ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

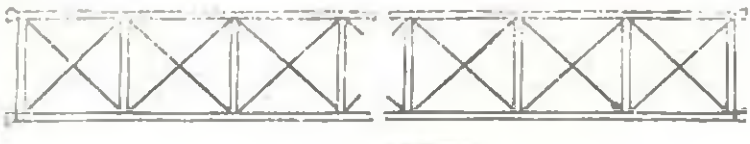
УДК 629.7.02.678.5—419.8

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУПНОГАБАРИТНОЙ ФЕРМЕННО-ВАНТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ КОМПОЗИТОВ

ВОРОБЕЙ В. В., ВОЙТКОВ И. И.

Среди многообразия проектных решений сверхлегких конструкций получили широкое использование ферменно-вантовые крупногабаритные конструкции из композиционных материалов.

На фиг. 1 представлена схема ферменно-вантовой балки, которая может найти самые разнообразные применения, при этом в большинстве известных пректных решений балка имеет большое удлинение $L/H \approx 10^2 \div 10^3$.



Фиг. 1

Анализ нагрузок, воспринимаемых такими конструкциями, показывает, что определяющими являются статические и динамические нагрузки, возникающие в процессе их развертывания или сборки с помощью автоматических фермопостроителей, манипуляторов или операторов сборщиков.

Поэтому, требование достаточно высокой жесткости при минимальном весе в сочетании с максимальной демпфирующей способностью неизбежно приводит проектировщиков к выбору в качестве конструкционных материалов композитов.

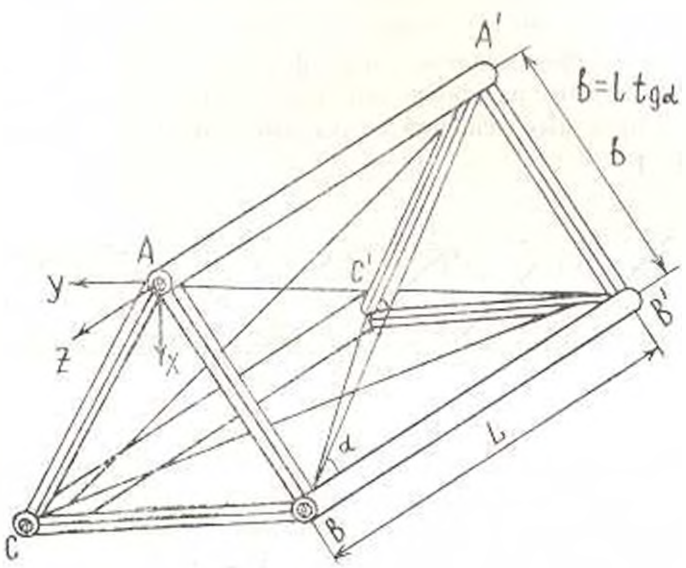
Расчет и проектирование крупногабаритных ферменно-вантовых конструкций с помощью традиционных методов строительной механики непригодны к системам, состоящим из большого числа элементов, так как количество уравнений метода сил или деформации становится настолько большим, что современные ЭВМ не обеспечивают их решения ввиду ограниченного объема памяти.

В связи с этим представляет интерес суперэлементарная идеализация крупногабаритных конструкций и построение их эффективных континуальных моделей.

Для крупногабаритной ферменно-вантовой конструкции, представленной на фиг. 1, континуальная модель может быть построена на основе решения задач растяжения изгиба и кручения периодически повторяющихся элементарных пространственных ячеек. При этом учитываются эффективные характеристики композитных элементов конструкции этой ячейки в зависимости от типа армирования и характеристик упругости наполнителя и связующего.

Рассмотрим ячейку фиг. 2, состоящую из несущих трубчатых композитных стержней AA', BB', CC', AB, BC, AC, $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ и вант AB', BA' и т. д. Пусть ванты имеют предварительное натяжение H_0 и рассматриваются как стержни, работающие только на растяжение.

Стержневые элементы „жестко" закреплены в узлах A, B, C, A', B', C', что делает конструкцию статически неопределимой.



Фиг. 2

Будем находить с помощью метода деформаций перемещения узлов ячейки в 3-х случаях:

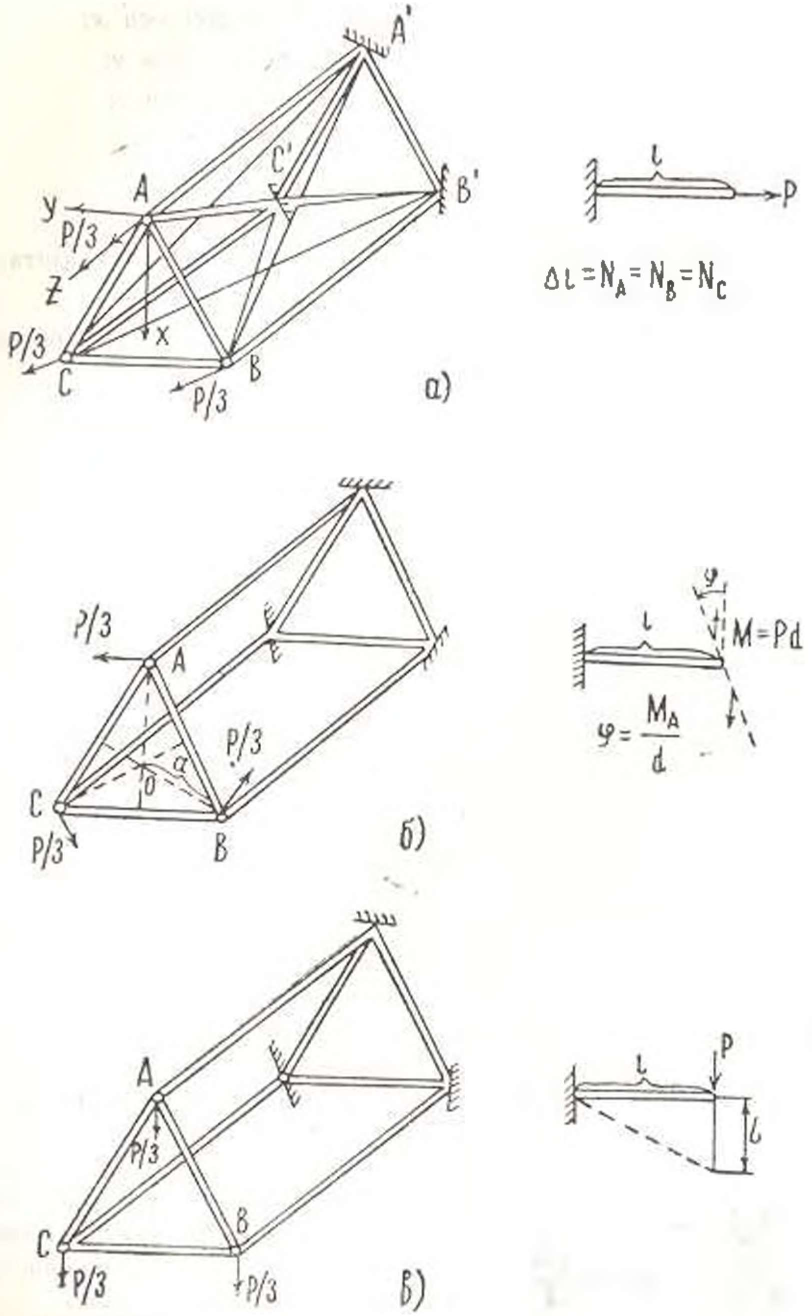
1. Растяжение вдоль оси фермы.
2. Кручение.
3. Поперечный изгиб под действием сил, приложенных в узлах ячейки (фиг. 3.).

За неизвестные принимаются перемещения узлов A, B, C, которые состоят из трех углов поворота x, y, z и трех линейных перемещений L, M, N.

Используя подход, предложенный в работе [1], удается свести решение данной задачи к системе 24-х линейных уравнений относительно 24 неизвестных.

$$A \cdot x = B \tag{1}$$

Элементы матрицы A определяются согласно [1].



Фиг. 3

Вектор неизвестных x состоит из следующих компонентов:

$$x=\{x_A,\ y_A,\ z_A,\ L_A,\ M_A,\ N_A,\ x_B,\ y_B,\ z_B,\ L_B,\ M_B,\ N_B,\ x_C,\ y_C,\ z_C,\ L_C,\ M_C,\ N_C,\ R_{AC},\ R_{AB},\ R_{BA},\ R_{BC},\ R_{CB},\ R_{CA}\}$$

где

x_A, x_B, x_C — углы поворотов узлов A, B и C вокруг оси x;
y_A, y_B, y_C — углы поворота узлов A, B и C вокруг оси y;
z_A, z_B, z_C — углы поворотов узлов A, B, C вокруг оси z;
L_A, L_B, L_C — смещения узлов A, B и C вдоль оси x;
M_A, M_B, M_C — смещения узлов A, B и C вдоль оси y;
N_A, N_B, N_C — смещения узлов A, B и C вдоль оси z;
R_{AC}, ..., R_{CA} — дополнительные усилия в соответствующих вязтах.

Вектор B зависит от приложенных нагрузок.

Решение системы (1) для единичной нагрузки $P=1$ обозначим x^*, тогда для нагрузки P (фиг. 3а)

$$x = Px^* \qquad (2)$$

Из решения задачи простого растяжения ячейки для стержневого суперэлемента получим:

$$P = \frac{E_э F_э}{l} \Delta l \qquad (3)$$

так как $$\Delta l = N_A \qquad E_э F_э = \frac{l}{N^*_A} \qquad (4)$$

Смещение N^*_A находится из решения $Ax=C$. Соответстаующий вектор C будет иметь следующие компоненты:

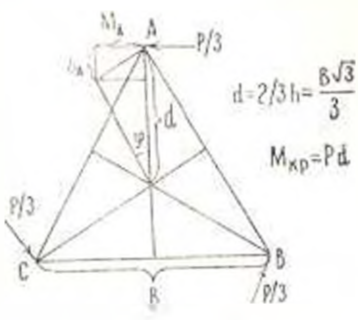
$$C = \{0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$

Аналогично определяется эффективная жесткость суперэлемента на кручение (фиг. 3б):

$$GJ_{pэ} = \frac{ld^2}{M^*_A} \qquad (5)$$

где M^*_A находится из решения задачи $Ax=C$, при этом

$$C = \{0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\sqrt{3}/6, -1/6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{3}/6, -1/6, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$



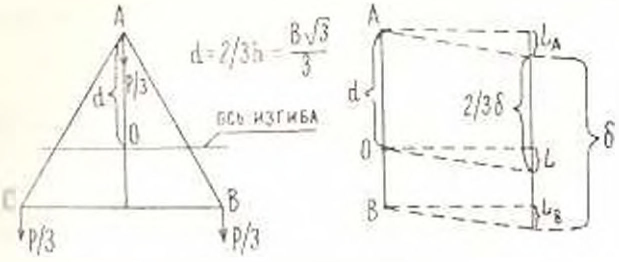
Фиг. 4

В задаче изгиба пространственной ячейки отклонение от нейтральной оси (т. 0) под действием приложенной нагрузки (фиг. 3в, фиг. 5) равно

$$L = \frac{1}{3}(L_A + L_B + L_C)$$

Используя описанный выше подход, имеем

$$E_э J_э = \frac{l^3}{L^*_A + L^*_B + L^*_C} \qquad (6)$$



Фиг. 5

Смещения L_A^*, L_B^*, L_l^* находятся из решения системы

$$Ax = C$$

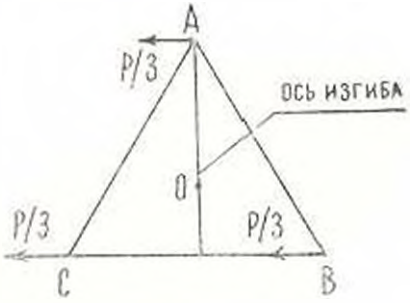
где

$$C=\{1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$

Для определения изгибной жесткости $E_*^{\perp} J_*^{\perp}$ в плоскости ортогональной AO (фиг. 6), необходимо решить задачу изгиба с вектором C, равным

$$C=\{0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$

$$E_*^{\perp} J_*^{\perp} = \frac{l^2}{3M_A'} \qquad (7)$$



Фиг. 6

Для проектировщиков наибольший интерес представляет решение обратной задачи по отношению к задаче (1), то есть определение неизвестных параметров конструкции, входящих в выражения для элементов матрицы

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{124} \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & & & \\ A_{241} & \cdots & & A_{2424} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Выражения для A_{ij} зависят от формы сечений и моделей упругости элементов ячейки

$$A_{ij} = A_{ij}(l, \alpha, E_HF_H, E_lJ_l, E_bJ_b, E_bF_b, \ldots, G_lJ_{pl}, G_bJ_{pb}, E_lF_l)$$

где l и α — первоначальная длина и угол наклона вантов при натяжении в тросах H_0;

E_HF_H — жесткость вантов на растяжение;

E_lF_l, E_bF_b — жесткость продольных и поперечных балок на растяжение;

E_lJ_l, E_bJ_b — жесткость на изгиб;

G_lJ_{pl}, G_bJ_{pb} — крутильные жесткости элементов.

Формулировка обратной задачи для ферменно-вантовой балки длиной L_0 по отношению к задаче (1) имеет вид

$$\bar{X}^* \cdot A = \bar{B} \tag{9}$$

где $\bar{X}$ — вектор ограничений на перемещения узлов балки длиной L_0, приведенных к одной ячейке;

$\bar{B}$ — приведенная нагрузка на балку длиной L_0.

Соотношение (9) представляет собой систему ограничений задачи оптимального проектирования, формулировка которой может быть представлена в виде:

«Найти минимум погонной массы ячейки ферменно-вантовой конструкции

$$M = (3m_l + 3m_b + 6m_k)/l$$

при ограничениях (9)»

где

$$m_l = \gamma_l \cdot F_l \cdot l; \quad m_b = \gamma_b \cdot F_b \cdot l \cdot \mathrm{tg}\alpha; \quad m_k = F_k l/\cos\alpha \cdot \gamma_k \tag{10}$$

Сформулированную задачу (10) будем считать задачей первого уровня, то есть проектирования с точностью до жесткостных характеристик.

Задачей второго уровня будет определение параметров армирования композиционного материала конструкции ферменно-вантовой балки, имеющей оптимальные жесткостные характеристики. Сформулируем эту задачу после предварительных замечаний и выводов.

Для тонкостенных трубчатых элементов ферменно-вантовой конструкции уравнения безмоментной теории оболочек имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R\partial\varphi} = -x, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{R\partial\varphi} = -y, \qquad T_2 = Rz \tag{11}$$

где T_1, T_2, S — интегральные осевые окружные и сдвигающие усилия; x, y, z — компоненты внешних сил; x — продольная координата; φ — центральный угол; R — радиус срединной поверхности трубчатых оболочек из КМ.

Деформации элемента определяются через перемещения с помощью известных соотношений [2]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}; \qquad \omega = \frac{\partial u}{R\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

Соотношения упругости анизотропной оболочки имеют вид $T = B\Sigma$, где

$$T = \{T_1, T_2, S\}, \quad B = \{B_{ij}\}_{3\times3}, \quad \Sigma = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega\} \tag{13}$$

Зависимость B_{ij} от углов армирования φ_i приведенных характеристик монослоев $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, относительных толщин h_i определяется известными соотношениями [2].

Моделируя трубчатый элемент фермы консольной цилиндрической оболочкой, подвергнутой действию осевого усилия T_{10} с граничными условиями

$$u(0)=v(0)=0; \quad S(l)=0; \quad T_1(l)=T_{10} \tag{14}$$

и интегрируя уравнения (11) с учетом $T_1=T_{10}$; $T_2=S=0$, получим $u(l)=A_{11}T_{10}l$, где A_{11}—элемент обратной матрицы

$$\{A_{ij}\}_{3\times3}=\{B_{ij}\}_{3\times3}^{-1}$$

Заменив оболочку эквивалентным стержнем, получим следующее значение его приведенной жесткости:

$$E_lF_l=\frac{\det\{B_{ij}\}}{B_{22}B_{33}-B_{23}^2} \tag{15}$$

Решая по аналогичной схеме задачи кручения и изгиба трубчатой армированной оболочки, получим

$$G_lJ_{pl}=\frac{2\pi R^3\det\{B_{ij}\}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2} \tag{16}$$

$$E_lJ_l=\frac{\pi Rl^3}{3}\left\{\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{\det\{B_{ij}\}}-\frac{l^2}{3R^2(B_{12}B_{23}-B_{12}^2)}\left[\frac{(B_{13}B_{23}-B_{33}B_{22})^2}{\det\{B_{ij}\}}+B_{22}\right]^{-1}\right\} \tag{17}$$

Аналогично определяются значения

$$E_bJ_b,\ E_bF_b \text{ и } G_bJ_{pb}$$

Таким образом, может быть установлена связь между оптимальными значениями жесткостных и геометрических характеристик задачи проектирования первого уровня и параметрами армирования слоев i композита φ_i, h_i и их приведенными характеристиками упругости $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$.

Задача оптимального проектирования второго уровня может быть сформулирована в следующем виде:

«Найти минимум функции невязки»

$$\delta=|E_lF_l-(E_lF_l)^*|^2+|E_bF_b-(E_bF_b)^*|^2+|E_lJ_l-(E_lJ_l)^*|^2+$$

$$+|E_bJ_b-(E_bJ_b)^*|^2+|G_lJ_{pl}-(G_lJ_{pl})^*|^2+|G_bJ_{pb}-(G_bJ_{pb})^*|^2$$

при ограничениях типа (15), (16), (17) и условиях

$$\sum h_i=1 \quad i=1,\ \ldots,\ N, \qquad \sin\varphi_i+\cos\varphi_i=1$$

где h_i—относительные толщины слоев; N—число слоев пакета материала трубчатой оболочки.

