

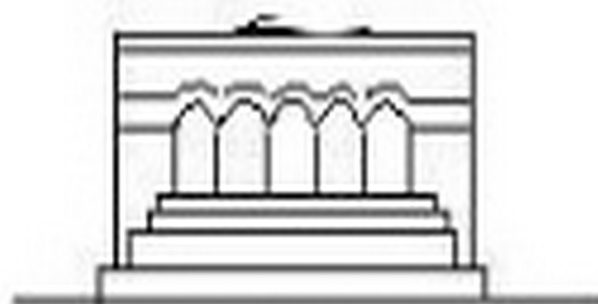
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1989

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РЕБРАМИ

АКОПЯН А. С., ЗАРГАРЯН С. С.

Переход в задачах теории упругости от областей с гладкой граничной поверхностью к областям с ребрами или иными нерегулярностями на границе приводит к определенным трудностям в построении алгоритмов численного решения граничных интегральных уравнений, порожденных этими задачами, что связано с изменениями при таком переходе функционально-аналитических свойств различных потенциалов, представляющих решения краевых задач. Как показали исследования [1, 2], решения интегральных уравнений гармонических задач и задач плоской теории упругости оказываются негладкими или имеют особенности вблизи угловых точек контура и зависимости от раствора угла, которые представляются степенными (степенно-логарифмическими) функциями.

В настоящей работе выводятся асимптотики решений граничных интегральных уравнений осесимметричных задач теории упругости, порожденные системой уравнений Ламе, при заданных на границе смещениях (задача I) или напряжениях (задача II), когда граничная поверхность имеет ребра и не содержит конических точек. Получены формулы для коэффициентов в асимптотиках решений интегральных уравнений. Рассматриваются случаи отсутствия кратных корней трансцендентных уравнений, характеризующих поведение решений краевых задач вблизи ребер поверхности вращения.

Пусть $\partial\Omega$ — замкнутая поверхность, образованная вращением вокруг оси простой кусочно-гладкой кривой l с конечным числом угловых точек p_1, p_2, \dots, p_m , и не имеющая конических точек. Ограниченную область, лежащую внутри $\partial\Omega$, обозначим через Ω^+ , а область, внешнюю по отношению к $\partial\Omega$ — через Ω^0 .

Обозначим через γ_j , $j=1, 2, \dots, m$ ребро на $\partial\Omega$, образованное вращением точки p_j , и через $2\alpha_j$ двугранный угол между касательными плоскостями к $\partial\Omega$ в точке $x \in \gamma_j$, со стороны Ω^+ .

1. Рассмотрим сначала первую внутреннюю задачу теории упругости

$$\Delta u^i = \mu \Delta u^i + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u^i = 0 \quad \text{в } \Omega^+, \quad u^i|_{\partial\Omega} = g \quad (1.1)$$

где u^i — вектор смещений, λ, μ — коэффициенты Ламе, g — заданная на $\partial\Omega$ вектор-функция.

Представление решения задачи (1.1) в виде обобщенного упругого потенциала двойного слоя [3]

$$(W^0)(x) = \int_{\partial\Omega} |T(\partial_\nu, n)\Gamma(y-x)|^* \varphi(y) dS, \quad (1.2)$$

приводит почти всюду на $\partial\Omega$ к системе сингулярных интегральных уравнений относительно вектора плотности

$$-\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} |T(\partial_\nu, n)\Gamma(y-x)|^* \varphi(y) dS = g(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus K, \quad (1.3)$$

где $K = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$ — множество ребер граничной поверхности.

$\Gamma(y-x) = \{\Gamma_{ij}\}_{3 \times 3}$ — матрица фундаментальных решений Кольвина-Соммильяна с элементами

$$\Gamma_{ij} = \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \delta_{ij}|y-x|^{-1} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{|y-x|^3}$$

$T(\partial_\nu, n) = \{T_{ij}\}_{3 \times 3}$ — матричный дифференциальный оператор напряжений

$$T_{ij} = \mu n_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n}, \quad n = (n_1, n_2, n_3)$$

n — орт нормали к $\partial\Omega$ в точке y .

Согласно [4], система (1.3) однозначно разрешима в пространстве $C_0^{1,2}(\partial\Omega)$ предельных значений на $\partial\Omega \setminus K$ функций из $C_0^{1,2}(\Omega)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{C_0^{1,2}(\Omega')} = \sup_{x, y \in \partial\Omega} \frac{|(d^2 \tau^f)(x) - (d^2 \tau^f)(y)|}{|x-y|^2} + \sup_{x \in \partial\Omega} |x| |f(x)| \quad (1.4)$$

если $g \in C_0^{1,2}(\partial\Omega)$ и $0 < 1-\beta+z < 1/2$.

Следуя [2], выразим решение системы (1.3) через решение некоторой вспомогательной краевой задачи. Пусть v^0 — решение задачи

$$Av' = 0 \quad \text{в } \Omega', \quad Tv' = \frac{1}{2}(Tu' - Tu'') \quad \text{на } \partial\Omega \setminus K \quad (1.5)$$

где u' — решение задачи

$$Au' = 0 \quad \text{в } \Omega', \quad u'|_{\partial\Omega} = g \quad (1.6)$$

При $x \in \partial\Omega \setminus K$ на основании формулы Бетти имеем

$$u'(x) = - \int_{\partial\Omega} \{ |T(\partial_\nu, n)\Gamma(y-x)|^* u'(y) - \Gamma(y-x) |T(\partial_\nu, n)u'| \} dS_y, \\ u''(x) = \int_{\partial\Omega} \{ |T(\partial_\nu, n)\Gamma(y-x)|^* u''(y) - \Gamma(y-x) |T(\partial_\nu, n)u''| \} dS_y \quad (1.7)$$

Складывая интегральные представления (1.7) и учитывая граничные условия задач (1.1) и (1.6), получим

$$g(x) = \int_{\sigma_2} \Gamma(y-x) \frac{1}{2} \{T(\partial_y, n)u^i - T(\partial_y, n)u^e\} dS_y \quad (1.8)$$

Из интегрального представления для v^e при $x \in \partial\Omega \setminus K$

$$v^e(x) = \int_{\sigma_2} \{ [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* v^e(y) - \Gamma(y-x) [T(\partial_y, n)v^e] \} dS_y$$

учитывая (1.8) и граничное условие задачи (1.5), находим

$$-v^e(x) + \int_{\sigma_2} [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* v^e(y) dS_y = g(x)$$

Сравнивая полученное уравнение с (1.3), окончательно

$$\phi(x) = v^e(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (1.9)$$

На основании равенства (1.9) можно теперь вывести асимптотики решений интегрального уравнения (1.3).

Введем локальную ортогональную систему координат φ, ψ, s , где φ, ψ — полярные координаты в меридианальном сечении с центром в точке $p_j \in \gamma_j$, а s — дуговая координата вдоль ребра γ_j . Уравнение Ламе в введенных координатах дает следующую систему уравнений относительно компонент смещения u_φ, u_ψ, u_s [5]:

$$\begin{aligned} & (i+2\mu) \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \frac{k_1}{\rho k} - u_\varphi \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{k^2} \right) \right] + (i+3\mu) \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} \frac{R \cos \varphi}{k^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + u_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho k^2} [(\lambda+3\mu)\rho \cos \varphi - R\mu] + (i+\mu) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial \psi} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{k} + \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial \varphi \partial s} \frac{R}{k} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial s^2} \frac{R^2}{k^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{\rho k} \right] = 0 \\ & (i+2\mu) \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho k} + u_\psi \frac{R \sin \varphi}{\rho k^2} \right] - (i+3\mu) \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \frac{R \sin \varphi}{k^2} + \\ & + \frac{1}{\rho^2 k} \left[\frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} \right] [(\lambda+3\mu)k - (\lambda+\mu)\rho \cos \varphi] + u_\psi \left[(i+3\mu) \frac{\rho R \cos \varphi}{k} - \mu \frac{R^2}{k} - \right. \\ & \left. - (i+2\mu) \frac{\rho^2}{k} \right] + (i+\mu) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial \varphi \partial s} \frac{R}{\rho k} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial s^2} \frac{R^2}{k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} \frac{k_1}{\rho k} \right] = 0 \\ & (i+2\mu) \frac{R^2}{k^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + (i+3\mu) \frac{R \sin \varphi}{k^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + (i+\mu) \frac{R}{k} \left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi \partial s} \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{R}{k}\frac{\partial u_r}{\partial s}\left[(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}-(\lambda+3\mu)\frac{\cos\varphi}{k}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\frac{k_1}{k}-\frac{u_r}{k^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\right. \\ \left.+\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho k}\right]=0 \quad (1.10)$$

где R — радиус кривизны ребра, $k=R-\rho\cos\varphi$, $k_1=R-2\rho\cos\varphi$.

В случае осесимметричной нагрузки, как известно [6, 7]

$$u_r = u_\varphi(\rho, \varphi), \quad u_z = u_s(\rho, \varphi), \quad u_\theta = 0 \quad (1.11)$$

Рассмотрим уравнения (1.10) в малой окрестности ребра, так что $0 < \rho < \delta$, где $\delta \ll R$. Следуя [8], пренебрегая членами порядка ρ/R , приходим к уравнениям

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_r}{\partial \rho}-\frac{u_r}{\rho^2}\right]-(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \rho \partial \varphi}+ \\ +\mu\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}=0 \\ (\lambda+2\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi^2}+(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_s}{\partial \varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho \partial \varphi}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho^2}+ \right. \\ \left.+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_s}{\partial \rho}-\frac{u_s}{\rho^2}\right]=0 \quad (1.12)$$

Полученные уравнения совпадают с системой Ламе на плоскости в полярных координатах ρ, φ .

Пусть $0 < \alpha_j < \pi/2$. Для решений задач (1.1) и (1.6) имеем при $\rho \rightarrow 0$

$$u^i = g(0) + O(\rho) \quad (1.13)$$

$$u^e = g(0) + e_i C \rho^{\lambda_i} \left\{ \frac{\sin(\lambda_i - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_i + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_i + 1)\varphi - \sin(\lambda_i - 1)\varphi \right\} + \\ + e_\varphi \frac{x + \lambda_\varphi}{x - \lambda_\varphi} C \rho^{\lambda_\varphi} \left\{ -\frac{\cos(\lambda_\varphi - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_\varphi + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_\varphi + 1)\varphi + \cos(\lambda_\varphi - 1)\varphi \right\} + O(\rho) \quad (1.14)$$

где $\lambda = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона, λ_α — корень уравнения $\sin 2\lambda_\alpha(\pi - \alpha) = \lambda_\alpha \sin 2(\pi - \alpha)$ с наименьшей положительной действительной частью. Подставив в граничные условия задачи (1.5) решения (1.13) и (1.14), для w^e получаем

$$w^e = w^e(0) + e_i B \rho^{\lambda_i} \left\{ \frac{\lambda_i + 1}{x - \lambda_i} \frac{\cos(\lambda_i - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_i + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_i + 1)\varphi + \right. \\ \left. + \cos(\lambda_i - 1)\varphi \right\} + e_\varphi \frac{1}{x - \lambda_\varphi} B \rho^{\lambda_\varphi} \left\{ -(\lambda_\varphi - 1) \frac{\sin(\lambda_\varphi - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_\varphi + 1)(\pi - \alpha)} \right. \\ \left. \times \sin(\lambda_\varphi + 1)\varphi + (x + \lambda_\varphi) \cos(\lambda_\varphi - 1)\varphi \right\}, \quad -(\pi - \alpha) \leq \varphi \leq (\pi - \alpha)$$

где λ_1 — корень уравнения $\sin 2(\pi - \alpha) + \lambda_1 \sin 2(\pi - \alpha) = 0$ с наименьшей положительной действительной частью. На основании (1.9), учитывая, что $\lambda_1 < \lambda_2$ при $0 < \alpha < \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} \psi - \psi(0) \sim e_{\pm} \frac{B_1 \rho^{\lambda_1}}{2} \left\{ \frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cos(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha) + \cos(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha) \right\} + \\ + e_{\mp} \frac{B_1 \rho^{\lambda_1}}{2} \left\{ \mp \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha) \pm \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

где верхние знаки соответствуют лучу $\varphi = \pi - \alpha$, нижние — лучу $\varphi = -(\pi - \alpha)$. Заметим, что плотность ψ обладает осевой симметрией, т. е. $\psi_2 = 0$, $\psi_1 = \psi(\varphi, \varphi)$, $\psi_2 = \psi(\varphi, \varphi)$. Это непосредственно следует из осевой симметрии краевых задач (1.1) и (1.6), а также из граничных условий вспомогательной задачи (1.5) и формулы (1.9).

Перейдем теперь к определению коэффициента B_1 в асимптотике (1.15). Используя метод работы [9], применим формулу Бетти к функциям v^e и ζ^e по области $\Omega_\varepsilon = \Omega^e \cap \{x : |x - y| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $y \in \Gamma$.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \{v^e A \zeta^e - \zeta^e A v^e\} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \{v^e T \zeta^e - \zeta^e T v^e\} dS \quad (1.16)$$

Здесь ζ^e — решение задачи

$$A \zeta^e = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^e, \quad T \zeta^e|_{\partial \Omega^e \cap K} = 0 \quad (1.17)$$

имеющее в окрестности Γ асимптотику

$$\begin{aligned} \zeta^e \sim e_{\pm} \rho^{-\lambda_1} \left\{ -\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\cos(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_1 - 1)\varphi + \cos(\lambda_1 + 1)\varphi \right\} + \\ + e_{\mp} (x + \lambda_1)^{-\lambda_1} \rho^{-\lambda_1} \left\{ -(\lambda_1 - 1) \frac{\sin(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_1 - 1)\varphi - \right. \\ \left. - (x - \lambda_1) \sin(\lambda_1 + 1)\varphi \right\} \end{aligned}$$

В левой части (1.16) имеем тождественный нуль, учитывая (1.17) и (1.5), а в правой части, так как $\zeta^e = v^e = 0$, для подынтегральной функции будем иметь

$$\begin{aligned} v^e T \zeta^e &= v^e (T \zeta^e)_\varepsilon + v^e_\varepsilon (T \zeta^e)_\varepsilon = [v^e T \zeta^e]_\varepsilon \\ \zeta^e T v^e &= \zeta^e_\varepsilon (T v^e)_\varepsilon + \zeta^e_\varepsilon (T v^e)_\varepsilon = [\zeta^e T v^e]_\varepsilon \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\partial \Omega_\varepsilon} \{v^e T \zeta^e - \zeta^e T v^e\} dS = 2\pi \int_{\Delta \Omega_\varepsilon} \{|v^e T \zeta^e|_2 - |\zeta^e T v^e|_2\} dS \quad (1.18)$$

где $\Delta \Omega_\varepsilon$ — образующая поверхности вращения $\partial \Omega_\varepsilon$. Переходя в (1.16) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая (1.18), будем иметь

$$B_1 = K_1^{-1}(a) \int_{\Gamma} [\zeta^* T u^t]_z ds$$

или

$$B_2 = [2\pi K_1(a)]^{-1} \int_{\partial \Omega} \zeta^* T u^t dS, \quad (dS = 2\pi \rho ds) \quad (1.19)$$

где

$$K_1(a) = \frac{\eta}{x + \lambda_t} \left\{ \left| v_3 + v_4 - \frac{2 + \lambda_t(x+1)}{x + \lambda_t} \right| \sin \lambda_t(\pi - a) + \right. \\ \left. + \left| v_4 - v_3 + \frac{\lambda_t^2(1 - 4\lambda_t) - \lambda_t(x-1)}{x + \lambda_t} \right| \sin 2(\pi - a) + 2(\pi - a) \right| (\lambda_t + 1) \times \\ \times \left[v_4 - 1 + \frac{\lambda_t^2}{x + \lambda_t} \left| \frac{\cos(\lambda_t - 1)(\pi - a)}{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - a)} + (\lambda_t - 1) \right| v_3 - 1 + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_t(2\lambda_t + x - 1)}{x + \lambda_t} \left| \frac{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - a)}{\cos(\lambda_t - 1)(\pi - a)} \right| \right], \quad v_1 = \frac{x + \lambda_t}{x - \lambda_t}, \quad v_2 = \frac{x + \lambda_a}{x - \lambda_a} \\ v_3 = \frac{1 + v(\lambda_t - 1)(1 + v_2)}{1 - 2v}, \quad v_4 = \frac{v_1 - v(\lambda_t + 1)(1 + v_2)}{v_1(1 - 2v)}$$

Продолжая ζ^* и Ω^t путем решения задачи

$$\Delta z^t = 0 \quad \text{в } \Omega^t, \quad z^t = \zeta^* \quad \text{на } \partial \Omega$$

получим окончательно

$$B_1 = [2\pi K_1(z)]^{-1} \int_{\partial \Omega} (g - g(0)) T z^t dS \quad (1.20)$$

Формулы (1.15) и (1.20) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\psi = \psi(0)$ в случае $0 < a < \pi/2$.

Пусть теперь $\pi/2 < a < \pi$. В окрестности ребра решения задач (1.1), (1.6) имеют при $\rho \rightarrow 0$ асимптотики

$$u^t = g(0) + e_\rho A_2 \rho^{\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)x}{\sin(\lambda_u + 1)x} \sin(\lambda_u + 1)\varphi - \sin(\lambda_u - 1)\varphi \right\} + \\ + e_\rho A_3 \rho^{\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)x}{\sin(\lambda_u + 1)x} \cos(\lambda_u + 1)\varphi + \frac{x + \lambda_u}{x - \lambda_u} \cos(\lambda_u - 1)\varphi \right\} + O(\rho) \\ u^e = g(0) + O(\rho)$$

Подставив эти решения в (1.5), определим асимптотику для v^e

$$v^e = v^e(0) \sim e_\rho \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \sin(\lambda_u + 1)\varphi - D_2 \sin(\lambda_u - 1)\varphi \} + \\ + e_\rho \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \cos(\lambda_u + 1)\varphi + \frac{x + \lambda_u}{x - \lambda_u} D_2 \cos(\lambda_u - 1)\varphi \}, \quad -(\pi - a) \leq \varphi \leq \pi - a$$

где

$$D_1 = (\sin 2\lambda_u(\pi - \alpha) - \lambda_u \sin(\pi - \alpha))^{-1} \left\{ \lambda_u \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \sin[\pi(\lambda_u - 1) + 2\alpha] + \right. \\
+ \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \sin[\pi(\lambda_u - 1) - 2\alpha] + \frac{\lambda_u^2 - 1}{2\lambda_u} (1 - \nu_2) \sin[\pi(\lambda_u - 1)] \Big\} A_3 \\
D_2 = 2\lambda_u (\sin 2\lambda_u(\pi - \alpha) - \lambda_u \sin(\pi - \alpha))^{-1} \left\{ 2\lambda_u \frac{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \times \right. \\
\times \sin(\lambda_u + 1)\pi + \frac{2\lambda_u^2}{\pi - \lambda_u} \sin[\pi(\lambda_u + 1) - 2\alpha] - \frac{2\lambda_u}{\pi - \lambda_u} \sin[\pi(\lambda_u + 1) - 2\alpha] \Big\} A_3$$

В силу (1.3) имеем

$$\psi - \psi(0) \sim \pm e_p \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha) - D_2 \sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha) \} + \\
+ e_p \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha) + \frac{\pi - \lambda_u}{\pi - \lambda_u} D_2 \cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha) \} \quad (1.21)$$

Здесь верхний знак соответствует лучу $\varphi = \pi - \alpha$, а нижний — лучу $\varphi = -(\pi - \alpha)$. Постоянная A_3 определяется аналогично предыдущему случаю

$$A_3 = -[2\pi K_2(z)]^{-1} \int_{\partial\Omega^+} (g - \bar{g}(0)) T^{j,i} dS \quad (1.22)$$

где \bar{g}^j — решение задачи

$$A^j \bar{g}^j = 0 \text{ в } \Omega^j, \quad \bar{g}^j|_{\partial\Omega} = 0$$

имеющее при $\rho \rightarrow 0$ асимптотику

$$\bar{g}^j = e_p \rho^{-\lambda_u} \left\{ - \frac{\sin(\lambda_u + 1)\alpha}{\sin(\lambda_u - 1)\alpha} \sin(\lambda_u - 1)\varphi + \sin(\lambda_u + 1)\varphi \right\} + \\
+ e_p \rho^{-\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u + 1)\alpha}{\sin(\lambda_u - 1)\alpha} \cos(\lambda_u - 1)\varphi + \nu_2 \cos(\lambda_u + 1)\varphi \right\}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \\
K_2(z) = \left(1 - \frac{\pi + \lambda_u^2}{\pi^2 - \lambda_u^2} (\sin 2\lambda_u + \lambda_u \sin 2\alpha) + \frac{\nu_1 - \nu_2}{2\lambda_u} (\sin 2\lambda_u - \sin 2\alpha) + \right. \\
+ \alpha \left[(\nu_3 - \nu_8 + 1) \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} + (\nu_6 + \nu_7 - 1) \frac{\sin(\lambda_u + 1)\alpha}{\sin(\lambda_u - 1)\alpha} \right] + \left(\frac{\nu_3 + \nu_8 - 1}{2(\lambda_u + 1)} + \right. \\
+ \frac{\nu_6 - \nu_7 + 1}{2(\lambda_u - 1)} \Big) \sin 2\lambda_u - \left(\frac{\nu_3 + \nu_8 - 1}{2(\lambda_u + 1)} - \frac{\nu_6 - \nu_7 + 1}{2(\lambda_u - 1)} \right) \sin 2\alpha \\
\left. \nu_3 = \frac{\lambda_u(\pi - 2\lambda_u - 1)}{\pi + \lambda_u}, \quad \nu_4 = \frac{\lambda_u(\pi + 2\lambda_u - 1)}{\pi - \lambda_u}, \quad \nu_5 = \frac{1 + \nu(\lambda_u - 1)(1 + \nu_2)}{1 - 2\nu} \right. \\
\left. \nu_6 = \frac{\nu_2 - \nu(\nu_4 + 1)(1 + \nu_2)}{\nu_2(1 - 2\nu)} \right)$$

Формулы (1.21), (1.22) определяют главный член асимптотики $\psi - \psi(0)$ в случае $-\pi/2 < \alpha < \pi$.

