ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1989

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

АХИНЯН Ж. О.

Рассматривается линейная плоская задача о движении магнитоупругой среды, занимающей нижнее полупространство и граничащей с верхним полупространством, занятым диэлектриком (воздухом).

Указанная задача по определению напряжений, в линейной и нелинейных постановках, решена в [1].

По границе полупространств распространяется ударная волна. Начальное магнитное поле однородно и перпендикулярно к границе раздела сред. Для простоты считается, что давление за фронтом на границе изменяется по времени периодически с частотой ω, хотя полученные результаты — расчет вида скорости поверхностной волны — остаются без изменения для произвольного распределения $p_1(x, t)$.

Уравнения движения магнитоупругой среды в плоской задаче при начальном магнитном поле B_0, направленном по оси y, имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(a^2+a_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(b^2+a_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{1}$$

где a, b, a_1 — скорости продольных, поперечных и альфвеновских волн, u, v — компоненты вектора перемещения по x, y.

Граничные условия на поверхности $y=0$ имеют вид [1]

$$b^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}B_0 b_x=\frac{1}{4\pi\rho}B_0 b_x^{e}$$
$$(a^2-2b^2)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{p_1(x,t)}{\rho} \tag{2}$$

Пусть соотношения

$$X_{1,2}=\frac{x}{V}+\beta_{1,2}\left(\frac{1}{V}\right)y-t=0 \tag{3}$$

определяют уравнения быстрой и медленной магнитоупругих волн, причем $\alpha=\dfrac{1}{V}$ и $\beta_{1,2}(\alpha)$ — корни дисперсионного уравнения плоских волн для (1).

Как показано в [1]

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{q \mp \left[q^2 - 4a^2(b^2 + a_1^2)(1 - b^2 v^{-2})\left(1 - \frac{a^2 + a_1^2}{V^2}\right)\right]^{1/2}}{2a^2(b^2 + a_1^2)}$$

где

$$q = a^2 + b^2 + a_1^2 - (a_1^2 b^2 + a^2 a_1^2 + 2a^2 b^2) V^{-2}$$

Введем переменные

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_4 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_5 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v_6 = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_4}{\partial y} = \frac{\partial v_5}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_4}{\partial t} = \frac{\partial v_6}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = (a^2 + a_1^2)\frac{\partial v_1}{\partial x} + (b^2 + a_1^2)\frac{\partial v_2}{\partial y} + (a^2 - b^2)\frac{\partial v_4}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_6}{\partial t} = (a^2 - b^2)\frac{\partial v_1}{\partial y} + b^2\frac{\partial v_4}{\partial x} + a^2\frac{\partial v_5}{\partial y}$$

Из условия равенства компонент полных напряжений при $y = 0$, учитывая, что в магнитоупругой среде

$$b_x = B_0 \frac{\partial u}{\partial y}; \quad b_y = -B_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

и в диэлектрике

$$b'_x = B_x \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v}\right)\right]$$

$$b'_y = B_y \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v}\right)\right], \quad B_x + iB_y = 0$$

можно получить при $y = 0$ следующие соотношения:

$$(b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - \frac{B_0}{4\pi\rho} B_x = 0$$

$$B_y = -B_0(U_1 + V_1); \quad B_x = iB_0(U_1 + V_1)$$

$$(b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - ia_1^2(U_1 + V_1) = 0 \tag{6}$$

$$(a^2 - 2b^2)(U_1 + V_1) + a^2(U_5 + V_5) = -\frac{P}{\rho}$$

$$P_1(x, t) = p_1 \exp(i\omega(sV^{-1} - t))$$

Решение уравнений (6) запишется в следующем виде:

$$DU_6 = \frac{P_1}{\rho}\left[V(1 - b^2 V^{-2} - a^2\gamma_2^2)\left(b^2 + a_1^2 - \frac{ia_1^2}{V\gamma_2}\right) + V^{-1} b^2(a^2 - b^2)\right]$$

где

$$D=\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})+a^2b^2\beta_1^2}{\beta_1}\left|\frac{V(1-b^2V^{-2}-a^2\beta_2^2)(b^2-a_1^2)}{a^2-b^2}\right.+$$

$$+b^2V^{-2}\left|-\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})+a^2b^2\beta_2^2}{\beta_2}\right|\frac{V(1-b^2V^{-2}-a^2\beta_1^2)(b^2+a_1^2)}{a^2-b^2}+$$

$$+b^2V^{-2}\left|-\frac{ia_1^2}{\beta_1\beta_2}a^2(1-b^2V^{-2})(\beta_1^2-\beta_2^2)\right.$$

Считая a_1^2/a^2 малой величиной и полагая

$$\beta_1^2=\beta_{1,0}^2+a_1^2\beta_1^{(1)};\quad \beta_2^2=\beta_{2,0}^2+a_1^2\beta_2^{(1)};\quad \beta_{1,0}^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{V^2};\quad \beta_{2,0}^2=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}$$

можно получить в главном порядке

$$\beta_1^{(1)}=-\frac{1}{a^2V^2};\quad \beta_2^{(1)}=-\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)$$

$$\beta_1=\beta_{1,0}+\frac{1}{2}a_1^2\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}};\quad \beta_2=\beta_{2,0}+\frac{1}{2}a_1^2\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}}$$

Тогда получится с той же точностью

$$D=\frac{a^2-b^2}{\beta_{1,0}}V\left[-(1-2b^2V^{-2})^2-4\beta_{1,0}\beta_{2,0}b^4V^{-2}\right]+\gamma a_1^2+i\delta a_1^2$$

где

$$\gamma=\left[\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})}{\beta_{1,0}}+a^2b^2\beta_{1,0}\right]\left[\left(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-V\frac{a^2}{a^2-b^2}\beta_{2,0}^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_2^{(1)}\right)\right]-\left[\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})\beta_1^{(1)}}{2\beta_{1,0}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}a^2b^2\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}}\right]\left[\left(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}b^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_{2,0}^2+\frac{1}{V}b^2\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})}{\beta_{2,0}}+a^2b^2\beta_{2,0}\right]\left[\left(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}-V\frac{a^2\beta_{1,0}^2}{a^2-b^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_1^{(1)}\right)\right]+\left[\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})\beta_2^{(1)}}{2\beta_{2,0}^2}-\frac{1}{2}a^2b^2\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}}\right]\times$$

$$\times\left(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}b^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_{1,0}^2+\frac{1}{V}b^2\right)$$

$$\delta=\frac{1-b^2V^{-2}}{\beta_{1,0}\beta_{2,0}b^2}(a^2-b^2);\quad V=\frac{1}{s}$$

Волны Релея получаются из условия $D=0$, при этом можно считать движение свободным или полагать $P_1=0$.

Запишем, что $s=s_0+a_1^2s_1$, где $s_0=\frac{1}{c_R}$, c_R — есть скорость обычных волн Релея. Известно, что $c_0 = 0{,}96\, b$.

$$(1-2b^2\alpha_0^2)^2 + 4\beta_{1,0}(\alpha_0)\beta_{2,0}(\alpha_0)b^4\alpha_0^2 = 0$$

$$\beta_{1,0}^2(\alpha_0) = \frac{1}{a^2} - \alpha_0^2, \quad \beta_{2,0}^2(\alpha_0) = \frac{1}{b^2} - \alpha_0^2$$

Следует найти α_1. Из уравнения $D=0$ имеем

$$a_1^2\alpha_1 \left[\frac{1}{\left(\alpha_0^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{1/2}} \left(-\frac{1}{\alpha_0^2} - 4b^2 + 12b^4\alpha_0^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\alpha_0^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \left(-1 + 4b^2\alpha_0^2 - 4b^4\alpha_0^4 \right) \right] = \frac{i\chi a_1^2 - \lambda a_1^2}{a^2 - b^2}$$

Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 + i\alpha_3$, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{i\chi(\alpha_0) - \lambda(\alpha_0)}{A(\alpha_0)}$$

где

$$i\chi(\alpha_0) - \lambda(\alpha_0) = B(\alpha_0)$$

$$B(\alpha_0) = \frac{a(1-2b^2\alpha_0^2)(3a^2\alpha_0^2 - 2\alpha^2 b^2 \alpha_0^4 - b^2\alpha_0^2 + 2b^4\alpha_0^4 - 2)}{2\alpha_0(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} -$$

$$- \frac{2\alpha_0 b(1-b^2\alpha_0^2)(a^2-b^2)}{(\alpha_0^2 b^2 - 1)^{1/2}} + \frac{a(1-b^2\alpha_0^2)(a^2-b^2)}{b(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{1/2}(\alpha_0^2 b^2 - 1)^{1/2}}$$

$$A(\alpha_0) = \frac{a}{\alpha_0(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} (8b^4 a^2 \alpha_0^6 - 12b^4\alpha_0^4 + 4b^2\alpha_0^2 - 2a^2\alpha_0^2 + 1)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{a_1^2\alpha_1}{\alpha_0^2} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{a_1^2}{\alpha_0^2} \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{B(\alpha_0)}{A(\alpha_0)}$$

или

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\left(1 - \frac{a_1^2}{a^2} K\right)$$

где

$$K = \frac{1}{\alpha_0\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \frac{B(\alpha_0)}{A(\alpha_0)};$$

Таким образом, показано, что с точностью до малых порядка a_1^2, решение уравнения $D=0$, $1/\alpha$ есть вещественное число и затухание поверхностных волн отсутствует.

Для произвольных a_1 требуется более подробное рассмотрение.

Если $V<b$, то $1-b^2V^{-2}<0$ и $1-(a^2+a_1^2)V^{-2}<0$.

Тогда для квадрата подкоренного значения в $\beta_{1,2}$ получается

$$(b^2a_1^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^4}-2(a^2+b^2+a_1^2)(a_1^2b^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^2}+(a^2-b^2-a_1^2)^2=$$

$$=(b^2a_1^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^2}(b^2a_1^2V^{-2}-a^2a_1^2V^{-2}-2a^2-2b^2-2a_1^2)+(a^2-b^2-a_1^2)^2>0 \quad (7)$$

так как $b^2a_1^2-a^2a_1^2<0$ и $b^2a_1^2V^{-2}-a^2a_1^2V^{-2}-2a^2-2b^2-2a_1^2<0$.

Так как дискриминант (7)

$$\Delta=(a^2+b^2+a_1^2)^2(b^2-a^2)^2a_1^4-(b^2-a^2)^2(a^2-b^2-a_1^2)^2a_1^4>0.$$

то существуют действительные корни V_1^2 и V_2^2 (7) такие, что

$$1/V^2<1/V_1^2 \text{ и } 1/V^2>1/V_2^2$$

С другой стороны, когда $V<b$, то $|q|>\sqrt{5}$ и $q<0$, и следовательно, $\beta_{1,2}$ — мнимые. Отсюда следует, что уравнение $Di=0$ для V имеет вещественные коэффициенты.

Обозначая $\gamma=1/V$, можно записать $iD(\gamma)=0$.

При $\gamma=1/b$ получается $\beta_{1,2}^2=\dfrac{q\mp q}{2a^2(b^2-a_1^2)}$

$$\text{то есть } \beta_1=0, \quad \beta_2=\frac{i}{ab}\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2a_1^2-b^4}{b^2-a_1^2}}$$

следовательно,

$$Di=ab^2\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2a_1^2-b^4}{b^2+a_1^2}}>0$$

При $\gamma\to\infty$ получается

$$\beta_1^2=-\gamma^2\frac{b^2(a_1^2+a^2)}{a^2(b^2-a_1^2)} \text{ и } \beta_2^2=-\gamma^2$$

Следовательно,

$$Di=4b^4\gamma^2(a^2-b^2)\left(1-\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2a_1^2}{a^2b^2+b^2a_1^2}}\right)<0$$

Отсюда следует вывод о том, что существует вещественный корень

$$D\left(\frac{1}{V}\right)=0 \text{ при } 1/b<\gamma<\infty$$

Таким образом, показано, что при $1/b<\gamma<\infty$ существует вещественный корень $V<b$ уравнения Релея и поверхностные волны не затухают.

SURFACE WAVES ON BOUNDARY OF MAGNETOELASTIC HALF-SPACE AND DIELECTRIC MEDIA

J. H. HACHINIAN

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱԿԻՑ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ

Ժ. Հ. ՀԱԽԻՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մագնիսաառաձգական միջավայրի շարժման վերաբերյալ գծային հարթ խնդիր։ Միջավայրը զբաղեցնում է ստորին կիսատարածությունը և սահմանակից է մեկուսիչով (օդով) լցված վերին կիսատարածությանը։

Ցույց է տրվում, որ մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքների քառակուսու ճշտության դեպքում Ռելեյի ալիքները բացակայում են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахинян Ж. О., Багдоев А. Г.* Исследование движения магнитоупругой среды в линейной и нелинейной задачах.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 6, с. 91—100.

Кироваканский педагогический
институт

Поступила в редакцию
11.III.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

АНДРЕЕВ А. Н., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В.

