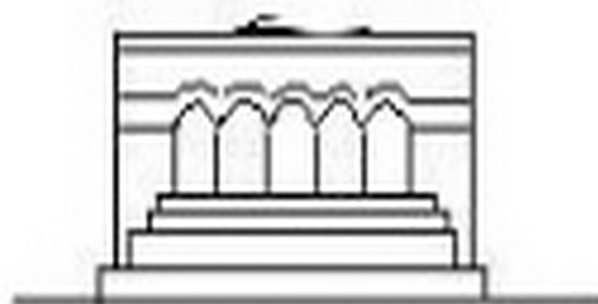


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1989

УДК 539.3; 534.21

ВОЛНЫ ЛЯВА В МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ СРЕДАХ

БАГДАСАРЯՆ Դ. Ե., ԴԱՆՅԱՆ Յ. Ն., ՏԱՆՅԱՆ Լ. Ա.

1. Рассмотрим диэлектрический изотропный упругий слой постоянной толщины h с модулем сдвига μ_1 и плотностью ρ_1 , лежащий на упругом изотропном диэлектрическом магнитострикционном полупространстве с параметрами μ_2 и ρ_2 . Направим ось x_1 декартовой системы координат $x_1x_2x_3$ вдоль границы раздела, а ось x_2 — в глубь полупространства.

Предполагается, что область $x_2 < -h$ является вакуумом, а граница слоя $x_2 = -h$ свободна от внешней нагрузки. Рассматриваемая магнитоупругая система находится во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0(0, 0, H_0)$.

Используя результаты работ [1—6] и предполагая, что слой и полупространство находятся в условиях антиплоской деформации, в квазистатическом приближении получим следующие уравнения и поверхностные условия, описывающие поведение магнитоупругих возмущений в рассматриваемой слоистой среде.

Уравнения в области полупространства ($x_2 > 0$):

$$\mu_2 \Delta u_3^{(2)} + \beta_{15} \Delta \varphi = \rho_2 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2}, \quad \beta_{15} \Delta u_3^{(2)} - \mu_0 \mu_2 \Delta \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение в области слоя ($-h < x_2 < 0$):

$$\mu_1 \Delta u_3^{(1)} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Уравнение в области $x_2 < 0$ (магнитная проницаемость материала слоя считается равной единице):

$$\Delta \varphi^{(r)} = 0 \quad (1.3)$$

Условия на поверхности раздела ($x_2 = 0$):

$$\mu_1 \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2} + \beta_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \quad (1.4)$$

$$\beta_{15} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2} - \mu_0 \mu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\mu_2 \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial x_2}, \quad \varphi = \varphi^{(r)}$$

Условие на свободной поверхности слоя ($x_2 = h$):

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = 0. \quad (1.5)$$

В (1.1) — (1.5) $u_1^{(1)}$ и $u_1^{(2)}$ — перемещения частиц по направлению оси x_1 в слое и в полупространстве, соответственно, $\beta_{12} = \frac{e_1 - e_2}{2} H_0^2$, e_1 и e_2 — магнитоэлектрические постоянные, μ — магнитная проницаемость материала полупространства, φ и $\varphi^{(1)}$ — потенциалы магнитного поля в областях $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$ соответственно, Δ — двумерный оператор Лапласа в плоскости $x_1 x_2$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/А}^2$ — магнитная постоянная.

Если материал слоя является идеальным проводником, то вместо (1.4) получают следующие поверхностные условия при $x_2 = 0$:

$$\mu_1 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} + \beta_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \mu_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \beta_{12} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} - \mu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (1.6)$$

Кроме условий (1.4), (1.5) или (1.6), должны удовлетворяться также условия затухания возмущений на бесконечности.

2. Рассмотрим задачу (1.1) — (1.5), описывающую распространение модифицированной магнитоупругой волны Лява в случае диэлектрического слоя.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что следующие функции являются решениями уравнений (1.1) — (1.3):

$$u_1^{(2)} = A_1 \exp(-\alpha x_2) \exp(i(kx_1 - \omega t)), \quad \varphi^{(1)} = A_2 \exp(kx_2) \exp(i(kx_1 - \omega t))$$

$$\varphi = \left(\frac{\beta_{12}}{\mu_0 \mu} \exp(-\alpha x_2) + \varphi_0 \exp(-kx_1) \right) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \quad (2.1)$$

$$u_1^{(1)} = \exp(i(kx_1 - \omega t)) \times \begin{cases} B_1 \exp(\alpha_1 x_2) + B_2 \exp(-\alpha_1 x_2) & \text{при } x_2 < 0 \\ c_1 \cos \alpha_2 x_2 + c_2 \sin \alpha_2 x_2 & \text{при } x_2 > 0 \end{cases}$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , c_1 , c_2 и φ_0 — произвольные постоянные,

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad v^2 = \frac{v_1^2}{\rho_1}, \quad \alpha = k \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right)^{1/2}$$

$$s = v_n \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad v_n^2 = \frac{v_2^2}{\rho_2}, \quad \alpha^2 = \beta_{12}^2 (\mu_0^2 \mu_1^2)^{-1} \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = k \left(1 - \frac{v^2}{v_c^2} \right)^{1/2}, \quad \alpha_2 = k \left(\frac{v^2}{v_c^2} - 1 \right)^{1/2}$$

В (2.2) v — фазовая скорость рассматриваемой магнитоупругой волны, k — волновое число, ω — частота колебаний, v_1 и v_n — соответственно скорости объемных чисто упругих сдвиговых волн в слое и в полупространстве, s — скорость объемных магнитоупругих сдвиговых волн в магнитоэлектрической среде.

Решение (2.1) соответствует магнитоупругой волне Лява, зату-

хающей внутри полупространства, если $\alpha > 0$, то есть скорость этой волны должна удовлетворять условию

$$v < v_r \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (2.3)$$

Удовлетворяя поверхностным условиям (1.4) и (1.5), для определения произвольных постоянных получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия совместности этой системы, в зависимости от отношений между v и v_r , получим следующие характеристические уравнения для определения скорости магнитоупругой волны Лива:

при $v > v_r$

$$\left(\mu_1 \gamma_1 h + \frac{\mu_2}{\mu_1 \gamma_1} \left[\frac{\alpha^2 h}{\mu_r + 1} - (1 + \alpha^2) \alpha \right] \right) = 0 \quad (2.4)$$

при $v < v_r$

$$\left(\mu_1 \gamma_1 h + \frac{\mu_2}{\mu_1 \gamma_1} \left[(1 + \alpha^2) \alpha - \frac{h \alpha^2}{\mu_r + 1} \right] \right) = 0 \quad (2.5)$$

Рассматривая уравнения (2.4) и (2.5), можно сделать следующие выводы: а) возможность возбуждения волн Лива с фазовой скоростью, меньшей скорости объемных сдвиговых волн в слое ($v < v_r$), обусловлена исключительно учетом магнитострикционного эффекта, б) этим же эффектом обусловлена также возможность существования волны Лива со скоростью, большей скорости объемных сдвиговых волн в подложке ($v > v_r$), в) фазовая скорость модифицированной магнитоупругой волны Лива зависит от частоты колебаний и поэтому для этих волн, как и для чисто упругих волн Лива, имеет место дисперсия.

При отсутствии слоя ($h = 0$) рассматриваемая задача, если она имеет нетривиальное решение, описывает распространение сдвиговой поверхностной магнитоупругой волны в магнитострикционном полупространстве со свободной границей. Эта задача в такой постановке решена в работах [7, 8], где показано, что благодаря магнитострикции в полупространстве существует сдвиговая поверхностная магнитоупругая волна. Этот результат непосредственно следует также из (2.4) при $h = 0$, причем в силу (2.2), для определения фазовой скорости поверхностной волны получается следующая формула:

$$v = v_r \sqrt{1 + \alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{(\mu_r + 1)^2 (1 + \alpha^2)^2} \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

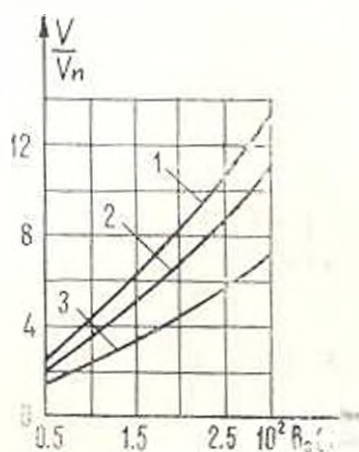
показывающая, что условие (2.3) существования поверхностной волны выполняется. Из (2.6) видно, что волна распространяется без дисперсии.

Из (2.4) при $h = 0$ легко получить формулу, определяющую глубину проникания $\gamma = \alpha^{-1}$ поверхностной волны в полупространство

$$\gamma = \frac{(\mu_r + 1)(1 + \alpha^2)}{k \alpha^2} \quad (2.7)$$

Формула (2.7) показывает, что глубина проникания пропорцио-

нальна длине волны $\lambda = 2\pi/k$ и уменьшается с увеличением напряженности внешнего (поляризующего) магнитного поля. Следовательно, огуговая локализация волны у поверхности среды происходит в случае коротких волн, и это явление усиливается с увеличением интенсивности магнитного поля.



Фиг. 1.

Зависимость фазовой скорости поверхностной волны от величины магнитной индукции $B_0 = \mu_0 H_0$ для различных магнитоупругих материалов, у которых $e_2 \approx -0,5 e_1$, показана на фиг. 1 (построено на основе (2.6)). Кривая 1 на этой фигуре соответствует материалу феррит Ф-107, у которого $\mu_2 = 0,66 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 30$, $e_1 = 1,18$ Н/А², кривая 2 — материалу ферросплав 7А2 ($\mu_2 = 0,63 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 20$, $e_1 = 0,68$ Н/А²), кривая 3 — материалу Никель НН2Т ($\mu_2 = 0,84 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 35$, $e_1 = 0,69$ Н/А²). Приведенные кривые показывают, что при магнитной индукции порядка 0,03 Тл в полупространстве можно возбудить поверхностную волну, скорость которой на порядок выше скорости чисто упругих объемных сдвиговых волн для соответствующих материалов.

3. Рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6), описывающую распространение магнитоупругой волны Лява в случае идеально проводящего слоя. Эту задачу, путем исключения функции φ , можно свести к решению уравнения

$$\mu_2 (1 + x^2) \Delta u_3^{(2)} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

в области полупространства ($x_2 > 0$) и уравнения

$$\mu_1 \Delta u_3^{(1)} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

в области слоя ($-h < x_2 < 0$) при следующих поверхностных условиях:

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = -h \quad (3.3)$$

$$\mu_2(1+x^2) \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2} = \mu_1 \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \quad \text{при} \quad x_1 = 0$$

Рассматривая (3.1) — (3.3), легко заметить, что задача о магнитоупругих волнах Лява в случае идеально проводящего слоя сводится к чисто упругой классической задаче волн Лява лишь с той разницей, что модуль сдвига μ_2 материала полупространства нужно заменить величиной $\mu_2(1+x^2)$. Следовательно, используя известные результаты о чисто упругих волнах Лява [9], заключаем, что магнитоупругие волны Лява в рассматриваемом случае существуют при

$$v_i < v < v_n \sqrt{1+x^2} \quad (3.4)$$

а их скорость распространения v определяется из решения следующего характеристического уравнения:

$$\operatorname{tg} \left(kh \sqrt{\frac{v^2}{v_n^2} - 1} \right) = \frac{\mu_2(1+x^2)}{\mu_1} \left| 1 - \frac{v^2}{v_n^2(1+x^2)} \right|^{1/2} \left(\frac{v^2}{v_c^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.5)$$

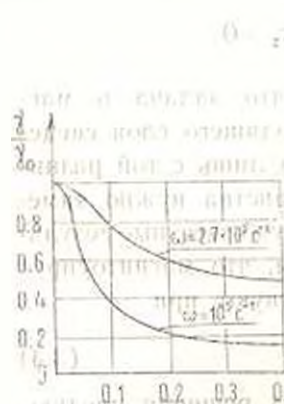
Обеудим предельный случай, когда $h \rightarrow 0$, то есть рассмотрим случай, когда поверхность магнитоупругого полупространства покрыта тонким идеально проводящим слоем (металлизированная поверхность) такой малой толщины, что вносимой слоем поправкой изменения упругих свойств системы можно пренебречь. Тогда, как видно из (3.1) и (3.3), рассматриваемая задача сводится к решению уравнения (3.1) с граничным условием $\partial u_3^{(1)} / \partial x_2 = 0$ при $x_2 = 0$. А эта задача имеет только нулевое решение ($u_3^{(2)} = 0$), означающее невозможность возбуждения сдвиговой поверхностной волны.

Таким образом: 1) если поверхность магнитоупругого полупространства свободна, то в ней можно возбудить сдвиговую поверхностную волну (обусловленную магнитоупругим эффектом) с достаточно высокой скоростью распространения (за счет внешнего магнитного поля); 2) если же поверхность полупространства металлизирована, то в ней, независимо от величины напряженности магнитного поля, не могут существовать сдвиговые поверхностные волны.

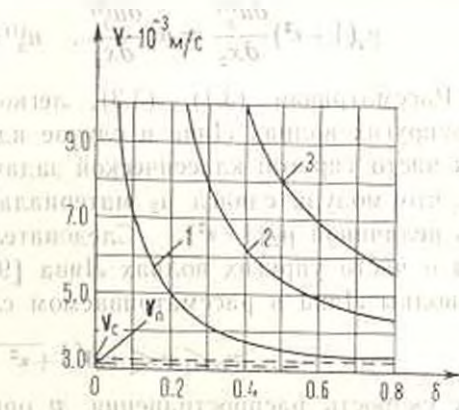
Вернемся к случаю $h \neq 0$ и произведем вычисления по уравнению (3.5) для слоя из дюралюминия и полупространства из феррита Ф-107 при $h = 0,1$ м. Результаты подсчета приведены на фиг. 2, который иллюстрирует зависимость глубины проникания $\gamma = \alpha^{-1}$ волны Лява в полупространство от напряженности магнитного поля при различных частотах колебаний. Здесь γ — глубина проникания в отсутствие магнитного поля. Фиг. 2 показывает, что присутствие магнитного поля существенно уменьшает глубину проникания, и это влияние магнитного поля усиливается с уменьшением частоты колебаний.

На фиг. 3 показана зависимость фазовой скорости магнитоупру-

гой волны Ляна от безразмерной толщины слоя $\delta = a/\lambda$ (λ — длина волны) для первых трех форм колебаний. Расчеты произведены на основе уравнения (3.3) в случае слоя из дюралюминия и полупростран-



Фиг. 2



Фиг. 3

ства из никели H112T при $B_0 = 10^{-2}$ Тл. Отметим, что для выбранного сочетания материалов слоя и полупространства чисто упругие ($H_0 = 0$) волны Ляна не могут распространяться ($\tau_c > \tau_n$). Из фиг. 3 видно, что с уменьшением длины волны ее скорость уменьшается, остается больше, чем скорости чисто упругих сдвиговых объемных волн в материалах слоя и полупространства.

LOVE WAVES IN MAGNETOSTRICTION MEDIA

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOTAN, L. A. SANOYAN

(ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ)

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՏՐԻԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՏԱՆ, Լ. Ա. ՍԱՆՈՅԱՆ

Ա ռ յ ի ն ի մ

Գիտարկված է շերտավոր նյութակարգ, բաղկացած մագնիսատորիկցիոն կիրառարածույթային և առաձգական դիէլեկտրիկ շերտից: Յույց է արված, որ մագնիսատորիկցիոն էֆեկտի հաշվառմամբ նարավոր է առաջացնել մակերևութային ալիքներ: Այն դեպքում, երբ շերտը իդեալական հաղորդիչ է, գիտարկվող խնդիրը բերվում է կլավի ալիքային դասական առաձգական խնդրին: Կիրառարածույթյան մեծացացումը մակերևութի դեպքում մակերևութային ալիքների դրդումը անհար է:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавиняг А. А., Андрияш Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М. Наука, 1982. 624 с.

2. Власов К. В. Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитоупругих) сред.—Изв. АН СССР, сер. физическая, 1957, т. 21, № 8, с. 1140—1148.
3. Ахизер А. И., Баряхтар В. Г., Цейтлинский С. В. Спиральные волны.—М.: Наука, 1967. 368 с.
4. Brown W. F. Theory of magnetoelastic effects in ferromagnetism. *Journal of Appl. Phys.*, vol. 36. 1965.
5. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.—М.: Гостехиздат, 1913. 212 с.
6. Raychaudhuri G. P., Danyan Z. N., Sanyal I. A. Magnetoelastic waves in piezomagnetic media. — Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures. Proceedings of the IUTAM Symposium, 1936, Tokyo, Japan, North-Holland, 1967, p.p. 321—328.
7. Parash J. P. Magnetoelastic surface wave in ferrites. — *Electron. Lett.*, vol. 5, № 11 1969, pp. 322—323.
8. Parash J. P. Propagation characteristics of magnetoelastic surface wave. *Electronics Letters*, vol. 5, № 21, 1969, pp. 540—541.
9. Цопацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.

Ереванский государственный университет
Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
9.III.1989

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГИБКОГО ТОКОНЕСУЩЕГО СТЕРЖНЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГАЛОЯН В. Ц., КАЗАРЯН К. Б.

В последние годы во многих работах [1, 2] рассматривается вопрос возможности возникновения хаотического движения в детерминистических динамических системах. Магнитоупругая система, описанная в работе [2], одна из немногих, где это явление исследовано как теоретически, так и экспериментально.

В настоящей работе с этой точки зрения исследуется другая магнитоупругая система, а именно, сжатый упругий гибкий стержень, по которому течет переменный ток и который находится во внешнем постоянном магнитном поле. С помощью методов качественной теории динамических систем показано, что в этом случае можно указать область изменения параметров, для которой детерминистическое нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее систему, допускает решение в виде хаотического движения (странного аттрактора).

§ 1. Основное уравнение

Рассмотрим динамическое нелинейное поведение сжатого упругого токонесущего стержня кругового сечения во внешнем постоянном магнитном поле. Считается, что концы стержня закреплены на шарнирах в неподвижных опорах так, что не могут испытывать продольного смещения. Предполагается также, что ток в стержне достаточно слаб, что позволяет пренебречь Джоулевым эффектом и самовоздействием [3]. У одного из концов стержня, в точке, сколь угодно близкой к неподвижному шарниру, действует «мертвая» механическая сила.

Введем систему координат с осью x вдоль оси стержня и осью z по направлению, обратной вектору магнитной индукции. Вектор I протекающего по стержню электрического тока в деформированном состоянии стержня представим следующим образом:

$$I = I_0 \cos(\omega t) \tau$$

где $\tau(x, y)$ — единичный касательный вектор в точке (x, y) с проекциями dx/dl , dy/dl (предполагается, что деформация стержня происходит в плоскости x, y), ω — частота заданного переменного тока, а I_0 — его амплитуда, l — координата длины дуги осевой линии стержня.