2. Перейдем теперь к второй задаче теории упругости для внешней области

$$Av^e = 0 \text{ в } \Omega^e, \quad Tv^e = h \text{ на } \partial\Omega \setminus K \quad (2.1)$$

где h — гладкая на $\partial\Omega \setminus K$ вектор-функция.

Решение задачи (2.1) будем искать в виде обобщенного упругого потенциала простого слоя [3]

$$(V\psi)(x) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x) \psi(y) dS_y \quad (2.2)$$

Учитывая граничные свойства вектора $(TV)(\psi)$ и граничные условия задачи (2.1), получим интегральное уравнение относительно ψ

$$-\psi(x) + \int_{\partial\Omega} T(\partial_n, n) \Gamma(y-x) \psi(y) dS_y = h(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus K \quad (2.3)$$

Пусть v^i — решение задачи

$$Av^i = 0 \text{ в } \Omega^i, \quad v^i = v^e \text{ на } \partial\Omega \quad (2.4)$$

Ввиду непрерывности предельных значений обобщенного упругого потенциала простого слоя и в силу формулы скачка для предельных значений оператора напряжений от потенциала (2.2), имеем

$$\psi = \frac{1}{2} [Tv^i - Tv^e] \quad (2.5)$$

Асимптотика решений системы интегральных уравнений (2.3) вблизи ребра γ_j на $\partial\Omega$ выводится из равенства (2.5).

Пусть $0 < \alpha < \pi/2$. Решения задач (2.1) и (2.4) при $\rho \rightarrow 0$ имеют асимптотику

$$\begin{aligned} v^e - v^e(0) &= O(\rho) \\ v^e - v^e(0) &\sim e_1 C_1 \rho^{\lambda_1} \left\{ \frac{\sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_1 + 1)\varphi - \sin(\lambda_1 - 1)\varphi \right\} + \\ &+ e_2 \gamma_2 C_2 \rho^{\lambda_2} \left\{ -\frac{\cos(\lambda_2 - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_2 + 1)\varphi + \cos(\lambda_2 - 1)\varphi \right\} \\ &- (\pi - \alpha) \leq \varphi \leq \pi - \alpha \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5) получаем

$$\begin{aligned} \psi &\sim e_1 \frac{1}{2} C_1 \rho^{\lambda_1 - 1} \left\{ + 2\mu\lambda_1 \pm \mu(\lambda_1 + 1)(1 - \gamma_2) |\sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha)| - \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} C_2 \rho^{\lambda_2 - 1} \left\{ -2\mu\lambda_2 \gamma_2 - \mu(\lambda_2 - 1)(1 - \gamma_2) |\cos(\lambda_2 - 1)(\pi - \alpha)| \right\} \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

где верхние знаки соответствуют лучу $\varphi = \pi - \alpha$, а нижние — лучу $\varphi = -(\pi - \alpha)$. Пользуясь вышеописанным методом, для постоянной C_3 получаем следующую формулу:

$$C_3 = - |2\pi K_2(\pi - \alpha)|^{-1} \int_{\partial \Omega} v^i T_{z^i}^i dS, \quad (2.7)$$

где T^i — решение задачи

$$\Delta z^i = 0 \quad \text{в } \Omega^i, \quad z^i = 0 \quad \text{на } \partial \Omega \setminus K$$

имеющее асимптотику

$$\begin{aligned} z^i \sim e_i \rho^{-i-1} & \left\{ - \frac{\sin(i_\alpha + 1)(\pi - \alpha)}{\sin(i_\alpha - 1)(\pi - \alpha)} \sin(i_\alpha - 1)\varphi + \sin(i_\alpha + 1)\varphi \right\} + \\ & + e_{\bar{i}} \bar{\rho}^{-i-1} \left\{ - \frac{\cos(i_\alpha + 1)(\pi - \alpha)}{\cos(i_\alpha - 1)(\pi - \alpha)} \cos(i_\alpha - 1)\varphi + \cos(i_\alpha + 1)\varphi \right\} \end{aligned}$$

Непрерывно продолжая T^i в Ω^e путем решения задачи

$$\Delta z^e = 0 \quad \text{в } \Omega^e, \quad Tz^e = T_{z^i}^i \quad \text{на } \partial \Omega \setminus K \quad (2.8)$$

формулу (2.7) с учетом (2.4) перепишем так

$$C_3 = - |2\pi K_2(\pi - \alpha)|^{-1} \int_{\partial \Omega} z^e Tz^e dS,$$

Применяя формулу Бетти к решениям задач (2.1) и (2.8), окончательно получаем

$$C_3 = - |2\pi K_2(\pi - \alpha)|^{-1} \int_{\partial \Omega} z^e h dS, \quad (2.9)$$

Перейдем к случаю $\pi/2 < \alpha < \pi$. Решения задач (2.1) и (2.4) имеют асимптотику при $\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} v^e - v^e(0) \sim e_i A_i \rho^{\lambda_i} & \left\{ -(1 - \gamma_1) \frac{\lambda_i + 1}{2\lambda_i} \frac{\cos(\lambda_i - 1)\pi}{\cos(\lambda_i + 1)\pi} \cos(\lambda_i + 1)\varphi + \right. \\ & \left. + \cos(\lambda_i - 1)\varphi \right\} + e_{\bar{i}} A_{\bar{i}} \bar{\rho}^{\lambda_i} \left\{ (1 - \gamma_1) \frac{\lambda_i + 1}{2\lambda_i} \frac{\cos(\lambda_i - 1)\pi}{\cos(\lambda_i + 1)\pi} \sin(\lambda_i + 1)\varphi + \right. \\ & \left. + \gamma_1 \sin(\lambda_i - 1)\varphi \right\}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} w^i - w^i(0) \sim e_i \rho^{i'} & \{ B_2 \cos(\lambda_i + 1)\varphi + B_1 \cos(\lambda_i - 1)\varphi \} + \\ & + e_{\bar{i}} \bar{\rho}^{i'} \{ -B_2 \sin(\lambda_i + 1)\varphi + \gamma_1 B_1 \sin(\lambda_i - 1)\varphi \} \\ & - (\pi - \alpha) \leq \varphi \leq (\pi - \alpha) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$B_1 = A_1 \left\{ (\lambda_1 + 1) \frac{\cos(\lambda_1 - 1)x}{\cos(\lambda_1 + 1)x} \sin(\lambda_1 + 1)\pi + x \sin[\pi(\lambda_1 + 1) - 2x\lambda_1] - \right. \\ \left. - \lambda_1 \sin[\pi(\lambda_1 + 1) - 2x] \right\}$$

$$B_2 = A_1 \left\{ -(1 - \nu_1) \frac{\lambda_1 + 1}{2\lambda_1} \frac{\cos(\lambda_1 - 1)x}{\cos(\lambda_1 + 1)(\pi - x)} + \frac{\cos(\lambda_1 - 1)x}{\cos(\lambda_1 + 1)(\pi - x)} \right\} - \\ - B_1 \frac{\cos(\lambda_1 - 1)(\pi - x)}{\cos(\lambda_1 + 1)(\pi - x)}$$

Подставив (2.10) и (2.11) в (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \varphi \sim \frac{1}{2} p^{1/2} \{ e_1 [-2\mu_1 B_2 \cos(\lambda_1 + 1)(\pi - x) - (\lambda_1 + 1)(1 - \nu_1) B_1 \times \\ \times \cos(\lambda_1 - 1)(\pi - x) + A_1 2\mu_1 (\lambda_1 + 1)(x - \lambda_1)^{-1} \cos(\lambda_1 - 1)x + \\ + A_1 \mu (\lambda_1 + 1)(1 - \nu_1) \cos(\lambda_1 - 1)x] + e_2 [-2\mu_1 B_2 \sin(\lambda_1 - 1)(\pi - x) - \\ - B_1 \mu (\lambda_1 - 1)(1 - \nu_1) \sin(\lambda_1 - 1)(\pi - x) - A_1 2\mu_1 (\lambda_1 - 1)(x - \lambda_1)^{-1} \sin(\lambda_1 - 1)x - \\ - A_1 \mu (\lambda_1 - 1)(1 - \nu_1) \sin(\lambda_1 - 1)x] \} \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует $\varphi = -x$, а нижний $-\varphi = x$. Постоянная A_1 равна

$$A_1 = [2\pi K_1(\pi - x)]^{-1} \int_{\partial\Omega} \zeta^e h dS_y$$

где ζ^e — та же функция, что и (1.17).

Аналогично можно построить асимптотику решений системы сингулярных интегральных уравнений осесимметричных задач теории упругости в окрестности ребер, порожденной уравнениями Ламе для внешней области при заданных на границе внешних силах. Применение полученных асимптотик к численному решению интегральных уравнений с использованием априорной информации об асимптотиках можно провести так же, как в работе [10].

ON THE SOLUTION OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF TWO ELASTICITY PROBLEMS FOR AXISYMMETRIC BODIES IN DOMAINS WITH EDGES

A. S. HAKOBYAN, S. S. ZARGARYAN

ԿՈՂԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԱՌԱՆՅՔԱՀԱՄԱՋՍԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԻՆՏԵՐՈՒԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԸ

Ա. Ս. ՀԱՊՐՅԱՆ, Ս. Ս. ԶԱՐԿԱՐՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Ոչ ողորկ եզրերի դեպքում առաձգականության տեսության եզրային ինտեգրալ հավասարումների թվային լուծման ալգորիթմները դժվարություններ են պարունակում: Դրանք առաջանում են ինտեգրալ օպերատորների հատկություններից՝ կապված եզրային մակերևույթի ոչ ողորկությունից: Աշխատանքում ստացված են առաձգականության տեսության երկու առանցքահամաչափ խնդիրների էյամերի համակարգից առաջացած ինտեգրալ հավասարումների լուծումների ասիմպտոտիկան եզրային մակերևույթի կողմից շրջակայքում: Ստացված են նաև բանաձևեր ասիմպտոտիկայի գործակիցների համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Заргарян С. С., Мазья В. Г. Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек контура.—ПММ, 1984, т. 43, №1, с. 169—173.
2. Заргарян С. С. Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура.—Докл. АН АрмССР, 1983, т. 77, №1, с. 30—35.
3. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости—М.: Наука, 1976. 663 с.
4. Мазья В. Г. К теории потенциала для системы Ламе в области с кусочно-гладкой границей. В кн. Дифференциальные уравнения и частных производных и их приложения: Тр. Всесоюз. симпоз. в Тбил. (21—23 апреля 1982 г.) Тбилиси, 1984, с. 123—129.
5. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.—ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.
6. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к интегральным уравнениям. Сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). Л.: Судостроение, 1970, стр. 21—29.
7. Андрианов Н. Ф., Перлик П. И. Решения второй основной пространственной задачи для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями—В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 4—Горький: изд. ГГУ, 1976.
8. Зак А. Р. Напряжения в окрестности угловой линии в телах вращения. Прикладная механика, 1964, т. 31, №1, с. 177—179.
9. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Math., Natl., 1977, к. 76, с. 29—60.
10. Заргарян С. С. Интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для многосвязных областей с углами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №3, с. 87—98.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
20. V. 1988

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ С
 НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, СОЕДИНЕННЫХ
 ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИГОРЯН Э. Х., ОВАКИМЯН А. С.

В работе рассматривается задача для двух упругих полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных между собой полубесконечным включением. Задача с помощью преобразования Фурье сводится к решению разностного уравнения относительно трансформанты Фурье тангенциальных контактных напряжений. Далее строится замкнутое решение разностного уравнения и определяются асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от конца точках включения.

Пусть две полуплоскости с начальными напряжениями соединены между собой упругим полубесконечным включением. Полуплоскости деформируются под действием силы, приложенной на конце включения. Требуется определить контактные напряжения, действующие в точках соединения включения с полуплоскостями. При отсутствии начальных напряжений рассматриваемая задача была рассмотрена в [1—2].

На основании [3] задача в случае неравных корней сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_1 \int_0^{\infty} \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_2 \varepsilon(y_1) + \alpha_3 \tau(y_1) = -\chi \int_{y_1}^{\infty} \tau(t)dt$$

$$(0 < y_1 < \infty) \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_4 \int_0^{\infty} \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_5 p(y_1) + \alpha_6 \tau(y_1) = 0$$

а в случае равных корней — к решению системы

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_2 p(y_1) = -\chi \int_{y_1}^{\infty} \tau(t)dt$$

$$(0 < y_1 < \infty) \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_6 \tau(y_1) = 0$$

где $\tau(y_1)$ — интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $p(y_1)$ — интенсивность контактных нормальных напряжений. В (1), (2) значения параметров α_1, γ приведены в [3].

В [3] дается решение задачи для двух полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных между собой конечным включением. При этом следует отметить, что исследование системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода вышеуказанного вида, определенной на конечном интервале, приведено в [4].

Рассмотрим случай неравных корней. Проведя в (1) замену переменных $t = e^u$, $y_1 = e^u$, а затем преобразования Фурье, относительно трансформант Фурье контактных напряжений $\tau_1(u) = \tau(e^u)$, $p_1(u) = p(e^u)$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (z_1 - i\pi \operatorname{cth} \pi z) \bar{\tau}_1(z) + (z_2 - z_1 i\pi \operatorname{cth} \pi z) \bar{p}_1(z) &= -i \frac{\bar{\tau}_1(z-i)}{iz} \\ (z_2 - z_1 i\pi \operatorname{cth} \pi z) \bar{\tau}_1(z) + (z_3 - i\pi \operatorname{cth} \pi z) \bar{p}_1(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\bar{\tau}_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(u) \exp(izu) du, \quad \bar{p}_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(u) \exp(izu) du$$

Решив систему уравнений (3), получим

$$i\alpha K(z) \bar{\tau}_1(z) + \gamma \bar{\tau}_1(z-i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} z < 0, \quad (4)$$

$$\bar{\tau}_1(-i) = \frac{p}{2} \quad (5)$$

$$\bar{p}_1(z) = \gamma \frac{(z_2 - z_1 i\pi \operatorname{cth} \pi z) \bar{\tau}_1(z-i)}{z - i\pi \operatorname{cth} \pi z - c \operatorname{th}^2 \pi z}$$

где $a = z_1 z_2 - z_2 z_0$, $b = \pi(z_1 + z_2 - z_2 z_4 - z_1 z_0)$, $c = \pi^2(1 - z_1 z_4)$

$$K(z) = \frac{a - i\pi \operatorname{cth} \pi z - c \operatorname{th}^2 \pi z}{z_3 - i\pi \operatorname{cth} \pi z}$$

δ — мнимая часть нуля функции $K(z)$, находящаяся в интервале $-1 < \operatorname{Im} z < 0$ и имеющая наименьшую мнимую часть.

Таким образом, задача свелась к решению разностного уравнения (4) при условии (5) (условие равновесия включения).

Для решения разностного уравнения заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K(z) = |z| \exp\left(i \arctg \frac{B}{A}\right), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} K(z) = |z| \exp\left(-i \arctg \frac{B}{A}\right)$$

где

$$A = (a - c)z_1 + \pi b, \quad B = \pi(a - c) - bz_1, \quad |z| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\pi^2 + \alpha_1^2}$$

Далее решение уравнения (4) ищем в виде

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_1(z) &= (iz-1)^s |z|^{s-1} z^{1-s} \Gamma(iz) Y(z) \exp(\pi z(1-s)) \\ \bar{\tau}_1(z-i) &= (i\sigma)^s |z|^{s-1} z^{1-s} \Gamma(1+iz) Y(z-i) \exp(\pi(z-sz+si))\end{aligned}$$

где $s = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$, $\Gamma(u)$ — гамма-функция. Тогда, подставляя выражения $\bar{\tau}_1(z)$, $\bar{\tau}_1(z-i)$ в (4) и имея в виду условие (5), для определения $Y(z)$ получим следующее разностное уравнение:

$$R(z)Y(z) = Y(z-i), \quad -1 < \operatorname{Im} z < 2 \quad (6)$$

при условии

$$\lim_{z \rightarrow -i} (iz-1)^s Y(z) = \frac{P}{2} e^{-i\pi s} \quad (7)$$

Здесь $R(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \pm \infty$ в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 2$ и имеет вид

$$R(z) = |z|^{-1} \left(\frac{iz-1}{iz} \right)^s K(z) \exp(-i\pi s)$$

Решение (6) построим с помощью метода интегральных преобразований, изложенного в [5, 6]. Для этого уравнения (6) сведем к эквивалентному ему уравнению

$$\bar{x}(z-i) - \bar{x}(z) = \bar{l}(z) \quad (8)$$

где

$$\bar{x}(z) = \frac{d}{dz} \ln Y(z), \quad \bar{l}(z) = \frac{d}{dz} \ln R(z)$$

Теперь применив к (8) обратное преобразование Фурье, получим

$$(e^u - 1)x(u) = l(u) + is \quad (9)$$

где

$$x(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{i-\infty}^{i+\infty} \bar{x}(z) \exp(-izu) dz, \quad l(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{i-\infty}^{i+\infty} \bar{l}(z) \exp(-izu) dz, \quad -1 < u < 2$$

Здесь имелось в виду, что $\bar{x}(z)$ в точке $z = -i$ имеет простой полюс. Из (9) $x(u)$ определится в виде

$$x(u) = \frac{l(u)}{e^u - 1} + \frac{is}{e^u - 1} + M\delta(u) \quad (10)$$

где $\delta(u)$ — функция Дирака.

