [5]. Если скорость уменьшения прочности из-за наличия высоких температур больше скорости увеличения прочности за счет упрочнения при деформации, то пластические деформации остаются локализованными, а процесс в целом в этих условиях носит адиабатический характер. В результате повышается местная температура, что приводит к дополнительным пластическим деформациям. Вследствие вынужденного смещения материала преграды на контактной поверхности в направлении проникания, сдвиговые пластические деформации и сдвиг возникнут на периметре контакта. Поэтому зоной, где происходит этот процесс, будет тонкий слой, примыкающий к цилиндрической поверхности в плите, соосной с бойком и радиусом, примерно равном радиусу расширевшегося переднего сечения бойка. Дальнейшее развитие процесса приводит к росту пластических деформаций и максимальным значениям напряжения сдвига в этом слое. В конце концов наступает состояние, когда несущая способность преграды спонтанно уменьшается и происходит разрушение ее материала на цилиндрической поверхности. Такой процесс разрушения называется разрушающим термопластическим адиабатическим сдвигом [6]. К настоящему времени вопрос определения критерия возникновения разрушающего сдвига не решен. В работах [1, 6] приводятся результаты экспериментальных исследований, показывающие, что при больших скоростях деформаций, характерных для процессов пробивания, величина разрушающего напряжения сдвига не зависит от скорости удара и является постоянной величиной. Ниже принимается это условие. Для определенности в расчетах величина разрушающего сдвига приравнивается значению предела текучести при сдвиге. Таким образом, в рассматриваемой задаче при ударе в преграде мгновенно образуется отход, представляющий собой жесткий цилиндр, на боковой поверхности которого действует разрушающий сдвиг. В дальнейшем движение отхода (пробки) происходит под действием силы давления на контактной поверхности и силы сопротивления сдвига на боковой поверхности. Этот процесс принято называть «выбиванием пробки».

В момент удара в цилиндре возникает пластическая волна, которая в процессе взаимодействия с преградой распространяется к его свободному торцу. Непосредственно перед пластической волной в цилиндре напряжение равно пределу текучести при растяжении. Так как материал цилиндра не упрочняется, то такое же напряжение будет за пластической волной. Тогда соотношения на волне, выражающие основные законы механики в рассматриваемом одномерном движении, приводят к необходимости допустить скачок площади поперечного сечения цилиндра на пластической волне. Цилиндрический боек рассматривается как стержень, его хвостовая часть перед пластической волной считается жестким телом. Плотности материалов предполагаются постоянными.

На фиг. *1a* показана модельная зависимость напряжения от деформации для высокопрочного жесткопластического материала [7]. По горизонтальной оси отложена деформация ε, по вертикальной оси — напряжение. Линия *a* соответствует истинному значению предела текучести при растяжении σ_t неупрочняющегося материала, линия *b* — условному (техническому) значению материала σ.

2. Основные уравнения. Направим ось x по скорости пробивания



Фиг. 1

вертикально вниз вдоль оси цилиндра, начало оси x поместим на верхней поверхности плиты (фиг. *1б*). Учитывая направление оси x, уравнение сохранения массы и количества движения на фронте пластической волны, распространяющейся в сторону свободного торца цилиндра запишутся в виде

$$F_0(v-D)=F(u-D), \quad \sigma_s>0$$
$$\rho F_0(v-D)(u-v)=\sigma_s(F_0-F) \qquad (2.1)$$

Здесь ρ—плотность материала цилиндра, F_0, F—площади поперечного сечения цилиндра перед и за фронтом волны, v—скорость хвостовой части цилиндра, u—скорость цилиндра за волной, D—скорость волны относительно неподвижной точки $x=0$. Введем обозначения

$$s=\frac{F}{F_0}, \quad U=\frac{u}{a}, \quad V=\frac{v}{a}, \quad c=\frac{D}{a}, \quad a=\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} \qquad (2.2)$$

и перепишем уравнения (1) в безразмерных переменных (2):

$$(V-c)=s(U-c), \quad (V-c)(U-V)=1-s \qquad (2.3)$$

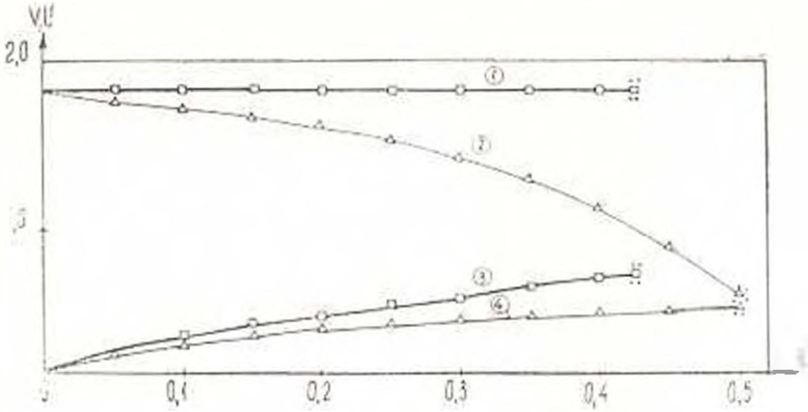
Пусть $L(t)$—текущая длина хвостовой части цилиндра, L_0—длина цилиндра до удара. Тогда можно записать следующее кинематическое условие размерных и безразмерных переменных:

$$\frac{dL}{dt}=\dot{L}=-(v-D), \quad \dot{l}=\frac{dl}{dt'}=-(V-c), \quad l=\frac{L}{L_0}, \quad t'=\frac{at}{L_0} \qquad (2.4)$$

где t'—безразмерное время, l—безразмерная длина хвостовой части цилиндра.