На единичную длину стержня действует сила Ампера

$$\vec{K}_1 = \vec{j} \times \vec{B}$$

и демпфирующая сила вязкого трения

$$\vec{K}_2 = -k y \vec{i}_y$$

где k — коэффициент демпфирования.

В силу того, что концы стержня закреплены, на концах стержня возникает сила Q , обусловленная его удлинением. В приближении закона Гука она имеет вид $Q = -ES\Delta L/L$ (E — модуль Юнга, ΔL — удлинение, S — площадь поперечного сечения, L — расстояние между концами стержня). В принятой системе координат

$$Q = -\frac{ES}{L} \int_0^L (\sqrt{1+y'^2} - 1) dx$$

где штрих означает дифференцирование по координате x .

Для описания этой системы имеем следующие уравнения [4, 5]. Уравнение движения стержня без учета инерции вращения имеет вид

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \rho S \vec{r} \quad (1.1)$$

где $\vec{F}$ — сила внутренних напряжений, dl — элемент длины, ρ — удельная плотность вещества. Точка сверху означает дифференцирование по времени.

Имеем также уравнение сохранения момента в виде

$$\frac{d\vec{M}}{dl} = \vec{F} \times \vec{z} \quad (1.2)$$

где $\vec{M} = EI(\vec{z} \times d\vec{z}/dl)$ — момент сил внутренних напряжений, $I = \pi R^4/4$ — момент инерции круглого стержня с радиусом R .

С помощью (1.1) и (1.2) можно получить уравнение в частных производных для определения неизвестной функции поперечного перемещения $y = y(x, t)$. Для этого запишем уравнение (1.1) в проекциях на оси x и y , а уравнение (1.2) — в проекции на ось z .

$$F_x - J_0 B \cos(\omega t) y' = \rho S x (1 + y'^2)^{1/2} \quad (1.3)$$

$$F_y + J_0 B \cos(\omega t) = (\rho S \ddot{y} + k y) (1 + y'^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$F_x y' - F_y = EI \{ y'' (1 + y'^2)^{-3/2} \} \quad (1.5)$$

Допустим, что продольная сжимаемость мала по сравнению с деформациями изгиба стержня, то есть рассмотрим поперечное движение стержня. Тогда, из уравнения (1.3) получим после интегрирования

$$F_x = J_0 B \cos(\omega t) y + C$$

где постоянная интегрирования C — компонента F_x при $y=0$ и, следовательно, равна $-(P+Q)$. Отсюда получаем следующее выражение:

$$F_x = J_0 B \cos(\omega t) - (P+Q)$$

Исключим из уравнений (1.4) и (1.5) величину F_y , используя полученное для F_x выражение. Продифференцируя (1.5) и подставляя F_x из (1.4) окончательно получим

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + EI(1+y'^2)^{-1/2} \{ y''(1+y'^2)^{-3/2} \}'' + (P+Q)(1+y'^2)^{-1/2} - J_0 B \cos(\omega t)(1+y'^2)^{-1/2} [1 + (yy')'] = 0 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) — основное уравнение задачи. В безразмерной форме оно имеет вид

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + a_1(1+y'^2)^{-1/2} \{ y''(1+y'^2)^{-3/2} \}'' + a_2 y''(1+y'^2)^{-1/2} - a_3 \cos(\Omega t)(1+y'^2)^{-1/2} [1 + (yy')'] - a_4 Q y'(1+y'^2)^{-1/2} = 0 \quad (1.7)$$

где

$$Q = \int_0^1 \{ (1+y'^2)^{1/2} - 1 \} dx, \quad \alpha = \frac{R}{\rho \omega_0^2 L^3 S}, \quad a_1 = \frac{EI}{\rho \omega_0^2 L^4 S}$$

$$a_2 = \frac{J_0 B}{\rho \omega_0^2 L^3 S}, \quad a_3 = \frac{P}{\rho \omega_0^2 L^3 S}, \quad a_4 = \frac{F}{\rho \omega_0^2 L^4 S}$$

При получении (1.7) были введены безразмерные переменные $x = (x/L)$, $y = (y/L)$, $t = (\omega_0 t)$, $\Omega = \omega/\omega_0$, где $\omega_0 = (\pi^2 EI / \rho L^4)^{1/2}$ — частота собственных колебаний в линейном приближении.

Уравнение (1.7) является уравнением в частных производных. Для получения конечномерной системы используем метод Галеркина, применяемый также в работах [1, 2] при исследовании хаотического движения. Ограничиваясь одномерным приближением, имеем

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi} A(t) \sin(\pi x)$$

Проведя стандартные преобразования, получим, что в кубическом по амплитуде A приближении уравнение колебаний стержня имеет вид

$$A + \alpha \dot{A} + \gamma A + \beta A^3 = 3 \cos(\Omega t) \left(1 - \frac{1}{2} A^2 \right) \quad (1.8)$$

где

$$\gamma = \frac{\pi^2}{\rho \omega_0^2 L^2 S} \left(P - \frac{\pi^2 EI}{L^2} \right), \quad \beta = \frac{\pi^2}{2 \rho \omega_0^2 L^2 S} \left\{ P/4 - \frac{\pi^2 EI}{L^2} + \frac{ES}{2} \right\}, \quad \alpha = 4a_2$$

§ 2. Качественное исследование основного уравнения

В дальнейшем рассматривается уравнение (1.8), являющееся уравнением типа Дюффинга. В случае, когда $P > P^*$, где $P^* = \pi^2 E / l^2$ — эйлерова критическая сила, имеем, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Для качественного исследования этого уравнения применим метод, основанный в работе [6] и подробно разработанный для классического уравнения Дюффинга в работе [1]. Он позволяет указать те области изменения параметров, где уравнение допускает хаотическое движение в качестве решения, исследовать структуру соответствующих множеств в фазовом пространстве и т. д. При этом уравнение (1.8) мы будем рассматривать как неавтономное возмущение гамильтоновой системы, которое сохраняет некоторые черты невозмущенной системы. Перепишем уравнение (1.8) в виде двух уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\gamma x_1 - \delta x_1^3 + \varepsilon \left(x_1 \cos(\Omega t) \left(1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) - x_1 x_2 \right) \quad (2.1)$$

где ε — малый параметр, а $\gamma x_1 - \delta x_1^3 = \varphi$.

Далее, используя свойства (2.1) и применяя теорему о центральном многообразии, рассматриваются малые возмущения и в конце доказывается существование гомоклинической структуры («подковы» Смейла [7]) и наличие в ней странного аттрактора.

Невозмущенная система

$$x_1 = x_2 = f(x_1, x_2), \quad x_2 = \gamma x_1 - \delta x_1^3 = g(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

имеет три неподвижные точки с координатами $(0, 0)$, $(+(\gamma/\delta)^{1/2}, 0)$, $(-(\gamma/\delta)^{1/2}, 0)$, первая из которых — неустойчивая точка типа седла, а две другие — центры. Точка $(0, 0)$ имеет гомоклиническую орбиту $x_0 = (2\gamma/\delta)^{1/2} \operatorname{sech}(\gamma^{1/2} t)$ [1]. Легко проверить, что седло $(0, 0)$ простое, то есть, что величина

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) = -\delta + 3\delta x_1^2$$

отрицательна в точке $(0, 0)$. В этом случае, согласно теореме Пуанкаре [6], в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ существует периодическое решение, которое стремится к седловой точке при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для определения параметров этого движения используем теорему усреднения в форме, предложенной в [8].

Произведем замену переменных в (2.1), введя новые переменные z_1, z_2

$$z_1 = x_1 \cos(\Omega t) - \frac{x_2}{\Omega} \sin(\Omega t), \quad z_2 = -x_1 \sin(\Omega t) - \frac{x_2}{\Omega} \cos(\Omega t)$$

Согласно теореме о среднем, заменяя первые части в полученных уравнениях на их усредненные по периоду величины и перейдя к полярным координатам (z, θ) , получаем следующие окончательные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{1}{2\omega} \left[\alpha_1 \omega z - \frac{1}{8} \beta z^2 \sin \Theta + \beta \sin \Theta \right] \\ \dot{\Theta} &= -\frac{1}{2\omega z} \left[(\gamma_2 + \omega^2) z + \frac{3}{4} z^3 + \frac{3}{8} \beta z^2 \cos \Theta - \beta \cos \Theta \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неподвижные точки z^* , Θ^* этой системы уравнений соответствуют периодическому решению уравнения (2.1) вида $z^* \cos(\Omega t + \Theta^*)$. При этом амплитуда z^* является корнем алгебраического уравнения

$$z^2 \left\{ \left(\frac{\alpha \omega}{(1/8)z^2 - 1} \right)^2 + \left(\frac{(3/4)\beta z^2 + \gamma + \Omega^2}{(3/8)z^2 - 1} \right)^2 \right\} = 3^2$$

а фаза Θ^* определяется из выражения

$$\sin \Theta^* = \frac{\alpha \Theta}{\beta} \frac{z^*}{(1/8)z^{*2} - 1}$$

при соблюдении порогового условия $z^* < \frac{4\alpha\Omega}{3} + \left(\frac{16\alpha^2\Omega^2}{\beta^2} + 8 \right)^{1/2}$.

При увеличении параметров α , β периодическое движение разрушается. Но согласно теореме о центральном многообразии [9] при не слишком больших значениях параметров сохраняются характерные черты фазового портрета около гиперболических точек. В качестве невозмущенной в этом случае выберем систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + \gamma x_1 - \beta x_1^2 \quad (2.4)$$

неподвижные точки которой при $\gamma \neq 0$, $\alpha^2 < 8\gamma$ являются гиперболическими — седло и фокусы.

Легко можно доказать, что фазовое пространство системы (2.1) содержит притягивающее множество (аттрактор). Для этого достаточно использовать те же функции Ляпунова, что и в работе [8] и определить их производные на траекториях системы. Это притягивающее множество сохраняет характерные черты системы (2.4). При этом периодической (при малых ε) орбите γ_ε соответствуют два многообразия: неустойчивое $W(\gamma_\varepsilon)$ и устойчивое — $W^s(\gamma_\varepsilon)$. Для анализа возможных случаев расположения этих многообразий, которые сохраняются и при $\varepsilon \neq 0$, используем функцию Мельникова, введенную в работе [6]. В нашем случае ее можно вычислить, используя выражение

$$\Delta_1(t_0) = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \left(\beta_1 \cos(\Omega t) \left(1 - \frac{1}{2} x^2 \right) - \beta_2 \dot{x} \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

где $x \equiv x_0(t - t_0) = (2\gamma/\alpha)^{1/2} \operatorname{sech}(\gamma^{1/2}(t - t_0))$. Произведя соответствующие вычисления, получим

$$\Delta_1(t_0) = \left(\frac{2\gamma}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left[\pi \beta (\Omega \gamma^{1/2}) \frac{\Omega^2 + \gamma - 6\beta}{6\beta} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \Omega \gamma^{-1/2}}{2} \right) \sin(\Omega t_0) + \right.$$

$$+ \frac{2}{3} \alpha \gamma \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{1/2} \}$$

Согласно [6], если функция Мельникова имеет простые нули, многообразия $W^s(\gamma_+)$ и $W^u(\gamma_-)$ пересекаются трансверсально. Но, так как функция $\Delta_c(t_0)$ — периодическая, в этом случае имеет гомоклиническую структуру в притягивающем множестве и, следовательно, странный аттрактор [8].

Используя (2.5), можно получить неравенство, при выполнении которого $\Delta_c(t_0)$ имеет нули. Это условие имеет вид

$$\beta \geq \frac{4\alpha\lambda\gamma}{\pi\Omega} \left(\frac{2\gamma}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{\cosh \left(\frac{(-\Omega\gamma - 1/2)}{2} \right)}{|\Omega^2 + \gamma - 6\gamma|} \quad (2.6)$$

Для тонких стержней ($R/L \ll 1$) в пределах его прочности имеем $\beta \gg 1$. В этом случае имеем следующее выражение для критических значений индукции магнитного поля B^* и амплитуды тока J_0^* , превышение которых может привести к хаотическому движению стержня:

$$J_0^* B^* = \frac{1}{3\pi^2} \frac{\alpha \rho S L^2 \omega_0^3}{\Omega} (a-1)^{3/2} \left(\frac{2\rho}{E} \right)^{1/2}$$

где $a = P/P^*$. Вычислим область критических значений внешней силы для медного стержня кругового сечения с следующими значениями параметров: $L=0,5$ м, $R=0,01$ м, $\omega=50$ Гц, $\alpha=10^{-2}$. В этом случае для $3,8 \text{ Н} < P < 15,4 \text{ Н}$ сила Ампера $J_0^* B^*$ принимает значения от 14 Н/м до $72,8 \text{ Н/м}$; в частности, при $J=50 \text{ А}$, $B=1 \text{ Тл}$ условие (2.6) выполняется.

Полученные результаты позволяют утверждать, что описанная магнитомеханическая система, движение которой подчиняется детерминистическому дифференциальному уравнению, допускает как периодическое, так и аperiodическое хаотическое движение.

Авторы выражают благодарность участникам семинара «Волновые процессы» Института механики АН Арм. ССР за ценные советы при обсуждении работы.

DYNAMIC CHAOTIC BEHAVIOUR OF FLEXIBLE CURRENT-CARRYING ROD IN A MAGNETIC FIELD

V. TS. GALOJIAN, K. B. KAZARIAN

Վ. Յ. ԴԱՆՈՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

U. ni qhi n qhi n i ef

Դիտարկվում է մեխանիկական ուժով սեղմված, չկուն առանկալան ձողի ոչ զծային տատանումների խնդիրը, որում անցնում է էլեկտրական հոսանք արտաքին մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

Դինամիկական համակարգերի տեսության մեթոդների օգնությամբ ցույց է տրված, որ ձողի վարքը նկարագրող դետերմինիստական ոչ կծային դիֆերենցիալ համասարտվորումն օպտսիկ շարժման առարկի լուծումն (տարօրինակի տարակարգ)։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Marsden J. E. Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics. — Philadelphia SIAM, 1981. 97 p.
2. Moon F. C., Holmes P. J. A magnetoelastic strange attractor. — J. Sound Vibr., 1979, v. 65, № 3.
3. Chattopadhyay S., Moon F. C. Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current. — J. Appl. Mech. 1975, v. 42, № 4.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.—М.: Наука, 1987. 248 с.
5. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
6. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях.— Тр. Московского мат. общества, т. 12, 1963.
7. Смейл С. Дифференциальные динамические системы. УММ, 1970, т. 25, вып. 1.
8. Holmes P. J. A nonlinear oscillator with a strange attractor. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, v. 292A, № 1394, 1979.
9. Странные аттракторы, сб. ст., пер. с англ., М.: Мир, 1981. 197 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 14.01.1984

УДК 539.534.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

ПАРТОН В. З., ФИЛЫПТИНСКИЙ М. Л.

Динамические задачи теории упругости для изотропной среды с туннельными разрезами рассматривались, например, в [1—3]. Ниже в условиях плоской деформации изучается динамическая задача о взаимодействии трещин в неограниченной пьезоэлектрической среде. Соответствующая краевая задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно амплитуд скачков перемещений на разрезах. Проводится асимптотический анализ механического поля в окрестности вершин разрезов. Коэффициенты интенсивности получены в виде функционалов, определенных на решениях интегральных уравнений краевой задачи.

Предлагается схема приближенного численного решения системы интегральных уравнений для тех случаев, когда в теле имеется несколько разрезов. Приводятся результаты расчетов.

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $ox_1x_2x_3$ (x_3 — ось симметрии бесконечного порядка) неограниченную пьезоэлектрическую среду класса *бтт*, ослабленную туннельными вдоль оси ox_3 разрезами L_j ($j=1,2,\dots,k$). Пусть из бесконечности на разрезы падают плоские монохроматические волны, тип которых будет указан ниже, а на берегах L_j возможно действие постоянной вдоль оси ox_3 нагрузки $X_k(x_1, x_2, t) = \text{Re}[P_k \exp(-i\omega t)]$ ($k=1,2$). Будем предполагать, что P_k и кривизны контуров L_j — функции класса H [4]. Задача заключается в определении параметров разрушения среды с трещинами.

Полная система уравнений имеет вид:

уравнения состояния пьезосреды [5]

$$\sigma_{11} = c_{11}^0 \varepsilon_1 + c_{12}^0 \varepsilon_2 - h_{31} D_3, \quad \sigma_{22} = c_{12}^0 \varepsilon_1 + c_{11}^0 \varepsilon_2 - h_{31} D_3, \quad (1.1)$$

$$\tau_{12} = (c_{11}^0 - c_{12}^0) \varepsilon_{12}, \quad E_3 = -h_{31}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \beta_{33}^0 D_3$$

уравнения движения (суммирование по j)

$$\partial_j \tau_{ji} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.2)$$

уравнения Максвелла [6].

$$\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = \frac{\partial D_3}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\partial_2 E_3 = -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t}, \quad \partial_1 E_3 = -\mu \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 = 0$$

В (1.1)–(1.3) σ_{ij} , ϵ_{ij} , H_j , E_j , D_3 — соответственно механические напряжения и деформации, магнитная и электрическая напряженности и электрическое смещение, c_{ij}^E , h_{31} и β_{33}^s — соответственно, модули упругости, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая, „непроницаемость“, μ — магнитная проницаемость среды.

К системе (1.1)–(1.3) необходимо приписать соответствующие граничные условия.

Для решения поставленной задачи введем векторный потенциал $H = \text{rot} A$ (здесь и ниже берутся амплитудные значения соответствующих величин, $A = (0, 0, A_3)$). В этом случае последнее уравнение (1.3) выполняется автоматически, а остальные уравнения (1.3) с учетом (1.1) дают

$$\nabla^2 A_3 = i\omega D_3, \quad i\omega \epsilon A_3 + h_{31} \text{div} U - \beta_{33}^s = C \quad (1.5)$$

Здесь U — амплитудное значение вектора перемещения, C — константа, которая в дальнейшем в соответствии с условиями излучения полагается равной нулю.