Наконец, применив к (10) преобразование Фурье, определим $\bar{x}(z)$ в следующем виде:

$$\bar{x}(z) = \bar{\varphi}(z) - \pi s \operatorname{cth} \pi z + M \quad (11)$$

где

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l(u)}{e^u - 1} \exp(i\alpha u) du$$

Тогда

$$\ln |(i\alpha - 1)^s Y(\alpha)| = \int_{-i}^0 \varphi(\xi) d\xi + \ln \left| \frac{\pi(\alpha + i) \cos \pi}{\operatorname{sh} \pi \alpha} \right|^s + M(\alpha + i) + N$$

Отсюда

$$(i\alpha - 1)^s Y(\alpha) = \left| \frac{\pi(\alpha + i) \cos \pi}{\operatorname{sh} \pi \alpha} \right|^s \exp \left\{ \int_{-i}^0 \varphi(\xi) d\xi + M(\alpha + i) + N \right\}$$

Постоянная N определяется из условия (7)' и равна $\ln P/2$, а $Y(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (7) при $M = -\pi s$.

Итак, мы определили решение искомой задачи в виде

$$\bar{\tau}_1(\alpha) = -\frac{P}{2} \exp(\pi(\alpha - 2s\alpha - si)) \left(\frac{|z|}{\lambda} \right)^{s-1} \Gamma(is) \left| \frac{\pi(\alpha + i)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} \right|^s \exp \left\{ \int_{-i}^0 \varphi(\xi) d\xi \right\}$$

Теперь приступим к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (2) (случай равных корней). Поступая аналогично тому, что было сделано выше для трансформантов Фурье контактных напряжений, получим следующее:

$$\alpha K(\alpha) \bar{\tau}_1(\alpha) + \chi \bar{\tau}_1(\alpha - i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < 0 \quad (12)$$

$$\bar{\tau}_1(-i) = \frac{P}{2} \quad (12)'$$

$$\bar{p}_1(\alpha) = -\chi \frac{\alpha_2 \bar{\tau}_1(\alpha - i)}{\alpha_2 \alpha_0 + \pi^2 \operatorname{cth}^2 \pi \alpha}$$

где

$$K(\alpha) = \frac{\alpha_2 \alpha_0 + \pi^2 \operatorname{cth}^2 \pi \alpha}{\pi \operatorname{cth} \pi \alpha}$$

Решение разностного уравнения представим в виде [5]

$$\bar{\tau}_1(\alpha) = \frac{\Gamma(is)}{i \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}} \left(\frac{\pi^2 + \alpha_0 \alpha_2}{\pi \chi} \right)^{is-1} Y(\alpha) \quad (13)$$

Подставляя выражение $\bar{\tau}_1(\alpha)$ в (12), для определения $Y(\alpha)$ получим разностное уравнение

$$R(\alpha) Y(\alpha) = Y(\alpha - i), \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < 0 \quad (14)$$

при условии

$$Y(-i) = \frac{P}{2} \quad (14)'$$

17

где

$$R(z) = \frac{1}{2(\pi^2 + \alpha_2 \alpha_0)} \frac{\pi^2 \operatorname{ch}^2 \pi z + \alpha_2 \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \pi z}{\operatorname{ch} \pi z \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2}}$$

$R(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \pm \infty$ в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 1$.

Далее с помощью метода интегральных преобразований, получим решение задачи (14), (14)' в виде

$$r'(z) = \frac{P}{2} \exp \left\{ \int_{-i}^z x(\tau) d\tau \right\} \quad (15)$$

где

$$x(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l(u)}{e^u - 1} \exp(izu) du, \quad l(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} \{ \ln R(z) \} \exp(-iau) dz$$

Решение аналогичного вида (15) было получено в работе [1].

Чтобы узнать аналитические свойства $r_1(z)$ и тем самым определить $\tau(y_1)$ в более наглядном виде, следует вычислить интеграл при экспоненте (15). Для это заметим, что $R(z)$ можно записать в виде

$$R(z) = \frac{2}{\alpha^2(\pi^2 + \alpha_2 \alpha_0)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{z^2}{\left(k - \frac{1}{2} + i \frac{\beta}{\pi} \right)^2} \right] \left[1 + \frac{z^2}{\left(i \frac{\beta}{\pi} - k + \frac{1}{2} \right)^2} \right]}{\left[1 + \frac{z^2}{\left(k - \frac{1}{2} \right)^2} \right] \left[1 + \frac{z^2}{4k^2} \right]} \quad (16)$$

так как

$$\pi^2 \operatorname{ch}^2 \pi z + \alpha_2 \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \pi z = (\pi^2 + \alpha_2 \alpha_0) \operatorname{ch}(\pi z + \beta) \operatorname{ch}(\pi z - \beta)$$

где

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \alpha_2 \alpha_0}}, \quad \operatorname{sh} \beta = -i \sqrt{\frac{\alpha_2 \alpha_0}{-\alpha^2 + \alpha_2 \alpha_0}}$$

Далее, используя (16), с помощью теории вычетов вычисляется интеграл

$$\int_{-i}^z x(\tau) d\tau$$

и определяется $Y(z)$ в виде бесконечного произведения

$$Y(z) = P \cdot 2^{1-iz} \pi (\pi^2 + \alpha_2 \alpha_0)^{-iz} \Phi(z) \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz + i \frac{\beta}{\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + iz - i \frac{\beta}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz - i \frac{\beta}{\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - iz + i \frac{\beta}{\pi}\right)}{\Gamma^2(iz) \Gamma^2(iz+2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \Gamma\left(iz - \frac{1}{2}\right) \Gamma^{-2}(3 - iz)} \quad (17)$$

$$\Phi(\alpha) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma^2(2k+1-i\alpha)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-i\alpha\right)\Gamma\left(k+i\alpha-\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(k+i\alpha-\frac{1}{2}-i\frac{\beta}{\pi}\right)}{\Gamma^2(2k+i\alpha)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+i\alpha\right)\Gamma\left(k-i\alpha+\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(k-i\alpha+\frac{1}{2}-i\frac{\beta}{\pi}\right)} \times$$

$$\times \left[\frac{4k^2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\pi^2}} \right]^{2/\alpha-1}$$

Из (13) и (17) нетрудно видеть, что полюсами функции $\bar{\tau}_1(z)$ при $\text{Im} z > -1$ являются точки $\alpha_n^{(1)} = i\left(n - \frac{1}{2} - i\frac{\beta}{\pi}\right)$, $\alpha_n^{(2)} = i\left(n - \frac{1}{2} + i\frac{\beta}{\pi}\right)$, ($n=0, 1, 2, \dots$) ($n+1$ -кратные), а при $\text{Im} z < -1$ — точки $\alpha_n^{(3)} = -in$, $\alpha_n^{(4)} = -i\left(n + \frac{1}{2}\right)$, ($n=2, 3, 4, \dots$) ($n-1$ -кратные).

Тогда применив обратное преобразование Фурье к $\bar{\tau}_1(\alpha)$ и переходя к прежним переменным, с помощью теории вычетов получим представление искомой $\tau(y_1)$

$$\tau(y_1) =$$

$$= \frac{P}{2} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(\pi^2 + \alpha_2 \alpha_8)}} \cdot \text{Re} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\beta}{\pi}\right) \left(\frac{\pi^2 + \alpha_2 \alpha_8}{\pi \chi y_1}\right)^{i\frac{\beta}{\pi}}}{\text{ch}\left(\frac{\beta}{2} - i\frac{\pi}{4}\right)} Y\left(\frac{\beta}{\pi} - \frac{3}{2}i\right) \right] \times$$

$$(18)$$

$$\times \frac{1}{\chi y_1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left[\bar{\tau}_1(x) y_1^{-i\alpha} (x - \alpha_n^{(1)})^{n+1} \right]_{x=\alpha_n^{(1)}} + \frac{d^n}{dx^n} \left[\bar{\tau}_1(x) y_1^{-i\alpha} (x - \alpha_n^{(2)})^{n+1} \right]_{x=\alpha_n^{(2)}} \right\}$$

Из (18) следует, что $\tau(y_1)$ при $y_1 \rightarrow 0$ имеет корневую особенность с осцилирующим множителем.

Для получения асимптотической формулы для $\tau(y_1)$ при $y_1 \rightarrow \infty$ замыкаем линию интегрирования снизу. Вычислив интеграл с помощью теории вычетов при $y_1 \rightarrow \infty$, получим

$$\tau(y_1) = P \chi \left[(\chi y_1)^{-2} + (\chi y_1)^{-3} \left(2C + 2 \ln \frac{\pi}{\pi^2 + \alpha_2 \alpha_8} - 1 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - i \frac{4\beta}{\pi} \sqrt{\alpha_2 \alpha_8} + 2 \ln(\chi y_1) \right) + \frac{3\alpha_2 \alpha_8}{\pi(\chi y_1)^{5/2}} + O\left\{ y_1^{-7/2} (1 + \ln y_1) \right\} \right]$$

$$C = 0,5772 \dots$$

Отметим, что можно было бы получить также формулы, аналогичные (17), (18) для $p(y_1)$.

CONTACT PROBLEM FOR TWO HALF-PLANES WITH INITIAL STRESSES, UNITED BY AN HALF-INFINITE INCLUSION

E. Kh. GRIGORIAN, A. S. OVAKIMIAN

ԿՈՍԱՍՆՎԵՐՋ ՆԵՐՔԻՐՈՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ՍԿԶԵՍԻԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ
ԵՐԿՈՒ ԿՈՍԱՆԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՇՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ա մ փ ո լ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկված է սկզբնական լարումներով երկու առանձնա-
կան կիսահարթի միացման կիսաանվերջ ներդիրով միացման խնդիրը: Ֆու-
րիեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերված է կոնտակտային շոշա-
փոց լարումների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտի նկատմամբ տարբերակային հա-
վասարման լուծմանը: Կատարված է տարբերակային հավասարման փակ լու-
ծումը և ներդիրի ծայրահեղի շրջակայքում ու նրանից հեռու կետերում կոն-
տակտային լարումների համար առաջված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединенных полубесконечной упругой накладкой.—В кн: Механика деформируемых тел и конструкций, посвященном 60-летию академика Ю. И. Работнова, М.: Машиностроение, 1975, с. 44—51.
2. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, укрепленного балкой.—ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. Гузь А. П., Рудницкий Я. Б. Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками.—ПМ, 1985, т. 21, № 3.
4. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983.
5. Kotter W. On the Diffusion of Load From a Stiffener into a sheet. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, v. 8, № 2.
6. Григорян Э. Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. Уч. зап. ЕГУ, 1981, № 3.

Երևանский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.1.1988

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ НА СВОЕЙ ГРАНИЦЕ КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НАКЛАДКАМИ

АГАБЕКЯН П. В.

Пусть упругая полуплоскость усилена на своей границе двумя накладками малой постоянной толщины, одна из которых полубесконечна и деформируется под действием сил, приложенных на концах накладок. Модуль упругости конечной накладки равен E_1 , а полубесконечной — E_2 . Как и в [1, 2, 3], предполагается, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения. Задача заключается в определении тангенциальных напряжений, действующих на месте соединения накладок с полуплоскостью.

В силу вышесказанного, уравнение равновесия накладок запишется в виде

$$\frac{dU^{(1)}}{dx} = \frac{P}{E_1 h} \delta(x) - \frac{X}{E_1 h} \delta(x-a) + \frac{X}{E_2 h} \delta(x-b) - \frac{\tau_1(x)}{E_1 h} - \frac{\tau_2(x)}{E_2 h} \quad (1)$$

где

$$U^{(1)}(x) = [\Theta(x) - \Theta(x-a)] \frac{du^{(1)}}{dx} + \Theta(x-b) \frac{du^{(1)}}{dx}$$

$$\tau_1(x) = [\Theta(x) - \Theta(x-a)] \tau(x); \quad \tau_2(x) = \Theta(x-b) \tau(x)$$

$$\tau_1(x) + \tau_2(x) = [\Theta(x) - \Theta(x-a) + \Theta(x-b)] \tau(x) = \tau'(x)$$

$\delta(x)$ — функция Дирака, $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, $\tau(x)$ — интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u^{(1)}$ — горизонтальные перемещения точек накладок, h — толщина накладок, P , X — интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах накладок.

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{2\pi\mu(1-\epsilon^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau'(s)}{s-x} ds; \quad \epsilon^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (2)$$

где $u^{(2)}$ — горизонтальные перемещения граничных точек полуплоскости, μ — модуль сдвига материала полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями

$$\Theta(x)A(x)=A_+(x); \quad \Theta(-x)A(x)=A_-(x); \quad \bar{A}_\pm(z)=\int_{-\infty}^{\infty} A_\pm(x)\exp(izx)dx$$

Далее представим $du^{(2)}/dx$ в виде

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{G(x)}{2u(1-\varepsilon^2)} + U^{(2)}(x) + U_-^{(2)}(x)$$

где

$$G(x)=[\Theta(x-a)-\Theta(x-b)]g(x), \quad g(x)=2u(1-\varepsilon^2)\frac{du^{(2)}}{dx}$$

$$U_-^{(2)}(x)=\Theta(-x)\frac{du^{(2)}}{dx}, \quad U^{(2)}(x)=[\Theta(x)-\Theta(x-a)+\Theta(x-b)]\frac{du^{(2)}}{dx}$$

Тогда условие контакта между полуплоскостью и накладками будет следующее:

$$U^{(2)}(x)=U^{(1)}(x) \quad (3)$$

Теперь, применив к (1), (2) преобразование Фурье и имея в виду (3), получим функциональное уравнение

$$(\lambda_2+|z|)\bar{\tau}^+(z)+2u(1-\varepsilon^2)iz\bar{U}_-^{(2)}(z)=(\lambda_2-\lambda_1)\bar{\tau}_1(z)- \\ - iz\bar{G}(z)+\lambda_1\rho+\bar{f}(z) \quad (4)$$

$$\bar{f}(z)=\lambda_1 X \exp(izb)-\lambda_1 X \exp(iza), \quad \bar{\tau}^+(z)=\bar{\tau}_1(z)+\bar{\tau}_2(z)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (4).

Для решения этого функционального уравнения $\lambda_2+|z|$ представим в виде [4]

$$\lambda_2+|z|=\frac{\bar{K}_+(z)}{\bar{K}_-(z)}$$

где

$$\bar{K}_+(z)=(z+i0)^{\frac{1}{2}}\bar{M}_+(z), \quad \bar{K}_-(z)=(z-i0)^{-\frac{1}{2}}\bar{M}_-(z)$$

$$\bar{M}_+(z)=\exp[\bar{R}_+(z)], \quad \bar{M}_-(z)=\exp[-\bar{R}_-(z)]$$

$$(z+i0)^{\frac{1}{2}}=iz_-^{\frac{1}{2}}+z_+^{\frac{1}{2}}, \quad (z-i0)^{-\frac{1}{2}}=iz_-^{-\frac{1}{2}}+z_+^{-\frac{1}{2}}$$

$$z_+^2=\Theta(x)z^2, \quad z_-^2=\Theta(-x)z^2$$

$$R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\lambda_2+|z|}{|z|}\exp(-izx)dx$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\bar{K}_+(z)\bar{z}^+(z) + 2i\mu(1-z^2)\bar{K}_-(z)\bar{U}^{(2)}(z) = (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{K}_-(z)\bar{z}_1(z) - \\ - \bar{K}_-(z)\bar{G}(z)i\sigma + \lambda_1 P\bar{K}_-(z) + \bar{K}_-(z)\bar{f}(z)$$

Так как

$$\bar{\varphi}(z) = \bar{K}_-(z)\bar{z}_1(z) = \bar{\varphi}_+(z) + \bar{\varphi}_-(z) \\ \bar{\Psi}(z) = i\sigma\bar{K}_-(z)\bar{G}(z) = \bar{\Psi}_+(z) + \bar{\Psi}_-(z) \\ \bar{\gamma}(z) = \bar{K}_-(z)\bar{f}(z) = \bar{\gamma}_+(z) + \bar{\gamma}_-(z)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_-(z)\bar{z}_1(z)\exp(-izx)dz \\ \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma\bar{K}_-(z)\bar{G}(z)\exp(-izx)dz \\ \gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_-(z)\bar{f}(z)\exp(-izx)dz$$

то

$$\bar{Q}_1^+(z) = \bar{K}_+(z)\bar{z}^+(z) - (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{\varphi}_+(z) + \bar{\varphi}_-(z) - \bar{\gamma}_+(z) = \\ = -2i\mu(1-z^2)\sigma\bar{K}_-(z)\bar{U}^{(2)}(z) + \lambda_1 P\bar{K}_-(z) + (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{\varphi}_-(z) - \\ - \bar{\varphi}_-(z) + \bar{\gamma}_-(z) = \bar{Q}_2^-(z) \quad (5)$$

Применив к (5) обратное преобразование Фурье, получим

$$Q_1^+(x) = Q_2^-(x)$$

которое может иметь место только при [4]

$$Q_1^+(x) = Q_2^-(x) = a_0\delta(x) + a_1\delta^{(1)}(x) + \dots + a_n\delta^{(n)}(x) \quad (6)$$

Здесь $\delta^{(n)}(x)$ — n -я производная функции Дирака, n — любое конечное целое число.

Из (6) следует, что

$$\bar{K}_+(z)\bar{z}^+(z) - (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{\varphi}_+(z) + \bar{\varphi}_-(z) - \bar{\gamma}_+(z) = \\ = A_0 + A_1z + \dots + A_nz^n \quad (7)$$

Далее, ввиду того, что $z^+(x)$ — суммируемая функция, из (7) $\bar{z}^+(z)$ определится в виде

$$\bar{z}^+(z) = \frac{A_0}{[\bar{K}_+^*(z)]^{-1}} + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\bar{\varphi}_+(z)}{[\bar{K}_+^*(z)]^{-1}} - \frac{\bar{\varphi}_-(z)}{[\bar{K}_+^*(z)]^{-1}} + \frac{\bar{\gamma}_-(z)}{[\bar{K}_+^*(z)]^{-1}} \quad (8) \\ \bar{K}_+^*(z) = [\bar{K}_-(z)]^{-1}$$

Здесь A_0 — неизвестная постоянная, которая определяется из условия $\bar{\varphi}(0) = P$ и имеет вид

$$A_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2i_2} (1+i) P - (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\varphi}_+(0) + \bar{\varphi}_+(0) - \bar{\gamma}_+(0)$$

поскольку

$$\bar{K}_+(z)|_{z \rightarrow 0} = [\bar{K}_+(z)]^{-1}|_{z \rightarrow 0} = \frac{1-i}{\sqrt{2i_2}}$$

Теперь применим к (8) обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} \varphi^+(x) = (i_2 - i_1) \int_0^a L(x, s) \varphi(s) ds - \int_a^b L^*(x, s) g(s) ds + \\ + X [\lambda_2 L(x, b) - \lambda_1 L(x, a)] + A_0 K_+^*(x) \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$L(x, s) = \int_0^a K_+(x-t) K_-(t-s) dt, \quad (0 < x < \infty; \quad 0 < s < a)$$

$$L^*(x, s) = \frac{d}{ds} \int_a^b K_+(x-t) K_-(t-s) dt, \quad (0 < x < \infty; \quad a < s < b)$$

Отметим, что при $\lambda_1 = i_2$ и $a = b$ из (9) получим решение задачи Койтера для полубесконечной однородной накладки в виде [5]

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2i_2} (1+i) P K_+^*(x)$$

Имея в виду, что $\varphi^-(x) = 0$ при $a < x < b$, из (9) получим разрешающую систему интегральных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = (i_2 - i_1) \int_0^a L(x, s) \varphi(s) ds - \int_a^b L^*(x, s) g(s) ds + \\ + X [\lambda_2 L(x, b) - \lambda_1 L(x, a)] + A_0 K_+^*(x), \quad (0 < x < a) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} 0 = (i_2 - i_1) \int_0^a L(x, s) \varphi(s) ds - \int_a^b L^*(x, s) g(s) ds + \\ + X [\lambda_2 L(x, b) - \lambda_1 L(x, a)] + A_0 K_+^*(x), \quad (a < x < b) \end{aligned}$$

при условии $\int_0^a \varphi(s) ds = I - X$.

После решения (10) значения $\varphi^-(x)$ при $x > b$ определяются из уравнения (9).

Заметим, что поставленную задачу при предположении, что X неизвестно и определяется из условия

$$\int_a^b \varphi(x) dx = X \quad (11)$$

можно трактовать как задачу для полуплоскости с полубесконечной кусочно-однородной накладкой, которая по каким-то причинам оторвана от полуплоскости на участке $a < x < b$.