В настоящей статье рассмотрен класс линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании осесимметричного напряженно-деформированного состояния слоистых конструктивно неоднородных анизотропных оболочек вращения. Известно [1—4], что анализ напряженно-деформированного состояния таких оболочек требует привлечения неклассических уравнений, позволяющих учесть анизотропию деформативных свойств, неоднородность жесткостных характеристик материала по слоям, ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, обжатие нормали. Варианты неклассических уравнений теории многослойных и однослойных оболочек, позволяющие в той или иной мере учесть названные факторы, разрабатывались многими авторами [1—8] и др. Для таких дифференциальных уравнений характерны переменность коэффициентов и повышенный порядок; важной их особенностью является существенно больший (во многих случаях на порядок и более) по сравнению с уравнениями классической теории, спектральный радиус матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений. При этом наибольшие по модулю собственные значения, соответствующие локальным и краевым эффектам напряженно-деформированного состояния, связанным с учетом поперечных сдвигов и обжатия нормали лежат как в левой, так и в правой комплексной полуплоскости. С этим обстоятельством связана резко выраженная в обоих направлениях интегрирования численная неустойчивость [9] дифференциальных уравнений изгиба, приводящая к непригодности для использования таких весьма эффективных в линейных задачах классической теории оболочек численных методов, как метод дискретной ортогонализации, конечноразностный и др. [9—11]. В этой связи являются актуальными разработка, апробация, оценка эффективности специальных алгоритмов численного решения краевых задач для таких систем дифференциальных уравнений.

В настоящей статье численное решение краевой задачи строится методом инвариантного погружения. Сформулирован соответствующий алгоритм, на основном шаге которого осуществляется совместное интегрирование задач Коши для двух жестких матричных диффренциальных уравнений. Метод использован при анализе напряженно-деформированного состояния слоистой круговой цилиндрической консольной оболочки, нагруженной внутренним давлением. Выполнен параметрический анализ напряженно-деформированного состояния и выявлено влияние поперечных сдвиговых деформаций на его характеристики. Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности метода погружения в задачах изгиба слоистых оболочек вращения.

§ 1. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y' = A(x)y(x) + f(x) \tag{1.1}$$

$$My(0) = a, \quad Ny(1) = b \tag{1.2}$$

Здесь $y(x)$ — искомый $2s$-мерный вектор, компонентами которого являются безразмерные кинематические и силовые параметры напряженно-деформированного состояния оболочки, x — безразмерная независимая переменная $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $f(x)$, $A(x)$ — соответственно непрерывные $2s$-мерный вектор и $2s \times 2s$ матрица, a, b — числовые s-мерные векторы, M, N — числовые $s \times 2s$ матрицы. Без ограничения общности можно считать, что матрица M имеет вид $M = |E_s, O_s|$, где E_s, O_s — соответственно единичная и нулевая матрицы порядка s. Этого можно добиться должной нумерацией координат вектора y. Будем использовать блочное представление матрицы $A(x)$, векторов $y(x)$, $f(x)$

$$A(x) = \begin{vmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{vmatrix}, \quad y(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{vmatrix}, \quad f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{vmatrix}$$

где $y_i(x)$, $f_i(x)$, $A_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$ — соответственно s-мерные векторы и матрицы порядка s. Аналогичные представления будем использовать для других векторов и матриц. Предполагаем существование и единственность решения краевой задачи (1.1), (1.2).

Следуя [12], рассмотрим погружение задачи (1.1), (1.2) в однопараметрическое семейство краевых задач с параметром погружения t (t — длина промежутка интегрирования)

$$y'(x, t) = A(x)y(x, t) + f(x), \quad My(0, t) = a, \quad Ny(t, t) = b$$

и рассмотрим две вспомогательные задачи

$$V'(x, t) = A(x)V(x, t) \tag{1.3}$$

$$MV(0, t) = O_s, \quad RV(t, t) = E_s \tag{1.4}$$

$$z'(x, t) = A(x)z(x, t) + f(x) \tag{1.5}$$

$$Mz(0, t) = a, \quad Rz(t, t) = b \tag{1.6}$$

Здесь $V(x, t)$, $z(x, t)$ — соответственно $2s \times s$ матрица и $2s$-мерный вектор

$$V(x, t) = \begin{vmatrix} V_1(x, t) \\ V_2(x, t) \end{vmatrix}, \quad z(x, t) = \begin{vmatrix} z_1(x, t) \\ z_2(x, t) \end{vmatrix}$$

R — $s \times 2s$ — числовая матрица вида $R = |O_s, E_s|$. Ясно, что решение краевой задачи (1.1), (1.2) представимо в форме

$$y(x)=y(x,1)=V(x,1)c+z(x,1) \qquad (1.7)$$

где c—постоянный s-мерный вектор, определяемый из краевого условия (1.2) в точке $x=1$.

Исследуем зависимость решения $V(x,t)$ краевой задачи (1.3), (1.4) от параметра погружения t при фиксированном $x\in[0,1]$. Дифференцируя по t обе части равенств (1.3), (1.4), приходим к краевой задаче для матрицы $V_t(x,t)$

$$V_t'(x,t)=A(x)V_t(x,t),\quad MV_t(0,t)=O_s,\quad RV_t(t,t)=-RV'(t,t) \qquad (1.8)$$

Сопоставляя линейные краевые задачи (1.3), (1.4) и (1.8), приходим на основании принципа суперпозиции к дифференциальному уравнению по параметру погружения t для матрицы $V(x,t)$

$$V_t(x,t)=-V(x,t)RV'(t,t)=-V(x,t)(A_{21}(t)V_1(t,t)+A_{22}(t)V_2(t,t)) \qquad (1.9)$$

Это матричное дифференциальное уравнение интегрируется по t на отрезке $[x,1]$ при начальном условии $V(x,t)|_{t=x}=V(x,x)$. Положим $U(t)=V(t,t)$ и установим дифференциальное уравнение для определения $2s\times s$ матрицы $U(t)$. Используя (1.3), (1.9), находим нужное уравнение

$$\frac{dU}{dt}=V'(t,t)+V_t(t,t)=A(t)U(t)-U(t)(A_{21}(t)U_1(t)+A_{22}(t)U_2(t))$$

Представим это матричное дифференциальное уравнение в виде системы двух уравнений относительно $s\times s$ матриц $U_1(t)$, $U_2(t)$

$$\frac{dU_k}{dt}=A_{k1}(t)U_1(t)+A_{k2}(t)U_2(t)-U_k(t)(A_{21}(t)U_1(t)+A_{22}(t)U_2(t)) \qquad (1.10)$$

($k=1,2$). Второе из краевых условий (1.4) требует

$$U_2(t)=E_s \qquad (1.11)$$

Легко проверить, что матрица $U_2(t)$, определенная формулой (1.11), удовлетворяет (при произвольной $s\times s$ матрице $U_1(t)$) второму уравнению системы (1.10).

Первое же уравнение этой системы запишется в виде

$$\frac{dU_1}{dt}=A_{12}(t)+A_{11}(t)U_1(t)-U_1(t)(A_{22}(t)+A_{21}(t)U_1(t)) \qquad (1.12)$$

Переходя к пределу при $t\to0$ в первом из краевых условий (1.4), получаем начальное условие для матричного дифференциального уравнения Риккати (1.12)

$$U_1(0)=O_s \qquad (1.13)$$

Исследуем теперь зависимость решения $z(x,t)$ краевой задачи (1.5), (1.6) от параметра погружения t при фиксированном $x\in[0,1]$. Дифференцируя обе части равенств (1.5), (1.6) по t и сравнивая результат дифференцирования с краевой задачей (1.3), (1.4), приходим на основании принципа суперпозиции к дифференциальному уравнению по t для вектора $z(x,t)$

$$z_t(x,t) = -V(x,t)Rz(t,t) = -V(x,t)(A_{21}(t)z_1(t,t) + A_{22}(t)z_2(t,t) + f_2(t)) \qquad (1.14)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется на отрезке $[x,1]$ при начальном условии $z(x,t)|_{t=x} = z(x,x)$. Положим $W(t) = z(t,t)$ и установим дифференциальное уравнение для определения $2s$-мерного вектора $W(t)$. Используя (1.5), (1.14), выводим требуемое уравнение

$$\frac{dW}{dt} = z'(t,t) + z_t(t,t) = A(t)W(t) + f(t) - U(t)(A_{21}(t)W_1(t) + A_{22}(t)W_2(t) + f_2(t)) \qquad (1.15)$$

Второе из краевых условий (1.6) требует

$$W_2(t) = 0 \qquad (1.16)$$

Представив уравнение (1.15) в виде системы двух дифференциальных уравнений относительно s-мерных векторов $W_1(t)$, $W_2(t)$, убеждаемся, что вектор $W_2(t)$, определенный формулой (1.16), удовлетворяет (при произвольном $W_1(t)$) второму уравнению этой системы. Первое же уравнение этой системы запишется в виде

$$\frac{dW_1}{dt} = f_1(t) + A_{11}(t)W_1(t) - U_1(t)(f_2(t) + A_{21}(t)W_1(t)) \qquad (1.17)$$

Переходя к пределу при $t \to 0$ в первом из краевых условий (1.16), получаем начальное условие для уравнения (1.17)

$$W_1(0) = a \qquad (1.18)$$

Введем $s \times (s+1)$ матрицы $\bar{A}_{12}(t)$, $\Lambda(t)$, Λ_0, Λ_1

$$\bar{A}_{12}(t) = [A_{12}(t),\ f_1(t)],\quad \Lambda(t) = [U_1(t),\ W_1(t)],\quad \Lambda_0 = [O_s,\ a],\quad \Lambda_1 = [E_s, 0],$$

$(s+1) \times s$ матрицу $\bar{A}_{21}(t)$ и $(s+1) \times (s+1)$ матрицу $\bar{A}_{22}(t)$

$$\bar{A}_{21}(t) = \begin{vmatrix} A_{21}(t) \\ 0 \end{vmatrix},\quad \bar{A}_{22}(t) = \begin{vmatrix} A_{22}(t), & f_2(t) \\ 0\ , & 0 \end{vmatrix}$$

и, наконец, $2s \times (s+1)$ матрицы $\bar{V}(x,t)$, $P(t)$

$$\bar{V}(x,t) = [V(x,t),\ z(x,t)],\quad P(t) = \begin{vmatrix} \Lambda(t) \\ \Lambda_1 \end{vmatrix}$$

полученные путем дополнения первоначальных матриц соответствующими строчками и столбцами. Задачи Коши (1.12), (1.13) и (1.17), (1.18) можно сформулировать теперь как задачу Коши для определения $s \times (s+1)$ матрицы $\Lambda(t)$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \bar{A}_{12}(t) + A_{11}(t)\Lambda(t) - \Lambda(t)(A_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)),\quad \Lambda(0) = \Lambda_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad (1.19)$$

Допускают совместную запись и уравнения (1.9), (1.14)

$$\overline{V}_t(x,t) = -\overline{V}(x,t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)) \tag{1.20}$$

Дифференциальное матричное уравнение (1.20) интегрируется на отрезке $[x, 1]$ при начальном условии

$$\overline{V}(x,t)|_{t=x} = P(x) \tag{1.21}$$

Заметим, что уравнение (1.20) линейно и однородно относительно искомой матрицы $\overline{V}$ и распадается на $2s$ независимых между собой систем дифференциальных уравнений, каждая из которых связывает между собой лишь $s+1$ элементов соответствующей строки матрицы $\overline{V}$. Кроме того, матрицы коэффициентов всех этих $2s$ линейных систем совпадают между собой. Это позволяет вместо задачи Коши (1.20), (1.21) рассмотреть задачу Коши

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi(t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), \quad \Phi|_{t=x} = E, \tag{1.22}$$

для $(s+1)\times(s+1)$ матрицы Φ. Решение задачи Коши (1.22) будем обозначать через $\Phi(t;x)$. В произвольной точке $t\in[x, 1]$ матрица $\overline{V}(x,t)$—решение задачи Коши (1.20), (1.21)—может быть найдена по формуле

$$V(x,t) = P(x)\Phi(t;x)$$

Пусть $Q=[0, \ldots, 0, 1]$—$(s+1)$-мерный вектор. Легко убедиться, что матрица $\Phi(t;x)$ имеет следующее строение:

$$\Phi(t;x) = \begin{Vmatrix} \Psi(t;x) \\ Q \end{Vmatrix} \tag{1.23}$$

и поэтому достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Psi(t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), \quad \Psi|_{t=x} = \Lambda_1 \tag{1.24}$$

для $s\times(s+1)$ матрицы Ψ. Отметим еще, что если $0\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_m<1$ — конечная возрастающая последовательность точек промежутка $[0,1]$ и $\Phi(t;x_1), \ldots, \Phi(t;x_m)$—решения задач Коши (1.22) с начальными условиями, заданными в точках $t=x_1, \ldots, t=x_m$ соответственно, то при $1\geqslant t\geqslant x_m$ справедлива формула

$$\Phi(t;x_1) = \Phi(x_2;x_1)\Phi(x_3;x_2)\ldots\Phi(x_m;x_{m-1})\Phi(t;x_m)$$

Пусть требуется построить решение $y(x)$ краевой задачи (1.1), (1.2) в точках $0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$. Процесс численного определения искомых величин $y(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ методом инвариантного погружения осуществляется в несколько шагов.

1) Проинтегрировать на отрезке $[0, 1]$ задачу Коши (1.19) совместно с уравнением (1.24), строя в процессе интегрирования матрицы $\Lambda(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и $\Psi(x_{i+1}; x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$NU(1)c = b - NW(1)$$

получающуюся в результате подчинения решения $y(x)$ в форме (1.7) краевому условию (1.2) в точке $x=1$.

3) При $i=n, n-1, \ldots, 0$ осуществить следующие операции:

а) Если $i<n$, то по формуле (1.23) восстановить матрицу $\Phi(x_{i+1}; x_i)$.

б) Сформировать $(s+1)\times(s+1)$ матрицу M_i

$M_i=E_{s+1}$ $(i=n)$, $M_i=\Phi(x_{i+1}; x_i)M_{i+1}$ $(i=n-1, n-2, \ldots, 0)$

в) Восстановить матрицу $\bar{V}(x_i, 1)$

$$\bar{V}(x_i, 1)=P(x_i)M_i$$

г) Вычислить решение $y(x_i)$ по формуле (1.7).