Из (1.5) получаем уравнение для векторного потенциала

$$\nabla^2 A_3 + k^2 A_3 = \frac{i\omega h_{31}}{\beta_{33}^s} \text{div} U, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \left(\frac{\beta_{33}^s}{\mu} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

Величина c , имеющая смысл скорости распространения света в пьезосреде, существенно больше скорости распространения механических возмущений. Например, для пьезокерамики *PZT-4* $c \approx 1.2 \times 10^8$ м/с. Поэтому в дальнейшем, предполагая, что длина разреза много меньше электромагнитной волны, член $\omega^2 A_3 / c^2$ опускаем. В этом случае из (1.5), (1.6) находим

$$D_3 = \frac{h_{31}}{\beta_{33}^s} \text{div} U \quad (1.7)$$

Подставляя в уравнения движения (1.2) выражения для σ_{ij} из (1.1) и учитывая (1.7) и соотношения Коши, приходим к уравнению относительно амплитуды вектора перемещений

$$\nabla^2 U + \sigma \text{grad} \text{div} U + \frac{\sigma}{\gamma_1^2} U = 0 \quad (1.8)$$

$$\sigma = \frac{c_{11}^* + c_{12}^*}{c_{11}^* - c_{12}^*} = \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_1^2} - 1, \quad c_{11}^* = c_{11}^D - c_{12}^D$$

$$c_{12}^* = c_{12}^D - x_0^2, \quad \gamma_i = \frac{\omega}{c_i} \quad (i=1,2)$$

$$c_1 = \left(\frac{c_{11}^*}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{c_{11}^* - c_{12}^*}{2\rho} \right)^{1/2}, \quad x_0^2 = \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^s}$$

Здесь $\gamma_i (i=1,2)$ — волновые числа, c_i — скорости распространения соответствующих механических волн, величина x_0^2 характеризует пьезоэлектрический эффект.

Таким образом, задача об определении механических перемещений сводится к интегрированию уравнений Ламе для некоторой фиктивной изотропной среды с параметрами c_{11}^* , c_{12}^* при обычных краевых условиях на берегах разреза по напряжениям.

При возбуждении плоских волн в неограниченной пьезоэлектрике класса 6mm сдвиговая механическая волна не вызывает сопряженной электромагнитной волны. Однако, чистой волны расширения и чистой электромагнитной волны, вообще говоря, не существует.

Дисперсионное уравнение, соответствующее монохроматической волне, движущейся под углом β к оси x_1 : $u_k = U_k \exp[-i(\omega t + i x \times \times n)]$ ($k=1,2$), $a_j = A_j \exp[-i(\omega t + i x \cdot n)]$, $x = (x_1, x_2)$, $n = (\cos \beta, \sin \beta)$ имеет вид

$$(\lambda^2 - \beta_1^2)(\lambda^2 - \beta_2^2)(\lambda^2 - \gamma_2^2) = 0 \quad (1.9)$$

$$2\beta_{1,2} = \sqrt{(\gamma_1 \pm k)^2 + x_0^2} \pm \sqrt{(\gamma_1 - k)^2 + x_0^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{x_0^2 k^2}{c_{11}^D - x_0^2}$$

Соответственно получаем связь между амплитудами U_k , A_j : при $\lambda = \beta_1$

$$U_1 = C_1 A_2 \cos \beta, \quad U_2 = C_1 A_2 \sin \beta \quad (1.10)$$

$$C_1 = \frac{k^2 h_{31} \beta_1}{\omega(\gamma_1^2 - \beta_1^2)(c_{11}^D - x_0^2)}$$

при $\lambda = \beta_2$

$$U_1 = C_2 A_2 \cos \beta, \quad U_2 = C_2 A_2 \sin \beta \quad (1.11)$$

$$C_2 = \frac{k^2 h_{31} \beta_1}{\omega(\gamma_1^2 - \beta_2^2)(c_{11}^D - x_0^2)}$$

Так как $k \ll \gamma_1$, заключаем из (1.9) $\beta_1 = \gamma_1 + O(k^2)$, $\beta_2 = k + O(k^3)$. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении механических волновых полей в пьезоэлектрике будем считать, что из бесконечности падает P или SV волна. Родственная задача для неограниченной среды с криволинейными разрезами рассматривалась в [3].

Ниже указывается процедура, позволяющая последовательно уменьшать связность области, что дает возможность исследовать взаимодействие нескольких разрезов в среде.

2. Сведение кривой задачи к интегральным уравнениям. Привле-

кая представления решений [3] для изотропной среды, приходим к системе интегральных уравнений для пьезоэлектрической среды с разрезами

$$\sum_{m=1}^2 \int_L \left[|R'_m(\zeta)| G_{mn}(\zeta, \zeta_0) + R_m(\zeta) R'_{mn}(\zeta, \zeta_0) \right] ds = N_n(\zeta_0) \quad (n=1,2)$$

$$G_{nm} = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} + \frac{\pi i}{2} F_{21} \sin(\psi_0 - \alpha_0) +$$

$$+ \frac{(-1)^n \gamma_{12}^2}{8} \Phi_{11} h_{1m} \left(3 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} - 2 \bar{h}_{1m}^2 \right) \quad (2.1)$$

$$G_{nn} = \frac{(-1)^n i h_{2n} (1 + h_{1n}^2)}{2r} - \frac{(-1)^{n+1}}{4} h_{2n} \times$$

$$\times \left[F_{33} + F_{33} h_{1m}^2 - \frac{\gamma_{12}^2}{2} \left(3 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} \right) \Phi_{11} \right] (m \neq n)$$

$$g_{mm} = \frac{\pi i \gamma_{12}^2 h_{1m}}{16 h_{2m}} \left\{ 2 \gamma_{12}^2 \Phi_{00} - \left(1 + \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} \right) \Phi_{20} + \right.$$

$$+ \left. \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} \right) \Phi_{22} h_{2m}^2 - \frac{2 \bar{h}_{1m}^2 h_{2m}^2}{\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^2} [(\gamma_{12}^2 + \gamma_{11}^2) \Phi_{20} - 2 \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2 \Phi_{00}] \right\}$$

$$g_{mn} = \frac{\pi i \gamma_{12}^2 h_{1m}}{16 h_{2m}} \left[\left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} \right) \Phi_{22} h_{2m}^2 - 2 \Phi_{22} h_{1m}^2 - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2} \right) \Phi_{20} + 2 \gamma_{12}^2 \Phi_{00} \right] (m \neq n)$$

$$\Phi_{nn} = \frac{\gamma_{12}^2 H_n^{(1)}(\gamma_{12} r) - \gamma_{11}^2 H_n^{(1)}(\gamma_{11} r)}{\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^2}, \quad F_{33} = \Phi_{33} + \frac{2i}{\pi r}$$

$$h_{11} = \bar{h}_{12} = \exp[i(\psi_0 - \alpha_0)], \quad h_{21} = \bar{h}_{22} = \exp[i(\psi - \alpha_0)]$$

$$h_{22} = \bar{h}_{31} = \exp[i(\psi_0 + \alpha_0)]$$

$$R'_m = \frac{dR_m}{ds}, \quad R_m = \Delta U_1 - (-1)^n i \Delta U_2, \quad r = |\zeta - \bar{\zeta}_0|$$

$$\zeta = \xi_1 + i \xi_2, \quad \bar{\zeta}_0 = \xi_{10} + i \xi_{20}, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \bar{\zeta}_0), \quad \psi = \psi(\zeta)$$

$$\psi_0 = \psi_0(\bar{\zeta}_0), \quad \zeta, \bar{\zeta}_0 \in L = \bigcup_{j=1}^k l_j; \quad N_n = N_{n0} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^n N_{nk}^{(j)}$$

$$N_{n0} = \frac{2\pi\omega^2}{(c_{11}^2 - c_{12}^2)(\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^2)} [P_1 - (-1)^n i P_2]$$

$$N_{nk}^{(j)} = \frac{\pi i \gamma_{12}^2 \sigma_0}{\gamma_{11}} \exp[(-1)^n i \psi_0 - i \gamma_{11} \xi_{k0}] \left\{ \exp[(-1)^{n+1} 2i \psi_0] - \frac{(-1)^k \gamma_{11}^2}{\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^2} \right\}$$

$$N_{nk}^{(j)} = \frac{(-1)^{n-k} \pi \gamma_{12}^2}{\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^2} \exp [(-1)^n i \psi_0 - i \gamma_{12} \xi_{k0}]$$

Здесь ΔU_m ($m=1,2$) представляют скачки перемещений U_m на L ; ψ, ψ_0 — угол между нормалью к левому берегу разреза и осью Ox_1 , ds — элемент дуги L , ε_k и ε_k — амплитуды вектора механических смещений при наличии P и SV волн соответственно, падающих в направлении оси x_k .

К системе (2.1) необходимо присоединить дополнительные условия, выражающие отсутствие разрывов перемещений на концах разрывов

$$\int_{L_j} dR_m = 0, \quad m = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.2)$$

3. *Динамические коэффициенты интенсивности напряжений.* Система интегральных уравнений (2.1) в совокупности с условиями (2.2) имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах L . Полагая $z = i(\zeta)(-1 \leq \zeta \leq 1)$, представим искомые плотности следующим образом:

$$R_m = \frac{dR_m}{ds} = \frac{\Omega_m(z)}{s'(z)\sqrt{1-z^2}}, \quad s'(z) = \frac{ds}{dz} > 0 \quad (2.1)$$

$$\Omega_m(z) \in H[-1, 1], \quad m = 1, 2$$

Асимптотический анализ интегральных представлений для напряжений [3] на продолжении за вершины разрывов L , позволяет получить динамические коэффициенты интенсивности напряжений в виде

$$K_I = \Lambda \sqrt{\pi l} |N| \cos(\omega t - \arg N), \quad K_{II} = \Lambda \sqrt{\pi l} |T| \cos(\omega t - \arg T) \quad (3.2)$$

$$N = \mp \frac{\gamma_1^2(c_{11}^0 + c_{12}^0 - 2\kappa_0^2)}{4\gamma_2^2 \Lambda \sqrt{ls'(\mp 1)}} \left[e^{-i\psi(\mp 1)} \Omega_1(\mp 1) + e^{i\psi(\mp 1)} \Omega_2(\mp 1) \right]$$

$$T = \mp i \frac{\gamma_1^2(c_{11}^0 + c_{12}^0 - 2\kappa_0^2)}{4\gamma_2^2 \Lambda \sqrt{ls'(\mp 1)}} \left[e^{-i\psi(\mp 1)} \Omega_1(\mp 1) - e^{i\psi(\mp 1)} \Omega_2(\mp 1) \right]$$

$$s'(\mp 1) = \left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=\mp 1}$$

Здесь, при наличии падающей волны имеем $\Lambda = s_{II}^{\max}(s_{II}^{\max}$ — амплитуда напряжений в этой волне); если волны нет, то $\Lambda = P$ (P — интенсивность действующей на разрезе нагрузки). Верхний знак соответствует началу трещины $s = a$, нижний — концу $s = b$, $2l$ — длина разреза.

4. *Две трещины в пьезоэлектрической среде.* Для исследования взаимодействия двух разрезов в среде необходимо рассмотреть систему из восьми (вещественных) интегральных уравнений. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом. Введем параметризацию разреза $\zeta = \zeta(\delta) \in L_1$, $\eta = \eta(\Delta) \in L_2$, $-1 \leq \delta$, $\Delta \leq 1$. Соответственно систему (2.1) с учетом (2.2) сводим к линейным алгебраическим уравнениям относительно значений функций $\Omega_k(\zeta)$ и $\Lambda_k(\Delta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [7].

$$\sum_{v=1}^n (\alpha_{mv} \Omega_{1v} + \beta_{mv} \Omega_{2v}) = N_m + \sum_{v=1}^n (\gamma_{mv} \Lambda_{1v} + \omega_{mv} \Lambda_{2v}) \quad (4.1)$$

$$\sum_{v=1}^n (\alpha_{mv}^* \Lambda_{1v} + \omega_{mv}^* \Lambda_{2v}) = N_m^* + \sum_{v=1}^n (\gamma_{mv}^* \Omega_{1v} + \beta_{mv}^* \Omega_{2v})$$

$$m = 1, 2, \dots, 2n$$

$$N_m = N_m(\delta_{2i}), \quad N_m^* = N_m^*(\Delta_{2i}), \quad \alpha_{mv} = \alpha_{mv}(\delta_{1i}, \delta_{2i}), \quad \beta_{mv} = \beta_{mv}(\delta_{1i}, \delta_{2i})$$

$$\gamma_{mv} = \gamma_{mv}(\delta_{1i}, \delta_{2i}), \quad \omega_{mv} = \omega_{mv}(\Delta_{1i}, \Delta_{2i}), \quad \gamma_{mv}^* = \gamma_{mv}^*(\Delta_{1i}, \Delta_{2i}), \quad \omega_{mv}^* = \omega_{mv}^*(\delta_{1i}, \delta_{2i})$$

$$\alpha_{mv}^* = \alpha_{mv}^*(\delta_{1i}, \Delta_{2i}), \quad \beta_{mv}^* = \beta_{mv}^*(\delta_{1i}, \Delta_{2i})$$

$$i = i(m) = 1, 2, \dots, n-1; \quad v = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{dR_k}{d\zeta} = \frac{\Omega_k(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \frac{dR_k}{d\Delta} = \frac{\Lambda_k(\Delta)}{\sqrt{1-\Delta^2}}, \quad k=1, 2$$

Здесь δ_k , Δ_k — нули многочлена Чебышева k -го рода; α_{mv} , β_{mv} , ..., ω_{mv}^* — значения соответствующих линейных комбинаций ядер и правых частей системы (2.1) в узлах интерполяции. n — число узлов разбиения [7].

Определим стандартные решения первой системы уравнений и (3.1) N_m^* , γ_{mv}^* и ω_{mv}^* так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\Omega_{km} = N_{m+1}^* + \sum_{v=1}^n (\gamma_{m+1,v}^* \Lambda_{1v} + \omega_{m+1,v}^* \Lambda_{2v}) \quad (4.2)$$

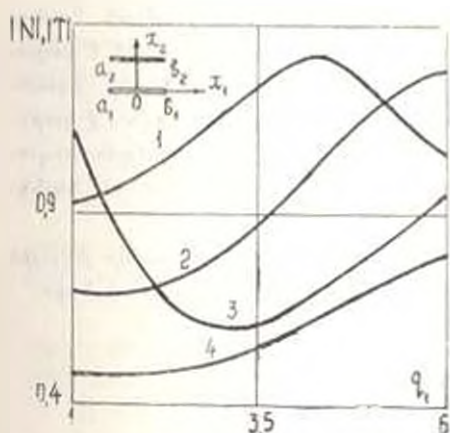
$$l = \begin{cases} 0, & k=1 \\ n, & k=2 \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Далее, исключая с помощью (4.2) соответствующую часть неизвестных в (4.1), приходим к системе уравнений относительно второй группы неизвестных Λ_{kn} ($m = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2$). Фактически такой алгоритм сводится к последовательному решению двух несвязанных систем (каждая — из четырех вещественных интегральных уравнений).

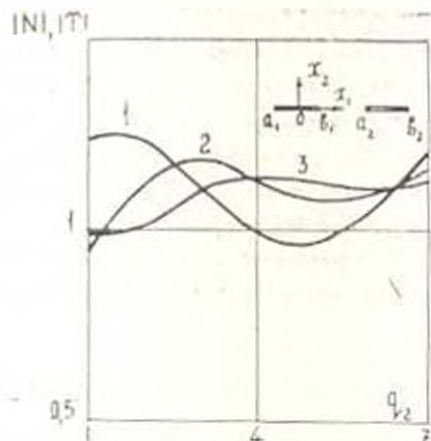
Как показывают численные исследования на ЭВМ, указанная процедура уменьшения связности области является эффективной и может быть обобщена на случай, когда в области имеется несколько разрезов.

В качестве примера исследуем взаимодействие двух прямолинейных трещин $\xi_1^{(1)} = p\delta$, $\xi_1^{(2)} = p_1$, $\xi_1^{(2)} = p_2 + p\delta$, $\xi_2^{(2)} = p_2$, $-1 \leq \delta, \Delta \leq 1$ в пьезокерамике $PZT-4$ [5]; a_j и b_j — соответственно, начало и конец разреза L_j ($j=1,2$).

На фиг. 1 приведены результаты расчетов амплитуд относительных коэффициентов интенсивности напряжений $|V|$ (кривые 2—4) и $|T|$ (кривая 1), определяемых формулами (3.2) в зависимости от па-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

раметра $q_1 = p_2/l$ при $\gamma_1 l = 0.5$, $p = 1$, $p_1 = p_2 = 0$. Кривые 2 и 1 построены для случаев, когда на берегах L_1 и L_2 задана нормальная $P_1^+ = -P_1^- = P_1 = P \cos \varphi$, $P_2^+ = -P_2^- = P_2 = P \sin \varphi$ и касательная $P_1 = -P \sin \varphi$, $P_2 = P \cos \varphi$ нагрузки соответственно (при отсутствии падающей волны); кривые 3 и 4 характеризуют действие P волны, падающей из бесконечности вдоль осей x_2 и x_1 соответственно (кривая 3 относится к L_1 , кривая 4 — к вершине a_j разреза L_j , $j=1,2$).

Фиг. 2 иллюстрирует изменение $|V|$ (кривые 2,3) и $|T|$ (кривая 1) и зависимости от параметра $q_2 = p_1/l - 2$ при $p = 1$, $p_1 = p_2 = 0$, $\gamma_1 l = 0.5$. Кривые 2 и 1 комментируются так же, как на фиг. 1 и относятся к вершинам a_j , b_j ; кривая 3 соответствует вершинам a_1 , b_1 при действии на берегах L_1 , L_2 нормальной нагрузки.

DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR PIEZOELECTRIC MEDIUM WITH TUNNEL CRACKS

V. Z. PARTON, M. L. FILSHTEINSKI

ՊԻԵԶԵԼԵԿՏԻՆ ԿՏՐՈՒԱԾՔՆԵՐՈՎ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐՈՒԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՐԱՐ
ԱՌԱՋԳԱՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒԹՅԱՆ ԿՆՆԱՄԻՎԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ

Վ. Չ. ՊԱՐՏՈՆ, Մ. Լ. ՖԻՇՏԻՆՍԿԻ

Ա Վ Ո Վ Ո Ւ Մ

Հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում ուսումնասիրված է անսահմանափակ պիեզոէլեկտրամիկական միջավայրում ճարձերի փոխազդեցության ժամանակահատվածներին խնդիր: Համապատասխան եզրային խնդիրը բերված է կտրվածքների վրա սեղափոխությունների թռիչքների ամպլիտուդաների նկատմամբ ինտեգրադիֆերենցիալ համասարումների համակարգի: Բերված է կտրվածքների զազաթևերի շրջակայքում մեխանիկական դաշտի առիմպատիկական վերլուծությունը: Ինտենսիվության զոթակիցները ստացված են ֆունկցիոնալների տեսքով:

Առաջարկված է ինտեգրալ համասարումների լուծման մոտավոր թվային եղանակ այն դեպքերի համար, երբ մարմնում կան մի քանի կտրվածքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения.— М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Sih G. C., Loebner J. F. Wave propagation in an elastic solid. — Quart. Appl. Math. 1969. V. 27. No 2, P. 193—213.
3. Фильштинский Л. А., Волокова Л. В. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация).— Докл. АН СССР, 1983. т. 271, №4, с. 831—834.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
5. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Физическая акустика.—Под ред. Мезона У.-М.: Мир, 1968. Ч. А 592 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982. 624 с.
7. Белоцерковский С. М., Лифшиц И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985. 255 с.

