

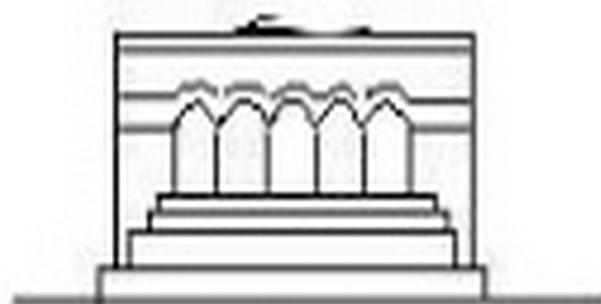
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1989

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВОЛНЫ МОДУЛЯЦИИ
В ПЛАСТИНЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

БАГДОВЕ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Волны модуляции в физике и гидродинамике изучены достаточно хорошо [1, 2]. Сравнительно недавно начались исследования нелинейных волн модуляции для пластин и оболочек. Как известно [3], такие волны неустойчивы в материалах типа металлов.

В настоящей работе рассматриваются две задачи для проводящей пластины и непроводящей цилиндрической оболочки с магнитной жидкостью и показано стабилизирующее влияние магнитного поля на волны модуляции. Задачи решаются в геометрически линейной постановке. Принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

1. *Вывод уравнения модуляции для пластинки с конечной проводимостью.* Пусть имеется квазимонохроматическая волна, распространяющаяся в проводящей пластине, которая находится в продольном магнитном поле $H_0(H_0, 0, 0)$. Материал пластинки — нелинейно упругий [4]. Уравнение движения пластинки с учетом нелинейности [4] имеет вид [5, 6]

$$D \left[\Delta^2 w + \frac{4h^2}{45} \gamma_{21} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xz}^+ + \sigma_{xz}^-) - \\ - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^-) - (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left[K_z + \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} \right) z \right] dz \quad (1.1)$$

Ось x направлена по нормали к невозмущенной плоской волне, в силу чего в нелинейных членах оставлено слагаемое, содержащее лишь дифференцирование по x . В (1.1) обозначения такие же, как и в [3, 5].

Объемная сила Лоренца определяется формулой $K = \frac{1}{4\pi} (\text{rot } h \times H_0)$, а магнитное поле $H = H_0 + h$, и имеет место

$$K_x = 0, \quad K_y = \frac{H_0}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right), \quad K_z = \frac{H_0}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

Уравнение индукции в пластине дает

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (H_0 \nabla) v - H_0 \text{div } v + \sigma_m \Delta h \quad (1.3)$$

где $v = \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, -z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right)$ — скорость частицы, ν_m — магнитная вязкость ($\nu_m = c^2/4\pi\sigma$, σ — электропроводность, c — скорость света).

Уравнение (1.3) в проекциях дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_x}{\partial t} &= -H_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} + \nu_m \Delta h_x \\ \frac{\partial h_y}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} + \nu_m \Delta h_y \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial v_z}{\partial x} + \nu_m \Delta h_z\end{aligned}\quad (1.4)$$

В диэлектрической среде (вне пластины) уравнения модуляции имеют вид

$$\operatorname{div} h' = 0, \quad \operatorname{rot} h' = 0 \quad (1.5)$$

Решение (1.1) и (1.4) ищется в виде

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{2} (Ae^{i\tau} + \text{к. с.}), \quad \tau = \alpha x + \beta y - \omega t, \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2 \\ h_x &= \frac{1}{2} (\bar{h}_x e^{i\tau} + \text{к. с.}) \operatorname{sh} \lambda z, \quad h_y = \frac{1}{2} (\bar{h}_y e^{i\tau} + \text{к. с.}) \operatorname{sh} \lambda z \\ h_z &= \frac{1}{2} (\bar{h}_z e^{i\tau} + \text{к. с.}) \operatorname{ch} \lambda z\end{aligned}\quad (1.6)$$

а (1.5) —

$$h_j = \frac{1}{2} (\bar{h}_j e^{i\tau + k z} + \text{к. с.}), \quad (j = x, y, z), \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (1.7)$$

Удовлетворяя условиям на поверхностях $z = \pm h/2$ — $h_j = h_j^*$, получим

$$\bar{h}_x = \mp \frac{2i\alpha}{kh} \bar{h}_z, \quad \bar{h}_y = \mp \frac{2i\beta}{kh} \bar{h}_z, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2k}{h}} \quad (1.8)$$

Оставляя в (1.1) члены основного порядка по kh и учитывая (1.2) и (1.4), получим

$$\begin{aligned}\bar{h}_z [(i^2 + k^2)\nu_m - i\omega] &= \alpha\omega H_0 A \\ K_z &= \frac{iH_0^2}{4\pi\sigma} \left(1 + \frac{2}{kh}\right) \bar{h}_z e^{i\tau}\end{aligned}\quad (1.9)$$

и следующее дисперсионное уравнение

$$D \left(k^2 + \frac{h^2}{15} \gamma_{12} A^2 k^3 e^{2i\tau} \right) - 5h\omega^2 = \frac{ih}{2k\pi} \frac{H_0^2 \omega}{2k\nu_m - i h \omega} \quad (1.10)$$

Следует отметить, что для идеального проводника $\nu_m = 0$ и (1.10) совпадает с уравнением, полученным в [6], где правая часть (1.9) равна нулю в выбранном порядке, а $\epsilon_{22} = \epsilon_{11}$ дает этот же вклад в дисперсионное уравнение.

Принимая, что для металлов $\nu_m \sim 10^3$ см²/сек, для частот $\omega_0 > 10^3$ сек⁻¹ можно (1.10) записать в виде

$$\omega = \omega_0 + \frac{Dh}{30\epsilon\omega_0} \gamma_2 \gamma_1 A^2 k^2 e^{2i\omega t} - \frac{i}{2} \frac{H_0^2 \nu_m}{\pi \epsilon h^2 \omega_0^2} \quad (1.11)$$

$$\omega_{||} = \frac{D}{\rho h} k^4 + \frac{H_0^2}{2\pi \epsilon h} \frac{z^4}{k}$$

Пользуясь полученным уравнением, можно изучить нелинейную задачу устойчивости волн.

Для получения уравнения модуляции огибающих волн можно в (1.11) заменять ω , z и ∂ соответственно на $i\partial/\partial t$, $-i\partial/\partial x$ и $-i\partial/\partial y$, при этом считая, что ось x нормальна к невозмущенной волне и поэтому ∂ мало ($k \approx \alpha + i\beta/2\alpha$). Тогда можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W + \frac{D}{30} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{5}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) W - \\ & - i \frac{H_0^2}{2\pi \epsilon h} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t} + D_1 |W|^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t} e^{2i\omega t} + \\ & + D_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) W = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{где } W = Ae^{i\omega t}, \quad D_1 = \frac{h}{15\epsilon} \gamma_2 \gamma_1 D, \quad D_2 = \frac{H_0^2 \nu_m}{\pi \epsilon h^2}$$

Уравнение модуляции можно записать еще иначе, относя решение к волне линейной задачи, эйконал которой $\tau = \alpha x - (\omega_0 + i\omega_2)t$ и полагая

$$W = Be^{i\tau} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.12) и оставляя члены с производными до второго порядка от B , можно получить дисперсионное уравнение (1.11), затухание

$$\omega_2 = -\frac{D_2 \alpha^3}{2\omega_0} \quad (1.14)$$

и уравнение модуляции

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_0}{\partial x} - 2i \left(\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{2}{x} \right) \omega_2 \right] - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \left(i \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + X \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (2\omega_2 + i\omega_0) Y + \\ & + \frac{i}{2\omega_0} \frac{\omega_2 + i\omega_2}{\omega_0 + 3i\omega_2} D_2 B |B|^2 e^{2i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$X = \frac{\omega_2}{\pi^2 \rho^2 H^2 \omega_0^2} (28 D^2 \pi^2 x^2 + 17 D \pi H_n^2 x^3 + 1,5 H_0^2)$$

$$Y = \frac{1}{2 \rho h \omega_0} \left(\frac{H_0^2}{4\pi} - 2 D x^3 \right)$$

2. Исследование на модуляционную устойчивость. Для исследования на устойчивость (1.15) полагаем $B = a \exp(i\varphi)$ и отделяем вещественные и мнимые части. Затем, полагая $a = a_0 + a'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, где a_0 и φ_0 — параметры основной волны, а a' и φ' — малые возмущения, можно получить линейную систему уравнений. Хотя коэффициент при нелинейном члене (1.15) содержит множитель $\exp(2\omega_2 t)$, в силу малости диссипации решение уравнений можно искать в виде квазиплоских волн

$$\varphi' = \Phi \exp(i\theta), \quad a' = A \exp(i\theta), \quad \theta = x'x + \beta'y - \Omega t \quad (2.1)$$

Тогда полученное дисперсионное уравнение для частоты волн модуляции имеет вид

$$\gamma^3 + 2M\gamma - N = 0$$

$$\gamma = -i\Omega + i \frac{d\omega_0}{dx} a' + \frac{1}{2} X(x')^2 - 2Y\omega_2(\beta')^2 \quad (2.2)$$

$$2M = 3D_1 a_0^2 x^2 e^{2\omega_2 t} \frac{\omega_2}{\omega_0^2}, \quad N = Z \left(M \frac{\omega_0}{\omega_2} - Z \right)$$

$$Z = 2i \left(\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - \frac{2}{x} \right) \omega_2 x' + Y\omega_0(\beta')^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} (x')^2$$

Устойчивость волн модуляции имеет место при $\text{Im} \Omega < 0$.

а) Поперечная устойчивость ($x' = 0$). В этом случае (2.1) дает

$$\Omega - 2iY\omega_2(\beta')^2 = i \left(-\frac{3}{2} \frac{D_1 a_0^2}{\omega_0^2} \omega_2 x^2 e^{2\omega_2 t} \pm i\sqrt{\frac{2}{x}} \right) \quad (2.3)$$

$$\partial = M \frac{\omega_0}{\omega_2} Y(\beta')^2 - Y^2 \omega_0^2 (\beta')^4$$

где удержаны малые порядка ω_2 .

В случае $\omega_2 = 0$ устойчивость соответствует полям

$$(\beta')^2 > \frac{3D_1}{2\omega_0^2 Y} a_0^2 x^2 \quad (2.4)$$

которые заведомо выполняются при $Y > 0$.

При $\omega_2 = 0$ и при выполнении (2.4) из (2.3) следует, что

1) при $Y < 0$ $\text{Im} \Omega > 0$ и волны неустойчивы

2) при $Y > 0$ $\text{Im} \Omega < 0$ и волны устойчивы.

Таким образом, для $Y > 0$ как в недиссипативном ($\omega_2 = 0$), так и в диссипативном ($\omega_2 \neq 0$) случаях имеется устойчивость, как и при адиабатическом приближении.

В остальных вариантах волны неустойчивы относительно поперечных возмущений.

б) При рассмотрении продольной устойчивости следует полагать $\beta' = 0$ и выражение для Ω будет

$$\Omega = \frac{\partial \omega_0}{\partial x} x' - \frac{i}{2} X(x')^2 - iM + iV \bar{\delta}$$

$$\bar{\delta} = Z \left(\frac{3}{2} \frac{D_1}{\omega_0} a \lambda a^6 - Z \right) \quad (2.5)$$

При $\omega_2 = 0$ волны устойчивы для $\delta < 0$, что заведомо выполнено для адиабатического случая [6] и при

$$H_0^2 > 4D_1^2(4 + 3\sqrt{2}), \quad -D_1 \frac{d^2 \omega_0}{dx^2} < 0 \quad (2.6)$$

При $\omega_2 \neq 0$ можно показать, что как и для вязкоупругой пластинки [7], волны модуляции неустойчивы.

3. *Конвективная и абсолютная устойчивость волны.* Помимо обычной модуляционной устойчивости представляет интерес также изучение устойчивости волн модуляций при заданных начальных условиях, то есть абсолютной и конвективной устойчивостей [9]. В силу крайней сложности вопроса ограничимся случаем $\omega_2 = 0$, тогда из (2.2) получится

$$\Omega^2 = a_0^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 J + \frac{1}{4} J^2 \quad (3.1)$$

где

$$J = \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} (x')^2, \quad \frac{\partial \omega}{\partial a^2} = \frac{D_1 x^2}{2\omega_0}$$

В отличие от обычной устойчивости при изучении конвективной устойчивости следует вводить подвижную систему координат $x' = x - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} t - Ut$, где U — некоторая скорость. В новой системе в (3.1)

следует Ω заменить на $\Omega - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} x' - Ux'$. Волны в подвижной системе неустойчивы, когда выполнено условие $d\Omega/dx' = 0$, то есть в точках перегиба, в которых ветви функции $F_1(\Omega) = F_2(\Omega)$, где обозначено

$$F^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} (x')^2, \quad Q^2 = 2a_0^2 \left| \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right|, \quad U' = \frac{x'}{k} U \quad (3.2)$$

Тогда можно получить экстремальные значения F и U

$$F^2 = \frac{3}{2} Q^2, \quad U'_{\max/\min} = \pm 2\sqrt{2} Q \quad (3.3)$$

$$U_{\text{min}} = \pm 4a_0 \bar{U}, \quad \bar{U} = \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}}$$

Волны неустойчивы в смысле конвективного в интервале скоростей

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x} - \bar{U} < \frac{x}{t} < \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \bar{U} \quad (3.4)$$

Волны будут неустойчивы в абсолютном смысле, когда (3.4) охватит ось t . При этом

$$a_0^2 > \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x^2} \right) / 8 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right| \quad (3.5)$$

4. *Цилиндрическая оболочка с магнитной жидкостью.* Пусть бесконечная цилиндрическая оболочка, внутри которой движется идеальная, несжимаемая магнитная жидкость со скоростью v_0 , находится в продольном магнитном поле H_0 . Уравнения одномерного движения системы жидкость-оболочка будут [10, 11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \rho_0 \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial h x}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \rho_0} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2}{R} v_0 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{T_1}{R} + T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_R = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{16G\gamma_3 h}{27} \left[2A_1 \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1^2 + \frac{1}{4} x_1^2 h^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + A_1 B_1 \varepsilon_2 \left(3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{h^2}{4} x_1^2 \right) + (2A_1^2 + B_1^2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right] \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + \frac{16G\gamma_3 h}{27} \left[2A_1^2 \varepsilon_1^2 + (2A_1^2 + B_1^2) \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h^2}{12} x_1^2 \right) + A_1 B_1 \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2 + \frac{h^2}{4} x_1^2 \right) \right] \\ M_1 &= Dx_1 + \frac{4G\gamma_3 h^2}{81} \left[6A_1^2 x_1 \left(\varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{20} x_1^2 \right) + 6A_1 B_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 + (2A_1^2 + B_1^2) \varepsilon_2^2 x_1 \right] \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad x_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad A_1 = \frac{1-\nu+\nu^2}{1(1-\nu)^2}, \quad B_1 = \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2} \end{aligned}$$

Полагая $T_2=0$, можно ε_1 выразить через ε_2 и x_1 и подставлять в T_2 и M_1 . Тогда уравнение движения оболочки запишется только через w .

Давление на оболочку от жидкости p_R определяется из

$$p_R - \Pi_{Rn} = p - \Pi_{Rn} - \rho_0 \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial v}{\partial \rho_0} H_0 \quad (4.2)$$

Здесь $H_z = H_0 + h_z$, $H = h$, и компоненты тензора Максвелла

$$\Pi_{rr} = \frac{1}{8\pi} (H_r^2 - H_z^2), \quad \Pi_{rz} = \frac{H}{8\pi} [(H_r)^2 - (H_z)^2]$$

где штрих относится к жидкости.