При $E_1 = E_2$ задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_a^b L^*(x, s) g(s) ds = \frac{1}{2} [L(x, b) - L(x, a)] X + A_0 K_+^*(x) \quad (a < x < b) \quad (12)$$

которая совместно с условием (11) разрешает задачу для упругой полуплоскости с полубесконечной однородной накладкой с вышеуказанным дефектом крепления.

Теперь приступим к исследованию ядер $L(x, s)$ и $L^*(x, s)$. Для этого заметим, что имеет место следующее разложение функции $K_+^*(x)$ [4]:

$$\begin{aligned} K_+^*(x) = K^*(x_+) = & \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}} x_+^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi^2} i_2 e^{-i\frac{\pi}{2}} x_+^{\frac{1}{2}} \left| \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \right. \\ & + \Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \ln(i_2 x)_+ \left| - \frac{1}{4\pi^2} i_2^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} x_+^{\frac{3}{2}} \right| (3\pi^2 - 2) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) - \\ & - 4\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right) - 2\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right) + 4\left(\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) + \Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \ln(i_2 x)_+ - \\ & - 2\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \ln^2(i_2 x)_+ \left| + 0x_+^{\frac{3}{2}} \{1 + \ln(i_2 x)_+ + \ln^2(i_2 x)_+ + \ln^3(i_2 x)_+\} \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$\Gamma(z)$ — известная гамма-функция $\ln(i_2 x)_+ = \Theta(x) \ln|x|$. Отметим, что $K_-(x) = \overline{K^*(x_+)}$.

Далее, поскольку

$$L(x, s) = \begin{cases} \int_0^x K^*(x-t) \overline{K^*(s-t)} dt, & x > s \\ \int_x^0 K^*(x-t) \overline{K^*(s-t)} dt, & x < s \end{cases}$$

то используя (13), можно вычислить $L(x, s)$. В итоге получим

$$L(x, s) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} + \frac{2}{\pi} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{s}) + L_1(x, s) \quad (14)$$

$$(0 < x < a), \quad (0 < s < a)$$

где производные функции $L_1(x, s)$ по x и s — квадратично суммируемые функции в квадрате $0 < x, s < a$. Что касается $L^*(x, s)$, то она представится в виде

$$L^*(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} L(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{s-x} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{x} + \sqrt{s})} + \frac{\partial}{\partial s} L_1(x, s)$$

$$(a < x < b), \quad (a < s < b) \quad (15)$$

Из представления ядер (14), (15) следует, что с помощью полиномов Чебышева систему интегральных уравнений (10) можно свести к решению квазилинейных регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений. Из (15) следует также, что тангенциальные контактные напряжения в точках a и b имеют корневую особенность. Очевидно, что $\tau(x)$ и при $x \rightarrow 0$ имеет корневую особенность.

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-PLANE STRENGTHENED ON ITS BOUNDARY WITH THE FINITE AND SEMI-INFINITE STRINGERS

P. V. AGABEKIAN

ԵԶՐՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՎ ԿՐԱՍԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԿՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՅՎԱԾ ԱՌԱՋՎԱԿԱՆ ԿՐԱՆՆԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Պ. Վ. ԱԳԱԲԵԿՅԱՆ

Ա. մ. վ. ո. վ. ո. մ.

Դիտարկված է եզրում փոքր հաստատուն հաստությամբ երկու վերադիրներով ուժեղացված առաձգական կիսահարթության համար խնդիր։ Վերադիրներից մեկը կիսաանվերջ է և գեֆորմացվում է ծայրերում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ։ Վերադիրների առաձգականության մոդուլները տարբեր են։

Խնդիրը Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ և ֆակտորիզացիայի եղանակով բերված է վերջավոր վերադիրի տակ գործող շոշափող կոնտակտային լարումների և վերադիրների միջև միջանկյալ հատվածում եղած գեֆորմացիաների նկատմամբ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։

Մասնավոր դեպքում, երբ վերադիրները նույն նյութից են, խնդիրը բերված է վերադիրների միջև միջանկյալ հատվածում եղած գեֆորմացիաների նկատմամբ առաջին սերի եզակի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.—*Ingenieur Archiv*. 1932, Bd. 3, Heft 2, s. 123—129.
2. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.—*ПММ*, 1968, т. 32, №4, с. 632—646.
3. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983.
4. *Григорян Э. Х.* О контактной задаче для упругой полуплоскости, усиленной полубесконечной кусочно-однородной накладкой.—*Межвузовск. сб. п. т. «Механика»*, Ереван, 1982, №1, с. 66—72.
5. *Kotter W. T.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet.—*The Quarterly of Mechanics and Applied Mathematics*. 1955, vol. 8, part. 2, p. 164—178.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
31. III. 1987

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ
 КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ
 ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

АГАЛОВЯН Л. А., ГЕВОРКЯН Р. С.

Оптимизационные требования к конструктивным элементам гнато-слоистых пластин и оболочек вынуждают совершенствовать существующие методы их расчета. Для пластин и оболочек, работающих в термоупругой стадии, этого можно достигнуть, в частности, на основе решения соответствующей трехмерной задачи и его последующего анализа. В работе получено асимптотическое решение класса смешанных пространственных задач для двухслойных термоупругих оболочек. Считается, что слои обладают произвольной анизотропией (21 упругая константа) и могут являться, например, композитами с пространственным армированием. Полученные результаты проиллюстрированы на двух модельных задачах для двухслойных цилиндрических оболочек. Указанный подход можно обобщить на оболочки из произвольного числа слоев*.

1. Пусть имеем двухслойную анизотропную термоупругую оболочку с толщинами слоев h_1, h_2 . Отнесем поверхность раздела к линиям кривизны α, β , ось γ ($-h_1 \leq \gamma \leq h_2$) направим перпендикулярно к этой поверхности.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние такой оболочки, когда на одной ее лицевой поверхности $\gamma = -h_1$ заданы перемещения

$$u_1(-h_1) = u^-, \quad u_2(-h_1) = v^-, \quad u_3(-h_1) = w^- \quad (1.1)$$

а на другой $\gamma = h_2$ задана одна из следующих групп условий, представляющих в практических приложениях наибольший интерес:

$$\begin{aligned} 1) \quad & z_{11}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{11}^+, \quad z_{21}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{21}^+, \quad z_{31}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{31}^+ \\ 2) \quad & u_1(h_1) = u^+, \quad u_2(h_1) = v^+, \quad u_3(h_1) = w^+ \\ 3) \quad & z_{11}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{11}^+, \quad u_2(h_1) = v^+, \quad u_3(h_1) = w^+ \\ 4) \quad & u_1(h_1) = w^+, \quad z_{21}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{21}^+, \quad z_{31}(h_1) = \varepsilon^{-1} z_{31}^+ \end{aligned} \quad (1.2)$$

Считается, что на оболочку действуют также объемные силы с компонентами $F_x^{(0)}, F_y^{(0)}, F_z^{(0)}$ и температурное поле, воздействие кото-

* Часть полученных результатов доложена на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 1986 г.).

рого описывается по модели Дюамеля-Неймана с помощью функции приращения температуры $\theta^{(i)}(x, y, z) = T^{(i)}(x, y, z) - T_0(x, y, z)$. Здесь и далее $i=1$ для слоя $0 \leq z \leq h_1$, и $i=2$ для слоя $-h_2 \leq z \leq 0$. На боковой поверхности (торцах) оболочки могут быть заданы произвольные условия, они в сформулированных задачах не влияют на ход определения решения внутренней задачи, ими обусловлен пограничный слой. На поверхности раздела слоев $z=0$ должны выполняться условия контакта

$$u_x^{(1)}(0) = u_x^{(2)}(0), \quad z^{(1)}(0) = z^{(2)}(0), \quad (x, y, z) \quad (1.3)$$

Поставленная краевая задача отличается от задач классической теории оболочек тем, что на лицевых поверхностях $z=h_1, -h_2$ заданы иные условия. Поэтому такую краевую задачу мы назвали неклассической, хотя с позиций теории упругости она также является классической.

Подобного рода задачи возникают, в частности, при исследовании контакта податливого тела с более жестким в расчетах упругих оснований и фундаментов и др. [8, 9].

Чтобы решить сформулированную задачу, будем исходить из уравнений пространственной задачи термоупругости (уравнения равновесия, состояния, связи деформации-перемещения) и чтобы упростить выкладки, в качестве неизвестных выберем компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} и безразмерные перемещения $u=u_0/R, v=v_0/R, w=w_0/R$, где R —характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров координатной поверхности). τ_{ij} выражаются через компоненты симметричного тензора σ_{ij} следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (1 + \gamma/R_2)\sigma_{11}, & \tau_{22} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{22}, \\ \tau_{33} &= (1 + \gamma/R_3)\sigma_{33}, & \tau_{12} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{12}, \\ \tau_{13} &= (1 + \gamma/R_2)\sigma_{13}, & \tau_{23} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{23}, \\ \tau_{11} &= (1 + \gamma/R_1)(1 + \gamma/R_2)\sigma_{11} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В уравнениях пространственной задачи термоупругости анизотропного тела [1, 2] перейдем к безразмерным переменным

$$x=R\xi, \quad y=R\eta, \quad z=\varepsilon\zeta \quad (1.5)$$

где $\varepsilon=h_2/R$ —малый параметр (если $h_1 > h_2$, целесообразно ввести $\varepsilon=h_1/R$). В переменных ξ, η, ζ система уравнений является сингулярно возмущенной. Известным приемом [3] можно учесть также изменчивость по координатным линиям, если вместо (1.5) ввести соответствующие переменные. Решение сингулярно возмущенной системы складывается из решений внутренней задачи (проникающая часть решения) и пограничного слоя [4].

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического разложения [5]

$$Q_l^{(i)} = \sum_{j=0}^N \varepsilon^{j+1/2} Q_j^{(i,j)}, \quad l=1,2 \quad (1.6)$$

где $\varepsilon_0 = 0$ для перемещений, $\varepsilon_0 = -1$ для напряжений. Одновременно предполагается, что компоненты объемных сил и изменение температуры допускают представления

$$F_\alpha^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-2+s} F_{\alpha s}^{(i)}, \quad (x, \beta, \gamma), \quad q^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-1+s} q_s^{(i)} \quad (1.7)$$

либо лишь при асимптотике (1.7) в уравнениях для исходного приближения будут выступать компоненты объемных сил и температуры. Для этого объемные силы должны иметь достаточно большую интенсивность, в противном случае соответствующие слагаемые будут порядком меньше и будут входить в уравнения для последующих приближений.

Подставив представления (1.6), (1.7) в преобразованные уравнения термоупругости, по обычной процедуре [1, 3, 5] получим разрешающую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Q_j^{(i,j)}$. Решив эту систему, удовлетворив граничным условиям (1.1) и условиям контакта (1.3), получим общий интеграл системы разрешающих уравнений внутренней задачи в виде

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} &= \tau_{\alpha\beta 0}^{(i)}(\xi, \eta) + \tau_{\alpha\beta 1}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, \beta, \gamma) \\ \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \tau_{11 0}^{(i)} + A_{14}^{(i)} \tau_{11 1}^{(i)} + A_{15}^{(i)} \tau_{11 2}^{(i)} + \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, \beta; 1, 2) \\ \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \tau_{11 0}^{(i)} + A_{64}^{(i)} \tau_{11 1}^{(i)} + A_{65}^{(i)} \tau_{11 2}^{(i)} + \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ u^{(i,s)} &= (A_{13}^{(i)} \zeta + A_{53}^{(2)}) \tau_{11 0}^{(i)} + (A_{14}^{(i)} \zeta + A_{54}^{(2)}) \tau_{11 1}^{(i)} + \\ &+ (A_{15}^{(i)} \zeta + A_{55}^{(2)}) \tau_{11 2}^{(i)} + u^{-(i,s)}(\xi, \eta) - u^{(2,s)}(\zeta = -1) + u^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

(u, v; $\alpha, \beta; 5, 4$)

$$\begin{aligned} w^{(i,s)} &= (A_{33}^{(i)} \zeta + A_{33}^{(2)}) \tau_{11 0}^{(i)} + (A_{34}^{(i)} \zeta + A_{34}^{(2)}) \tau_{11 1}^{(i)} + \\ &+ (A_{35}^{(i)} \zeta + A_{35}^{(2)}) \tau_{11 2}^{(i)} + w^{-(i,s)}(\xi, \eta) - w^{(2,s)}(\zeta = -1) + w^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \xi} (B \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \eta} (A \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)}) + \right. \\ &+ R(k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} - k_\beta \tau_{\beta\alpha}^{(i,s-1)}) + R F_{\alpha\beta}^{(i)} + r_1 \left(\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + 2 \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} \right) + \\ &\left. + R(r_1 + r_2) F_{\alpha\beta}^{(i)} + \tau^2 R r_1 r_2 F_{\alpha\beta}^{(i)} \right] d\zeta, \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta; 1, 2; A, B) \\ \tau_{11}^{(i,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{11}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{11}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + R(k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} + k_\beta \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)}) - \right. \end{aligned}$$

$$-r_1 \tau_{a_2}^{(i,s-1)} - r_2 \tau_{\beta}^{(i,s-1)} + R F_{\beta}^{(i)} + \tau R(r_1 + r_2) F_{\gamma-1}^{(i)} - \tau^2 R r_1 r_2 F_{\gamma-2}^{(i)} \Big] d\tau,$$

$$\tau_{a_2}^{(i,s)} = B_{11}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} P_3^{(i,s)}, \quad (\alpha, \beta; 1, 2)$$

$$\tau_{a_2}^{(i,s)} = B_{16}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{25}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{36}^{(i)} P_3^{(i,s)}$$

$$\begin{aligned} u^{(i,s)} = \int_0^1 & \left\{ a_{15}^{(i)} \tau_{a_2}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)} \tau_{\beta}^{(i,s)} + a_{35}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + a_{45}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + a_{55}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + \right. \\ & + a_{65}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + z_{13}^{(i)} \theta^{(i)} - \frac{1}{A} \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + r_1 u^{(i,s-1)} + \tau \left[a_{13}^{(i)} r_1 \tau_{a_2}^{(i,s-1)} + \right. \\ & + a_{25}^{(i)} r_2 \tau_{\beta}^{(i,s-1)} + a_{45}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + a_{55}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + a_{65}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + \\ & + (r_1 + r_2) \left(z_{13}^{(i)} \theta_{s-1}^{(i)} - \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{A} r_2 \frac{\partial w^{(i,s-2)}}{\partial \xi} + r_1 r_2 u^{(i,s-2)} \Big] + \\ & \left. + \tau^2 r_1 r_2 \left(z_{13}^{(i)} \theta_{s-2}^{(i)} - \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau, \quad (u, v; A, B; \alpha, \beta; 1, \gamma; 1, 2, 5, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{(i,s)} = \int_0^1 & \left\{ a_{13}^{(i)} \tau_{a_2}^{(i,s)} + a_{23}^{(i)} \tau_{\beta}^{(i,s)} + a_{33}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + a_{43}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + a_{53}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + \right. \\ & + a_{63}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} + z_{33}^{(i)} \theta^{(i)} + \tau (a_{13}^{(i)} r_1 \tau_{a_2}^{(i,s-1)} + a_{23}^{(i)} r_2 \tau_{\beta}^{(i,s-1)} + a_{43}^{(i)} r_2 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + \\ & + a_{53}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + a_{63}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + (r_1 + r_2) \left(z_{33}^{(i)} \theta_{s-1}^{(i)} - \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \tau} \right) + \\ & \left. + \tau^2 r_1 r_2 \left(z_{33}^{(i)} \theta_{s-2}^{(i)} - \frac{\partial w^{(i,s-2)}}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^{(i,s)} = \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + R k_s v^{(i,s-1)} + r_1 w^{(i,s-1)} - a_{15}^{(i)} \tau_{a_2}^{(i,s)} - a_{25}^{(i)} \tau_{\beta}^{(i,s)} - \\ - a_{35}^{(i)} \tau_{\gamma}^{(i,s)} - z_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)} + \tau r_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \xi} + R k_s v^{(i,s-2)} + r_1 w^{(i,s-2)} \right) - \\ - \tau (a_{11}^{(i)} r_1 \tau_{a_2}^{(i,s-1)} + a_{22}^{(i)} r_1 \tau_{\beta}^{(i,s-1)} + a_{44}^{(i)} r_2 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + a_{55}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)} + \\ + a_{66}^{(i)} r_1 \tau_{\gamma}^{(i,s-1)}) - a_{11}^{(i)} \tau (r_1 + r_2) \theta_{s-1}^{(i)} - z_{11}^{(i)} \tau^2 r_1 r_2 \theta_{s-2}^{(i)} \\ (\alpha, \beta; u, v; A, B; 1, 2; 4, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(i,s)} = \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \gamma} - R k_s v^{(i,s-1)} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} - R k_s u^{(i,s-1)} - a_{36}^{(i)} \tau_{11}^{(i,s)} - \\ - a_{46}^{(i)} \tau_{11}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)} \tau_{11}^{(i,s)} - z_{12}^{(i)} \theta^{(i)} + \tau r_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \gamma} - R k_s v^{(i,s-2)} \right) + \\ + \tau r_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i,s-2)}}{\partial \xi} - R k_s u^{(i,s-2)} \right) - \tau (a_{16}^{(i)} r_1 \tau_{11}^{(i,s-1)} + a_{26}^{(i)} r_2 \tau_{11}^{(i,s-1)} + \end{aligned}$$

$$+ a_{41}^{(i)} r_3 \tau_{31}^{(i,s-1)} + a_{56}^{(i)} r_1 \tau_{61}^{(i,s-1)} + a_{65}^{(i)} r_1 \tau_{51}^{(i,s-1)} - \\ - \tau_{12}^{(i)} (r_1 + r_2) \theta_{s-1}^{(i)} - a_{12}^{(i)} r_1 r_2 \theta_{s-2}^{(i)}$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{66} + 2 a_{12} a_{16} a_{26} - a_{22} a_{16}^2 - a_{66} a_{12}^2 - a_{11} a_{26}^2$$

$$B_{kk} = (a_{ii} a_{jj} - a_{ji}) / \Delta, \quad B_{kj} = (a_{ki} a_{jl} - a_{kl} a_{ji}) / \Delta$$

$$A_{km} = -(a_{1m} B_{k1} + a_{2m} B_{k2} + a_{6m} B_{k6}), \quad B_{kj} = B_{jk}$$

$$A_{nm} = a_{n1} A_{1m} + a_{n2} A_{2m} + a_{n6} A_{6m} + a_{nm}, \quad A_{nm} \neq A_{mn}$$

$$j \neq l \neq k \neq j, \quad j, k, l = 1, 2, 6; \quad m, n = 3, 4, 5$$

$$u^{-(s)} = u^- / R, \quad u^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w), \quad r_1 = R / R_1, \quad r_2 = R / R_2$$

$$k_3 = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad k_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad \text{— геодезические кривизны, } R_1, R_2 \text{— главные}$$

радиусы кривизны поверхности контакта слоев. Всем величинам, входящим в выражения Δ , A_{jk} , B_{jk} , необходимо приписать индекс (i) .