Сумский филиал Харьковского политехнического
института

Поступила в редакцию
19 IV 1988.

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ПРОВОДЯЩИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В НЕОДНОРОДНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

САРКИСЯН С. О.

К развитию асимптотических свойств величин, определяющих начально-краевую задачу магнитоупругости [1], как в области тонкой оболочки, так и в среде, окружающей оболочку, и на основании этих результатов созданию асимптотически обоснованной в целом двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек посвящены исследования [2—5].

В данной работе изучаются аналогичные проблемы, когда заданное магнитное поле неоднородно вдоль продольных координат срединной поверхности оболочки и переменной по времени.

1. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное, упругое, проводящее тело и отнесем к ортогональной неподвижной системе координат [6].

Пусть оболочка находится во внешнем неоднородном по координатам x_i , $i=1,2$, постоянном по x_3 (поперечное к срединной поверхности) и переменное по времени магнитном поле $\vec{B}_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$.

Будем считать, что оболочка находится в среде, электродинамические свойства которой отождествляются со свойствами вакуума: $\sigma=0$, $\rho_e=0$, $\mu=\varepsilon=1$ (принимается абсолютная гауссова система единиц), где σ — электропроводность, ρ_e — объемная плотность электрического заряда, ε — диэлектрическая постоянная, μ — коэффициент магнитной проницаемости. Кроме того, принимается, что для материала оболочки выполняются условия $\mu=\varepsilon=1$.

Будем исходить из основных уравнений линейной теории магнитоупругости для трехмерной среды [1]. Эти уравнения в выбранной ортогональной системе координат составляют три группы уравнений и имеют вид:

первая группа уравнений — дифференциальные уравнения теории упругости изотропного тела, которые можно записать так:

— векторное уравнение движения оболочки с учетом массовых сил электромагнитного происхождения:

$$\frac{\partial H_2 \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1 \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 \vec{\sigma}_3)}{\partial x_3} + H_1 H_2 \left(-\rho \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \vec{F} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}_0, \quad \vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) \quad (1.2)$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор перемещения точек оболочки, $\vec{\sigma}_k$ — вектор упругих напряжений, $\vec{E}$ — вектор напряженности возбужденного в оболочке электрического поля. H_i , $i=1,2$ — коэффициенты Ламе.

К векторному уравнению (1.1) следует присоединить соотношения, выражающие зависимость «деформации-смещения» и обобщенного закона Гука [6].

Вторая группа уравнений — уравнения электродинамики в области движущейся оболочки

$$\text{rot } \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (\text{I}), \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (\text{II}) \quad (1.3)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho_e, \quad (\text{III}), \quad \text{div } \vec{h} = 0, \quad (\text{IV})$$

где $\vec{h}$ — вектор напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля.

Третья группа уравнений — уравнения электродинамики во внешней области

$$\text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{rot } \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\text{div } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \vec{E}^{(e)} = 0$$

где $\vec{E}^{(e)}$ и $\vec{h}^{(e)}$ — соответственно векторы индуцированных электрических и магнитных полей в области, окружающей оболочку.

К системе уравнений (1.1) — (1.4), определяющих поведение движущейся упругой оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены граничные условия на поверхности оболочки, начальные условия и условия на бесконечности [1, 2].

Для решения поставленной начально-краевой задачи здесь излагается асимптотический метод интегрирования всех трех групп уравнений трехмерной магнитоупругости для тонких оболочек [2, 3].

2. Займемся построением в целом (в области оболочки и в окружающем пространстве) основного итерационного процесса. Основным итерационным процессом определяется такое магнитоупругое состояние, которое проникнуто в глубь как оболочки, так и в окружающее оболочку пространство.

Введем новые независимые переменные и время, положив [2, 3, 6]

$$\alpha_i = R^i \cdot \tau_i, \quad z_i = R^i \cdot \zeta_i, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \lambda^{-1} \omega^{-1} \frac{R}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

где R — некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, p, l — целые числа, $l > p \geq 0$; λ — большой постоянный параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$.

В дальнейшем считается, что при дифференцировании по ξ_1, ξ_2 и ξ искомые величины не меняют своего порядка, то есть магнитоупругое состояние имеет показатель изменчивости $\frac{p}{l}$.

Величина ω характеризует изменчивость магнитоупругого процесса во времени.

Введем безразмерные величины по формулам [2, 3]

$$\bar{v}_k = \frac{v_k}{h}, \quad \bar{\tau}_k = \bar{\tau}_k, \quad \frac{\bar{\tau}_{ij}}{\bar{E}} = \bar{\tau}_{ij}, \quad \frac{\bar{\tau}_{i3}}{\bar{E}} = \bar{\tau}_{i3} \quad (2.2)$$

$$\frac{B_{0k}}{\sqrt{\bar{E}}} = \bar{B}_{0k}, \quad \frac{h_k}{\sqrt{\bar{E}}} = \bar{h}_k, \quad \frac{c}{c_0} \frac{E_k}{\sqrt{\bar{E}}} = \bar{E}_k$$

$$\frac{c}{c_0} \frac{h \rho_e}{\sqrt{\bar{E}}} = \bar{\rho}, \quad R_m = \frac{\sigma h}{c} \cdot \frac{c_0}{c}, \quad \bar{q}_k^\pm = \frac{q_k^\pm}{E}$$

где $\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_{ij}, \bar{\tau}_{i3}$ — компоненты несимметричного тензора напряжений [6]

Сделаем также следующие замены величин:

$$\bar{v}_i = \lambda^{x+l-p} \bar{v}_i^*, \quad \bar{v}_3 = \lambda^{x+l-c} \bar{v}_3^*,$$

$$\bar{\tau}_i = \lambda^x \cdot \bar{\tau}_i^*, \quad \bar{\tau}_{ij} = \lambda^x \cdot \bar{\tau}_{ij}^*, \quad \bar{\tau}_{i3} = \lambda^{x+p-l} \cdot \bar{\tau}_{i3}^*, \quad \bar{\tau}_3 = \lambda^{x-l+c} \cdot \bar{\tau}_3^*,$$

$$\bar{q}_i^\pm = \lambda^{x \pm p - l} \bar{q}_i^{\pm*}, \quad \bar{q}_3^\pm = \lambda^{x+c-l} \bar{q}_3^{\pm*}, \quad (2.3)$$

$$B_{0k} = \lambda^{x_1} \cdot \bar{B}_{0k}^*, \quad \bar{h}_k = \lambda^{x_1} \cdot \bar{h}_k^*, \quad \bar{E}_k = \lambda^{x_2} \cdot \bar{E}_k^*, \quad \bar{\rho} = \lambda^{x_3} \cdot \bar{\rho}^*, \quad k=1, 2, 3.$$

Числа x, x_1, x_2 и ω выбираются таким образом, чтобы в исходном приближении асимптотического метода получались непротиворечащие уравнения взаимосвязанных электромагнитоупругих явлений и, чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения.

Таким образом, получаются

$$x = 0, \quad x_1 = l \left(\frac{1}{2} \omega - 1 \right), \quad x_2 = \frac{3}{2} l \omega - 2l - p \quad (2.4)$$

при этом, в случае $2p \leq l \omega = 1, c = 0$; а в случае $2p \geq l \omega = \frac{2p}{l}$, $c = 2c - l$.

Отметим, что (2.4) одновременно определяет интенсивность (2.3) внешнего магнитного поля, при котором имеет место взаимодействие между упругими перемещениями и электромагнитным полем.

Следуя асимптотическому методу, наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ξ и времени τ) уравнения (1.1) и (1.4) к двумерным (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ) уравнениям. Для этого, во-первых, необходимо избавиться в (1.1)–(1.5) от дифференцирования по ξ , а во-вторых, в коэффициентах, получаемых таким образом уравнений, должен быть выделен характер их зависимости от ξ и асимптотический порядок по большому параметру λ .

Следует отметить, что переход от точных трехмерных уравнений магнитоупругости к приближенным двумерным уравнениям сужает область изменяемости и по координатам и по времени функций, определяющих задачу. Главным критерием к построенной таким образом двумерной теории является требование малой интенсивности изменения функции по отношению к толщине оболочки, плавности их изменения по продольным координатам и низкочастотность изучаемого динамического явления. Для электродинамических процессов характерно явление скин-эффекта (сложное распределение электромагнитного поля по толщине тела). Ограничиваясь изучением низкочастотными динамическими процессами, этим самым исключается проявление скин-эффекта, так как в тонких проводниках скин-эффект проявляется при весьма больших частотах [7].

Ограничимся рассмотрением системы уравнений, получаемых на основе первого приближения (следующий этап от исходного приближения) основного итерационного процесса, для этого в выкладках необходимо удерживать члены до величины порядка $O(\lambda^{-2l+2p})$. На этом уровне получается двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек.

Пропуская весьма сложные и громоздкие преобразования, для величин со звездочками с точностью $O(\lambda^{-2l+2p})$ будем иметь:

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= \bar{v}_i + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 v_i, & \dot{v}_3 &= \bar{v}_3 + \lambda^{-l+c} \zeta^1 v_3 \\ \dot{e}_i &= \bar{e}_i + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 e_i, & \dot{m}_i &= \bar{m}_i + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 m_i \\ \dot{\tau}_i &= \bar{\tau}_i + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 \tau_i, & \dot{\tau}_{ij} &= \bar{\tau}_{ij} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 \tau_{ij}\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_{i3} &= \bar{\tau}_{i3} + \zeta^1 \tau_{i3} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tau_{i3} + \lambda^{2l\omega-4l-p-c} \zeta^3 \tau_{i3} \\ \dot{\tau}_3 &= \bar{\tau}_3 + \zeta^1 \tau_3 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tau_3 + \lambda^{-2l+4p-2c} \zeta^3 \tau_3 \\ \dot{E}_i &= \bar{E}_i + \lambda^{p-l} \zeta^1 E_i + \lambda^{p-l} \zeta^2 E_i \\ \dot{h}_i &= \lambda^{p-l} h_i^0 + \zeta^1 h_i + \lambda^{p-l} \zeta^1 h_i^1 + \lambda^{p-l} \zeta^2 h_i^2 + \lambda^{p-l} \zeta^3 h_i^3\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$4\pi R_m \dot{E}_3 = 4\pi R_m \bar{E}_3 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^1 E_3, \quad \dot{h}_3 = \bar{h}_3 + \lambda^{p-l} \zeta^1 h_3 + \lambda^{p-l} \zeta^2 h_3^2$$

Формулами (2.5) и (2.6) определяются все величины, как механические, так и электродинамические в области оболочки.

Выражения, определяющие $\varphi_i^1, \varphi_2^1, e_i^1, m_i^1, \tau_i^1, \tau_{if}^1, \tau_3^2, \dots$, из-за громоздкости не приводятся.

Введем теперь в рассмотрение уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакууме), то есть уравнения (1.4). Во внешней области должен быть построен основной итерационный процесс, определяющий такое электромагнитное состояние, которое охватывает всю внешнюю область. Рассматривая уравнения (1.4), легко убедиться, что эти уравнения имеют эллиптический тип. Тогда для основного итерационного процесса во внешней от оболочки области мы вправе считать [8], что электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменчивость, которая равна изменчивости по направлениям α_1 и α_2 для внутренней задачи (в области оболочки). По времени для внешней задачи принимается такая же изменчивость, что и для внутренней задачи.

Итак, во внешней среде введем безразмерную систему координат и время, соответственно [2, 3]

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p} \xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p} \xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-p} \tau_1, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad (2.7)$$

где t_0 определяется из (2.1) с учетом (2.4).

Введем также безразмерные величины для компонент электромагнитного поля во внешней от оболочки области, используя формулы (2.2), и сделаем следующие замены искоемых величин:

$$\bar{h}_k^{(e)} = \lambda^{x_1} \dot{h}_k^{(e)}, \quad \bar{E}_k^{(e)} = \lambda^{x_2} \dot{E}_k^{(e)}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

где x_1 и x_2 определяются из формул (2.4).

Внося (2.7) и (2.8) в исходные уравнения (1.4), легко убедиться, что уравнения относительно $\dot{h}_k^{(e)}$ и $\dot{E}_k^{(e)}$ в новых переменных (2.7) остаются без изменений.

В переменных (2.7) существенно упрощается область интегрирования внешней области. Действительно, в первоначально выбранной размерной системе координат лицевые поверхности оболочки определяются уравнениями $\alpha_3 = \pm h$; в системе координат (2.7) эти поверхности определяются следующим образом: $\tau_1 = \pm \frac{h}{R} = \pm \varepsilon = \pm \lambda^{-l}$, где ε — малый параметр задачи. Здесь при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\tau_1 = \pm 0$. Это означает, что область тонкой оболочки для построения основного итерационного процесса внешней среды необходимо рассматривать в качестве математического разреза.

Используя соответствующие данные из решения внутренней задачи электродинамики, при помощи тензора Грина для уравнений (1.4), решение внутренней и внешней задач электродинамики в целом можно привести к решению определенных систем интегральных уравнений.

При построении тензора Грина для внешних уравнений электродинамики (1.4) полезно использовать следующие свойства уравнений электродинамики [9].

Допустим, что на разрезе терпят разрывы все компоненты электромагнитного поля (компоненты электрического поля и компоненты магнитного поля), тогда тензор Грина этой общей задачи будет представлять из себя сумму тензоров Грина следующих двух задач электродинамики во всем пространстве [9].

I задача

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = \vec{\varepsilon}(\vec{r}), \quad (I), \quad \operatorname{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad (II) \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad (III), \quad \operatorname{div} \vec{E}^{(e)} = 4\pi \vec{\varepsilon}(\vec{r}), \quad (IV)$$

II задача

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} + \vec{\varepsilon}(\vec{r}) \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 4\pi \vec{\varepsilon}(\vec{r}), \quad \operatorname{div} \vec{E}^{(e)} = 0$$

На бесконечности должны выполняться условия убывания векторов электромагнитного поля [8], $\vec{\varepsilon}(\vec{r})$ — дельта-функция Дирака.

Отметим, что с уравнениями теории тонких оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения взаимосвязана задача (2.9), а задача (2.10) переходит на второй план, когда необходимо полное определение величин во внешней от оболочки области.

Задачу (2.9) можно привести к более наглядному виду, удобному для построения частного решения, в случае, когда $\operatorname{div} \vec{E}^{(e)} = 0$, которое имеет место в нашем случае.

Из обеих частей (II) векторного уравнения (2.9) возьмем операцию rot , с учетом (III) и (I) уравнений (2.9); получим

$$\Delta \vec{E}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\varepsilon}(\vec{r}) \quad (2.11)$$

где Δ — трехмерный векторный оператор Лапласа. Здесь специально не приводится, но имеется ввиду, что дельта-функция содержит множитель, зависящий от времени.

Итак, построение частного решения (2.9) заменяется определением частного решения векторного уравнения (2.11).

В частном случае, в декартовых ортогональных координатах вышеуказанная система распадается на три независимых дифференциальных уравнения $\Delta E_k^{(e)} = \varepsilon(r_0)$, $k = 1, 2, 3$, где Δ — скалярный оператор Лапласа, и совокупность функций Грина для этих отдельных уравне-

ний будет представлять тензор Грина для данной системы. Построение же функции Грина можно осуществить методом интегрального преобразования Фурье [10].

Существуют и другие частные классы задач, при которых векторное уравнение (2.11) распадается на более простые уравнения, частные решения которых можно определить, применяя другие интегральные преобразования [10].

3. На основании асимптотических разложений (2.5) с точностью $O(\lambda^{-2l+2p})$ легко получить уравнения двумерной теории оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{12}}{\partial z_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} (T_1 - T_2) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} (S_{12} + S_{21}) - \\ & - \frac{N_1}{R_1} - 2\phi h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + B_{03} \frac{2\sigma h}{c} \varphi + \frac{4\pi \sigma^2 h^3}{3 c^3} B_{03} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = X_1 \\ & \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_2}{\partial z_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{21}}{\partial z_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} (T_2 - T_1) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} (S_{21} + S_{12}) - \frac{N_2}{R_2} - \\ & - 2\phi h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - B_{03} \frac{2\sigma h}{c} \psi - \frac{4\pi \sigma^2 h^3}{3 c^3} B_{03} \frac{\partial \psi}{\partial t} = X_2 \\ & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_1 N_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 N_2) \right] - 2\phi h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h}{c} \times \\ & \times (B_{02} \cdot \psi - B_{01} \cdot \varphi) - \frac{4\pi \sigma^2 h^3}{3 c^3} \left(B_{02} \frac{\partial \psi}{\partial t} - B_{01} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + Z = 0 \\ & \frac{1}{A_1} \frac{\partial G_1}{\partial z_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{12}}{\partial z_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} (G_1 - G_2) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} (H_{12} + H_{21}) - N_1 - Y_1 = 0 \\ & \frac{1}{A_2} \frac{\partial G_2}{\partial z_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial H_{21}}{\partial z_1} + \frac{1}{A_1 A_2} (G_2 - G_1) \frac{\partial A_1}{\partial z_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} (H_{21} + H_{12}) - N_2 - Y_2 = 0 \\ & \varphi = E_{20} - \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \psi = E_{10} + \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

К уравнениям (3.1) присоединяются соотношения упругости А. Л. Гольденвейзера [6] или другие варианты указанных соотношений [6].

Изучая краевые электромагнитоупругие явления, аналогично [2, 3], легко получить механические приведенные граничные условия [6], которые с большой точностью [6] можно заменить классическими граничными условиями теории оболочек Лява [6]. Что касается начальных условий, то они для механической части задачи формулируются посредством перемещений и соответствующих скоростей точек срединной поверхности оболочки, а для электродинамической части задачи принимаются нулевые начальные условия для компонент индуцированного электромагнитного поля двумерной теории.