В рассматриваемой задаче отход и головная часть цилиндра за пластической волной движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями. Поэтому движения обоих тел можно определить одним уравнением

$$[M_0+(M_c-\rho F_0 L(t))]\frac{d^2x}{dt^2}=\sigma_s F-2(h-x)(\pi F_n)^{1/2}\tau \qquad (2.5)$$



Фиг 2

Фиг. 2

Здесь τ—разрушающий сдвиг на боковой поверхности отхода принимается, равным пределу текучести при сдвиге материала плиты, M_0—масса отхода, M_c—масса цилиндра в целом, h—толщина плиты, F—площадь поперечного сечения цилиндра непосредственно за пластической волной, F_1—площадь поперечного сечения переднего среза цилиндра после удара, равная площади отверстия в плите, образованного отходом. Координата переднего среза цилиндра (контактной поверхности KK на фиг. 2) в момент времени t обозначена через $x(t)$. Символом R_0 обозначим начальный радиус кругового сечения цилиндра и пусть ρ_0 и $p_s=2\tau$ обозначают плотность и предел текучести при растяжении материала плиты. Введем безразмерные параметры

$$\alpha=\frac{F_1}{F_0},\quad \beta=\frac{h}{L_0},\quad \gamma=\frac{L_0}{R_0},\quad \theta=\frac{\rho_0}{\rho},\quad \nu=\frac{p_s}{\sigma_s}$$

$$A=1+\alpha\beta\theta,\quad B=\gamma\sqrt{\alpha\nu},\quad y=\frac{x(t)}{L_0},\quad \ddot y=\frac{d^2y}{dt'^2} \tag{2.6}$$

и учтем, что

$$u=\frac{dx(t)}{dt},\quad U=\dot y,\quad \dot y=\frac{dy}{dt'} \tag{2.6'}$$

Тогда уравнению (2.5) можно придать вид

$$(A-l)\ddot y=s+B(y-\beta) \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, используя (2.3) и (2.6′), что уравнение (2.4) эквивалентно уравнению

$$\dot l=-\sqrt{s},\quad \sqrt{s}=\frac{1}{2}\left[V-\dot y+\sqrt{4+(V-\dot y)^2}\right] \tag{2.8}$$

где точка над символом означает дифференцирование по безразмерному времени t'

Уравнение движения хвостовой части цилиндра с учетом торможения в размерных и безразмерных переменных можно записать так:

$$L(t)\frac{dv}{dt}=-a^2, \quad l\dot{V}=-1, \quad \dot{V}=\frac{dV}{dt'} \tag{2.9}$$

Для постоянной скорости хвостовой части цилиндра имеем

$$v(t)=v_0, \quad V=V_0=\frac{v_0}{a}$$

Начальными условиями системы дифференциальных уравнений (2.7), (2.8), (2.9) относительно неизвестных y, l, V будут

$$t'=0, \quad l=1, \quad V=V_0, \quad y=0, \quad \dot{y}=0 \tag{2.10}$$

На контакной поверхности скорость, ускорение и напряжение непрерывны.

Если пластическая волна в цилиндре затухает до момента вылета отхода из плиты, то в этом случае дальнейшее движение отхода и цилиндра происходит с одинаковыми скоростями и ускорениями и уравнение движения в рассматриваемом случае имеет вид

$$[\rho F_0 L_0+\rho_0 F_n h]\frac{d^2x}{dt^2}=-(h-x)(\pi F_n)^{1/2}\rho_* \tag{2.11}$$

Или в безразмерных переменных

$$A\ddot{y}=B(y-\beta) \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.12) представляется в виде

$$y=\beta+C_1\exp(\lambda t')+C_2\exp(-\lambda t'), \quad \lambda=(B/A)^{1/2} \tag{2.13}$$

$$C_1=\frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda t_0')[\dot{y}(t_0')+\lambda(y(t_0')-\beta)], \quad C_2=\frac{1}{2\lambda}\exp(\lambda t_0')[\lambda(y(t_0')-\beta)-\dot{y}(t_0')]$$

Символом t_0' в (2.13) обозначено значение безразмерного времени в момент исчезновения пластической волны в цилиндре. Из (2.13) нетрудно получить, что при $C_1>0$ отход вылетает из преграды со скоростью V_b, в момент t_b', где

$$V_b=2\lambda(-C_1C_2)^{1/2}, \quad t_b'=\ln(-C_2/C_1)^{1/2} \tag{2.14}$$

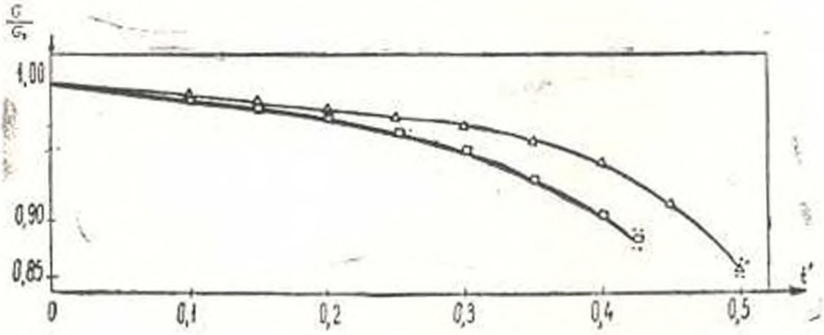
При $C_1=0$ движение отхода носит асимптотический характер: отход покидает преграду при $t\to\infty$ со скоростью $V\to 0$. При $C_1<0$ отход не вылетает из преграды и его скорость становится равной нулю в момент $t'=t_n'$, где

$$t_n'=\ln(C_2/C_1)^{1/2} \tag{2.15}$$

3. Результаты и анализ численного решения. Система уравнений (2.7), (2.8), (2.9) решалась для случая одинакового материала цилиндра и плиты. При численных расчетах на ЭВМ постоянные параметры, входящие в уравнения и условия задачи, имели значения

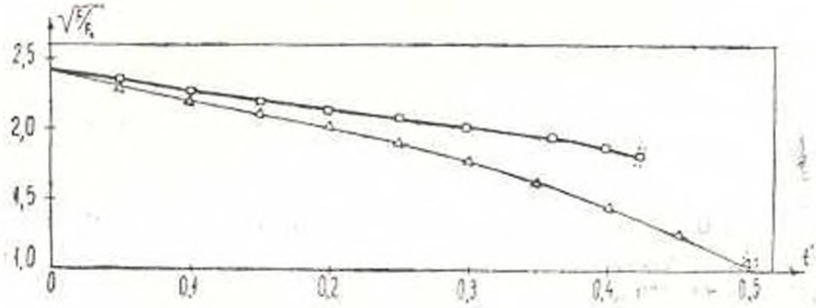
$$\beta=0{,}15;\quad \varphi=10,\quad \theta=1,\quad \gamma=1 \qquad (3.1)$$