Полагая $p_R = p_R^0 + p'$, $p = p_0 + p'$ в линейном приближении для возмущений, получим

$$p_R + \frac{1}{4\pi} H_0 h_z = p' + \frac{H}{4\pi} H_0 h'_z - \rho_0 \frac{H_0 h'_z}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \rho_0} \quad (4.3)$$

Для замыкания системы (4.1) кроме (4.2) следует решать также уравнения Максвелла для непроводящей магнитной жидкости [11]

$$\text{rot } H' = 0, \quad \text{div}_v H' = 0, \quad r < R \quad (4.4)$$

и вне ее

$$\text{rot } H = 0, \quad \text{div } H = 0 \quad (4.5)$$

Поскольку жидкость несжимаемая, то $\mu = \mu(\rho_0) = \text{const.}$

Обозначая $h_x = \partial \psi / \partial x$, $h_r = \partial \psi / \partial r$ и решая уравнения Лапласа для ψ и ψ' после удовлетворения граничным условиям

$$\mu \left(\frac{\partial \psi'}{\partial r} - H_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial r} - H_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (4.6)$$

при $r = R$ можно получить

$$h'_x = \frac{(1-\mu)K_0(m)I_0(zr)H_0 a^2}{\mu K_0(m)I_1(m) + I_0(m)K_1(m)} \cos \tau, \quad m = Ra \quad (4.7)$$

При выводе (4.6) было принято, что

$$w = a \cos \tau \quad (4.8)$$

Для получения дисперсионного уравнения представим ψ и p также в виде (4.8)

$$\psi = b \cos \tau, \quad p = d \cos \tau \quad (4.9)$$

Тогда из (4.1) и (4.2) получим

$$\bar{\rho} \omega^2 - \frac{4\rho_0 v_0}{m} \omega - \bar{D} = 0 \quad (4.10)$$

$$\bar{\rho} = \rho h + \frac{2\rho_0}{R^2 a^2}, \quad \bar{D} = D_3 + D_4 a^2$$

$$D_3 = D_2 a^2 + \frac{Eh}{R^2} + T_0 a^2 - \rho_0 \left(\bar{H} + \frac{2v_0^2}{R} \right), \quad D_4 = \frac{12CD}{h^2}$$

$$\bar{H} = - \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0} \frac{K_0(m)I_0(m)z(1-1)^2}{I_1(m)K_0(m) + I_0(m)K_1(m)}$$

$$C = \gamma_2 \left| \frac{\gamma_1 h^2 x^2}{180} + \frac{u}{9R^4} (1+\nu)^4 (1-\nu) + \frac{h^2 x^4}{9R^3} \times \right. \\ \left. \times \frac{1-2\nu+4\nu^2-3\nu^4-2\nu^5+2\nu^6}{(1-\nu)^2} \right|$$

Для больших скоростей движения v_0 из (4.10) получится наличие флаттера при

$$\frac{2\bar{\rho}}{R h \bar{\rho}} v_0^2 > \frac{1}{\rho_0} \left(D x^4 + \frac{E h}{R^2} + T_0 x^2 \right) - \bar{H} \quad (4.11)$$

Приведем некоторые численные оценки для кровеносного сосуда [12, 13] ($R=10 h$, $T_0=0.3 E h$, $E=7 \cdot 10^5$ Па, $\gamma_0=0.96$, $x h=0.5$).

При отсутствии магнитного поля согласно (4.11) флаттер будет при $v_0 \approx 7$ м сек⁻¹, что с точностью до порядков совпадает с [14]. В то же время, как видно из (4.11), наличие средних магнитных полей может приводить к устранению флаттера.

Из (4.10) можно получить

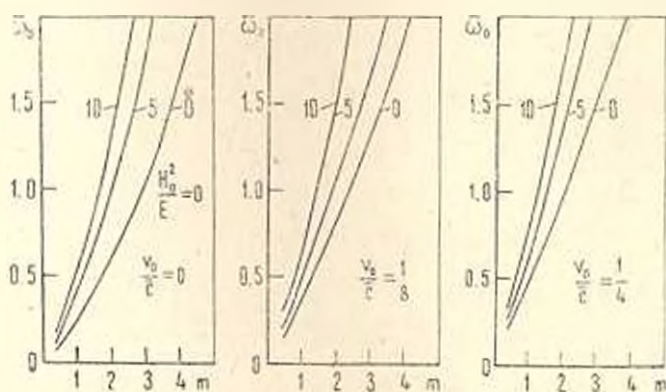
$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 = D_1 \left(2 \rho_0 \bar{\rho} + \frac{4 \rho_0 v_0}{m} \right) \quad (4.12)$$

Согласно [14] для биологических сред $\gamma_2 > 0$, следовательно, $(\partial \omega / \partial a^2)_0 > 0$.

Условие устойчивости волн модуляции имеет вид $\omega_0' (\partial \omega / \partial a^2)_0 > 0$. Для выражения ω_0 из (4.10) имеем

$$\omega_0 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{2 \rho_0 v_0}{m} + \sqrt{\bar{\rho} D_3 + \frac{4 \rho_0^2 v_0^2}{m^2}} \right) \quad (4.13)$$

Для определения знака $\omega_0'(\alpha)$ были произведены вычисления для вышеприведенной оболочки при $\mu=2$ при различных $v_0/\bar{c}$, ($\bar{c}=\sqrt{E/\rho}$) и H_0^2/E . На фиг. 1 по оси абсцисс отложено m , и по оси ординат — безразмерная частота $\bar{\omega}_0 = 10 \omega_0 h/\bar{c}$.



Фиг. 1

Как видно из приведенных кривых, для реальных биологических сред $\omega_0 > 0$ и так как $(\partial \omega / \partial a^2)_0 > 0$, то имеется модуляционная устойчивость. Однако, как показано в [3] (при $v_0 = H_0 = 0$), $\omega_0 < 0$ для малых $T_0 E h$ и при очень малых m . Разлагая (4.13) в ряд по m , можно получить, что $\omega'' < 0$, когда

$$\frac{v_0}{c} > \frac{\rho}{2\rho_0} \left| \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \frac{\rho_0 h H}{E}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2\rho_0 h}{\rho R} + \left(\frac{2\rho_0}{\rho}\right) \frac{T_0}{E h} + \frac{\rho_0 h}{E} H \left(1 - \frac{2\rho_0 R}{\rho h}\right)} \right|$$

Модуляционная неустойчивость для $H_0 = 0$ получается при $v_0 \bar{c} = 0,65; 0,44$ соответственно для $T_0 E h = 0,3; 0,15$.

Таким образом, магнитное поле в задачах флаттера и модуляционной устойчивости играет стабилизирующую роль.

ABOUT INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD ON THE MODULATION WAVES IN PLATE AND CYLINDRICAL SHELL

A. G. BAGDOEV, I. A. MOVSISIAN

ԱՆԼՈՒՄ ԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՈՒՄ ՄՈԴՈՒԼԱՅԻՈՆ ԱՎԵՔՆԵՐԻ ՎՐԱ ՄԱԳՆԵԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱՋԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դուրս է բերված երկայնական մագնիսական դաշտում վերջավոր հաղորդականությամբ ոչ դժային առաձգական սալի մոդուլացիայի հավասարումը: Ուսումնասիրված է մագնիսական մածուցիկության ազդեցությունը մոդուլացիայի ալիքների կայունության վրա, ինչպես և կոնվեկտիվ ու բացարձակ կայունությունները:

Շարժվող մագնիսական հեղուկով զանաչին թաղանթի համար գիտարկված է արագության և մագնիսական դաշտի ազդեցությունները ֆլատերի և մոդուլացիայի ալիքների վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Карман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 612 с.
3. Bagdov A. G. and Movsisian I. A. Some problems of stability of Propagation of Non-Linear Waves in shells and Plates. — Int. J. Non-Linear Mechanics, 1984, vol. 19, № 3, pp. 245—253.

4. Каудерер Г. Нелинейная механика, М.: ИД, 1961, 777 с.
5. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белибекян М. В. Магнитоупругости тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
6. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, т. 35, №1, с. 16—22.
7. Ambartsumian S. A., Belubekian M. V. and Minassian M. M. On the problem of Vibration of Non-Linear Elastic electroconductive plates in Transverse and Longitudinal Magnetic fields.—Int. J. Non-Linear Mechanics, 1984, vol. 19, № 2, pp. 141—149.
8. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. 34, №2, с. 3—9.
9. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний.—ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 148—153.
10. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
11. Гогогов В. В., Палетова В. А., Шпошников Г. А. Гидродинамика немагнитизирующихся жидкостей.—Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. Т. 16. М.: 1981. 210 с.
12. Кокс Р. Г. Сравнение моделей артериального движения крови, основанных на линеаризованных теориях распространения волн. В кн.: Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971, с. 43—60.
13. Энлайнер М., Раман К. Р. Звуки Короткоза при диастоле как явление динамической неустойчивости оболочек. В кн.: Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971, с. 61—88.
14. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
(16.XII.1987

УДК 539.3

МАГНИТОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ТЕЛ,
СЛУЖАЩИХ ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ТОКА

БЕЛУБЕКЯН М. В., КАЗАРЯН К. Б.

Вопросы неустойчивости упругих токонесущих конструкций, обусловленной взаимодействием электрического тока с собственным магнитным полем, являются новыми в области механики твердого деформируемого тела. Эти исследования, являющиеся частью научного направления—теории магнитоупругости, получили отдельное развитие в силу широкого использования токонесущих упругих элементов конструкций в современной технике. Упругие конструкции с током применяются, в частности, в магнитах, создающих сильные магнитные поля, для исследовательских целей в физике высоких энергий; в устройствах типа «Токамак»; в магнитогидродинамических генераторах для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую; в транспортных устройствах на магнитной подушке.

Теоретические исследования по неустойчивости упругих конструкций, в основном, относятся к модельным конструкциям типа тонких стержней, пластин и оболочек. Настоящая работа является обзором, имеющихся в научной литературе исследований по устойчивости тонкостенных систем. Наш обзор не претендует на полное приведение всех работ по этой тематике, но мы по крайней мере старались изложить в достаточной мере современное положение дел в этой новой тематике. В научной литературе имеются обзоры [5, 24, 32, 39] по общим вопросам теории магнитоупругости, которые затрагивают также и исследования, интересующие нас.

1. К первому исследованию по устойчивости токонесущего твердого тела следует отнести работу Леонтовича М. А., Шафранова В. Д. [25] (1958), в которой для гибкого стержня без учета его жесткости показано, что собственное магнитное поле вызывает неустойчивость по отношению формы проводника. Задача решалась в рамках модели идеального проводника (ток считался поверхностным) и малости искажения формы. Показано, что прямой проводник с током неустойчив при любых значениях силы тока. Исследовано также влияние внешнего продольного магнитного поля, приводящего к стабилизации проводника.

В работах Долбина Н. Н. (1962), Долбина Н. Н. и Морозова А. Н. (1966) [18, 19] обобщены результаты работы [25] на случай, когда

учитываются упругие силы (жесткость) стержня. Получено дисперсионное уравнение, определяющее зависимость фазовой скорости длинноволновых изгибных колебаний упругого стержня с поверхностным током. Для стержней с круговым и эллиптическими сечениями получены критические значения силы тока, превышение которых приводит к потере упругой устойчивости.

Прудников В. В. (1968) в работе [29] рассмотрел задачу колебаний стержня с поверхностным током при наличии вне стержня однородного постоянного продольного магнитного поля. Получено дисперсионное уравнение и рассмотрены случаи продольных и изгибных колебаний. Изучено влияние внешнего магнитного поля. В работе [30] Прудников В. В. (1972) изучил вопрос колебаний идеально-проводящего упругого стержня с током, находящегося в идеально-проводящей цилиндрической жесткой трубе, когда между трубой и стержнем имеется продольное магнитное поле. Показано, что наличие идеально-проводящей стенки трубы повышает устойчивость длинноволновых изгибных волн.

В работе [15] Вандакурова Ю. В. и Колесниковой Э. В. (1967) исследована устойчивость конечно-проводящего упругого стержня с однородно-распределенным током, когда принимаются во внимание индукционные токи, обусловленные подвижностью упругого тела [3]. Рассмотрен случай плохой проводимости, позволяющий не рассматривать решения уравнений Максвелла. На основе численного анализа дисперсионного соотношения изучены условия возникновения неустойчивости. Полученные в работе выводы сравниваются с экспериментальными данными, в частности, работы [1], где изучены механизмы разрушения металлической проволоки при пропускании через нее импульса тока большой плотности.

Для конечно-проводящего стержня, когда ток равномерно распределен по толщине в работе [35] Chattopadhyay S., Moon F. C. (1975) теоретически и экспериментально показано существование неустойчивости. Получена следующая аналитическая формула относительно критической силы тока, превышение которой приводит к потере упругой устойчивости (в системе СИ):

$$\mu_0 J_0^2 = \frac{4 - k^2 GE}{\ln(2kr) - 1,327} \quad (kr \ll 1) \quad (1.1)$$

В (1.1) μ_0 —магнитная проницаемость вакуума, J_0 —сила тока, E —модуль упругости, G —момент инерции, k —волновое число, r —радиус поперечного сечения. Для медного стержня с параметрами $E = 8,7 \cdot 10^{10}$ Па, $r = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 0,66$ м (L —длина стержня) критическая сила тока равна $J_{0к} \approx 4086$ а.

В формуле (1.1) при замене числовой постоянной на 1,077 получается результат работы [19] для стержня с поверхностным током.

В работе [34] Chattopadhyay S. (1979) предложил вариационный метод для исследования магнитоупругой устойчивости токонесящих конструкций. Предложенный метод был использован к задаче для

упругого стержня с током и было проведено сравнение с результатами работы [35].

Ряд экспериментов по устойчивости токонесущих упругих стержней и колец выполнены в работах [40, 41] Moon F. S., Swanson C. (1977, 1979).

В исследованиях [31, 36, 37, 42], представленных на международный симпозиум по электромагнитомеханическому воздействию деформируемых твердых тел и конструкций (Токио, 1986), обсуждены вопросы устойчивости и колебаний: сверхпроводящих упругих колец с током [31], системы упругих колец соленоидального сверхпроводящего магнита [36], токонесущей «бессиловой» цилиндрической оболочки [37], линии (упругой нити) передачи электрического тока при токах короткого замыкания [42].

Исследованию вопроса устойчивости токонесущих упругих стержней во внешнем магнитном поле посвящены работы [37, 22] (1985, 1986). Для стержней со слабым током (без учета явления неустойчивости, обусловленного самовоздействием тока с собственным магнитным полем) изучен вопрос пространственной потери устойчивости при наличии внешнего магнитного поля неизменного направления. Исходя из общих нелинейных уравнений статики пространственно-криволинейных стержней с учетом следящих сил Ампера, обусловленных взаимодействием тока с внешним магнитным полем, рассмотрены конкретные задачи устойчивости. Для прямого стержня с круговым сечением, когда внешнее магнитное поле параллельно току, получено следующее уравнение устойчивости (в системе СИ) [37]:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} = i a_0 \frac{dw}{dx}, \quad a_0 = 4 J_0 B_0 l^3 / \Lambda E r^4 \quad (1.2)$$

В (1.2) $\bar{w} = u + iv$; $u(x)$, $v(x)$ — нормальные изгибные перемещения стержня в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, L — длина стержня, E — модуль упругости, r — радиус сечения, $i = \sqrt{-1}$; J_0 — сила тока, B_0 — магнитная индукция. При различных граничных условиях найдены критические значения силы тока. Для медного стержня с параметрами $L = 0,66$ м, $r = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 0,87 \cdot 10^{11}$ Па получены следующие критические значения для силы тока $J_{0*} = 80$ а, для индукции магнитного поля $B_{0*} = 2,71$ Т.

Для упругого токонесущего кольца, находящегося во внешнем поперечном или осевом продольном магнитном поле, получены критические значения силы Ампера в случаях, как плоской деформации (ось стержня остается плоской кривой), так и пространственной деформации (ось стержня становится кривой двойкой кривизны) [22]. Рассмотрена также задача устойчивости плоской формы изгиба прямого стержня прямоугольного сечения вытянутой формы, когда направления тока и внешнего магнитного поля взаимно-перпендикулярны [22].

2. Устойчивость упругих прямоугольных токонесущих пластин исследована в основном в работах [3, 4, 8—12, 16, 17] (1974—1986).

Постановку задачи устойчивости токонесящих пластин кратко можно сформулировать следующим образом.

Отнесем пластинку к декартовой системе координат (x, y, z) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпадала с плоскостью (x, y) . Пусть по пластинке течет по направлению оси x электрический ток с плотностью $j_{0x} = \text{const}$. Для бесконечной пластинки собственное магнитное поле в области, занимаемой пластинкой, имеет вид $H_{0z} = -4\pi/c \cdot j_{0x}z$. (c —электродинамическая постоянная).

Поведение токонесящей пластинки описывается следующими линейризованными уравнениями:

а) уравнения равновесия (в отношении пластинки принимается гипотеза Кирхгофа)

$$D\Delta^2 w = \int_{-d}^d \left[R_z + z \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right) \right] dz \quad (2.1)$$

б) уравнения Максвелла в области, занимаемой пластинкой (в гауссовой системе единиц)

$$\text{rot} \bar{h} = \frac{4\pi}{c} \bar{e}; \quad \text{div} \bar{h} = 0; \quad \text{rot} \bar{e} = 0; \quad \text{div} \bar{e} = 0 \quad (2.2)$$

в) уравнения Максвелла в областях вне материала пластинки

$$\text{rot} \bar{h}^{(s)} = 0; \quad \text{div} \bar{h}^{(s)} = 0; \quad \text{div} \bar{e}^{(s)} = 0; \quad \text{rot} \bar{e}^{(s)} = 0 \quad (2.3)$$

г) уравнение, связывающее вектор плотности ponderomotorной силы $\bar{R}$ с возмущениями электромагнитного поля $\bar{h}, \bar{e}$

$$\bar{R} = \frac{1}{c} (\bar{j}_0 \times \bar{h}) + \frac{z}{c} (\bar{e} \times \bar{H}_0) \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.1)—(2.4) вектор $\bar{h}$ и вектор $\bar{e}$ есть возмущения магнитного поля и электрического поля, вызванные изменением формы (деформации) срединной плоскости пластинки, D —жесткость на изгиб, σ —коэффициент электропроводности, Δ —оператор Лапласа.