Метод требует запоминания $n+1$ $s\times(s+1)$ матриц $\Lambda(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и n $s\times(s+1)$ матриц $\Psi(x_{i+1}; x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$. При не слишком мелком разбиении отрезка $[0, 1]$ (например, для уравнений, предложенных в [5], не слишком мелкими могут считаться разбиения, содержащие до нескольких сотен точек) для запоминания матриц Λ, Ψ достаточно оперативной памяти ЭВМ БЭСМ-6.

Сформулированный алгоритм близок по структуре к алгоритмам, приведенным в [12, 13]. Однако, в отличие от [12] в данном алгоритме размерность решаемой системы дифференциальных уравнений не связана с числом точек разбиения отрезка $[0, 1]$ и не растет при увеличении их числа, а в отличие от алгоритма [13] здесь нет необходимости в интегрировании задачи Коши в обратном направлении.

Расчеты, выполненные для некоторых слоистых оболочек вращения распространенных геометрических форм с использованием уравнений изгиба [5], показали, что спектральный радиус якобиана правой части системы дифференциальных уравнений (1.19), (1.24) и спектральный радиус матрицы коэффициентов первоначальной системы уравнений изгиба — величины одного порядка. Собственные числа якобиана характеризуются большим разбросом и, что существенно, все лежат в левой комплексной полуплоскости. Такие системы дифференциальных уравнений проявляют свойства жесткости [9, 14]. Их устойчивое численное решение классическими явными методами Рунге-Кутта, Адамса и др. возможно лишь при существенном ограничении на шаг интегрирования

$$|\lambda h|<\text{const}$$

и при большой жесткости системы должно осуществляться специальными неявными методами [9, 14—16]. В то же время следует отметить, что в процессе интегрирования уравнений (1.19), (1.24) при достижении очередной точки x_i для дифференциального уравнения (1.24) требуется ставить новое начальное условие, что приводит к возврату в зону погранслоя [14]. Если разбиение $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ отрезка $[0, 1]$ имеет малый диаметр, то это обстоятельство может обесценить основное преимущество неявных методов решения жестких задач, состоящее в возможности существенного увеличения шага интегрирования после прохождения зоны погранслоя. В таких ситуациях оправдано применение явных методов с достаточно малым шагом

интегрирования, обеспечивающим устойчивость вычислительного процесса.

§ 2. В качестве примера использования сформулированного алгоритма рассмотрим задачу осесимметричного изгиба композитной слоистой круговой цилиндрической консольной оболочки толщины h, радиуса R и длины l, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением интенсивности P. При анализе напряженно-деформированного состояния используем уравнения изгиба [5], позволяющие учесть деформации поперечных сдвигов. В рассматриваемом случае эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{dT_{xx}}{dx}=0, \quad \frac{d^2M_{xx}}{dx^2}+\frac{T_{\varphi\varphi}}{R}=-P, \quad \frac{dS_{xx}}{dx}-Q_x=0 \qquad (2.1)$$

Здесь x—расстояние, отсчитываемое от края оболочки вдоль образующей, φ—угловая координата, T_{xx}, $T_{\varphi\varphi}$, M_{xx}, S_{xx}, Q_x—интегральные характеристики напряженного состояния [5]. Введем безразмерный вектор $y(\xi)$ $(\xi=x/l)$ кинематических и силовых параметров напряженно-деформированного состояния

$$y(\xi)=\left\| W, \frac{dW}{d\xi}, U, \Pi, T^*_{xx}, M^*_{xx}, \frac{dM^*_{xx}}{d\xi}, S^*_{xx}\right\|^T \qquad (2.2)$$

где $W=E_1w/Ph$, $U=E_1u/Pl$, $\Pi=h^2\pi_1/Pl$—соответственно безразмерные прогиб, осевое смещение точек отсчетной поверхности, функция сдвигов [5], T^*_{xx}, M^*_{xx}, S^*_{xx}—безразмерные усилия и моменты, E_1—модуль Юнга связующего первого (нижнего) слоя оболочки. В переменных (2.2) уравнения (2.1) вместе с соотношениями упругости и соотношениями деформации—перемещения [5] образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка, которую представим в виде

$$\frac{dy}{d\xi}=Ay(\xi)+f \qquad (2.3)$$

Элементы 8×8 матрицы A и вектора f постоянны и приведены (при другой нумерации координат вектора y) в [5]. Краевые условия, соответствующие выбранному типу закрепления, имеют вид

$$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=y_4(0)=y_5(1)=y_6(1)=y_7(1)=y_8(1)=0 \qquad (2.4)$$

С целью прояснения характера вычислительных трудностей, возникающих при интегрировании краевой задачи (2.3), (2.4), например, методом дискретной ортогонализации [10], выполнено параметрическое исследование спектрального радиуса матрицы A для случая трехслойной цилиндрической оболочки с однородными изотропными слоями, а также следующих матриц: B—6×6 матрица коэффициентов классической системы дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба трехслойной цилиндрической оболочки; C—аналогичная 6×6 матрица системы уравнений изгиба, базирующихся на гипотезе прямой линии [8]; D—8×8 матрица коэффициентов системы уравнений изгиба, базирующихся на допущении о квадратичном по нормальной координате z законе распределения сдвиговых поперечных деформаций в заполнителе и равенстве их нулю — в несущих слоях [2]

В табл. 1 в зависимости от параметра E_1/E_2 приведены спектральные радиусы R_B, R_C, R_D, R_A указанных матриц. Результаты получены для трехслойной оболочки симметричного строения ($E_1=E_3$) при следующих значениях параметров: $t_1=t_3=0.1\,h$, $t_2=0.8\,h$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$, $R/h=20$, $R/l=1$ (t_i, ν_i, E_i — соответственно толщина, коэффициент Пуассона, модуль Юнга i-го слоя). Из табл. 1 видно, что величины R_A, R_D (наибольшие по модулю собственные значения матриц A, D действительны) более чем на порядок превышают величины R_B, R_C. Кроме того, собственные числа расположены в комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси. Поэтому для системы уравнений (2.3) (и аналогичной ей системы с матрицей коэффициентов D) свойство численной неустойчивости в обоих направлениях интегрирования проявляется в весьма существенной мере, в то время как для дифференциальных уравнений изгиба с матрицами коэффициентов B и C это свойство выражено лишь умеренно. На этом основании можно сделать вывод (подтверждающийся и расчетным путем), что при указанных значениях параметров, задачи изгиба, рассмотренные в классической постановке и в рамках гипотезы прямой линии, могут быть успешно решены, например, методом дискретной ортогонализации, в то время как для задачи (2.3), (2.4) этот метод совершенно непригоден. Этот вывод справедлив и для композитных оболочек.

Таблица 1

E_1/E_2	1	10	15	20	25	30	35	40	45
R_B	8.03	6.82	6.70	6.64	6.60	6.57	6.55	6.54	6.53
R_C	8.03	6.82	6.70	6.64	6.60	6.57	6.55	6.51	6.53
$10^{-2}R_D$	2.93	1.85	1.63	1.56	1.46	1.38	1.31	1.25	1.20
$10^{-2}R_A$	3.43	1.89	1.70	1.58	1.47	1.39	1.32	1.26	1.20

Решение краевой задачи (2.3), (2.4) для композитной оболочки получено методом погружения. При вычислениях использовалась модель армированного слоя волокнистой структуры, предложенная в [17]. В рамках этой модели эффективные упругие постоянные $a_{ij}^{(k)}$ k-го слоя представимы в виде $a_{ij}^{(k)}=E_k^c b_{ij}^{(k)}$, где E_k^c (E_k^a) — модуль Юнга связующего (армирующих элементов) k-го слоя, а величины $b_{ij}^{(k)}$ определяются расчетным путем, являясь функциями структурных параметров армирования, коэффициентов Пуассона связующего и армирующих элементов, параметра E_k^a/E_k^c. Отметим также, что уравнения этой модели позволяют при известных средних напряжениях и деформациях представительного элемента k-го слоя определить напряжения и деформации в связующем и армирующих элементах и, тем самым, оценить эффективность их работы.

Будем называть [18] нагрузкой начального «разрушения» композитной оболочки то предельное значение интенсивности давления P, при котором в связующем или армирующих элементах впервые хотя бы в одной точке выполняется условие Мизеса

$$\max \left|\sigma^2_{x\,c(a)} + \sigma^2_{s\,c(a)} - \sigma_{x\,c(a)}\sigma_{s\,c(a)} + 3\tau^2_{xs\,c(a)}\right| = k^2_{c(a)} \qquad (2.5)$$

где $k_{c(a)}$ – предел текучести при растяжении связующего (c) или армирующих элементов (a). Обозначив через P_c^*, P_a^* нагрузку начального „разрушения" связующего (армирующих элементов), получим следующую формулу для определения P^*

$$P^* = \min(P_c^*, P_a^*)$$

Пусть, далее, $P_{\kappa c}$, $P_{\kappa a}$, P_κ – аналогичные величины, найденные при использовании уравнений классической теории оболочек [1] по критерию (2.5), в котором поперечное сдвиговое напряжение τ_{xz} определяется из дифференциального уравнения равновесия в напряжениях.

В первых строчках табл. 2 в зависимости от параметра q приведены результаты расчета максимального прогиба W^* и нагрузок начального „разрушения" P_c^*, P_a^*. В последних трех строчках табл. 2 приведены те же величины, найденные по уравнениям классической теории. Зависимости получены для двухслойной композитной оболочки со слоями равной толщины, первый из которых армирован в осевом направлении, второй—в окружном. Модули Юнга связующего (армирующих элементов) обоих слоев считались равными между собой $E_1^c = E_2^c$ ($E_1^a = E_2^a$) и полагалось $q = E_1^a/E_1^c$. Коэффициенты Пуассона всех материалов считались равными 0,3; остальные параметры имели значения $R/h = 15$, $R/l = 1{,}5$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{z1} = \omega_{z2} = 0{,}5$ (ω_i, ω_{zi} – интенсивности армирования в плоскости слоя и по высоте [17]).

Таблица 2

q	2	5	10	15	20	25	30	35	40
$10^{-2}W^*$	2.170	1.594	1.147	0.900	0.736	0.622	0.534	0.474	0.423
$10\frac{P_c^*}{k_c}$	0.262	0.275	0.327	0.382	0.440	0.497	0.560	0.615	0.676
$10^2\frac{P_a^*}{k_a}$	1.735	0.948	[illegible]	0.548	0.490	0.454	0.427	0.410	0.395
$10^{-2}W_\kappa$	2.192	1.612	1.161	0.912	0.746	0.630	0.541	0.480	0.428
$10\frac{P_{\kappa c}}{k_c}$	0.378	0.383	0.431	0.480	0.529	0.576	0.626	0.668	0.714
$10^2\frac{P_{\kappa a}}{k_a}$	2.555	1.428	1.105	0.960	0.878	0.821	0.783	0.756	0.734

Из табл. 2 видно, что в рассмотренном примере относительная погрешность от неучета поперечных сдвигов в определении максимальных прогибов невелика и не превышает 1,35%. В то же время различие в результатах расчета нагрузок начального «разрушения», найденных при учете и без учета сдвигов существенно. Так, например, при $q=40$ величина P^*_c почти в два раза меньше величины P_{ca}. Существенно, что учет влияния сдвига приводит к снижению обеих нагрузок P_a, P_c и, следовательно, к снижению нагрузки начального „разрушения" P^* композитной оболочки. Отметим еще, что „разрушение" связующего (армирующих элементов) начинается в заделанном сечении $\xi=0$ консольной оболочки на ее верхней (нижней) лицевой поверхности от осевых напряжений.

Так как матрица A системы дифференциальных уравнений (2.5) постоянна, то максимальные прогибы и «разрушающие» нагрузки можно найти и другим путем—путем построения аналитического решения краевой задачи (2.3), (2.4). Расчеты выявили полное совпадение полученных при этом результатов. Учитывая, что на структуре представленного алгоритма не сказывается переменность коэффициентов уравнений изгиба, можно сделать вывод (подтверждающийся и расчетным путем) об эффективности метода погружения в задачах изгиба различных классов оболочек вращения—композитных, переменной жесткости, со сложной формой меридиана и др.