Сформулированные задачи (10) и (17) оптимального проектирования могут быть решены различными современными методами математического программирования. Использование современных персональных ЭВМ способствует наиболее эффективному решению этих задач в режиме «диалога» с ЭВМ. В качестве базового метода оптимизации для решения данных задач может быть рекомендован метод случайного поиска с коррекцией в диалоговом режиме.

Использование предложенного подхода при проектировании ферменной балки длиной 120 м поперечным сечением 1 м при действии статических нагрузок (растяжение, изгиб, кручение) с ограничениями на перемещения узлов фермы позволило снизить массу конструкции на 32 % по сравнению с проектом, основанным на упрощенном классическом представлении ферменно-вантовой конструкции статически определимой моделью с шарнирным соединением трубчатых элементов.

LARGE TRUSS STAY COMPOSITE CONSTRUCTION DESINGING

V. V. VOROBEY, N. I. VOYTKOV

ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԽՈՇՈՐԱԾԱՎԱԼ ՁՈՂԱՊԱՐԱՆԱՅԻՆ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Վ. Վ. ՎՈՐՈԲԵՅ, Ն. Ի. ՎՈՅՏԿՈՎ

Ամփոփում

Առաջարկված է նախագծման պարամետրերի ընտրության տարբերակ, որը հիմնված է խոշորածավալ կառուցվածքների [illegible] կանոնական օպտիմալացման վրա: Բերված են կառուցվածքների [illegible] մոդելներ և [illegible] որոնման ալգորիթմի օպտիմալացման տարբերակ՝ օպտիմալ լուծման ընտրության դեպքում, երբ հաշվի են առնված կառուցվածքի հանգույցային էլեմենտների տեղափոխությունների սահմանափակումները: Այսպիսի մոտեցումը թույլ է տալիս տարաբնույթ դեպքում գտնել [illegible] կառուցվածքի [illegible] պարամետրերի արժեքները: Դիտարկված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов С. В., Войтков Н. И.* Об определении собственных частот продольных и крутильных колебаний ферменных конструкций с присоединенными твердыми телами. — Прикл. механика, 1987, № 6, с. 95—102.
2. *Елпатьевский А. Н., Васильев В. В.* Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов.—М.: Машиностроение, 1972, 168 с.

Поступила в редакцию
29.VI.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

УДК 624.016
624.04(02)

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ВКМ С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

НШАНЯН Ю. С.

Возрастающие требования к точности и достоверности оценки поведения конструкций из ВКМ ставят задачу более адекватного описания напряженно-деформационного состояния материала при различных типах нагружения. Упруго-линейная модель монослоя композиционного материала как одна из возможно простых подходов, позволяет относительно просто предсказать поведение элементов конструкции на основе начальных свойств и условиях повторяющихся нагрузок. Однако при этом возникает необходимость довольно жестких ограничений на рабочую область напряжений, поскольку в этом случае, как правило, приходится принимать предположение, что слой разрушился, если внешняя нагрузка создает в нем напряжения, выходящие за рамки линейных областей [1]. Естественно, что в этом случае происходит не полное использование возможностей материала, если оно, как это имеет место для ВКМ и особенно при металлической матрице (ММ), проявляет существенную нелинейность [2, 3]. При этом «неупругость» [4] материала проявляется также в том, что напряжения и деформации не являются однозначными функциями друг от друга в области малых напряжений, при которых еще не возникают заметных остаточных деформаций, что приводит к образованию замкнутой петли гистерезиса.

Неупругость ВКМ с ММ в отличие от случая эпоксидной матрицы определяется в первую очередь развитием микропластичности в матрице, связанной с наличием микронеоднородности, сложного поля остаточных технологических термо и механических напряжений и др., что характеризует неоднородность процесса накопления пластических деформирующихся объемов в материале под нагрузкой [5]. При этом дополнительным фактором для ВКМ является наличие упруго-хрупких волокон, стесняющих развитие сплошных пластических зон, выходящих на поверхность материала.

Многочисленные экспериментальные исследования показали преимущества и перспективность использования в металлокомпозитах высокомодульных и высокопрочных борных и углеродных волокон [1, 2]. Можно считать установленным факт упругого поведения подобных волокон (в рамках точности принимаемых для проводимых исследований в целом) вплоть до разрушения [1, 6, 7].

1. Модель описания напряженно-деформационных зависимостей металлической матрицы с учетом эффекта микропластического поведения

Принимая исходное предположение о постоянстве скорости вхождения материала матрицы в микропластическое состояние [5, 8]

$$\frac{dV_{мп}}{d\varepsilon_i}=c_i \tag{1.1}$$

где c_i – структурно-чувствительный параметр; ε_i – интенсивность деформаций, нетрудно получить характеристики описания поведения материала.

Активное (пионерное) нагружение

Учитывая известные соотношения, связывающие интенсивности напряжений и деформаций упругого тела, для приращений $d\sigma_i$ и $d\varepsilon_i$ микропластической матрицы имеем

$$d\sigma_i=3\bar{G}d\varepsilon_i \tag{1.2}$$

где, учитывая (1.1), для $\bar{G}$ получим

$$\bar{G}=G_0(1-c_i\varepsilon_i)=\bar{k}_G G_0 \tag{1.3}$$

и, следовательно,

$$\sigma_i=3\bar{G}\varepsilon_i, \quad \bar{G}=\left(1-\frac{1}{2}c_i\varepsilon_i\right)G_0=\bar{k}_G G_0 \tag{1.4}$$

Отметим, что представление (1.4) можно трактовать как формальное выражение гипотезы упрочнения теории пластичности Ильюшина [9]. Дополняя это соотношение известными формулами, отражающими гипотезу упругости объемной деформации и пропорциональности девиаторов, получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\bar{B}(\varepsilon_x+\bar{\nu}\varepsilon_y), && \bar{B}=\bar{E}/(1-\bar{\nu}^2)=\bar{G}+E_0/2(1-\nu_0)\\
&\sigma_y=\bar{B}(\varepsilon_y+\bar{\nu}\varepsilon_x), && \bar{E}=\bar{k}_E E_0\\
&\tau_{xy}=\bar{G}\gamma_{xy}, && \bar{\nu}=\bar{k}_\nu\nu_0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\bar{k}_G=\bar{k}_E(1+\nu_0)/(2-\bar{k}_E(1-\nu_0))$$

$$\bar{\nu}=(E_0-2\bar{G}(1-\nu_0))/(E_0+2\bar{G}(1-\nu_0))=(1-\bar{k}_G+(1+\bar{k}_G)\nu_0)/(1+\bar{k}_G+(1-\bar{k}_G)\nu_0) \tag{1.6}$$

$$\bar{k}_E=\bar{k}_G(1+\bar{\nu})/(1+\nu_0); \quad \sigma_i=\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2 + \ldots + 3/4\,\gamma_{xy}^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{3}{4}\gamma_{xy}^2}$$

в последнем соотношении пренебрежено поперечным (вертикальным) обжатием ($\varepsilon_z = 0$).

В случае одноосного нагружения $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ имеем

$$\sigma_x = E_0\left(1-\frac{c'}{2}\varepsilon_x\right)\varepsilon_x, \quad \varepsilon_i = (1+\nu)\varepsilon_x(1-\nu_0), \quad c' = \frac{2}{3}c_i(1+\nu_0) \tag{1.7}$$

Интенсивность деформации запишется в виде

$$\varepsilon_i = 2\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{3}(1-\nu_0^2)c_i\varepsilon_x}\right)/c_i(1-\nu_0) \tag{1.8}$$

а для деформации ε_x получим

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\varepsilon_i(1-c_i\varepsilon_i(1-\nu_0)/4)/(1+\nu_0) \tag{1.9}$$

Для малых значений $\varepsilon_i c_i$ (с точностью до $(c_i\varepsilon_i)^2$) можно записать

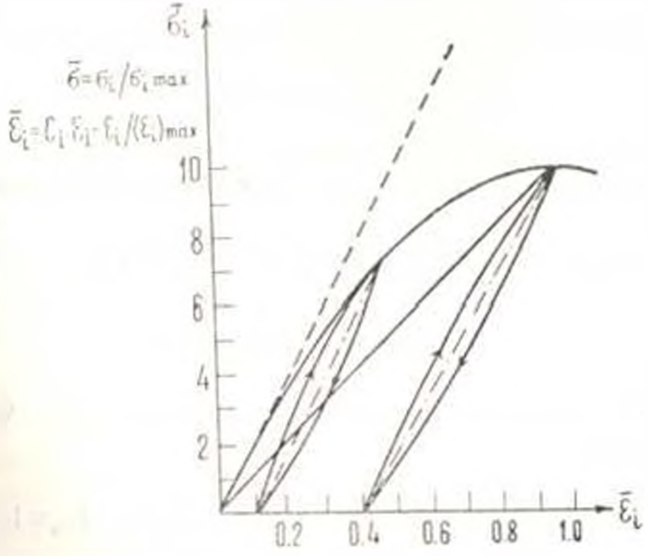
$$\sigma_x = E_0(1-c\varepsilon_x/2)\varepsilon_x, \quad c = (1+\nu_0)^2 c_i/3 \tag{1.10}$$

Соотношения (1.7)–(1.10) позволяют оценить значения начального модуля E_0 и структурночувствительного параметра c_i на основе опытов на одноосное растяжение

$$c_i = 3E(1-\sqrt{1-\sigma_T/\sigma_B})/2(1+\nu_0)\sigma_T$$

$$E_0 = 4\sigma_B(1+\nu_0)c_i/3, \quad G_0 = \frac{2}{3}\sigma_B c_i \tag{1.11}$$

Используя зависимости (1.11) для известных матриц, можно получить оценочные значения введенных параметров [10, 11].



Фиг. 1. Диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$

Аналогичные выражения также получаются для приращений напряженно-деформационного состояния, в которых будут фигурировать уже величины с индексами ($\sim$) вместо ($-$). Так, например, при одноосном растяжении

$$d\sigma_x = E_0 \tilde{k}_E d\varepsilon_x, \quad \tilde{k}_E = 2\tilde{k}_G/(1+\nu_0+\tilde{k}_G(1-\nu_0)) \tag{1.12}$$

В общем случае можно записать соотношение Гука в виде

$$[d\sigma] = [\tilde{B}][d\varepsilon], \quad [\tilde{B}] = \tilde{B}\begin{bmatrix} 1, & \tilde{\nu}, & 0 \\ \tilde{\nu}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & (1-\tilde{\nu})/2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

2. Разгрузка с достигнутого уровня напряженного-деформационного состояния ($\sigma_i^*, \varepsilon_i^*$)

Аналогично предыдущему пункту получаем

$$d(\sigma_i^*-\sigma_i) = 3\tilde{G}_p d(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i), \qquad \tilde{G}_p = G_0(1-c_i(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i)/2) = G_0\tilde{k}_G^{(p)}$$

$$\sigma_i^*-\sigma_i = 3k_G^{(p)}G_0(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i), \qquad k_G^{(p)} = 1-c_i(\varepsilon_i^*-\varepsilon_i), \quad \varepsilon_i^* = (1-\sqrt{1-2\sigma_i^* c_i/3G_0})/c_i \tag{2.1}$$

В случае одноосного нагружения, учитывая (1.7), получим

$$(\varepsilon_x^*)' = (1-\sqrt{1-2\sigma_x^* c'/E_0})/c' \tag{2.2}$$

В общем случае соотношение Гука можно записать в виде

$$[d(\sigma^*-\sigma)] = [\tilde{B}_p][d(\varepsilon^*-\varepsilon)], \qquad [\sigma^*-\sigma] = [\bar{B}_p][\varepsilon^*-\varepsilon]$$

$$\tilde{B}_p = \tilde{G}_p + E_0/2(1-\nu_0) = B_0((1+\nu_0)/2+\tilde{k}_{G_p}(1-\nu_0)/2) \tag{2.3}$$

$$B_0 = E_0/(1-\nu_0^2)$$

Аналогичные зависимости получим для матрицы $[\bar{B}_p]$. Из соотношений (2.1) несложно получить для интенсивности остаточных деформаций

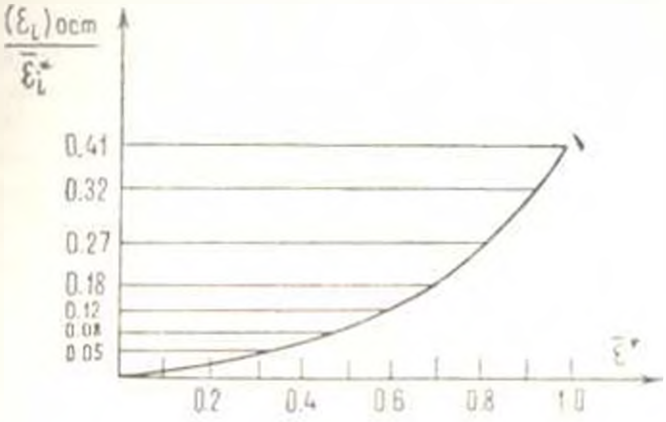
$$(\varepsilon_i)_{ост} = \varepsilon_i^* - \sigma_i^*/3\bar{G}_p = \varepsilon_i^* - (1-\sqrt{1-\sigma_i^* c_i/3G_0})/c_i \tag{2.4}$$

3. Повторное нагружение

В случае повторного нагружения, используя модель Мазинга [11, 12, 13], имеем

$$d\sigma_i = 3\tilde{G}_n d\varepsilon_i, \qquad \bar{G}_n = \bar{k}_{G_n} G_0, \quad \bar{k}_{G_n} = 1-\frac{c_i}{2}\varepsilon_i, \quad \tilde{k}_{G_n} = 1-c_i\varepsilon_i/4$$

соответственно в зависимости Гука для повторного нагружения необходимо коэффициенты упрочнения заменить на k_{σ} и $\bar{k}_{\varepsilon}$.



Фиг. 2

На фиг 1—2 приведены типичные диаграммы зависимостей $\bar{\sigma}_i - \bar{\varepsilon}_i$ и $(\varepsilon_i)_{ос}$ — интенсивности остаточных деформаций. Расчеты проведены для матрицы типа АД1 и борного волокна.

4. Основные соотношения для монослоя

На уровне монослоя неоднородный композиционный материал волокнистой структуры моделируется в виде однородного анизотропного тела, макроскопические характеристики которого определяются через соответствующие характеристики составляющих элементов на основе методологии структурной механики композитов или теории армирования. Предложено значительное число методов получения усредненных характеристик [14—24], охватывающих широкий сектор подходов от способов сопротивления материалов до стохастических моделей с использованием точных решений задач, поставленных на уровне теории упругости и конечно-элементного анализа.

Отдельную группу составляют модели, позволяющие охарактеризовать процесс накопления повреждений вплоть до разрушения, то есть кинетику процесса [25].

Простейшие модели, используемые для оценки поведения монослоя, могут нести при этом двоякую нагрузку. Во-первых, позволят наиболее экономно оценить поведение монослоя при сложных напряженно-деформационных нагружениях, что особенно важно в задачах оптимизационного плана, и во-вторых, послужить базой последовательного уточнения для более точных методов. Следует отметить также, что поскольку количество случайных факторов велико (геометрические параметры структуры композита, упаковка армирующих волокон, форма и характерные размеры сечений, искривленность волокон в ходе технологических процессов, сложные физико-химические процессы и неполная связь на границе раздела и т. д.), «уточнение» моделей не всегда приводит к более удовлетворительному соответствию с экспериментом. То есть может иметь место «перекрытие» разброса экспериментальных данных результатов «уточнения» [26].

Исследуемая модель поведения монослоя ВКМ с ММ, которую можно отнести к классу структурно-кинетических, занимает промежуточное положение между моделями оценки упруго-прочностных характеристик и кинетических моделей разрушения и объединяет возможность описания нелинейного поведения материала в процессе нагружения и разгрузки с достаточно простыми формами записи этих зависимостей и оценки несущей способности монослоя.

Примем общепринятые предположения для монослоя ВКМ, отражающие условия равновесия и совместимости деформаций [10, 16—20].

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{1a}=\varepsilon_{1m}, \quad \sigma_{22}=\sigma_{2a}=\sigma_{2m}, \quad \sigma_{12}=\sigma_{12m}=\sigma_{12a} \tag{4.1}$$

Примем, что деградация модулей композита определяется, в основном, октаэдрическими угловыми деформациями матрицы. Рассмотрим случаи пионерного (активного) нагружения, разгрузки и повторного нагружения. Основываясь на предположениях (4.1), приведем зависимости для технических характеристик монослоя композита.