Начальная скорость удара варьировалась. Результаты расчетов для $V_0=2$ представлены в виде графиков на фиг. 2—5. Линии с треугольниками относятся к случаю, когда учитывается торможение хвостовой части цилиндра перед пластической волной. Линии с квадратиками построены при постоянной скорости хвостовой части, равной начальной скорости $V_0=\dfrac{v_0}{a}$. На фиг. 2—5 по горизонтальной оси отложено



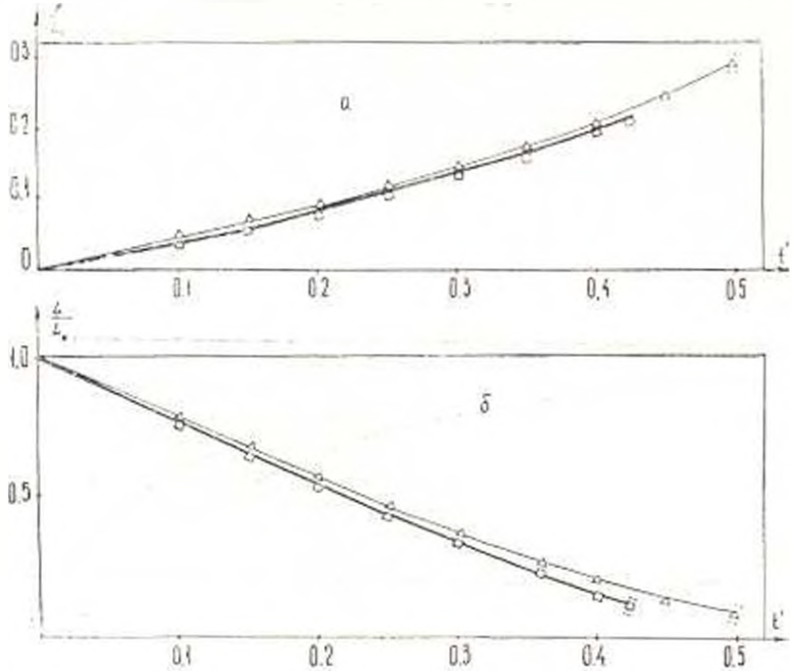
Фиг 3

Фиг. 3



Фиг. 4

безразмерное время t'. На фиг. 2 по вертикальной оси отложены безразмерные скорости хвостовой части цилиндра V (линии 1,2) и безразмерные скорости контактной поверхности U, равные скорости отхода (линии 3, 4). На фиг. 3 по вертикальной оси отложено безразмерное напряжение σ/σ_s на контактной поверхности. На фиг. 4. по вертикали отложено значение квадратного корня от отношения площади поперечного сечения за пластической волной к начальной площади сечения. На фиг. 5а по вертикали отложена безразмерная длина головной части цилиндра—отношение длины деформированной части цилиндра $z(t)$ за волной к его начальной длине. Линии на фиг. 5б определяют изменение во времени отношения длины хвостовой части цилиндра к его начальной длине L_0.



Фиг 5

Фиг. 5

Анализ решения позволил сделать следующие основные выводы.

а. При достаточно больших скоростях V_0 выбивание пробки происходит до затухания пластической волны в цилиндре. При этом движение отхода происходит с ускорением. Такая картина наблюдается до некоторого предела. В расчетах путем варьирования скорости удара V_0 и постоянных значениях других параметров, определенных по формуле (3.1), было установлено, что этот предел близок в случае торможения хвостовой части к значению V_p: $V_p = 1{,}600$, без учета торможения хвостовой части к значению $V_p = 1{,}012$.

б. При меньших скоростях V_0, начиная с указанного выше предела до V_m, где V_m — минимальная начальная скорость, необходимая для пробития плиты, пробитие плиты происходит после полного затухания пластической волны в цилиндре. В этом диапазоне скоростей удара движение головной части цилиндра до затухания пластической волны ускоренное. В расчетах путем варьирования скоростей удара V_0 и постоянных значениях других параметров, определенных по формуле (46), было получено, что для случая, когда учитывается торможение хвостовой части $V_m = 1{,}597$, без учета торможения для постоянной скорости хвостовой части $V_m = 1{,}010$.

При скоростях меньших минимальной скорости пробивания, то есть когда пробития не происходит, напряжение на контактной поверхности может расти и даже превысить значение σ_s.

Для решения задачи в этом диапазоне скоростей удара рассматриваемая здесь модель непосредственно не применима.

NORMAL SHOCK AND PUNCHING OF A THIN PLATE BY A CYLINDER IN THE CONDITIONS OF RIGID-PLASTIC DEFORMATION

I. N. ROMANOV, A. Ja. SAGOMONIAN

ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐՎԱԾԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ԿՏՐՈՒՄԸ ԳԼԱՆՈՎ ԿՈՇՏ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ի. Ն. ՌՈՄԱՆՈՎ, Ա. ՅԱ. ՍԱՂՈՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Բերված է դեֆորմացվող գլանի օգնությամբ բարակ սալի կտրման խնդրի մոտավոր լուծումը կոշտ պլաստիկության դրվածքով՝ թափանցի (խցանի) դուրս նետման պայմաններում։ Թափանցման ալիքային գործընթացը արհամարհվում է։ Խնդիրը բերված է սովորական հավասարումների համակարգի, շարժման պարամետրերի արժեքների որոշումը հանգեցվում է պարզ թվային հաշվարկի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я.* К задаче пробивания преграды цилиндрическим бойком.—ВМУ, 1977, матмех, № 5, с. 111—118.
2. *Гольдсмит В.* Удар.—М.: Стройиздат, 1965.
3. *Фрейбергер У.* Расширение круглого отверстия в листе.—Механика (сб. переводов), М.: ИЛ, 1953, с. 122—134.
4. *Рехт Р. Ф., Ипсонт Ю.* Динамика баллистической пробивки.—Прикладная механика (русск. перевод), 1963, № 3, с. 73—80.
5. *Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х. Ф., Грещук Л. Б., Курран Д. Р.* Динамика удара.—М.: Мир, 1985.
6. *Рехт Р. Ф.* Разрушающий термопластический сдвиг.—Прикладная механика (русск. перевод), 1964, № 2, с. 34—39.
7. *Ли Е., Таппер С.* Исследование пластической деформации в стальном цилиндре при ударе о жесткую плиту.—Механика (сб. переводов), М.: ИЛ, 1955, № 2, с. 129—142.