В формулах (1.8) $\tau_{1,0}^{(i)}(\xi, \tau)$, $\tau_{2,0}^{(i)}(\xi, \tau)$, $\tau_{3,0}^{(i)}(\xi, \tau)$ — произвольные пока функции интегрирования, которые однозначно определяются из граничных условий (1.2). Если на поверхности $\gamma = h_1$ ($\gamma = h_1, h_2$) заданы значения напряжений (первая группа условий (1.2)) эти функции определяются по формулам

$$\tau_{1,0}^{(s)} = \tau_{\alpha 1}^{(s,0)} - \tau_{\alpha 2}^{(s,0)}(\tau_2), \quad (\alpha, \beta), \quad \tau_{1,0}^{(s)} = \tau_{11}^{(s)} - \tau_{12}^{(s)}(\tau_1) \quad (1.10)$$

где

$$\tau_{\alpha 1}^{(s,0)} = \sigma_{\alpha 1}^+, \quad \tau_{\alpha 1}^{(s)} = \tau_{\alpha 2} r_2 \sigma_{\alpha 1}^+, \quad \tau_{\alpha 2}^{(s)} = 0, \quad s > 1, \quad (\alpha, \beta; 1, 2)$$

$$\tau_{11}^{(s,0)} = \sigma_{11}^+, \quad \tau_{11}^{(s)} = r_1(r_1 + r_2) \sigma_{11}^+, \quad \tau_{11}^{(s)} = r_1^2 r_1 r_2 \sigma_{11}^+, \quad \tau_{12}^{(s)} = 0, \quad s > 2 \quad (1.11)$$

Если же при $\gamma = h_1$ задана вторая группа условий (1.2), то

$$\tau_{\alpha \beta 0}^{(i)} = D_{23} V_{\alpha}^{(i)} + D_{34} V_{\beta}^{(i)} + D_{35} V_{\gamma}^{(i)}, \quad (\alpha, \beta; 4, 5) \quad (1.12)$$

$$\tau_{12}^{(i)} = D_{25} V_{\alpha}^{(i)} + D_{24} V_{\beta}^{(i)} + D_{23} V_{\gamma}^{(i)}$$

где

$$V_{\alpha}^{(i)} = h_2 [u_{\alpha 2}^{(2,0)}(\tau_2 = -1) - u_{\alpha 1}^{(1,0)}(\tau_1 = \tau_1) + u_{\alpha 1}^{(s)} - u_{\alpha 2}^{(s)}], \quad (\alpha, \beta, \gamma; u, v, w)$$

$$u_{\alpha}^{\pm(s)} = u_{\alpha}^{\pm} / R, \quad u_{\alpha}^{\pm(s)} = 0, \quad (s \neq 0), \quad (u, v, w) \quad (1.13)$$

$$D_{ii} = (c_{ki} c_{jk} - c_{ji} c_{ik}) / \Delta_*, \quad D_{ik} = (c_{ki} c_{jj} - c_{kj} c_{ki}) / \Delta_*$$

$$c_{lm} = h_1 A_{lm}^{(1)} + h_2 A_{lm}^{(2)}, \quad l \neq k \neq j \neq l; \quad k, l, j, m = 3, 4, 5$$

$$\Delta_* = c_{33} c_{45} c_{54} + c_{44} c_{35} c_{53} + c_{55} c_{34} c_{43} - c_{33} c_{44} c_{55} - c_{34} c_{45} c_{53} - c_{35} c_{54} c_{43}$$

Когда при $\gamma = h_1$ заданы условия (1.2) для смешанных задач, подчинив решение (1.8) этим условиям, аналогичным образом определим значения $\tau_{\alpha 1}^{(s)}$, $\tau_{\alpha 2}^{(s)}$, $\tau_{1,0}^{(s)}$ и для этих случаев.

Таким образом, неизвестные внутренней задачи полностью определяются из условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки.

независимо от условий на ее боковой поверхности (торцах). Этим свойством указанный класс задач принципиально отличается от задач классической теории оболочек, поскольку в последнем случае решение внутренней задачи содержит произволы, которые затем определяются из условий на боковой поверхности [3]. Здесь же условиям на боковой поверхности соответствует пограничный слой. Вопросы построения пограничного слоя и его взаимодействия с внутренней задачей для оболочек рассматриваются по аналогии с пластинами [6, 7]. Отметим также, что асимптотическим методом, изложенным выше, можно решать смешанные задачи для многослойных оболочек.

В заключение этого раздела сделаем одно замечание общего характера: представлением (1.6), (1.8) определяются решения, имеющие асимптотический характер, то есть предполагается, что

$$Q = \sum_{s=1}^{N-1} \varepsilon^{s+1} Q^{(s)} + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (1.14)$$

Если в общем случае оценка остаточного члена для каждого N затруднительна в силу многообразия вариантов задания отношений упругих и геометрических характеристик слоев [10], в каждой же конкретной задаче она не представляет большого труда, поскольку из общего формального решения (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) легко выписываются все величины, подлежащие оценке. Когда слои резко отличаются по своим упругим и геометрическим характеристикам, можно указать случаи (хотя бы теоретические), когда асимптотика (1.6) будет нарушена, то есть некоторые отброшенные для данного « S » слагаемые будут иметь порядок оставленных. Возникающие возможные ситуации подробно изучены в [10]. Общая качественная картина и методика исследования вопроса, изложенные в [10], остаются в силе и в обсуждаемом случае.

2. Приведем решения двух задач для двухслойных ортотропных цилиндрических оболочек, иллюстрирующие возможности изложенного выше подхода.

Имеем двухслойную ортотропную круговую цилиндрическую оболочку, внутренняя поверхность которой жестко закреплена, а внешняя свободна от нагрузок (фиг. 1). Оболочка находится в температурном поле и пусть изменение температурного поля по толщине оболочки линейно: $\theta^{(i)} = a_i \gamma + b$, $i = 1, 2$.

Выбрав за a длину по образующей, за β — длину дуги направляющего цилиндра, будем иметь

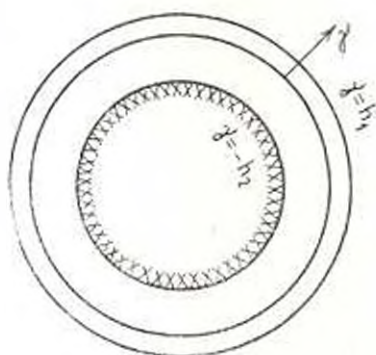
$$A=B=1, \quad r_1=0, \quad r_2=1, \quad k_3=k_2=0, \quad 1'R_1=0, \quad R_2=R$$

где R — радиус поверхности контакта слоев. Напряжения и перемещения такой оболочки вычислим по формулам (1.6), (1.8) — (1.11).

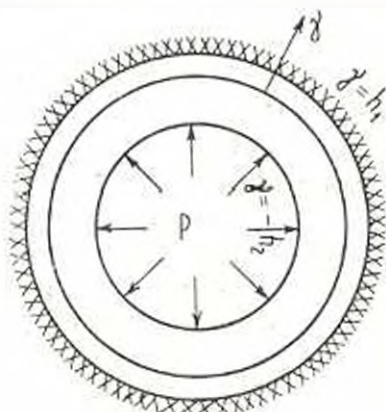
С точностью $O(\varepsilon^2)$ они будут:

$$\sigma_{\beta\beta}^{(i)} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(i)} = -\frac{12}{\alpha_{\beta\beta}^{(i)}} (a_i \gamma + b)$$

$$\begin{aligned}
z_{11}^{(0)} &= [G_{33}^{(0)} \gamma(a_1 \gamma + 2b) - G_{33}^{(0)} h_1(a_1 h_1 + 2b)] \frac{1}{2(R+\gamma)} \\
z_{33}^{(0)} &= G_{11}^{(0)}(a_1 \gamma + b) + A_{13}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{\gamma}{2(R+\gamma)} (a_1 \gamma + 2b) - A_{13}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{h_1}{R+\gamma} \times \\
&\times (a_1 h_1 + 2b) - \frac{a_{12}^{(0)}}{2\Delta^{(0)}(R+\gamma)} [G_{33}^{(0)} \gamma(a_1 \gamma + 2b) - G_{33}^{(0)} h_1(a_1 h_1 + 2b)] \\
z_{33}^{(0)} &= G_{22}^{(0)}(a_1 \gamma + b) + A_{23}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{\gamma}{2R} (a_1 \gamma + 2b) - A_{23}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{h_1}{2R} (a_1 h_1 + 2b) + \\
&+ \frac{a_{11}^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \left[G_{33}^{(0)} \frac{\gamma}{2R} (a_1 \gamma + 2b) - G_{33}^{(0)} \frac{h_1}{2R} (a_1 h_1 + 2b) \right] \\
u_1^{(0)} &= \frac{1}{2} z_{11}^{(0)} \gamma(a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} z_{11}^{(0)} h_1(a_1 h_1 + 2b) \\
u_3^{(0)} &= \frac{1}{2} z_{33}^{(0)} \gamma(a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} z_{33}^{(0)} h_1(a_1 h_1 + 2b) + \\
&+ \frac{\gamma^3}{6R} z_{33}^{(0)}(a_1 \gamma + 3b) - \frac{\gamma h_1}{2R} z_{33}^{(0)}(a_1 h_1 + 2b) - \frac{h_1^2}{6R} z_{33}^{(0)}(2a_1 h_1 + 3b) \\
u_1^{(0)} &= \frac{1}{2} G_{11}^{(0)} \gamma(a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} G_{33}^{(0)} h_1(a_1 h_1 + 2b) - \\
&- \frac{h_1}{2R} (A_{33}^{(0)} \gamma + A_{33}^{(0)} h_1 G_{22}^{(0)}(a_1 h_1 + 2b) + \frac{\gamma h_1}{2R} A_{23}^{(0)} G_{33}^{(0)}(a_1 h_1 + 2b) + \\
&+ \frac{\gamma^3}{6R} (A_{33}^{(0)} G_{22}^{(0)} - A_{23}^{(0)} G_{33}^{(0)})(a_1 \gamma + 3b) - \frac{h_1^2}{6R} A_{33}^{(0)} G_{22}^{(0)}(a_1 h_1 + 3b) + \\
&+ \frac{h_1}{6R} A_{33}^{(0)} G_{33}^{(0)}(2a_1 h_1 + 3b) \\
G_{11}^{(0)} &= (a_{12}^{(0)} z_{11}^{(0)} - a_{11}^{(0)} z_{11}^{(0)}) / (a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} - (a_{12}^{(0)})^2) \\
G_{22}^{(0)} &= A_{11}^{(0)} z_{11}^{(0)} + A_{22}^{(0)} z_{22}^{(0)} + z_{33}^{(0)}
\end{aligned}
\tag{2.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Внешняя поверхность двухслойной ортотропной цилиндрической оболочки жестко закреплена, а внутри действует постоянное давление p . Объемные силы и переменные температурные поля отсутствуют (фиг. 2). Исходя из тех же формул, для искомых напряжений и перемещений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} &= \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0 \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{R-h_2}{R+\gamma} p + (A_{23}^{(1)} \gamma + A_{23}^{(2)} h_2) \frac{p}{R+\gamma} \\ \sigma_{22}^{(1)} &= A_{13}^{(1)} (R-h_2 + h_2 A_{33}^{(2)} + \gamma A_{23}^{(1)}) \frac{p}{R} - \frac{a_{12}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} (A_{23}^{(1)} \gamma - h_2 A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R} \\ \sigma_{33}^{(1)} &= A_{23}^{(1)} (R-h_2 + \gamma + h_2 A_{23}^{(1)} + \gamma A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R+\gamma} + \frac{a_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} (A_{23}^{(1)} \gamma - h_2 A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R+\gamma} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= (A_{33}^{(1)} \gamma - A_{33}^{(1)} h_2) (R-h_2 + h_2 A_{33}^{(2)}) \frac{p}{R} + \\ &+ \frac{1}{2} (A_{33}^{(1)} h_1^2 - \gamma^2 A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R} + A_{33}^{(1)} (A_{23}^{(1)} \gamma - h_2 A_{23}^{(1)}) \frac{h_2 p}{R} \\ \Delta^{(1)} &= [a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - (a_{12}^{(1)})^2] a_{33}^{(1)} \end{aligned}$$

Используя специфичность упругих и температурных свойств отдельных слоев, на основе полученного общего решения можно ответить на различные оптимизационные вопросы.

ABOUT THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF NON-CLASSICAL BOUNDARY PROBLEMS FOR BI-LAYER ANIZOTROPIC THERMOELASTIC SHELLS

L. A. AGALOVIAN, R. S. GEVORGIAN

ԵՐԿՇԵՐՏ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԶԵՐՄԱԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ
ԵԶՐԱՅԻՆ ԽԵԴԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ԱԳԱՆՈՎՅԱՆ, Ռ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Երկշերտ չերմաառաձգական թաղանթների խառը տարածական խնդիրների դասի համար ստացված է ասիմպտոտիկ լուծում: Շերտերը համարվում են կամայական անիզոտրոպ (քնութագրվում են 21 առաձգական հաստատուններով): Ապացուցված է թաղանթների դասական տեսության ոչ կիրառելիությունը նման խնդիրների լուծման համար: Ստացված արդյունքները լուսաբանված են երկշերտ գլանային թաղանթների երկու մոդելային խնդիրների լուծումներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаляян Л. А. О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 1, с. 109—120.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости.—М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976. 512 с.
4. Васильева А. Б., Бутузова В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Агаляян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с обшей анизотропией.—В кн.: Механика конструкций из композиционных материалов, Новосибирск, Наука, 1984. с. 105—110.
6. Агаляян Л. А. О пограничном слое пластинок.—Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55, № 3, с. 149—155.
7. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т. 37, № 6, с. 3—15.
8. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоусов А. В., Воронин И. Н., Устинов Ю. А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины.—Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 135—139.
9. Агаляян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. В сб: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. I. А.-В. Галлики, 1983. с. 13—18.
10. Агаляян Л. А., Хачатрян А. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, № 2, с. 3—14.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
27 IV 1987

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ
СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

МОВСИСЯН Л. А.

Приводятся вязкоупругие соотношения для анизотропных слоистых пластин и оболочек.

Рассматривается частный вид вязкоупругости, когда не все коэффициенты в физических соотношениях элементарного слоя обладают вязкостью.

Изучен ряд примеров. Показано принципиальное отличие получаемых результатов от вариантов сбора пакета. Обсуждаются вопросы оптимального армирования.

1. Многие композиционные материалы, армирующие элементы которых, например, металл или стекло, а связующие полимеры — при невысоких температурах при взаимноортогональном армировании в направлениях армирования, ведут как упругие, а по отношению к касательным напряжениям проявляют свойства ползучести: соотношения напряжения — деформация, записанные в системе координат, связанной с направлениями армирования (плоский случай), имеют вид

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{12} - \beta_1 T, \quad \sigma_{22} = B_{12}^0 e_{12} + B_{22}^0 e_{22} - \beta_2 T \quad (1.1)$$

$$\sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12} = B_{66}^0 (1 - \Gamma^*) e_{12}, \quad \Gamma^* u = \int_0^t \Gamma(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Здесь Γ^* — линейный оператор наследственности, постоянные β_i выражаются через коэффициенты линейного расширения в направлениях армирования следующим образом: $\beta_1 = B_{11}^0 \alpha_1 + B_{12}^0 \alpha_2$, $\beta_2 = B_{12}^0 \alpha_1 + B_{22}^0 \alpha_2$.

Если координатную систему расположить так, чтобы она составляла угол φ относительно направлений армирования, то физические соотношения в этой системе будут

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{B}_{11} e_{xx} + \bar{B}_{12} e_{yy} + \bar{B}_{16} e_{xy} - \bar{\beta}_1 T \\ \sigma_{yy} &= \bar{B}_{12} e_{xx} + \bar{B}_{22} e_{yy} + \bar{B}_{26} e_{xy} - \bar{\beta}_2 T \\ \sigma_{xy} &= \bar{B}_{16} e_{xx} + \bar{B}_{26} e_{yy} + \bar{B}_{66} e_{xy} - \bar{\beta}_6 T \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь уже все \tilde{B}_{ij} обладают наследственным свойством: $\tilde{B}_{ij} = B_{ij} - b_{ij}\Gamma^*$, где B_{ij} — упругие части, которые выражаются через B_{ij}^0 известным образом [2, 3], b_{ij} имеют вид [4]

$$b_{11} = b_{22} = -b_{12} = B_{66}^0 \sin^2 2\varphi, \quad b_{66} = B_{66}^0 (1 - \sin^2 2\varphi) \quad (1.3)$$

$$b_{23} = -b_{13} = B_{66}^0 \sin 2\varphi \cos 2\varphi$$

а постоянные β_{ij} [1]

$$\beta_{11} = \beta_1 \cos^2 \varphi + \beta_2 \sin^2 \varphi, \quad \beta_{22} = \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi, \quad \beta_{66} = (\beta_1 - \beta_2) \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.4)$$

Если составить пакет из таких слоев (толщина каждого h) так, чтобы относительно координатной поверхности, находящейся на геометрической середине всего пакета, слои расположились симметрично (φ_k) или асимметрично ($\neq \varphi_k$) и если принять гипотезу прямых нормалей и $T = b_1 + z b_2$, то тогда соотношения вязкоупругости примут вид

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} & 0 & 0 & \bar{K}_{16} \\ & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 & \bar{K}_{26} \\ & & \bar{C}_{66} & \bar{K}_{16} & \bar{K}_{26} & 0 \\ & & & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ & & & & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{26} \\ & & & & & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ c_{66} \\ 0 \\ 0 \\ k_{66} \end{bmatrix} \theta_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{11} \\ d_{11} \\ d_{22} \\ d_{66} \end{bmatrix} \theta_2 \quad (1.5)$$

Конечно, для пакета вместо гипотезы недеформируемых нормалей можно было принять более точную теорию (например, [5]), однако для той цели, которую преследует данная работа, уточнение несущественно. По этой же причине здесь рассматриваются простые одномерные задачи. Они вызваны лишь для подтверждения того или иного положения.

В зависимости от числа и расположения слоев соотношения и входящие в них коэффициенты будут различными. Их конкретизация приводится ниже.

При четном числе слоев ($2n$) и симметричном их расположении

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij} &= 2h \sum_{k=1}^n \bar{B}_{ij}^{(k)} \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{2h^3}{3} \sum_{k=1}^n [k^2 - (k-1)^2] \bar{B}_{ij}^{(k)} \\ \bar{K}_{ij} &= k_{ij} = 0, \quad \bar{B}_{ij}^{(k)} = B_{ij}^{(k)} - b_{ij}^{(k)} \Gamma^* \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.5) маленькими буквами (c_{ij} , d_{ij} , k_{ij}) обозначены величины, которые получаются из выражений \bar{C}_{ij} , \bar{D}_{ij} , \bar{K}_{ij} , если $B_{ij}^{(k)}$ заменить через $\hat{B}_{ij}^{(k)}$ и отбросить члены от ползучести.

При асимметричном расположении слоев помножим \bar{C}_{ij} и \bar{D}_{ij} по (1.6)

$$\begin{aligned}\bar{C}_{i6} = \bar{D}_{i6} = 0, \quad i = 1, 2, \quad c_{66} = d_{66} = 0 \\ \bar{K}_{ij} = h^2 \sum_{k=1}^n [k^2 - (k-1)^2] \bar{B}_{ij}^{(k)}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Теперь, если число слоев нечетное ($2n+1$), то при симметричном расположении вместо (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{C}_{ij} = h \left[\bar{B}_{ij}^{(1)} + 2 \sum_{k=2}^{n+1} \bar{B}_{ij}^{(k)} \right] \\ \bar{D}_{ij} = \frac{h^3}{12} \left[\bar{B}_{ij}^{(1)} + 8 \sum_{k=2}^{n+1} \left[\left(k - \frac{1}{2} \right)^3 - \left(k - \frac{3}{2} \right)^3 \right] \bar{B}_{ij}^{(k)} \right]\end{aligned}\quad (1.8)$$

При асимметричном расположении в (1.5) все члены уже фигурируют, но, если при $i, j = 1, 2$ и $i=j=6$ \bar{C}_{ij} и \bar{D}_{ij} определяются по (1.8), то

$$\begin{aligned}\bar{C}_{i6} = h \bar{B}_{i6}^{(1)}, \quad \bar{D}_{i6} = \frac{h^3}{12} \bar{C}_{i6}, \quad i = 1, 2 \\ \bar{K}_{ij} = h^2 \sum_{k=1}^{n+1} \left[\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(k - \frac{3}{2} \right)^2 \right] \bar{B}_{ij}^{(k)} \\ c_{66} = h \bar{B}_{66}^{(1)}, \quad d_{66} = \frac{h^3}{12} c_{66}\end{aligned}\quad (1.9)$$

Как расположить слои? Что лучше—симметричное или асимметричное расположение? На какой угол повернуть каждый слой относительно координатной системы? Все это зависит от конкретной задачи и на какое время предназначена данная конструкция. Ниже приводятся ряд простых примеров, подтверждающих сказанное.