5. Активное нагружение

Соотношения для продольных характеристик будут:

$$d\sigma_{11}=\tilde{E}_{11}d\varepsilon_{11} \qquad \sigma_{11}=\bar{E}_{11}\varepsilon_{11}$$
$$\tilde{E}_{11}=E^0_{11}\tilde{k}_{11} \qquad \bar{E}_{11}=E^0_{11}\bar{k}_{11} \tag{5.1}$$
$$E^0_{11}=\xi E_a+(1-\xi)E_m \quad (\xi\text{—объемная доля волокна})$$

Для коэффициентов деградации касательного и секущего модулей имеем

$$\tilde{k}_{11}=1-(1-\xi)E^0_m(1-\tilde{k}_{E_m})/E^0_{11}$$
$$\bar{k}_{11}=1-(1-\xi)E^0_m(1-\bar{k}_{E_m})E^0_{11} \tag{5.2}$$

Здесь величины $\tilde{k}_{E_m}$ и $\bar{k}_{E_m}$ имеют вид

$$k_{E_m}=2k_{G_m}/(1+\nu^0_m+(1-\nu^0_m)k_{G_m}) \tag{5.3}$$

Здесь

$$\tilde{k}_{G_m}=1-c_i\varepsilon_{im}, \quad \bar{k}_{G_m}=1-c_i\varepsilon_{im}/2 \tag{5.4}$$

соответственно коэффициенты деградации касательного и секущего модулей сдвига матрицы

$$G_m = G_m^0 k_{G_m} \tag{5.5}$$

В приведенных соотношениях и далее индекс (0) означает начальное значение величины. Отметим, что в приведенных зависимостях величина интенсивности деформаций матрицы ε_{im} должна быть записана в параметрах напряженно-деформационного состояния композита. Для плоской деформационной модели

$$\varepsilon_{im} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+3(\varepsilon_{12})^2/4} \tag{5.6}$$

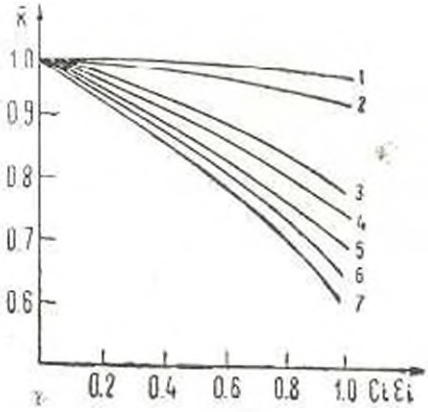
в случае плоского напряженного состояния

$$\begin{gathered}\varepsilon_{im} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}/4G_m^2+3(\varepsilon_{12})^2/4}\\ \varepsilon_{22} = -\bar{\nu}_m\varepsilon_{11}+\sigma_{22}/(\bar{G}_m+G_m^0(1+\nu_m^0)/(1-\nu_m^0)),\quad \varepsilon_{12}=\sigma_{12}/\bar{G}_m\\ \bar{\nu}_m=(1-\bar{k}_{G_m}-\nu_m^0(1+\bar{k}_{G_m}))/(1+\bar{k}_{G_m}+\nu_m^0(1-\bar{k}_{G_m}))\end{gathered} \tag{5.7}$$

Например, для матрицы $AD1$ при $\xi=0.5$ и $\nu_0=0{,}2$ имеем $(\bar{k}_{11})_{\min}=0{,}94$. Аналогично (5.1) для поперечных характеристик имеем

$$\begin{gathered}\bar{E}_{22}=\bar{k}_{22}E_{22}^0,\quad \bar{E}_{22}=\bar{k}_{22}E_{22}^0,\quad E_{22}^0=(\xi/E_a+(1-\xi)/E_m^0)^{-1}\\ k_{22}^{-1}=1+E_{22}^0(1-\xi)(1-k_{E_m})/E_m^0k_{E_m}\end{gathered} \tag{5.8}$$

для матрицы $AD1$ имеем $(\bar{k}_{22})_{\min}\approx0{,}66$ при $\xi=0.5$ $(\bar{k}_{22})_{\min}=0{,}63$ при $\xi=0$.



фиг 3

1. κ_{11}-(ξ=0.8)
2. κ_{11}-(ξ=0.5)
3. κ_{22}-(ξ=0.8)
4. κ_{12}-(ξ=0.8)
5. κ_{11}-(ξ=0) и κ_{22}-(ξ=0)
6. κ_{12}-(ξ=0.5)
7. κ_{12}-(ξ=0)

Фиг. 3

Для внутрислойных сдвиговых характеристик получаем

$$\bar G_{12} = \bar k_{12} G^0_{12}, \quad \tilde G_{12} = \tilde k_{12} G^0_{12}, \quad G^0_{12} = (\xi/G_a + (1-\xi)/G^0_m)^{-1}$$

$$k_{12}^{-1} = 1 + G^0_{12}(1-\xi)(1-k_{G_m})/G^0_m k_{G_m}, \quad G^0_{12} = (\xi/G_a + (1-\xi)/G^0_m)^{-1} \tag{5.9}$$

На фиг. 3 представлена картина зависимости деградации продольного, поперечного и сдвигового секущего модуля в зависимости от накопленной матрицей интенсивности деформаций и объемной доли волокна.

6. Разгрузка с достигнутого уровня (σ^*, ε^*) и повторное нагружение

Аналогично пункту 5 имеем

$$\tilde E_{11} = E^0_{11}\tilde k^{(p)}_{11}, \quad \bar E_{11} = E^0_{11}\bar k^{(p)}_{11}$$

$$d\sigma_{jj} = \tilde E^{(p)}_{jj} d\varepsilon_{jj}, \quad \sigma_{jj} - \sigma^*_{jj} = \bar E^{(p)}_{jj}(\varepsilon_{jj} - \varepsilon^*_{jj}) \quad (j = 1,\ 2) \tag{6.1}$$

где

$$\tilde k^{(p)}_{11} = 1 - (1-\xi)E^0_m(1-\tilde k^{(p)}_{E_m})/E^0_{11}, \quad \bar k^{(p)}_{11} = 1 - (1-\xi)E^0_m(1-\bar k^{(p)}_{E_m})/E^0_{11} \tag{6.2}$$

Величины $\tilde k^{(p)}_{E_m}$, $\bar k^{(p)}_{E_m}$ – коэффициенты деградации касательных и секущих модулей матрицы при разгрузке определяются зависимостями (1.6) и (1.12), где надо положить для коэффициентов деградаций сдвиговых модулей матрицы при разгрузке.

$$\tilde k^{(p)}_{G_m} = 1 - c_1(\varepsilon^*_{im} - \varepsilon_{im})/2, \quad \bar k^{(p)}_{G_m} = 1 - c_1(\varepsilon^*_{im} - \varepsilon_{im})/4 \tag{6.3}$$

Для коэффициентов деградаций поперечных и сдвиговых модулей волокнистого композита при разгрузке получим

$$(k^{(p)}_{22})^{-1} = 1 + E^0_{22}(1-\xi)(1-k^{(p)}_{E_m})/E^0_m k^{(p)}_{E_m} \tag{6.4}$$

и

$$(k^{(p)}_{12})^{-1} = 1 + G^0_{12}(1-\xi)(1-k^{(p)}_{G_m})/G^0_m k^{(p)}_{G_m} \tag{6.5}$$

Остаточные деформации при разгрузке определяются из соотношений

$$(\varepsilon_{jj})_{ост} = \varepsilon^*_{jj} - \sigma^*_{jj}/\bar E^{(p)}_{jj} \tag{6.6}$$

Точно так же можно получить напряженно-деформационные зависимости при повторном нагружении. Здесь, например, можно написать

$$d\sigma^{(n)}_{jj} = E^0_{jj}\tilde k^{(n)}_{jj} d\varepsilon_{jj}, \quad \sigma_{jj} = E^0_{jj}\bar k^{(n)}_{jj}\varepsilon_{jj}$$

$$d\sigma^{(n)}_{12} = G^0_{12}\tilde k^{(n)}_{12} d\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{12} = G^0_{12}\bar k^{(n)}_{12}\varepsilon_{12} \tag{6.7}$$

где в определяющих соотношениях для коэффициентов деградации необходимо положить для матрицы при повторном нагружении

$$\tilde k^{(n)}_{G_m} = 1 - c_1\varepsilon_{im}/2, \quad \bar k^{(n)}_{G_m} = 1 - c_1\varepsilon_{im}/4 \tag{6.8}$$

Таким образом, получаем замкнутую систему для определения напряженно-деформационных зависимостей композита с учетом деградаций модулей в результате накопления пластических деформаций в матрице.

7. Расчет напряженно-деформационного состояния перекрестно-армированных монопакетов

Для конкретных расчетов с помощью полученных соотношений может быть предложен следующий алгоритм последовательных приближений:

I. Определение начальных значений.

1.1. $n=1$

2. $[T]=[T]_0$ — заданные усилия

3. $\varepsilon_{im}=0$ — начальная интенсивность деформаций нулевая

4. $E_{11}=E_{11}^0, \quad E_{22}=E_{22}^0, \quad G_{12}=G_{12}^0, \quad \nu_{12}=\nu_{12}^0$

5. $[B_0]=[B_0]_0$

6. $[C]=[C]_0$ — (мембранная жесткость)

7. $\varphi=\varphi_0$

II. Вычисление характеристик напряженно-деформационного состояния.

2.1. $n=n+1$

2. $[\varepsilon]=[C]^{-1}[T]$

3. $[\varepsilon_0]=[\varphi_\varepsilon][\varepsilon]$ ($[\varphi_\varepsilon]$ — матрица преобразований деформаций при повороте на угол φ)

4. $[\sigma_0]=[B_0][\varepsilon_0]$

5. ε_{im}

6. $k_{G_m}, \quad k_{E_m}, \quad k_{11}, \quad k_{22}, \quad k_{12}$

7. $E_{11}, \ E_{22}, \ G_{12}, \ \nu_{12}$

8. $\varphi=\varphi+\varepsilon_{12}^0/2$

9. $[B_0], \quad [C]$

III. Условия остановки

3.1. Если $|\varepsilon_{im}(n+1)-\varepsilon_{im}(n)|/|\varepsilon_{im}(n)|<\varepsilon$, или $n>\bar{n}$

где ε — точность расчетов, $\bar{n}$ — допускаемый предел циклов — счет завершен.

3.2 Иначе идти к 2.1

Отметим, что предположенная модель справедлива при

$$\varepsilon_{im}^{*}\leqslant\varepsilon_{im}\leqslant 1/c_i$$

BASIC STRESS-STRAIN RELATION CONDITION VKM WITH METAL MATRIX COMPOSITES

Ju. S. NSHANIAN

ՄԵՏԱՂՅԱ ՄԱՏՐԻՑԱՅՈՎ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ԿԱՊԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ՅՈՒ. Ս. ՆՇԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկված է մետաղյա մատրիցայով կոմպոզիցիոն նյութերի համար ընդհանրացված ոչ գծային Հուկի առնչությունների ստացման խնդիրը։

Ենթադրված է, որ ոչ գծայնությունը, որոշված է միկրոպլաստիկության համակարգերի առաջացման և զարգացման հետ, ընդ որում նրանց փոփոխման արագությունը հաստատուն է։

Ակտիվ բեռնաթափման և կրկին (կրկնակի) բեռնավորման համար կառուցված են հաշվարկի արդյունավետ ալգորիթմներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость. Под ред. Л. Браутмана.—М.: Мир, 1978. 483 с.
2. Волокнистые композиционные материалы с металлической матрицей. Под ред. М. Х. Шоршорова.—М.: Машиностроение, 1981.
3. Друккер Д. Пластичность, течение и разрушение.—В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов.—М.: Мир, 1978, с. 9—32.
4. *Zener C.* Elasticity and anelasticity of metals.—Chicago: 1948. 178 p.
5. Гурьев А. В., Цепляева Т. Н., Шоршоров М. Х. Оценка сопротивления неупругому деформированию композиционного материала с однонаправленными высокопрочными волокнами.—В кн.: Металловедение и прочность металлов: Сб. науч. тр. /ВПИ—Волгоград: 1982, с. 3—13.
6. *Mileiko S. T.* Fracture mechanics of composites.—Compos. Mater. Repts. 1-st Soviet—Jap. Symp.—Moskow, 1979, p. 274—285.
7. Копьев И. М., Овчинский А. С. Разрушение металлов армированных волокнами.—М.: Наука, 1977. с. 240.
8. Гурьев А. В. К вопросу о происхождении упругих несовершенств поликристаллического сплава.—ФММ, т. 3, вып. 2, 1956, с. 349—359.
9. Ильюшин А. А. Пластичность.—М.: Гостехиздат, 1948, 376 с.
10. Композиционные материалы: т. 4. Композиционные материалы с металлической матрицей. Под ред. К. Крейдера. Пер. с англ., М.: Машиностроение, 1978. 503 с.
11. Гжиров Р. И. Краткий справочник конструктора.—Л.: Машиностроение, 1983, 463 с.
12. Москвитин В. В. Пластичность при переменном нагружении.—М.: Изд-во МГУ, 1966.
13. Черняк Н. И., Гаврилов Д. А. Сопротивление деформированию металлов при повторном статическом нагружении.—Киев: Наукова думка, 1971. 135 с.

14. Болотин В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов.—В кн. Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, вып. 72, 1966, с. 48—63.
15. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.—М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
16. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев: Наукова думка, 1971, 232 с.
17. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов. Композиционные материалы. Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. Пер. с англ. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки, т. 2, М.: Мир, 1978, с. 61—101.
18. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов.—Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
19. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1982. 334 с.
20. Скурдa А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 192 с.
21. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А., Упитис З. Т. Модели разрушения композитов с различной структурой армирования—В кн.: Разрушение композитных материалов. Рига: Зинатне, 1979, с. 126—131.
22. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы.—М.: Наука, 1985. 304 с.
23. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов.—М.: МГУ. 336 с.
24. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.—М.: Наука, 1984. 352 с.
25. Овчинский А. С., Гусев Ю. С. Моделирование на ЭВМ процессов образования, роста и слияния микродефектов в структурно-неоднородных материалах.—Мех. композ. матер., 1982, № 4, с. 585—592.
26. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов.—М.: Машиностроение, 1984. 264 с.

Республиканский главный вычислительный
центр Госагропрома Армянской ССР

Поступила в редакцию
31.V.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ РАВНОМЕРНЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ, С УЧЕТОМ СДВИГОВЫХ МЕЖСЛОЙНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ПОЧТМАН Ю. М., ШУЛЬГА С. А.

Известно [1], что в достаточно толстостенных оболочках межслойные сдвиговые напряжения могут превысить предел прочности еще в докритической стадии ее работы. Поэтому, создавая оптимальные проекты оболочек, целесообразно включать в число ограничений задачи ограничения на сдвиговые напряжения.

Классическая теория Кирхгофа-Лява, а также уточненная геометрически линейная теория типа Тимошенко (при данном виде нагружения) не позволяют определить сдвиговые межслойные напряжения. В связи с этим деформирование композитной цилиндрической оболочки будем исследовать на основе уточненной геометрически нелинейной теории типа Тимошенко.

Рассмотрим задачу оптимального проектирования шарнирно опертой композитной цилиндрической оболочки длиной L и радиуса R, находящейся под действием равномерного внешнего давления, при ограничениях на величину критической нагрузки и сдвиговые напряжения σ_{13} и σ_{23}:

$$
\begin{aligned}
&V(h) = L\pi(\mu\gamma_a + (1-\mu)\gamma_c)\cdot h\cdot(2R-h)\to\min\\
&q_{\text{кр}}(h, \beta_1, \ldots, \beta_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N) \geqslant q, \quad q = \text{const}\\
&\sigma_{13}(h, \beta_1, \ldots, \beta_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N) \leqslant [\sigma_{13}] \qquad\qquad (1.1)\\
&\sigma_{23}(h, \beta_1, \ldots, \beta_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N) \leqslant [\sigma_{23}]
\end{aligned}
$$

Здесь: $V(h)$ — вес оболочки; h — толщина; μ — объемный коэффициент армирования; γ_a и γ_c — средняя плотность армирующих волокон и связующего, соответственно; β_i, φ_i, $(i=\overline{1, N})$ — углы армирования композита; h, β_i, φ_i, $(i=\overline{1, N})$ — управляемые параметры задачи.

1. Для задачи оптимального проектирования (1.1) характерно отсутствие аналитической связи между целевой функцией $V(h)$ и управляемыми параметрами $\beta_1, \ldots, \beta_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N$. Данная постановка аналогична постановкам, рассматриваемым в [4,5], где для создания оптимальных проектов привлекались методы теории планирования экс-

тремальных экспериментов (ТПЭ). Здесь, с целью экономии машинного времени на расчет функций системы ограничений, предлагается усовершенствованная методика, по сравнению с предложенной в [4, 5]. Она может рассматриваться как часть общего подхода к решению задач оптимального проектирования вида

$$F(\overline{Y}) \to \min, \quad \varphi_m(\overline{Y}^*) \leqslant a_m, \quad m = \overline{1,M} \tag{1.2}$$

где: $\overline{Y}=\{y_1,\dots,y_i\}$, $\overline{Y}^*=\{y_1,\dots,y_i, y_{i+1},\dots,y_j\}$ — векторы управляемых параметров; $F(\overline{Y})$ — целевая функция задачи; $\varphi_m(\overline{Y}^*)$ — система ограничений, включающая ограничения по прочности, устойчивости, на геометрические характеристики конструкции и другие. Для задачи (1.2) характерно отсутствие аналитической связи между целевой функцией $F(\overline{Y})$ и управляемыми параметрами $y_{i+1},\dots,y_j$.

Суть предлагаемой методики состоит в следующем. Задача (1.2) методами ТПЭ предварительно сводится к задаче линейного программирования. Для этого в пространстве управляемых параметров вектора $\overline{Y}^*$ выбирается начальная точка $y_1^0, y_2^0,\dots,y_i^0, y_{i+1}^0,\dots,y_j^0$. Задаются интервалы варьирования управляемых параметров и в определяемой интервалами варьирования малой окрестности начальной точки строится линейная модель системы ограничений задачи (1.2). Коэффициенты линейных моделей функций системы ограничений вычисляются по методу наименьших квадратов, как и в [4, 5].

Затем, в малой окрестности начальной точки $(y_{i+1}^0,\dots,y_j^0)$, определяемой выбранными интервалами варьирования для моделей функций системы ограничений, строится линейная модель целевой функции. Последовательность построения такая же, как и в [4, 5]. Вместе с тем, для вычисления коэффициентов модели целевой функции используется часть матрицы планирования для моделей функций системы ограничений, в которой столбец значений функций системы ограничений $\varphi_m(\overline{Y}^*)$ заменяется столбцом значений функции F^*, определяемых из решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\begin{gathered} F^* = F(\overline{Y}) \to \min, \quad \varphi_m(\overline{Y}) \leqslant a_m, \quad m=\overline{1,M} \\ y_n = \text{const}, \quad n = \overline{i+1,j} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Задача (1.3) может быть решена, например, одним из алгоритмов метода случайного поиска [6].