Московский государственный университет им. Ломоносова

Поступила в редакцию 2.XII.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

БЕЛОКОНЬ А. В., ИЗОСИМОВА Т. Н.

В настоящее время широкое распространение, как при изучении статических, так и динамических задач теории упругости, получил метод граничных интегральных уравнений [1]. Основным его достоинством является понижение размерности пространства, в котором ищутся неизвестные функции. Использование этого метода в случае нестационарной задачи о деформировании анизотропного прямоугольника приводит к необходимости решать систему, состоящую из четырех сингулярных уравнений, удовлетворяя при этом приближенно всем граничным условиям. В данной работе показывается, как эту же задачу, используя идеи метода суперпозиции [2, 3] и введения в рассмотрение вспомогательной задачи [4], можно свести к одному интегральному уравнению, зависящему от параметра преобразования Лапласа. При этом удается удовлетворить точно всем граничным условиям, кроме одного, что существенно отличает предлагаемый подход от классического метода граничных интегральных уравнений. Для решения интегрального уравнения в данной работе применяется метод Бубнова-Галеркина. Решение же, зависящее от времени, получается путем численного обращения Лапласа, для чего используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [5]. Эффективность предлагаемого подхода проиллюстрирована на числовом примере.

Рассмотрим динамическую задачу о деформировании упругого анизотропного прямоугольника, занимающего в плоскости Ox_1x_3 область $\Pi=[-a; a]\times[-b, b]$. Предполагаем, что на границах прямоугольника заданы напряжения, распределенные таким образом, что осуществляется симметричное деформирование.

После применения преобразования Лапласа поставленная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$u_{xx}+c_{44}u_{zz}+(c_{13}+c_{44})v_{xz}=p^2u$$

$$(c_{44}+c_{13})u_{xz}+c_{44}v_{xx}+c_{33}v_{zz}=p^2v$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{zz}=c_{13}u_x+c_{33}v_z=g_1(x;p)$$

$$\sigma_{xz}=c_{44}(u_z+v_x)=0, \quad \text{если} \ |x|\leqslant \alpha, \ z=\pm 1$$

$$\sigma_{xx}=u_x+c_{13}v_z=g_2(z;p)$$

$$\tau_{xz} = c_{44}(u_z + v_x) = 0, \quad \text{если} \quad x = \pm\eta, \quad |z| \leqslant 1$$

где $x = x_1/b$, $z = x_3/b$, $\tau = t/\sqrt{\gamma}$ — безразмерные координаты; $u = u_1/b$, $v = u_3/b$ — безразмерные компоненты вектора перемещений; $\gamma = \rho b^2/c_{11}^E$; ρ — плотность материала; $c_{13} = c_{13}^E/c_{11}^E$, $c_{44} = c_{44}^E/c_{11}^E$, $c_{33} = c_{33}^E/c_{11}^E$ ($c_{11}^E, c_{13}^E, c_{44}^E, c_{33}^E$ — модули упругости); $\eta = a/b$; p — параметр преобразования Лапласа.

Общее решение полученной граничной задачи, зависящей от параметра p, в соответствии с методом суперпозиции [2, 3] выберем в виде:

$$u(x, z, p) = F_0 \operatorname{sh} px + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} a_{in} B_{in} \operatorname{ch} \delta_{in} z \sin \alpha_n (x - \eta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} b_{ik} D_{ik} \operatorname{sh} \mu_{ik} x \cos \beta_k (z - 1) \tag{1}$$

$$v(x, z, p) = A_0 \operatorname{sh} \gamma_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} B_{in} \operatorname{sh} \delta_{in} z \cos \alpha_n (x - \eta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} D_{ik} \operatorname{ch} \mu_{ik} x \sin \beta_k (z - 1) \tag{2}$$

где B_{in}, D_{ik} — неизвестные постоянные; $\beta_k = k\pi$, $\alpha_n = n\pi/\eta$; $\gamma_1 = p/\sqrt{c_{33}}$;

$$a_{in} = \frac{(c_{13} + c_{44})\delta_{in}\alpha_n}{c_{44}\delta_{in}^2 - \alpha_n^2 - p^2}; \quad b_{ik} = \frac{(c_{13} + c_{44})\mu_{ik}\beta_k}{\beta_k^2 c_{44} + p^2 - \mu_{ik}^2}$$

δ_{in} и μ_{ik} — корни биквадратных уравнений:

$$c_{44}c_{33}\delta^4 + [(c_{13} + c_{44})^2\alpha_n^2 - c_{44}(c_{44}\alpha_n^2 + p^2) - c_{33}(\alpha_n^2 + p^2)]\delta^2 + (\alpha_n^2 + p^2)(c_{11}\alpha_n^2 + p^2) = 0$$

$$c_{44}\mu^4 + [(c_{13} + c_{44})^2\beta_k^2 - c_{33}(c_{44}\beta_k^2 + p^2) - (c_{33}\beta_k^2 + p^2)]\mu^2 + (c_{44}\beta_k^2 + p^2)(c_{33}\beta_k^2 + p^2) = 0$$

$$i = 1, 2$$

причем $\delta_{1n} > \delta_{2n} > 0$ и $\mu_{1k} > \mu_{2k} > 0$, если корни действительные; $\delta_{1n} = \bar{\delta}_{2n}$ и $\mu_{1k} = \bar{\mu}_{2k}$, если они комплексные.