При помощи тензора Грина уравнений (2.9) или (2.11) с учетом

(2.6), можно показать, что решение внутренней и внешней задач электродинамики в целом приводятся к решению системы интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \psi + 2\pi \frac{\varepsilon h^2}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} = \iint_{\Omega} K_{11}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}) [h_1] d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} K_{12}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}) [h_2] d\Omega \\ \varphi + 2\pi \frac{\varepsilon h^2}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} = \iint_{\Omega} K_{21}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}) [h_1] d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} K_{22}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}) [h_2] d\Omega, \quad z_1, z_2 \in \Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

где K_{ij} — значения тензора Грина задачи (2.9) или (2.11) при $z_3 = 0$; в левой части соотношений (3.2) стоят значения E_i на лицевых поверхностях оболочки; Ω — область срединной поверхности упругой оболочки, величины $[h_i]$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [h_1] = h_1^+ - h_1^- = 2h \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial h_{30}}{\partial z_1} + \frac{4\pi\varepsilon}{c} \varphi \right) + \frac{16\pi^2}{3} \frac{\varepsilon^2 h^3}{c^3} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ [h_2] = h_2^+ - h_2^- = 2h \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial h_{30}}{\partial z_2} - \frac{4\pi\varepsilon}{c} \psi \right) - \frac{16\pi^2}{3} \frac{\varepsilon^2 h^3}{c^3} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следует отметить, что если придерживаться условию $\frac{h}{R_i} \ll 1$, то в формулах (3.1) — (3.3) можно пренебречь членами, содержащими множители $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, а также величинами $\frac{1}{A_i} \frac{\partial h_{30}}{\partial z_i}$ в формулах (3.3)

Итак, система уравнений (3.1) и (3.2) с учетом (3.3) представляет систему разрешающих двумерных уравнений магнитоупругости тонких оболочек на уровне моментной теории оболочек. Зная решение этой системы, с помощью соответствующих формул (2.5) и (2.6) определяются как механические, так и электродинамические величины в области оболочки. Величина h_{30} определяется из уравнения

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial E_{20}}{\partial z_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} E_{20} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial E_{10}}{\partial z_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} E_{10} = - \frac{1}{c} \frac{\partial h_{30}}{\partial t}$$

Электродинамические величины в окружающем оболочку пространстве определяются при помощи интегральных соотношений

$$\begin{aligned} E_i^{(e)}(z_1, z_2, z_3, t) = \iint_{\Omega} K_{i1}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}, z_3) [h_1] A_1 A_2 dz_1 dz_2 + \\ + \iint_{\Omega} K_{i2}(z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}, z_3) [h_2] A_1 A_2 dz_1 dz_2, \quad z_1, z_2 \in \Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

и других подобных.

Считая заданное поле неизменным по времени, из (3.1)—(3.3) получаются уравнения двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, находящихся в постоянном магнитном поле [2, 3].

Рассматривая уравнение баланса энергии трехмерной магнитоупругости [2, 4], при помощи асимптотических разложений (2.5), (2.6) определяется уравнение баланса энергии двумерной теории магнитоупругости. Оно будет выражаться формулой, приведенной в работе [4], где следует считать величины B_{0k} , $k = 1, 2, 3$, как функции от времени.

CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL ASYMPTOTIC THEORY OF MAGNETOELASTICITY FOR THIN CONDUCTING SHELL PLACING IN A NONUNIFORM AND NON-STATIONARY MAGNETIC FIELD

S. O. SARKISIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻՅ ԿԱՆՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏԵՎՈՂ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԵԻՍԱԴԱԴԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱԿԱՆ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՅՈՒՄԸ

Ս. Շ. ՍԱՐԿԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկական անալիզի է ենթարկված մագնիսա-առաձգականության երկաթի տեսության հավասարումների լրիվ համակարգը և ստացված արդյունքների հիման վրա կառուցված է հաղորդիչ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության երկաթի տեսությունը այն դեպքում, երբ թաղանթը գտնվում է անհամասեռ և ժամանակից կախված տված մագնիսական դաշտում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Саркисян С. О. Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин.—Докторская диссертация, Казанский госуниверситет, 1987. 406 с.
3. Саркисян С. О. К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. 38, № 6, с. 21—34.
4. Саркисян С. О. Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости тонких оболочек.—Уч. записки Ереванского ун-та, естествен. науки, 1985, № 2, с. 41—46.
5. Саркисян С. О. Теорема взаимности в магнитоупругости тонких оболочек.—

- Межвуз. сб. научн. трудов, Механика, 1987, изд. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976. 512 с.
7. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика.—М.: Высшая школа, 1980. 335 с.
8. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.—Успехи матем. наук, 1957, т. 12, №5, с. 3—122.
9. Красюк Н. П., Дымович Н. Д. Электродинамика и распространение радиоволн.—М.: Высшая школа, 1974. 536 с.
10. Саркисян С. О. О некоторых задачах колебаний проводящих пластин и оболочек в магнитном поле. В сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван, Изд. ЕГУ, 1984, с: 142—145.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
17.III.1988

УДК 532.529:533.6.011.34

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ПРИ КВАЗИИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

ОГАНЯН Г. Г.

В работах [1—3] получены асимптотические законы затухания возмущений, вносимых тонкими телами вращения в равномерный звуковой поток вязкого теплопроводящего газа. Подобные задачи для течений газожидкостной смеси не рассматривались.

Особенностью газожидкостной смеси является интенсивный теплообмен между газовыми пузырьками и окружающей их жидкостью. Количество тепла, переходящего от пузырька в жидкость, прямо пропорционально их разности температур, при этом жидкая фаза с точки зрения термодинамики играет роль термостата. В монографиях [4, 5] на основе экспериментальных данных, например, [6], отмечено, что главным диссипативным механизмом может явиться тепловая релаксация.

В настоящей работе на основе односкоростной модели газожидкостной смеси, температуры фаз которой различны, выводятся двумерные нелинейные упрощенные уравнения и приводится их частичная классификация. Полученные уравнения типа коротких волн описывают стационарные течения смеси, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко к изотермическому. Показано, что влияние тепловой релаксации на вид уравнений эквивалентно наличию второй вязкости. Приводится математическая аналогия между течениями рассматриваемой смеси и реального газа. В частности, когда структура потока смеси формируется под воздействием лишь эффектов сжимаемости и вязкости, решена задача обтекания профиля (плоская задача). Найдено точное решение, представляющее возмущения, вносимые двумерным диполем в равномерный поток смеси, скорость которого на бесконечности равна изотермической скорости звука.

1. Исходные уравнения. Предположим, что в монодисперсной смеси жидкая и газовая фазы движутся с одинаковой скоростью, при этом несущая жидкость обладает эффектами сжимаемости и вязкости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Ограничимся рассмотрением течений, где в смеси не происходит существенного пересжатия газовой фазы. Будем считать, что ввиду сильного влияния температуры на плотность газа теплообмен между пузырьками и жидкостью определяется лишь тепловым сопротивлением

газа и потому температуру жидкой фазы примем постоянной. Полагая, что дробление, столкновение, слияние пузырьков отсутствуют и не происходит их новых образований, уравнения стационарного движения газожидкостной смеси возьмем в виде [4, 5]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{r}{y}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{r}{y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{2r}{y} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y} \right) \quad (1.3)$$

$$P_2 - P = L \equiv (1 - \varphi_1) \rho_1 R \left(u \frac{\partial L_1}{\partial x} + v \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) + \frac{3}{2} (1 - \varphi_2) \rho_2 L_1^2 + \frac{4\mu}{R} L_1 -$$

$$- \frac{R}{a_1} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} L_1 \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} L_1 \right) \right] \quad (1.4)$$

$$L_1 = u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y}, \quad P_2 = c_{p2}(\gamma - 1) \rho_2 T_2, \quad \frac{\rho_2 \beta}{\rho_1(1 - \beta)} = \text{const} \quad (1.5)$$

$$\rho_2 R^2 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_1(1 - \beta) + \varphi_2 \beta, \quad P = P_1(1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.6)$$

$$u \frac{\partial P_1}{\partial x} + v \frac{\partial P_1}{\partial y} = - \frac{3\gamma P_2}{R} L_1 - \frac{3(\gamma - 1)k_2 \text{Nu}}{2R^2} (T_2 - T_1) \quad (1.7)$$

$$\varphi_1 = \frac{1.13^{1/3}}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1.47\beta^{1/3} - 1.33\beta}{1 - \beta}, \quad \text{Nu} = \frac{R\tau}{k_2}$$

Здесь x, y — оси декартовой, либо цилиндрической системы координат, u и v — составляющие вектора скорости частиц смеси вдоль этих осей, P — давление, ρ — плотность, T — температура, β — объемное газосодержание, R — радиус пузырька, a — скорость звука, μ — динамический коэффициент вязкости, k_2 и τ — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена, $\gamma = c_{p2}/c_{v2}$, c_{p2} и c_{v2} — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме. Индексы „1“ и „2“ отнесены к параметрам течения соответственно жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение всей смеси, индексов не имеют. Для плоскопараллельных течений — $r=0$, для течений с осевой симметрией — $r=1$. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2 , впервые введенные в [4,7], учитывают конечность величины β и неоднородность газового пузырька в безграничной жидкости.

Значения параметров смеси и фаз в невозмущенном состоянии

отметим звездочкой, а характерную длину в направлении оси x обозначим через l .

Предположим, что в рассматриваемой области течения значения всех параметров смеси и фаз мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем равномерном установившемся потоке, направление которого близко к оси x . Будем считать, что скорости частиц смеси в каждой точке пространства мало отличаются по величине от изотермической скорости звука a_{*} . По аналогии с теорией транзвуковых течений газа [1-3,8] введем новые независимые переменные

$$x = l x_1, \quad y = \frac{l}{\Delta} y_1 \quad (1.8)$$

где Δ — безразмерный малый параметр. Отсюда видно, что поперечный размер возмущенной области намного превосходит продольный. При неравномерной роли координат x и y составляющие возмущенного вектора скорости вдоль них также будут иметь различные порядки величины

$$u = a_{*}(1 + \varepsilon u'), \quad v = \varepsilon \Delta a_{*} v' \quad (1.9)$$

Здесь ε — второй безразмерный малый параметр. Относительно возмущений скорости звука и остальных характерных параметров потока примем, что они имеют такой же порядок малости, что и продольная составляющая вектора возмущенной скорости:

$$P = P_{*}(1 + \varepsilon P'), \quad \rho = \rho_{*}(1 + \varepsilon \rho'), \quad R = R_{*}(1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_{*} + \varepsilon \beta', \quad (1.10)$$

$$a = a_{*}(1 + \varepsilon a'), \quad \rho_i = \rho_{*}(1 + \varepsilon \rho'_i), \quad P_i = P_{*}(1 + \varepsilon P'_i), \quad i = 1, 2$$

Что касается возмущения температуры в газовом пузырьке, то, ввиду рассмотрения квазизотермического процесса, полагаем, что оно имеет больший порядок малости

$$T_2 = T_{*}(1 + \varepsilon^2 T'_2) \quad (1.11)$$

Согласно определению (1.6) плотности смеси, уравнение неразрывности (1.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1-\beta}{\rho_1} \left(u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) - \frac{3\beta}{R} \left(u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{v}{y} = 0 \quad (1.12)$$

Исключив из уравнения (1.7) давление посредством соотношений (1.5), получим

$$u \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{3T_1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{3T_1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \right) =$$

$$-\frac{3\gamma T_2}{R} \left(u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} \right) - \frac{3k_2 N u}{2\rho_2 c_{p2} R^2} (T_2 - T_*) \quad (1.13)$$

Для рассматриваемого близкого к изотермическому процесса распространения возмущений разложим функцию $P_1 = P_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора вблизи положения локального термодинамического равновесия жидкой фазы и учтем, что температура ее практически не меняется. Тогда

$$dP_1 = a_1^2 d\rho_1, \quad a_1^2 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right)_{T_1} \quad (1.14)$$

Здесь a_1 — изотермическая скорость звука в жидкости.

Используя определение (1.6) давления смеси, а также уравнения (1.5) состояния газа и пузырька и формулу (1.14), стационарный вариант уравнения пульсации пузырька (1.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} - (1-\beta)a_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \\ + \beta(1-\beta)(P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Комбинирование первого из уравнений импульсов смеси (1.2) с (1.4) и уравнениями состояния (1.5), (1.6) дает

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2v \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{r}{y} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Некое уравнение, описывающее стационарное течение газожидкостной смеси, должно быть выведено из упрощенной в порядке системы уравнений (1.12)–(1.16), в которой необходимо будет последовательно исключать члены порядка единицы. В дальнейшем, при упрощении уравнений, штрихи над безразмерными возмущениями параметров течения опускаются.

2. *Вывод определяющего уравнения.* Применяя преобразования (1.8)–(1.11) к уравнениям (1.1), (1.4), (1.15) и удерживая главные члены порядка единицы, находим

$$\rho = -u, \quad P = P_2 = -\frac{\rho_2 a_1^2}{P_2} u, \quad R = \frac{\rho_2 a_1^2}{\partial P_2} u \quad (2.1)$$

Учитывая (2.1), аналогичным образом из проекции уравнения Навье-Стокса на ось y (1.3) выводим соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad (2.2)$$

означающее, что в рассматриваемом приближении в потоке газожидкостной смеси вихри отсутствуют, то есть течение — потенциальное.

В том же приближении упрощения соотношений (1.5), (1.6), уравнений (1.12), (1.13) и их последующие комбинации с формулами (2.1) дают

$$\begin{aligned} \rho_2 &= -3R, \quad \rho_1 = \frac{1}{1-\beta_*} \left(\frac{\beta_* \rho_* a_{c*}^2}{P_*} - 1 \right) u, \quad \beta = \beta_* \left(\frac{\rho_* a_{c*}^2}{P_*} - 1 \right) u \\ T_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{R_*^2 2(\gamma-1) \text{Pe}}{l_*^2} \frac{\partial R}{\text{Nu} \partial x_1}, \quad \text{Pe} = \frac{l a_{c*}}{l_2}, \quad l_2 = \frac{k_2}{\rho_2 c_{p2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Pe — число Пекле, λ_1 — коэффициент температуропроводности газа. При выводе формул (2.1) — (2.3) постоянные интегрирования равны нулю вследствие распространения возмущения по покоящейся в системе координат (x_1, y_1) смеси. Здесь и далее примем, что порядки величин чисел Нуссельта и Пекле совпадают, так что их отношение есть величина порядка единицы.

В рассматриваемом приближении, разлагая $a_1 = a_1(z_1, T_1)$ в ряд Тейлора и оставляя главные члены, нетрудно получить

$$a_1 = (m-1)\beta_1, \quad m = \frac{1}{a_{1*}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_* \quad (2.4)$$

Согласно определению изотермической скорости звука в смеси [9, 10], имеем

$$\frac{1}{a_{c*}^2} = \frac{(1-\beta_*)\rho_*}{\rho_{1*} a_{1*}^2} + \frac{\beta_* \rho_*}{P_*} \quad (2.5)$$

Теперь применим преобразования (1.8) — (1.11) к уравнениям (1.12), (1.15), (1.16) и при их упрощении оставим также члены первого порядка малости. Комбинируя получаемые уравнения друг с другом и учитывая формулу (2.5), исключим из рассмотрения члены порядка единицы. Далее, подставляя формулы (2.1) — (2.4) в итоговое уравнение, все члены которого имеют первый порядок малости, окончательно получим

$$\varepsilon u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + r \frac{v_1}{y_1} \right) - \frac{R^2}{l_*^2} \gamma_c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \quad (2.6)$$

$$= \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta_r + \frac{R_* a_r}{l_* a_{1*}} \delta_a + \frac{R_*^2 \text{Pe}}{l_*^2 \text{Nu}} \delta_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad u_1 = \frac{u}{\beta_*}, \quad v_1 = \frac{v}{\beta_*}$$

$$\alpha_c = \left[1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_c^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2} \right]^2 + m \frac{\beta_* (1-\beta_*) \rho_*^2 a_{c*}^2}{\rho_{1*}^2 a_{1*}^2}, \quad \text{Re} = \frac{\beta_* l a_{c*}}{\mu}$$

$$\delta_r = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{\beta_* a_{c*}^2}{P_*} A_r, \quad \delta_a = \frac{1}{2} A_c, \quad \delta_r = \frac{\gamma-1}{3\gamma} \left[1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_{c*}^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2} \right]$$

$$A_e = \left(1 - \frac{P_*}{\rho_{1*} a_{1*}}\right) \left[1 - \frac{(1 - \beta_*) \rho_* a_{e*}^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2}\right], \quad T_e = \frac{(1 - \varphi_{1*}) \rho_{1*} a_{e*}^2}{6 P_*} A_e$$

Система уравнений (2.6) и (2.2) полностью описывает квазиизотермический режим распространения возмущений в звуковом потоке газожидкостной смеси. Влияние проходящей в газовой фазе тепловой релаксации на процесс распространения аналогично воздействию второй (продольной) вязкости смеси. Такой вывод находится в полном соответствии с результатами [8, 11]. Подчеркнем, что порядки величины тепловой релаксации и дисперсии одинаковы (если, конечно, $Re/Nu \sim 1$).

Перейдем к частичной классификации возможных течений квазиизотермического трансзвукового потока газожидкостной смеси, связанной с эффектами дисперсии и тепловой релаксации.

1) Пусть в уравнении (2.6) все члены одного порядка, то есть $\sim \Delta^2 \sim 1/Re \sim R_*^2/l^2 \sim R_* a_{e*}/la_{1*}$. Полагая для простоты

$$\epsilon_{2e} = \frac{\Delta^2}{2} - \frac{R_*^2}{l^2} \epsilon_e = \frac{1}{Re} \epsilon_e + \frac{R_* a_{e*}}{l a_{1*}} \epsilon_e + \frac{R_*^2}{l^2} \frac{Pe}{Nu} \epsilon_e$$

приходим к уравнению

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + r \frac{v_1}{y_1} \right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

2) Если считать эффекты вязкости и сжимаемости малыми в сравнении с тепловой релаксацией ($1/Re \sim R_* a_{e*}/la_{1*} \ll \epsilon \sim \Delta^2 \sim R_*^2/l^2$), то уравнение (2.6) снова примет предыдущий вид.

Отметим, что в квазиизотермических околосвуковых течениях в рассматриваемом приближении хотя и имеет место постоянство температуры в газовой фазе, вовсе пренебрегать теплообменом между пузырьками и жидкостью нельзя.

3) Пренебрежение всеми эффектами диссипации, а следовательно и дисперсии, оправдано при $R_*^2/l^2 \sim 1/Re \sim R_* a_{e*}/la_{1*} \ll \epsilon \sim \Delta^2$, что приводит (2.6) к уравнению Кармана-Фальковича [1, 8].

Пусть теперь $R_*^2/l^2 \ll 1/Re \sim \epsilon \sim \Delta^2 \sim R_* a_{e*}/la_{1*}$. Подчиним безразмерные коэффициенты в (2.6) связям

$$\epsilon_{2e} = \frac{\Delta^2}{2} - \frac{1}{Re} \epsilon_e + \frac{R_* a_{e*}}{l a_{1*}} \epsilon_e$$

означающие, что формирование структуры потока смеси происходит под воздействием эффектов нелинейности, вязкости и сжимаемости. Уравнение (2.6) сведется к виду

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + r \frac{v_1}{y_1} \right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad (2.7)$$

совпадающему с уравнением из [2], где численно исследовалось влия-

яние вязкости и теплопроводности на асимптотическую картину обтекания тонких тел вращения звуковым потоком реального газа.