В результате этих преобразований задача (1.2) сводится к задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} F(\overline{Y}^*) \to \min, \quad \varphi_m^{\prime}(\overline{Y}^*) \leqslant a_m, \quad m=\overline{1,M} \\ y_n^0-\Delta y_n \leqslant y_n \leqslant y_n^0+\Delta y_n, \quad n=\overline{i+1,j} \end{gathered} \tag{1.4}$$

где Δy_n — интервалы варьирования управляемых параметров вектора

$\overline{Y}^{**}=\{y_{l+1}, \ldots, y_l\}$. Решение задачи (1.4) (которое выполняется хорошо известными алгоритмами линейного программирования) дает возможность получить новые значения управляемых параметров $y_{l+1}, \ldots, y_l$ и затем решить задачу (1.3). Последовательность дальнейшего оптимизационного процесса аналогична методике, описанной в [4,5].

Если в итерационном процессе движения к оптимуму прекращается уменьшение целевой функции, то интервалы варьирования управляемых параметров уменьшаются, и весь процесс повторяется. Признаком окончания решения задачи служит достижение интервалами варьирования управляемых параметров заданной малой величины, обеспечивающей требуемую точность решения задачи.

2. В качестве исходных уравнений, позволяющих определить напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, примем нелинейные уравнения [1].

В соответствии с процедурой метода Бубнова-Галеркина, исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных сводим к системе нелинейных алгебраических уравнений, которую решаем методом Ньютона, с использованием процедуры движения по параметру нагрузки [2].

В окрестности предельной точки параметр нагрузки $\overline{q}$ меняется немонотонно, и процесс движения по этому параметру не может привести к положительному результату. Участки немонотонного изменения параметра нагрузки обходятся с помощью введения вспомогательного параметра [2], что обеспечивает выполнение условия разрешимости системы нелинейных уравнений в окрестности предельной точки. Значение параметра $\overline{q}_i$, при котором определитель матрицы Якоби метода Ньютона впервые обращается в нуль, принимаем за предельную нагрузку $\overline{q}^*$, а напряжения σ_{13} и σ_{23} находим в соответствии с [1].

Механические характеристики композита вычисляются на основе теории армирования [3]. Материал оболочки считается ортотропным, схема армирования принята гексагональной внутри каждого направления. Используются плоская и пространственная схемы армирования композита. В случае плоского армирования углы φ_k, характеризующие пространственную структуру материала, принимаются равными нулю.

Матрица жесткости элементарного направления приводится к осям композита по формулам преобразования

$$[A_{ij}^k]=[T]\cdot[A_{ij}^0]\cdot[T]^*$$

где $[T]$ — матрица преобразования коэффициентов жесткости; $[T]^*$ — транспонированная матрица; $[A_{ij}^0]$ — матрица жесткости элементарного направления.

Для вычисления жесткостных характеристик пространственноармированного композита применяется метод осреднения жесткостей отдельных направлений [3]

$$A_{ij} = \frac{1}{\mu_\Sigma} \cdot \sum_{k=1}^{N} A^k_{ij} \mu_k,$$

где $\mu_\Sigma = \sum_{k=1}^{N} \mu_k$ — суммарный объемный коэффициент армирования; μ_k — коэффициент объемного армирования k-го направления.

Для случая плоского армирования имеем

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \theta_k \cdot A^k_{ij},$$

где θ_k — относительное число слоев, расположенных под углом β_k.

Полученные коэффициенты жесткости A_{ij} являются функциями геометрических параметров конструкций и параметров структуры материала. Аналитически представить эту зависимость не удается ввиду сложности матричных преобразований при вычислении A_{ij}.

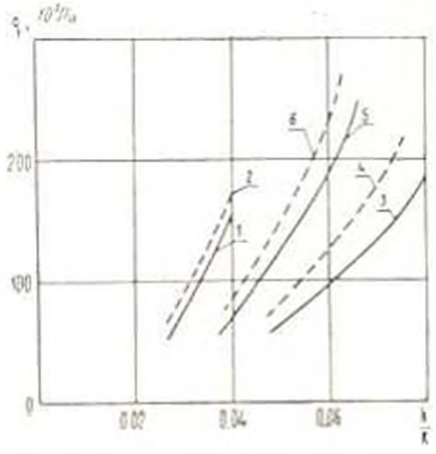
3. Рассмотрим применение описанного подхода к задаче оптимального проектирования (1.1), где относительное число слоев каждого вида в пакете θ_k принимается одинаковым и не варьируется. Пусть оболочка имеет следующие характеристики:

$\gamma_а = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па/м; $\gamma_c = 1{,}2 \cdot 10^4$ Па/м; $E_а = 0{,}75 \cdot 10^{11}$ Па;

$E_c = 0{,}35 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_а = 0{,}21$; $\nu_c = 0{,}33$; $\mu = 0{,}5$;

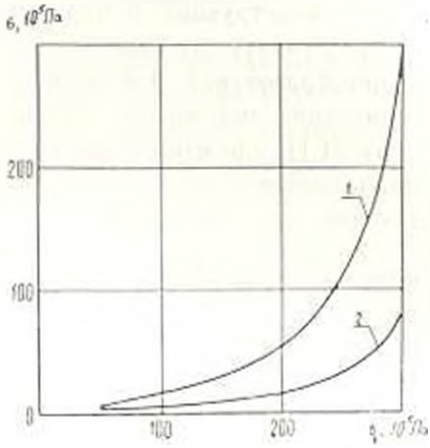
$R/L = 0{,}5$; $i = 3$; $[\sigma_{11}] = [\sigma_{22}] = 160 \cdot 10^5$ Па; $w^0 = 0{,}1h$;

$q = 5 \cdot 10^5$ Па.



Фиг. 1. Зависимость предельной нагрузки от параметра тонкостенности оболочки.

По графикам, представленным на фиг. 1, можно оценить погрешность определения критической нагрузки в геометрически линейной задаче устойчивости. Кривые 2, 4, 6 соответствуют геометрически линейной модели оболочки, а кривые 1, 3, 5—нелинейной модели (кривые 1, 2 построены для параметра $\rho_1 = \frac{R}{L} = 2$; $3{,}4 - \rho_1 = 0{,}5$; $5{,}6 - \rho_1 = 1$). Здесь: $\beta_i = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; $\varphi_i = 0, 0, 0$; $\bar{w}^0 = 0{,}1$. Видно, что для оболочки с $\rho_1 = 0{,}5$ и $\rho_2 = \frac{h}{R} = 0{,}06$, погрешность при вычислении критической нагрузки по линейной теории составляет 27%, а для оболочки с $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 0{,}06 - 24\%$. Ввиду большой погрешности в определении критической нагрузки по линейной теории, можно сделать вывод о необходимости нелинейной постановки в задачах оптимального проектирования конструкций такого класса.



Фиг 2 Зависимость напряжений σ_{13} и σ_{23} от нагрузки q.

На фиг. 2 представлены графики зависимости межслойных сдвиговых напряжений σ_{13} и σ_{23} от нагрузки q в докритической стадии работы оболочки (кривая 1 соответствует напряжению σ_{23}, кривая 2—σ_{13}). Кривые построены для облочки с параметрами $\rho_1 = 0{,}5$; $\rho_2 = 0{,}1$; $\beta_i = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; $\varphi_i = 0, 0, 0$; $\bar{w}^0 = 0{,}1$, при этом предельная нагрузка $q^* = 309{,}8 \cdot 10^5$ Па. Видно, что при нагрузке $q \geqslant 275 \cdot 10^5$ Па напряжения превысят допустимые $[\sigma] = 160 \cdot 10^5$ Па и оболочка разрушится вследствие расслоения, находясь еще в докритической стадии работы.

Результаты численной реализации на ЭВМ оптимизационной задачи (1.1) для оболочек с плоской и пространственной схемами армирования приведены в табл. 1. Сравним результаты табл. 1 с результатами реализации таких же задач в геометрически линейной постановке (табл. 2).

Таблица 1

Оптимальные проекты композитных оболочек (нелинейная задача)

№№ пп	$\frac{R}{L}$	Характеристики оптимального проекта					
		$\varphi_i = 0$					
		β_1	β_2	β_3	$h \cdot 10^{-2}$м	V	n
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.001	1.047	0.748	1.291	185.09	8
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.195	1.281	1.305	1.079	110.78	5
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.511	1.353	1.067	1.137	161.43	3
		$\varphi_i = 0.785$					
1	$\frac{50}{25} = 2$	0.816	0.876	1.014	1.280	183.60	8
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.170	1.143	1.432	1.076	110.54	5
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.560	1.415	1.030	1.135	161.11	3

Таблица 2

Оптимальные проекты композитных оболочек (линейная задача)

№№ пп	$\frac{R}{L}$	Характеристика оптимального проекта				
		$\varphi_i = 0$				
		β_1	β_2	β_3	$h \cdot 10^{-2}$м	V Н
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.145	1.086	1.061	1.189	170.68
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.317	1.317	1.308	0.957	98.5[illegible]
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.476	1.477	1.534	1.039	147.78
		$\varphi_i = 0.785$				
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.132	1.077	1.050	1.183	169.74
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.314	1.314	1.304	0.956	98.32
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.432	1.435	1.468	1.039	147.12

Оптимальные углы β_i, $(i = \overline{1,3})$ получились практически равными (разброс составил $1^\circ \div 2^\circ$) — для геометрически линейной постановки. В оптимальных проектах оболочки, полученных на основе геометрически нелинейной теории, наблюдается значительный разброс в углах β_i, $(i = \overline{1,3})$, достигающий в некоторых случаях 30°. Сравнивая полученные значения целевых функций, видим что оболочки, рассчитанные по нелинейной теории, соответственно на 8,4 %, 12,4 % и 9,2 % тяжелее таких же оболочек, спроектированных на основе линейной теории. Использование пространственной схемы армирования материала дает при этом незначительный выигрыш в весе (от 0,2 % до 0,8 %). Как и ожидалось, наибольший выигрыш в весе достигается для более толстостенных оболочек.

Для большинства оптимальных проектов наблюдаются следующие закономерности в распределении углов армирования β_i $(i=\overline{1,3})$:

1) В линейной модели оболочки углы β_i, $(i=\overline{1,3})$ получились практически равными.

2) В нелинейной модели ($\rho_1=1; 2$) два угла армирования оказались близкими, то есть, как и в работе [7], при оптимальном проектировании по нелинейной модели оболочки достаточно варьировать двумя углами β_i, $(i=1,2)$.

3) Для оболочки с параметром $\rho_1=0,5$ все три оптимальных значения углов β_i, $(i=\overline{1,3})$ получены различными.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что оптимальное проектирование оболочек из композитных материалов целесообразно проводить на основе методики, построенной на методах теории планирования экстремальных экспериментов, а напряженно-деформированное состояние оболочек при создании оптимизационных моделей следует определять на основе уточненной геометрически нелинейной теории, учитывающей явление межслойного сдвига.

OPTIMAL DESIGN OF COMPOSED CYLINDRICAL SHELL, LOADED BY EXTERNAL UNIFORMLY PRESSURE, TAKING INTO ACCOUNT SHEAR UNDERLAYER STRESSES

YU. M. POCHTMAN, S. A. SCHULGA

ԱՐՏԱՔԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՃՆՇՈՒՄՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԿՈՄՊՈԶԻՏԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ՄԻՋՇԵՐՏԱՅԻՆ ՍԱՀՔԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ՅՈՒ. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Ս. Ա. ՇՈՒԼԳԱ

Ամփոփում

Կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման մեթոդիկան օգտագործված է կոմպոզիցիոն գլանային թաղանթների օպտիմալ (ըստ քաշի) ընտրության խնդրի լուծման համար, երբ թաղանթները բեռնավորված են արտաքին ճնշումով։ Բերված է օպտիմալ նախագծերի համեմատություններ, որոնք ստաց-

ված են Տիմոշենկոյի տիպի երկրաչափորեն գծային և ոչ գծային տեսության հիման վրա։

Ցույց է տրված երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության օգտագործման նախընտրելիությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов.— Рига: Знание, 1974. 310 с.
2. *Залишвили И. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.—М.: Машиностроение. 1976. 278 с.
3. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов.—Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
4. *Почтман Ю. М., Шульга С. А.* Применение теории планирования экстремальных экспериментов к оптимальному проектированию композитных оболочек.—В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1982, с. 140–145.—(Сб. научных трудов, вып. 29).
5. *Косиченко А. А., Почтман Ю. М., Шульга С. А.* Применение теории планирования экстремальных экспериментов к параметрическому синтезу композитных оболочек минимального веса.—В кн.: III Конференция молодых ученых и специалистов по механике композитных материалов: Тез. докл. Рига: Зинатне, 1981, с. 106–108.
6. *Гурвич И. Б., Захарченко В. Г., Почтман Ю. М.* Рандомизированный алгоритм для решения задач нелинейного программирования.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979, № 5, с. 30–33.
7. *Нарусберг В. Л.* К постановке задач оптимизации макрооднородных слоистых оболочек, работающих на устойчивость.—Механика композитных материалов, 1983, № 4, с. 648–656.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
10.XI.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42 № 4, 1989 Механика

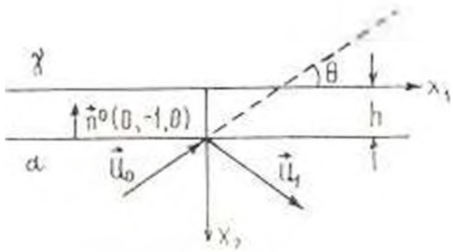
УДК 539.3; 534.21

ТОННЕЛИРОВАНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ЗАЗОР МЕЖДУ ДВУМЯ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

БАГДАСАРЯН Г. Е., ДАНОЯН З. Н., САНОЯН Л. А.

С использованием уравнений и граничных условий магнитоупругости ферромагнитных сред установлена возможность просачивания сдвиговой магнитоупругой волны через зазор между двумя магнитострикционными полупространствами, обусловленная магнитострикционным эффектом. В частности, рассмотрен вопрос отражения сдвиговой волны от свободной поверхности полупространства. Показано, что благодаря магнитострикционным свойствам среды в ней возникают поверхностные колебания.

1. Пусть магнитострикционная среда, занимающая полупространство $x_2 > h$, граничит с вакуумным полупространством $x_2 < h$. Величины, отнесенные к области $x_2 > h$, будем отмечать индексом α, отнесенные к области $x_2 < h$ — индексом γ.



Фиг. 1.

Допустим также, что напряженность начального магнитного поля направлена по оси $ox_3: \vec{H_0} = \vec{H_0}(0, 0, H_0)$. Учитывая это, а также однородность магнитного поля и его непрерывность на границе, заключаем, что магнитные объемные и поверхностные силы невозмущенного состояния равны нулю. Следовательно, упругие напряжения невозмущенного состояния также равны нулю.

Принимая во внимание изложенное и результаты работ [1—4], исследования магнитоупругих возмущений в случае антиплоской задачи приводим к решению уравнений

$$\mu\Delta u^{(2)} + \beta_{15}\Delta\varphi^{(2)} = \rho\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\beta_{15}\Delta u^{(2)} - \mu_0\mu_r\Delta\varphi^{(2)} = 0 \qquad \text{при} \quad x_2 > h$$

и

$$\Delta\varphi^{(1)} = 0 \quad \text{при} \ x_2 < h \tag{1.2}$$

с условиями на поверхности $x_2 = h$

$$\mu\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + \beta_{15}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x_2} = 0$$

$$\beta_{15}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} - \mu_0\mu_r\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x_2} = -\mu_0\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_2}, \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} \tag{1.3}$$

Здесь $u^{(2)}$ — упругое смещение в направлении оси ox_3; $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(1)}$ — магнитные потенциалы в среде и вакууме; μ — постоянная Ламе; β_{15} — — магнитострикционный коэффициент; ρ — плотность; μ_r — магнитная проницаемость материала; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} H/A^2$.

Решение задачи (1.1) — (1.3) будем искать в виде сдвиговой волны в среде

$$u = U\exp(i(px_2 + qx_1 - \omega t))$$

$$\varphi = \Phi\exp(i(px_2 + qx_1 - \omega t)) \quad \text{при} \ x_2 > h \tag{1.4}$$

и магнитных колебаний в вакууме

$$\varphi = \Phi\exp(i(px_2 + qx_1 - \omega t)) \quad \text{при} \quad x_2 < h \tag{1.5}$$

где p — неизвестный параметр, q — действительная величина, ω — частота колебаний.

Подставляя (1.4) в (1.1), приходим к дисперсионному уравнению

$$(q^2 + p^2)(q^2 + p^2 - \omega^2/s^2) = 0 \tag{1.6}$$

с корнями

$$p_{1,2} = \pm(\omega^2/s^2 - q^2)^{1/2} = \pm p_0, (p_0 > 0), \quad p_{3,4} = \pm iq \tag{1.7}$$

($s = [\mu(1 + r^2)/\rho]^{1/2}$ — скорость поперечной объемной магнитоупругой волны; $r^2 = \beta_{15}^2/(\mu_0\mu_r\mu)$), причем $p_1 = -p_0$ соответствует падающей волне, $p_2 = p_0$ — отраженной волне, $p_3 = iq$ — колебаниям, локализованным у поверхности среды и называемым сопутствующими поверхностными магнитоупругими колебаниями (СПМК). Корень $p_4 = -iq$ соответствует решению, растущему в глубь среды, и он поэтому отбрасывается.

Подставляя (1.5) в (1.2), получим значения параметра p для вакуума

$$p_{1,2} = \pm iq \tag{1.8}$$

$p_2 = -iq$ отбрасывается, так как соответствующее решение растет при $x_2 \to -\infty$.