NUMERICAL ANALYSIS OF ROTATION SANDWICH SHELLS STRESS—STRAIN STATE BY INVARIANT IMBEDDING METHOD

A. N. ANDREEV, Yu. V. NEMIROVSKI

ԵՌՇԵՐՏ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ԹՎԱՅԻՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԸՆԿՂՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա. Ն. ԱՆԴՐԵԵՎ, ՅՈՒ. Վ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Քննարկված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար եզրային խնդիրների դասը, որոնք առաջանում են շերտավոր պտտման թաղանթների սանդվիչ-տիպի լարվածային-դեֆորմացված վիճակի հաշվարկման ժամանակ, երբ կատարվում է ընդլայնական սահքերի դեֆորմացիայան հաշվի առնել թույլ տվող ձևում ու դասական հավասարումների բազայի վրա:

Հաշվարկների համար այդպիսի եզրային խնդիրների թվային լուծման դժվարությունները, որոնք պայմանավորված են ձևում դիֆերենցիալ հավասարումների խիստ արտահայտված անհամասեռությամբ բնութագրման երկու առանձնահատկություններով էլ, օգտագործվում է ինվարիանտ ընկղման մեթոդը:

Ձևակերպված է համապատասխան ալգորիթմ, որի հիմնական քայլում իրականացվում է երկու կոշտ մատրիցային դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշի խնդիրների համատեղ ինտեգրումը: Մեթոդի արդյունավետությունը ցույց է տրված կոնկրետ օրինակի վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки.—В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983, т. 15, с. 3—68.
4. *Немировский Ю. В., Резников Б. С.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с.
5. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* К теории упругих многослойных анизотропных оболочек.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 5, с. 87—96.
6. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем.—Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, с. 68—80.
7. *Рассказов А. О.* К теории многослойных ортотропных пологих оболочек.—Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11, с. 50—56.
8. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
9. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. М.: Мир, 1979. 312 с.)
10. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.—Успехи матем. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 171—174.
11. *Григоренко Я. М.* Решение задач теории оболочек методами численного анализа.—Прикл. механика, 1984, т. 20, № 10, с. 3—22.
12. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976. 223 с.
13. *Meyer Gunter H.* Initial Value Methods for Boundary Value Problems. Theory and Application of Invariant Imbedding. New York and London, Academic Press, 1973. 220 p.
14. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
15. *Артемьев С. С., Демидов Г. В.* А-устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.—В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975, с. 214—220.
16. *Gear C. W.* Algorithm 407. Difsub for Solution of Ordinary Differential Equations.—Comm. Assoc. Comput. Mach., 1971, v. 14, № 3, p. 185—190.
17. *Немировский Ю. В.* К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин.—Механика полимеров, 1972, № 5, с. 861—873.
18. *Немировский Ю. В.* Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя.—Журнал прикл. механики и техн. физики, 1969, № 5, с. 81—89.

Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Поступила в редакцию
24.III.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 624.042+624.074

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛА ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

ТАНАНАЙКО О. Д.

Цель настоящей работы—показать возможность такого преобразования уравнений теории оболочек, при котором из уравнений выпадают смешанные производные от искомых кинематических параметров. Такое преобразование упрощает построение вариационно-разностных схем для расчета оболочек сложной формы.

Будем придерживаться, в основном, обозначений, принятых в [1]. Потенциальная энергия деформации может быть выражена (при учете деформаций поперечного сдвига) следующим образом:

$$U=\frac{1}{2}\iint\Big[D(\varkappa_1^2+2\nu\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2^2)+2D(1-\nu)\tau^2+E^*h(\varepsilon_1^2+2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)+$$

$$+Gh\gamma^2+\frac{5}{6}Gh\gamma_{13}^2+\frac{5}{6}Gh\gamma_{23}^2\Big]ABd\alpha d\beta$$

Примем обычные формулы для ε_1, ε_2, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$

$$\varepsilon_1=u_{,\alpha}/A+av+w/R_1;\quad \varepsilon_2=v_{,\beta}/B+bu+w/R_2$$

$$\varkappa_1=\theta_{,\alpha}/A+a\psi;\quad \varkappa_2=\psi_{,\beta}/B+b\theta$$

Здесь введены обозначения $a=A_{,\beta}/AB$, $b=B_{,\alpha}/AB$, $E^*=E/(1-\nu^2)$. Введем в рассмотрение угол поворота элемента оболочки вокруг нормали к ее срединной поверхности. Этот угол определяется формулой [2]

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A}-\frac{u_{,\beta}}{B}+bv-au\right)$$

Тогда деформацию сдвига можно записать для срединной поверхности в двух эквивалентных формах

$$\gamma=2(\gamma_1-\omega)=2(\gamma_2+\omega)$$

где

$$\gamma_1=v_{,\alpha}/A-au,\quad \gamma_2=u_{,\beta}/B-bv$$

Деформация кручения также может быть записана в двух вариантах [3]

$$\tau=\tau_1+\gamma_2/R_1=\tau_2+\gamma_1/R_2$$

где

$$\chi_1=\psi_{,\alpha}/A-a\vartheta,\quad \chi_2=\vartheta_{,\beta}/B-b\psi$$

Для наших целей оказывается более удобным использовать несколько отличные от указанных (но легко получаемые из них) формы записи выражения для χ:

$$\chi=\chi_1+(\gamma_1-2\omega)/R_1 \quad \text{и} \quad \chi=\chi_2+(\gamma_2+2\omega)/R_2$$

Деформации поперечного сдвига получаются как разность между углами поворота нормали ϑ, ψ и соответствующими углами наклона ортов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ по отношению к их первоначальным направлениям (эти углы устанавливаются из геометрических соображений по обычным формулам теории оболочек):

$$\bar{\gamma}_1=\vartheta+w_{,\alpha}/A-u/R_1,\qquad \bar{\gamma}_2=\psi+w_{,\beta}/B-v/R_2$$

Составим функционал Φ, включающий потенциальную энергию деформации оболочки u, потенциал поверхностных и контурных нагрузок Π и взятую с лагранжевым множителем $\lambda(\alpha,\beta)$ левую часть однородного равенства, выражающего связь между углом ω и линейными смещениями:

$$\Phi=u+\Pi+\iint\lambda\left[\omega-\frac{1}{2}(v_{,\alpha}/A-u_{,\beta}/B+bv-au)\right]ABd\alpha d\beta$$

Выражение для u можно представить следующей суммой:

$$u=u_1^0+u_2^0+u_{12}$$

где

$$u_1^0=\frac{1}{2}\iint\left\{D\left[\varkappa_1^2+(1-\nu)\left(\chi_1+\frac{\gamma_1-2\omega}{R_1}\right)^2\right]+2D\nu[(b\vartheta_{,\alpha}/A+ab\psi/AB)]+\right.$$

$$+E^*\nu h\varepsilon_1^2+2Gh(\gamma_1-\omega)^2+2E^*\nu h\left[\frac{u_{,\alpha}}{A}\left(bu+\frac{w}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(au+\frac{w}{R_1}\right)\left(bu+\frac{w}{R_2}\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{5}{6}Gh\bar{\gamma}_1^2\right\}ABd\alpha d\beta$$

$$u_{12}=\nu\iint[D\vartheta_{,\alpha}\psi_{,\beta}+E^*hu_{,\alpha}v_{,\beta}]d\alpha d\beta$$

Предполагается, конечно, что деформации ε_1, $\varkappa_1$, χ_1, γ_1, $\bar{\gamma}_1$ уже выражены с помощью указанных выше зависимостей через перемещения и углы поворота. Формула для u_2^0 записывается аналогично формуле для u_1^0 и здесь не приводится.

Выполнив операцию интегрирования по частям, преобразуем формулу для u_{12}

$$u_{12}=\Phi_k+\nu\iint[D\vartheta_{,\beta}\psi_{,\alpha}+E^*hu_{,\beta}v_{,\alpha}]d\alpha d\beta$$

причем

$$\Phi_3 = \frac{\nu}{2}\oint [D(\psi, \theta-\theta_0, \psi) + E^* h (v, u - u_0, v)] ds$$

Используя формулы для параметров сдвига и кручения, можем избавиться в двойном интеграле от произведений производных по разным координатам

$$u_{,\beta} v_{,\alpha} = \frac{B}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A} + bv - au - 2\omega\right) v_{,\beta} + \frac{A}{2}\left(\frac{u_{,\beta}}{B} + au - bv + 2\omega\right) u_{,\alpha}$$

$$\theta_{,\beta}\psi_{,\alpha} = \frac{B}{2}\left[\frac{\psi_{,\alpha}}{A} + b\psi - a\theta - \Delta k\gamma_{12} - 2\omega k_1\right]\psi_{,\beta} +$$

$$+ \frac{A}{2}\left[\frac{\theta_{,\beta}}{B} - b\psi + a\theta - \Delta k\gamma_{12} + 2\omega k_2\right]\theta_{,\alpha}$$

$$(\Delta k = k_2 - k_1)$$

Здесь снова предполагается, что деформации γ_{11}, γ_{12} выражены через перемещения; использованы обычные обозначения для главных кривизн срединной поверхности

$$k_1 = 1/R_1, \quad k_2 = 1/R_2$$

Следовательно, окончательно

$$u_{12} = \Phi_3 + \Delta u_1 + \Delta u_2$$

где Δu_1 — двойной интеграл, в подынтегральную функцию которого входят производные от искомых кинематических параметров по координате α; аналогичным свойством обладает Δu_2.

Обозначая $u_1 = u_1^0 + \Delta u_1$, $u_2 = u_2^0 + \Delta u_2$, имеем теперь

$$\bar{\Phi} = u_1 + u_2 + \Pi + \iint \lambda \left[\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A} - \frac{u_{,\beta}}{B} + bu - av\right)\right] AB\, d\alpha\, d\beta$$

Варьируя $\bar{\Phi}$ по ω, найдем

$$\lambda = E^* \nu h [2\omega + au - bv] + D\nu [Bk_1\psi_{,\beta} - Ak_2\theta_{,\alpha}] / AB$$

Вторая квадратная скобка может быть записана в двух эквивалентных формах, каждая из которых содержит производные от кинематических параметров только по одной координате

$$Bk_1\psi_{,\beta} - Ak_2\theta_{,\alpha} = AB\left[\Delta k \frac{\theta_{,\beta}}{B} + k_1(b\psi - \Delta k\gamma_{12} - 2k_2\omega - a\theta)\right] =$$

$$= AB\left[\Delta k \frac{\psi_{,\alpha}}{A} - k_2(a\theta + \Delta k\gamma_{12} + 2k_1\omega - b\psi)\right]$$

С учетом этих равенств после подстановки выражения для λ в функционал $\bar{\Phi}$ приходим к новому функционалу

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Pi$$

где

$$\Phi_1 = u_1 + \Delta\Phi_1, \quad \Phi_2 = u_2 + \Delta\Phi_2$$

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1}{2}\iint\left(\omega - \frac{v_\alpha}{B} + \frac{au - bv}{2}\right)\{E^*\nu h(2\omega + au - bv) -$$

$$-D\nu[\Delta k_{\ldots} - k_1(a\vartheta + \Delta k_{\gamma 1} + 2\omega k_1 - b\ldots)]\}AB\,d\alpha\,d\beta$$

(формула для $\Delta\Phi_2$ записывается аналогично)

Варьирование Φ по всем линейным и угловым смещениям приводит к получению шести разрешающих уравнений в перемещениях. Оператор этих уравнений является суммой двух операторов, каждый из которых предписывает дифференцирование искомых кинематических параметров только по одной из двух криволинейных координат. Описанное преобразование оказывается полезным при использовании покоординатных методов построения вариационно-разностных схем [4], позволяющих ограничиваться в решении двумерных задач одномерными сеточными аппроксимациями. Соответствующей дискретной модели может быть придана конечноэлементная трактовка. Элементами модели оказываются в этом случае одномерные двухузловые объекты—«квазистержни» [5].

ON A TRANSFORMATION OF FUNCTIONAL OF THE SHELL THEORY

O. D. TANANAYKO

ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼԻ ՄԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Օ. Դ. ՏԱՆԱՆԱՅԿՈ

Ամփոփում

Ցույց է տրված թաղանթների տեսության Ռեյսների ֆունկցիոնալի կոորդինատների անջատման տեսքով գրանցման հնարավորությունը (ընդլայնական սահքի հաշվառման դեպքում)։

Մինիմիզացնող ֆունկցիոնալը ներկայացված է գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից մեկը պարունակում է ածանցյալներ միայն ըստ առաջին կորագիծ կոորդինատի, մյուսը՝ ըստ երկրորդ կոորդինատի, իսկ երրորդը՝ ըստ եզրագծի թաղանթը առանձնացված ալիքի։ Այդ տեսքով գրելը թույլ է տալիս ընտրելով երկչափ խնդրի մոտավոր լուծման մեջ առանձնացված միաչափ տարբերակային մոտարկումներով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колкунов Н. В.* Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1972.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1975.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. М.: Судпромгиз, 1961.
4. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
5. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / А. П. Филин, О. Д. Тананайко, И. М. Чернева, М. А. Шварц.— Л.: Стройиздат, 1983.

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
29.XII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 539.319

ЗАДАЧА СОУДАРЕНИЯ ДВУХ ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТВЕРДОЙ ОПОРЫ

МАРТИРОСЯН А. Н.

Задача соударения плоских тел в форме прямых углов при наличии на нижних сторонах углов частично твердой опоры решена в [1]. Задачи о трещинах в случае анизотропной среды рассмотрены в [2, 3, 4]. В случае движущейся трещины для изотропной среды с постоянной скоростью задача решена в [5], а для переменной скорости—в [6]. В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение нестационарной смешанной задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью.

§ 1. *Формулировка задачи соударения*

Рассмотрим формулировку смешанной задачи соударения тел, имеющих вид прямых двугранных углов движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью V_0. Задача считается плоской. Ось x выбирается по нижним сторонам углов, ось y направлена вертикально вверх (фиг. 1). На границе углов имеется твердая опора $-\infty < x < l(t)$, конец которой движется со скоростью $\dot{l}(t)$, где t—время с начала соударения. Рассмотрены случаи, когда соударение происходит на опоре и вне ее.