Уравнения (2.1)—(2.4) связаны между собой посредством нелинейных граничных условий на поверхностях пластинки $z = \pm d$ ($2d$ —толщина пластинки)

$$(\bar{j} \cdot \bar{n}) = 0; \quad \bar{H} = \bar{H}^{(s)} \quad (2.5)$$

где $\bar{j} = \bar{j}_0 + z\bar{e}$; $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$; $\bar{H}^{(s)} = \bar{H}_0^{(s)} + \bar{h}^{(s)}$, $\bar{n}$ —вектор внешней нормали к поверхностям пластинки, $\bar{n} = \text{grad}(\varpi - z)/|\text{grad}(\varpi - z)|$.

При выводе искомого уравнения устойчивости упругие возмущения и возмущения электромагнитного поля, обусловленные изменением первоначальной формы пластинки принимаются малыми. После линеаризации граничных условий (2.5) решение поставленной задачи можно привести с достаточной точностью к решению следующего уравнения

$$D\Delta^2 w = \frac{8\pi d j_0^2}{c^2} w \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6), полученное для бесконечной прямоугольной пластинки, позволяет ее использование с определенной точностью для пластин конечных размеров. В работах [11, 16] получены значения критической плотности тока для пластин конечных размеров при различных граничных условиях. В частности, для алюминиевой шарнирно-опертой пластинки-полосы с толщиной 0,2 см и шириной 20 см критическая плотность тока равна $j_{0*} \approx 3,53$ кА/см².

В уравнениях (2.1) — (2.4) не приведены индуцированные электромагнитные поля, обусловленные подвижностью (скоростью) упругого тела [3], учет которых не существен при определении критических параметров неустойчивого состояния.

Устойчивость трехслойной пластинки с током, когда внешние токонесущие слои разделены диэлектриком, исследована Григоряном Б. В. (1986) [17].

В работе [7] (1973) изучен вопрос колебаний и устойчивости консольной пластинки-полосы с достаточно слабым током (эффект самовоздействия не учитывается), находящейся во внешнем поперечном магнитном поле. Получено соответствующее значение критической силы Ампера, превышение которой приводит к потере упругой устойчивости. Экспериментальное исследование устойчивости такой пластинки проведено в работе [28] (1974) Овакимяном Р. Н. и др., результаты которой хорошо согласуются с теоретическими результатами работы [7]. В работах [21], (1984) и [23] (1986) продолжены исследования по устойчивости токонесущей пластинки-полосы во внешнем поперечном магнитном поле в случае, когда торцы пластинки неподвижны в тангенциальном направлении [21], а также, когда материал пластинки является кусочно-однородным [23].

Исследование влияния внешнего продольного магнитного поля на устойчивость токонесущей пластинки проведено в работах [6] (1983), [33] (1984). Показано, что наличие внешнего магнитного поля приводит к существенной стабилизации пластинки. В частности, для медной пластинки-полосы шириной 40 см и толщиной 0,1 см внешнее магнитное поле напряженностью $H_0 = 10^3$ э приводит к увеличению критической плотности тока в два раза.

3. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки с током впервые было проведено Овакимяном Р. Н. (1969) в работе [26]. Для цилиндрической оболочки, по направлению образующих которой течет поверхностный электрический ток, была показана возможность потери упругой устойчивости, обусловленной начальным кольцевым сжимающим усилием, вызванным собственным магнитным давлением. Для цилиндрических оболочек с поверхностным током было в дальнейшем исследовано явление флаттера [2] (1970), устойчивость системы коаксиальных оболочек [27] (1979).

В работе [20] (1974) рассмотрена задача колебаний и устойчи-

ности цилиндрической оболочки в случае, когда по образующим оболочки течет равномерно распределенной по толщине объемный электрический ток. Показано, что индуцированные электромагнитные поля, обусловленные подвижностью (скоростью) упругой оболочки не влияют на критическую плотность электрического тока. В дальнейшем, опираясь на результаты работы [20] в рамках статического подхода в работах [14] (1982), [13] (1984), была изучена устойчивость цилиндрических оболочек с объемным однородным током, текущим вдоль образующих [14], а также с объемным током, текущим по направлению дуги направляющей окружности (соленоидальная оболочка) [13].

Для этих двух случаев протекания тока уравнения устойчивости можно записать в виде

$$1/\Delta^4 w + \frac{2Ed}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - (-1)^m \frac{8\pi R d^2 j_{cm}^2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} (\Delta^2 w) - \frac{8\pi j_{cm}^2 d}{c^2} \Delta^2 w = 0 \quad (3.1)$$

В (3.1), помимо принятых здесь обозначений, α — координата вдоль образующей, β — координата вдоль дуги направляющей окружности; $m=1; 2$ (для соленоидальной оболочки $m=2$). Подчеркнутое слагаемое в (3.1) обусловлено начальным усилием, которое для соленоидальной оболочки является растягивающим. На основе уравнения (3.1) получены критические значения плотности для шарнирно-опертой оболочки, при различных соотношениях геометрических параметров оболочки. В частности, для медной оболочки толщиной $2d=0,2$ см при соотношениях $R/L=0,2$; $R/d=200$ получены соответствующие критические значения плотности тока: $j_{c1} \approx 1,4$ кА/см², $j_{c2} \approx 7,9$ кА/см². Для оболочек с соленоидальным током показано, что, если $R < 20d$, то оболочка не теряет устойчивости. Для таких оболочек начальное растягивающее усилие является преобладающим и оно с увеличением тока может привести к механическому разрушению оболочки. В работе [38] (1987) предложена одна математическая модель «бессиловой» цилиндрической оболочки с неоднородным током, когда вектора плотности электрического тока и собственного магнитного поля коллинеарны. Такая оболочка в начальном недеформируемом состоянии свободна от электромагнитной нагрузки, так как начальная сила Ампера равна нулю. Определено начальное распределение по толщине оболочки продольного и окружного тока и соответствующее им распределение магнитного поля. Изучаемая оболочка генерирует в своей внутренней области продольное магнитное поле, а во внешней области — окружное магнитное поле. Показано, что возмущенное состояние упругой оболочки неустойчиво вследствие возникновения поперечных электромагнитных сил. Для полной силы тока получено критическое значение, соответствующее шарнирно-опертой оболочке

$$\frac{R_c}{c^2} = \frac{4\pi^2 E}{(2+\gamma)(\pi-2)^2 3(1-\gamma^2)} \frac{d^2 R^3}{L^2} \quad (3.2)$$

(γ — коэффициент Пуассона).

В частном случае, для медной оболочки с параметрами $d/L = 1/500$, $R = 5$ см имеем $I_{0*} \approx 9,4$ ка. Продольное магнитное поле вне материала оболочки равно $H_0 \approx 3,71$ Т.

В заключении обзора в связи с последними открытиями высокотемпературной сверхпроводимости в металлооксидных керамиках мы хотим указать на важность и перспективность исследований по механической прочности и устойчивости сверхпроводящих композиционных тонких тел. Очевидно, что методы и подходы, развитые для тонких электропроводящих тел с током, могут быть успешно применены и при рассмотрении тонких тел из новых сверхпроводящих материалов.

MAGNETOELASTIC STABILITY OF THIN BODIES USED FOR ELECTRICAL CURRENT TRANSPORTATION

M. V. BELUBEKIAN, K. B. KAZARIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ՏԵԳԱՓՈԽՄԱՆՔ ԾԱՌԱՅՈՂ ԲԱՐԱԿԻ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵԻՍԱԿԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿԻԱՆ, Կ. Բ. ԿԱԶԱՐԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այնպիսիներով բերված է գիտական զրականության մեջ եղած էլեկտրական հոսանքով առաձգական բարակապատ կառուցվածքների կայունությանը վերաբերող հետազոտությունների տեսությունը

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамова К. Б., Ваницкий В. П., Вандачуров Ю. В., Златин Н. А., Перегуд Б. П. Магнитогазродинамические неустойчивости при электрическом взрыве.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 4, с. 779—781.
2. Агеев А. Н., Киселев М. И., Овочкин Р. Н. О флаттере токонесущей оболочки.— Ж. технической физики, 1970, т. 40, в. 6, с. 1159—1160.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.— М.: Наука, 1977, 272 с.
4. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесущей пластинки-полосы.— В кн.: Труды X Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси: 1975. Тбилиси: «Мецниереба», 1975, т. 2, с. 3—10.
5. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Взаимодействие проводящих оболочек и пластин с электромагнитным полем.— В сб.: Механика. Ереван, Изд. ЕГУ, 1982, в. 1, с. 5—22.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К задаче устойчивости токонесущей пластинки, В сб.: Тр. Всес. конференции по теории пластин и оболочек, ч. I, Таллин, 1983, с. 25—28.
7. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле.— Докл. АН Арм. ССР, 1973, т. 57, № 5, с. 276—281.

8. Белубекян М. В. К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 3—12.
9. Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН Арм. ССР, 1975, т. 28, № 2, с. 22—30.
10. Белубекян М. В. О некоторых особенностях задач магнитоупругости токонесущих пластин.—Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. 61, № 2, с. 76—81.
11. Белубекян М. В. О статической устойчивости токонесущей пластинки.—Докл. АН Арм. ССР, 1982, т. 74, с. 208—212.
12. Белубекян М. В. К задаче колебаний и устойчивости пластин с переменным электрическим током.—В сб.: Механика, Ереван, Изд. ЕГУ, 1983, в. 3, с. 59—67.
13. Белубекян М. В., Григорян Б. В., Казарян К. Б. Магнитоупругая устойчивость соленоидальной токонесущей цилиндрической оболочки.—В сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван, Изд. ЕГУ, 1984, с. 36—40.
14. Белубекян М. В., Казарян К. Б. Выпучивание цилиндрической оболочки, служащей для транспортировки электрического тока.—В сб.: Механика, Ереван, Изд. ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 38—43.
15. Вандакурова Ю. В., Колесникова Э. Н. Устойчивость твердого проводящего цилиндра в магнитном поле протекающего по нему тока.—Ж. технической физики, 1967, т. 37, в. 11, с. 1984—1992.
16. Григорян Б. В. К вопросу обоснования уравнения статической устойчивости токонесущей пластинки.—В сб.: Механика, Ереван, Изд. ЕГУ, 1986, вып. 4, с. 197—203.
17. Григорян Б. В. Устойчивость трехслойной токонесущей пластинки.—В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Изд. АН Арм. ССР, 1986, с. 107—114.
18. Долбин Н. И. Распространение упругих волн в токопроводящем стержне.—Ж. прикладной механики и технической физики, 1962, № 2, с. 207—213.
19. Долбин Н. И., Морозов А. П. Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током.—Ж. прикладной механики и технической физики, 1966, № 3, с. 97—103.
20. Казарян К. Б. Колебания и устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 40—57.
21. Казарян К. Б. Об одной задаче устойчивости токонесущей пластинки-полосы во внешнем магнитном поле.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 26—30.
22. Казарян К. Б. О пространственном выпучивании упругих стержневых токопроводов во внешнем магнитном поле.—В сб.: Математические методы и физико-механические поля. Изд. «Наукова Думка», 1986, № 23, с. 56—60.
23. Казарян К. Б., Белубекян М. В. К задаче устойчивости кусочно-однородной токонесущей пластинки во внешнем магнитном поле.—В сб.: Механика неоднородных структур. Материалы I Всесоюзной конференции. Изд. «Наукова Думка», 1986, с. 3—8.
24. Кудрявцев Б. А., Парток В. З. Магнитотермоупругость.—В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.—М.: Изд. ВИНТИ, 1981, т. 14, с. 3—59.
25. Леонтович М. А., Шафранов В. Д. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле.—В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций.—М.: Изд. АН СССР, 1958, т. 1, с. 207—213.
26. Овакимян Р. Н. Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. 22, № 4, с. 59—67.
27. Овакимян Р. Н. Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек.—Изд. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
28. Овакимян Р. Н., Косакян Ю. И., Мартиросян Р. М. Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 6, с. 68—73.

29. Прудников В. В. Упругие колебания стержня с током в продольном магнитном поле.—Ж. прикладной механики и технической физики, 1968, № 1, с. 168—172.
30. Прудников В. В. Магнитоупругие волны в токопроводящем стержне, находящемся в цилиндрической трубе.—Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1972, № 5, с. 123—129.
31. A. A. F. Van De Ven. Magnetoelastic Buckling of Ferromagnetic and Superconducting Structures.—Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. Proceeding of the INTAM Symposium—Amsterdam, North-Holland, 1987.
32. Ambartsumyan S. A. Magnetoelasticity of Thin Plates and Shells.—Appl. Mech. Rev. 1982, v. 35, № 1, p. 1—5.
33. Belubekyan M. V. The Vibration and Stability of Current-carrying plate in an external magnetic field. —The Mechanical Behavior of Electromagnetic solid continua. Proceedings of the IUTAM-IUPAP Symposium. —Amsterdam, North-Holland, 1984.
34. Chattopadhyay S. Magnetoelastic Instability of Structures carrying Electric Current.—Int. Jour. Solids and Struct. 1979, v. 15, № 6, p. 467—475.
35. Chattopadhyay S., Moon F. C. Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current.—Jour. Appl. Mech. 1975, v. 42, p. 809—814.
36. Hara K., Moon F. C. Internal Buckling and Vibration of Solenoid Magnets for High Fields.—Electromechanical Interactions in deformable solids and Structures. Proceedings of the IUTAM Symposium.—Amsterdam, North-Holland, 1987, p. 69—74.
37. Kazarian K. B. Magnetoelastic Stability of a Current-carrying Rod in an External Magnetic Field.—Engineering Transactions. 1985, v. 33, № 3, p. 277—283.
38. Kazarian K. B. Magnetoelastic Stability of a Current-carrying cylindrical Shell.—Electromechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. Proceedings of IUTAM Symposium.—Amsterdam, North-Holland, 1987, p. 33—37.
39. Moon F. S. Problems in Magnetosolid Mechanics.—Mechanics Today, Pergamon Press, 1978, v. 4, p. 307—390.
40. Moon F. S., Swanson C. Experiments on Buckling and Vibration of Superconducting coils.—Jour. of Appl. Mech., 1977, v. 44, № 4, p. 707—713.
41. Moon F. C. Experiments on Magnetoelastic Buckling in a Superconducting Torus.—Jour. Appl. Mech., 1979, v. 46, № 1, p. 145—150.
42. Neumann U. Mechanical Vibrations in Transmission Lines due to Short Circuit Currents.—Electromechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. Proceedings of IUTAM Symposium.—Amsterdam, North-Holland, 1987, p. 87—92.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.V.1988

УДК 624.15.042.072.233.5.8

СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО ШТАМПА НА МНОГОСЛОЙНОМ, НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

ДАРВИНЯН С. С., **ОГАНЕСЯН М. В.**, САРГСЯН А. Е.

Пусть в цилиндрической системе координат (r, α, x_3) задана неоднородная слоистая среда с плоскопараллельными границами разделов неоднородных слоев с упругими параметрами λ, μ, ρ (фиг. 1)

$$H_{n-1} < x_3 < H_n = \sum_{k=1}^n h_k \quad (1)$$

где $H_0 = 0$, $h_{n+1} \rightarrow \infty$, $h_n > 0$

На границах разделов смежных слоев, а также при $x_3 = H_n$ между n -м слоем с полупространством $x_3 > H_n$ существуют условия полного прилипания:

$$[\dot{U}_{3j}^{(n)} - \dot{U}_{3j}^{(n+1)}]_{x_3=H_n} = 0 \quad (2)$$

$$[\sigma_{3j}^{(n)} - \sigma_{3j}^{(n+1)}]_{x_3=H_n} = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n; j=1, 3)$$

Для удобства здесь и далее учтены следующие обозначения:

$$U_{1j} = U_{rj}, \quad \sigma_{31(j)} = \sigma_{3r(j)} \quad (3)$$

Пусть на поверхности $x_3 = 0$, в условиях полного прилипания лежит круглый штамп с радиусом $r = a$ [1, 7], с заданными смежными граничными условиями с основанием:

$$\begin{aligned} U_{3(3)}^{(n)}(r, 0, t) &= U_{3(3)}^{(n)}(t) & \text{при } |r| \leq a \\ \sigma_{31(j)}^{(n)}(r, 0, t) &= 0 & \text{при } r \leq \infty \\ \sigma_{33(j)}^{(n)}(r, 0, t) &= 0 & \text{при } r > |a| \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно из граничных условий (4), имеем дело с краевой задачей со смешанным граничным условием на границе $x_3 = 0$.