2. Рассмотрим несколько примеров одномерных задач.

1. Упругая пластинка-полоса одним концом жестко зашкреплена ($u=v=w=w'=0$), а на другом конце заданы нормальное перемещение ($u=u_0$), прогиб ($w=w_0$) и $T_{12} = M_{11} = 0$.

Уравнения, описывающие НДС в перемещениях для симметрично (1.6) и асимметрично (1.7) собранных пластин, будут

$$\left. \begin{aligned}C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{dx^2} &= 0 \\ C_{16} \frac{d^2 u}{dx^2} + C_{66} \frac{d^2 v}{dx^2} &= 0 \\ D_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} &= 0\end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned}C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} &= 0 \\ C_{26} \frac{d^2 v}{dx^2} - K_{16} \frac{d^3 w}{dx^3} &= 0 \\ D_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} - K_{16} \frac{d^3 v}{dx^3} &= 0\end{aligned} \right\}$$

Как здесь, так и в дальнейшем через C_{ij} , D_{ij} и K_{ij} обозначены упругие части соответствующих коэффициентов в (1.6)–(1.9) без учета членов вязкости. Выражения максимальных упругих напряжений соответственно симметричному (1.6) и асимметричному (1.7) случаям для двухслойной пластинки равны

$$\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{B_{11} u_0}{l} \left(1 - \frac{B_{16}^2}{B_{11} B_{66}} \right) + h B_{11} \frac{3 w_0}{l^2} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\max}^{(a)} = B_{11} \frac{u_0}{l} + B_{11} \frac{3 h w_0}{l^2} \left(1 - \frac{B_{16}^2}{B_{11} B_{66}} \right) \quad (2.2)$$

Какое из них лучше (максимальное напряжение меньше)—зависит от величин u_0 и w_0 . Если $u_0=0$, то, конечно, лучше асимметричное расположение, а при $\frac{u_0}{w_0} > \frac{3h}{l}$ лучше симметричное.

Следует отметить еще, что если в первом случае растяжение сопровождается кручением, то во втором случае изгиб—кручением.

II. Для композитов одним из главных вопросов, если не самый главный, является вопрос оптимального армирования с целью получения наибольших значений каких-то параметров (критической силы, основной частоты и т. д.). По-видимому, впервые в [6] был поставлен вопрос и решен ряд задач для осесимметричной однослойной цилиндрической оболочки: а именно, при каком расположении главных направлений упругости (фактически армирования) получится, например, максимальная критическая сила. Строго говоря, эти задачи не являются классическими задачами оптимального управления. Они—обычные задачи на максимум. Однако в литературе принято их также называть оптимальными. И здесь оптимальность понимается в этом смысле. Надо однако заметить, что часто ответ на этот вопрос может быть вопреки «очевидному».

Рассмотрим упругую устойчивость четырехслойной пластинки (цилиндрический изгиб), находящейся в постоянном температурном поле t . Края в продольном направлении неподвижны и шарнирно оперты по отношению вариации перемещений.

Уравнение устойчивости и граничные условия запишутся в виде

$$D_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - T_1^* w = 0, w = w' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l$$

где сжимающее усилие согласно уравнению $\frac{dT_1^*}{dx} = 0$, (1.5), (1.6) и условиям $u=0$ при $x=0$ и $x=l$ определяется формулой $T_1^* = -c_{11} \theta^0$.

Для критического значения температуры получится

$$\theta_{кр}^{(0)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2 \cdot K, \quad K = \frac{B_{11}^{(0)} + 7B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(0)} + B_{11}^{(2)}} \quad (2.3)$$

Для материала с данными $B_{11}^0 = 2B_{22}^0 = 2B$, $B_{33}^0 = 2B_{12}^0 = 0,8B$, $\nu_3 = 2\nu_1 = 2$ (конкретные данные несущественны, так как соответствующим образом армированием можно добиться желаемых значений).

Хотя максимальная изгибная жесткость получается при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, критическая температура максимальной будет при $\varphi_1 \approx 31^\circ$ и $\varphi_2 \approx 19^\circ$. И K при этом равен $3,3 \alpha^{-1}$, в то время как при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ $K = 2,9 \alpha^{-1}$.

III. Очевидно, что в зависимости от срока назначения конструкций оптимальное расположение слоев будет различным, то есть то расположение слоев, при котором, например, получается максимальная мгновенная критическая сила, уже для длительной критической силы такое расположение может не быть наилучшим. Это видно и на примере однослойной пластинки, сжатой вдоль конечной стороны. Если взять такие данные $B_{11}^0 = 1,5B$, $B_{33}^0 = B$, $B_{33}^0 = 2B_{12}^0 = 0,8B$, то при шарнирно опертом случае для мгновенной критической силы максимальное значение достигается при $\varphi \approx 36^\circ$ и оно равно

$$P_{кр}^{(M)} = 1,7B \frac{\pi^2 h^3}{12 l^2} \quad (2.4)$$

Если принять, например, что длительный модуль $B_{33}^0(t \rightarrow \infty) = 0,6B$, то длительная критическая сила достигается при $\varphi \approx 22^\circ$ и она равна

$$P_{кр}^{(D)} = 1,3B \frac{\pi^2 h^3}{12 l^2} \quad (2.5)$$

IV. В [6] получены формулы для упругого критического усилия и формы осесимметричной потери устойчивости свободно опертой анизотропной (общий случай) цилиндрической оболочки:

$$p_{кр} = \frac{2}{A} (\sqrt{n} - m) \cdot \frac{k\pi}{l} = \sqrt{n} \quad (2.6)$$

Для сравнения приведем значения постоянных, входящих в (2.6) для многослойной оболочки при симметричном (1.6) и асимметричном (1.7) расположении слоев

$$m = \frac{3D_{10}(C_{11}C_{26} - C_{12}C_{16})}{4D_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)R^2}, \quad A = \frac{1}{D_{11}} \quad (2.7)$$

$$n = \frac{\Delta}{R^2 D_{11}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{vmatrix}$$

$$m = \frac{3K_{10}(C_{11}K_{16} - K_{12}C_{16})}{4R^2 C_{11}(D_{11}C_{66} - K_{16}^2)}, \quad A = \frac{C_{66}}{D_{11}C_{66} - K_{16}^2} \quad (2.8)$$

$$n = \frac{C_{66}(C_{11}C_{66} - C_{16}^2)}{R^2 C_{11}(D_{11}C_{66} - K_{16}^2)}$$

Для длительной устойчивости упругие коэффициенты должны быть заменены на длительные.

Как видно из приведенных формул, вообще различными являются как критические усилия, так и формы потери устойчивости при симметричном и асимметричном расположении слоев.

V. Еще большее отличие различных вариантов слоистости обнаруживается в задачах распространения волн (колебаний).

Уравнения одномерных волн пластины, соответствующие случаям (1.6) и (1.7), имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{C}_{11} u + \bar{C}_{16} v) = 2n_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{C}_{16} u + \bar{C}_{66} v) = 2n_0 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2n_0 h \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

$$\bar{C}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2n_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \bar{K}_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2n_0 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \bar{K}_{55} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2n_0 h \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

При этом в (1.1) нижний предел интегрирования должен быть заменен на $-\infty$.

Системы эти существенно отличаются. Если, например, в первом случае продольная волна вызывает кручение, то во втором случае кручение вызывает волна изгиба и наоборот, или, если в первом случае волна кручения распространяется без дисперсии, то во втором — помимо изгибных волн и волна кручения является дисперсионной и т. д.

А вообще, при (1.9) получаемая система не распадается и любая из волн вызывает остальные и все они распространяются с дисперсией.

Для примера рассмотрим распространение продольных и крутящих волн в (2.9) и (2.10) (без изгибов). Если решение искать обычным образом в виде бегущих волн, то при малом затухании для скоростей распространения из (2.9) получим

$$c_1 = \sqrt{\frac{\bar{K}_1}{n_0}} \left(1 - \frac{X_1}{\bar{K}_1} \Gamma_c \right), \quad c_2 = \sqrt{\frac{\bar{K}_2}{n_0}} \left(1 - \frac{X_2}{\bar{K}_2} \Gamma_c \right) \quad (2.11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_1 = \bar{B}_{11} + \frac{\bar{B}_{16}}{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{66}}, \quad K_2 = \bar{B}_{66} - \frac{\bar{B}_{16}}{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{66}}$$

$$X_1 = \frac{1}{2} (\bar{B}_{11} + X), \quad X_2 = \frac{1}{2} (\bar{B}_{66} - X)$$

$$X = \frac{2\bar{B}_{16} \bar{b}_{16} (\bar{B}_{11} - \bar{B}_{66}) - \bar{B}_{11} (\bar{b}_{11} - \bar{b}_{66})}{(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{66})^2}$$

$$\bar{B}_{ij} = 2h \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)}, \quad \bar{b}_{ij} = 2h \sum_{k=1}^n b_{ij}^{(k)}$$

Γ_c и Γ_s — с точностью до множителя косинус и синус есть преобразования Фурье от функции $\Gamma(t)$.

Коэффициенты, характеризующие затухания волн, будут

$$k_1 = -\omega \sqrt{\rho n} \frac{\Gamma_s}{2} X_1 K^{-1/2}, \quad k_2 = -\omega \sqrt{\rho n} \frac{\Gamma_s}{2} X_2 K_2^{-1/2} \quad (2.12)$$

Для сравнения приведены эти же величины при асимметричном пакете (2.10):

$$c = \sqrt{\frac{\bar{B}_{11}}{\rho n} \left(1 - \frac{\bar{b}_{11}}{2\bar{B}_{11}} \Gamma_c \right)}, \quad k = -\omega \sqrt{\rho n} \frac{\Gamma_s}{2} \bar{B}_{11}^{-3/2} \quad (2.13)$$

Выражения (2.11), (2.12) и (2.13) отличаются не только качественно.

В вышеприведенных примерах, где проводилось сравнение между различными способами составления пакета (симметричный или асимметричный) пластины и оболочки, видно, насколько отличаются напряженно-деформированные состояния друг от друга. На это обстоятельство необходимо обратить внимание, так как существует ряд работ, где для асимметрично собранных пакетов (узкая задача) члены K_i без обоснования опускаются, без упоминания. И для всего пакета получается ложная ортотропия. Конечно, возможны задачи, когда B_{ij} очень малы (на сколько?), что в результате какие-то параметры будут мало отличаться с учетом или без учета K_{ij} . Но, во-первых, надо показать, когда это имеет место и, во-вторых, следует помнить, что качественные картины будут совершенно различными.

SOME PROBLEMS OF VISCOELASTIC ANISOTROPIC LAMINATED PLATE AND SHELL.

L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՋԳԱՄԱՍԽԱՆԻՑԻ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱՎԵՐԻ
ԵՎ ԹԱՎԱՆԹՐՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված են անիզոտրոպ շերտավոր սավերի և թաղանթների համար առաջադաժանիկ առնչությունները, երբ յուրաքանչյուր շերտ ուժաված է շափող լարումների նկատմամբ ժառանգական չափություններով: Շերտերի գլխավոր ուղղությունները կոորդինատական մակերևույթի նկատմամբ դասավորված են սիմետրիկ կամ ոչ սիմետրիկ:

Դիտարկված էն մի շարք խնդիրներ ծոման, կաշվեպլան ու արժեքների վերաբերյալ: Ցույց է տրված տարրեր ձևերով դասավորվածությունից կախված լարվածային-դեֆորմացված վիճակների խիստ տարբերությունը:

Քննարկված էն օպտիմալ ամրանալորման հարցերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. К расчету анизотропной цилиндрической оболочки вращения. — Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., 1959, т. XII, № 4, с. 89—107.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Изд-во Гостехтеориздат, 1957, 463 с.
3. Амбарцумян С. П. Теория анизотропных оболочек. — М.: Физматгиз, 1961, 384 с.
4. Мовсисян Л. А. К устойчивости наследственно-упругой анизотропной цилиндрической оболочки. — Материалы II Всесоюзной н.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность», Изд. ЕГУ, 1981, т. II, с. 194—197.
5. Кристенсен Р. Введение в механику композиц. м. — М.: Мир, 1982, 334 с.
6. Мовсисян Л. А. Об осесимметрично-нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке. — Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., 1962, т. XV, № 2, с. 111—119.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.XI.1987

УДК 624.072

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ИХ
СИЛЬНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

БЛОХ Е. О., СЛЕЗИНГЕР И. И.

По мере возрастания действующей на стержень нагрузки (вплоть до разрушающих значений) в нем развиваются большие фибровые напряжения, выходящие вначале за предел пластичности, а затем — и прочности. Рассмотрение таких случаев деформации стержня требует учета его сильной физической нелинейности, и ряде случаев — трещинообразования, а при длительном действии нагрузки еще и ползучести, усадки, старения. Задача становится еще более сложной, если стержень — неоднородный, например железобетонный, так как при этом перечисленные выше факторы по-разному сказываются на работе основного материала (бетона) и арматуры. Расчет стержней в указанной постановке требует использования специальной расчетной схемы стержня с переменной по длине и во времени податливостью, сложным образом зависящей от величины, типа и продолжительности действия рассматриваемой нагрузки.

В настоящей статье излагается методика расчета продольно-поперечного изгиба стержней от длительной нагрузки значительной величины, позволяющая учитывать все указанные выше обстоятельства. Она является обобщением методики расчета стержней на действие большой кратковременной нагрузки, описанной в [1].

1. Рассмотрим шарнирно опертый стержень длиной l , загруженный поперечной нагрузкой $p^0(x)$ и продольными сжимающими силами S , приложенными с эксцентриситетом e_0 в момент времени t_0 . Если податливость сечений такого стержня переменная и зависит не только от положения сечения и уровня действующей нагрузки, но и от возраста материала t_0 и момента наблюдения t , то расчет его сводится к интегрированию следующей краевой задачи ($\tau = (t, t_0, t - t_0)$):

$$y''(x, \tau) = -\{B[M(x, \tau), S, \tau] + B^*[M(x, \tau), S, \tau]S\} \quad (1.1)$$

$$M(x, \tau) = M^0(x) + Sy(x, \tau) \quad M^{0'}(x) = -p^0(x) \quad (1.2)$$

$$y(0, \tau) = y(l, \tau) = 0, \quad M^0(0) = M^0(l) = Se_0 \quad (1.3)$$

В уравнении (1.1) $B[M(x, \tau), S, \tau]$ — основное слагаемое, учитывающее влияние на кривизну изогнутой оси стержня изгибающих моментов, а $B^*[M(x, \tau), S, \tau]$ — дополнительное слагаемое, учитывающее непосредственное влияние на кривизну сжимающих сил S . Оно необходи-

мо для возможности расчета неоднородных (железобетонных) стержней.

Далее полагаем, что

$$y(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau) X_n, \quad \mu^0(x) = \mu_0^{-2} M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 \bar{x}_n, \quad \bar{x} = l_0^{-1} x \quad (1.4)$$

где l_0 , M_0 — произвольные константы, имеющие размерность длины и момента; ρ — безразмерный параметр уровня загрузки; $\beta_n(\tau)$, α_n^0 — безразмерные коэффициенты. С учетом длительного характера деформирования для B и B^* принимаем ($\psi_0(\tau) = 1$):

$$B[M(x, \tau), S, \tau] = \sum_{r=0}^R B_r[M(x, \tau), S] \psi_r(\tau) \\ B^*[M(x, \tau), S, \tau] = \sum_{r=0}^R B_r^*[M(x, \tau), S] \psi_r(\tau) \quad (1.5)$$

где $\psi_r(\tau)$ — характеристики ползучести материала. Заметим, что представление (1.5) дает возможность применять излагаемую методику расчета при использовании различных теорий ползучести.

Аналогично случаю кратковременных нагружений [1] считаем, что

$$B[M(x, \tau), S] = l_0^{-1} M_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{r,n}(\chi) \bar{x}_n [M(x, \tau)], \quad B_r^*[M(x, \tau), S] = \\ = M_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{r,n}^*(\chi) \bar{x}_n [M(x, \tau)], \quad \chi = l_0 M_0^{-1} S, \quad \bar{x} = M_0^{-1} M \quad (1.6)$$

Безразмерные коэффициенты $\gamma_{r,n}(\chi)$ и $\gamma_{r,n}^*(\chi)$ целесообразнее определять с помощью метода наименьших квадратов, дающего хорошее приближение B_r и B_r^* внутри заданного интервала $[\bar{x}_-, \bar{x}_+]$ при любых предельных значениях M_- и M_+ , а в качестве полной системы координатных функций \bar{x}_n использовать полиномы Чебышева первого рода T_n от нормированных \bar{x} .

С учетом (1.6) соотношения (1.5) легко приводятся к следующим выражениям для податливости:

$$B[M(x, \tau), S, \tau] = l_0^{-1} M_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\chi, \tau) T_n[\bar{x}]; \\ B^*[M(x, \tau), S, \tau] = M_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^*(\chi, \tau) T_n[\bar{x}] \quad (1.7)$$

с безразмерными коэффициентами

$$\gamma_n(\chi, \tau) = \sum_{r=0}^R \gamma_{r,n}(\chi) \psi_r(\tau), \quad \gamma_n^*(\chi, \tau) = \sum_{r=0}^R \gamma_{r,n}^*(\chi) \psi_r(\tau) \quad (1.8)$$

Повторяя далее выкладки, подробно описанные для случая действия на стержень кратковременных нагрузок в [1], получаем такие соотно-

шения для определения значений коэффициентов $\beta_n(\tau)$ в выражении (1.4) для прогибов ($p=0, 1, 2, \dots$):

$$\beta_n(\tau) = - \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k(\tau) \tau^{k-1}, \quad \tau = l_0^{-1} l$$

$$\beta_{p-2}(\tau) = \frac{-1}{(p+1)(p+2)} \left\{ \sum_{i=0}^p \theta_i [\beta_n(\tau)] \tau_{p-i} [\beta_n(\tau)] + \theta_i' [\beta_n(\tau)] \tau \right\} \quad (1.9)$$

Здесь

$$\theta_i [\beta_n(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(\chi, \tau) \tau_i^{(k)} [\beta_n(\tau)], \quad \theta_i' [\beta_n(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k'(\chi, \tau) \tau_i^{(k)} [\beta_n(\tau)], \quad i=0, 1, \dots \quad (1.10)$$

и $\tau_{p-i} [\beta_n(\tau)]$ и $\tau_i^{(k)} [\beta_n(\tau)]$ — коэффициенты разложений в степенные ряды функций $M(\chi, \tau)$ и $T_n[\tau]$. Правила их вычисления указаны в [1].

Соотношения (1.9) представляют собой сложную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно искоемых значений коэффициентов $\beta_n(\tau)$. Решение ее может быть выполнено только численно с применением метода последовательных приближений по следующей схеме: для ряда конкретных значений τ_k по опытным или теоретическим данным определяем податливости B и B^* , затем аппроксимируем их с помощью (1.7), определяя коэффициенты разложения $\tau_k(\chi, \tau)$ и $\tau_k'(\chi, \tau_k)$ по (1.8); далее выполняем интегрирование основного уравнения (1.1) путем решения уравнений (1.9) так, как это описано для случая кратковременного действия нагрузки в [1]. В итоге, рассмотрев различные τ_k , получим значения перемещений, величина которых зависит как от уровня приложенных нагрузок, так и от продолжительности их действия.

2. Остановимся подробнее на способах нахождения податливостей B и B^* . Так как для практических расчетов в соотношениях (1.5) обычно достаточно ограничиться только двумя первыми членами, далее речь идет только о коэффициентах B_0, B_1, B_0^*, B_1^* и о характеристике ползучести $\psi_1(\tau)$. Указанные величины определяются для однородных (пластмассовых, металлических) и неоднородных (железобетонных) стержней по-разному.