Фиг. 1

Если углы были бы полуплоскостями $-\infty < y < \infty$, то решение в отсутствие опоры приняло бы вид

$$u_0 = -V_0 t H(x' - \sqrt{a}\,t) + V_0 t H(-x' - \sqrt{a}\,t) - \frac{x'}{\sqrt{a}} V_0 H(\sqrt{a}\,t - |x'|) \qquad (1.1)$$

$$v_0 = 0, \quad x' = x + \xi$$

Здесь u_0, v_0 — смещение по осям x, y; $x = -\xi$—прямое слияние углов, $H(x)$—единичная функция, a—упругая постоянная, координата x'

отсчитывается от точки соударения тел, координата x отсчитывается от начальной точки 0, являющейся точкой перехода твердой опоры в свободную границу в момент $t=0$; то есть при $y=0$, $x<l(t)$ имеет место условие $v=0$, а при $x>l(t)-\sigma_{yy}=0$, где σ_{yy} есть нормальное напряжение и на всей границе касательное напряжение $\tau_{xy}=0$. Из (1.1) следует

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}=-V_0H(x'-\sqrt{a}t)+V_0H(-x'-\sqrt{a}t) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x}=-\frac{V_0}{\sqrt{a}}H(\sqrt{a}t-|x'|)$$

Вводя двумерные возмущения $U=u-u_0$, $V=v-v_0$, можно записать уравнение движения упругой среды для U, V в виде [4]

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\quad \left(a=\frac{C_{11}}{\rho},\quad b=\frac{C_{22}}{\rho}\right)$$

$$c\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\quad \left(d=\frac{C_{66}}{\rho},\quad c=\frac{C_{66}+C_{12}}{\rho}\right) \tag{1.3}$$

Здесь C_{ij}—упругие постоянные, ρ—плотность среды. При $t=0$ имеем $U=0$, $V=0$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$.

Вышеуказанные граничные условия ($y=0$), в которые подставлены σ_{yy}, τ_{xy} через U, V и учтено (1.2), можно записать в виде

$$(c-d)\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{c-d}{\sqrt{a}}V_0H\left(t-\frac{|x'|}{\sqrt{a}}\right),\quad x>l(t)$$

$$V=0,\quad x<l(t);\quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{1.4}$$

§ 2. Определение решения задачи, для которой точка соударения тел расположена на жесткой опоре

Вначале рассмотрим те значения $\xi>0$, при которых линия слачения тел находится на жесткой опоре, тогда в (1.4) $H\left(\dfrac{x'}{\sqrt{a}}+t\right)=1$; $(x>l(t))$. Согласно [2] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по x от компонент смещения по осям x и y

$$\bar{U},\bar{V}=\int_0^\infty U,V\exp(-st)dt \tag{2.1}$$

$$\bar{U},\bar{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}U_n,V_n\exp[-iqx-iy\beta_n(q)]dq$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$\bar{V}_n = -\frac{s^2 + aq^2 + d\beta_n}{cq\beta_n}\bar{U}_n, \quad \beta_n = i\left[\frac{(b+d)s^2 + Lq^2 + (-1)^n\sqrt{\Delta(q)}}{2bd}\right]^{1/2}$$

$$\Delta(q) = [(b+d)s^2 + Lq^2]^2 - 4bd^2\nu_1^2\nu_2^2$$

$$\nu_1 = i\sqrt{\frac{s^2}{a} + q^2}, \quad \nu_2 = i\sqrt{\frac{s^2}{d} + q^2}, \quad L = ab - d^2 - c^2, \quad a > d, \quad b > d > 0$$

$$(2.2)$$

$$k_1 = ab - (c-d)^2 > 0, \quad a(a-d) - c^2 > 0$$

Обозначая левую часть первого условия (1.4) через $\sigma(t, x)$, а второе условие через $V(t, x)$, представим эти функции в виде

$$\sigma(t, x) = \sigma_-(t, x)H(l-x) + \sigma_+(t, x)H(x-l)$$

$$V(t, x) = V_-(t, x)H(l-x) + V_+(t, x)H(x-l)$$

Значения функций $\sigma = \sigma_-(t, x)$ при $x < l(t)$ и $V = V_+(t, x)$ при $x > l(t)$ неизвестны и подлежат определению

$$\sigma_+(t, x) = \frac{c-d}{\sqrt{a}}V_0 H\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right), \quad V_-(t, x) = 0$$

Легко отметить, что изображения функций $\sigma(t, x)$, $V(t, x)$ связаны соотношением

$$\bar{V}(s, q) = \bar{S}(s, q)\,\bar{\sigma}(s, q) \qquad (2.3)$$

где $\bar{S}$ есть изображение решения задачи Лемба [6]. В случае анизотропной среды S имеет вид

$$\bar{S}(s, q) = -\frac{si}{\nu_2 C_0}F(s, q), \quad F(s, q) = \frac{C_0\nu_1\nu_2(\beta_1 - \beta_2)}{R(s, q)}$$

$$C_0 = K_1\left(2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{ad}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(s, q) \to 1, \quad q \to \infty$$

$$R(s, q) = (bs^2 + K_1q^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\,\nu_2 - cs^2\nu_1 =$$

$$= \frac{adK_1\sqrt{a}}{4(a-d)s^2\sqrt{b}}\{Q_1s^4 - P_1s^2(q^2 + \nu_1\nu_2) + 4q^2\nu_1\nu_2 +$$

$$+ (\nu_2^2 - q^2)^2\}(\nu_1 + \nu_2), \quad P_1 = \frac{4(\sqrt{ab} - b)}{K_1}$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{a^2k_1}[b(b-a) + (c+d-b)(c+b-3d)]$$

где $R(s, q)$ — функция Рэлея. Число и положение точек разветвления функций β_n на комплексных плоскостях в зависимости от соотношения упругих постоянных изучено в [4]. После выбора ветвей функции $\alpha_\pm$, β_n легко получить [2]

$$S(s,q)=S_+(s,q)\bar{S}_-(s,q),\quad P_\pm(s,q)=\frac{1}{\bar{S}_\pm(s,q)}$$

$$S_+(s,q)=\frac{a}{C_R}\frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}}-iq}}{sc_R^{-1}-iq}D_+,\quad \bar{S}_-(s,q)=\frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}}+iq}}{sc_R^{-1}+iq}D_- \qquad (2.4)$$

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\ln\left|\frac{R(l)}{\overline{R(l)}}\,\frac{\beta_2(l)-i\beta_1(l)}{\beta_2(l)+i\beta_1(l)}\right|\frac{dl}{l\pm\frac{iq}{s}}\right\}$$

$$\beta_n(l)=\left\{\frac{\sqrt{(b+d-Ll^2)^2-4abd^2\left(l^2-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{d}-l^2\right)}-(-1)^n(Ll^2-b-d)}{2bd}\right\}^{1/2}$$

$$R(l)=(b-K_1l^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{1}{d}-l^2}+ai\sqrt{l^2-\frac{1}{a}},\quad R\left(\frac{1}{c_R}\right)=0$$

Так как функции $D_\pm(iq/s)$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости $z=iq/s$, за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{a}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{d}}\right]$, можно с помощью формулы Коши для неограниченной области получить значение $D_\pm(iq/s)$ в виде [6]

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_1(u)du}{u\mp\frac{iq}{s}},\quad D_\pm^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\frac{F_2(u)du}{u\mp\frac{iq}{s}} \qquad (2.5)$$

$$F_1(u)=\gamma(u)\exp[\varkappa(u)],\quad F_2(u)=-\gamma(u)\exp[-\varkappa(u)]$$

$$\gamma(u)=\frac{a\sqrt{u^2-\frac{1}{a}}\,\beta_2(u)-(b-K_1u^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{1}{d}-u^2}\,\beta_1(u)}{\pi|R(u)|\,[\beta_2^2(u)+\beta_1^2(u)]}$$

$$\varkappa(u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}}\ln\left|\frac{R(l)}{\overline{R(l)}}\,\frac{\beta_2(l)-i\beta_1(l)}{\beta_2(l)+i\beta_1(l)}\right|\frac{dl}{l-u}$$

Обозначим через $S_\pm(t,x)$ и $P_\pm(t,x)$ оригиналы $S_\pm(s,q)$ и $P_\pm(s,q)$ соответственно, и вычисляя их аналогично [6], получим

$$S_-(t,x)=\frac{H(-x)}{\sqrt{-\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}+t/x}}\right]H(c_R^{-1}+t/x)-\right.$$

$$-\int\limits_{-t/x}^{1/\sqrt{a}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u} \sqrt{\frac{u-a^{-1/2}}{u+t/x}}\, du \Bigg] H(-t/x-a^{-\frac{1}{2}}) \Big\} \tag{2.6}$$

$$P_-(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[A\delta\left(t+\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h)\delta(t+hx)\,dh\right]\frac{H(-x)}{\sqrt{-x}}\right\}$$

$$A=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_2(u)du}{u-\frac{1}{\sqrt{a}}},\quad B=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(u)du}{u-\frac{1}{c_R}},\quad F_3(h)=\int\frac{d}{du}\left[\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-\frac{1}{\sqrt{a}}}}\right]\frac{du}{u-h}$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака. Функции $S_+(t,x)$ и $P_+(t,x)$ получаются из (2.6) заменой x на $-x$ и умножением на постоянную a/C_0 и C_0/a, соответственно. Полученные формулы по форме совпадают с [6] или со случаем изотропной среды, где $D_\pm$ даются в виде (2.5).

Представим функции $\bar{V}(s,q)$, $\bar{\sigma}(s,q)$ в виде

$$\bar{\sigma}(s,q)=\bar{\sigma}_+(s,q)+\bar{\sigma}_-(s,q),\quad \bar{V}=\bar{V}_+ + \bar{V}_- \tag{2.7}$$

где $\bar{V}_+$, $\bar{\sigma}_-$ неизвестны, $\bar{V}_-$, $\bar{\sigma}_+$ есть изображения оригиналов $V_-(t,x)$, $\sigma_+(t,x)$. Кроме того, нетрудно заметить, что функция $\bar{S}(s,q)$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\bar{S}_\pm(s,q)$, $\bar{P}_\pm(s,q)$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$P_+(t,x)=S_+(t,x)=0 \quad \text{при} \quad x<c_R t \tag{2.8}$$

$$P_-(t,x)=S_-(t,x)=0 \quad \text{при} \quad x>-c_R t$$

$$-c_R<l(t)=\frac{dl}{dt}<c_R$$

где $l(t)$ — гладкая функция.

Подставляя (2.7) в (2.3) и учитывая (2.8), можно, как и в [6], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t

$$\sigma_-=-P_-{**}[(S_-{**}\sigma_+-P_+{**}V_-)H(l-x-0)] \tag{2.9}$$

$$V_+=S_-{**}[(S_-{**}\sigma_+-P_+{**}V_-)H(-l+x+0)]$$

Здесь символ $(**)$ означает свертку по t и x. Подставив в (2.9) выражение (2.6), значение σ_+ и, учитывая, что по условию задачи $V_-=0$, получаем на оси x

$$\sigma_-(t,x)=P\left[AN\left(t,x,\xi,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h)N(t,x,\xi,h)\,dh\right]H\left(t-\frac{x-\xi}{\sqrt{a}}\right) \tag{2.10}$$

$$N(t,x,\xi,h)=\frac{c_R+l}{\sqrt[4]{a}c_R(1+hl)}\sqrt{\frac{\sqrt{a}t_0-l-\xi}{l-x}}+\frac{c_R+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\sqrt{h\sqrt{a}+1}c_R}\times$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\left(h+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)(l-x)}}{\sqrt{t+hx+\frac{\xi}{\sqrt{a}}-\left(h+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)l}},\quad l=l(t_0),\quad t-t_0=h(l(t_0)-x)$$

$$P=\frac{4(c-d)c_R V_0}{\pi\sqrt{2}(\sqrt{a}+c_R)\sqrt[4]{a}}\left(1+\int\limits_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(u)du}{u+\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)$$

Для поставленной задачи решение получится из (2.10), добавляя одномерное решение.

Учитывая, что при $x\to l(t)$, $t_0\to t$ и $\frac{l(t)-x}{l(t_0)-x}\to 1-hl(t)$ можно из (2.10) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x\to l+0}\sqrt{l-x}\,\sigma_y(t,x)=PK(l)\sqrt{t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}}\,H\left(t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}\right)\tag{2.11}$$

$$K(l)=\left(1+l\int\limits_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_0(u)du}{1+ul}\right)\frac{(c_R-l)\sqrt[4]{a}}{c_R\sqrt{\sqrt{a}+l}},\ l=l(t)$$

Можно доказать, что для случая постоянной l (2.11) совпадает с решением, полученным применением метода Винера-Хопфа.

§ 3. *Решение задачи в случае* $\xi<0$

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi<0$, то есть соударение углов происходит вне жесткой опоры. Тогда $H(x+\sqrt{a}t)=1$ при $x>l(t)$, и поэтому граничные условия возьмем в виде (1.4), а именно:

$$\sigma_y(t,x)=\frac{(c-d)V_0}{\sqrt{a}}H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)H(t)$$

Представим $H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)$ следующим образом:

$$H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)=H\left(t-\frac{x+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(x+\xi)+H\left(t+\frac{x+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(-x-\xi)\tag{3.1}$$

Учитывая (3.1), из (2.9) можно получить коэффициенты интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l+0}\sqrt{l-x}\,\sigma_y(t,x)=K(l)\left[P\sqrt{t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}}\,H\left(t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(l+\xi)+\right.$$

$$+2\frac{(c-d)V_0}{\pi\sqrt{a}}\sqrt{-l-1}\left\{1-\frac{B\sqrt{ac_R}}{\sqrt{\sqrt{a}-c_R}}\sqrt{\frac{1}{c_R}-T}\right. \tag{3.2}$$

$$\left.-\int_1^{1/\sqrt{T}}\frac{F_1(u)}{\frac{1}{c_R}-u}\sqrt{\frac{u-T}{u-\frac{1}{\sqrt{a}}}}\,du\,H\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-T\right)\right\}H(-l-1)H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$T=-\frac{t}{l-1}$$

Отметим, что при $\delta(t)>-\delta$ решение (3.2) совпадает с (2.11), при этом $x=-\delta$ находится на опоре и имеет место решение (2.11).