Полное решение (1.1) и (1.2) получим в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u^{(2)} &= U_0 \exp(i(-p_0 x_2 + q x_1 - \omega t)) + U_1 \exp(i(p_0 x_2 + q x_1 - \omega t)) \\
\varphi^{(2)} &= \frac{\vartheta_{15}}{\mu_0 \mu_r} u^{(2)} + \Phi^{(2)} \exp(-q x_2 + i(q x_1 - \omega t)) \\
\varphi^{(1)} &= \Phi^{(1)} \exp(q x_2 + i(q x_1 - \omega t))
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

где U_0, U_1 — амплитуды смещений падающей и отраженной волн соответственно, $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(1)}$ — амплитуды потенциалов СПМК и магнитного поля в вакууме.

Отметим, что СПМК не являются собственными колебаниями системы, а могут возникать только в присутствии падающей волны и при наличии магнитострикционного эффекта. Как видно из (1.9), в рассматриваемом случае СПМК являются чисто магнитными.

Неизвестные амплитуды $U_1, \Phi^{(2)}, \Phi^{(1)}$ определяются удовлетворением граничных условий (1.3) решением (1.9). В результате, приходим к системе из трех неоднородных уравнений, решая которую, находим

$$
U_1 = \frac{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\Theta + i\bar{r}^2}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\Theta - i\bar{r}^2} U_0 \exp(-2ip_0h); \qquad \bar{r}^2 = \frac{r^2}{1+r^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(2)} &= -\frac{2\vartheta_{15}\operatorname{tg}\Theta}{\mu_0\mu_r[(1+\mu_r)\operatorname{tg}\Theta - i\bar{r}^2]} U_0 \exp(-ip_0h)\exp(qh) = \\
&= \Phi'^{(2)} \exp(-ip_0h)\exp(qh)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\Phi^{(1)} = \frac{2\vartheta_{15}\operatorname{tg}\Theta}{\mu_0[(1+\mu_r)\operatorname{tg}\Theta - i\bar{r}^2]} U_0 \exp(-ip_0h)\exp(-qh) = -\mu_r \Phi^{(2)}
$$

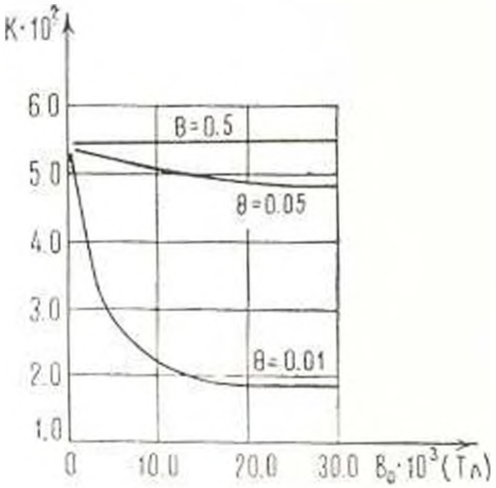
Здесь Θ — угол падения, введенный посредством $q = k\sin\Theta$, $p_0 = k\cos\Theta$, где k — волновое число.

Из (1.10) следует, что СПМК существуют при любом угле падения, за исключением $\Theta = 0$ (при скольжении волны параллельно границе коэффициент отражения $R = U_1/U_0 = -1$). Отметим также, что при любом Θ выполняется $\left|\dfrac{\varphi_{\text{спмк}}}{\varphi_{\text{пв}}}\right|_{x_2=h} = \left|\dfrac{\Phi'^{(2)}}{\dfrac{\vartheta_{15}}{\mu_0\mu_r}U_0}\right| < 1$

($\varphi_{\text{спмк}}$, $\varphi_{\text{пв}}$ — потенциалы СПМК и падающей волны), то есть для рассматриваемого случая в магнитострикционных средах усиления магнитного поля вблизи поверхности, вследствие возникновения СПМК, не происходит. Сказанное проиллюстрировано на фиг. 2, где приведена зависимость показателя усиления $K = \left|\dfrac{\varphi_{\text{спмк}}}{\varphi_{\text{пв}}}\right|_{x_2=h}$ от напряженности магнитного поля для различных значений угла падения Θ. Для расчетов приняты: $\mu = 0{,}84 \cdot 10^{11}\,Н/м^2$, $\mu_r = 35$, $e_1 = 0{,}69\,Н/А^2$, $e_2 = -0{,}5e_1$, $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\,кг/м^3$ (никель НП2Т)

Из фигуре видно также, что, начиная с некоторого Θ, коэффициент усиления не зависит от величины напряженности магнитного поля.

Как известно, сопутствующие поверхностные колебания наблюдаются также у пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов [5, 6]. Но в отличие от рассматриваемого случая, у некоторых кристаллов определенной магнитной структуры $(6, \bar{6}, 6/m)$ поле вблизи поверхности может существенно превосходить поле в объеме [5, 6].



Фиг. 2.

2. Используя полученные в пункте 1 результаты, рассмотрим задачу просачивания чисто сдвиговой магнитоупругой объемной волны через вакуумный зазор между двумя одинаковыми магнитострикционными полупространствами.

Сохраняя условия предыдущей задачи, на расстоянии $2h$ от поверхности среды $x_2 = h$ поместим такую же среду, занимающую полупространство $x_2 < -h$. Величины, отнесенные к области $x_2 > h$, будем отмечать индексом α, отнесенные к щели $-h < x_2 < h$ — индексом γ, отнесенные к области $x_2 < -h$ — индексом β.

Как выяснилось выше, в результате распространения в среде $x_2 > h$ магнитоупругой волны, в вакууме, граничащей со средой, образуется возмущенное магнитное поле. При наличии второй среды в ней также возникает переменное магнитное поле, а вследствие магнитострикционных свойств этой среды и упругие деформации. Таким образом, может происходить просачивание магнитоупругой волны через вакуумную щель из одной среды в другую.

Магнитоупругие волновые процессы во второй среде $(x_2 < -h)$ описываются уравнениями (2.1) и граничными условиями (2.3) лишь заменой индекса α индексом β. Возмущения этой среды, возникающие при просачивании, будем искать в виде сдвиговой преломленной объемной волны

$$u^{(2)} = U_2 \exp(i(-p_0 x_2 + q x_1 - \omega t))$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{\beta_{15}}{\mu_0 \mu_r} u^{(2)} + \Phi^{(2)} \exp(q x_2 + i(q x_1 - \omega t)) \tag{2.1}$$

где U_2 — амплитуда смещения преломленной волны, $\Phi^{(2)}$ — амплитуда потенциала чисто магнитных СПМК. Преломленная волна распространяется под тем же углом Θ, что и падающая.

Используя решения (1.4) для $x_2 > h$, решение (2.1) для $x_2 < -h$ и решение (1.5) для вакуума $(-h < x_2 < h)$ и удовлетворяя уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.3) с соответствующими индексами, определяем все искомые величины, выраженные через U_0, φ_0, ω. В результате получаем

$$u^{(1)} = U_0 [\exp(-i p_0 x_2) + R \exp(i p_0 (x_2 - 2h))] \exp(i(q x_1 - \omega t))$$

$$\varphi^{(1)} = U_0 \frac{\beta_{15}}{\mu_0 \mu_r} \Big[\exp(-i p_0 x_2) + R \exp(i p_0 (x_2 - 2h)) +$$

$$+ \frac{i(R-1)\,\mathrm{tg}\,\Theta}{\bar{r}^2} \exp(-i p_0 h) \exp(q(h - x_2)) \Big] \exp(i(q x_1 - \omega t))$$

$$\varphi^{(0)} = U_0 \frac{\beta_{15} \exp(-i p_0 h)\,\mathrm{tg}\,\Theta}{2 \mu_0 \bar{r}^2} \Big[\frac{1 - R - T}{\mathrm{sh}\,\varkappa} \mathrm{ch}(q x_2) + \frac{1 - R + T}{\mathrm{ch}\,\varkappa} \times$$

$$\times \mathrm{sh}(q x_2) \Big] \exp(i(q x_1 - \omega t)) \tag{2.2}$$

$$u^{(3)} = U_0 T \exp(-i p_0 (2h - x_2)) \exp(i(q x_1 - \omega t))$$

$$\varphi^{(3)} = U_0 \frac{\beta_{15} T}{\mu_0 \mu_r} \Big[\exp(-i p_0 (2h - x_2)) + \frac{i\,\mathrm{tg}\,\Theta}{\bar{r}^2} \exp(-i p_0 h) \exp(q(h + x_2)) \Big] \times$$

$$\times \exp(i(q x_1 - \omega t))$$

где

$$\varkappa = qh, \quad R = \frac{U_1}{U_0} \exp(2 i p_0 h) = \frac{\mathrm{tg}^2\Theta + \lambda_1 \lambda_2}{(\mathrm{tg}\,\Theta - i\lambda_1)(\mathrm{tg}\,\Theta - i\lambda_2)} \tag{2.3}$$

— коэффициент отражения,

$$T = \frac{U_2}{U_0} e^{2 i p_0 h} = -\frac{[(\mathrm{tg}\,\Theta + i\bar{r}^2) - (\mathrm{tg}\,\Theta - i\bar{r}^2) R](1 - \mathrm{th}^2\varkappa)}{\mathrm{tg}\,\Theta [2\mu_r \mathrm{th}\,\varkappa + (1 + \mathrm{th}^2\varkappa)] - i\bar{r}^2 (1 + \mathrm{th}^2\varkappa)} \tag{2.4}$$

— коэффциент преломления магнитоупругой волны;

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}^2}{1 + \mu_r \mathrm{tg}\,\varkappa}, \quad \lambda_2 = \frac{\bar{r}^2 \mathrm{th}\,\varkappa}{\mu_r + \mathrm{th}\,\varkappa} \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.4) для модулей R и T получаются выражения:

$$|R| = \frac{\mathrm{tg}^2\Theta + \lambda_1 \lambda_2}{[(\mathrm{tg}^2\Theta + \lambda_1^2)(\mathrm{tg}^2\Theta + \lambda_2^2)]^{1/2}} \tag{2.6}$$

$$|T| = \left| \frac{|R|^2 (\mathrm{tg}^2\Theta + \bar{r}^4) + 2\mathrm{Re}(R)(\bar{r}^4 - \mathrm{tg}^2\Theta) - 4\mathrm{Im}(R)\bar{r}^2 \mathrm{tg}\,\Theta}{\mathrm{tg}^2\Theta [2\mu_r \mathrm{th}\,\varkappa + (1 + \mathrm{th}^2\varkappa)]^2 + \bar{r}^4 (1 + \mathrm{th}^2\varkappa)^2} \right|^{1/2} (1 - \mathrm{th}^2\varkappa)$$

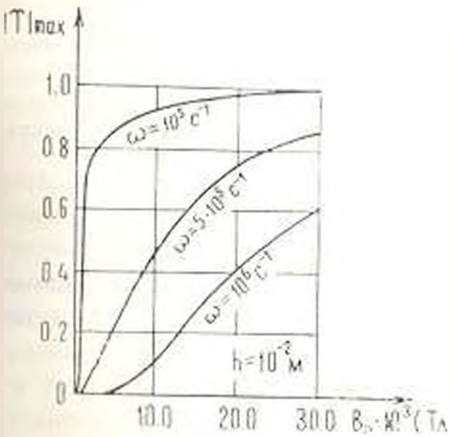
Исследуя (2.6), приходим к выводу, что при фиксированной ширине зазора $2h$ минимальное значение $|R|$ и максимальное значение $|T|$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ достигаются при одном и том же значении $\Theta = \Theta_0 = \operatorname{arctg}|v_1/v_2|^{1/2}$ и равны

$$|R|_{min} = \frac{2\sqrt{v_1 v_2}}{v_1 + v_2}, \quad |T|_{max} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \tag{2.7}$$

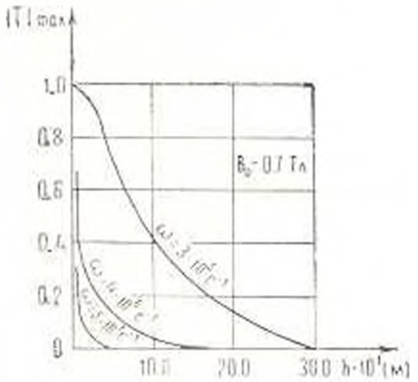
Из (2.5) легко видно, что $\Theta_0 < \frac{\pi}{4}$, поэтому хорошее прохождение волны происходит при малых углах падения. Хотя при нормальном падении волны, согласно (2.2), в обеих средах существуют СПМК, тем не менее преломленная волна перпендикулярно поверхности распространяться не может ($T = 0$, $R = 1$). Также видно, что в рассматриваемом случае объемная волна, распространяющаяся параллельно границе ($\Theta = 0$), не может просачиваться через зазор во вторую среду ($T = 0$).

Как следует из (2.7), ни при каком конечном h максимальное значение модуля коэффициента преломления не равно единице ($|T|_{max} \neq 1$), но при $h \to 0$, как видно из (2.5), $\Theta_0 \to 0+$ и $|T|_{max} \to 1$. Следовательно, для магнитострикционных материалов полное просачивание волны невозможно, хотя уменьшая толщину щели $2h$, можно получить достаточно хорошее прохождение волны.

На основе (2.7) проведен численный анализ зависимостей $|T|_{max}$ от напряженности начального магнитного поля H_0, толщины щели $2h$ и частоты колебания ω. Для расчетов приняты те же исходные числовые данные, что и в задаче отражения (пункт 1). Результаты приведены графически (фиг. 3, 4). Из этих фигур видно, что хорошее прохождение волны происходит при малых частотах и малой толщине щели, причем этот эффект существенно усиливается с увеличением напряженности магнитного поля.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В заключение отметим, что аналогичные результаты могут наблюдаться и в случае пьезомагнитных кристаллов. Заметим также, что у некоторых таких материалов, имеющих определенные магнитные структуры, возможно полное прохождение магнитоупругой волны через вакуумный зазор между двумя пьезомагнетиками.

TRANSITION OF SHEAR WAVES THROUGH THE GAP BETWEEN TWO MAGNETOSTRICTION HALF-SPACES

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOYAN, L. A. SANOYAN

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ՄԱԳՆԻՍԱՍՏՐԻԿՑԻՈՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ, Լ. Ա. ՍԱՆՈՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում, ելնելով ֆերոմագնիսական միջավայրերի շարժման հավասարումներից և մակերևույթային պայմաններից, ցույց է տրված, որ շնորհիվ նյութի մագնիսաստրիկցիոն հատկությունների, սահքի ալիքները հնարավոր է փոխանցել մի միջավայրից մյուսը: Դիտարկված է նաև անդրադարձման խնդիրը: Միջավայրում առաջանում են մակերևութային տատանումներ՝ պայմանավորված մագնիսաստրիկցիոն էֆեկտի հաշվառմամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982. 624 с.
2. *Власов К. Б.* Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитострикционных) сред.—Изв. АН СССР, сер. физическая, 1957, т. 21, № 8, с. 1140—1148.
3. Brown W. F. Theory of magnetoelastic effects in ferromagnetism.—Journ. of App. Phys., 1965, vol. 36.
4. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости.—М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
5. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1982. 236 с.
6. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Саноян Л. А.* Отражение сдвиговых магнитоупругих волн от свободной границы пьезомагнитного полупространства.—Межвузовский сб. науч. тр. 1986, вып. 5.

Ереванский государственный университет
Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
9. III. 1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

УДК 532.591:534.22.2

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА АСИМПТОТИЧЕСКУЮ КАРТИНУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СМЕСЯХ

ОГАНЯН Г. Г.

В реальных газожидкостных средах может иметь место интенсивный теплообмен между газовым пузырьком и окружающей его несущей жидкостью за счет их динамического взаимодействия. При этом количество тепла, отданное пузырьком в процессе сжатия, не обязательно равняется количеству тепла, полученному пузырьком от жидкости в процессе своего расширения. Тем самым, может иметь место диссипация кинетической энергии смеси за счет необратимого межфазного теплообмена. Важность учета тепловых эффектов, существенно влияющих на собственную частоту колебаний пузырька в жидкости, показана как в линейной [1], так и в нелинейной [2, 3] постановках. Известные физические и численные эксперименты по распространению слабых ударных волн [4—8] подтвердили возможность главенствующей роли тепловой релаксации в общем механизме эффектов диссипации. В настоящей работе на основе модельных линейных уравнений Бюргерса-Кортевега-де Вриза исследованы задачи по распространению возмущений, начальные распределения которых задаются в виде разрывных и непрерывных функций (задачи Коши). Выявлено, что в полученных асимптотических представлениях решений далеко впереди волны эффекты диссипации противодействуют (ослабляют), а далеко позади фронта волны—способствуют (усиливают) процессу затухания возмущений.

§ 1. При адиабатическом и изотермическом предельных термодинамических поведениях газового пузырька в жидкости тепловой поток от пузырька в жидкость и обратно отсутствуют [6, 7]. Для его учета в качестве исходной системы уравнений, описывающей течение двухфазной монодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несовпадения давлений и температур в фазах, эффектов вязкости жидкости и неодиночности газовых пузырьков, воспользуемся уравнениями [7]. Используя метод коротких волн [9], из исходной системы можно получить безразмерные нелинейные уравнения, описывающие распространение волн малой, но конечной амплитуды и учитывающие эффекты тепловой релаксации. Их подробный вывод приведен в [10], где различаются случаи термодинамического поведения пузырьков, близких:

к изотермическому (квазиизотермический процесс)

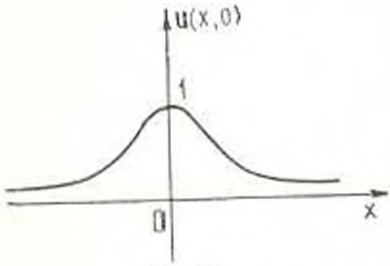
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (\delta_t + \delta_T) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \gamma_t \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = 0 \tag{1.1}$$

к адиабатическому (квазиадиабатический процесс)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \alpha_f u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \delta_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \gamma_f \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \varkappa u_1 = 0 \tag{1.2}$$

Здесь (x_1, t) — подвижная система координат, связанная с фронтом слабой ударной волны, распространяющимся либо с изотермической, либо с адиабатической скоростью звука в покоящейся смеси; u_1 — приведенное возмущение скорости частиц смеси; $\delta_{t,f}$ — коэффициенты, учитывающие диссипативные эффекты за счет вязкости, $a\delta_T$ и $\varkappa$ — за счет тепловой релаксации (межфазного необратимого теплообмена); $\gamma_{t,f}$ — коэффициенты дисперсии, учитывающие также неодиночность газового пузырька в жидкости, $\alpha_f = (\gamma + 1)/2$ — коэффициент нелинейности, γ — показатель адиабаты газа. При $\delta_f \to 0$ и $\varkappa \to 0$ уравнения (1.1) и (1.2) будут описывать соответственно чисто изотермический и адиабатический режимы распространения возмущений [4, 6]. Напомним, что уравнения (1.1), (1.2) выписаны в безразмерной форме.