Следуя [4], строим вспомогательную задачу, допускающую решение в замкнутой форме. Для этого вместо нормальных напряжений считаем заданными на границах нормальные перемещения. В результате коэффициенты, входящие в (1), (2), выражаются через перемещения на границах $f_1(x; p)$, $f_2(z; p)$ следующим образом:

$$A_0 = \frac{f_{10}}{\operatorname{sh}\gamma_1}, \quad B_{2n} = \frac{f_{1n}}{l_n \operatorname{sh}\delta_{1n} + \operatorname{sh}\delta_{2n}}, \quad B_{1n} = l_n B_{2n}$$

$$F_0 = \frac{f_{20}}{\operatorname{sh} p\eta}, \quad D_{2k} = \frac{f_{2k}}{b_{1k} m_k \operatorname{sh}\mu_{1k}\eta + b_{2k} \operatorname{sh}\mu_{2k}\eta}, \quad D_{1k} = m_k D_{2k}$$

где

$$l_n = \frac{\alpha_n - a_{2n}\delta_{2n}}{a_{1n}\delta_{1n} - \alpha_n} \cdot \frac{\operatorname{sh}\delta_{2n}}{\operatorname{sh}\delta_{1n}}, \quad m_k = \frac{b_{2k}\beta_k - \mu_{2k}}{\mu_{1k} - b_{1k}\beta_k} \cdot \frac{\operatorname{sh}\mu_{2k}\eta}{\operatorname{sh}\mu_{1k}\eta}$$

$$f_{10}=\frac{1}{2\gamma_1}\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1} f_1(x;p)dx,\quad f_{1n}=\frac{1}{\gamma_1}\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1} f_1(x;p)\cos\alpha_n(x-\gamma_1)dx$$

$$f_{20}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f_2(z;p)dz,\quad f_{2k}=\int\limits_{-1}^{1} f_2(z;p)\cos\beta_k(z-1)\,dz$$

Для определения функций $f_1(x;p)$, $f_2(z;p)$, выполняя граничные условия для нормальных напряжений исходной задачи, получаем систему интегральных уравнений, которую можно упростить, выразив $f_2(x;p)$ через $f_1(z;p)$ по следующим формулам:

$$f_{20}=\left(g_{20}-c_{13}f_{10}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{13}p^2}{p^2+\alpha_n^2}f_{1n}\right)/(p\,\mathrm{cth}\,p\gamma_1)$$

$$f_{2k}=\left(g_{2k}-\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1}\widetilde{B}_k(x;p)f_1(x;p)\,dx\right)/A_k(p)$$

Относительно неизвестной функции $f_1(x;p)$ имеем интегральное уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_k(x;p)}{A_k(p)}\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1}B_k(x;p)f_1(x;p)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{A}_n(p)}{\gamma_1}\cos\alpha_n(x-\gamma_1)\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1}f_1(x;p)\cos\alpha_n\times$$

$$\times(x-\gamma_1)dx+\frac{c_{13}^2p}{\mathrm{sh}\,2p\gamma_1}\mathrm{ch}\,px\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1}\mathrm{ch}\,px\,f_1(x;p)\,dx-\frac{c_{13}\gamma_1}{2\gamma_1}\mathrm{cth}\,\gamma_1\int\limits_{-\gamma_1}^{\gamma_1}f_1(x;p)dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_k(x;p)}{A_k(p)}g_{2k}-\frac{c_{13}}{\mathrm{ch}\,p\gamma_1}\mathrm{ch}\,px\,g_{20}=-g_1(x;p)\tag{3}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\widetilde{B}_k(x;p)=[(c_{13}b_{1k}\mu_{1k}+c_{33}\beta_k)m_k\mathrm{ch}\,\mu_{1k}x+c_{13}b_{2k}\mu_{2k}+c_{33}\beta_k)\mathrm{ch}\,\mu_{2k}x]/r_k$$

$$A_k(p)=[(b_{1k}\mu_{1k}+c_{13}\beta_k)m_k\mathrm{ch}\,\mu_{1k}\gamma_1+(b_{2k}\mu_{2k}+c_{13}\beta_k)\mathrm{ch}\,\mu_{2k}\gamma_1]/r_k$$

$$\widetilde{A}_n(p)=[(c_{13}\alpha_n a_{1n}+c_{33}\delta_{1n})l_n\mathrm{ch}\,\delta_{1n}+(c_{13}\alpha_n a_{2n}+c_{33}\delta_{2n})\mathrm{ch}\,\delta_{2n}]/t_n$$

$$t_n=l_n\mathrm{sh}\,\delta_{1n}+\mathrm{sh}\,\delta_{2n};\quad r_k=b_{1k}m_k\mathrm{sh}\,\mu_{1k}\gamma_1+b_{2k}\mathrm{sh}\,\mu_{2k}\gamma_1$$

$$g_{20}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}g_2(z;p)dz;\quad g_{2k}=\int\limits_{-1}^{1}g_2(z;p)\cos\beta_k(z-1)dz$$

Отметим, что при получении уравнения (3), были точно удовлетворены граничные условия

$$\sigma_{xx}=u_x+c_{13}v_z=g_2(z;p)$$

$$\sigma_{xz}=c_{44}(u_z+v_x)=0,\quad \text{если}\quad x=\pm\gamma_1,\ |z|\leqslant 1$$

$$\sigma_{xz}=c_{44}(u_z+w_x)=0, \quad \text{если} \quad |x|\leqslant\eta, \quad z=\pm 1$$

Для решения интегрального уравнения (3) можно использовать различные методы, например, метод аппроксимации сплайнами, метод Бубнова-Галеркина и др. В работе применяется метод Бубнова-Галеркина, который основывается на аппроксимации перемещений на границе функцией вида $A(p)+B(p)x^2$.

Разработанная методика численно-аналитического исследования нестационарных процессов деформирования является удобной основой для эффективного решения разнообразных конкретных задач соответствующего типа.