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

COLLISION PROBLEM OF TWO QUARTER—PLANES ON MOVING RIGID SUPPORT

A. N. MARTIROSYAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ԿՈՇՏ ՀԵՆԱՐԱՆԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ԵՐԿՈՒ ՔԱՌՈՐԴ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դրված է այն անիզոտրոպ առաձգական սեպեր անկյունների փոխազդեցության խնդրի լուծումը, որոնց մակերևույթի մի մասը ամրակցված է կոշտ հենարանի հետ, որը շարժվում է հաստատուն արագությամբ։ Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները և լարումը կոնտակտի գծի վրա։ Ապացուցված է, շեղքի եզրի հաստատուն արագության համար Վիներ-Հոպֆի մեթոդի վրա հիմնված լարումը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—Докл. АН СССР, 1976, т. 226, №3, с. 537—540.
2. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарных задач для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 1.
3. *Мартиросян А. Н.* Решение некоторых задач для анизотропной среды.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, с. 34—48.
4. *Norris A. N., Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversaly isotropic material.—Q. J. Mech. appl. Math. 1984, vol. 37, Pt. 4, p. 565—580.
5. *Freund L. B.* Crack-propagation in an elastic solid subjected to general loading. I.—J. Mech. Phys. Solids, 1972, vol. 20, p. 129.
6. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 1, с. 54—73.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
6.I.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 539.376

О РОЛИ ПОРООБРАЗОВАНИЯ ПРИ РАЗРУШЕНИИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

АРУТЮНЯН Р. А.

Современные физические представления о процессе разрушения конструкционных материалов сводятся к описанию эволюции его дефектной структуры [1]. Под воздействием постоянных или переменных напряжений этот процесс становится направленным. Возникновение новых дефектов и их слияние приводят к интенсивному образованию локальных микронесплошностей типа пор и трещин и в результате к окончательному разрушению материала. Тонкие экспериментальные методы исследования способствовали выявлению механизмов поро и трещинообразования при различных уровнях действующих напряжений и температур.

В условиях повышенных напряжений и относительно низких температур возникают клиновидные трещины на границах зерен. При длительном воздействии низких напряжений и высоких температур развиваются преимущественно межзеренные разрушения. Вместо клиновидных трещин образуются микропоры, например, по механизму конденсации вакансий. В литературе по теории ползучести детально изучены схемы образования пор и трещин для «чистых» металлов. В случае конструкционных металлических материалов, большинство из которых являются сложными композициями с частицами вторичных фаз выделений, существует еще одна возможность образования пор— на частицах второй фазы. Условием зарождения пор при этом является низкая адгезия на поверхности раздела частица-матрица [2]. Для отрыва частицы от матрицы нет необходимости в конденсации вакансий—нарушение сцепления между частицей и матрицей осуществляется при помощи деформационных процессов. По мере увеличения деформации растут и поры, которые затем укрупняются по механизму образования внутренней шейки. Поэтому поверхность разрушения имеет характерную форму чашечного излома. Во многих случаях при оптических и электронно-микроскопических исследованиях внутри пор обнаруживали частицы включений, а количество пор пропорционально количеству частиц второй фазы. При длительных высокотемпературных испытаниях возможны и другие механизмы порообразования [2].

Обратимся также к работам, в которых исследуется кинетика накопления пор. На основе экспериментальных исследований поробразования в условиях ползучести в работе [3] предложено следующее кинетическое уравнение для числа пор $N(t)$:

$$\dot{N} = k_0(1 - N/N_*) \qquad (1)$$

где N_*—количество пор в момент разрушения, $k_0 = k_0(\sigma, T)$ (σ—напряжение, T—температура).

При условии $t=0$, $N=0$ и $k_0 = \mathrm{const}$, из решения уравнения (1)

$$\frac{N}{N_*} = (1 - \exp(-k_0/N_* t)) \qquad (2)$$

следует, что накопление пор в процессе ползучести происходит неравномерно. Интенсивное накопление на первых стадиях процесса постепенно устанавливается и с достижением некоторой критической величины $N = N_*$ наступает макроразрушение. В отличие от существующих представлений нельзя считать N_* постоянной материала. Опыты показывают, что эта величина зависит от напряжения. Более того, эта зависимость является немонотонной [3].

При построении уравнения теории ползучести воспользуемся известным кинетическим подходом [4, 5]. Параметр поврежадемости определим соотношением $\omega = N/N_*$ ($0 \leqslant \omega \leqslant 1$). В начальном состоянии $N=0$, $\omega=0$, то есть материал считается абсолютно неповрежденным. При $N = N_*$ наступает полное поврежденное состояние и происходит разрушение. Принимая степенной закон связи между скоростью деформации $\dot{\varepsilon}$ и напряжением σ, можно записать следующее уравнение:

$$\dot{\varepsilon} = B\sigma^m (1-\omega)^{-k_1} \qquad (3)$$

где B, m, k_1—постоянные.

Вносся выражение (2) для параметра ω в (3), получим закон ползучести, учитывающий кинетику порообразования:

$$\dot{\varepsilon} = B\sigma^m \exp(k/N_* t) \qquad (4)$$

где $k = k_0 k_1$.

Перейдем к проблеме разрушения в условиях ползучести. Подходя к этой проблеме с позиций теории надежности, процессы порообразования будем рассматривать как потоки отказов, а скорость ползучести свяжем с интенсивностью отказов λ зависимостью:

$$\lambda = r\dot{\varepsilon} = rB\sigma^m \exp(k/N_* t) \qquad (5)$$

где r некоторый коррелирующий множитель.

Интенсивность отказов выражается через функцию надежности следующим дифференциальным уравнением [6, 7]:

$$\lambda = -\frac{\dot{R}}{R} \qquad (6)$$

Если интенсивность отказов $\lambda(t)$ задана, то решая уравнение (6) при условии $R(0) = 1$, получим

$$R(t) = \exp\left[-\int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau\right] \tag{7}$$

Внося (5) в (7) и интегрируя, придем к выражению для функции надежности в виде распределения Гумбеля

$$R(t) = \exp\left[-\frac{rB\sigma^m N_*}{k}(\exp(k\,N_* t) - 1)\right] \tag{8}$$

Для закона надежности (8) математическое ожидание срока службы матерала вычисляется следующим образом:

$$M = \int\limits_0^\infty R(\tau)d\tau = \frac{N_*}{k}\exp\left(\frac{rB\sigma^m N_*}{k}\right) I$$

$$I = \int\limits_{-c}^{-\infty} \frac{e^z}{z}\,dz, \quad z = -r\exp(k/N_* t), \quad c = \frac{rB\sigma^m N_*}{k} \tag{9}$$

Формулу (9) можно рассматривать как критерий длительной прочности, связывающий напряжение с математическим ожиданием времени до разрушения.

В рамках данного подхода имеется также возможность учета естественного разброса значений времени до разрушения в условиях ползучести. С этой целью перейдем к статическому определению функции надежности.

Пусть в начальном состоянии в материале имеются N_0' потенциальных центров, на которых возможно образование и развитие пор, а $N(t)$ — текущее число пор, тогда [7]

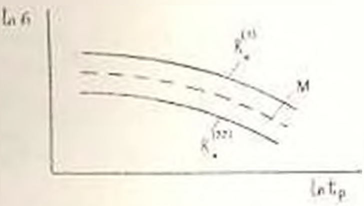
$$R(t) = 1 - \frac{N(t)}{N_0} \tag{10}$$

Внося (10) в (8) и принимая условие $t = t_p$, $N = N_*$, $R = R_*$, получим критерий длительной прочности, связывающий время до разрушения t_p с заданным уровнем надежности R_*

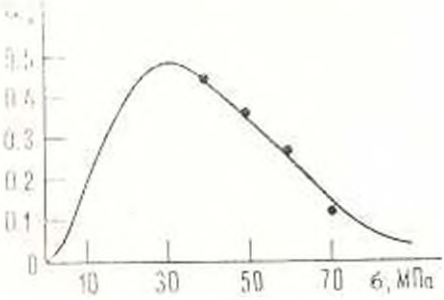
$$t_p = \frac{N_*}{k}\ln\left[1 + \frac{k\ln\dfrac{1}{R_*}}{rB\sigma^m N_*}\right] \tag{11}$$

Теоретические кривые длительной прочности показаны схематически на фиг. 1. Пунктирная линия на этом рисунке соответствует математическому ожиданию срока службы материала (9), а сплошные кривые построены согласно критерию (11) для двух уровней надежности $R_*^{(1)}$ и $R_*^{(2)}$, которые можно подобрать таким образом, чтобы охватить всю полосу разброса экспериментальных точек с указанием возможных нижней и верхней границ работоспособности материала.

Для проверки полученных соотношений обратимся к некоторым экспериментальным результатам. В работе [8], по-видимому, впервые экспериментально материализован параметр повреждаемости ω_* в опытах на ползучесть и разрушение образцов из технически чистой меди марки М3 при температуре 100°С. В качестве меры повреждаемости принято отношение суммарной длины поперечных границ, занятых порами и микротрещинами, к длине всех поперечных границ между зернами. При этом установлено, что разрушение при ползучести всегда наступает при неполном заполнении поперечного сечения трещинами. В опытах подтверждается существование указанных выше двух механизмов разрушения в области относительно больших и ма-



Фиг. 1



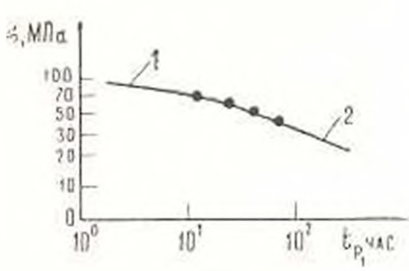
Фиг. 2

лых величин напряжений. Наблюдается также существенная зависимость величины от напряжения. При больших напряжениях наступает в результате развития необратимых сдвиговых деформаций, связанных, по-видимому, с переползанием дислокаций. Поэтому количество пор и трещин относительно невелико. При малых напряжениях ползучесть сопровождается процессами поро- и трещинообразования по границам зерен и последующим межзеренным разрушением. Учитывая эти результаты и данные работы [3] о немонотонном характере накопления повреждаемости в зависимости от напряжения, на фиг. 2 показан схематично возможный график функции $\omega_*(\sigma)$. Точки на этом рисунке соответствуют экспериментальным данным работы [8].

Для сравнения полученного критерия длительной прочности с данными опыта воспользуемся некоторыми приближенными оценками. Разлагая в (11) логарифмы в ряд и удерживая первые члены, получим следующую формулу

$$t_p = \frac{1-R_*}{rB\sigma^m} = \frac{N_* \Lambda_0}{rB\sigma^m} = \frac{\omega_*(\sigma)}{rB\sigma^m} \qquad (12)$$

На фиг. 3 в координатах $\ln\sigma - \ln t_p$ показан критерий длительной прочности (12). Точками на фиг. 3 отмечены опытные данные работы [8]. Согласно этим результатам получены следующие величины коэффициентов: $m=6$, $B=1{,}2\cdot10^{-13}\,[\text{МПа}]^{-6}\,[\text{ч}]^{-1}$, $r=13$. Критерий (12) дает качественно



Фиг. 3

правильную картину разрушения материала при ползучести, охватывая участки квазивязкого (участок 1 на фиг. 3) и вязко-хрупкого (участок 2 на фиг. 3) разрушений.

ON EFFECT OF PORE GENERATION UNDER DISRUPTION IN A CREEP CONDITIONS

R. A. ARUTUNIAN

ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԾԱԿԵՐԻ ԱՌԱՋԱՑՄԱՆ ԷՖԵԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Ամփոփում

Սողքի պայմաններում շատ մետաղական նյութեր քննարկվում են որպես խափանումների հարեր, որոնց խտությունը կապված է սողքի արագության հետ:

Ներմուծված է հուսալիության ֆունկցիա և որոշված է նյութի ձևայության ժամկետի մաթեմատիկական սպասումը: Հուսալիության ֆունկցիայի տեսքի որոշման դեպքում ներգրավված է նաև ժամանակի փոքրածավալ արժեքների բնական ցրումը միջև քայքայումը՝ նշելով նյութի աշխատունակության վերին և ներքին սահմանները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов А. Н.* Введение в теорию дефектов в кристаллах. М.: Высшая школа, 1983. 143 с.
2. *Мартин Дж. У.* Микромеханизмы дисперсионного твердения сплавов. М.: Металлургия, 1983. 166 с.
3. *Cane J., Middleton C. F.* Intergranular creep-cavity formation in low-alloy bainitic steels. Metal Science, 1981, vol. 15, № 7, p. 295—301.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Шестериков С. А., Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов.—В сб.: Итоги науки и техники. Механ. деформ. тверд. тела. Т. 13. М.: 1980, с. 3—104.
6. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
7. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
8. *Локощенко А. М.* Исследование повреждаемости материала при ползучести и длительной прочности. Ж. прикладной мех. и тех. физики, 1982, № 6, с. 129—133.