* Оганесян М. В. погиб во время землетрясения в г. Левинкакане 7 декабря 1988 г.



Фиг. 1. Расчетная схема круглого штампа на многослойном, неоднородном основании.

Предполагается, что источник первичных волн в заданном виде упругих потенциалов находится в полупространстве $x_3 > H_n$ и помещен в точке $(0, \bar{H}_n)$ [3, 5].

В условиях сейсмического воздействия в среде, (1) наряду с источником сейсмических волн, при взаимодействии с основанием круглый штамп становится новым источником волн.

Следовательно, общее волновое поле можно представить как сумму двух волновых полей, возбуждаемых источником первичных сейсмических волн без присутствия круглого штампа на поверхности $x_3 = 0$ и волнового поля, которое возбуждается штампом, расположенным на поверхности $x_3 = 0$:

$$\begin{aligned} U_{j(\gamma)}^{(1)}(r, x_3, t) &= U_{j(\gamma)}^{(0)}(r, x_3, t) + U_{j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, t) \\ z_{3j(\gamma)}^{(1)}(r, x_3, t) &= z_{3j(\gamma)}^{(0)}(r, x_3, t) + z_{3j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, t) \end{aligned} \quad (5)$$

Поле перемещения и напряжения $U_{j(\gamma)}^{(0)}$ и $z_{3j(\gamma)}^{(0)}$ в декартовых координатах было определено в работах [3, 5], поэтому мы здесь их будем считать известными величинами.

Для определения полей напряжений и перемещений, возбуждаемых круглым штампом в основании (1), воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\begin{aligned} z_{3j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_{3j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, k_4) \exp(ik_4 t) dk_4 \\ U_{j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, k_4) \exp(ik_4 t) dk_4 \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$z_{3j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, k_4) = \int_0^a \bar{z}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{z}_{3j(\gamma)}(r - \xi_1, x_3, k_4) d\xi_1 \quad (7)$$

$$\bar{U}_{j(\gamma)}^{(3)}(r, x_3, k_4) = \int_0^a \bar{z}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{j(\gamma)}^*(r - \xi_1, x_3, k_4) d\xi_1 \quad (8)$$

$$(j=1,3; \gamma=1,2,\dots,n+1)$$

Здесь $\bar{z}_{3j(\gamma)}(r - \xi_1, k_4, x_3)$ — спектры напряжения по времени, вызванные в точке (r, x_3) под действием сосредоточенной гармонической силы единичной амплитуды, направленной перпендикулярно к границе $x_3 = 0$, и помещенной по окружности в точках $(\xi_1, 0)$; $\bar{U}_{j(\gamma)}^*(r - \xi_1, x_3, k_4)$ — спектры перемещения по времени, вызванные напряжениями $\bar{z}_{3j(\gamma)}(r - \xi_1, x_3, t)$.

Из граничного условия (4) и (8) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{3(1)}^*(r - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(2)}(r, 0, k_4) \quad (9)$$

где $\bar{U}_{3(1)}^{(1)}(r, 0, k_4)$ — спектры перемещения поверхности $x_3=0$ без присутствия штампа; $\bar{U}_{3(1)}^{(2)}$ представляет собой сейсмические воздействия, является произвольной гладкой функцией по времени и определяется как в [3] при $x_3=0$, $\nu=1$.

Если пока считать, что функция Грина $\bar{U}_{3(1)}^*$, которая также под- лежит определению для данной задачи, известна, то в уравнение (9) входят два неизвестных $\bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}$ и $\bar{U}_{3(1)}^{(1)}$. Следовательно, для замыкания необходимо иметь еще одно независимое уравнение.

Это уравнение мы получим из условий динамического равновесия штампа массой M :

$$2\pi \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4) r dr = MK_4^2 \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) \quad (10)$$

Отметим, что вне штампа общее перемещение $U_{3(1)}^{(1)}(x_1, x_2, t)$ будет произвольная изменяющаяся функция как по времени, так и по пространственным координатам. Волны разного типа, возникающие в процессе распространения и взаимодействия на небольшом расстоянии, вне штампа затухают и остается перемещение произвольного типа после взаимодействия.

Уравнения (9) и (10) составляют замкнутую систему, из решений которых определяются спектральные функции контактных напряжений и общее перемещение штампа.

$$\int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{3(1)}^*(r - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(2)}(r, 0, k_4) \quad (11)$$

$$2\pi \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4) r dr = MK_4^2 \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4)$$

Учитывая, что ядро интегральных уравнений $\bar{U}_{3(1)}^*$ в общем случае имеет сложный вид, систему интегральных уравнений целесообразно решать по методу коллокаций, что позволяет систему интегральных уравнений движения сооружения, записанную в изображениях Фурье, свести к системе алгебраических уравнений [2].

Разобьем область контакта штампа с основанием по направлению r отдельных L количеств круглых полос с внутренними r_{l-1} и r_l радиусами и предположим, что функция, определяющая значения спектров контактных напряжений $\bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4)$, может быть аппроксими-

дована ступенчатой функцией по координате r , сохраняющей постоянное значение $\bar{\sigma}_{33(l)}^{(3)l}$ в пределах каждой полосы $l=1, 2, \dots, L$.

Будем считать, что контактные условия выполняются не по всей подошве штампа, а лишь в некоторых сосредоточенных кругах каждой полосы, имеющей координаты r_f ($f=1, 2, \dots, L$).

Тогда вместо системы интегральных уравнений (11) получим систему $L+1$ алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^L \bar{\sigma}_{33(i)}^{(3)l} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \bar{U}_{3(i)}^*(r_f - \xi_1, 0, k_3) d\xi_1 = \bar{U}_{3(i)}^{(1)}(k_3) - \bar{U}_{3(i)}^{(2)}(r, 0, k_3) \quad (12)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^L \bar{\sigma}_{33(i)}^{(3)l} \Delta r_i = Mk_3^2 \bar{U}_{3(i)}^{(1)}(k_3)$$

где

$$\Delta r_i = r_{i-1} - r_i, \quad r_0 = 0$$

Систему (12) можем переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^L \bar{\sigma}_{33(i)}^{(3)l} \bar{\phi}_{f,i}^*(k_3) - \bar{U}_{3(i)}^{(1)}(k_3) = -\bar{U}_{3(i)}^{(2)}(r_f, 0, k_3) \quad (13)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^L \bar{\sigma}_{33(i)}^{(3)l} \Delta r_i = Mk_3^2 \bar{U}_{3(i)}^{(1)}(k_3)$$

где

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \bar{U}_{3(i)}^*(r_f - \xi_1, 0, k_3) d\xi_1 = \bar{\phi}_{f,i}^*(k_3) \quad (14)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_l = \bar{\sigma}_{33(l)}^{(3)l}(k_3), \quad (l=1, 2, \dots, L)$$

$$Z_{L+1} = \bar{U}_{3(i)}^{(1)}(k_3) \quad (15)$$

$$B_f = \bar{U}_{3(i)}^{(2)}(r_f, 0, k_3); \quad B_{L+1} = 0, \quad (f=1, 2, \dots, L)$$

$$b_{f,l} = \bar{\phi}_{f,i}^*(k_3), \quad b_{f,L+1} = -1 \quad (f, l=1, 2, \dots, L)$$

$$b_{L+1,l} = \Delta r_l, \quad b_{L+1,L+1} = -Mk_3^2, \quad (l=1, 2, \dots, L)$$

С учетом (15) определяется спектр контактных напряжений и общее перемещение круглой плиты, а из выражений (6) и (7) определяется напряженно-деформированное состояние неоднородного многослойного основания круглой плиты.

Уравнения (13) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{L+1} b_{f,i} Z_i = B_f, \quad (f=1, 2, \dots, L+1) \quad (16)$$

Для решения (16) запишем его в матричной форме:

$$[b_{j,l}][Z_l] = [B_j], \quad (j, l = 1, 2, \dots, L+1) \quad (17)$$

Так как элементы матрицы $[b_{j,l}]$ в (17) нам известны приближенно, то есть имея вместо матрицы $[b_{j,l}]$ матрицу $[\bar{b}_{j,l}]$, в общем случае мы не можем высказать определенного суждения о вырожденности или невырожденности системы (17). Очевидно, что такая ситуация имеет место в случаях, когда матрица $[b_{j,l}]$ имеет достаточно близкие к нулю собственные значения.

Поскольку вместо точной системы (17) при $\Delta r_l \rightarrow 0$ мы имеем приближенную систему $[\bar{b}_{j,l}][Z_l] = [B_j]$, и вычисление обычно производится с конечной точностью ($\Delta r_l \neq 0$), то здесь речь может идти только о нахождении приближенного решения (17). При этом эти решения должны быть устойчивыми к малым изменениям исходных данных (17).

В основе таких методов лежит идея «отбора», изложенная в работе [9].

Для общности рассмотрим случай, когда точно заданы как правая часть $[B_j]$, так и матрица $[b_{j,l}]$, то есть пусть вместо системы уравнений (17) при $\Delta r_l \rightarrow 0$, с нормальным решением $[Z_l]^0$, мы имеем систему

$$[\bar{b}_{j,l}][Z_l] = [\bar{B}_j]$$

Здесь

$\|[\bar{b}_{j,l}] - [b_{j,l}]\| \leq \delta$; $\|[\bar{B}_j] - [B_j]\| \leq h$; $[\bar{b}_{j,l}]$ и $[\bar{B}_j]$ — соответственно значения $[b_{j,l}]$ и $[B_j]$ при $\Delta r_l \rightarrow 0$. Требуется найти векторы $[Z_l]$, $\gamma = (h, \delta)$ такие, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \| [Z_l]_{\gamma} - [Z_l]^0 \| = 0$$

Их можно находить путем минимизации сглаживающего функционала

$$M^2\{[Z_l], [\bar{B}_j], [\bar{b}_{j,l}]\} = \|[\bar{b}_{j,l}][Z_l] - [\bar{B}_j]\|^2 + \alpha \| [Z_l] \|^2, \quad (\alpha > 0)$$

подробно изложенная в [9].

В случае, если матрица $[b_{j,l}]$ имеет равные нулю собственные значения, среди методов решения (17) можно применить и метод замены уравнения (17), близким ему [9]:

$$([b_{j,l}] + \alpha_1 [E])[Z_l] = [B_j] \quad (18)$$

где $\alpha_1 > 0$ — выбранный числовой параметр; $[E]$ — единичная матрица.

Решение уравнения (18) в этом случае записывается в виде

$$[Z_l] = ([b_{j,l}] + \alpha_1 [E])^{-1} [B_j]$$

В заключение рассмотрим методику определения ядра $U_{\alpha(1)}^*$ в (11). Для этого рассмотрим решение следующей задачи, относящейся

к плоскому деформированному состоянию. Пусть в плоскости $x_3=0$, ограниченной упругим неоднородным основанием (1) по направлению оси x_3 , действует вертикальная нагрузка

$$\tau_{31(1)}(r, 0, t) = p(r)e^{-ik_1 t} \text{ и } \tau_{31(1)}(r, 0, t) = 0 \quad (19)$$

Для определения перемещений $U_{j(1)}$ и напряжений в этой осесимметричной задаче воспользуемся потенциалами $\varphi_1(r, x_3, k_1)$ и $\psi_2(r, x_3, k_1)$, удовлетворяющими волновым уравнениям

$$\square_1^2 \varphi_1 = 0, \quad \square_2^2 \psi_2 = 0 \quad (20)$$

где

$$\square_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\square_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Тогда они выражаются следующими формулами [8]:

$$U_{11}^* = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad U_{21}^* = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{\psi_2}{r} \quad (21)$$

$$\tau_{31(1)} = p a_2^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial x_3} + \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (22)$$

$$\tau_{32(1)} = p a_2^2 \left[\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial x_3} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right]$$

На смежных границах различных сред основания (1) считаем, что заданы условия полного прилипания:

$$|U_{j(\nu+1)}^* - U_{j(\nu)}^*|_{x_3=H_\nu} = 0 \quad (23)$$

$$|\tau_{3j(\nu+1)} - \tau_{3j(\nu)}|_{x_3=H_\nu} = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, n+1; \quad j=1, 3)$$

Решение волновых уравнений (20) для многослойной среды (1) с учетом формы возбуждения среды (19) записывается в следующем виде [6]:

$$\varphi_1 = \exp(ik_1 t) \int_0^\infty [F_1 \exp(ik\gamma_{11}(x_3 - H_1)) +$$

$$+ F_2 \exp(-ik\gamma_{11}(x_3 - H_{n+1}))] k J_0(k, r) dk \quad (24)$$

$$\psi_2 = \exp(ik_1 t) \int_0^\infty [F_3 \exp(ik\gamma_{12}(x_3 - H_1)) + F_4 \exp(-ik\gamma_{12}(x_3 - H_{n+1}))] k J_1(kr) dk$$

$$\text{где } k\gamma_{jp} = \sqrt{k^2 - k_{jp}^2}, \quad p=1, 2; \quad \nu=1, 2, \dots, n$$

a_p — комплексная скорость распространения продольных $p=1$ и поперечных $p=2$ волн в среде ν .

$$a_p = a_p^* \frac{1}{1 \pm i \frac{x_p}{2\pi}}$$

a_p^* — фазовая скорость распространения волн.

Подставляя (24) в формулы, определяющие компоненты полей перемещений (21) и напряжений (22), получим:

$$U_1^* = \exp(-ik_4 t) \int_0^\infty k^2 \{ [F_1 \exp(ik\gamma_{11}(x_3 - H_+)) + F_2 \exp(-ik\gamma_{11}(x_3 - H_{-1}))] - \\ - i\gamma_{12} [F_3 \exp(ik\gamma_{12}(x_3 - H_+)) - F_4 \exp(-ik\gamma_{12}(x_3 - H_{-1}))] \} J_1(kr) dk \quad (25)$$

$$U_2^* = \exp(ik_4 t) \int_0^\infty k^2 \{ [F_1 \exp(ik\gamma_{11}(x_3 - H_+)) - F_2 \exp(-ik\gamma_{11}(x_3 - H_{-1}))] + \\ + F_3 \exp(ik\gamma_{12}(x_3 - H_+)) + F_4 \exp(-ik\gamma_{12}(x_3 - H_{-1})) \} J_0(kr) dk$$

$$\tau_{31(1)} = \rho a_2^2 \exp(ik_4 t) \int_0^\infty k_3 \left\{ -2i\gamma_{11} [F_1 \exp(ik\gamma_{11}(x_3 - H_+)) - \right. \\ \left. - F_2 \exp(-ik\gamma_{11}(x_3 - H_{-1}))] + \left(\frac{k_1^2}{k^2 - a_1^2} + 2\gamma_{12}^2 \right) [F_3 \exp(ik\gamma_{12}(x_3 - H_+)) + \right. \\ \left. + F_4 \exp(-ik\gamma_{12}(x_3 - H_{-1}))] \right\} J_1(kr) dk \quad (26)$$

$$\tau_{33(1)} = \rho a_2^2 \exp(ik_4 t) \int_0^\infty k^3 \left\{ \left[k_1^2 / k^2 \left(\frac{2}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right] \times \right. \\ \times [F_1 \exp(ik\gamma_{11}(x_3 - H_+)) + F_2 \exp(-ik\gamma_{11}(x_3 - H_{-1}))] + \\ \left. + 2i\gamma_{12} [F_3 \exp(ik\gamma_{12}(x_3 - H_+)) - F_4 \exp(-ik\gamma_{12}(x_3 - H_{-1}))] \right\} \times J_0(kr) dk$$

Подставляя выражения (25) и (26) в граничные условия (23), получим систему из $4n$ алгебраических уравнений относительно $4n+2$ неизвестных F_{kv} ($k=1, 2, 3, 4$; $v=1, 2, \dots, n+1$)

$$\sum_{k=1}^4 C_{mk}^{(v+1)} F_{k(v+1)} = \sum_{k=1}^4 C_{mk}^{(v)} F_{kv} \quad (27)$$

$$(m, k=1, 2, 3, 4; \quad v=2, 3, \dots, n+1; F_{1(n+1)} = F_{3(n+1)} = 0)$$

где коэффициенты $C_{mk}^{(v)}$ и $C_{mk}^{(v+1)}$ имеют следующие значения:

$$C_{11}^{(1)} = \exp(-ik\gamma_{11}h_1), \quad C_{12}^{(1)} = 1, \quad C_{13}^{(1)} = -i\gamma_{12} \exp(-ik\gamma_{12}h_1), \quad C_{14}^{(1)} = i\gamma_{11}, \\ C_{21}^{(1)} = i\gamma_{11} \exp(-ik\gamma_{11}h_1), \quad C_{22}^{(1)} = -i\gamma_{11}, \quad C_{23}^{(1)} = \exp(-ik\gamma_{12}h_1), \quad C_{24}^{(1)} = 1, \\ C_{31}^{(1)} = \rho a_2^2 - 2i\gamma_{11} a_2^{-2} \exp(-ik\gamma_{11}h_1), \quad C_{32}^{(1)} = 2i\gamma_{11} \rho a_2^2,$$

$$C_{31}^{(1)} = \rho_1 a_1^2 \left(\frac{k_1^2}{k^2} a_1^2 + 2\gamma_{12}^2 \right) \exp(-ik\gamma_{12}h_1)$$

$$C_{31}^{(2)} = \rho_1 a_1^2 \left(\frac{k_1^2}{k^2} a_1^2 + 2\gamma_{12}^2 \right) \quad (28)$$

$$C_{11}^{(3)} = \rho_1 a_1^2 \left[\frac{k_1^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right] \exp(-i\gamma_{11}kh_1)$$

$$C_{11}^{(4)} = \rho_1 a_1^2 \left[\frac{k_1^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right]$$

$$C_{11}^{(5)} = 2i\gamma_{11}\rho_1 a_1^2 \exp(-ik\gamma_{11}h_1), \quad C_{11}^{(6)} = 2i\gamma_{11}\rho_1 a_1^2$$

$$\bar{C}_{m1}^{(1)} = C_{m1}^{(1)} \exp(i\gamma_{11}kh_1) \text{ при } k=1,2$$

$$\bar{C}_{m1}^{(2)} = C_{m1}^{(2)} \exp(i\gamma_{12}kh_1) \text{ при } k=3,4$$

Дополнительные два уравнения в системе (27) получим из граничных условий (19).