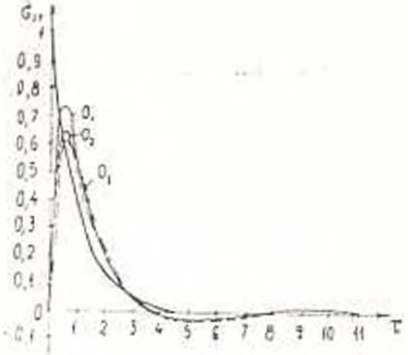
В качестве примера было изучено поведение напряжений в анизотропной прямоугольной области, находящейся под действием нестационарной равномерно распределенной нагрузки, приложенной нормально и симметрично вдоль его больших краев, экспоненциально убывающей по времени: $\exp(-\varepsilon\tau)$, где $\varepsilon=\{1;\ 10\}$. Расчеты проводились для нескольких геометрических размеров $\eta=\{1,\ 2,\ 3\}$. При этом в качестве упругих постоянных использовались модули упругости при нулевом электрическом поле для пьезокерамики ЦТС—19.

Следует иметь в виду, что в каждом конкретном случае точность численного исследования существенно зависит от выбора значения параметра регуляризации, а также шага разбиения. Расчеты показали, что при выполнении процедуры численного обращения Лапласа при нагрузках $\exp(-\tau)$, $\exp(-10\tau)$ целесообразно выбирать значения параметра регуляризации 10^{-6}, 10^{-5} соответственно, а шаг сетки—равным 0,033. Уменьшение шага (0,02) существенно не улучшает точность решения, однако, позволяет значительно увеличить интервал времени.

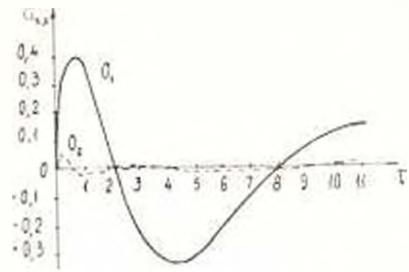
На точность решения как функций времени значительно влияет также погрешность, получаемая для изображений. В основном, она не превышает 1% относительной погрешности за исключением нескольких точек p_j, в которых может достигать 5%. Это обусловлено медленной сходимостью рядов для напряжений на границе области.

Критерием для оценки качества полученного по изложенному методу решения являлась точность удовлетворения граничным условиям. Вычисления показали, что относительная ошибка для нормальных напряжений σ_{zz}, заданных на сторонах прямоугольника, в узловых точках τ_i не превышает 6% для $\varepsilon=1$ и 10% для $\varepsilon=10$. Краевые условия для нормальных σ_{xx} и касательных напряжений удовлетворяются точно.

Определенный интерес в рассматриваемой задаче представляет изучение характера изменения напряжений по длине прямоугольника с течением времени. На фиг. 1, 2 показано распределение напряжений для $\varepsilon=1$, $\eta=3$ вдоль нагруженной стороны, где сплошной линией дано поведение напряжений на интервале [0, 11] в точке $O_1(0;\ 0{,}8)$; штриховой—в точке $O_2(\eta-0{,}06;\ 0{,}8)$, штрихпунктирной—в точке $O_3(\eta;\ 0{,}8)$. На самом деле, значения напряжений получены на [0, 19], но ввиду малости с ростом τ их значения на фигурах не приводятся.



Фиг. 1



Фиг. 2

Как и следовало ожидать, изменение напряжений с течением времени в точках прямоугольника протекает по типу волнового затухающего процесса. Первое максимальное значение во всех рассматриваемых случаях является наибольшим и достигается достаточно быстро после момента нагружения. Причем, что касается напряжений σ_{xx}, чем ближе расположена точка к ненагруженной стороне, тем меньше в ней наибольшее значение напряжения и раньше оно наступает. Например, для квадрата при параметре $\varepsilon=1$ в точке O_1 наибольшее значение принимает в момент времени $\tau=0{,}46$ и равно 0,4205, в точке O_2—в момент $\tau=0{,}22$ и равно 0,0713. В точке O_3 напряжения σ_{xx} равны нулю, так как она принадлежит свободной от нагрузок границе.

С уменьшением отношения сторон для фиксированного $\varepsilon=10$ максимальные значения σ_{xx} в рассматриваемых точках отличаются незначительно, так же, как и соответствующие им моменты времени. Исключение составляет точка O_1 в квадрате, где имеет место небольшой рост напряжений σ_{xx}. Для $\varepsilon=1$ картина несколько иная. Здесь при малом изменении величин наибольших значений σ_{xx} в точке O_1 наблюдается сдвиг экстремальных значений по времени: чем меньше вытянут прямоугольник, тем раньше достигается максимальное напряжение. Так, для $\eta=3$ максимальное значение σ_{xx} наступает в момент времени $\tau=0{,}82$, для $\eta=2$ $\tau\approx0{,}71$, для $\eta=1$ $\tau=0{,}46$.

Максимальные напряжения σ_{zz}, действующие в направлении приложенной нагрузки, в этих же точках значительно превосходят соответствующие значения σ_{xx}.

При проведении сравнения вычисленных напряжений σ_{zz} заметно, что для всех рассматриваемых размеров и нагрузок наибольшие их значения убывают по мере приближения точки к ненагруженной стороне, причем в точках O_1, O_2 достигаются одновременно, а в точке O_3 несколько позже. Это хорошо видно на фиг. 1.

При анализе численных результатов следует отметить, что с уменьшением отношения сторон для фиксированной нагрузки наблюдается незначительный рост максимальных напряжений σ_{zz} во всех рассматриваемых точках. При этом наибольших значений напряжения σ_{zz}

достигают одновременно в соответствующих точках для всех взятых размеров прямоугольника, за исключением случая $\varepsilon = 1$, $\eta = 1$, когда имеет место смещение их к началу нагружения.

Характерной особенностью всех рассматриваемых случаев является тот факт, что максимальных значений напряжения σ_{yy} достигают в тот момент времени, когда нагрузка резко падает.

Построенный алгоритм решения нестационарной задачи для анизотропного прямоугольника позволяет провести подробный кинематический анализ процесса деформирования. Для этого необходимо использовать выражения для компонентов вектора перемещений (1), (2).