Ленинградский госуниверситет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
18.IV.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, №1, 1989 Механика

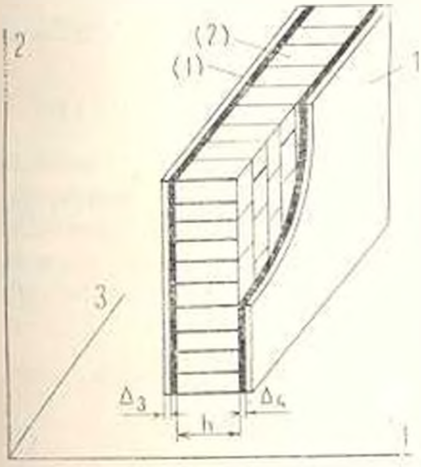
УДК 539.3:678.067

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ СОТОПЛАСТОВ

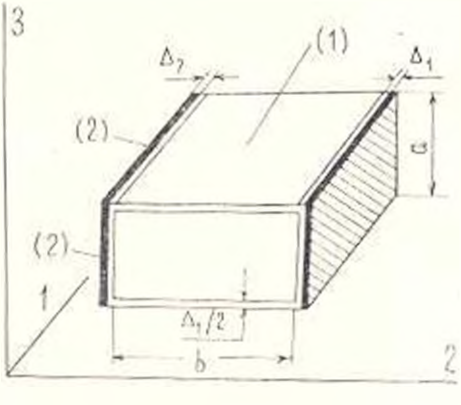
БЫКОВЦЕВ А. Г., КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

1. Рассмотрим сотовую конструкцию, состоящую из двух несущих обшивок (1) и ячеистого заполнителя (2), состоящего из ячеек прямоугольной формы (фиг. 1). Ячейки заполнены низкомодульным сжимаемым материалом (например, пенопластом). Вычисление эффективных модулей упругости проводится в предположении, что размеры ячейки заполнителя значительно меньше размеров рассматриваемой конструкции. В этом случае сотопласт можно считать композиционным материалом, обладающим ортотропной симметрией.

Вначале определим модули упругости сотового заполнителя, которые равны эффективным модулям упругости характерного слоя, а последние в свою очередь равны эффективным модулям упругости характерной ячейки, изображенной на фиг. 2. Деформация характерной ячейки рассматривается в прямоугольной системе координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчет эффективных модулей упругости сотопласта проводится в предположении об изотропии материала основы заполнителя, клеевой прослойки и материала, заполняющего ячейки. Получение эффективных модулей упругости основано на правиле смешивания при последовательном и параллельном соединении элементов. Если деформация компонент соответствует параллельному соединению, то средние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид:

$$\langle F\rangle=\frac{1}{2}(c_{11}\langle\varepsilon_{11}\rangle^2+c_{22}\langle\varepsilon_{22}\rangle^2+c_{33}\langle\varepsilon_{33}\rangle^2)+c_{12}\langle\varepsilon_{11}\rangle\langle\varepsilon_{22}\rangle+$$
$$+c_{13}\langle\varepsilon_{11}\rangle\langle\varepsilon_{33}\rangle+c_{23}\langle\varepsilon_{22}\rangle\langle\varepsilon_{33}\rangle+2(c_{44}\langle\varepsilon_{23}\rangle\langle\varepsilon_{23}\rangle+$$
$$+c_{55}\langle\varepsilon_{13}\rangle\langle\varepsilon_{13}\rangle+c_{66}\langle\varepsilon_{12}\rangle\langle\varepsilon_{12}\rangle) \qquad (1.1)$$

Здесь величины $c_{11}, \ldots$ — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя, $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$\langle F\rangle=\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}V_n^{(k)}\left[\frac{\lambda_n}{2}\langle\varepsilon_{ii}^{(k)}\rangle_n^2+\mu_n\langle\varepsilon_{ij}^{(k)}\rangle_n\langle\varepsilon_{ij}^{(k)}\rangle_n\right] \qquad (1.2)$$

Здесь λ_n, μ_n — постоянные Ламе компонент, $\langle\varepsilon_{ij}^{(k)}\rangle_n$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\langle\varepsilon_{11}\rangle=\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle_n=\langle\varepsilon_{11}^{(2)}\rangle_n, \quad \langle\varepsilon_{22}\rangle=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{22}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\varepsilon_{22}^{(1)}\rangle_n$$
$$\langle\varepsilon_{33}\rangle=\langle\varepsilon_{33}^{(2)}\rangle_n=\sum_{n=2}^{3}V_n^{(1)}\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle_n, \quad \langle\varepsilon_{12}\rangle=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{12}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle_n$$
$$\langle\varepsilon_{13}\rangle=\langle\varepsilon_{13}^{(2)}\rangle_n=\sum_{n=2}^{3}\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle_n V_n^{(1)}, \quad \langle\varepsilon_{23}\rangle=V^{(1)}\langle\varepsilon_{23}^{(1)}\rangle_n+\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{23}^{(2)}\rangle_n \qquad (1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k-компоненты из n-материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями композита в виде:

$$\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle_n=\varkappa_{33n}^{(1)}\langle\varepsilon_{33}\rangle, \quad \langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle_n=\varkappa_{13n}^{(1)}\langle\varepsilon_{13}\rangle, \quad \langle\varepsilon_{23}^{(k)}\rangle_n=\varkappa_{23n}^{(k)}\langle\varepsilon_{23}\rangle$$
$$\langle\varepsilon_{12}^{(k)}\rangle_n=\varkappa_{12n}^{(k)}\langle\varepsilon_{12}\rangle, \quad \langle\varepsilon_{13}^{(k)}\rangle_n=\varkappa_{23n}^{(k)}\langle\varepsilon_{23}\rangle, \quad k=1.2 \qquad (1.4)$$

ние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид.

$$<F>=\frac{1}{2}(c_{11}<\varepsilon_{11}>^2+c_{22}<\varepsilon_{22}>^2+c_{33}<\varepsilon_{33}>^2)+c_{12}<\varepsilon_{11}><\varepsilon_{22}>+$$
$$+c_{13}<\varepsilon_{11}><\varepsilon_{33}>+c_{23}<\varepsilon_{22}><\varepsilon_{33}>+2(c_{44}<\varepsilon_{23}><\varepsilon_{23}>+$$
$$+c_{55}<\varepsilon_{13}><\varepsilon_{13}>+c_{66}<\varepsilon_{12}><\varepsilon_{12}>) \qquad (1.1)$$

Здесь величины $c_{11}, \ldots$ — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя. $<\varepsilon_{ij}>$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$<F>=\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}V_n^{(k)}\left[\frac{\lambda_n}{2}<\varepsilon_{ii}^{(k)}>_n^2+\mu_n<\varepsilon_{ij}^{(k)}>_n<\varepsilon_{ij}^{(k)}>_n\right] \qquad (1.2)$$

Здесь λ_n, μ_n — постоянные Ламе компонент, $<\varepsilon_{ij}^{(k)}>_n$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$<\varepsilon_{11}>=<\varepsilon_{11}^{(1)}>_n=<\varepsilon_{11}^{(2)}>_n, \quad <\varepsilon_{22}>=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}<\varepsilon_{22}^{(2)}>_n+V^{(1)}<\varepsilon_{22}^{(1)}>_n,$$

$$<\varepsilon_{33}>=<\varepsilon_{33}^{(2)}>_n=\sum_{n=2}^{3}V_n^{(1)}<\varepsilon_{33}^{(1)}>_n, \quad <\varepsilon_{12}>=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}<\varepsilon_{12}^{(2)}>_n+V^{(1)}<\varepsilon_{12}^{(1)}>,$$

$$<\varepsilon_{13}>=<\varepsilon_{13}^{(2)}>_n=\sum_{n=2}^{3}<\varepsilon_{13}^{(1)}>_nV_n^{(1)}, \quad <\varepsilon_{23}>=V^{(1)}<\varepsilon_{23}^{(1)}>_n+\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}<\varepsilon_{23}^{(2)}>_n$$

$$(1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k — компоненты из n-материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями композита в виде

$$<\varepsilon_{33}^{(1)}>_n=\varkappa_{33n}^{(1)}<\varepsilon_{33}>, \quad <\varepsilon_{13}^{(1)}>_n=\varkappa_{13n}^{(1)}<\varepsilon_{13}>, \quad <\varepsilon_{23}^{(1)}>_n=\varkappa_{23n}^{(1)}<\varepsilon_{23}>$$

$$(1.4)$$

$$<\varepsilon_{12}^{(k)}>_n=\varkappa_{12n}^{(k)}<\varepsilon_{12}>, \quad <\varepsilon_{23}^{(k)}>_n=\varkappa_{23n}^{(k)}<\varepsilon_{23}>, \quad k=1,2$$

Рассмотрим следующие процессы деформирования:

1. $\langle\varepsilon_{11}\rangle\neq 0$; 2. $\langle\varepsilon_{22}\rangle\neq 0$; 3. $\langle\varepsilon_{33}\rangle\neq 0$; 4. $\langle\varepsilon_{12}\rangle\neq 0$, 5. $\langle\varepsilon_{13}\rangle\neq 0$;
6. $\langle\varepsilon_{23}\rangle\neq 0$; 7. $\langle\varepsilon_{11}\rangle=\langle\varepsilon_{22}\rangle\neq 0$; 8. $\langle\varepsilon_{33}\rangle=\langle\varepsilon_{11}\rangle\neq 0$; 9. $\langle\varepsilon_{11}\rangle=$

$$=\langle\varepsilon_{22}\rangle=\langle\varepsilon_{33}\rangle\neq 0 \tag{1.5}$$

Вдоль процессов деформирования (1.5) с помощью соотношений (1.3), (1.4) вычисляются коэффициенты при средних деформациях в выражении для F (1.2). После сравнения с (1.1) получаем значения эффективных модулей упругости сотового заполнителя, выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$c_{11}=2\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]V_n^{(k)};\quad c_{55}=\sum_{n=1}^{3}\mu_n\left[V_n^{(2)}+V_n^{(1)}(\varkappa_{13n}^{(1)})^2\right]$$

$$c_{22}=2\sum_{n=1}^{3}\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]\sum_{k=1}^{2}(\varkappa_{22n}^{(k)})^2V_n^{(k)};\quad c_{13}=\sum_{n=1}^{3}\lambda_n\left[V_n^{(2)}+V_n^{(1)}\varkappa_{33n}^{(1)}\right]$$

$$c_{33}=2\sum_{n=1}^{3}\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]\left[V_n^{(2)}+V_n^{(1)}(\varkappa_{33n}^{(1)})^2\right];\quad c_{12}=\sum_{n=1}^{3}\lambda_n\sum_{k=1}^{2}(\varkappa_{22n}^{(k)})^2V_n^{(k)}$$

$$c_{66}=\sum_{n=1}^{3}\mu_n\sum_{k=1}^{2}V_n^{(k)}(\varkappa_{12n}^{(k)})^2;\quad c_{44}=\sum_{n=1}^{3}\mu_n\sum_{k=1}^{2}V_n^{(k)}(\varkappa_{23n}^{(k)})^2$$

$$c_{23}=\sum_{n=1}^{3}\lambda_n\left[V_n^{(1)}\varkappa_{22n}^{(1)}\varkappa_{33n}^{(1)}+V_n^{(2)}\varkappa_{22n}^{(2)}\right] \tag{1.6}$$

Постоянные $\varkappa_{ijn}^{(k)}$, входящие в соотношения (1.6), определяются для следующих процессов деформирования:

1. $\langle\varepsilon_{33}\rangle\neq 0$; 2. $\langle\varepsilon_{23}\rangle\neq 0$; 3. $\langle\varepsilon_{22}\rangle\neq 0$; 4. $\langle\varepsilon_{12}\rangle\neq 0$; 5. $\langle\varepsilon_{13}\rangle\neq 0$

(1.7)

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (1.3) для деформаций, записанные с учетом того, что при последовательном соединении элементов средние напряжения в каждой компоненте одинаковы и равны средним напряжениям в композите, имеют вид

$$\langle\sigma_{11}\rangle=\sum_{n=2}^{3}V_n^{(1)}\langle\sigma_{11}^{(1)}\rangle_n+\sum_{n=1}^{3}V_n^{(2)}\langle\sigma_{11}^{(2)}\rangle_n;\quad\langle\sigma_{22}\rangle=\langle\sigma_{22}^{(2)}\rangle_n=$$

$$=\sum_{n=2}^{3}V_n^{(1)}\langle\sigma_{22}^{(1)}\rangle_n$$

$$\langle\sigma_{33}\rangle=\sum_{n=1}^{3}\langle\sigma_{33}^{(2)}\rangle_nV_n^{(2)}+\langle\sigma_{33}^{(1)}\rangle_nV^{(1)};\quad\langle\sigma_{12}\rangle=\langle\sigma_{12}^{(2)}\rangle_n=\sum_{n=2}^{3}\langle\sigma_{12}^{(1)}\rangle V_n^{(1)}$$

$$\langle\sigma_{13}\rangle=\sum_{n=1}^{2}\langle\sigma_{13}^{(2)}\rangle_nV_n^{(2)}+V_n^{(1)}\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle_n;\quad\langle\sigma_{23}\rangle=\langle\sigma_{23}^{(2)}\rangle_n=\sum_{n=2}^{3}V_n^{(1)}\langle\sigma_{23}^{(1)}\rangle_n$$

(1.8)

Здесь $\langle\sigma_{ij}\rangle$ — средние напряжения в композите, $\langle\sigma_{ij}\rangle_n^{(k)}$ — средние напряжения в компонентах, Используя закон Гука из соотношений (1.3), (1.4) и (1.8) для процессов деформирования (1.7), получаем

$$\varkappa^{(2)}_{23n} = \left[\mu_n\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^{(2)}}{\mu_i} + \frac{V^{(1)}}{\sum\limits_{i=2}^{3} V_i^{(1)}E_i}\right)\right]^{-1}; \quad \varkappa^{(1)}_{12n} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^{3} V_i^{(1)}\mu_i \sum_{j=1}^{2} \frac{V_j^{(2)}}{\mu_j}\right]^{-1}$$

$$\varkappa^{(2)}_{12n} = \varkappa^{(2)}_{23n}; \quad \varkappa^{(1)}_{13n} = \left[\mu_n \sum_{i=2}^{3} \frac{V_i^{(1)}}{\mu_i}\right]^{-1}; \quad \varkappa^{(1)}_{33n} = \left[E_n \sum_{i=2}^{3} \frac{V_i^{(1)}}{E_i}\right]^{-1}; \quad \varkappa^{(1)}_{12n} = \varkappa^{(1)}_{23n}$$

$$\varkappa^{(2)}_{22n} = \left[E_n\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^{(2)}}{E_i} + \frac{V^{(1)}}{\sum\limits_{i=2}^{3} V_i^{(1)}E_i}\right)\right]^{-1}, \quad \varkappa^{(1)}_{22n} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^{3} V_i^{(1)}E_i \sum_{j=1}^{2} \frac{V_j^{(2)}}{E_j}\right]^{-1} \tag{1.9}$$

Здесь E_i, μ_i — соответственно модули Юнга и сдвига i-компоненты.