Подставляя значения $\bar{\tau}_{31}(r, 0, k_1)$ и $\bar{\tau}_{31}(r, 0, k_2)$ из (26) в граничные условия получим:

$$\begin{aligned} & -2i\gamma_{11}(F_{11}\exp(-ik\gamma_{11}h_1) - F_{11}) + \left(\frac{k_1^2}{k^2} + 2\gamma_{12}^2 \right) (F_{31}\exp(-ik\gamma_{12}h_1) - F_{31}) = 0 \\ & \left\{ \rho_1 a_1^2 k^2 \left[\frac{k_1^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right] \right\} F_{11} \exp(-ik\gamma_{11}h_1) + F_{11} + \\ & + \rho_1 a_1^2 k^2 2i\gamma_{11} (F_{11}\exp(-ik\gamma_{11}h_1) - F_{11}) \exp(ik_1 t) = \bar{\tau}_{31}(r, 0, k_1) \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\bar{\tau}_{31}(r, 0, k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{\tau}_{31}(r, 0, t) r f_0(kr) dr = \frac{\exp(ik_1 t)}{2\pi} \int_0^\infty r p(r) f_0(kr) dr \quad (30)$$

Если в начале координатной системы действует сосредоточенная сила

$$p(r) = \frac{\delta(r)}{r} \quad (31)$$

то получим

$$\bar{\tau}_{31}(r, 0, k_1) = \frac{\exp(ik_1 t)}{2\pi} \quad (32)$$

Принимаем обозначения:

$$|C_{m1}^{(0)}| = |E|, \quad F_{1(0)} = F_{2(0)} = F_{3(0)} = 0, \quad F_{4(0)} = \frac{1}{2\pi}$$

$$C_{11}^{(0)} = -2i\gamma_{11}\exp(-ik\gamma_{11}h_1), \quad C_{11}^{(0)} = 2i\gamma_{11}$$

$$C_{31}^{(0)} = \left(\frac{k_1^2}{k^2} + 2\gamma_{12}^2 \right) \exp(-i\gamma_{12}h_1), \quad C_{31}^{(0)} = -\left(\frac{k_1^2}{k^2} + 2\gamma_{12}^2 \right) \quad (33)$$

$$C_{11}^{(0)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 \left[\frac{k^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\tau_{11}^2 \right] \exp(-ik\tau_{11}h_1)$$

$$C_{11}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 \left[\frac{k^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\tau_{11}^2 \right]$$

$$C_{11}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 2i\tau_{21} \exp(-ik\tau_{21}h_1), \quad C_{11}^{(1)} = -\rho_1 a_{21}^2 k^2 2i\tau_{21}$$

С учетом обозначения (33) система уравнений принимает вид

$$\sum_{k=1}^n C_{mk}^{(0)} F_{k(0)} = \sum_{k=1}^n C_{mk}^{(1)} F_{k(1)} \quad (34)$$

Записывая совместно (34) с (27), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно $F_{k(y)}$:

$$[\bar{C}_{mk}^{(y-1)}][F_{k(y-1)}] = [C_{mk}^{(y)}][F_{k(y)}] \quad (35)$$

$$(m, k = 1, 2, 3, 4; \quad y = 1, 2, \dots, n+1; \quad F_{1(n-1)} = F_{3(n-1)} = 0)$$

Из решения (35), определяя значения спектральных функций $F_{k(y)}$, далее, подставляя формулу $\bar{U}_z^*$ из (25) при $y=1$, $x_3=0$, получаем выражения ядра системы интегрального уравнения (11) в следующей форме:

$$\bar{U}_{3y}^* = \int_0^\infty k^2 \{ i\tau_{11}(F_{11} \exp(-ik\tau_{11}h_1) - F_{21}) - i\tau_{21}(F_{21} \exp(-ik\tau_{11}h_1) - F_{31}) \} J_1(rk) dk \quad (36)$$

Определив из решения системы алгебраических уравнений значения контактных напряжений, с помощью выражений (6), (7), (8) определим напряженно-деформированное состояние неоднородного слоистого основания и параметры сейсмического колебания штампа

$$U_{j(1)}(r, 0, t), \quad U_{j(1)}(r, 0, t), \quad U_{j(1)}(r, 0, t)$$

Теперь рассмотрим случай, когда напряжение и исходные перемещения по $U_{j(1)}^{(0)}$ контакту штампа с основанием можно принять постоянной величиной по координате r , то есть рассмотрим уравнения колебания штампа без учета дифракции волн в основании.

Тогда система уравнения (II) для винклеровского основания принимает вид:

$$\begin{aligned} \phi_{33(1)}^{(0)}(t) U_{3(1)}^* a &= U_{3(1)}^{(0)}(t) - U_{3(1)}^{(2)}(t) \\ \phi_{33(1)}^{(3)}(t) a &= -M \ddot{U}_{3(1)}^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (37)$$

Из совместного решения этих двух уравнений получаем

$$-\frac{M}{a} \ddot{U}_{3(1)}^{(1)}(t) U_{3(1)}^* a - U_{3(1)}^{(0)}(t) = U_{3(1)}^{(2)}(t)$$

откуда с учетом $U_{3(1)}^{(1)} = U_{3(1)}^{(0)} + U_{3(1)}^{(2)}$ получим

$$\ddot{U}_{3(1)}^{(3)}(t) + \frac{U_{3(1)}^{(3)}(t)}{MU_{3(1)}^*} = -\ddot{U}_{3(1)}^{(2)}(t) \quad (38)$$

(38) является дифференциальным уравнением для системы с одной степенью свободы, которое широко принимается в обычных методах расчета сооружений на винклеровском основании. В (38) $C = \frac{1}{U_{3(1)}^*}$ является коэффициентом постели основания, $\omega^2 = C/M$ — собственная частота колебания штампа.

Решение (38) записывается через интеграл Даламбера

$$U_{3(1)}^{(3)}(t) = - \int_0^t \ddot{U}_{3(1)}^{(2)}(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Заметим, что на основе результатов решения упругой задачи можно получить решение задачи в вязкоупругой постановке.

Пусть для основания (1) связь между напряжениями и деформациями определяется по закону Больцмана-Бино:

$$z_{jk} = 2 \int_0^t q_1(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} z_{jk} d\tau + z_{jk} \int_0^t q_2(t-\tau) \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau} d\tau$$

где $\theta_j = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_{jk}}{\partial x_k}$; $q_1(t)$, $q_2(t)$ — функции по времени, которые в случае идеально-упругого основания (1) переходят в постоянные Ламе μ и λ . Для получения решения поставленной задачи в вязкоупругой постановке необходимо в вышеизложенных решениях задач в упругой постановке, записанных в изображениях Фурье по времени, и t заменить величинами $\bar{t}(k_4)$ и $\bar{\mu}(k_4)$ [5], где $\bar{t}(k_4) = ik_4 q_1(k_4)$; $\bar{\mu}(k_4) = ik_4 q_2(k_4)$, а значения $\bar{q}_p(k_4)$; ($p = 1, 2$) определяются

$$\bar{q}_p(k_4) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q_p(t) \exp(ik_4 t) dt$$

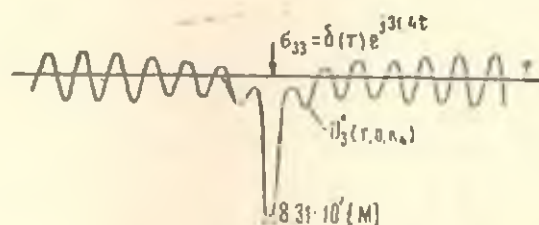
В заключение приводим конкретный пример расчета колебаний штампа на однослойном основании при следующих исходных данных (табл. 1).

Таблица 1

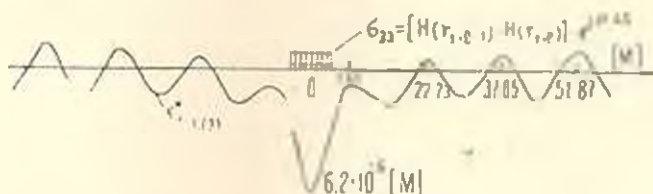
Исходные данные для численного примера

$\gamma_{\text{сн.м.}}$	$\gamma_{\text{осн.м.}}$	ρ	M_p	k_4	$U_{A3}^{(1)}$	H
кн.м ³	кн.м ²	$\frac{\text{кн.с}^2}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кн.с}^2}{\text{м}^3}$	с ⁻¹	м	м
18000	18000	1.8	5.0	31.4	0.02	40
36000	36000	1.9	—	—	—	∞

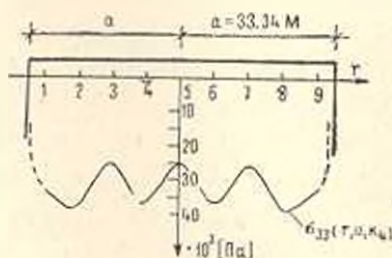
Для реализации численного примера на ЭВМ по вышеизложенному математическому алгоритму применена комплекс-программа, предназначенная для вычисления дискретного и обратного-дискретного преобразования Фурье с использованием метода быстрого преобразования Фурье [4].



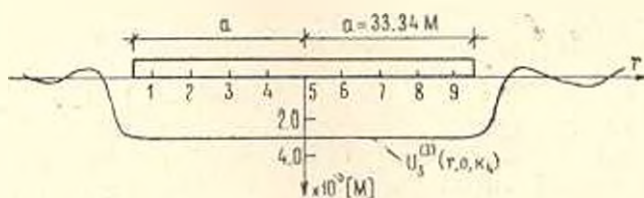
Фиг. 2. График функции влияния сосредоточенной нагрузки.



Фиг. 3. График функции влияния распространенной нагрузки.



Фиг. 4. Элюра распределения контактного напряжения.



Фиг. 5. Элюра распределения относительного перемещения при $x_2 = 0$.

Результаты вычислений приведены на фиг. 2—5, анализ которых показывает, что на элюру распределения контактных напряжений и перемещений существенное влияние оказывают следующие параметры: размеры штампа в плане, инерционные характеристики штампа, спек-

тральный состав внешнего воздействия, геометрические и физико-механические характеристики основания. Увеличенные распределения массы штампа приводят к увеличению ординат контактных напряжений и перемещений, при этом одновременно сглаживается эпюра контактных напряжений. С увеличением отношения размеров штампа к скорости распространения волны в основании эпюра контактных напряжений сглаживается, и в предельном случае, когда $2d/a_p \rightarrow 0$, т. е. сдвиг фазы между различными точками стремится к нулю, уменьшается влияние дифракции волны на контактной поверхности и в результате ординаты эпюры контактных напряжений и перемещений при симметричном нагружении принимают постоянные значения. Это означает, что входит в силу гипотеза плоских отражений. При колебании штампа на сложном основании в случае, когда размеры штампа соизмеримы с толщиной поверхностного слоя, существенное влияние на результат оказывают обратные волны. Но в целом качественная картина сохраняется в переходных случаях, т. е. когда величина физических характеристик слоя стремится к характеристикам полупространства.

SEISMIC OSCILLATIONS OF THE ROUND STAMP ON A TRANSVERSE HETEROGENEOUS MULTILAYERED FOUNDATION

S. S. DARBINIAN, [M. V. HOVANESIAN], A. E. SARCISIAN

ՊԱՋՄԱՇՆԵՐՏ, ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԻՄՔԻՆ ԴՐՎԱԾ ԿՈՐ ԴՐՈՇՄԻ ՆՐԿՐԱՇԱՐԺԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆԻԱՆ, [Մ. Վ. ՀՈՎԱՆԵՍԻԱՆ], Ա. Ե. ՍԱՐԳՍԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դրինի ֆունկցիայի մեթոդով դիտարկվում են րնդլայնտկան անհամասեռ հիմքով կոր սալերի տեսք ունեցող շինությունների փոխադրեցությունները և նրանց վրա ալիքային բևեռների սրուշումը: Ֆուրիե-Բեսելի ինտեգրալ ձևափոխության հիման վրա կիրառվում է փաթույթի բեռումը: Ստացված են դինամիկական կոնտակտային լարումների և տեղափոխությունների բաշխման էպյուրաները՝ հաշվի առնելով կոնտակտի մակերևույթի վրա ալիքների դիֆրակցիան, իսկ շերտավոր միջավայրում ինտերֆերենցիան պարամետրերի տարրեր արժեքների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 313 с.
2. Ильичев В. А., Таранов В. Т. Метод прогнозирования уровня колебаний сооружений и грунтов по результатам опытов. Сосна, фундаменты и механика грунтов. М.: 1977, № 4, с. 18—21.
3. Кириллов А. П., Крылов В. В., Саргсян А. Е. Взаимодействие фундаментов сооружений электростанций с основанием при динамических нагрузках. М.: Энергоатомиздат, 1984. 215 с.

4. Морозов В. А., Кирсанова Н. Н., Сысоев А. Ф. Комплекс алгоритмов быстрого преобразования Фурье дискретных рядов. Численный анализ на ФОРТРАНе. Изд. МГУ, вып. 15, 1976, с. 30—51.
5. Оганесян М. В. Определение волновой нагрузки на жесткую неподвижную и подвижную преграду, лежащую на поверхности упругого неоднородного основания. Строительство и архитектура в особых условиях. М.: 1983, вып. 8.
6. Пестрашень Г. И., Лебовская Е. М. Общая теория полей кратных волн в многослойных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1979, вып. 19, с. 5—49.
7. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1978, 283 с.
8. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.—М., ОНТИ, 1937, 577 с.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.

Дзепинаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
5.IV.1988

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ

ХАЧАТРИАН А. А.

На сегодня существует достаточное количество различных вариантов разномодульной теории упругости [1—5] и это количество увеличилось с появлением недавно статьи [6].

Настоящая работа посвящена разбору этой статьи [6], в результате которого установлено, что предлагаемый в [6] вариант, кроме заглавия, ничего общего не имеет с разномодульной теорией упругости. Естественно, что такое категорическое утверждение требует доказательств. Поэтому посмотрим, какие там приняты предположения и, на основании этого, какие получены результаты.

Рассматривается изотропное упругое тело, материал которого при растяжении характеризуется модулем упругости E^+ и коэффициентом Пуассона ν^+ , а при сжатии — E^- , ν^- .

В [6] автор, исходя из существования упругих потенциалов напряжений и деформаций и принимая линейные связи между главными компонентами тензоров деформаций ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) и напряжений ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), записывает

$$\varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Далее, тензоры деформаций и напряжений, представив в виде суммы девятатора и шаровой части,

$$\varepsilon_i = e_i + \frac{1}{3} \varepsilon, \quad \sigma_i = s_i + \frac{1}{3} \sigma \quad (2)$$

$$(\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

принимает, что деформация изменения объема (ε) зависит только от первого инварианта тензора напряжений (σ). В результате такого предположения очевидно (для этого достаточно подставить (2) в (1)), что коэффициенты a_{ij} должны подчиняться условиям

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (3)$$

и при этом становится возможным представлять удельную энергию деформации (как при обычном одномодульном материале) в виде суммы энергий изменения объема и изменения формы.

После этих предположений, исходя из условия невогнутости потенциальной поверхности, получены соответствующие законы упругости. Эти законы представляют собой четыре отдельные, не зависящие друг от друга, группы вида (1) (в главных направлениях). Коэффициенты упругости a_{ij} для каждой группы определяются исходя из знаков двух инвариантов тензора напряжений

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad s_2 = \sigma_2 - \frac{1}{3} \sigma = \frac{2}{3} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \quad (4)$$

Точнее—каждая группа соответствует определенным знакам величин σ и s_2 .