DYNAMIC PROBLEM FOR AN ANISOTROPIC RECTANGLE

A. V. BELOKON, T. N. IZOSIMOVA

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Վ. ԲԵԼՈԿՈՆ, Տ. Ն. ԻԶՈՍԻՄՈՎԱ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկված է անիզոտրոպ ուղղանկյան դեֆորմացման մասին ոչ ստացիոնար խնդրի լուծման մեթոդ։ Ուղղանկյան եզրերում լարումները բաշխված են այնպես, որ տեղի ունի սիմետրիկ դեֆորմացում։ Համադրման մեթոդով խնդիրը բերված է մեկ ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Դա հնարավորություն է տալիս բավարարել բոլոր եզրային պայմաններին ճշգրիտ, բացի մեկից։ Ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով։ Բերված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела.—Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 296 с.
2. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.—Докл. АН Арм. ССР, 1954, т. *19*, №1, с. 3—12.
3. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.—Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
4. *Белоконь А. В.* Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров.—Докл. АН СССР, 1977, т. *233*, №1, с. 56—59.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979. 288 с.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию
2.XII.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

ГРИГОРЯН С. А.

Рассматривается задача проектирования круглой пластинки радиуса R, толщины h, загруженной постоянной нормальной нагрузкой q. При ограничении на прочность, варьированием опорного контура находится пластинка минимального веса.

1. Пусть пластинка отнесена к цилиндрической системе координат r, θ, z так, что плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. Пластинка опирается по контуру $r=R_1$, где $0<R_1<R$.

Уравнение равновесия пластинки относительно прогиба $W(r)$ и соответствующие граничные условия представляются в виде [1].

$$D\Delta^2 W_i=q \quad \left(\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right), \quad i=1,\ 2 \tag{1.1}$$

соответственно для областей $0<r\leqslant R_1$ и $R_1\leqslant r\leqslant R$.

$$\lim_{r\to 0} W_1(r)\neq\infty, \quad \frac{dW_1}{dr}=0 \quad \text{при} \quad r=0$$

$$W_1=W_2=0, \quad \frac{dW_1}{dr}=\frac{dW_2}{dr}, \quad M_{rr}^{(1)}=M_{rr}^{(2)} \quad \text{при} \quad r=R_1 \tag{1.2}$$

$$M_{rr}^{(2)}=0, \quad T_{rz}^{(2)}=0 \quad \text{при} \quad r=R$$

Здесь

$$M_{rr}^{(i)}=-D\left(\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dW_i}{dr}\right), \quad T_{rz}^{(i)}=-D\left(\frac{d^3W_i}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2W_i}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dW_i}{dr}\right) \tag{1.3}$$

—соответственно изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях $r=\mathrm{const}$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ — жесткость на изгиб, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Решение краевой задачи (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) получается в виде

$$W_1=\frac{qR^4}{64D}\left(2\frac{3+\nu}{1+\nu}-8\ln\beta-4\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta^2-8+\gamma^2+\beta^2\right)(\gamma^2-\beta^2) \tag{1.4}$$

$$W_2=\frac{qR^4}{64D}\left[\left(2\,\frac{3+\nu}{1+\nu}-8\ln\gamma-4\,\frac{1-\nu}{1+\nu}\,\beta^2+\gamma^2+\beta^2\right)(\gamma^2-\beta^2)-16\beta^2(\ln\gamma-\ln\beta)\right] \tag{1.5}$$

где введены обозначения $\gamma=r/R$, $\beta=R_1/R$.

Напряжения в радиальном и кольцевом направлениях определяются формулами

$$\sigma_{rr}^{(i)}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\,\frac{dW_i}{dr}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}^{(i)}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dW_i}{dr}\right) \tag{1.6}$$

Из условия прочности

$$\sigma_{rr}^2+\sigma_{\theta\theta}^2-\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}\leqslant\sigma_*^2 \tag{1.7}$$

где σ_* — допускаемое напряжение, для определения допускаемой толщины получается неравенство

$$h_{i_*}\geqslant R\sqrt[4]{\frac{36q^2}{\sigma_*^2}\,F_i(\gamma,\beta)}\quad (i=1,\,2) \tag{1.8}$$

Здесь введены обозначения:

$$F_1(\gamma,\beta)=[(1+3\nu)^2+4(1-\nu)^2\beta^4+16(1+\nu)^2\ln^2\beta+4(1-\nu)(1+3\nu)\beta^2+$$
$$+16(1-\nu^2)\beta^2\ln\beta+8(1+\nu)(1+3\nu)\ln\beta]/256+[4(1-\nu)^2+(3+\nu)(1+3\nu)]\gamma^4/256-$$
$$-[(1+\nu)(1+3\nu)+2(1-\nu^2)\beta^2+4(1+\nu)^2\ln\beta]\gamma^2/64$$

$$F_2(\gamma,\beta)=[(1+3\nu)^2+12(1-\nu)^2+4(1-\nu^2)\beta^2+16(1-\nu)\beta^4]/256+(1+\nu)^2\ln^2\gamma/16+$$
$$+3(1-\nu)^2/\gamma^4\cdot 64+[4(1-\nu)^2+(3+\nu)(1+3\nu)]\gamma^4/256+[(1+3\nu)(1+\nu)+$$
$$+2(1-\nu^2)\beta^2]\ln\gamma/32-3(1-\nu)^2\beta^4/\gamma^2\cdot 32+[(1+3\nu)(1-\nu)-(3+\nu)-$$
$$-(1-\nu^2)\beta^2]\gamma^2/32-(1+\nu)^2\gamma^2\ln\gamma/16$$

Очевидно, что расчетная толщина пластинки для каждого $\beta\in(0;1]$ определится из условия

$$h^*(\beta)=\max_{\gamma} h_{i_*}(\gamma,\beta) \tag{1.9}$$

где $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ при $i=1$ и $\beta<\gamma\leqslant1$ при $i=2$.