Фиг. 1.



Фиг. 2.

В линейной постановке, полагая в (1.2) $u_1 = v\exp(-\varkappa t)$, получим уравнение относительно v, идентичное линейному варианту уравнения (1.1). Поэтому в качестве основного уравнения, подлежащего решению при различных начальных условиях, примем (1.1). Обозначим $\nu = \delta_t + \delta_T$ и для простоты записи индексы опустим

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Применяя к уравнению преобразование Фурье, нетрудно проверить, что его общее решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, 0)\exp(-\nu t k^2)\exp[i(\gamma t k^3 + xk)]\,dk \tag{1.3}$$

где $U(k, 0)$ — Фурье-образ начальной функции

$$U(k, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\exp(-ikx)dx$$

Пусть начальное условие задается в виде разрывной в точках $x = \pm l$ функции $u(x, 0) = \sigma[\mathrm{sgn}(x + l) - \mathrm{sgn}(x - l)]$. Тогда

$$U(k, 0) = \frac{2\sigma}{\pi}\,\frac{\sin kl}{k}, \quad \sigma = \mathrm{const}$$

Подставляя его в решение (1.3) и рассматривая получаемый интеграл как свертку от функций Эйри и интегралов вероятности [11, 12], получим

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{z + l}{2\sqrt{\nu t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{z - l}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] Ai\left(\frac{x - z}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)dz$$

Используя связь [13] между дельта-функцией Дирака и функцией Эйри, нетрудно показать, что при $\nu t \to 0$ полученное решение переходит в заданное начальное условие.

Перейдем к изучению асимптотического поведения решения при больших значениях t. Разлагая функцию Эйри в степенной ряд по z, находим [12]

$$u(x, t) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{z + l}{2\sqrt{\nu t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{z - l}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]dz = \frac{4\sigma}{\pi}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}(\nu t)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{l^2}{8\nu t}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(2\nu t)^n(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)\left[D_{-2n-2}\left(-\frac{l}{\sqrt{2\nu t}}\right) - D_{-2n-2}\left(\frac{l}{\sqrt{2\nu t}}\right)\right]$$

Здесь $D_{-2n-2}(s)$ — функции параболического цилиндра, сводимые посредством известных формул [11] к вырожденным гипергеометрическим (к функциям Куммера $\Phi(a, b, s^2/2)$). Поэтому решение можно выразить через функцию Куммера

$$u(x, t) = \frac{4\sigma l}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\exp\left(-\frac{l^2}{4\nu t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^n}{n!}(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)\times$$

$$\times\Phi\left(n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{l^2}{4\nu t}\right) \tag{1.4}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения при $t \gg \frac{l^2}{4\nu t}$.

Согласно формуле асимптотического представления функции Куммера при малых значениях аргумента [11]

$$u(x,t)=\frac{4\sigma l}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^n}{n!}(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}}Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)$$

Теперь получим асимптотические виды решения далеко впереди и позади фронта волны. При $x(3\gamma t)^{-1/3}\to\infty$, используя формулу асимптотического разложения для производных функций Эйри [13], имеем

$$u(x,t)=\frac{2\sigma l}{\sqrt{\pi}}(3\gamma tx)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{\nu}{3\gamma}x\right] \qquad (1.5)$$

Таким образом, далеко впереди волны на расстояниях $x=O(t^{1/3+\varepsilon})$ где $\varepsilon>2/3$ затухание возмущений происходит одновременно как по степенному, так и по экспоненциальному законам, при этом учет диссипативных факторов противодействует этому процессу.

При $x(3\gamma t)^{-1/3}\to-\infty$ аналогичным образом находим

$$u(x,t)=\frac{4\sigma l}{\sqrt{\pi}}\left|3\gamma tx\right|^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{\nu}{3\gamma}|x|\right)\cos\left(\frac{2}{3}\left|\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (1.6)$$

то есть далеко позади волны ($x=O(t^{1/3+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$) затухание возмущений имеет осцилляционный характер, при этом диссипативные эффекты усиливают этот процесс. При переходе от одного газа к другому, отличающимися по величине коэффициентов температуропроводности на порядок (например, CO_2 и He), учет тепловой релаксации, характеризуемый коэффициентом δ_r, начинает играть основную роль в механизме диссипации.

В случае пренебрежения всеми диссипативными эффектами удобнее всего обратиться к решению в виде (1.4). Используя асимптотическое представление функций Куммера при больших значениях аргумента, а также формулу Лежандра для удвоения аргументов гамма-функций [11], решение можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{4\sigma l}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l^{2n}}{\Gamma(2n+2)}(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}}Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) \qquad (1.7)$$

Отсюда, аналогично выводу формул (1.5) и (1.6), нетрудно получить: при $x(3\gamma t)^{-1/3}\to\infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$u(x,t)=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)^{-\frac{3}{4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{sh}\left(l\sqrt{\frac{x}{3\gamma t}}\right) \qquad (1.8)$$

при $x(3\gamma t)^{-1/3}\to-\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$u(x,t)=\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right|^{-\frac{3}{4}}\cos\left[\frac{2}{3}\left|\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right]\sin\left(l\left|\frac{x}{3\gamma t}\right|^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (1.9)$$

Очевидно, что при $\nu\to0$ формулы (1.5) и (1.6) не переходят в (1.8) и (1.9). Такая неравномерность разложений объясняется тем, что в решении (1.4) берутся различные предельные асимптотические представления функции Куммера. Именно поэтому в (1.5)—(1.8) законы затухания различны.

Если $t \to \infty$ и $x = o(t^{1/3+\varepsilon})$, где $0 < \varepsilon < \dfrac{2}{3}$, то в решении (1.7) можно ограничиться первым членом разложения

$$u(x, t) = \frac{4\alpha l}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} Ai\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) \tag{1.10}$$

При таких порядках величины расстояний далеко впереди и позади волны имеем $x(3\gamma t)^{-1} \to 0$, а $x(3\gamma t)^{-1/3} \to \pm\infty$. Поэтому в решениях (1.8), (1.9) синус-функции можно заменить их аргументами и в формуле (1.10) использовать асимптотические представления функции Эйри. В результате предельных переходов придем к решениям (1.5) и (1.6), в которых $\nu = 0$. При $\varepsilon \geqslant \dfrac{2}{3}$, то есть на еще более отдаленных расстояниях от фронта волны, справедливы решения (1.8) и (1.9). Отметим, что применение метода стационарной фазы к вычислению интеграла (1.3), в котором $\nu = 0$, дает лишь решение (1.9)

Если же $t \to \infty$ и $x = o(t^{1/3})$, то в (1.7) необходимо использовать представление функции Эйри в виде [11, 14] рядов по возрастающим степеням аргумента. В этом случае затухание возмущений происходит одинаково по обе стороны фронта

$$u(x, t) \sim \frac{4\alpha l}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(\gamma t)^{-\frac{1}{3}}$$

§ 2. Для подтверждения качественных выводов и результатов п. 1, рассмотрим теперь начальные условия в виде непрерывных функций

а) $u(x, 0) = \exp(-m^2 x^2)$, $m = \mathrm{const}$

$$U(k, 0) = \frac{1}{2m\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4m^2}\right)$$

Общее решение (1.3) теперь запишется в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2m\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1 + 4m^2\nu t}{4m^2} k^2\right) \exp(i\gamma t k^3 + ixk)\, dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} (1 + 4m^2\nu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2\nu t}\right) Ai\left(\frac{x - z}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) dz$$

Здесь при переходе от первого интеграла ко второму применена теорема о свертке Фурье-прообразов подынтегральных функций. Разлагая функцию Эйри в степенной ряд по переменной интегрирования и приводя интеграл к гамма-функции, после применения формулы Лежандра для Г-функций, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{m} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2\nu t}{4m^2}\right)^n Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)$$

Для получения решений далеко впереди и позади фронта волны воспользуемся асимптотическими представлениями [13] производных функции Эйри. При $x(3\gamma t)^{-1/3} \to \infty$ находим, что далеко впереди волны

$$u(x,t) \approx \frac{1}{2m}(3\gamma t x)^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}\frac{x}{3\gamma t}\right] \qquad (2.1)$$

то есть учет диссипации приводит к ослаблению процесса монотонного затухания возмущений.

При $x(3\gamma t)^{-1/3} \to -\infty$ имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{m}\left|3\gamma t x\right|^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}\frac{|x|}{3\gamma t}\right)\cos\left(\frac{2}{3}\left|\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (2.2)$$

то есть далеко позади волны диссипация усиливает процесс осцилляционного затухания возмущений.

Очевидно, что с точностью до коэффициентов, законы затухания возмущений (2.1), (2.2) при $t \to \infty$ совпадают с (1.5), (1.6). При этом, как с учетом диссипации, так и без него, проведенный анализ о порядках величин расстояний, где справедливы полученные решения, сохраняет свою силу и в рассматриваемой задаче.

$$\text{б)}\ u(x,0) = -\frac{2m^3}{\sqrt{\pi}}x\exp(-m^2x^2), \quad m = \text{const}$$

$$U(k,0) = i\frac{k}{2\pi}\Phi\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{k^2}{m^2}\right) = i\frac{k}{2\pi}\exp\left(-\frac{k^2}{4m^2}\right)$$

При вычислении Фурье-образа $U(k,0)$ использовано преобразование Куммера для вырожденных гипергеометрических функций [11]. Общее решение (1.3) для рассматриваемого случая примет вид

$$u(x,t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\exp\left(-\frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}k^2\right)\exp(i\gamma t k^3 + ixk)\,dk =$$

$$= -\frac{2m^3}{\pi}(1+4m^2\nu t)^{-\frac{3}{2}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}\int_{-\infty}^{\infty} z\exp\left(-\frac{m^2z^2}{1+4m^2\nu t}\right)Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)dz \qquad (2.3)$$

Здесь опять применена теорема о свертке. При $t \to 0$, согласно предельному переходу [13],

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{1}{3}}Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) \to \delta(x-z)$$

где $\delta(x-z)$ — дельта-функция Дирака, нетрудно проверить выполнение начального условия. Разлагая в решении (2.3) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление Г-функций, после применения функциональных соотношений и формулы Лежандра [11] получим

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{2}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}\right)^n(3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}}Ai^{(2n+1)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) \tag{2.4}$$

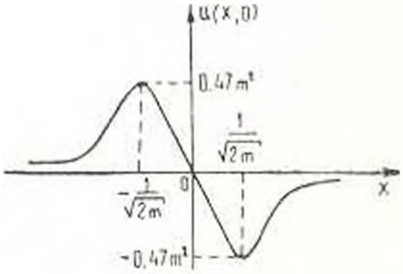
Выясним поведение решения на больших расстояниях от фронта волны впереди и позади него. Аналогично выводу формул (2.1) и (2.2) находим:

при $x(3\gamma t)^{-1/3}\to\infty$ (далеко впереди волны)

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}\,\frac{x}{3\gamma t}\right] \tag{2.5}$$

при $x(3\gamma t)^{-1/3}\to-\infty$ (далеко позади волны)

$$u(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{3}{4}}|x|^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1+4m^2\nu t}{4m^2}\left|\frac{x}{3\gamma t}\right|\right)\cos\left(\frac{2}{3}\left|\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.6}$$



Фиг. 3.

Таким образом, как и в вышерассмотренных задачах, впереди фронта волны эффекты диссипации ослабляют, а позади фронта — усиливают процесс затухания возмущений. Если $t\to\infty$, то на расстояниях $x=O(t^{1/3+\varepsilon})$ при $\varepsilon>0$ этот процесс описывается решением (2.6), а при $\varepsilon>\frac{2}{3}$ — решением (2.5).

В недиссипативном варианте ($\nu=0$) решения (2.1) при $t\to\infty$ и для расстояний $x=O(t^{1/3+\varepsilon})$, где $0<\varepsilon<\frac{2}{3}$, можно ограничиться приближением

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(3\gamma t)^{-\frac{2}{3}}Ai'\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}}\right) \tag{2.7}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной. Действительно, именно на таких расстояниях $x(3\gamma t)^{-1/3}\to\pm\infty$, а $x(3\gamma t)^{-1}\to 0$, поэтому, используя асимптотические представления производной функции Эйри [13], нетрудно показать совпадение формул (2.7) и (2.5), (2.6). При $\varepsilon > \frac{2}{3}$, то есть на более отдаленных расстояниях по обе стороны от фронта волны, справедливы только формулы (2.5) и (2.6).

Итак, анализ полученных результатов свидетельствует о том, что даже в отсутствие эффектов вязкости учет других диссипативных факторов весьма существенен при исследовании волновых задач в диспергирующих средах. Впереди линейной волны затухание возмущений происходит на более дальних расстояниях от фронта волны, чем позади него.

INFLUENCE OF DISSIPATION ON THE ASYMPTOTIC PICTURE OF LINEARY WAVES PROPAGATION IN GAS-FLUID MIXTURE

G. G. OHANIAN

ԴԻՍԻՊԱՑԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ԽԱՌՆՈՒՐԴՆԵՐՈՒՄ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՊԱՏԿԵՐԻ ՎՐԱ

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բյուրգերս-Կորտևեգ-դը Վրիզի մոդելային գծային հավասարումների հիման վրա հետազոտված են գազահեղուկ խառնուրդում թույլ հարվածային ալիքների տարածման խնդիրները։ Պղպջակների ջերմադինամիկական վարքից կախված տարբերվում են գրգռումների տարածման քվազիիզոթերմիկ և կվազիադիաբատիկ պրոցեսները։ Սկզբնական պայմանները վերցված են խզվող և անընդհատ ֆունկցիաների տեսքով։ Ստացված են լուծումների ասիմպտոտիկ ներկայացումները ալիքի ճակատից բավականին առաջ և հետո։ Ցույց է տրված, որ ալիքի ճակատից բավականին առաջ դիսիպացիայի էֆեկտները թուլացնում, իսկ բավականին հետ՝ ուժեղացնում են գրգռումների մարման պրոցեսը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чэпмен Р. Б., Плессет М. С.* Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.—Теор. основы инж. расчетов, 1971, т. 93, № 3, с. 37—40.
2. *Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.* Теплообмен газового пузырька с жидкостью.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, с. 94—100.
3. *Ивченко В. М., Приходько И. А., Сирый В. С.* Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости.—Гидромеханика. Респ. межведомств. сб., 1971, вып. 19, с. 9—14.
4. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
5. *Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Исследование нестационар-

ных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
6. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных смесях.—Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
7. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.—М.: Наука, 1978. 336 с.
8. *Нигматулин Р. И., Ивандаев А. И., Нигматулин Б. И., Милошенко В. И.* Нестационарные волновые процессы в газо- и парожидкостных смесях.—В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 80—90.
9. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред.—ПММ, 1971, т. 35, № 6, с. 1023—1037.
10. *Оганян Г. Г.* Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, т. 41, № 5, с. [illegible]
11. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.—М.: Наука, 1979. 830 с.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.—М.: Наука, 1981. 800 с.
13. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973. 176 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8 VI 1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ СТЕНКОЙ

БАБАДЖАНЯН Г. А., МИНАСАКАНЯН Р. Ж.

Рассматривается развитие стационарного ламинарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся пористой стенкой.

Такие течения относятся к мало изученному классу задач в теории движения жидкости и имеют специфические особенности [1], [2], [3], [4]. Эти задачи имеют многочисленные практические приложения в современной технологии.

Скольжение верхней пористой плоскости происходит в своей плоскости по оси OX с заданной постоянной скоростью U_1. За исходные уравнения движения жидкости принимаются приближенные линеаризованные уравнения Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в виде [3]

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

Здесь U — средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, где распределение скорости принимается равномерным, v_x и v_y — соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Приняв начало оси OY на средней линии между плоскостями и расстояние между ними $2h$, граничные условия поставленной задачи будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad v_x=U=\text{const}, \quad p=p_{\text{н}}=\text{const}\\ &\text{при } y=h, \quad x>0 \quad v_x=U_1, \quad v_y=k(p-p_{\text{в}})\\ &\text{при } y=-h, \quad x>0 \quad v_x=0, \quad v_y=0 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $p_{\text{н}}$ — значение давления в начале трубы, k — коэффициент проницаемости стенки, $p_{\text{в}}$ — внешнее давление.

Если $p>p_{\text{в}}$, имеет место отсос жидкости, в случае $p<p_{\text{в}}$ — вдувание.

Введем новые переменные, полагая

$$z = \frac{x}{h}, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad P = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

Тогда система уравнений (1) и граничные условия (2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{3}$$

при $z = 0$ $u = 0$, $P = 0$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v = \alpha(P + b) \tag{4}$$

при $\xi = -1$ $z > 0$ $u = -1$, $v = 0$

где $Re = \frac{Uh}{\nu}$ — число Рейнольдса, $\alpha = k\rho U$, $b = \frac{p_0 - p_*}{\rho U^2}$.