5) Если же, наконец, принять $\varepsilon \sim R_*^2/l^2 \ll \Delta^2 \sim 1/\text{Re} \sim R_* a_{*s}/la_{*s}$ и для простоты полагать

$$\frac{\Delta^2}{2} = \frac{1}{\text{Re}} \hat{\eta}_e + \frac{R_* a_{*s}}{l a_{*s}} \hat{\eta}_a$$

то приходим к уравнению Рыжова [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{v}{y_1} = 0 \quad (2.8)$$

описывающему течение смеси, формирующегося, в основном, под воздействием эффектов вязкости и сжимаемости. В случае осесимметричного течения ($\varepsilon=1$) оно применено в [1, 8] для исследований задач обтекания тонких тел вращения звуковыми потоками реального газа и химически активной многокомпонентной газовой смеси.

3. *Обтекание профилей.* В случае плоского течения ($\varepsilon=0$) сформулируем для уравнений (2.8) и (2.2) внешнюю граничную задачу обтекания [12, 13]

$$\text{при } |x_1| \rightarrow \infty \quad \text{для любых } y_1 \quad u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

$$\text{при } y_1 \rightarrow 0 \quad v \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Решение поставленной задачи будем искать в классе автомодельных функций. Предварительно обратимся к системе уравнений (2.7) и (2.2), искомые решения которых представим в виде

$$u_1 = y_1^{-s} f(\xi), \quad v = y_1^{-p} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-1}$$

Аналогично [2], подставляя эти решения в систему и устремляя y_1 к бесконечности, оставшая x_1 конечным, найдем порядки убывания членов системы уравнений в зависимости от y_1

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim y_1^{-2s-1}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \sim y_1^{-p-2}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \sim y_1^{-s-2}, \quad p = n+1-s$$

Исходя из приведенных оценок, уравнение (2.7) допускает автомодельное решение при $s=2/3$, $p=-(3n+1)/3$. Требования, при которых реализуется (2.8), приводят к системе неравенств $s > 1/2$, $n > 2-2s$, $n \geq 5$. При полученном значении $s=2/3$ из этой системы следует $n > 2/3$. Таким образом, автомодельные решения уравнения Рыжова (2.8) можно представить как

$$u = y_1^{-2/3} f(\xi), \quad v = y_1^{-(3n+1)/3} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-2/3}, \quad n > \frac{2}{3}$$

В плоском случае ($\varepsilon=0$) функция $f(\xi)$ будет удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{12n+10}{9} f + n(n-1)f = 0 \quad (3.3)$$

после решения которого функция $g(\xi)$ определится из равенства

$$g = \frac{3}{3n+1} \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{2n}{3} \xi f \right) \quad (3.4)$$

Можно показать, что асимптотическими разложениями трех линейно-независимых решений уравнения (3.3) являются:

$$f = b_1 |\xi|^{-3n/2} \left[1 + \frac{27}{16} n \left(n + \frac{2}{3} \right) \left(n + \frac{4}{3} \right) |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.5)$$

$$f = b_2 |\xi|^{-3n/2-3/2} \left[1 - \frac{9}{8} (n+1) \left(n + \frac{5}{3} \right) \left(n + \frac{7}{3} \right) |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.6)$$

$$f = b_3 |\xi|^{-3n/2} \exp \left(-\frac{4}{27} \xi^3 \right) \left[1 - \frac{3(27n^2 - 45n + 17)}{16} |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.7)$$

где b_1, b_2, b_3 — произвольные константы.

Краевым условиям (3.1) и (3.2) полностью удовлетворяют решения (3.5) и (3.7), причем последнее непригодно при $\xi \rightarrow -\infty$. Решение (3.6) удовлетворяет краевым условиям (3.1), но не (3.2). Таким образом, аналогично [1, 8, 12], задача нахождения автомодельных решений уравнений (2.8), (2.2) сводится к задаче определения собственных значений уравнения (3.3). Требуется найти такие значения параметра n , при которых решение уравнения (3.3) определялось разложением (3.5), если $\xi \rightarrow -\infty$ и при $\xi \rightarrow \infty$ удовлетворяло условию

$$\frac{3n+1}{2} \xi^{(3n+1)/2} g(\xi) \rightarrow 0$$

Последнее условие эквивалентно требованию обращения в нуль постоянной b_2 в разложении (3.6). Весь спектр собственных значений приведен в [13], а именно: $n = (2N+1)/3$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Для сформулированной задачи приемлемым первым собственным значением является $n=1$. Тогда уравнение (3.3) один раз интегрируется и после замен

$$f = \eta^{2/3} w(\eta), \quad \eta = -4\xi^3/27$$

приведется к канонической форме уравнения Куммера [14, 15]

$$\eta \frac{d^2 w}{d\eta^2} + \left(\frac{4}{3} - \eta \right) \frac{dw}{d\eta} - \frac{7}{6} w = 0$$

Используя стандартные обозначения вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера), напишем общее решение [15]

$$f = c_1 \eta^{2/3} \Phi \left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta \right) + c_2 \eta^{1/3} \Phi \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \eta \right) \quad (3.8)$$

Связь между постоянными c_1 и c_2 определим из условия стремления к нулю асимптотического представления функции f при $\eta \rightarrow \infty$. Получим

$$c_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}c_1 = -2\sqrt{3}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}c_1$$

Учитывая полученную связь, формулу (3.8) перепишем в виде

$$f = c_1 \eta^{2/3} \left[\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - 2\sqrt{3} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \eta^{-1/3} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \eta\right) \right] \quad (3.9)$$

Решение в форме (3.9) удобно для выяснения асимптотического поведения функции f при $\eta \rightarrow \infty$. Используя асимптотическое представление функций Куммера, имеем

$$f = \frac{2}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\eta)^{-1/2} + \dots = \sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \xi^{-3/2} \quad (3.10)$$

Для нахождения асимптотики функции f при $\eta \rightarrow \infty$ введем в рассмотрение функцию Трикоми [15]. Тогда

$$3\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)f(\eta) = -\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)c_1\eta^{2/3}\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right)$$

Используя асимптотическое представление функций Трикоми при $\eta \rightarrow \infty$, находим

$$f = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \eta^{-1/2} + \dots = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\xi)^{-3/2} \quad (3.11)$$

Скомбинируем равенство (3.4) с полученным из (3.3) после однократного интегрирования уравнением для функции f и далее перейдем к новой переменной η . Функция g определится теперь из равенства

$$g(\eta) = 2^{2/3} \eta^{1/3} \left(\frac{df}{d\eta} - \frac{1}{3\eta} f \right)$$

Применяя правила дифференцирования к функциям Куммера и Трикоми, найдем точное выражение для функции g

$$g(\eta) = c_1 2^{1/3} \left[\frac{2}{3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{1}{3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \eta\right) - \right. \\ \left. - \frac{5\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \eta^{2/3} \Phi\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \eta\right) \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} 2^{1/3} c_1 \left[\frac{1}{3} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{7}{6} \eta \Psi\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{3}, \eta\right) \right]$$

Аналогично выводам формул (3.16) и (3.11) отсюда нетрудно получить асимптотические представления функции g [14, 15] при $\eta \rightarrow \infty$

$$g = \frac{7}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 (-\eta)^{-7/6} + \dots = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \xi^{-7/2}$$

при $\eta \rightarrow \infty$

$$g = \frac{5\sqrt{3}}{18} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 \eta^{-7/6} + \dots = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\xi)^{-7/2}$$

Соответствующие полученным формулам разложения продольной и поперечной составляющих вектора возмущенной скорости начинаются с членов

при $\xi \rightarrow -\infty$

$$u = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-3/2} + \dots, \quad v = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-7/2} y_1 + \dots$$

при $\xi \rightarrow \infty$

$$u = \sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 x_1^{-3/2} + \dots, \quad v = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 x_1^{-7/2} y_1 + \dots$$

Построенное решение описывает возмущения, которые вносит находящийся в начале координат двумерный диполь в равномерный поток, скорость которого на бесконечности равна в точности изотермической скорости звука газожидкостной смеси. Действительно, для момента диполя имеем [16]

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 v dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g(\xi) d\xi = -5\sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1$$

STATIONARY SONIC FLOW OF GAS-FLUID MIXTURE UNDER QUASITHERMIC BEHAVIOUR OF GAS PHASE

G. G. OHANIAN

Գ. Գ. ՕՆՆՅԱՆ

Ա. մ. փ. ու. ու. մ.

Դուրս էն բերված կարճ աղիքների տիպի երկչափ ոչ դժային համասարումները: Ստացված համասարումները նկարագրում են այնպիսի զաղահեղուկ խառնուրդի ստացիոնար շարժումը, որի պղպշակների թերմոդինամիկական վարքը մոտ է իզոթերմին: Դիտարկվող մոտավորությունում բվադիկոթերն տրանսմայնային շարժման ղեկարում ցույց է արված, որ շնայած դաշային փոշում ջերմատիճունը մնում է անփոփոխ, այնուհանդերձ ջերմափոխանակությունը պղպշակների և նրանց շրջապատող հեղուկի միջև տրամաբեղ չի կարելի: Ջերմային սեղաբաղկացի ազդեցությունը համասարումների տեսքի վրա համարմեր է երկրորդ (քնդայնական) մածուցիկության առկայությունը:

Մասնավոր ղեկարում, երբ պատահեղուկ խառնուրդի հոսանքի կոտուցվածքը բնորոշվում է միայն մածուցիկության և սեղմելիության էֆեկտների առկայությամբ, լուծված է հարթ մարմինների շրջառման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.—ПММ, 1965, т. 29, № 6, с. 1004—1011.
2. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений.—ПММ, 1964, т. 28, № 6, с. 996—1007.
3. Диеперов В. И., Рыжов О. С. Второе приближение в асимптотической теории обтекания тел вращения звуковым потоком реального газа.—ПММ, 1967, т. 31, № 5, с. 783—793.
4. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Г. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
6. Кузнецов В. В., Накоряков В. Г., Носков Г. Г., Шрейбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкостях с пузырьками газа.—В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
7. Губадзулин А. А., Иванова А. И., Нигматуллин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
8. Наполитано Т. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5, с. 1229—1261.
9. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—В кн.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
10. Оганян Г. Г. Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 3—13.
11. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях.—Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, № 3, с. 438—449.
12. Лодыженский М. Д. О некоторых интегралах уравнений околозвуковых течений газа.—Инж. ж., 1962, т. 2, № 1, с. 6—10.

13. Дзесперов В. И. О функции Грина линейризованного вязкого трансзвукового уравнения.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5, с. 1265—1279.
14. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиглица. М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Бейтмен Г., Эрдеди А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1978. 295 с.
16. Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
7 XII.1987

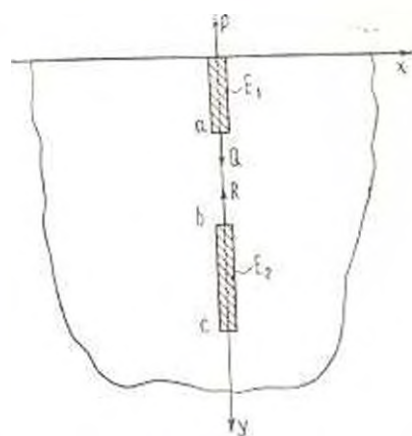
УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ (ПАКЛАДКАМИ)

АГАБЕКЯН П. В., ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу пластины. Причем стрингеры перпендикулярны к границе пластины и находятся на одной линии. Задача с помощью метода факторизации и метода ортогональных разложений Чебышева сводится к решению квазилинейной регулярной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений.

Пусть полубесконечная пластина с двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу, деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров. Модули упругости стрингеров равны E_1 и E_2 (фиг. 1). Относительно стрингеров принимается во влия-



Фиг. 1.

ние модели контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1]. Тогда уравнения равновесия стрингеров, в силу вышесказанного, запишутся в виде

$$\frac{d^2 v^{(1)}}{dy^2} = \frac{1}{E_1 F} \int_{-y}^0 \tau(\eta) d\eta + \frac{Q}{E_1 F} \quad 0 < y < a \quad (1)$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy} = \frac{1}{E_2 F} \int_y^c \tau(\eta) d\eta, \quad b < y < c$$

при условиях

$$\int_a^a \tau(s) ds = P - Q, \quad \int_b^c \tau(s) ds = R \quad (1)$$

Здесь $\tau(y)$ — интенсивность контактных тангенциальных сил, $v^{(1)}(y)$ — перемещения точек стрингеров, F — площадь поперечного сечения стрингеров, P, Q, R — интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах стрингеров.

С другой стороны, для вертикальных деформаций полубесконечной пластины имеем

$$\begin{aligned} \frac{dv^{(2)}}{dy} = \frac{1}{\pi H} \left[\int_a^a \left(\frac{d_1}{\eta + y} - \frac{d_2}{\eta - y} - \frac{d_3(\eta^2 - \eta y)}{(\eta + y)^3} \right) \tau(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi H} \int_b^c \left(\frac{d_1}{\eta + y} - \frac{d_2}{\eta - y} - \frac{d_3(\eta^2 - \eta y)}{(\eta + y)^3} \right) \tau(\eta) d\eta, \quad 0 < y < \infty \right] \end{aligned} \quad (2)$$

где H — толщина пластины

$$d_1 = \frac{\nu^2 + (\nu^2 + 2\nu)^2}{4\nu(\nu^2 + \nu)(\nu^2 + 2\nu)}, \quad d_2 = \frac{\nu^2 + 3\nu}{4\nu(\nu^2 + \nu)}, \quad d_3 = \frac{\nu^2 + \nu}{2\nu(\nu^2 + 2\nu)}, \quad \nu = \frac{2\nu}{\nu + 2\nu}$$

Имея в виду (1), (2) и учитывая условия контакта

$$v^{(1)}(y) = v^{(2)}(y) \quad \text{при} \quad 0 < y < a \quad \text{и} \quad b < y < c$$

после некоторых преобразований получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижной особенностью:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^1 \left(\frac{B}{\eta + y} - \frac{1}{\eta - y} - \frac{A(\eta^2 - \eta y)}{(\eta + y)^3} \right) \varphi(\eta) d\eta = \gamma_1 \int_b^1 \tau(\eta) d\eta + \\ + \gamma_1 \frac{Q}{a} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (0 < y < 1) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\eta - y} \varphi(\eta) d\eta = -\gamma_2 \int_b^1 \tau(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}(y, \eta) \tau(\eta) d\eta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (-1 < y < 1) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\varphi(y) = \varphi_1(y), \quad \psi(y) = \tau \left(\frac{c-b}{2} y + \frac{c+b}{2} \right)$$

$$K_{11}(y, \tau) = \frac{1}{\tau_0 + \tau - \tau_1 y} - \frac{B}{\tau_0 + \tau - \tau_1 y} + \frac{A(\tau_0 + \tau)(\tau_0 + \tau - \tau_1 y)}{(\tau_0 + \tau - \tau_1 y)^2}$$

$$K_{11}(y, \tau) = \frac{B}{2\tau_0 + \tau + y} - \frac{A(\tau_0 + \tau)(\tau - y)}{(2\tau_0 + \tau + y)^2}$$

$$K_{22}(y, \tau) = \frac{B}{\tau_1 + \tau_1^{-1} y + \tau_2} - \frac{1}{\tau_1 + \tau_1^{-1} y + \tau_2} - \frac{A(\tau_1 - \tau_1^{-1} y - \tau_2)\tau}{(\tau_1 + \tau_1^{-1} y + \tau_2)^2}$$

$$\tau_0 = \frac{c+b}{c-b}, \quad \tau_1 = \frac{2a}{c-b}, \quad \tau_2 = \frac{b+c}{2a}$$

$$A = d_1^{-1} d_2, \quad B = d_2^{-1} d_1, \quad \tau_1 = \frac{d_1^{-1} a H}{E_1 F}, \quad \tau_2 = \frac{d_1^{-1} (c-b) H}{2E_2 F}$$

Сначала рассмотрим уравнение (3), продолжая его в область $1 < y < \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{B}{\tau + y} - \frac{1}{\tau - y} - \frac{A(\tau^2 - \tau_1 y)}{(\tau + y)^2} \right] \varphi^-(\tau) d\tau = \\ & = \epsilon_1 \left(\int_0^\infty \theta(\tau - y) \varphi^-(\tau) d\tau + \frac{Q}{a} \right) \theta(1 - y) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(y, \tau) \varphi(\tau) d\tau + g^+(y) \end{aligned} \quad (0 < y < \infty) \quad (5)$$

где $\epsilon(y)$ — функция Хевисайда, $K_{11}^-(y, \tau) = \theta(1 - y) K_{11}(y, \tau)$,

$$g^+(y) = \theta(y - 1) d\tau^{(1)} / dy, \quad \varphi^-(y) = \epsilon(1 - y) \varphi(y).$$

После замены в (5) $\tau = e^u$, $y = e^v$ и применения преобразования Фурье получим

$$K(z) \bar{\varphi}_1^-(z) + \frac{1}{z} \bar{\varphi}_1^-(z - i) + \bar{f}^-(z) = -\epsilon_1 \frac{Q}{az} + \bar{g}_1^-(z) \quad (6)$$

$$(-1 < \operatorname{Im} z < -v), \quad (0 < v < 1)$$

где

$$\bar{K}_1(z) = \frac{\operatorname{ch} \pi z - A(z + i)^2 - B}{\operatorname{sh} \pi z}, \quad z_1 = -iv, \quad K(z_1) = 0$$

$$\bar{f}^-(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 K_{11}(z, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$\bar{K}_{11}(z, \tau) = \int_0^1 K_{11}(y, \tau) y^{z-1} dy = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m K_{11}(y, \tau)}{\partial y^m} \Big|_{y=1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+m+1)}$$

$$-(-1)^n \frac{\Gamma(ix)}{\Gamma(ix+n+1)} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} K_M(y, \tau)}{\partial y^{n+1}} y^{ix+n} dy, \quad (\text{Im} z < 0) \quad (7)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\bar{\varphi}_1(z)$ и $\bar{g}_1(z)$ являются трансформантами Фурье функций $\varphi_1(u) = \varphi^-(e^u)$, $g_1^+(u) = -ig^-(e^u)$ соответственно.

Решение функционального уравнения построим следующим образом: для этого $\bar{K}(z)$ представим в виде

$$\bar{K}(z) = \frac{z}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + i\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(1 - i\frac{z}{2}\right)} G(z)$$

где

$$\frac{\text{ch}\pi z - 1}{\text{sh}\pi z} = \frac{z}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + i\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(1 - i\frac{z}{2}\right)}, \quad G(z) = \frac{\text{ch}\pi z - A(z+i)^2 - B}{\text{ch}\pi z - 1}$$

далее факторизуем $\bar{K}(z)$, записав в виде

$$\bar{K}(z) = \bar{K}^+(z) \bar{K}^-(z), \quad -1 < \text{Im} z < -\gamma$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}^+(z) &= \bar{M}^+(z) |\bar{L}^-(z)|^{-1}, \quad \bar{K}^-(z) = \bar{M}^-(z) \bar{L}^-(z) \\ \bar{M}^+(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - i\frac{z}{2}\right)}, \quad \bar{M}^-(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + i\frac{z}{2}\right)} \frac{z}{2} \\ \bar{L}^-(z) &= \exp[\bar{R}^-(z)], \quad \bar{L}^+(z) = \exp[-\bar{R}^+(z)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{i-\infty}^{i+\infty} \bar{R}(z) \exp(-izu) dz, \quad (-1 < z < -\gamma)$$

$$\bar{R}(z) = \bar{R}^+(z) + \bar{R}^-(z) = \ln G(z)$$

$$\bar{R}^+(z) = \int_0^\infty R(u) \exp(izu) du, \quad \bar{R}^-(z) = \int_{-\infty}^0 R(u) \exp(izu) du$$

$\bar{K}^+(z)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} z > -1$, $\bar{K}^-(z)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} z < -\gamma$. Причем при $|z| \rightarrow \infty$

$\bar{K}^+(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{K}^-(z) \sim z^{\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности.