2 Имея значения $h^*(\beta)$, можно поставить следующую задачу проектирования оптимальной пластинки: найти

$$h_{\text{опт}}=\min_{\beta} h^*(\beta)\quad\text{при}\quad 0<\beta\leqslant1 \tag{2.1}$$

Таким образом, получается следующая задача: найти

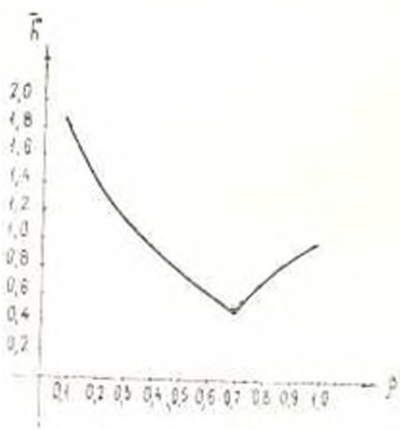
$$\min_{\beta}\max_{\gamma} h_{i_*}(\gamma,\beta)\quad (i=1,\,2) \tag{2.2}$$

при ограничениях $0\leqslant\gamma\leqslant1$ и $0<\beta\leqslant1$, причем при $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ $i=1$, а при $\beta<\gamma\leqslant1$ $i=2$.

Расчеты проведены для коэффициента Пуассона $\nu=0{,}3$. При этом получается, что при $\beta=0{,}706$ максимальное значение интенсивности напряжений достигается при $\gamma=\beta$, то есть на опоре. В этом случае относительная расчетная толщина есть $\bar{h}=h/h^*(1)=0{,}489$, где $h^*(1)$—расчетная толщина шарнирно опертой по контуру пластинки.

Наименьшая толщина равна

$$h_{\text{опт}}=0{,}544R\sqrt{\frac{q}{\sigma_*}} \tag{2.3}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведен график зависимости относительной расчетной толщины $\bar{h}$ от β, откуда видно, что оптимальным выбором β можно существенно (более чем в два раза) уменьшить вес пластинки. Следует отметить, что практически оптимальный проект достигается при равенстве $S_1=S_2$, где S_1 и S_2, соответственно, площади областей $r\in[0, R_1]$ и $r\in[R_1; R]$.

Ставится также задача: найти

$$W_{\text{опт}}=\min_{\beta}\max W_i(\gamma, \beta) \tag{2.4}$$

при ограничениях $0<\beta\leqslant 1$, $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ при $i=1$, $\beta<\gamma\leqslant 1$ при $i=2$ и при заданных R, h, q, E, ν.

Как показывают расчеты при $\nu=0{,}3$

$$W_{\text{опт}}=0{,}0258\,\frac{qR^4}{Eh^3} \tag{2.5}$$

что достигается при $\beta=0{,}676$.

Наибольший прогиб пластинки минимального веса, найденной при ограничении на прочность ($h=h_{\text{опт}}$ по формуле (2.3)) будет

$$W=0{,}377R\,\frac{\sigma_*}{E}\sqrt{\frac{\sigma_*}{q}} \tag{2.6}$$

В табл. 1 приводятся значения $\overline{W}(\beta)$ при $\nu=0{,}3$, где $\overline{W}(\beta)=$ $=\max W(\gamma, \beta)/\max W(\gamma, 1)$. $W(\gamma, 1)$—прогибы шарнирно опертой по контуру пластинки.

Таблица 1

β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,676	0,7	0,8	0,9	1,0
$\overline{W}(\beta)$	1,307	1,097	0,846	0,587	0,347	0,146	0,0369	0,0763	0,295	0,599	1,000

Максимальный прогиб оптимальной по жесткости пластинки более чем в 27 раз меньше максимального прогиба шарнирно опертой по контуру пластинки.

Необходимо отметить, что полученный проект оптимальной пластинки и соответствующие $h_{опт}$ и $W_{опт}$ получены для коэффициента Пуассона $\nu=0{,}3$. Для анализа влияния ν на оптимальный проект рассмотрены и другие значения ν. В табл. 2 приведены значения $h_{опт}\cdot\sqrt{\sigma_*/qR^2}$ и $W_{опт}\cdot Eh^3/qR^4$ при $\nu=0{,}0$, $\nu=0{,}3$, $\nu=0{,}5$ и соответствующие ξ.

Таблица 2

ν	$h_{опт}\sqrt{\sigma_*/qR^2}$	ρ	$W_{опт}Eh^3/qR^4$	ξ
0.0	0.596	0.709	0,0264	0.682
0.3	0.544	0.706	0.0258	0.676
0.5	0.541	0.693	0.0252	0.673

Как видно из табл. 2, коэффициент Пуассона слабо влияет на оптимальный проект.

ABOUT ONE OPTIMIZATION PROBLEM OF A CIRCULAR PLATE

S. A. GRIGORIAN

ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՄԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ Ս. Հ.

Ամփոփում

Դիտարկվում է կլոր իզոտրոպ սալի նախագծման խնդիրը, որը գտնվում է նորմալ հաստատուն բեռի ազդեցության տակ։ Ամրության սահմանափակման դեպքում, փոփոխելով հենակետային կոնտուրի դիրքը, գտնվում է օպտիմալ սալ։ Ցույց է տրված, որ օպտիմալ ձևով ընտրելով սալի հենման կոնտուրի դիրքը կարելի է տրված բեռի դեպքում էապես փոքրացնել սալի կշիռը կամ ամենամեծ ճկվածքը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости.—М.: Гостехтеориздат, 1947. 464 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
13.X.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

АВЕТИСЯН Д. К.

Решается задача нахождения оптимального проекта слоистой ортотропной полосы, шарнирно закрепленной в жесткий экран, при ее взаимодействии с акустической волной давления. Для определения прогибов полосы совместно решаются волновое уравнение для потенциала скоростей частиц жидкости (газа) и уравнение изгиба полосы. При решении волнового уравнения применяется интегральное преобразование Лапласа по времени.

Далее ставится и решается задача определения таких безразмерных толщин слоев полосы, при которых данная полоса обладает наибольшей жесткостью.

В качестве примера рассматриваются полосы, образованные из слоев, состоящих из композиционного материала и металла. Как следует из численных расчетов, оптимальный проект слоистой полосы вырождается в однослойный, изготовленный только из композиционного материала. Прогибы полосы из КМ (боропластика) более чем в 70 раз меньше прогибов стальной полосы того же веса.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за № 5503—В89 от 16.08.1989

Поступила в редакцию
23.V. 1989