Систему уравнений (3) при граничных условиях (4) решаем с помощью преобразования Лапласа [5]. Применяя к уравнениям (3) и к граничным условиям (4) преобразования Лапласа, получим

$$\frac{1}{Re}\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} - \lambda\bar{u} = \lambda\bar{P}, \qquad \frac{d\bar{P}}{d\xi} = 0, \qquad \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \lambda\bar{u} = 0 \tag{5}$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U}\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = \alpha\left(\bar{P} + \frac{b}{\lambda}\right) \tag{6}$$

$$\text{при } \xi = -1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0$$

где λ — параметр преобразования.

Из системы уравнений (5) для $\bar{v}$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4\bar{v}}{d\xi^4} - \lambda Re\frac{d^2\bar{v}}{d\xi^2} = 0 \tag{7}$$

Решение уравнения (7) с учетом граничных условий (6) будет

$$\bar{v} = \frac{\alpha}{2}\left(\bar{P} + \frac{b}{\lambda}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\beta\xi - \beta\xi\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\beta - \beta\operatorname{ch}\beta} + 1\right) + \frac{a+1}{2}\left(\xi - \frac{\operatorname{sh}\beta\xi - \beta\xi\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\beta - \beta\operatorname{ch}\beta}\right) + \\ + \frac{a-1}{2}\frac{\operatorname{ch}\beta\xi - \operatorname{ch}\beta}{\beta\operatorname{sh}\beta} \tag{8}$$

Из системы уравнений (5) для $\bar{u}$ и $\bar{P}$ соответственно получим

$$\bar{u} = \frac{\alpha}{2}\left(\bar{P} + \frac{b}{\lambda}\right)\frac{\beta(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{ch}\beta\xi)}{\lambda(\operatorname{sh}\beta - \beta\operatorname{ch}\beta)} + \frac{a+1}{2\lambda}\left|\frac{\beta(\operatorname{ch}\beta\xi - \operatorname{ch}\beta)}{\operatorname{sh}\beta - \beta\operatorname{ch}\beta} - 1\right| - \\ - \frac{a-1}{2}\frac{\operatorname{sh}\beta\xi}{\lambda\operatorname{sh}\beta} \tag{9}$$

$$\bar p = \frac{\lambda(a+1)\,\mathrm{th}\,\beta - b\lambda\beta}{\lambda[\beta\alpha + 2\lambda(\mathrm{th}\,\beta - \beta)]} \tag{10}$$

где $\beta = \sqrt{\lambda \mathrm{Re}}$, $a = \frac{U - U_1}{U}$.

Совершив обратное преобразование Лапласа и переходя к старым переменным для v_x, v_y и p, окончательно получим

$$v_x = U\sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\frac{\cos\gamma_m y/h}{\cos\gamma_m} - 1\right)\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + UB\left(\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_1\mathrm{Re}}\,y/h}{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_1\mathrm{Re}}} - 1\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\pi n y/h}{n}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + \frac{U_1}{2}\left(\frac{y}{h} + 1\right) \tag{11}$$

$$v_y = \frac{U}{\mathrm{Re}}\sum_{m=1}^{\infty} A_m\gamma_m^2\left(\frac{\sin\gamma_m y/h}{\gamma_m\cos\gamma_m} - \frac{y}{h} + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2}\right)\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) -$$

$$- U\lambda_1 B\left(\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_1\mathrm{Re}}\,y/h}{\sqrt{\lambda_1\mathrm{Re}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_1\mathrm{Re}}} - \frac{y}{h} - \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) -$$

$$- \frac{U_1}{\mathrm{Re}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cos\pi n y/h - 1\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right) \tag{12}$$

$$p = p_n + \rho U^2 B\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \rho U^2\sum_{m=1}^{\infty} A_m\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) \tag{13}$$

где $A_m = \frac{(a+1)\gamma_m^2 + \beta_1(a+2b+1)}{\gamma_m^4 + 2\beta_1\gamma_m^2 + \beta_1 + \beta_1^2}$, $B = \frac{\beta_1(a+2b+1) - \lambda_1\mathrm{Re}(a+1)}{(\lambda_1\mathrm{Re})^2 - 2\beta_1\lambda_1\mathrm{Re} + \beta_1 + \beta_1^2}$

через γ_m обозначены действительные корни уравнения

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \gamma + \frac{\alpha\mathrm{Re}}{2\gamma}$$

λ_1 — значение, соответствующее двум действительным корням уравнения

$$\mathrm{th}\sqrt{\lambda\mathrm{Re}} = \sqrt{\lambda\mathrm{Re}} - \frac{\alpha\mathrm{Re}}{2\sqrt{\lambda\mathrm{Re}}}, \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{\alpha\mathrm{Re}}{2}$$

Подставляя в выражениях (8), (9) и (10)

$$\mathrm{th}\,\beta = \beta - \frac{1}{3}\beta^3$$

и совершая все необходимые математические преобразования, получим приближенные значения оригиналов искомых функций на достаточно большом удалении от входа

$$v_{x\infty} = \frac{3U}{4}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\left[(a+1)\mathrm{ch}\lambda_2 x/h - \frac{\alpha(a+2b+1)}{2\lambda_2}\,\mathrm{sh}\lambda_2 x/h\right] + \frac{U_1}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) \tag{14}$$

$$v_{x\infty} = \frac{U\alpha}{2}\left(\frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} + 1\right)\left[\left(\frac{a+2b-1}{2}\right)\operatorname{ch}\lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2\lambda_2 \mathrm{Re}}\operatorname{sh}\lambda_2 x/h\right] \tag{15}$$

$$p_\infty = p_* + \left(p_{\text{н}} - p_* - \rho U^2\frac{a+1}{2}\right)\operatorname{ch}\lambda_2 x/h - \frac{3\nu U}{2\lambda_2 h}(a+1)\operatorname{sh}\lambda_2 x/h \tag{16}$$

Здесь $\lambda_2^2 = \frac{3\alpha}{2\mathrm{Re}}$.

Найдем значение силы трения

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \mu\left[-\frac{U}{h}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\gamma_m \sin\gamma_m y/h}{\cos\gamma_m}\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + \right.$$

$$+ UB\frac{\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}}{h}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}\,y/h}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}}\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \cos\pi n y/h\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + \frac{U_1}{2h} - \frac{U}{\mathrm{Re}^2 h}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m^4\left(\frac{\sin\gamma_m y/h}{\gamma_m \cos\gamma_m} - \frac{y}{h} + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2}\right)\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right)$$

$$- \frac{U\lambda_1^2}{h}B\left[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}\,y/h}{\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1 \mathrm{Re}}} - \frac{y}{h} - \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right]\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1\pi^2}{\mathrm{Re}^2 h}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[(-1)^n \times\right.$$

$$\left.\left. \times \cos\pi n y/h - 1\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right)\right] \tag{17}$$

где $\mu = \rho\nu$.

Значения силы трения на стенках будут

$$\tau^h = -\frac{\mu U}{h}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m^2\left(1 + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2} + \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}\right)\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) +$$

$$+ \frac{\mu U\lambda_1}{h}B\left(\alpha + \mathrm{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1}\right)\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{\mu U_1}{h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + \frac{1}{2}\right] \tag{18}$$

$$\tau^{-h} = \frac{\mu U}{h}\sum_{m=1}^{\infty} A_m(\gamma_m^2 + \beta_1)\exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\mathrm{Re}h}x\right) - \frac{\mu U\lambda_1}{h}B\left(\mathrm{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1}\right)\exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) +$$

$$+ \frac{\mu U_1}{h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\mathrm{Re}h}x\right) + \frac{1}{2}\right] \tag{19}$$

Значение силы трения на достаточно большом удалении от входа, то есть для стабилизированного участка будет

$$\tau_\infty = \frac{\mu U}{h}\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda_2(a+2b+1)}{2}\operatorname{sh}\lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2}\operatorname{ch}\lambda_2 x/h\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha}{2\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2}\right) + \frac{y}{h}\right] + \frac{\mu U_1}{2h} \tag{20}$$

Соответственно

$$\tau_\infty^h = \frac{\mu U}{h}\left(1 + \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}\right)\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda_2(a+2b+1)}{2}\operatorname{sh}\lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2}\operatorname{ch}\lambda_2 x/h\right] + \frac{\mu U_1}{2h} \tag{21}$$

$$\tau_y^h = -\frac{\mu U}{h}\left[\frac{\mathrm{Re}\,\lambda_2(a+2b+1)}{2}\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2}\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 x/h\right] + \frac{\mu U_1}{2h} \qquad (22)$$

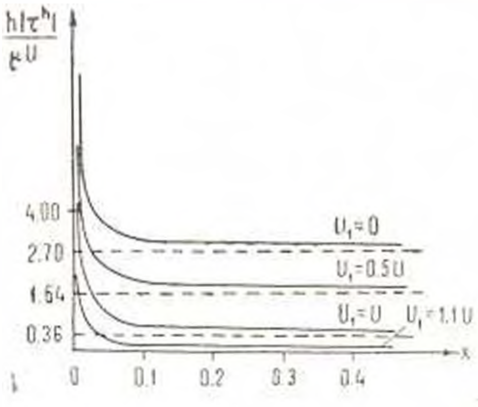
Приближенное значение длины начального участка (участок просачивания) определится из (16) при условии $p_x = p_0$, $x = l$ или из (15) при условии $v_{yx} = 0$, $x = l$.

$$\mathrm{th}\frac{\lambda_2}{h} l = \frac{\left(p_H - p_0 + 3U\mu\frac{a+1}{2}\right)\lambda_2 h}{3\mu U(a+1)} \qquad (23)$$

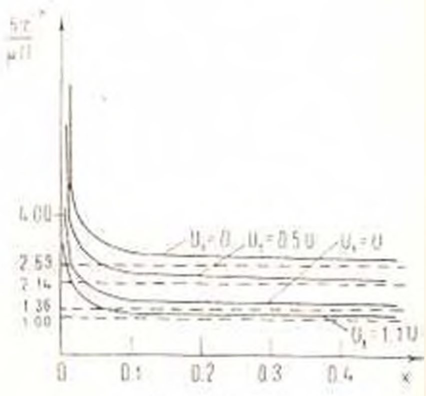
Уточненное значение длины участка просачивания получится из (13) или (12) при тех же условиях.

Как показывают полученные формулы, при $\alpha = 0$, то есть когда движущаяся стенка непроницаемая, результаты данной работы совпадают с результатами [2], при условии, что $U_1 = 0$.

Значения силы трения, зависящей от скоростей стенки и основного потока, показаны на фиг. 1 и 2, при построении которых приняты $\alpha = 10^{-5}$, $\mathrm{Re} = 10$. Как видно из фигур, когда верхняя пористая стенка неподвижна ($U_1 = 0$), сила трения на этой стенке больше силы трения на нижней сплошной стенке. При увеличении скорости движения верх-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ней пористой стенки сила трения уменьшается и при значении $U_1 = 1{,}1U$ стремится к нулю на достаточно большом расстоянии от входа (для стабилизированного участка трубы).

Фигуры показывают, что сила трения на подвижной пористой стенке меньше силы трения на неподвижной непроницаемой стенке.

Из фигур видно также, что силы трения как на проницаемой, так и на непроницаемой стенках уменьшаются при увеличении расстояния от входа трубы, то есть на обеих стенках сила трения для стабилизированного участка меньше, чем сила трения на начальном участке.

Сравнивая полученные формулы с результатами [2], видно, что при движении пористой стенки, как на этой, так и на неподвижной сплошной стенках сила трения меньше, чем когда подвижная и неподвижная стенки непроницаемые, так, что пористость уменьшает динамическую силу трения на стенках.

LIQUID FLOW IN THE CHANNEL WITH MOVING POROUS WALL

G. A. BABADJANYAN, R. ZH. MNATSAKANYAN

ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՊԱՏՈՎ ՀԱՐԹ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Ռ. Ժ. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար, լամինար, իզոթերմ շարժումը հարթ խողովակում, որի պատերից մեկը ծակոտկեն է և շարժական։

Գտնված են արագության, ճնշման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հատվածներում։

Ցույց է տրված, որ ծակոտկենությունը փոքրացնում է դինամիկական շփման ուժը խողովակի պատերի վրա։

Բերված է թվային օրինակ և կառուցված են պատերի վրա շփման ու. գրաֆիկները՝ կախված խողովակի պատի և հիմնական հոսքի արագություններից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П.* Анализ течения в канале с движущейся стенкой.—ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. *Бабаджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж.* О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 49—53.
3. *Слёзкин Н. А.* О развитии течения вязкой жидкости между паралельными пористыми стенками.—ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 591—593.
4. *Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакипов З. Б., Ярин А. Л.* Струйное обтекание движущейся поверхности.—Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1, с. 33—41.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. Москва: Изд-во «Высшая школа», 1967.

Ереванский государственный госуниверситет

Поступила в редакцию
21.XII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42 № 4, 1989

УДК 539.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОНИКАНИИ КОНУСА

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А., ГРИГОРЯН М. С.

В работе [1] получено решение задачи проникания тонкого тела в глубь анизотропной (ортотропной) среды на основе гипотезы плоских сечений. В настоящей статье эта задача рассмотрена на основе гипотезы нормальных сечений, которая применима в задаче проникания со средними скоростями [4, 5].

Вводится поверхность S, исходящая из вершины тела, позади которой выполняются уравнения идеальной пластичности [2]. В цилиндрических координатах r, θ, x, где ось x выбрана вдоль оси проникающего тела, для связи тензора скоростей деформации с напряжениями можно записать

$$\varepsilon_r = a[H(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + G(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})], \quad \varepsilon_\theta = a[H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})] \tag{1}$$

$$\varepsilon_x = a[G(\sigma_{xx} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta})], \quad \varepsilon_{rx} = aK\sigma_{rx}$$

где F, G, H даются формулами

$$2F = \frac{1}{\sigma_{s\theta}^2} + \frac{1}{\sigma_{sx}^2} - \frac{1}{\sigma_{sr}^2}, \quad 2G = \frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sr}^2} - \frac{1}{\sigma_{s\theta}^2}, \quad 2H = \frac{1}{\sigma_{sr}^2} + \frac{1}{\sigma_{s\theta}^2} - \frac{1}{\sigma_{sx}^2}$$

$\sigma_{sr}, \sigma_{s\theta}, \sigma_{sx}$ — пределы текучести по осям r, θ, x.

Разрешая систему (1), можно для девиаторов получить

$$\sigma'_{rr} = -\frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(2F + G) + \frac{\varepsilon_x}{a}(2F + H)}{\alpha}; \quad \sigma'_{\theta\theta} = \frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(2G + F) + \frac{\varepsilon_x}{a}(F - H)}{\alpha}$$

$$\sigma'_{xx} = \frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(F - G) + \frac{\varepsilon_x}{a}(F + 2H)}{\alpha}, \qquad \alpha = 3(FG + FH + GH) \tag{2}$$

Подставляя (2) в условие Мизеса

$$H(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta})^2 + G(\sigma'_{rr} - \sigma'_{xx})^2 + F(\sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{xx})^2 + K\sigma_{rx}^2 = 1$$

для параметра a можно получить

$$\sigma^2 = \frac{9}{2^2}\{[\xi_r(G+F)+\xi_x F]^2 H + [\xi_r F + \xi_x(F+H)]^2 G +$$

$$+ [\xi_r G - \xi_x H]^2 F\} + \frac{1}{K}\xi^2_{rx} \tag{3}$$

В силу несжимаемости пластической среды имеем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

где v_r, v_x — компоненты скорости частиц.

Применяя гипотезу нормальных сечений, можно получить $v_x = v_r\beta$, где $\beta = \mathrm{tg}\,\alpha_1$, α_1 есть угол полураствора тела. На теле при $r = r_k = \beta(f-x)$, где f — глубина проникания, имеет место условие

$$v_r = \beta f'. \tag{5}$$

Решение уравнения (4) при условии (5) имеет вид

$$v_r = \frac{v\beta}{r}\frac{r_k+\beta^2 r}{\beta^2+1}, \quad v_x = \frac{v\beta^2}{r}\frac{r_k+\beta^2 r}{\beta^2+1}, \quad v = \frac{f'}{1+\beta^2} \tag{6}$$

Для скоростей деформации можно получить

$$\xi_r = -\frac{v\beta^2(f-x)}{(\beta^2+1)r^2}, \quad \xi_\theta = \frac{v\beta^2(f-x+\beta r)}{(\beta^2+1)r^2}$$

$$\xi_x = -\frac{v\beta^3}{(\beta^2+1)r}, \quad \xi_{rx} = -\frac{v\beta^2}{(\beta^2+1)r}\left[1+\frac{\beta(f-x)}{r}\right] \tag{7}$$

Подставляя (7) в (3), получим

$$\sigma = \frac{3}{2}\frac{v\beta^2}{(\beta^2+1)r^2}\sqrt{Ar^2+Br+C} \tag{8}$$

где

$$A = G^2H\beta^2 + G\beta^2\left(\frac{F}{\beta^2+1} - F - H\right)^2 + \left(\frac{G}{\beta^2+1}+H\right)^2\beta^2 F + \frac{\alpha^2}{9K}$$

$$B = 2GF\frac{f-x}{\beta^2+1}\beta\left(\frac{F}{\beta^2+1} - F + \frac{G}{\beta^2+1}\right) + \frac{2\alpha^2}{9K}\beta(f-x)$$

$$C = \left[(G+F)^2 H + \frac{GF(G-F)}{(\beta^2+1)^2} - \frac{\alpha^2}{9K}\beta^2\right](f-x)^2$$

Из (2) можно получить

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{(G+F)(f-x)}{R} - \frac{\beta(G+2F)r}{R}$$

$$\sigma_{rx} = -\frac{[r+\beta(f-x)]\sigma}{3R}, \quad R = \sqrt{Ar^2+Br+C} \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{dr}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x}=0$$

можно получить после интегрирования соотношение

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{\sqrt{|A|}}\ln\left|\frac{2Ar+B}{2\sqrt{A}}+R\right|\cdot\left(G+2F-\frac{\alpha}{3}\right)\beta-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{|C|}}\ln\left|\frac{2G+Br+2\sqrt{C}\,R}{r}\right|\cdot(G+F)(l-x)+C' \qquad (10)$$

где C' — постоянная, определяемая из соединения с упругим решением, не влияющим на особенность σ_{rr} при $x=0$ [1,3]. Выясняя порядок σ_{rr} при $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, можно получить

$$A\approx\beta^2[(G+H)\alpha-2FG^2\beta^2]+\frac{\alpha^3}{9K}$$

$$C\approx(l-x)^2\left|(G+F)\alpha+\frac{\alpha^2}{9K}\beta^2-2GF\beta^2(G+F)\right|$$

Для среды, в которой $\alpha=0$, можно получить

$$A\approx-2FG^2\beta^4,\quad C=-2GF(G+F)\beta^2(l-x)^2$$

Согласно (10), σ_{rr} имеет порядок $1/\beta^2$, что приводит к большим напряжениям для тонких тел.