Далее, поступая аналогично тому, что делается при решении функ-

интегральных уравнений аналогичного типа [2], его можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_1^+(z) = & \bar{\varphi}_1^-(z) \bar{K}^-(z) + i_1 \bar{\Phi}^-(z) + \bar{F}^-(z) + \frac{i_1 P}{a} \frac{|\bar{K}^+(0)|^{-1}}{z} + \\ & + \frac{f_0 |\bar{K}^+(0)|^{-1}}{a} - \bar{g}_1^+(z) |\bar{K}^-(z)|^{-1} - \frac{i_2 Q}{a} \frac{|\bar{K}^+(z)|^{-1} - |\bar{K}^+(0)|^{-1}}{z} - \\ & - i_2 \bar{\Phi}^+(z) - \bar{F}^+(z) = L_2^-(z), \quad (-1 < \operatorname{Im} z < -\nu) \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}^+(z) + \bar{\Phi}^-(z), \quad \bar{F}(z) = \bar{F}^+(z) + \bar{F}^-(z)$$

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{|\bar{K}^+(z)|^{-1} \bar{\varphi}_1^-(z-i) - |\bar{K}^-(0)|^{-1} \bar{\varphi}_1^-(i)}{a}, \quad \bar{\varphi}_1^-(i) = \frac{P-Q}{a}$$

$$\bar{F}(z) = \frac{z |\bar{K}^+(z)|^{-1} \bar{F}(z) - |\bar{K}^-(0)|^{-1} f_0}{a}, \quad f_0 = \operatorname{Res}_{z=0} |\bar{F}^-(z)|$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Im} z = -\nu}^{\operatorname{Im} z = \nu} \bar{\Phi}(z) \exp(-iz u) dz, \quad F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Im} z = -\nu}^{\operatorname{Im} z = \nu} \bar{F}(z) \exp(-iz u) dz$$

$$\bar{\Phi}^+(z) = \int_0^\infty \Phi(u) \exp(izu) du, \quad \bar{F}^+(z) = \int_0^\infty F(u) \exp(izu) du$$

$$\bar{\Phi}^-(z) = \int_{-\infty}^0 \Phi(u) \exp(izu) du, \quad \bar{F}^-(z) = \int_{-\infty}^0 F(u) \exp(izu) du$$

Заметим, что при $|z| \rightarrow \infty$ $\bar{\varphi}_1^-(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{g}_1^+(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности, поскольку функции $\varphi_1^+(v)$, $g_1^+(v)$ при $v \rightarrow \pm 0$ имеют корневую особенность. Тогда очевидно, что $\Phi(z) \sim |z|^{-1}$ при $|z| \rightarrow \infty$, $z = z + iz$, и следовательно, $\Phi(u) \sim \ln|u|$ при $u \rightarrow 0$. Из этого непосредственно следует, что функции $\bar{\Phi}^\pm(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ имеют порядок $\frac{\ln z}{z}$ в своих областях регулярности. Далее, так как $\bar{F}(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} - iz z^{-\frac{1}{2}} (z^\pm = \theta(\pm z)z)$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $F(u) \sim u^{-\frac{1}{2}}$ при $u \rightarrow \pm 0$. Это говорит о том, что $\bar{F}^+(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$, а $\bar{F}^-(z) \sim z^{-1}$ при $|z| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности.

Из вышесказанного следует, что функции $L_1^+(z)$ и $L_2^-(z)$ принимают конечные значения в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < -\nu$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Теперь, применив к (9) обратное преобразование Фурье, получим

$$L_1^+(v) = L_2^-(v), \quad L_1^-(v) = 0 \text{ при } v > 0, \quad L_2^+(v) = 0 \text{ при } v < 0. \text{ Но это ра-}$$

венство может иметь место лишь только тогда, когда $L_1^-(v)$ и $L_2^+(v)$ будут функциями, сосредоточенными в нуле. Следовательно [3],

$$L_1^-(v) = L_2^+(v) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta^{(k)}(v), \quad \delta^{(k)}(v) = \frac{d^k}{dv^k} \delta(v)$$

Применив к $L_1^-(v)$, $L_2^+(v)$ преобразование Фурье, будем иметь

$$\bar{L}_1^-(z) = \bar{L}_2^+(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_k (-iz)^k, \quad -1 < \text{Im} z < -\gamma$$

Отсюда, имея в виду, что $\bar{L}_1^-(z) \sim 0(1)$, $\bar{L}_2^+(z) \sim 0(1)$ при $|z| \rightarrow \infty$ в полосе $-1 < \text{Im} z < -\gamma$, получим $\bar{L}_1^-(z) = \bar{L}_2^+(z) = a_0$. Тогда из (9) получим

$$\bar{\varphi}_1^-(z) = \frac{a_0}{K^-(z)} + i_1 \frac{\bar{\varphi}^-(z)}{K^-(z)} - \frac{\bar{F}^-(z)}{K^-(z)} - \frac{i_1 \rho a^{-1} + f_0}{K^-(0)K^-(z)} \quad (10)$$

$$\bar{g}_1^+(z) = a_0 \bar{K}^+(z) + i_2 \frac{Q}{a} + \frac{\bar{K}^+(z) - \bar{K}^+(0)}{\bar{K}^+(0)z} + i_1 \bar{K}^+(z) \bar{\varphi}^+(z) + \bar{K}^+(z) \bar{K}^+(z)$$

Если в (10) положить $\bar{F}^-(z) = 0$, $f_0 = 0$, получим выражение $\bar{\varphi}_1^-(z)$ той задачи, в которой рассматривается полубесконечная пластина с выходящим на границу стрингером (задача Рейснера) [1.4].

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что после вычисления интегралов (8), функции $\bar{K}^+(z)$, $\bar{K}^-(z)$ будут даваться в виде бесконечных произведений

$$\begin{aligned} \bar{K}^+(z) &= \exp(-\bar{R}^+(0)) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right)^2}{\Gamma\left(1 - i\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_1 + 2i}\right)} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2ki}\right)^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_k + 2i}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_k - 2i}\right)} \\ \bar{K}^-(z) &= -\frac{1}{2} \exp(\bar{R}^-(0)) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha + i}{\alpha_1 + i}\right)}{\Gamma\left(1 + i\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha + i}{3i}\right)} \times \\ &\times \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\alpha + i}{\alpha_k + i}\right) \left(1 + \frac{\alpha + i}{\alpha_k - i}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha + i}{(2k+1)i}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

где $\alpha_k, -\bar{\alpha}_k$ являются нулями функции $K(z)$, расположенными в порядке $0 < \text{Im} \alpha_k < \text{Im} \alpha_{k+1}$, и $\text{Re} \alpha_k > 0$ ($k = 2, 3, \dots$), а $\bar{\alpha}_k$ — число, сопряженное к α_k . Причем,

$$\alpha_k = (2k - 3)i + \frac{2}{\pi} \ln |\sqrt{2A}(2k - 3)| \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

Отметим, что при получении (10) имелось в виду представление [5]

$$\frac{G(x)}{G(-i)} = -\frac{4}{\pi^2 x^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left| 1 - \frac{(x+i)^2}{(x_k+i)^2} \right| \left| 1 - \frac{(x-i)^2}{(x_k-i)^2} \right|}{\left(1 + \frac{x^2}{4k^2} \right)^2}$$

Функции $\bar{\varphi}^-(x)$, $\bar{F}^-(x)$, $\bar{\Phi}^-(x)$ регулярны при $\text{Im} x < -\nu$, аналитическое продолжение функции $\bar{F}^-(x)$, как следует из (7), имеет простые полюса в точках $x=in$ ($n=1, 2, \dots$), а функции $\bar{\varphi}_1^-(x)$ — в точках $x_1 = -i\nu$, $x = x_1 + in$, $x = x_k + in$, $x = -x_k + in$ ($n=0, 1, 2, \dots$, $k=2, 3, \dots$), в котором нетрудно убедиться, обсуждая функциональное уравнение (6). Функция $\bar{\Phi}^-(x)$ имеет полюса в тех точках, что и $\bar{\varphi}_1^-(x)$ кроме точек $x=a_1$, $x=x_k$, $x=-x_k$.

Из вышесказанного следует, что функции $\tau(ay)$, $\bar{F}^-(x)$ и $\bar{\Phi}^-(x)$ имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} \tau(ay) = i \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} y^{n-i\nu_m} \right) m^{-\nu} X_m + \right. \\ \left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} y^{n-i\nu_k} \right) m^{-\nu} Y_m \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^-(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n (\bar{K}^+(x_m + in + i))^{-1} \bar{b}_{nm}}{(x - a_m - in - i)(x_m + in + i)} \right) m^{-\nu} X_m + \right. \\ \left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n (\bar{K}^+(-\bar{x}_m + in + i))^{-1} \bar{b}_{nm}}{(x + \bar{x}_m - in - i)(-\bar{x}_m + in + i)} \right) m^{-\nu} Y_m \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{F}^-(x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_{am} \int_{-1}^1 \frac{1}{\gamma_0 + \eta} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \eta} \right)^m \psi(\eta) d\eta \quad (14)$$

где

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \eta} < 1, \quad I_{am} = \frac{1 - (-1)^m [B - A(m+1)^2]}{-\bar{K}^+(im)(x - im)}$$

$$m^{-\nu} X_m = \text{Res}_{x=a_m} \bar{\varphi}_1^-(x), \quad m^{-\nu} Y_m = \text{Res}_{x=-\bar{x}_m} \bar{\varphi}_1^-(x), \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$(-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} m^{-\nu} X_m = \text{Res}_{x=x_m+in} \bar{\varphi}_1^-(x), \quad (-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} m^{-\nu} Y_m = \text{Res}_{x=-\bar{x}_m+in} \bar{\varphi}_1^-(x)$$

$$\bar{b}_{nm} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(x_m + i\varphi_j) K(x_m - i\varphi_j)}, \quad \bar{b}_{nm} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(-\bar{x}_m + i\varphi_j) K(-\bar{x}_m + i\varphi_j)}$$

$$\bar{b}_{0m} = \bar{b}_{um} = 1$$

Выше имелось в виду, что

$$\operatorname{Res} \bar{K}_{11}(z, \tau) = - \frac{i}{m!} \left. \frac{\partial^m K_{11}(y, \tau)}{\partial y^m} \right|_{y=0}$$

Кроме того, полагалось, что все z_k комплексны. В случае мнимого z_k надо в выражениях (12), (13), (14) подставить $\bar{Y}_k = 0$.

Теперь, имея в виду (13), (14), из (16) легко получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} X_k + \frac{\nu_2 k^2 \bar{K}^-(z_k)}{K^-(z_k)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(R_{km}^{(1)} X_m + R_{km}^{(2)} Y_m \right) + \frac{k \bar{F}^-(z_k) \bar{K}^-(z_k)}{K^-(z_k)} = \\ = \frac{\alpha_0 k^2 \bar{K}^-(z_k)}{K^-(z_k)} - \frac{(\nu_2 P \alpha^{-1} + f_0) \bar{K}^-(z_k) k^2}{K^-(0) K^-(z_k) z_k} \\ Y_k + \frac{\nu_1 k^2 \bar{K}^+(-\bar{z}_k)}{K^+(-\bar{z}_k)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(R_{km}^{(1)} X_m + R_{km}^{(2)} Y_m \right) + \frac{k \bar{F}^+(-\bar{z}_k) \bar{K}^+(-\bar{z}_k)}{K^+(-\bar{z}_k)} = \\ = \frac{\alpha_0 k^2 \bar{K}^+(-\bar{z}_k)}{K^+(-\bar{z}_k)} + \frac{(\nu_1 P \alpha^{-1} + f_0) \bar{K}^+(-\bar{z}_k) k^2}{K^+(0) K^+(-\bar{z}_k) \bar{z}_k} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{km}^{(1)} &= m^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-\nu_1)^n (\bar{K}^-(z_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(z_k - z_m - in - i)(z_m + in + i)} \\ R_{km}^{(2)} &= m^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1)^n (\bar{K}^+(-\bar{z}_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(z_k + \bar{z}_m - in - i)(-\bar{z}_m + in + i)} \\ \tilde{R}_{km}^{(1)} &= -m^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-\nu_1)^n (\bar{K}^+(z_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(z_k + z_m + in + i)(z_m + in + i)} \\ R_{km}^{(2)} &= -m^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-\nu_1)^n (\bar{K}^+(-\bar{z}_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(z_k - \bar{z}_m + in + i)(-\bar{z}_m + in + i)} \end{aligned}$$

Далее функцию $\varphi(y)$ ищем в виде [6, 7]

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(y)$$

где $T_n(y) = \cos(\arccos y)$ — многочлены Чебышева первого рода. Подставив эту функцию в выражения $\bar{F}^-(z_k)$, $\bar{F}^+(-\bar{z}_k)$ и в (4), в итоге получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n U_{n-1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau) \tau_2}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K_{21}(y, \tau) \frac{T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right] =$$

(15)

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}(y, \eta) \eta^{n-i_2 m} d\eta \right) m^{-1} X_m + \right. \\
& \quad \left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \bar{b}_{nm} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}(y, \eta) \eta^{n+i_2 m} d\eta \right) m^{-1} Y_m \right] = \\
& = A_0 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}(y, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} - \lambda_2 \arccos y \right), \quad (-1 < y < 1) \\
& X_k + \lambda_1 \frac{\bar{K}^+(z_k) k^i}{K'(z_k)} \sum_{m=1}^{\infty} (R_{km}^{(1)} X_m + R_{km}^{(2)} Y_m) +
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{K}^+(z_k) k^i}{K'(z_k)} \sum_{n=1}^{\infty} L_{kn} A_n = \frac{a_0 k^i \bar{K}^+(z_k)}{K'(z_k)} - \\
& - \frac{(\lambda_1 P a^{-1} + f_0) \bar{K}^+(z_k) k^i}{\bar{K}^+(0) K'(z_k) z_k} - \frac{k^i L_{k0} A_0 \bar{K}^+(z_k)}{K'(z_k)} \\
& Y_k + \lambda_1 \frac{\bar{K}^+(-\bar{z}_k) k^i}{K'(-\bar{z}_k)} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{R}_{km}^{(1)} X_m + \bar{R}_{km}^{(2)} Y_m) + \\
& + \frac{\bar{K}^+(-\bar{z}_k) k^i}{K'(-\bar{z}_k)} \sum_{n=1}^{\infty} L_{kn} A_n = \frac{a_0 k^i \bar{K}^+(-\bar{z}_k)}{K'(-\bar{z}_k)} + \\
& + \frac{(\lambda_1 P a^{-1} + f_0) \bar{K}^+(-\bar{z}_k) k^i}{\bar{K}^+(0) K'(-\bar{z}_k) \bar{z}_k} - \frac{k^i L_{k0} \bar{K}^+(-\bar{z}_k) A_0}{K'(-\bar{z}_k)}
\end{aligned} \tag{17}$$

где $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) / \sin(\arccos x)$ — многочлены Чебышева второго рода,

$$\begin{aligned}
L_{k0} &= \sum_{m=1}^{\infty} I_{a, km} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\gamma_0 + \gamma} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma} \right)^m \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\
L_{k1} &= \sum_{m=1}^{\infty} I_{a, km} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\gamma_0 + \gamma} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma} \right)^m \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} d\gamma \\
L_{kn} &= - \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{m=1}^{\infty} I_{a, km} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{d\gamma^2} \left[\frac{1}{\gamma_0 + \gamma} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma} \right)^m \right] \sqrt{1-\gamma^2} U_{n-1}(\gamma) d\gamma - \\
& - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=1}^{\infty} I_{a, km} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{d\gamma^2} \left[\frac{1}{\gamma_0 + \gamma} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma} \right)^m \right] \sqrt{1-\gamma^2} U_{n+1}(\gamma) d\gamma
\end{aligned}$$

а выражение $\bar{L}_{kn}$ получается из L_{kn} , если в них вместо L_{km} положить L_{-km} .

Отметим, что выше была использована формула [8]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{s-x} \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = L_{n-1}(x) \quad (-1 < x < 1)$$

Умножив обе части равенства (15) на $\sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y)$, при этом имея в виду ортогональность функций $U_{k-1}(y)$ с весом $\sqrt{1-y^2}$, и интегрировав в пределах $-1 < y < 1$, окончательно получим искомую совокупность бесконечных систем линейных уравнений следующего вида.

$$A_k + \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn} A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{kn}^{(1)} X_m + B_{kn}^{(2)} Y_m) = A_0 \delta_{k0} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} X_k + c_1 \frac{K^+(z_k)k}{K^-(z_k)} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{kn}^{(1)} X_n + B_{kn}^{(2)} Y_n) + \\ + \frac{\bar{K}^+(z_k)k^2}{K^-(z_k)} \sum_{n=1}^{\infty} L_{kn} A_n = \frac{a_0 k^2 \bar{K}^+(z_k)}{K^-(z_k)} + \\ + \frac{(c_1 P a^{-1} + f_0) \bar{K}^+(z_k)k^2}{K^-(0)K^-(z_k)z_k} - \frac{k^2 L_{k0} A_0 \bar{K}^+(z_k)}{K^-(z_k)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Y_k + c_1 \frac{k^2 \bar{K}^+(-z_k)}{K^+(-z_k)} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{B}_{km}^{(1)} X_m + \bar{B}_{km}^{(2)} Y_m) + \\ + \frac{\bar{K}^+(-z_k)k^2}{K^+(-z_k)} \sum_{n=1}^{\infty} L_{kn} A_n = \frac{a_0 k^2 \bar{K}^+(-z_k)}{K^+(-z_k)} + \\ + \frac{(c_1 P a^{-1} - f_0) \bar{K}^+(-z_k)k^2}{K^+(0)K^+(-z_k)z_k} - \frac{k^2 L_{k0} A_0 \bar{K}^+(-z_k)}{K^+(-z_k)} \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 K_{21}(y, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \pi i_2 \arccos y \right] \sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y) dy$$

$$B_{kn} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K_{21}(y, \tau) T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \right] \sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y) dy$$

$$B_{k0}^{(1)} = \frac{\tau_k}{a(1-i\tau_k)} \quad B_{k0}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{km}^{(1)} \quad B_{k0}^{(2)} = \frac{\tau_k}{a(1-i\tau_k)} = B_{k0}^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{km}^{(2)}$$

$$B_{kn}^{(1)} = \frac{1}{\pi n(1-x_n)} \left| \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial^2 K_{22}(y, \tau_1)}{\partial y \partial \tau_1} \right| \tau_1^{1-n} d\tau_1 \sqrt{1-y^2} U_{k-2}(y) dy - \right. \\ \left. - \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial^2 K_{22}(y, \tau_1)}{\partial y \partial \tau_1} \right| \tau_1^{1-n} d\tau_1 \sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y) dy \right| \\ \varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}(1, y) \sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y) dy$$

$$B_{kn}^{(2)} = \frac{(-x_1)^n b_{kn}}{\pi n} \left| \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial}{\partial y} K_{22}(y, \tau_1) \tau_1^{n-1-n} d\tau_1 \sqrt{1-y^2} U_{k-2}(y) dy - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial}{\partial y} K_{22}(y, \tau_1) \tau_1^{n-1-n} d\tau_1 \sqrt{1-y^2} U_{k-1}(y) dy \right| \right.$$

а выражение для $B_{kn}^{(2)}$ получится из $B_{kn}^{(1)}$, если в нем вместо x_1 положить $-x_n$ и для $B_{knm}^{(2)}$ — если в $B_{knm}^{(1)}$ вместо x_n положить $-x_n$, а вместо $b_{mn} = \bar{b}_{mn}$.