Следует отметить, что полученные в [6] законы упругости представлены не в явном виде, поэтому пришлось нам продолжить и выполнить необходимые выкладки для получения в явной форме законов упругости каждой группы в главных направлениях с приведением соответствующих для каждой из них возможных напряженных состояний.

$$I. \quad s_2 \leq 0, \quad \sigma \geq 0$$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$a) \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq \sigma_2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_3 \leq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq \sigma_2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq -\frac{\sigma_2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E^+} \sigma_1 - \frac{\nu^+}{E^+} \sigma_2 - \frac{\nu^+}{E^+} \sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu^+}{E^+} \sigma_1 + \left(\frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \right) \sigma_2 - \left(\frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \right) \sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu^+}{E^+} \sigma_1 - \left(\frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \right) \sigma_2 + \left(\frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \right) \sigma_3 \end{aligned} \quad (6)$$

$$II. \quad s_2 \leq 0, \quad \sigma \leq 0$$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$a) \begin{cases} \sigma_1 \geq 0 \\ \sigma_2 \leq \sigma_3 < 0 \\ \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq -\frac{\sigma_2}{2} \end{cases} \quad b) \begin{cases} \sigma_2 \leq \sigma_3 < \sigma_1 \leq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq \sigma_2 \end{cases} \quad (7)$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2+2\nu^+}{3E^+} + \frac{1-2\nu^-}{3E^-} \right) \sigma_1 - \left(\frac{1+\nu^+}{3E^+} - \frac{1-2\nu^-}{3E^-} \right) \sigma_2 - \left(\frac{1+\nu^+}{3E^+} - \frac{1-2\nu^-}{3E^-} \right) \sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+} - \frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1 + \left(\frac{4+\nu^-}{3E^-} - \frac{1+\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2 - \left(\frac{2+5\nu^-}{3E^-} - \frac{2+2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3 \quad (8)$$

$$\varepsilon_3 = -\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+} - \frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1 - \left(\frac{2+5\nu^-}{3E^-} - \frac{2+2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2 + \left(\frac{4+\nu^-}{3E^-} - \frac{1+\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3$$

III. $\sigma_2 \geq 0, \sigma \geq 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$a) \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 > \sigma_3 \geq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_3 < 0 \\ -\frac{\sigma_2}{2} \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (9)$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{4+\nu^+}{3E^+} - \frac{1+\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1 - \left(\frac{2+5\nu^+}{3E^+} - \frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_2 - \left(\frac{1+\nu^-}{3E^-} - \frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= -\left(\frac{2+5\nu^+}{3E^+} - \frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1 + \left(\frac{4+\nu^+}{3E^+} - \frac{1+\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_2 - \left(\frac{1+\nu^-}{3E^-} - \frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= -\left(\frac{1+\nu^-}{3E^-} - \frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_1 - \left(\frac{1+\nu^-}{3E^-} - \frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2 + \left(\frac{1-2\nu^+}{3E^+} + \frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_3 \end{aligned} \quad (10)$$

IV. $\sigma_2 \geq 0, \sigma \leq 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$a) \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_3 < 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq -\frac{\sigma_2}{2} \end{cases} \quad b) \begin{cases} \sigma_1 \geq 0 \\ \sigma_3 < \sigma_2 \leq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \sigma_3 < \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 0 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (11)$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{1+\nu^+}{E^+} - \frac{\nu^-}{E^-}\right)\sigma_1 - \left(\frac{1+\nu^+}{E^+} - \frac{1}{E^-}\right)\sigma_2 - \frac{\nu^-}{E^-}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= -\left(\frac{1+\nu^+}{E^+} - \frac{1}{E^-}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1+\nu^+}{E^+} - \frac{\nu^-}{E^-}\right)\sigma_2 - \frac{\nu^-}{E^-}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_1 - \frac{\nu^-}{E^-}\sigma_2 + \frac{1}{E^-}\sigma_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, перед нами имеется в явной форме весь результат варианта разномодульной теории упругости, предложенного в работе [6]. Здесь, для каждой группы в отдельности (в зависимости от знаков величин σ_2 и σ), приведены виды напряженных состояний

и соответствующие им законы упругости. При частных случаях напряженного состояния, во избежание недоразумений, следует четко подобрать соответствующую группу. Например, при простом растяжении следует пользоваться первой группой, где полагая $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, можно получить $\varepsilon_1 = \frac{1}{E^+} \sigma_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\nu^+}{E^+} \sigma_1$; а при простом сжатии — четвертой группой, где полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 < 0$, можно получить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{\nu^-}{E^-} \sigma_3$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{E^-} \sigma_3$.

Рассматривая все эти группы законов упругости, замечаем, что коэффициенты a_{ij} в каждой из них являются постоянными. Поэтому диагональные коэффициенты a_{ij} ($i=j$) представляют собой величины типа $1/E$, а остальные коэффициенты a_{ij} ($i \neq j$) характеризуют деформации пуассоновского типа (ν/E). В рассматриваемой работе утверждается, что, в отличие от других вариантов разномодульной теории упругости, у них нет дополнительной связи между коэффициентами $E^\pm$ и $\nu^\pm$. Поэтому естественно полагать, что $1/E^+ \neq 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \neq \nu^-/E^-$. С другой стороны, если рассмотреть, к примеру, первую группу, то там и при трехосном растяжении (5а) и при растяжении в одном направлении со сжатием в двух других направлениях (5с) действуют одни и те же законы упругости (6), несмотря на качественное различие указанных напряженных состояний. То же самое можно сказать и для остальных групп. На основании этого и исходя из физических соображений, можно утверждать, что во всех группах законов упругости значения коэффициентов a_{ij} ($i=j$) не должны выходить из интервала, определяемого величинами $1/E^+$ и $1/E^-$, а коэффициенты $-a_{ij}$ ($i \neq j$) — из интервала, определяемого величинами ν^+/E^+ и ν^-/E^- . Применяя это утверждение даже к каждой группе в отдельности, мы приходим к противоречиям. Покажем это, например, для первой группы, рассматриваемая все возможные четыре случая, зависящие от величин $1/E^+ \geq 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \geq \nu^-/E^-$.

1. Пусть $1/E^+ \geq 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \geq \nu^-/E^-$.

Тогда имеем следующую систему неравенств:

$$\frac{1}{E^-} \leq \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \leq \frac{1}{E^+}, \quad \frac{\nu^-}{E^-} \leq \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \leq \frac{\nu^+}{E^+} \quad (13)$$

или равносильную ей

$$\frac{\nu^+}{E^+} \leq \frac{\nu^-}{E^-}, \quad \frac{1+\nu^+}{E^+} \geq \frac{1+\nu^-}{E^-}, \quad \frac{1}{E^+} \leq \frac{1}{E^-} \quad (14)$$

Здесь, как видно, первое и третье неравенства находятся в противоречии с первоначально принятыми неравенствами.

2. Пусть $1/E^+ \geq 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \leq \nu^-/E^-$.

Тогда имеем

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{E^-} < \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{v^+}{E^+} \leq \frac{1}{E^+} & \frac{v^+}{E^+} < \frac{v^-}{E^-} & \\
\frac{v^+}{E^+} < \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \leq \frac{v^-}{E^-} & \text{или} & \frac{1+v^+}{E^+} \geq \frac{1+v^-}{E^-} \\
& & \frac{1+v^+}{E^+} \leq \frac{1+v^-}{E^-} \\
& & \frac{1}{E^+} \geq \frac{1}{E^-}
\end{array} \quad (15)$$

В этом случае противоречат друг другу второе и третье неравенства.

3. Пусть $1/E^+ \leq 1/E^-$ и $v^+/E^- \geq v^-/E^-$.

Тогда имеем

$$\begin{array}{lcl}
& \frac{1+v^+}{E^+} \leq \frac{1+v^-}{E^-} & \\
\frac{1}{E^+} < \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{v^+}{E^+} \leq \frac{1}{E^-} & \frac{v^+}{E^+} \geq \frac{v^-}{E^-} & \\
\frac{v^-}{E^-} < \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \leq \frac{v^+}{E^+} & \text{или} & \frac{1}{E^+} \leq \frac{1}{E^-} \\
& & \frac{1+v^+}{E^+} \geq \frac{1+v^-}{E^-}
\end{array} \quad (16)$$

Здесь противоречат друг другу первое и четвертое неравенства.

4. Пусть $1/E^+ \leq 1/E^-$ и $v^+/E^+ \leq v^-/E^-$.

Тогда имеем

$$\begin{array}{lcl}
& \frac{1+v^+}{E^+} \leq \frac{1+v^-}{E^-} & \\
\frac{1}{E^+} < \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{v^+}{E^+} \leq \frac{1}{E^-} & \text{или} & \frac{v^+}{E^+} \geq \frac{v^-}{E^-} \\
\frac{v^+}{E^+} \leq \frac{1+v^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} < \frac{v^-}{E^-} & & \frac{1}{E^+} \geq \frac{1}{E^-}
\end{array} \quad (17)$$

Здесь второе и третье неравенства противоречат первоначально принятым неравенствам.

Итак, все варианты исчерпаны и везде есть противоречия. Аналогичная картина имеет место без исключения и для остальных групп. Однако, следует отметить, что все указанные выше противоречия исчезают, если вместо неравенства учесть знак равенства. Но тогда будем иметь $E^+ = E^-$ и $v^+ = v^-$; разномодульность исчезает и все четыре группы превращаются в известный обобщенный закон Гука для обычного (одномодульного) изотропного тела. Отсюда следует,

что работа [6] не может претендовать на какой-либо вариант разномодульной теории упругости.

В заключение считаем необходимым отметить, что причину такого неудачного результата следует искать среди предположений, принятых в основу для построения теории. В работе [6] таким неудачным предположением можно считать то, что объемная деформация ε происходит только при действии величины σ и когда $\sigma = 0$ имеет место только деформация изменения формы.

К сказанному следует добавить также, что имеются эксперименты [7], установившие факт изменения объема разномодульного тела, находящегося под воздействием лишь сдвигающих напряжений.

ABOUT ONE VARIANT OF HETEROMODULUS ELASTICITY THEORY

A. A. CHACHATRIAN

ՏԱՐԱՄԱՌԻՈՒԼ ԱՌԱՋԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ
ՏԱՐԲԵՐԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքը նվիրված է [6] հոդվածում ստացված արդյունքների բնութարկմանը, որում առաջարկված է տարամոդուլ առաձգականության տեսության մի նոր տարբերակ:

Քննարկումը բերել է այն եզրակացության, որ նշված աշխատանքը ոչ մի կապ չունի տարամոդուլ առաձգականության տեսության հետ, քանի որ այնտեղ կատարված բնդունելությունների հիման վրա ստացված արդյունքները ճիշտ են միայն սովորական (միամոդուլ) իզոտրոպ նյութերի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.—Инженерный журнал, МТТ, 1966, № 2.
2. Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию.—Инженерный журнал, МТТ, 1966, № 2.
3. Матченко Н. М., Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах.—Инженерный журнал, МТТ, 1968, № 6.
4. Толоконников Л. А. Вариант разномодульной теории упругости.—Механика полимеров, 1969, № 2.
5. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного упругого тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
6. Саркисян М. С. О соотношениях теории упругости тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.—Изв. АН СССР, МТТ, 1987, № 5.
7. Вязлов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.V.1988

УДК 539.375:517.946

О ТЕПЛОВОМ УДАРЕ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНКЕ С ТРЕЩИНОЙ
ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

КОЗЛОВ В. А., МАЗЬЯ В. Г., ПАРТОН В. З.

Рассматривается задача о тепловом ударе в тонкой пластинке с прямолинейной трещиной при учете теплообмена с окружающей средой. В п. 2 найдено представление для $K_1(t)$ в случае плоскости с полубесконечным разрезом. В п. 3 приводится асимптотический анализ этого представления, причем показано, что при «малых» t влиянием теплообмена можно пренебречь, а при «больших» t прослеживается выход на квазистатический режим, изученный в [1]. В заключительном п. 4 для ограниченной тонкой пластинки показано, что коэффициент интенсивности растягивающих напряжений асимптотически эквивалентен $K_1(t)$ при $t \ll 1$.

Работа является развитием статьи авторов [2], в которой аналогичные вопросы изучались без учета явления теплообмена.

1. Постановка задачи. Пусть K — плоскость с выброшенной полусью $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$

Уравнение

$$a^2 \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

описывает среднее по толщине распределение температуры в тонкой пластинке $K \times [-h, h]$, на боковых поверхностях которой происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона, a — коэффициент температуропроводности, $a^2 = \lambda / (c\rho h)$, α — коэффициент теплоотдачи с поверхностями $z = \pm h$, c — удельная теплоемкость.

Предположим, что в начальный момент времени пластинка имела нулевую температуру, а затем берега трещины мгновенно приобрели температуру T_0 , то есть

$$T = T_0 \text{ на } \Gamma \times (0, \infty), \quad T = 0 \text{ при } t = 0 \quad (1.2)$$

Возникающие в пластинке смещения удовлетворяют краевой задаче

$$-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mu \Delta U + (\mu + \lambda_*) \operatorname{grad} \operatorname{div} U = \gamma_* \operatorname{grad} T \text{ на } K \times (0, \infty)$$

$$\begin{aligned} \lambda_* \operatorname{div} U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \gamma_* T \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ \mu \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) &= 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ U = \partial U / \partial t &= 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\lambda_* = 2\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $\gamma_* = 2\mu\alpha_T(1+\nu)(1-\nu)$, λ — постоянная Ламе, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, α_T — коэффициент линейного расширения.

2. Формула для $K_1(t)$. Пусть Φ — решение краевой задачи

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - a^2 \Delta \Phi = 0, \quad \Phi = 1 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty), \quad \Phi = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$T(x, t) = T_0(\exp(-a^2 t)\Phi(x, t) + a^2 \int_0^t \exp(-a^2 \tau)\Phi(x, \tau) d\tau) \quad (2.1)$$

удовлетворяет задаче (1.1), (1.2). Обозначим через $R(t)$ коэффициент интенсивности растягивающих напряжений, порожденных температурным полем $T_* = \exp(-a^2 t)\Phi$ в пластинке при нулевом теплообмене с внешней средой. Пусть еще $K_1(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в исходной задаче (коэффициент интенсивности сдвиговых напряжений $K_{II}(t)$ равен нулю). Тогда

$$K_1(t) = T_0 \left(R(t) + a^2 \int_0^t R(\tau) d\tau \right) \quad (2.2)$$

В дальнейших промежуточных вычислениях будем предполагать, что $a = 1$. Пусть

$$\Phi^{FL}(\xi, x_2, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-pt + i\xi x_1) \Phi(x_1, x_2, t) dx_1 dt$$

Согласно п. 2, [2]

$$\Phi^{FL}(\xi, x_2, p) = -\frac{p^{-3/2}}{2\pi i(\xi + i0)} (p^{1/2} + i\xi)^{-1/2} \exp(-\sqrt{p + \xi^2} x_2), \quad x_2 > 0$$

Следовательно,

$$T_*^{FL}(\xi, x_2, p) = -\frac{(p + \xi^2)^{-3/2}}{2\pi i(\xi + i0)} \left((p + \xi^2)^{1/2} + i\xi \right)^{-1/2} \exp(-\sqrt{p + \xi^2 + \xi^2} x_2)$$

В дальнейшем $b_1 = \sqrt{\rho/(\lambda_* + 2\mu)}$, $b_2 = \sqrt{\rho/\mu}$ — величины, обратные к скоростям волн расширения и сдвига соответственно, и c_R — скорость волны Рэлея, то есть положительный корень уравнения

$$(2 - b_2^2 c^2)^2 - 4 \sqrt{1 - b_2^2 c^2} \sqrt{1 - b_1^2 c^2} = 0$$

В [2] (п. 3) получено следующее представление для преобразования Лапласа коэффициента интенсивности напряжений $R(t)$, порожденных четным по переменной x_2 температурным полем:

$$R^L(p) = -2 \int_0^\infty \int_0^\infty T^L(x_1, x_2, p) \operatorname{div} \zeta^L(x_1, x_2, p) dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

где

$$\zeta_1^L(\xi, x_2, p) = \Psi(p, \xi) \left(\frac{\xi^2 + \gamma_1^2}{2\gamma_1} \exp(-\gamma_1 x_2) - \gamma_1 \exp(-\gamma_2 x_2) \right)$$

$$\zeta_2^L(\xi, x_2, p) = -\Psi(p, \xi) \left(\frac{\xi^2 + \gamma_2^2}{2i\xi} \exp(-\gamma_1 x_2) + i\xi \exp(-\gamma_2 x_2) \right)$$

$$\Psi(p, \xi) = A \frac{i\xi \sqrt{b_1 p - i\xi}}{p^2 \sqrt{p - i c_R \xi}} D_+(p, \xi), \quad A = \frac{b_1^{-2} c_p}{\sqrt{2} \pi} \frac{1 - \nu}{2}$$

$$D_+(p, \xi) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\varphi(x)}{x + i\xi/p} dx \right]$$

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg} \frac{4x^2 \sqrt{b_2^2 - x^2} \sqrt{x^2 - b_1^2}}{(2x^2 - b_2^2)^2}$$

$$\gamma_n = \sqrt{\xi^2 + b_n^2 p^2}, \quad n = 1, 2$$

Формула (2.3) позволит в дальнейшем найти представление для $R(t)$, минуя решение термоупругой задачи. Следующие преобразования имеют целью придать правой части равенства (2.3) более удобный вид.