В случае трансверсально-изотропной среды, для которой плоскость $r,\ \theta$ является плоскостью симметрии, можно полагать

$$F=G=\frac{1}{2\tau_{sx}^2},\quad H=\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{2\tau_{sx}^2},\quad \alpha=\frac{1}{\tau_{sx}^2\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^4}$$

Таким образом, $\alpha=0$ соответствует среде, в которой $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ и σ_{rr} велико. Для проверки полученного результата проделаны опыты по прониканию со скоростью 800 м/сек стальных инденторов массой 10^{-2} кг в композиты, состоящие из ~ 50 слоев чередующихся металлов (алюминий-свинец, дюраль-свинец). Толщина пластин от 10^{-3} м до $6\cdot 10^{-3}$ м. Такой образец может быть моделирован трансверсально-изотропной средой. Пределы текучести τ_{sr} определялись по Фойхту $\tau_{sr}=\frac{h_1\tau_{s1}+h_2\tau_{s2}}{h_1+h_2}$, где $h_{1,2}$ — толщины пластин, τ_{sx} измерялось в опытах по сжатию образца. Основной эффект уменьшения глубины имеет место для среды, в которой $1{,}6<\tau_{sr}/\tau_{sx}<3{,}6$. При проникании в образец, составленный из склеенных слоев алюминия ($h_1=1{,}6\cdot 10^{-3}$ м) и свинца ($h_2=2\cdot 10^{-3}$ м), глубины проникания соответственно равны: в алюминий 10^{-1} м, в свинец более $12\cdot 10^{-2}$ м, в композит $6\cdot 10^{-2}$ м, при $\tau_{sr}/\tau_{sx}\approx 2{,}3$.

Примененная теория является квазистатической и она применима для достаточно тонких тел. Уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_r}{\partial t}$$

позволяет оценить условие квазистатичности. Второй член левой части больше τ_s/r при $\sigma_{rr} \approx 2\tau_s$, а правая часть имеет порядок $\rho v^2/r$ и условие квазистатичности $\rho v^2 < \tau_s$, что выполняется для средних скоростей.

Применение гипотезы нормальных сечений приводит к устранению, имеющее место особенности δ_{rr} при $\alpha = 0$, полученной согласно гипотезы плоских сечений. Однако, с одной стороны, напряжения для малых α получаются большими и, с другой стороны, при $A = 0$ вновь имеется особенность, то есть имеет место смещение особенности. Для опытного подтверждения указанного факта увеличения сопротивления для некоторого диапазона τ_{sr}/τ_{sx} были проведены опыты по проникание тонких твердых инденторов в металлические слоистые среды, моделирующие анизотропную среду. Образцы изготавливались чередованием 50 тонких слоев из разных металлов. В качестве металлов брались алюминий-свинец, дюраль-свинец, дюраль-алюминий с разными комбинациями толщин пластин. Набором разных толщин пластинок варьировались отношения пределов текучести по радиусу (вдоль пластинок) и по оси проникания (перпендикулярно плоскости пластин).

Среднее значение τ_{sr} определялось по Фойхту

$$\tau_{sr} = \frac{\tau_{s1} h_1 + \tau_{s2} h_2}{h_1 + h_2}$$

где $h_{1,2}$ — толщина слоев; τ_{s1}, τ_{s2} — пределы текучести составляющих металлов. У образцов, для которых τ_{sr} находилось в пределах $1{,}6\tau_{sx} \div 2{,}8\tau_{sx}$, имело место весьма значительное уменьшение глубины проникания в композит по сравнению с глубинами проникания в изотропные образцы с пределами текучести τ_{s1} и τ_{s2} соответственно. В частности, для образцов, составленных из пластинок алюминия и свинца толщиной $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м, и $2 \cdot 10^{-3}$ м, глубины поникания в композит составляли $\sim 68 \cdot 10^{-3}$ м, в алюминий $\sim 0{,}1$ м, в свинец более 0,12 м. При этом $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2{,}3$, где значение τ_{sx} в опытах измерялось сжатием образца.

В таблице приведены результаты экспериментов по проникание твердых инденторов с массой $\sim 0{,}01$ кг и начальной скоростью ~ 800 м/с в вышеуказанные среды.

В первом столбце указаны сочетания металлов, после названия металла указана толщина слоя в миллиметрах. Во втором и третьем столбцах указаны пределы текучести металлов, в четвертом приведены значения τ_{sr} компонентов, посчитанные согласно модели Фойхта. Шестой столбец показывает отношение τ_{sr}/τ_{sx}, являющееся основным параметром исследуемого эффекта. В седьмом и восьмом столбцах приводятся глубины проникания тонких твердых тел в изотропный образец с приведенными пределами текучести (3) и в композит. Как видно из таблицы, в диапазоне $1{,}6 < \tau_{sk}/\tau_{ss} < 3{,}5$ имеет место существенное уменьшение глубины поникания.

Таблица

Материалы	τ_{s1} $\times10^{-3}$ Па	τ_{s2} $\times10^{-3}$ Па	τ_{sk} $\times10^{-3}$ Па	τ_{ss} $\times10^{-3}$ Па	$\dfrac{\tau_{sk}}{\tau_{ss}}$	$h_{\text{пл}}$ $\times10^{-3}$ м	$h_{\text{комп}}$ $\times10^{-3}$ м
pb1,6+Al2	250	840	578	250	2,3	18	6,9
pb1,6+Al4	250	1200	883	250	3,5	10	6,4
Al1,6+Al4	1600	840	1178	1200	1	7,2	7,8
pb2+Al6	250	840	693	250	2,8	13	6,7
pb6+Al2	250	840	397	250	1,6	20	5,8
pb0,8+Al4	250	1200	1000	975	1	4,5	6,2
pb1,6+Al6	250	840	666	250	2,6	12	6,8
pb6+Al10	250	3000	1968	250	8	4,5	4,3
pb2+Al10	250	3000	2500	300	8,3	4,0	3,8
pb0,2+Al0,8	250	1600	925	765	1,2	8	6,9

Как показывают опытные данные, глубины проникания тонких твердых тел в композит с $\tau_{sk}/\tau_{ss} = 2{,}8$ приблизительно равны $6{,}7\cdot10^{-3}$ м, в алюминий с пределом текучести 0,84 Па — 0,1 м, а свинцовый образец толщиной — 0,12 м пробит насквозь, при этом во всех случаях наличия эффекта имеет место сильное затупление стального индентора. В начальный момент, когда скорость проникания равна приблизительно 800 м/с, существенное искривление слоев в направлении проникания отсутствует, а с уменьшением скорости проникающего тела, то есть в конце кратера, имеет место сильное искривление слоев.

Увеличение области пластичности и искривление пластин свидетельствуют о существенном поглощении энергии проникающего тела средой. Следует также отметить, что из-за слоистости среды имеет место поглощение энергии за счет появления упругих поверхностных волн, распространяющихся по слоям.

Таким образом, за счет оптимального выбора состава слоистого композита можно добиться значительного уменьшения глубины проникания твердых инденторов в металлические среды.

INVESTIGATION OF SINGULARITY OF STRESSES IN ANISOTROPIC PLASTIC MEDIUM UNDER THE CONE PENETRATION

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTSIAN, M. S. GRIGORIAN

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԿՈՆԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊԼԱՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱՂԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ, Մ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Նորմալ կտրվածքների վարկածի հիման վրա բերված է բարակ մարմինների անիզոտրոպ միջավայրեր ներթափանցման խնդիրը: Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն հարթ կտրվածքների վարկածից ստացված արդյունքների, մարմնում բացակայում են նորմալ լարումների եզակիությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 6, с. 23—30.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности.—М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1987, т. 40, № 4, с. 3—6.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание.—М.: МГУ, 1974. 298 с.
5. *Сагомонян А. Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом.—Вестн. Моск. ун-та. матем., мех., 1975, № 5, с. 104—111.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.IV.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

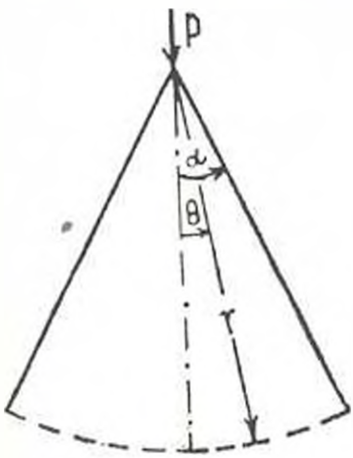
УДК 539.376

СЖАТИЕ И ИЗГИБ НЕОДНОРОДНОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ КЛИНА

САФАРЯН Н. Б.

Рассматривается сжатие плоского бесконечного клина, к вершине которого приложена сосредоточенная сила P (фиг. 1). Материал принимается несжимаемым, пластически неоднородным и подчиняется степенному закону упрочнения.

В цилиндрической системе координат r, θ, z, начало которой совпадает с вершиной клина, будем считать, что напряженное состояние не зависит от координаты z. Компоненты напряжения $\tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0$, а остальные компоненты напряжения σ_r, σ_θ, σ_z и $\tau_{r\theta}$ — функции только r и θ. Будем искать точное решение этой задачи при предположении, что компоненты напряжения $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$. Соответствующая однородная задача рассмотрена в работах [1,2].



Фиг. 1.

Краевые условия рассматриваемой задачи следующие:

$$v=0 \quad \text{при} \quad \theta=0, \quad \sigma_\theta=0, \quad \tau_{r\theta}=0 \quad \text{при} \quad \theta=\alpha \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения равновесия сводятся к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)=0 \tag{2}$$

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принимается в виде

$$\tau_0=k(r,\theta)\varepsilon_0^m \tag{3}$$

$$\tau_0=\frac{\sigma_r}{2}, \quad \varepsilon_0=|\varepsilon_r-\varepsilon_\theta|, \quad 0<m\leq 1$$

$k(r,\theta)$ — известная функция, характеризующая пластическую неоднородность материала.

Задача решается полуобратным способом. Исходя из условия несжимаемости $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$, компоненты перемещения можно представить в виде

$$u(r,\theta) = r^{-\lambda-1}\psi'(\theta), \quad v(r,\theta) = \lambda r^{-\lambda-1}\psi(\theta) \tag{4}$$

λ — постоянный неизвестный параметр, $\psi(\theta)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Из условия $\gamma_{r\theta} = 0$ имеем

$$\psi''(\theta) - \lambda(\lambda+2)\psi(\theta) = 0 \tag{5}$$

При $\lambda(\lambda+2) > 0$ общее решение уравнения (5) будет

$$\psi(\theta) = c_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta + c_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta \tag{6}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Из условия $\psi(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$.

Принимаем, что неоднородность материала определяется законом

$$k(r,\theta) = k\omega(\theta) \tag{7}$$

где k — известный постоянный параметр, $\omega(\theta)$ — известная четная функция, определяемая из эксперимента.

Из уравнения равновесия (2) следует

$$\sigma_r = \frac{\Phi(\theta)}{r} \tag{8}$$

где $\Phi(\theta)$ — произвольная функция интегрирования.

Исходя из условия степенного упрочнения (3), имеем

$$\frac{\Phi(\theta)}{r} = 2^{m+1}k|(\lambda+1)\sqrt{\lambda^2+2\lambda}|^m c_1^m(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta)^m\omega(\theta)r^{-m(\lambda+2)} \tag{9}$$

Приравнивая степени r в обеих частях равенства (9), получим $\lambda = (1-2m)/m$

Окончательный вид компонентов напряжений и перемещений будет

$$\sigma_r = 2^{m+1}k\left|\frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2}\right|^m c_1^m \frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta\right)^m\omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$u(r,\theta) = c_1\frac{\sqrt{1-2m}}{m}r^{\frac{m-1}{m}}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta \tag{10}$$

$$v(r,\theta) = c_1\frac{(1-2m)}{m}r^{\frac{m-1}{m}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta, \quad m < \frac{1}{2}$$

Для определения неизвестной постоянной c_1 рассмотрим статическое равновесие, мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом r

$$2\int_0^{\alpha} \sigma_r \cos\theta \quad r\,d\theta = P \tag{11}$$

Внося сюда значение σ_r из (10), получим

$$c_1 = \left(\frac{P}{J}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad J = 2^{m+2} k \left| \frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2} \right|^m \times \int_0^{\alpha} \left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta\right)^m \omega(\theta)\cos\theta\, d\theta$$

Аналогичное решение можно получить при $\lambda(\lambda+2)<0$. Тогда

$$\varphi(\theta) = B\sin\sqrt{-\lambda(\lambda+2)}\,\theta \tag{12}$$

где B — произвольная постоянная интегрирования. Формулы напряжений и перемещений будут

$$\sigma_r = 2^{m+1} k \left|\frac{(1-m)\sqrt{2m-1}}{m^2}\right|^m B^m \frac{\left(\cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta\right)^m \omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$u(r,\theta) = B\frac{\sqrt{1-2m}}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta \tag{13}$$

$$v(r,\theta) = B\frac{(1-2m)}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \sin\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta, \quad m > 1/2$$

Неизвестное постоянное B определяется из условия (11).

$$B = \left(\frac{P}{I}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad I = 2^{m+2} k \left|\frac{(1-m)\sqrt{2m-1}}{m^2}\right|^m \int_0^{\alpha} \left(\cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta\right)^m \omega(\theta)\cos\theta\, d\theta$$

При $m = 1/2$ решение уравнения (5) есть линейная функция

$$\varphi(\theta) = D(\theta - \theta_0) \tag{14}$$

Из условия $\varphi(0)=0$ следует, что $\theta_0 = 0$. Для компонентов напряжений и перемещений получаются следующие простые формулы:

$$\sigma_r = 2\sqrt{2}D^{1/2}\frac{\omega(\theta)}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u(r,\theta) = \frac{D}{r}, \quad v = 0 \tag{15}$$

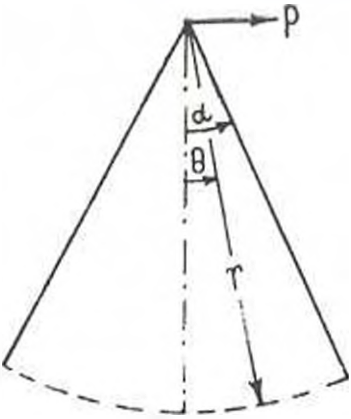
Условие (11) дает

$$D = \left(\frac{P}{G}\right)^2, \qquad G = 4\sqrt{2}\int_0^{\alpha} \omega(\theta)\cos\theta\, d\theta$$

Для несжимаемого материала, как и в однородном случае, получаются замкнутые решения.

Рассмотрим случай, когда клин изгибается сосредоточенной силой, приложенной к вершине перпендикулярно оси (фиг. 2). Определяющие уравнения и принятые допущения совпадают с предыдущим случаем.

Краевые условия в этой антисимметричной задаче следующие:



Фиг. 2

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \tag{16}$$

Для этой задачи при $\lambda(\lambda+2) > 0$ из условия $\Psi(0) = 0$ следует, что в (6) $c_1 = 0$. Общие формулы напряжений и перемещений имеют вид:

$$\sigma_r = 2^{m+1} k \left| \frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2} \right| c_2^m \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta \right)^m \omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{17}$$

$$u(r, \theta) = c_2 \frac{\sqrt{1-2m}}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta$$

$$v(r, \theta) = c_2 \frac{(1-2m)}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta$$

Неизвестное постоянное c_2 определяется из условия равновесия внешних сил

$$2 \int_0^\alpha \sigma_r \sin\theta \cdot r d\theta = P \tag{18}$$

Подставляя сюда значение σ_r из (17), получим

$$c_2 = \left(\frac{P}{M} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad M = 2^{m+2} k \left| \frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2} \right|^m \int_0^\alpha \left(\operatorname{sh} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta \right)^m \omega(\theta) \sin\theta d\theta$$

Аналогичные решения получаются и в случаях $\lambda(\lambda+2) < 0$ и $\lambda = 0$.

COMPRESSING AND BENDING OF NONHOMOGENEOUS STRENGTHENED WEDGE

N. B. SAFARIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ՍԵՊԻ ՍԵՂՄՈՒՄԸ ԵՎ ԾՌՈՒՄԸ

Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հարթ անվերջ սեպի սեղմումը և ծռումը գագաթում կիրառված կենտրոնացված ուժի ազդեցության տակ։ Սեպի նյութը անհամասեռ է և ենթարկված է աստիճանային ամրապնդման օրենքին։

Լարումների և տեղափոխությունների համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности.— М.: Высш. школа, 1968. 608 с.
2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.—Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, т. 12, вып. 2, с. 77—105.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.IX.1988