Заметим, что если в (16) и (17) положить $\{A_k\}_{k=0}^\infty = 0$, то полученная совокупность бесконечных систем будет соответствовать задаче, когда стрингер из участка (b, c) отсутствует [9].

В случае минимого корня τ надо положить в (18), (19) $Y_j = 0$ и не рассматривать (20) при $k=j$.

Ввиду того, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| B_{kn0}^{(1)} \right| < \frac{c_1}{k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| B_{knm}^{(1)} \right| < \frac{c_2}{k} \quad \text{при } k \rightarrow \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| B_{kn} \right| < \frac{c_3}{\sqrt{k}}, \quad \left| K'(z_k) - K''(z_k) \right| < \frac{c_4}{|z_k|^{1/2}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| L_{kn} \right| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| P_{kn}^{(1)} \right| < \infty, \quad z_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

для совокупности совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений следует из невырожденной регулярности.

Постоянные a_0, A_0 и f_0 определяются из условий (1)' и из условия

$$f_0 = -\frac{1-B-A}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(\tau) d\tau}{2\tau-1}$$

Для полного представления о законе изменения $\chi(\tau)$ при

$0 < y < 1$ և մոտիմ ֆորմուլա (9), ևոբոհոմոմ անոն և ասիմոտոտիոսկոս քոնոնոնոն ունո ֆունկտիոն քրոմ $y \rightarrow 1$. Ոո ւոնոնոն և ոնոնոնոնոն, ոն- ոնոնոնոնոնոն ոնոնոն ունո ասիմոտոտիոսկոս ֆորմուլա

$$\begin{aligned} \tau(ay) = & \frac{ia_0\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln y}} + K_0\sqrt{-\ln y} + \frac{ia_0\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{1}{6} + R_0 + \frac{\lambda_1}{\pi} \right) \sqrt{-\ln y} + \\ & + \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{\Gamma(3/2)K^+(0)} (-i) \sqrt{-\ln y} + \frac{ia_0\sqrt{2}}{\pi^2} \left[\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \ln(-\lambda_1 \ln y) \right] \sqrt{-\ln y} + O(\ln y), \quad \text{քրոմ } y \rightarrow 1 \end{aligned}$$

քոն

$$R_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \pi z + A z^2 + B}{\operatorname{ch} \pi z + 1} \right) dz, \quad K_0 = \frac{4}{\pi \sqrt{2\pi} K^+(0)} \int_1^\infty K_{11}(1, z) \lambda(z) dz$$

CONTACT PROBLEM FOR SEMI-INFINITE PLATES STRENGTHENED WITH TWO FINITE STRINGERS

P. V. AGABEKIAN, E. KH. GRIGORIAN

ԵՐԿՈՒ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒՅՆՎԱԶՎԱՆ ԿՈՄԱՆՎԵՐՋ

ՈԱԼԻ ԶԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Պ. Վ. ԱԳԱԲԵԿԻԱՆ, Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Դիսարկված է Երկու վերջավոր վերադիրներով ուժեղացված կիսաան- վերջ սալի համար կոնտակտային խնդիր: Վերադիրներից մեկը զուրա է դալիս սալի Եդր և դիֆուրմացվում է վերադիրի ծայրերում կիրառված ուժերի ուղե- ցույթյան ոտակ: Վերադիրները ուղղահայաց Են սալի Եդրին և զտնվում Են մի դի վրա: Վերադիրների առաձգականության մոդուլները տարրեր Են:

Ֆակտորիզացիայի և Չերիշևի օրթոդոնալ բալմանդամների մեթոդների օդնությամր խնդիրը բերվում է Դանրա՝ալվական հալմանարումների քվադր- լիտվին ոնոուլյար անվերջ համակարգի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стерибера Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке.—Тр. Амер. общ. инж.—механиков, 1968, сер. Е, № 4.
2. Насб. Б. Метод Винера-Хопфа.—М.: Изд-во янжстр. лнг., 1962.
3. Функциональный анализ: Гл. редакция физ-мат. литературы, М., 1972. 467 с.
4. Григорян Э. Х. Об одной проблеме для упругой полуплоскости, содержащей упру- гое конечное включение.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1982, № 2.

5. Григорян Э. Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, естество. науки, 1981. № 3.
6. Arutyunyan A. Kh., Mikhtaryan S. Kh. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold. Nowacki Anniversary Volume, Groningen, Wolters-Noordhoff publishing, 1971.
7. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полов с упругими накладками.—Ереван, Изд. Госуниверситета, 1983.
8. Гробиштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
9. Григорян Э. Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Межвузовской сб. научн. тр., Механика, Ереван, вып. 6, 1987.

Институт механики АН Армянской ССР

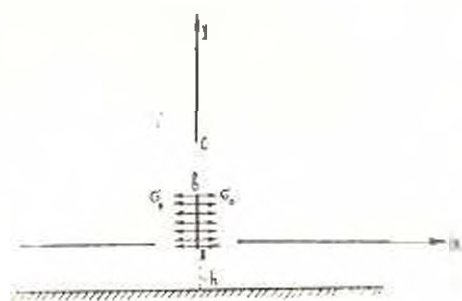
Поступила в редакцию
21.IX.1988

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, ослабленной конечной и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко закреплена, а на поверхностях трещины заданы напряжения



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, \pm 0) &= p_0(x), \quad \sigma_{xy}(x, \pm 0) = q_0(x), \quad (x > a) \\ \sigma_{xx}(+0, y) &= \sigma_0(y), \quad \sigma_{xy}(-0, y) = 0, \quad (0 < y < b, \quad c < y < \infty) \\ u(x, -h) &= v(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

В условии (1) $p_0(x)$ — симметричная, а $q_0(x)$ — антисимметричная функции относительно точки o .

Суть решения поставленной задачи заключается в разбиении исходной области, занятой деформируемым твердым телом на канонические области (квадрант и полюса) и склейке решений для этих областей (при соответствующих граничных условиях) на границе контакта.

В [1] получены соотношения между компонентами вектора смещений и тензора напряжений для квадранта и полюсы:

$$Eu_x(x, +0) = (1 - \nu)p_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} R_1(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_2(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_3(t, x) \tau_1(t) dt \\
Eu'_x(x, -0) &= (1 - \nu) p_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \\
& + \int_0^{\infty} K_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} K_2(t, x) q_1(t) dt \\
Ev'_x(x, +0) &= (\nu - 1) q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_5(t, x) \tau_1(t) dt \\
Ev'_x(x, -0) &= (\nu - 1) q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} K_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} K_4(t, x) q_1(t) dt \\
Eu'_y(0, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{y-t} - \frac{1}{y+t} \right] \tau_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} R_6(t, y) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_7(t, y) q_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_8(t, y) \tau_1(t) dt
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \begin{cases} p(x), & 0 < x < a \\ p_0(x), & a < x < \infty \end{cases}, \quad q_1(x) = \begin{cases} q(x), & 0 < x < a \\ q_0(x), & a < x < \infty \end{cases} \\
\tau_1(y) &= \begin{cases} \tau(y), & b < y < c \\ \tau_0(y), & 0 < y < b, c < y < \infty \end{cases}
\end{aligned}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $\tau(y)$ — нормальные и касательные напряжения на границе контакта, подлежащие определению. E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{1,4}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x \left[z \cos \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \mp \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \frac{z dz}{z}$$

$$R_2(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{(1+z^2) dz}{\Delta}$$

$$R_3(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} + z^2}{\Delta} + \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi z}{2} \right] \exp \left(-\frac{\pi z}{2} \right) \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) dz$$

$$R_{3,1}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[z \cos \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \pm \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} \frac{dz}{\Delta}$$

$$R_4(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} z \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{dz}{\Delta}, \quad \Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2} - z^2$$

$$K_1(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left| i^2 h^2 - 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} \right| \cos i x \cos i t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$K_2(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left| i^2 h^2 - i h - 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} - \frac{\gamma-3}{2(\gamma+1)} \exp(-2ih) + \right. \\ \left. + 0,5 \right| \cos i x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}, \quad K_3(t, x) = K_2(x, t)$$

$$K_4(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left| i^2 h^2 - 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} \right| \sin i x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$\Delta_1 = \operatorname{sh}^2 i h - \frac{2}{\gamma+1} \operatorname{ch} 2i h - 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} - i^2 h^2$$

Указанная граничная задача (1) после удовлетворения условиям контакта

$$u_x(x, 0+) = u_x(x, 0-), \quad v_x(x, 0+) = v_x(x, 0-), \quad (0 < x < a), \\ u_y(0, y) = 0, \quad (b < y < c) \quad (3)$$

сводится к решению системы трех сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $p(t)$, $q(t)$, $\varkappa(t)$,

$$\frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{p(t)}{x-t} dt + \int_0^a M_{1,1}(t, x) p(t) dt + \int_0^a M_{1,2}(t, x) q(t) dt + \\ + \int_0^b K_5(t, x) \varkappa(t) dt = F_1(x), \quad (0 < x < a)$$

$$\frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{q(t)dt}{x-t} + \int_0^a M_{1,1}(t, x)p(t)dt + \int_0^a M_{2,2}(t, x)z(t)dt =$$

$$- \int_b^c |R_2(t, x)z(t)|dt = F_2(x), \quad (0 < x < a)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_b^c \frac{z(t)dt}{x-t} - \int_0^a R_0(t, x)p(t)dt + \int_0^a R_2(t, x)q(t)dt =$$

$$+ \int_b^c \left| R_2(t, x) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x-t} \right| z(t)dt, \quad (b < x < c)$$

Здесь ядра $M_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) и правые части $F_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются следующими формулами:

$$M_{1,1}(t, x) = R_2(t, x) + K_2(t, x); \quad M_{1,2}(t, x) = -|R_4(t, x) - K_4(t, x)|$$

$$M_{2,1}(t, x) = R_1(t, x) - K_1(t, x); \quad M_{2,2}(t, x) = \left| -\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+t} + R_2(t, x) - K_2(t, x) \right|$$

$$F_1(x) = -\frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{p_0(t)dt}{x-t} - \int_a^{\infty} |R_2(t, x) + K_2(t, x)|p_0(t)dt +$$

$$+ \int_a^{\infty} |R_4(t, x) - K_4(t, x)|q_0(t)dt - \int_0^b R_1(t, x)z_0(t)dt + \int_c^{\infty} R_0(t, x)z_0(t)dt$$

$$F_2(x) = -\frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{q_0(t)dt}{x-t} + \frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{q_0(t)dt}{x+t} - \int_a^{\infty} |R_1(t, x) - K_1(t, x)|p_0(t)dt -$$

$$- \int_a^{\infty} |R_2(t, x) - K_2(t, x)|q_0(t)dt - \int_0^b R_0(t, x)z_0(t)dt + \int_c^{\infty} R_2(t, x)z_0(t)dt$$

$$F_3(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t)dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t)dt}{y+t} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t)dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t)dt}{y+t} +$$

$$+ \int_a^{\infty} R_0(t, x)p_0(t)dt - \int_a^{\infty} R_2(t, x)p_0(t)dt - \int_0^b R_2(t, x)z_0(t)dt -$$

$$- \int_c^{\infty} R_2(t, x)z_0(t)dt$$

После замены переменных $x = \frac{a}{2}(z+1)$, $t = \frac{a}{2}(y+1)$ при $0 < t$,

$x < a$ и $x = \frac{c-b}{2}z + \frac{b+c}{2}$, $t = \frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}$ при $b < t$, $x < c$

уравнения (4) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_l(y) dy}{z-y} + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 N_{lj}(y, z) \Phi_j(y) dy = \tau_l(z) \quad (5)$$

$$-1 < z < 1; \quad l = 1, 2, 3$$

Здесь $\Phi_1(y) = p\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$, $\Phi_2(y) = q\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$, $\Phi_3(y) = r\left(\frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}\right)$ и остальные функции $\tau_l(z)$, $N_{lj}(y, z)$ ($l, j = 1, 2, 3$) определяются аналогичным образом. Отметим, что функция $\Phi_3(y)$ имеет особенность только в точке $y = 1$, то есть $\Phi_3(y) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \chi(y)$,

$\chi(y)$; $\tau(y)$ — регулярная функция ($i = 1, 2$), а $\Phi_i(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \lambda_i(y)$, $\lambda_i(y)$ — регулярные функции.

Дополнительное условие, которым должны удовлетворять решения уравнений (4) или (5), следует из рассмотрения равновесия квадранта и имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \Phi_l(y) dy = C \quad (l = 1, 3) \quad (6)$$

Решение системы (5) при условии (6) в указанных классах существует и единственно [2].

Используя квадратурные формулы Гаусса [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{\tau(y)}{(y-\xi_k)} dy = \sum_{i=1}^n \frac{2(1-y_i)}{2n+1} \frac{\tau(y_i)}{y_i-\xi_k}$$

где

$$y_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad \xi_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x_k)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{\lambda(t_i)}{(t_i-x_k)}$$

где

$$t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad x_k = \cos\frac{\pi k}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$h/h=1$ $K \searrow a \ b$	$c/h=2$		
	1	2	3
$K_1(a) =$	0.9339	0.1058	-0.0355
$K_1(a) =$	0.2628	0.0740	0.0369
$K_2(a) =$	-0.2945	0.1142	-0.0609
$K_1(b) =$	1.0137	0.9895	0.9754
$K_1(c) =$	0.2265	0.2349	0.2117

$h/h=5$ $K \searrow a \ b$	$c/h=2$		
	1	2	3
$K_1(a) =$	0.9397	0.1108	-0.0323
$K_1(a) =$	0.2458	0.0552	0.0215
$K_2(a) =$	-0.2866	-0.1184	-0.0629
$K_1(b) =$	1.0141	0.9920	0.9798
$K_1(c) =$	0.2265	0.2349	0.2401

Таблица 1

$c/b = 2.5$			$c/b = 3$		
1	2	3	1	2	3
0.600	0.1532	0.0198	0.3168	0.1788	0.0027
0.2761	0.0788	0.0397	0.2845	0.0824	0.0416
0.2874	0.1176	0.0635	0.2787	0.1190	0.0656
0.7861	0.7659	0.7529	0.6583	0.6412	0.6291
0.1328	0.1373	0.1419	0.0913	0.0939	0.0971

Таблица 2

$c/b = 2.5$			$c/b = 3$		
1	2	3	1	2	3
0.6658	0.1552	0.0166	0.3526	0.1836	0.0002
0.2594	0.0594	0.0238	0.2691	0.0628	0.0255
0.2793	0.1220	0.0656	0.2709	0.1258	0.0674
0.7864	0.7681	0.7568	0.6586	0.6430	0.6327
0.1328	0.1368	0.1408	0.0912	0.0936	0.0963

решение системы (5) сводится к решению системы $3n$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\varphi_i(y_k)$, $\chi_i(t_k)$, $i=1, 2$; $k=1, n$.

После интерполирования по узлам y_i , t_i , $i=1, \dots, n$, для иско-
мых функций получим

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^n \varphi(y_k) \frac{P_n(y)}{(y-y_k)P_n'(y_k)}$$

$$P_n(y) = \frac{\sin((n+1)\arccos y) - \sin(n\arccos y)}{\sin(\arccos y)}$$

$$\chi_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \chi_i(t_k) \frac{T_n(t) \sqrt{1-t_k^2}}{t-t_k}, \quad i=1, 2$$

($T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлены Чебышева).

Коэффициенты интенсивности напряжений определяются при помощи найденной функции $\chi_i(t)$ и $\varphi(y)$ ($i=1, 2$) и вычисляются по формулам

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(0) = \sqrt{2} \chi_1(-1), \quad \frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(a) = \sqrt{2} \chi_1(1), \quad \frac{1}{\tau_0} \cdot K_2(a) = \sqrt{2} \varphi(i)$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(b) = \chi_2(-1) / \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sigma_0} K_1(c) = \chi_2(1) / \sqrt{2}$$

Их численные значения приведены в табл. 1 и 2.

STRESS STATE OF A SEMI-PLANE, WEAKENED WITH FINITE AND SEMI-INFINITE CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՎԵՐՋՈՎՈՐ ԵՎ ԿՐՈՒԱՆԵԼԵՐԶ ՀԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒՆԱՑՎԱԾ ԿՐՈՆԱՐԹՈՐԹՅԱՆ
ԼԱՐՎԱՍՏՈՅԻՆ ՎՐՃԱԿԸ

Բ. Ա. ԱՓՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ՈՒՄՓՈՒՄ

Զիտարկված է վերջավոր և կիսաանվերջ ճաքերով թուլացված առաձգու-
կան կիսաշարժություն լարված ալին դեֆորմացված վիճակի առաձգականու-
թյան տեսության հարթ խնդիրը: Նշված խնդրի լուծման էությունը կայանում
է նրանում, որ առաձգական մարմնի դրադեցրած տիրույթը բաժանվում է եր-
կու կանոնական տիրույթների՝ բառարդ հարթության և շերտի: Իերված են
լարումների ինտենսիվության գործակիցների թվային արժեքները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Афан Б. А., Степанян С. П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами. Изв. АН АрмССР. Механика, 1989, т. 42, № 2, с. 50--57.
2. Мусхелишвили Н. П. Сингулярные интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962. 511 с.
3. Erdogan F. E., Gupta G. On the numerical solutions of singular integral equations. — Quart. appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6 II. 1989