А. При рассмотрении стержней из пластмасс можно считать, что $B_0^* = B_1^* = 0$, а B_0 и B_1 находить по формулам [2, 3]:

$$B_0 = \{r[M, S]M\}^{-1}, \quad B_1 = (ES)^{-1} \quad (2.1)$$

где r — радиус кривизны стержня, E — модуль упругости материала, J — момент инерции поперечного сечения, ϵ — коэффициент продольного изгиба. Для нахождения $r[M, S]$ необходимо использовать соотношения

$$r^2 \int_{a_0-h_1/r}^{a_0+h_2/r} f(\epsilon) \bar{\tau}(\tau) (1 - \epsilon_0) d\epsilon = M, \quad \int_{a_0-h_1/r}^{a_0+h_2/r} f(\epsilon) \bar{\tau}(\tau) d\epsilon = S \quad (2.2)$$

В (2.2): ϵ_0 —деформация среднего волокна стержня; $h = h_1 + h_2$ — высота сечения стержня; $b = \varphi(z)$ —его ширина; $f(\epsilon)$ —функция, определяющая зависимость между нормальными напряжениями σ и удлинениями ϵ для рассматриваемого материала. В частных случаях, когда $\varphi(z) = \text{const}$ и $f(\epsilon)$ —простого (кусочно-линейно, степенного и т. п.) вида, интегралы (2.2) могут быть взяты в аналитической форме. В более же общих случаях, когда функции $\varphi(z)$ и $f(\epsilon)$ —произвольны, интегралы (2.2) можно найти лишь численно с использованием каких-нибудь квадратурных формул. Порядок вычислений при этом следующий: фиксируем некоторую величину S ; задаемся значением r и подбираем такое значение ϵ_0 , при котором оказывается удовлетворенным второе соотношение (2.2); при заданном r и найденном ϵ_0 вычисляем с помощью первого соотношения (2.2) соответствующую величину M . Повторяя эти действия для ряда значений r , находим зависимость между r и M для фиксированного значения S . С помощью первого соотношения (2.1) переходим к зависимости между B_0 и M .

Характеристика ползучести для пластмассовых стержней может быть принята в виде

$$\psi_1(\tau) = [E_{\text{вр}}(t_0)(1 - m_0)]^{-1} E_{\text{вр}} \left[1 - m_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{вр}}}{\eta_1} \tau\right) \right] \quad (2.3)$$

где $E_{\text{вр}}$ —временный модуль деформаций, который при нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями определяется как произведение касательного модуля и временного деформационного коэффициента $\mu_{\text{вр}}$; m_0 —коэффициент участия вязкой фазы в восприятии внешней нагрузки; η_1 —коэффициент внутреннего трения. Подробно правила вычисления этих величин, а также коэффициента η_1 , изложены в [3].

Б. Для металлических стержней коэффициенты податливости B_0 , B_1 ($B_0' - B_1' = 0$) могут быть вычислены так же, как и для пластмассовых стержней с помощью первого соотношения (2.1) и (2.2). При этом для определения B_0 необходимо использовать в качестве $f(\epsilon)$ кривые мгновенного деформирования материала (при $t = t_0$), а для нахождения величины B_1 целесообразнее всего использовать известные зависимости между напряжениями и деформациями

$$\sigma(\epsilon, \tau) = \bar{f}(\epsilon) \cdot \psi(\tau) \quad (2.4)$$

основанные на предположении о подобии синхронных кривых [4]. В (2.4) $\bar{f}(\epsilon)$ —условные усредненные кривые мгновенного деформирования, учитывающие разброс опытных данных по ползучести на начальных участках деформирования. В качестве характеристики ползучести $\psi_1(\tau)$ берется величина, обратная коэффициенту подобия [4]

$$|\psi(\tau)|^{-1} = 1 + a\tau^b \quad (2.5)$$

Для каждого вида металла постоянные a и b , а также функции $\bar{f}(\epsilon)$ находятся путем обработки кривых ползучести.

В. При расчете железобетонных элементов по наследственной теории старения бетона величины податливостей могут быть вычислены, например, по формулам, приведенным в [5]:

$$\begin{aligned} B_0 &= \{E_b(t_0) J_{red} [1 + \mu \rho_1 \alpha(t_0)]\}^{-1}, \quad B_1 = B_0' = B_1' = 0 \quad \text{при } M \leq M_{кр}, t = t_0 \\ B_0 &= B_1 = [E_b J_{red} (1 + \mu \rho_1 \alpha)]^{-1}, \quad B_0' = B_1' = 0 \quad \text{при } M \leq M_{кр}, t > t_0 \\ B_0 &= [A_s E_s h_0 \alpha(t_0)]^{-1} \psi_s(t_0) + \{[\gamma(t_0) + \xi(t_0)] b h_0^2 \nu(t_0) E_b(t_0) \alpha(t_0) z(t_0)\}^{-1} \psi_b(t_0) \\ B_0' &= -(A_s E_s h_0)^{-1} \dot{\psi}_s(t_0), \quad B_1 = B_1' = 0 \quad \text{при } M > M_{кр}, t = t_0 \\ B_0 &= (A_s E_s h_0 \alpha)^{-1} \psi_s + \{(\gamma + \xi) b h_0^2 \nu E_b \alpha z\}^{-1} \psi_b, \quad B_1 = (A_s E_s)^{-1} \\ B_0' &= -(A_s E_s h_0)^{-1} \dot{\psi}_s, \quad B_1' = -(A_s E_s \alpha z)^{-1} \quad \text{при } M > M_{кр}, t > t_0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

где $E_b(t_0)$, E_b — модули упругомгновенных деформаций стареющего и старого бетонов; $\alpha(t_0)$, α — отношение средних модулей деформации арматуры к модулям упругомгновенных деформаций стареющего и старого бетонов; μ — коэффициент, определяющий армирование; J_{red} — момент инерции приведенного сечения элемента относительно его центра тяжести; b , h_0 — ширина бетонного сечения и расстояние от обобщенного слоя армирования до поверхности бетона; $M_{кр}$ — момент трещинообразования; E_s , A_s — модуль деформации и площадь поперечного сечения арматуры; ρ_1 — параметр геометрии поперечного сечения арматуры; ψ_s , ψ_b — коэффициенты из теории В. И. Мурашевца; ν — коэффициент, учитывающий быстроснабжающую ползучесть сжатой зоны с высотой x^* . В качестве $\psi_1(\tau)$ в этом случае могут быть использованы зависимости

$$\psi_1(\tau) = H_{sc}(\tau) \quad \text{при } M \leq M_{кр}; \quad \psi_1(\tau) = \{[h_0 - x^*(\tau)] z(\tau)\}^{-1} \psi_s(\tau) \quad \text{при } M > M_{кр} \quad (2.7)$$

Здесь $H_{sc}(\tau)$ — коэффициент затухания напряжений в арматуре вследствие ползучести. Правила вычисления остальных величин, входящих в (2.6) и (2.7), указаны в [5, 6].

При использовании нелинейного варианта теории стареющей наследственности Н. Х. Арутюняна — Г. Н. Маслова, распространенной на случай нелинейности упруго-мгновенных деформаций, величины податливости железобетонного стержня могут вычисляться по формулам, приведенным в [7]:

$$\begin{aligned} B_0 &= [\beta_s E_s A_s (q_0 - a')^2]^{-1} + [\beta_s F_s A_s (h_0 - q_0^2)]^{-1} \gamma_s \\ B_1 &= \left[\frac{b x^2}{12} + b x \left(q_0 - \frac{x}{2} \right)^2 \right]^{-1}; \quad B_0' = B_1' = 0 \quad (2.8) \end{aligned}$$

В (2.8): β_s , γ_s — функции нелинейности деформирования растянутой и сжатой арматуры соответственно. В качестве характеристики ползучести при этом используют выражение

$$\psi_1(\tau) = [E_b^{\text{ин}}(\tau)]^{-1} \quad (2.9)$$

где $E_b^{\text{ин}}(\tau)$ — интегральный модуль деформаций [7].

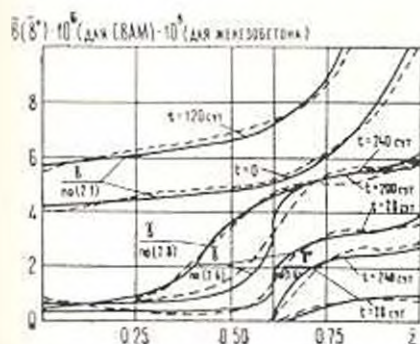
Заметим, что в литературе приводятся различные формулы типа (2.6) — (2.9), позволяющие выполнять нелинейный расчет железобетонных стержней с применением и других теорий ползучести.

3. Для практических расчетов стержней на продольно-поперечный изгиб с учетом длительных деформаций на основе описанного выше алгоритма была составлена специальная программа на языке PL/I для ЭВМ типа ЕС. С ее помощью были выполнены расчеты нескольких серий однородных и неоднородных стержней. В числе однородных рассматривались элементы конструкций из стеклопластика СВМ, алюминиевого сплава Д16-Т и хромоникелевого сплава, а в числе неоднородных — различные железобетонные стержни. Для стержневых элементов из композитных материалов и сплавов принимались прямоугольные, тавровые и двутавровые сечения с моментом инерции $I = (600 \div 4000) \text{ см}^4$; длина стержней подбиралась таким образом, чтобы их гибкость находилась в пределах от 50 до 70. Физико-механические и геометрические параметры железобетонных элементов (прямоугольного сечения) принимались в пределах: $E_b = (27,0 \div 40,0) 10^3 \text{ МПа}$; $R_{b, \text{сж}} = (6,0 \div 22,5) \text{ МПа}$; $R_{b, \text{раст}} = (21,0 \div 34,0) \text{ МПа}$; $l = (100 \div 800) \text{ см}$; $b = (10 \div 50) \text{ см}$; $h = (12 \div 60) \text{ см}$; $\mu = 0,00056 \div 0,0023$; $t_0 = 28 \text{ сут.}$; $t = (t_0 \div 500) \text{ сут.}$ Поперечная нагрузка, действующая на стержень, считалась всегда равномерно распределенной, а продольные силы прикладывались центрально и с эксцентриситетом относительно центра тяжести приведенного сечения величиной $e = h_0^{-1} e_0 = 0,008 \div 0,45$. Параметры поперечной и продольной нагрузок измерялись степенями в пределах: для однородных стержней — $\gamma = 5,0 \div 60,0$; $\chi = 2,0 \div 25,0$; для неоднородных — $\rho = 0,1 \div 5,0$; $\chi = 0,5 \div 30,0$.

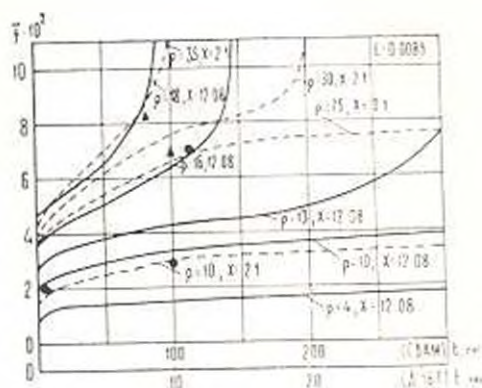
Податливости B_0 , B_1 для пластмассовых и металлических элементов вычислялись по формулам (2.1), (2.2) и (2.4). При этом использовались действительные диаграммы деформирования соответствующих материалов на сжатие и растяжение. Для вычисления интегралов, входящих в (2.2), применялись формулы Симпсона и границий с числом делений интервала интегрирования $[\varepsilon_-, \varepsilon_+]$ $p = 20 \div 40$ (при $t = t_0$) и $p = 100$ (при $t > t_0$) при любых значениях предельных фибровых деформаций ε_- и ε_+ . Податливости B_0 , B_1 и B_0^* , B_1^* для железобетонных стержней определялись по соотношениям (2.6), (2.8).

Функция ползучести принималась в зависимости от вида материала по формулам (2.3), (2.5), (2.7) и (2.9). Количество узловых точек деления интервала $[\varepsilon_-, \varepsilon_+]$ изменялось от 10 до 50; число базисных функций, входящих в выражения (1.7) для суммарных податливостей $B[M(x, \tau), S, \varepsilon]$ и $B^*[M(x, \tau), S, \varepsilon]$, колебалось в пределах от 3 до 5 (большее число членов на этапах значительных пластических деформаций при мгновенном приложении нагрузки и деформаций ползучести).

На фиг. 1 представлены кривые податливостей $B=l_0 M_0 (B_0 + B_1 \psi_1)$ для стержня из стеклопластика СВМ, вычисленные по формулам (2.1), (2.3) и $B, B^* = M_0 (B_0^* + B_1^* \psi_1)$ железобетонного стержня, построенные по соотношениям (2.6), (2.8) (сплошные линии). Из графиков видно, что наличие ползучести приводит к тому, что податливости сечений сжатой изогнутого стержня возрастают со временем, а также то, что с помощью математической модели (1.7) получается достаточно точная их аппроксимация (прерывистые линии) в любой момент наблюдения t .



Фиг. 1

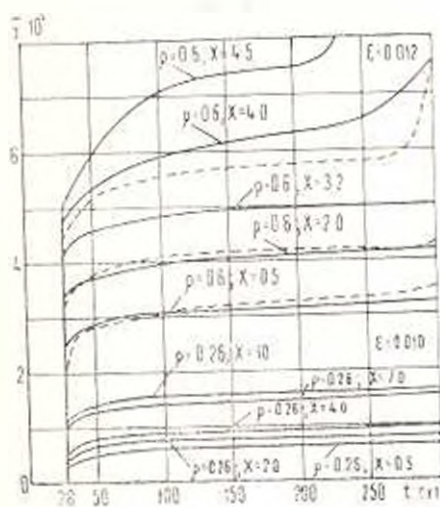


Фиг. 2

На фиг. 2 изображены диаграммы развития во времени безразмерного перемещения среднего сечения $\bar{f} = l_0^{-1} y(l/2, \tau)$ ряда стержней из стеклопластика СВМ (сплошная линия) и алюминосплава Д-16Т (пунктирная линия) при фиксированных продольных силах и различных поперечных нагрузках. Характер кривых говорит о том, что при низких уровнях поперечной нагрузки ($p=4; 10$) влияние продольных сил не заметно. С ростом поперечной нагрузки это влияние становится значительнее, увеличивается скорость деформаций во времени. И наконец, в определенный момент времени при некоторых комбинациях p и S наступает резкое увеличение прогибов, свидетельствующее об исчерпании несущей способности элемента (в смысле резкого увеличения скорости деформирования). Диаграммы, приведенные на фиг. 2, отличаются по характеру для различных материалов, т. к. отражают особенности ползучести каждого из них.

На фиг. 3 приведены кривые $\bar{f}-t$ одного из железобетонных стержней, рассчитанного по соотношениям (2.6) (сплошные линии) и по соотношениям (2.8) (прерывистые линии). Они показывают, как происходит развитие перемещений элемента во времени при двух уровнях поперечной нагрузки $p=0,26; 0,6$ и различных продольных сжимающих силах S . Из этих диаграмм следует, что ползучесть значительно влияет на величину прогибов. Уже при $p=0,26$ через 300 суток с момента загрузки стержня они увеличиваются в 1,5—1,8 раз. При

большей продолжительности действия нагрузки за счет деформаций ползучести зона упругой работы бетона и арматуры уменьшается, увеличивается упругопластическая и пластическая стадия работы конструкций, что приводит к лавинообразному нарастанию перемещений ($\rho = 0,6$; $\chi = 4,5-5,33$). Естественно, что этот эффект увеличивается и с ростом γ .



Фиг. 3

Достоверность описанных выше результатов расчета проверялась сравнением с опытными данными, приведенными в [8, 9]. Эти данные нанесены на фиг. 2 значками: \blacktriangle — опыты И. Г. Торшенова; \bullet — опыты А. Салли. Хорошее совпадение результатов вычислений с опытами позволяет сделать вывод, что с помощью предложенной методики можно выполнить с достаточной точностью подробное исследование поведения различных стержневых элементов при длительном действии на них произвольного сочетания продольных и поперечных нагрузок на всем диапазоне их нагружения.

LONGITUDINAL TRANSVERSE BENDING OF RODS WITH REGARD TO HIGH PHYSICAL NON-LINEARITY AND CREEP

E. O. BLOKH, I. N. SLIZINGER

ՀԱՂԵՐԻ ԸՆԴԱՅՆԱԿԱՆ-ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԵՌՈՒՐԸ ՍՈՎԷՐ ԵՎ ՈՒՅԵՂ
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՈՉ ԳԻՄԱՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՄՈՎ

Ե. Օ. ԲԼՈԽ, Ի. Ն. ՍԼԻԶԻՆԳԵՐ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում շարադրվում է Հողերի հաշվարկման հատուկ մեթոդ՝ բեռնավորման երկարատև ազդեցության դեպքում, որը հաշվի է առնվում կա-

սուրժածքների նյութի լարվածային դեֆորմացիան վիճակի անփոփոխ անանձ-
նահատկություններ, ինչպիսիք են ճարերի անարացումը, ակնթաղային դե-
ֆորմացիան ու զծայնությունը, ձերացումը, անդրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Слезингер И. И., Блох Г. О. Расчет стержней с податливостью, зависящей от нагрузки.—Строительная механика и расчет сооружений, 1985, №4, с. 24—28.
2. Тимошенко С. Л., Гере Дж. Механика материалов.—М.: Мир, 1976. 669 с.
3. Иванов А. М. и др. Применение пластмасс в строительных конструкциях и частях зданий.—М.: Высшая школа, 1965, 290 с.
4. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций.—М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Прокопович И. Е., Зеденидзе В. А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
6. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений.—М.: Стройиздат, 1963. 260 с.
7. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков: Харьковский госуниверситет, 1982. 240 с.
8. Салли А. Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы.—М.: Оборонгиз, 1953. 291 с.
9. Торшечко Н. Г. Ползучесть алюминиевого сплава Д—16Т при сжатии.—ПМТФ, 1961, №6, с. 1021—1026.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
23.11.1988

УДК. 532.516

О НЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА (ЗАДАЧА
ЗОММЕРФЕЛЬДА)

ПЕТРОСЯН Л. Г.

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о смазке цилиндрического подшипника. Получено аналитическое выражение для условия отрыва смазочного слоя от подшипника. Установлено, что при заданной нагрузке условие полной смазки (отсутствии отрыва жидкости) будет выполняться при угловых скоростях меньших (в зависимости от микроструктуры жидкости) по сравнению с результатами классической теории ньютоновской жидкости.

Работа машины, как и их долговечность, экономичность и надежность в значительной степени зависят от конструкции и качества подшипниковых узлов. В новых машинах и механизмах, как правило, проектируются значительный рост скоростей вращающихся деталей, увеличение точности работы вращающихся узлов. В связи с этим, создание подшипников скольжения, удовлетворяющих высоким требованиям, невозможно без дальнейшего развития гидродинамической теории смазки. Поэтому гидродинамическая теория смазки имеет важное и большое значение для народного хозяйства, так как она является основой рационального проектирования подшипников вязкого трения.

Накоплено большое количество результатов, свидетельствующих о том, что на базе классической теории континуума невозможно точно рассчитать характеристики течения некоторого класса жидкостей, в особенности при рассмотрении течения смазки в подшипниках, где величина зазора может быть сравнима с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в смазке [1].

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать не ньютоновские поведения реальных жидкостей*. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а дру-

* К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе [1].

ные—угловые или вращательные движения частиц. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров.

В настоящей статье применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о смазке цилиндрического подшипника.

1. Приближенные уравнения плоскопараллельного течения смазочного слоя

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [1, 2]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu_r \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}] + \vec{f} \quad (1.2)$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c} \quad (1.3)$$

Здесь ρ —массовая плотность жидкости, p —давление, I —скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, \vec{v} —вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ —вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν_r —кинемагическая ньютоновская вязкость, ν_r —кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d , c_a —коэффициенты моментной вязкости, $\frac{d(\dots)}{dt}$ —полная производная по времени, ∇ —пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ —симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ —антисимметричные диады, \vec{f} —вектор массовой силы, \vec{c} —вектор массового момента.