Применяя к правой части в (2.3) равенство Парсеваля по x_1 , а затем интегрируя по x_2 , получаем

$$R^L(p) = A \gamma_1 b_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p + i\xi)^{-3/4} ((p - i\xi)^{1/2} + i\xi)^{-1/2}}{i(\xi + i0)} (\sqrt{p + i\xi + \xi^2} + \sqrt{b_1^2 p^2 + \xi^2})^{-1} \frac{(2\xi^2 + b_2^2 p^2) Q\left(-\frac{\xi}{ib_1 p}\right)}{\sqrt{b_1 p - i\xi} (p + i c_R \xi)} d\xi \quad (2.4)$$

Здесь обозначено

$$Q(\xi) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_1^{\beta_2} \frac{\varphi(x)}{x + i\xi} dx \right], \quad \beta_2 = b_2 b_1^{-1}$$

Используя очевидное тождество

$$\chi(\xi) = \frac{1}{2-i(\xi-i0)} - \frac{1}{2-i(\xi+i0)}$$

преобразуем выражение (2.4) к виду

$$R^L(p) = -\frac{2\pi A_{\gamma_*} b_1^{3/2} b_2 Q(0) p^{1/2}}{(\sqrt{p+\sigma^2} + b_1 p)(p+\sigma^2)} + A_{\gamma_*} b_1^2 \int_{-i\infty}^{\infty} \frac{(p+\sigma^2)^{-3/4} ((p+\sigma^2)^{1/2} + i\xi)^{-1/2}}{i(\xi-i0)} \times \\ \times (\sqrt{p+\sigma^2+\xi^2} + \sqrt{b_1^2 p^2 + \xi^2})^{-1} \frac{(2\xi^2 + b_2^2 p^2) Q\left(\frac{-\xi}{ib_1 p}\right)}{\sqrt{b_1 p - i\xi}(p + ic_R \xi)} d\xi \quad (2.5)$$

Непосредственно проверяется тождество

$$((p+\sigma^2)^{1/2} + i\xi)^{-1/2} (\sqrt{p+\sigma^2+\xi^2} + \sqrt{b_1^2 p^2 + \xi^2})^{-1} (b_1 p - i\xi)^{-1/2} = \\ = \frac{1}{b_1^2 p^2 - p - \sigma^2} \left(\frac{\sqrt{b_1 p + i\xi}}{\sqrt{(p+\sigma^2)^{1/2} + i\xi}} - \frac{\sqrt{(p+\sigma^2) - i\xi}}{\sqrt{b_1 p - i\xi}} \right)$$

Функция $((p+\sigma^2)^{1/2} - i\xi)^{-1/2} (b_1 p - i\xi)^{-1/2}$ — аналитическая в плоскости с разрезом $(-ib_1 p, -i(p+\sigma^2)^{1/2})$, а функция $(b_1 p + i\xi)^{1/2} ((p+\sigma^2)^{1/2} + i\xi)^{-1/2}$ — аналитическая при $\text{Im} \xi < 0$. Поскольку подынтегральное выражение в (2.5) равно $O(1/|\xi|)$ при больших $|\xi|$, то интегрирование по оси $\text{Im} \xi = 0$ можно заменить интегрированием (против часовой стрелки) по замкнутому контуру $\Gamma_0(p)$, расположенному в полуплоскости $\text{Im} \xi < 0$ и охватывающему точки $-ib_1 p, -i(p+\sigma^2)^{1/2}$. Следовательно,

$$R^L(p) = -2\pi \frac{A_{\gamma_*} b_1^{3/2} b_2 Q(0) p^{1/2}}{(\sqrt{p+\sigma^2} + b_1 p)(p+\sigma^2)} + J(p)$$

где

$$J(p) = \frac{A_{\gamma_*} b_1^2 (p+\sigma^2)^{-3/4}}{b_1^2 p^2 - p - \sigma^2} \int_{\Gamma_0(p)} \frac{O\left(\frac{i\xi}{b_1 p}\right)}{i\xi} \frac{\sqrt{(p+\sigma^2)^{1/2} - i\xi}}{\sqrt{b_1 p - i\xi}} \frac{2\xi^2 + b_2^2 p^2}{p + ic_R \xi} d\xi$$

Полагая в последнем интеграле $i\xi = \eta$, находим

$$J(p) = -\frac{A_{\gamma_*} (p+\sigma^2)^{-3/4} b_1^2}{b_1^2 p^2 - p - \sigma^2} \int_{\Gamma(p)} \frac{Q(\eta/b_1 p)}{\eta} \times \\ \times \frac{\sqrt{(p+\sigma^2)^{1/2} - \eta}}{\sqrt{b_1 p - \eta}} \frac{b_2^2 p^2 - 2\eta}{p + ic_R \eta} d\eta$$

где $\Gamma(p)$ — контур $\Gamma_0(p)$, повернутый на $\pi/2$. Заменяя контурное интегрирование $\Gamma(p)$ интегрированием по отрезку $[b_1 p, (p+\sigma^2)^{1/2}]$, находим окончательное представление для $R^L(p)$:

$$R^L(p) = -\frac{2\pi A_{\gamma_*} b_1^{3/2} b_2^2 Q(0) p^{1/2}}{(\sqrt{p+\sigma^2} + b_1 p)(p+\sigma^2)} - 2 \frac{A_{\gamma_*} (p+\sigma^2)^{-3/4} b_1^2}{b_1^2 p^2 - p - \sigma^2} \times$$

$$\times \int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{(p+z^2)^{1/2}-\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1-b_1 p}} \frac{b_1^2 p^2 - 2\gamma_1}{p + c_R \gamma_1} \frac{Q(\sqrt{b_1 p})}{\gamma_1} d\gamma$$

Следующая цель — найти $K(t)$. Обозначив первое и второе слагаемое через $j^L(p)$, $g^L(p)$, а $\beta_R = c_R^{-1} b_1^{-1}$, можем записать

$$\begin{aligned} J(t) = & \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\beta_1^{1/2}}{\beta_R} (1 - \gamma_1) Q(0) b_1^{1/2} \exp(-t z^2) \left[\int_0^{\beta_1} (\exp(-t z^2 / b_1^2) - 1) \times \right. \\ & \times \frac{(z^2 + b_1^2 z^2)^{1/2}}{(z^2 + b_1^2 z^2)^2 + z^2} \frac{dz}{z} - \int_0^{\beta_1} (\exp(t z^2 / b_1^2) - 1) \times \\ & \times \left. \frac{(b_1^2 z^2 - z^2)^{1/2}}{b_1^2 z^2 - z^2 + z} \frac{dz}{z} \right] \end{aligned}$$

Здесь было использовано равенство $J(t)=0$ при $t=0$, вытекающее из аналитичности функции $j(p)$ в плоскости с разрезом по лучу $[-\infty + i0, -z^2 + i0]$ и оценки $j(p) = o(|p|^{-1})$ при $|p| \rightarrow \infty$. Перейдем к вычислению $g(t)$. Как и в случае функции $j(t)$, справедливо равенство $g(t)=0$ при $t=0$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(t) = & \frac{\exp(-t z^2)}{2\pi i} \int_S (\exp(t p) - 1) g^L(p - z^2) dp = - \frac{\exp(-t z^2)}{i b_1^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-t z^2 / b_1^2) - 1) g^L\left(-\frac{z^2}{b_1^2} - z^2\right) z dz \end{aligned}$$

где S — дважды пройденная против часовой стрелки вещественная отрицательная полуось.

Положим $G(q) = g^L(-q/b_1^2 - z^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} G(q) = & -2 \frac{A_1 q^{-3/2} b_1^2 b_1^{1/2} q^{1/2}}{(q - b_1^2 z^2)^2 - q} \int_{q - \beta_1 z^2}^{\beta_1 z^2} \frac{\sqrt{q^{1/2} - x}}{\sqrt{x - (q - b_1^2 z^2)}} \times \\ & \times \frac{\beta_1^2 (q - b_1^2 z^2)^2 - 2x^2}{q - b_1^2 z^2 + \beta_R^{-1} x} \frac{Q\left(\frac{x}{q - b_1^2 z^2}\right)}{x} dx \end{aligned}$$

После замены $x = |q^{1/2} - (q - b_1^2 z^2)| y + q - b_1^2 z^2$ находим

$$G(q) = - \frac{2 A_1 q^{-3/2} b_1^2 b_1^{1/2} [q^{1/2} - (q - b_1^2 z^2)]}{(q - b_1^2 z^2)^2 - q} H\left(\frac{q^{1/2}}{b_1^2 z^2 - q}\right)$$

где

$$H(z) = \int_1^{\beta_1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \frac{(\beta_1^2 - 2(1-(z+1)x)^2) Q(1-(z+1)x)}{(1 + \beta_R^{-1}(1-(z+1)x))(1-(z+1)x)} dx$$

Отсюда получаем

$$G(-z^2) = -\frac{2A_{1*}(iz)^{-1/2} b_1^{1/2}}{z^2 + b_1^2 z^2 - iz} H\left(\frac{iz}{z^2 + b_1^2 z^2}\right)$$

и, следовательно,

$$g(t) = \frac{1-\nu}{\pi^2} \gamma_* b_1^{1/2} \exp(-t^2) \int_0^\infty (1 - \exp(-t^2 / b_1^2)) \times \\ \times z^{-1/2} \operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{z^2 + b_1^2 z^2 - iz} H\left(\frac{iz}{z^2 + b_1^2 z^2}\right) \right) dz$$

Объединяя полученные представления для j , g , находим

$$R(t) = \frac{1-\nu}{2} \gamma_* t^{1/2} \exp(-t^2) M(b_1 t^{-1/2}, b_1 \sigma) \\ M(h, \delta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\beta_2}{\beta_R} Q(0) h^{1/2} E(h, \delta) + \frac{2h^{1/2}}{\pi^2 \beta_R} F(h, \delta) \quad (2.6) \\ E(h, \delta) = \int_0^\infty (\exp(-z^2 / h^2) - 1) \frac{(z^2 + \delta^2)^{3/2}}{(z^2 + \delta^2)^2 + z^2} \frac{dz}{z} - \\ - \int_0^\delta (\exp(z^2 / h^2) - 1) \frac{(\delta^2 - z^2)^{1/2}}{\delta^2 - z^2 + z} \frac{dz}{z} \\ F(h, \delta) = \int_0^\infty (1 - \exp(-z^2 / h^2)) z^{-1/2} \operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{z^2 + \delta^2 - iz} H\left(\frac{iz}{z^2 + \delta^2}\right) \right) dz$$

Подставляя выражение (2.6) для R в формулу (2.2) для $K_1(t)$ и отказавшись от предположения $\alpha=1$, приходим к следующему окончательному представлению для коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_1(t) = \gamma_* T_0 \frac{1-\nu}{2} (a^{1/2} t^{1/2} \exp(-t^2) M(h, \delta) + \\ + 2ab^{1/2} \int_0^{1/h} \tau^{1/2} \exp(-\delta^2 \tau^2) M(1/\tau, \delta) d\tau) \quad (2.7)$$

Здесь использованы автономные переменные $h = b_1 a t^{-1/2}$, $\delta = b_1 a \sigma$.

3. Асимптотика коэффициента интенсивности $K_1(t)$. При некоторых соотношениях параметров можно провести асимптотический анализ равенства (2.7). Пусть, например, $\delta \ll h$. Поскольку

$$E(h, \delta) \sim \int_0^\infty (\exp(-x^2 / h^2) - 1) \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$F(h, \delta) = \int_0^{\infty} (1 - \exp(-x^2/h^2)) x^{-1/2} \operatorname{Im} \left[\frac{1+i}{x-i} H\left(\frac{i}{x}\right) \right] dx$$

то в силу (2.7) при $\sigma^2 t \ll 1$

$$K_1(t) \sim T_0 \gamma_* \frac{1-\gamma}{2} a^{3/2} t^{1/2} M(b, a t^{-1/2}, 0)$$

Как показано в [2] (см. (5.8), [2]), правая часть последней формулы совпадает с коэффициентом $K_1(t)$ при отсутствии теплообмена.

В каждом из случаев $h \gg 1$ или $\delta \gg 1$

$$E(h, \delta) \sim \delta^{-1} \mathcal{E}(\delta/h), \quad F(h, \delta) \sim H(0) \delta^{-3/2} \mathcal{F}(\delta/h)$$

$$\mathcal{E}(\tau) = \int_0^1 (\exp(-\tau^2 x^2) - 1) (1+x^2)^{-1/2} \frac{dx}{x} -$$

$$- \int_0^1 (\exp(\tau^2 x^2) - 1) (1-x^2)^{-1/2} \frac{dx}{x}$$

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_0^{\infty} (1 - \exp(-\tau^2 x^2)) x^{-1/2} (1+x^2)^{-1/2} dx$$

Отсюда вытекает, что при $h \gg 1$ или при $\delta \gg 1$

$$M(h, \delta) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\beta_2^2}{\beta_R} Q(0) h^{-1/3} \mathcal{E}(\delta/h)$$

Что вместе с (2.7) приводит к асимптотике

$$K_1(t) \sim \frac{(1-\gamma) \sqrt{2} \beta_2^2}{\pi \beta_R} G(0) T_0 \gamma_* b_1^{-1/2} t^{1/2} (\exp(-\tau^2 t) \mathcal{E}(\tau t^{1/2}) + \\ + 2(\tau t^{1/2})^{-1} \int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) \mathcal{E}(x) dx)$$

где либо $b_1 a \gg t^{1/2}$, либо $b_1 \sigma a \gg 1$.

Из (3.1) следует, что в зоне $\min\{b_1 a, \sigma^{-1}\} \gg t^{1/2}$ имеет место асимптотика (6.4), [2], выведенная при $\tau=0$, то есть без учета теплообмена.

Рассмотрим случай $\delta \ll h \ll 1$, то есть $b_1 a \ll t^{1/2} \ll \sigma^{-1}$. Имеем

$$F(h, \delta) \sim h^{-1/2} \int_0^{\infty} (1 - \exp(-x^2)) x^{-1/2} \operatorname{Im} \left[\frac{(1+i)H(\infty)}{h(x^2 + \delta^2/h^2) - ix} \right] dx \sim \\ \sim H(\infty) h^{-1/2} \int_0^{\infty} (1 - \exp(-x^2)) x^{-3/2} dx = -2\pi \beta_R \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) h^{-1/2}$$

Поскольку $E(h, \xi) = \mathcal{O}(1)$, то $M(h, \xi) \sim -4\Gamma(3/4)/\pi$. Подставляя этот результат в (2.7), заключаем

$$K_1(t) \sim -\gamma_* T_0 \frac{1-\nu}{2\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) a^{1/2} s^{-1/2} \int_0^{s^{1/2}} \tau^{-3/4} \exp(-\tau) d\tau$$

при $b_1 a \ll t^{1/2} \leq s^{-1}$. Полученная асимптотика согласуется с найденной в п. 4 [1] для квазистатической задачи.

4. Учет теплообмена в ограниченной тонкой пластинке с трещиной. В заключение коротко остановимся на случае ограниченной тонкой пластинки $\Omega \times (-h, h)$, на боковых поверхностях которой происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры.

Пусть Ω_0 — плоская область с гладкой границей Γ_0 . В Ω имеется прямолинейный разрез l , соединяющий начало координат $0 \in \Omega$ с точкой $A \in \Gamma_0$, под Γ будем понимать контур Γ_0 , дополненный дважды пройденным отрезком l , а под Ω — область, ограниченную Γ .

Температура $\mathcal{T}$ определяется из краевой задачи

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + s^2 \mathcal{T} - a^2 \Delta \mathcal{T} = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \infty)$$

$$\mathcal{T} = T_0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty), \quad \mathcal{T} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

а вектор смещений U — из задачи

$$-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \text{grad div } U = \gamma_* \text{grad } \mathcal{T} \quad \text{на } \Omega \times (0, \infty)$$

$$(\lambda + \mu) \text{div } U + 2\mu \partial U_n / \partial n = \gamma_* \mathcal{T} \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty)$$

$$\mu (\partial U_n / \partial \tau + \partial U_\tau / \partial n) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty)$$

$$U = \partial U / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0$$

где n, τ — нормаль и касательная к Γ .

Обозначим через $\mathcal{K}_j(t)$ ($j = \text{I, II}$) коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины l . Пусть $K_1(t)$ — коэффициент растягивающих напряжений в рассмотренном ранее случае бесконечной пластинки.

Повторяя с несущественными изменениями рассуждения, приведенные в п. 7. [2] можно получить оценки

$$|\mathcal{K}_\text{I}(t) - K_1(t)| \leq C_N T_0 s^{1/2} \gamma_* \left| \frac{a^2 t}{s^2(1+s^2 t)} \right|^N$$

$$|\mathcal{K}_\text{II}(t)| \leq C_N T_0 s^{1/2} \gamma_* \left| \frac{a^2 t}{s^2(1+s^2 t)} \right|^N$$

где $2t \leq b_1 s$ и $at^{1/2} \leq s$, N — любое положительное число, величина C_N зависит от коэффициента Пуассона ν , числа N и геометрии границы Γ_0 . Тем самым, $\mathcal{K}_\text{I}(t) \sim K_1(t)$ и $\mathcal{K}_\text{I}^\text{II}(t) + \mathcal{K}_\text{II}^\text{II}(t) \sim K_1^\text{II}(t)$ при малых t .

ON A THERMAL SHOCK IN A THIN PLATE WITH A CRACK UNDER HEAT CONVECTION

V. A. KOZLOV, V. G. MAZYA, V. Z. PARTON

ՀԱՔ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԲԱՐԱԿ ՈԱԼՈՒՄ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ՀԱՐՎԱՅԻ ԽՆԴՐԻ
ՇՐՋԱՊԱՏԻ ՀԵՏ ԶԵՐՄԱՓՈՆԱՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Վ. Ա. ԿՈԶԼՈՎ, Վ. Գ. ՄԱԶՅԱ, Վ. Զ. ՊԱՐՏՈՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվում է ուղղափոխ հաջորդ բարակ թաղանթում ջերմաստիճանի կտրուկ փոփոխմամբ պայմանավորված ջերմային հարվածի՝ նյութոսկի պրենքով տեղի ունեցող ջերմափոխանակության առկայության դեպքում տեղի ունեցող լարումների ինտենսիվության գործակցի ասիմպտոտիկները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З. Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в квазистатических температурных задачах для области с разрезом. — ПММ, 1985, т. 49, вып. 4, с. 621—636.
2. Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З. О тепловом ударе в области с трещиной. — ПММ, 1988, т. 52, вып. 2, с. 318—326.

Мичковский институт химического машиностроения

Поступила в редакцию
10.III.1987

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ

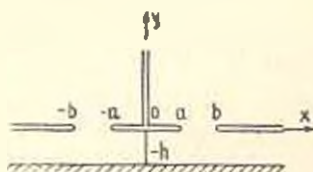
АФЯН В. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей конечную и три полубесконечные трещины (фиг. 1). Используя симметричность задачи, рассматривается напряженное состояние квадранта и полосы с соответствующими граничными условиями.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости для квадранта, когда на границе заданы напряжения

$$\sigma_{xx}(0, y) = p(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \quad (0 < y < \infty) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q(x), \quad (0 < x < \infty)$$



Фиг. 1

Как известно [1, 2], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$. Решение бигармонического уравнения, ограниченное при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$, может быть представлено в виде

$$\Phi = \int_0^\infty [A_1(\lambda) + \lambda y A_2(\lambda)] \frac{\cos \lambda x}{\exp(\lambda y)} d\lambda + \int_0^\infty [A_3(\lambda) + \lambda x A_4(\lambda)] \frac{\cos \lambda y}{\exp(\lambda x)} d\lambda \quad (1.2)$$

Здесь $A_i(\lambda)$ ($i=1, 4$)—функции, подлежащие определению из граничных условий (1.1).

Удовлетворением условий (1.1) и использованием формулы обращения Фурье, получается

$$\lambda^2 A_2(\lambda) - \lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q(t) \sin \lambda t dt = \bar{q}(\lambda) \quad (1.3)$$

$$\lambda^2 A_4(\lambda) - \lambda^2 A_3(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau(t) \sin \lambda t dt = \bar{\tau}(\lambda)$$

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(t^2 + \lambda^2)(A_2(t) - 2A_3(t)) + (t^2 - \lambda^2)A_4(t)] \frac{t^2 dt}{(t^2 + \lambda^2)^2} - \bar{p}(\lambda) \quad (1.4)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(t^2 + \lambda^2)(A_1(t) - 2A_3(t)) + (t^2 - \lambda^2)A_4(t)] \frac{t^2 dt}{(t^2 + \lambda^2)^2} - \bar{\sigma}(\lambda)$$

где $\bar{p}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(t) \cos \lambda t dt$, $\bar{\sigma}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma(t) \cos \lambda t dt$

откуда

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 A_2(t)}{(t^2 + \lambda^2)^2} dt + f_1(\lambda) \quad (1.5)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 A_1(t)}{(t^2 + \lambda^2)^2} dt + \varphi_1(\lambda)$$

где

$$f_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t) r(t) dt - \bar{p}(\lambda)$$

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t) q(t) dt - \bar{\sigma}(\lambda)$$

Система (1.5) посредством координатных преобразований $\lambda = \exp(\tau)$, $t = \exp(\xi)$ приводится к системе интегральных уравнений с разностным ядром, решение которой имеет вид

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} r(t) K_r(t, \lambda) dt + \int_0^{\infty} q(t) K_q(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} p(t) K_p(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} \sigma(t) K_\sigma(t, \lambda) dt \right\} \quad (1.6)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} p(t) K_p(t, \lambda) dt + \int_0^{\infty} \sigma(t) K_\sigma(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} r(t) K_r(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} q(t) K_q(t, \lambda) dt \right\}$$

Здесь использованы обозначения:

$$K_0(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iv) \Gamma(iv) v \operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_1(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(iv) v \operatorname{sh} \pi v \frac{dv}{2(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_2(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iv) \Gamma(iv) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_3(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(iv) \operatorname{sh} \pi v \operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{2(\lambda t)^{v\Delta}}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $\Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi v}{2} - v^2$. Неизвестные функции $A_3(\lambda)$ и $A_4(\lambda)$ определяются по формуле (1.3) и, в результате, бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ полностью определяется.

Использованием формул для перемещений, получается

$$\begin{aligned} EU_x(x, 0) = & (1 - \nu) p(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q(t) dt + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p(t) dt + \\ & + \int_0^{\infty} R_2(t, x) q(t) dt - \int_0^{\infty} R_7(t, x) \sigma(t) dt - \int_0^{\infty} R_8(t, x) \tau(t) dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} EV_x(x, 0) = & (\nu - 1) q(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p(t) dt + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p(t) dt - \\ & - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q(t) dt + \int_0^{\infty} R_5(t, x) \tau(t) dt - \int_0^{\infty} R_6(t, x) \sigma(t) dt \end{aligned}$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{1,4}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[v \cos \left(v \ln \frac{x}{t} \right) \mp \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) \right] \frac{v dv}{\Delta}$$

$$R_4(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi v}{2} \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) (1 + v^2) \frac{dv}{\Delta}$$

$$R_3(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} + v^2}{\Delta} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi v}{2}} \right] \exp \left(-\frac{\pi v}{2} \right) \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) dv$$

$$R_{s,0}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[v \cos\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \pm \sin\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \right] \operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{\Delta}$$

$$R_s(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} v \operatorname{ch} \frac{\pi v}{2} \sin\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \frac{dv}{\Delta}$$

2. Рассматривается плоская задача теории упругости для полосы ($-\infty < x < \infty$, $-h < y < 0$) при граничных условиях

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q(x) \quad (2.1)$$

$$U(x, -h) = V(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

Бигармоническую функцию ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} [B_1 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y B_3 \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y B_4 \operatorname{ch} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda \quad (2.2)$$

где $B_i(\lambda)$ ($i=1, 4$) — неизвестные функции. Удовлетворением граничных условий (2.1) для определения искомых функций $B_i(\lambda)$ получается система алгебраических уравнений

$$\lambda^2 B_2(\lambda) = -\bar{p}(\lambda), \quad \lambda^2 B_1(\lambda) = \bar{q}(\lambda) - \lambda^2 B_4(\lambda) \quad (2.3)$$

$$B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda h + B_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda h - \left[\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{2}{1+\nu} \operatorname{ch} \lambda h \right] B_3(\lambda) -$$

$$- \left[\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \frac{2}{1+\nu} \operatorname{sh} \lambda h \right] B_4(\lambda) = 0$$

$$B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda h - B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda h - \left[\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \frac{\nu-1}{\nu+1} \operatorname{sh} \lambda h \right] B_3(\lambda) +$$

$$+ \left[\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{\nu-1}{\nu+1} \operatorname{ch} \lambda h \right] B_4(\lambda) = 0$$

Решение полученной системы представляется в виде

$$\lambda^2 B_2(\lambda) = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \bar{p}(\lambda) \left[\operatorname{sh}^2 \lambda h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2\lambda h \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}(\lambda) \left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \operatorname{sh} 2\lambda h - \lambda h \right] \right\}$$

$$\lambda^2 B_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \bar{p}(\lambda) \left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \operatorname{sh} 2\lambda h + \lambda h \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}(\lambda) \left[\operatorname{sh}^2 \lambda h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2\lambda h \right] \right\}$$

$$\lambda^2 B_3(\lambda) = \bar{q}(\lambda) - \lambda^2 B_4(\lambda), \quad \lambda^2 B_4(\lambda) = -\bar{p}(\lambda)$$

$$\text{где } \Delta_1 = \operatorname{sh}^2 h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \lambda^2 h^2$$

Компоненты перемещений определяются по формулам

$$\begin{aligned} EU_1(x, 0) = & (1-\nu)p(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x-t} \right] q(t) dt + \\ & + \int_0^\infty K_2(t, x) p(t) dt + \int_0^\infty K_3(t, x) q(t) dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} EV_1(x, 0) = & (1-\nu)q(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t} \right] p(t) dt - \\ & - \int_0^\infty K_2(t, x) p(t) dt - \int_0^\infty K_3(t, x) q(t) dt, \quad (0 < x < \infty) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_2(t, x) = & \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[\lambda^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \cos \lambda x \cos \lambda t \frac{d\lambda}{\Delta_1} \\ K_3(t, x) = & \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[\lambda^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \exp(-2\lambda h) \pm 0,5 \right] \times \\ & \times \cos \lambda x \sin \lambda t \frac{d\lambda}{\Delta_1} \\ K_4(t, x) = & \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[\lambda^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \sin \lambda x \sin \lambda t \frac{d\lambda}{\Delta_1}, \quad (0 < t, x < \infty) \end{aligned}$$

3. Использование полученных в предыдущих пунктах решений (1.7) и (2.4) вспомогательных задач, решение поставленной задачи при граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_{x1}(0, y) = c(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \quad (0 < y < \infty) \\ \sigma_{yy}(x, 0) = p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_0(x), \quad (0 < x < a, \quad b < x < \infty) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$U(x, -h) = V(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

сводится к удовлетворению условий контакта между составляющими частями исходной области

$$U(x, 0^+) = U(x, 0^-), \quad V(x, 0^+) = V(x, 0^-), \quad a < x < b$$

и приводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных $p(x)$ —нормального и $q(x)$ —касательного напряжений

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b q(t) \frac{dt}{x-t} + \int_a^b M_3(t, x) p(t) dt + \int_a^b M_2(t, x) q(t) dt = F_1(x)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) \frac{dt}{x-t} + \int_a^b M_3(t, x) p(t) dt - \int_a^b M_4(t, x) q(t) dt = F_2(x) \quad (3.2)$$

$$(a < x < b)$$

где

$$4M_{1,1}(t, x) = R_{1,1}(t, x) - K_{1,1}(t, x), \quad 4M_3(t, x) = R_3(t, x) + K_3(t, x)$$

$$4M_2(t, x) = R_2(t, x) - K_2(t, x) - \frac{4}{\pi(x+t)}$$

Решение системы (3.2) с учетом интегрального условия равновесия

$$\int_a^b p(t) dt = \int_0^\infty \tau(y) dy - \int_0^a p_0(x) dx - \int_b^\infty p_0(x) dx$$

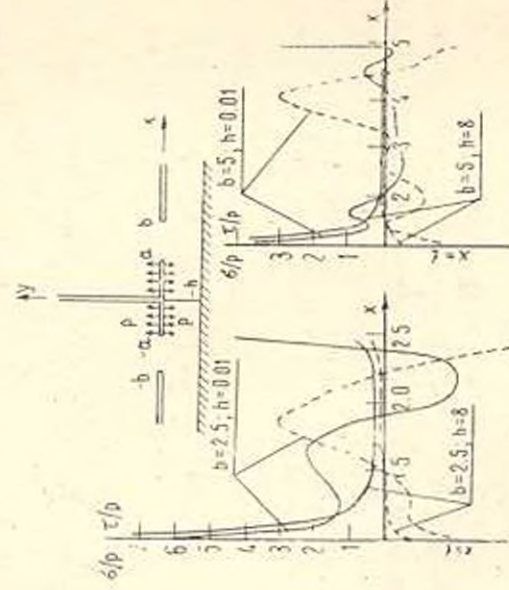
$$\int_a^b q(t) dt = \int_0^\infty \tau(y) dy - \int_0^a q_0(x) dx - \int_b^\infty q_0(x) dx$$

в классе функций, не ограниченных на концах отрезка, существует и единственно [3, 4]. Приближенное решение (3.2) построено по Чебышевским узлам, следуя [5]. В табл. 1, 2 для различных величин параметров b и h ($a=1$) приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_{1,2}(a)$, $k_{1,2}(b)$ (отнесенных к $p \sqrt{(b-a)/2}$). Далее приведены графики нормального (сплошные линии) и касательного (штриховые линии) напряжений в случае нормального давления интенсивностью p на трещинах.

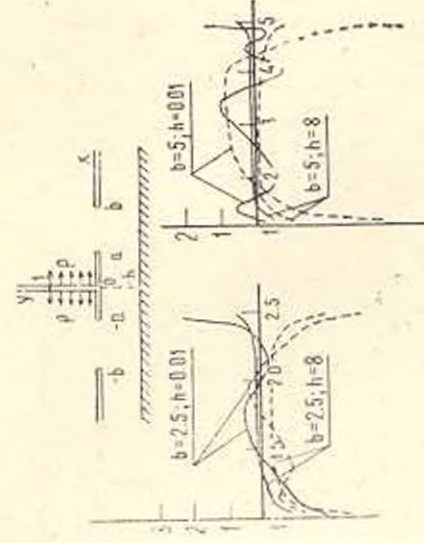
Таблица 1

$k_{1,2}(a)$	h/a	0.1	0.5	1.0	5.0	8.0
k_1	1.1	28.742	29.587	29.793	29.946	29.946
k_2		-1.780	-0.720	-0.376	-0.309	-0.313
k_1	1.5	2.918	3.354	3.462	3.540	3.542
k_2		-0.578	-0.310	-0.176	-0.138	-0.140
k_1	2	1.201	1.419	1.486	1.547	1.549
k_2		-0.322	-0.192	-0.123	-0.093	-0.095
k_1	5	0.263	0.282	0.306	0.331	0.332
k_2		-0.251	-0.064	-0.044	-0.035	-0.035

$k_{1,2}(b)$	$\frac{h/a}{b/a}$	0.1	0.5	1.0	5.0	8.0
k_1 k_2	1.1	17.477 1.816	17.084 0.738	16.927 0.376	16.784 0.295	16.780 0.298
k_1 k_2	1.5	0.974 0.492	1.108 0.314	1.060 0.178	1.034 0.112	1.034 0.114
k_1 k_2	2	0.202 0.191	0.287 0.153	0.293 0.122	0.266 0.065	0.265 0.066
k_1 k_2	5	0.111 0.041	0.050 0.012	0.029 0.023	0.012 0.014	0.012 0.013



Фиг. 2



Фиг. 3

ABOUT THE PROBLEM OF ELASTIC HALF-PLANE WEAKENED WITH CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՀԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒՂԱՅՎԱՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿԻՍՈՂԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽԵԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ր. Ա. ԱՖԻԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ և վերջավոր ճաքերով թուլացված առաձգական կիսահարթի մասին հարթ խնդիրը, երբ ճաքերի ափերին ազդում են ինքնահաճախարակչով լարումներ: Ստացված են ինտեկուսիվային գործակիցներ ճաքերի ծայրերին:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984, 255 с.
3. Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Граничные интегральные уравнения и задачи теории трещин. Л.: Изд.—во ЛГУ, 1986, 88 с.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985, 253 с.
5. Erdogan F. E., Gupta G. D. On the numerical solutions of singular integral equations.—Quart Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
15.VI.1988