Ограничиваясь анализом двумерного (плоского) установившегося течения жидкости, считая массовые силы и моменты пренебрежимо малыми, сохраняя слагаемые, имеющие наибольший порядок величины, получим дифференциальные уравнения смазочного слоя в случае плоско-параллельного течения в виде [1, 3, 4].

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (\nu_r + \nu_r) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\nu_r \left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь u и v — проекции вектора скорости точки, соответственно на оси x и y ; ω — проекция вектора угловой скорости вращения частицы на ось z .

2. Гидродинамическая теория цилиндрического подшипника

Рассмотрим задачу о смазке цилиндрического подшипника при эксцентричном расположении шипа (шейки), полагая, что смазочное вещество заполняет все пространство между шипом (или цапфой) и подшипником. При этом движение смазки в смазочном слое будем считать плоским. Практически это означает, что мы при расчете не принимаем во внимание то, что длина шипа, охваченного подшипником, конечна.

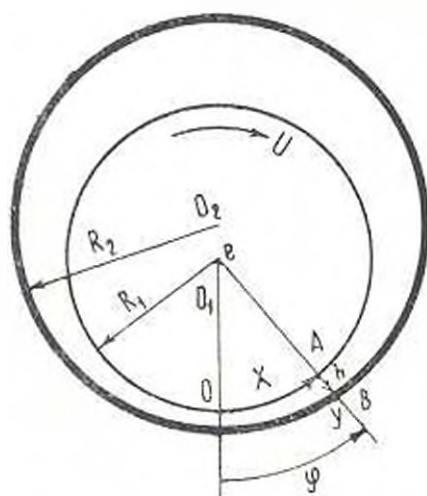
Обозначим радиус шипа R_1 , радиус подшипника R_2 , а переменную толщину слоя смазки между ними h (фиг. 1). Пусть шип (шейка) вращается равномерно по часовой стрелке и пусть линейная скорость на поверхности шипа равна U , причем эксцентриситет $e = O_1O_2$ принимается очень малым по сравнению с радиусами окружностей R_1 и $R_2 > R_1$

$$e \ll R_1, R_2$$

Будем положение любой жидкой частицы в смазочном слое определять криволинейными координатами x и y , где $x = OA$ измеряется вдоль дуги окружности радиуса R_1 , а y отсчитывается от точки A по направлению нормали к окружности. При этом точка O — неподвижная точка, взятая в том месте, где расстояние между шипом и подшипником является наименьшим. Введем центральный угол φ , отсчитываемый от OO_1 в направлении против вращения шипа, тогда $x = R_1\varphi$.

Примем, что толщина слоя смазки h столь мала по сравнению с радиусом шипа R_1 , что криволинейной координатных линий можно пренебречь и считать для течения в смазочном слое справедливыми приближенные уравнения (1.4) — (1.5). Решение задачи в этом приближении для классических ньютоновских жидкостей было дано Зоммерфельдом [5].

Под $h = h(\varphi) = AB$ (фиг. 1) по-



Фиг. 1

имается местная толщина h между подшипником и шипом. Не трудно разыскать из треугольника O_1O_2B . При малом e угол O_1BO_2 близок к нулю и из треугольника O_1O_2B приближенно имеем $R_2 = R_1 + h + e \cos \varphi$.

Вводя в дальнейшем обозначение $R_2 - R_1 = c$, будем с принятой точностью иметь

$$h(\varphi) = c - e \cos \varphi = e(\alpha - \cos \varphi) \quad (2.1)$$

где $\alpha = c/e = 1/\varepsilon$ — обратная величина относительного эксцентриситета. Величина α всегда больше единицы ($1 \leq \alpha < \infty$).

При выбранном начале отсчетов углов φ будет

$$h_{\min} = c - e \quad \text{при} \quad \varphi = 0$$

$$h_{\max} = c + e \quad \text{при} \quad \varphi = \pi$$

Соприкасанию окружностей будет соответствовать значение эксцентриситета $e = c = R_2 - R_1$.

Здесь и далее будем считать $1 \ll R$ смущив.

Уравнения (1.4) и (1.7) могут быть переписаны так:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = (\gamma_r + \gamma_\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\gamma_\tau \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$\gamma_r = \rho r, \quad \gamma_\tau = \rho \tau$$

Граничные условия будут иметь вид

$$u = -U, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = h \quad (2.4)$$

Выражения для скорости u и угловой скорости вращения частиц ω получим из решения уравнений (1.6) и (2.3) при граничных условиях (2.4)

$$u = \frac{1}{\gamma_r R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{N^2 h}{k} \frac{\operatorname{ch} k y - 1}{\operatorname{sh} k h} \right) - U - \\ - C \left\{ y - \frac{N^2}{k} \left[\operatorname{sh} k y - \frac{(\operatorname{ch} k y - 1)(\operatorname{ch} k h - 1)}{\operatorname{sh} k h} \right] \right\} \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{1}{2\gamma_r R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\operatorname{sh} k y}{\operatorname{sh} k h} h - y \right) - \frac{1}{2} C \left(\operatorname{ch} k y - \frac{\operatorname{ch} k h - 1}{\operatorname{sh} k h} \operatorname{sh} k y - 1 \right) \quad (2.6)$$

Здесь

$$k = \frac{N}{l}, \quad N = \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_r + \gamma_\tau} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{c'_o + c'_d}{4\gamma_\tau} \right)^{1/2}, \quad c'_o = \rho c_o, \quad c'_d = \rho c_d$$

а постоянная интегрирования C дается соотношением

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\gamma_r R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{h}{2} - \frac{N^2}{k} \frac{\operatorname{ch} k h - 1}{\operatorname{sh} k h} \right)$$

Для определения давления p обратимся к уравнению неразрывности (2.2). Беря от обеих частей этого уравнения интегралы по y в пределах от 0 до h и принимая во внимание условие (2.4), получим

$$-\int_0^h \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} dy = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h u dy = 0$$

Второе равенство следует из того, что при $y=h$ $u=0$. Подставляя значение u из (2.5) и интегрируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial z} f(N, l, h) \right] = -\frac{1}{2} UR \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad (2.7)$$

где

$$f(N, l, h) = \frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth} \frac{kh}{2} \quad (2.8)$$

Интегрируя вновь, получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{UR \gamma_1}{h^3 f(N, l, h)} (h - h_1) \quad (2.9)$$

где h_1 — постоянная интегрирования.

Из (2.9), интегрируя по φ , будем иметь

$$p(\varphi) = -\frac{1}{2} UR \gamma_1 \left[\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, l, h)} - h_1 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, l, h)} \right] \quad (2.10)$$

Постоянную h_1 , наперед неизвестную, можно исключить из условия периодичности распределения давления

$$p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi)$$

или, в частности, соотношением

$$p(2\pi) = p(0) = 0$$

Это даст

$$h_1 = \frac{f_1(2\pi)}{f_1(2\pi)} \quad (2.11)$$

$$f_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, l, h)}, \quad f_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, l, h)} \quad (2.12)$$

Таким образом, распределение давлений в зазоре подшипника полностью определено. Уровень давления в точке минимального зазора или какой-нибудь другой точке может быть задан произвольно и в выражение поддерживающей силы не войдет.

Тогда для давления будем иметь

$$p(\varphi) = -\frac{1}{2} UR\gamma \left| f_2(\varphi) - \frac{f_1(2\pi)}{f_2(2\pi)} f_1(\varphi) \right| \quad (2.13)$$

где

$$f_2(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^2 f(N, l, h)}, \quad f_1(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, l, h)} \quad (2.14)$$

Безразмерное распределение давлений в зазоре подшипника определяется выражением

$$P(\varphi) = -\frac{1}{2} F_1(\varphi) + QF_2(\varphi) \quad (2.15)$$

где

$$P(\varphi) = \frac{P(\varphi)e^{\frac{1}{2}}}{UR\gamma}, \quad Q = \frac{F_1(2\pi)}{2F_2(2\pi)}, \quad F_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H^2 f(N, L, H)}$$

$$F_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H^3 f(N, L, H)}, \quad f(N, L, H) = \left| \frac{1}{12} + \frac{1}{(LH)^2} - \frac{N}{2LH} \operatorname{cth} \frac{NLH}{2} \right|$$

$$H = \frac{h}{e}, \quad L = \frac{e}{l} \quad (2.16)$$

Найдем результирующую всех сил давления и трения (главный вектор реакции жидкости), действующую на шип. Так как величина e так же, как и h , считается очень малой по сравнению с R , то при вычислении результирующей силами трения можно пренебречь [5].

Относя главный вектор \vec{W} к единице длины вдоль оси подшипника, будем иметь

$$W_{\varphi/2} = W \sin \varphi = R \int_0^{2\pi} p \sin \varphi d\varphi \quad (2.17)$$

для нормальной к линии центров нагрузки $W_{\varphi/2}$ (в расчете на единицу длины шипа) и

$$W_0 = W \cos \varphi = -R \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi \quad (2.18)$$

для компонента нагрузки W_0 , действующей вдоль линии центров (в расчете на единицу длины шипа). Здесь φ — фазовый угол между линией действия нагрузки и линией центров.

Заметим, что в силу периодичности и нечетности давления p второй интеграл тождественно равен нулю.

Интеграл (2.17) проще всего вычислить по частям, найдем

$$W_{\varphi, z} = -R \int_0^{2\pi} p d(\cos \varphi) = -R p \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} + R \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi$$

Из условия периодичности давления неинтегральное выражение обращается в нуль; подставляя вместо $dp/d\varphi$ его выражение из (2.13), получим

$$W_{\varphi, z} = -\frac{1}{2} U R^2 \gamma \left[f_3(2\pi) - \frac{f_1(2\pi)}{f_2(2\pi)} f_4(2\pi) \right] \quad (2.19)$$

или в безразмерной форме

$$W_{\varphi, z}^* = -\frac{1}{2} F_3(2\pi) + Q F_4(2\pi) \quad (2.20)$$

где

$$f_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{h^2 f(N, L, h)}, \quad f_4(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{h^3 f(N, L, h)}, \quad W_{\varphi, z}^* = \frac{W_{\varphi, z} \rho^2}{\gamma L R^2}$$

$$F_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^2 f(H, L, H)}, \quad F_4(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^3 f(N, L, H)} \quad (2.21)$$

Заметим, что в предельном случае $L \rightarrow \infty$ или $N \rightarrow 0$ выражения для давления (2.13) и (2.16) и выражения для нагрузки на шип (2.19) и (2.20) переходят в соответствующие формулы классической гидродинамической теории цилиндрического подшипника.

3. Условие отрыва смазочного слоя от подшипника

Вопрос применимости гидродинамической теории цилиндрического подшипника в случае ньютоновской жидкости, в частности условие отрыва смазочного слоя от подшипника, был рассмотрен Я. С. Лейбензоном [5].

Ниже рассматривается условие отрыва смазочного слоя от подшипника в случае структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений.

Как видно из схемы, показанной на фиг. 1, в области, где $2\pi > \varphi > \pi$ (левая половина смазочного слоя), течение смазочной жидкости происходит в расширяющейся полости, созданной шипом и подшипником, аналогичной плоскому диффузору. Следовательно, можно ожидать, что где-то в этой области может произойти отрыв смазочного слоя от подшипника и возникнуть обратное течение смазочной жидкости. Признаком возникновения отрыва на внешней стенке является обращение в нуль производной $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} = 0$. Подставляя сюда u из (2.5), получим

$$\frac{1}{\gamma R} \frac{\partial p}{\partial z} h^* = - \frac{h^*}{2} \frac{N^2}{k} \frac{U}{\operatorname{ch} k h^* - 1} \frac{1}{\operatorname{sh} k h^*}$$

откуда с помощью (2.9) будем иметь

$$h_1 = h^* \left[1 - \frac{2f(N, l, h^*)}{\frac{1}{2} \frac{N^2}{k h^*} \frac{\operatorname{ch} k h^* - 1}{\operatorname{sh} k h^*}} \right] \quad (3.1)$$

или в безразмерной форме, с учетом (2.11), будем иметь

$$\frac{F_1(2\pi)}{F_2(2\pi)} = H^* \left[1 - \frac{2f(N, L, H^*)}{\frac{1}{2} \frac{N^2}{L H^*} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{L} H^* - 1}{\operatorname{sh} \sqrt{L} H^*}} \right] \quad (3.2)$$

где

$$H^* = \frac{h^*}{e}$$

Выражение для нагрузки на шип (2.20) сводится к выведенным Зоммерфельдом при $N \rightarrow 0$ или $L \rightarrow \infty$ [5]

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow 0}} W_{r/2} = \frac{12\pi\gamma U R^2 z^2}{c^2(1+2z^2)\sqrt{z^2-1}} \quad (3.3)$$

В третьем предельном случае $L \rightarrow 0$ классическое решение умножается на $1/(1-N^2)$

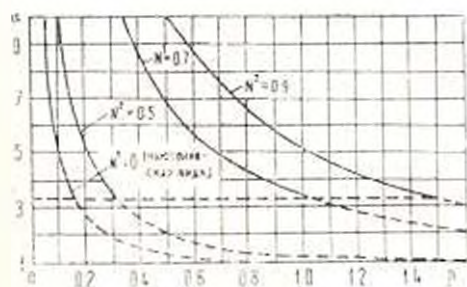
$$\lim_{L \rightarrow 0} W_{r/2} = \frac{12\pi\gamma U R^2 z^2}{c^2(1+2z^2)\sqrt{z^2-1}} \frac{1}{(1-N^2)} \quad (3.4)$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение безразмерный параметр [5]

$$\beta = \frac{W_{r/2} c^2}{12\pi\gamma U R^2} \quad (3.5)$$

Из формул (3.4) и (3.5) видно, что параметры α и β при $L \rightarrow 0$ связаны зависимостью

$$\beta = \frac{\alpha^2}{(1+2\alpha^2)\sqrt{\alpha^2-1}} \frac{1}{(1-N^2)} \quad (3.6)$$



Фиг. 2

На фиг. 2 показаны графики безразмерного параметра β в зависимости от α при различных значениях параметра N . Предельные $L \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$ дают верхнюю и нижнюю границу параметра β .

Выражение для условия отрыва (3.2) сводится к выведенным в [5] условиям при

$N \rightarrow 0$ или $L \rightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow 0}} h^* = \frac{3}{2} h_1 \quad (3.7)$$

где

$$h_1 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3}} \quad (3.8)$$

В третьем предельном случае $L \rightarrow 0$ выражение для условия отрыва (3.2) также сводится к (3.7)

$$\lim_{L \rightarrow 0} h^* = \frac{3}{2} h_1 \quad (3.9)$$

Для вычисления входящих в (3.8) интегралов введем в рассмотрение следующие интегралы:

$$S_k(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(\alpha - \cos\varphi)^k} \quad (k=1, 2, 3)$$

Кроме того, введем обозначения

$$S_1(2\pi, \alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha - \cos\varphi}, \quad S_2(2\pi, \alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha - \cos\varphi)^2}, \quad S_3(2\pi, \alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha - \cos\varphi)^3} \quad (3.10)$$

Выполнив интегрирование при $\alpha > 1$, получим

$$S_1(2\pi, \alpha) = \frac{2\pi}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}, \quad S_2(2\pi, \alpha) = \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}, \quad S_3(2\pi, \alpha) = \frac{\pi(1 + 2\alpha^2)}{(\alpha^2 - 1)^{5/2}} \quad (3.11)$$

Заменим в равенстве (3.8) h его выражением (2.1). Тогда, принимая во внимание обозначения (3.10), с учетом (3.11), получим

$$h_1 = \frac{2e\alpha(\alpha^2 - 1)}{1 + 2\alpha^2} \quad (3.12)$$

Обозначим через φ_1 угол, при котором $h=h_1$. Тогда из (2.1) и (3.12) найдем

$$\cos \varphi_1 = \frac{3\alpha}{1+2\alpha^2} \quad (3.13)$$

Переходя в (3.7) и (3.9) от h к углу φ с помощью равенства (2.1), найдем, что угол φ^* , который определяет место отрыва, дается уравнением

$$\cos \varphi^* = \frac{3}{2} \cos \varphi_1 = \frac{\alpha}{1+2\alpha^2} \quad (3.14)$$

Заменяя в (3.14) $\cos \varphi_1$ его значением (3.13), получим окончательно [5]

$$\cos \varphi^* = -\frac{\alpha^3 - 4\alpha}{1 + 2\alpha^2} \quad (3.15)$$

Таким образом, вышележащая теория является справедливой лишь для тех значений α , при которых отрыв жидкости от неподвижного кольца подшипника вообще невозможен. Так как $\cos \varphi^* \leq 1$, то условием отсутствия отрыва течения служит неравенство

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 1 > 0$$

Многочлен в левой части имеет только один действительный корень α , равный 3.303.

Отсюда находим, что все пространство между шипом и подшипником будет полностью заколено смазкой при условии

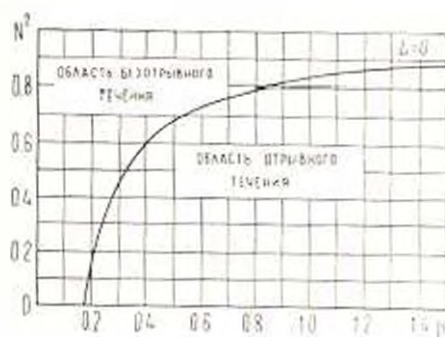
$$\alpha > 3.303 \quad (3.16)$$

что соответствует условию, установленному Л. С. Лейбензоном для классической ньютоновской жидкости.

Для параметра β условие (3.16), в предельном случае $L \rightarrow 0$, дает

$$\beta < \frac{0.153}{(1 - \Lambda^2)} \quad (3.17)$$

На фиг. 2 часть кривых, соответствующих тем значениям α и β , для которых изложенная теория по критерию отрыва неприменима, показаны пунктирами.



Фиг. 3

Фиг. 3 отражает изменение параметра β в зависимости от N для предельного значения $L \rightarrow 0$. График показывает, что увеличению N соответствует возрастание параметра β .

Из условия (3.17) и формул (3.5) и (3.6) следует, что при заданной нагрузке $W_{-1/2}$ условие полной смазки (отсутствие отрыва жидкости) будет выполняться, если Ω угловая скорость вращения шипа будет достаточно велика, то есть если

$$\Omega > \frac{W_{-1/2} c^2}{12\pi\eta R^3} (1 - N^2)$$

Заметим, что это неравенство соответствует предельному значению параметра $L \rightarrow 0$.

ON NON-SYMMETRICAL MODEL OF CYLINDRICAL BEARING HIDRODYNAMIC THEORY (SOMMERFELD PROBLEM)

L. G. PETROSIAN

ԴԱՆԱՅԻՆ ԱՌԱՆՔԱԿԱԼԻ ՀԻՊՈԹԵԶԱԿԱՆ ՏԵՍՏԻՐՈՒՄ
ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԻԼԻ ՄԱՍԻՆ
(ՉՈՄԵՆԵՐՅԵԼԻԿ ԽՆԴԻՐԸ)

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա. մ. փ. փ. ո. լ. մ.

Դիսանալիս առանցքակալի յուղման խնդրի լուծման համար ոգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման թենզորով կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը: Առանցքակալի յուղման շերտի պոկման պայմանի համար ստացված է անալիտիկ արտահայտություն: Պարզված է, որ տրված ժանրաբնույթով թյան դեպքում լրիվ յուղման պայմանը (հեղուկի պոկման բացակայություն) աեղի կունենա, նյութունյան հեղուկի դասական տեսության արդյունքների համեմատությամբ, ավելի փոքր անկյունային արագությունների դեպքում (կախված հեղուկի միկրոկառուցվածքից):

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л. Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
2. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. О неизоэнтальной модели несимметричных жидкостей.—Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1967. № 5, с. 132—136.
3. Петросян Л. Г. Элементарная гидродинамическая аналогия прокатки (Моментная теория).—Проблемы машиностроения, 1981, вып. 13, с. 38—42.
4. Петросян Л. Г. Моментная гидродинамическая теория прокатки.—Прикладная механика, 1982, т. 18, № 4, с. 116—121.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
6.VII.1987