Относительные объемы $V_i^{(k)}$ компонент характерной ячейки (фиг. 2) через размеры ячеек сотового заполнителя выражается следующим образом:

$$V_1^{(1)} = 0; \quad V_2^{(1)} = \frac{\Delta_1(b-2\Delta_1)}{a(b+\Delta_2)}; \quad V_3^{(1)} = \frac{(a-\Delta_1)(b-2\Delta_1)}{a(b+\Delta_2)}$$

$$V_1^{(2)} = \frac{\Delta_1}{b+\Delta_2}; \quad V_2^{(2)} = \frac{2\Delta_1}{b+\Delta_2}, \quad V_3^{(2)} = 0 \quad V^{(1)} = \frac{b-2\Delta_1}{b+\Delta_2} \tag{1.10}$$

Здесь Δ_1 — толщина стенок ячеек; Δ_2 — толщина клеевой прослойки; a, b — размеры характерной ячейки заполнителя.

Таким образом, соотношение (1.6), (1.9), (1.10) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотового заполнителя в зависимости от геометрических параметров ячейки и упругих свойств составляющих ее компонент. С помощью полученных формул можно вычислять оптимальные размеры ячейки, находя экстремумы функций $c_1(a, b, \Delta_1, \Delta_2)$, . . при условии, что периметр ячейки остается постоянным.

Анализ формул (1.6), (1.9), (1.10) показывает, что увеличение жесткости сотового заполнителя связано с уменьшением размеров ячейки a и b, увеличением толщины стенок ячеек Δ_1 и толщины клеевой прослойки Δ_2, а также с увеличением упругих модулей составляющих компонент. Эти факты наблюдались в эксперименте [1—4].

2. Определим эффективные модули упругости сотопласта. Сотопласт — слоистый, анизотропный композиционный материал, обладающий ортотропной симметрией. Материал несущих обшивок (1) (фиг. 1) считается изотропным.

Расчет эффективных модулей упругости сотопласта основан на применении правила смешивания и производится аналогично тому, как это было сделано выше при расчете модулей сотового заполнителя. В дальнейшем различаются продольные и поперечные слои. Продольный слой один — сотовый заполнитель, поперечные слои — несущие обшивки и клеевая прослойка. По-прежнему верхний индекс 1 относится к продольному слою, а верхний индекс 2 — к поперечным слоям.

Среднее значение свободной энергии для сотопласта с учетом изотропии и ортотропии компонент равно

$$\langle F\rangle=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\left[\frac{\lambda_n}{2}\langle\varepsilon_{ii}^{(2)}\rangle_n+\mu_n\langle\varepsilon_{ij}^{(2)}\rangle_n\langle\varepsilon_{ij}^{(2)}\rangle_n\right]+V^{(1)}\left[\frac{1}{2}(c_{11}\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle^2+\right.$$

$$+c_{22}\langle\varepsilon_{22}^{(1)}\rangle^2+c_{33}\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle^2)+c_{12}\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{22}^{(1)}\rangle+c_{23}\langle\varepsilon_{22}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle+$$

$$+c_{13}\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle+2(c_{44}\langle\varepsilon_{23}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{23}^{(1)}\rangle+c_{55}\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle+$$

$$\left.+c_{66}\langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle\langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle)\right] \qquad (2.1)$$

Здесь и далее вследствие того, что продольный слой один, нижний индекс n у величин, характеризующих продольный слой, для упрощения записи опущен; c_{11},...— эффективные модули упругости сотового заполнителя; $\langle\varepsilon_{ij}^{(k)}\rangle$ — средние деформации компонент; $n=1$ соответствует несущим обшивкам, $n=2$ — клеевой прослойке.

Рассматривая различные деформации сотопласта (фиг. 1), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\langle\varepsilon_{11}\rangle=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{11}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{33}\rangle=\langle\varepsilon_{33}^{(1)}\rangle=\langle\varepsilon_{33}^{(2)}\rangle_n$$

$$\langle\varepsilon_{13}\rangle=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{13}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{22}\rangle=\langle\varepsilon_{22}^{(1)}\rangle=\langle\varepsilon_{22}^{(2)}\rangle_n$$

$$\langle\varepsilon_{12}\rangle=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\langle\varepsilon_{12}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{23}\rangle=\langle\varepsilon_{23}^{(1)}\rangle=\langle\varepsilon_{23}^{(2)}\rangle_n \qquad (2.2)$$

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями компонент, участвующих в последовательном соединении, и средними деформациями композита в виде

$$\langle\varepsilon_{11}^{(2)}\rangle_n=\varkappa_{11n}^{(2)}\langle\varepsilon_{11}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle=\varkappa_{11}^{(1)}\langle\varepsilon_{11}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{13}^{(2)}\rangle_n=\varkappa_{13n}^{(2)}\langle\varepsilon_{13}\rangle$$

$$\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle=\varkappa_{13}^{(1)}\langle\varepsilon_{13}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle=\varkappa_{12}^{(1)}\langle\varepsilon_{12}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{12}^{(2)}\rangle_n=\varkappa_{12n}^{(2)}\langle\varepsilon_{12}\rangle \qquad (2.3)$$

Аналогично п. 1 в рассматриваемом случае можно выписать значения эффективных модулей упругости сотопласта A_{11},..., выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$A_{11}=2\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}(\varkappa_{11n}^{(2)})^2\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]+V^{(1)}(\varkappa_{11}^{(1)})^2c_{11},\quad A_{23}=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\lambda_n+V^{(1)}c_{23}$$

$$A_{33}=2\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]+V^{(1)}c_{33};\quad A_{22}=2\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\left[\frac{\lambda_n}{2}+\mu_n\right]+V^{(1)}c_{22}$$

$$A_{12}=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\lambda_n\varkappa_{11n}^{(2)}+V^{(1)}c_{12}\varkappa_{11}^{(1)};\quad A_{13}=\sum_{n=1}^{2} V_n^{(2)}\lambda_n\varkappa_{11n}^{(2)}+V^{(1)}\varkappa_{11}^{(1)}c_{13}$$

$$A_{44}=\sum_{n=1}^{2}\mu_n V_n^{(2)}+c_{44}V^{(1)};\quad A_{55}=\sum_{n=1}^{2}\mu_n V_n^{(2)}(\varkappa_{13n}^{(2)})^2+c_{55}(\varkappa_{13}^{(1)})^2V^{(1)}$$

$$A_{66}=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}\mu_n(\varkappa_{12n}^{(2)})^2+c_{66}V^{(1)}(\varkappa_{12}^{(1)})^2 \tag{2.4}$$

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (2.2) для деформаций, имеют вид

$$\langle\sigma_{23}\rangle=\sum_{n=1}^{2}V_n^{(2)}\langle\sigma_{23}^{(2)}\rangle_n+V^{(1)}\langle\sigma_{23}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{12}\rangle=\langle\varepsilon_{12}^{(2)}\rangle_n=\langle\varepsilon_{12}^{(1)}\rangle$$

$$\langle\sigma_{22}\rangle=\sum_{n=1}^{2}\langle\sigma_{22}^{(2)}\rangle_n V_n^{(2)}+V^{(1)}\langle\sigma_{22}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{11}\rangle=\langle\varepsilon_{11}^{(2)}\rangle_n=\langle\varepsilon_{11}^{(1)}\rangle$$

$$\langle\sigma_{33}\rangle=\sum_{n=1}^{2}\langle\sigma_{33}^{(2)}\rangle_n V_n^{(2)}+V^{(1)}\langle\sigma_{33}^{(1)}\rangle;\quad \langle\varepsilon_{13}\rangle=\langle\varepsilon_{13}^{(2)}\rangle_n=\langle\varepsilon_{13}^{(1)}\rangle \tag{2.5}$$

Используя закон Гука, из соотношений (2.3), (2.2) и (2.5) определим величины $\varkappa_{1in}^{(k)}$ для процессов деформирования $\langle\varepsilon_{11}\rangle\neq 0$, $\langle\varepsilon_{12}\rangle\neq 0$, $\langle\varepsilon_{13}\rangle\neq 0$:

$$\varkappa_{11}^{(1)}=\Big(V^{(1)}+c_{11}\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/E_i\Big)^{-1};\quad \varkappa_{11n}^{(2)}=\left[E_n\Big(\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/E_i+V^{(1)}/c_{11}\Big)\right]^{-1}$$

$$\varkappa_{12}^{(1)}=\Big(V^{(1)}+c_{12}\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/\mu_i\Big)^{-1};\quad \varkappa_{12n}^{(2)}=\left[\mu_n\Big(\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/\mu_i+V^{(1)}/c_{12}\Big)\right]^{-1} \tag{2.6}$$

$$\varkappa_{13}^{(1)}=\Big(V^{(1)}+c_{13}\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/\mu_i\Big)^{-1};\quad \varkappa_{13n}^{(2)}=\left[\mu_n\Big(\sum_{i=1}^{2}V_i^{(2)}/\mu_i+V^{(1)}/c_{13}\Big)\right]^{-1}$$

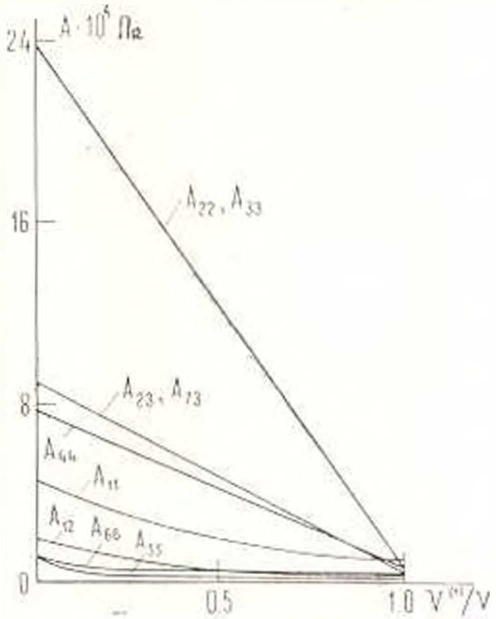
Относительные объемы $V_j^{(k)}$ компонент сотопласта выражаются через размеры сотовой панели следующим образом ($1=V^{(1)}+V_1^{(2)}+V_2^{(2)}$):

$$V^{(1)}=\frac{h}{h+2(\Delta_1+\Delta_2)},\quad V_1^{(2)}=\frac{2\Delta_1}{h+2(\Delta_1+\Delta_2)},\quad V_2^{(2)}=\frac{2\Delta_2}{h+2(\Delta_1+\Delta_2)} \tag{2.7}$$

Здесь h—высота сотового заполнителя, Δ_1—толщина несущих панелей, Δ_2—толщина клеевой прослойки.

Таким образом, соотношения (2.4), (2.6) и (2.7) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотопластов в зависимости от геометрических размеров панели и упругих свойств составляющих компонент.

В качестве примера применения формул (2.4), (2.6), (2.7) на фиг. 3 приведены графики изменения эффективных модулей упругости сотопласта в зависимости от относительного объема сотового заполнителя V^0/V. При расчетах принималось, что сотовый заполнитель изготовлен из алюминиевой фольги ($E=5{,}8\cdot 10^{10}$ Па, $\mu=2{,}4\cdot 10^{10}$ Па) толщиной $\Delta_1=5\cdot 10^{-4}$ м, размеры ячейки заполнителя $a=5\cdot 10^{-3}$ м, $b=1{,}45\cdot 10^{-2}$ м. Ячейки заполнены пенополиуретаном ($E=7\cdot 10^4$ Па, $\mu=0{,}21\cdot 10^4$ Па), несущие обшивки изготовлены из стали ($E=19{,}6\cdot 10^{10}$ Па, $\mu=7{,}9\cdot 10^{10}$ Па), в качестве клея использовалась эпоксидная смола ($E=3{,}1\cdot 10^9$ Па, $\mu=1{,}1\cdot 10^9$ Па), причем в ячейке заполнителя $\Delta_2=10^{-4}$ м, а при расчетах относительных объемов сотопласта принималось, что $\Delta_1=0{,}1\,\Delta_2$.



Фиг. 3

Механике слоистых композитов посвящены, например, монографии [5, 6]. В работах [7, 8] для слоистых и намотанных композитов использовался подход соединения элементов, который в настоящей работе применяется к сотовым конструкциям.

EFFECTIVE CELL LAYER ELASTICITY MODULUSES

A. G. BIKOVZEV, V. V. KOLOKOLCHIKOV

ԲՋՋԱՊԼԱՍՏՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏ ՄՈԴՈՒԼՆԵՐԸ

Ա. Գ. ԲԻԿՈՎՑԵՎ, Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈԼՉԻԿՈՎ

Ամփոփում

Ստացված են բջջային լցանյութի և բջջային լցանյութից ու կրող ծածկույթից բջջապլաստի արդյունավետ առաձգական մոդուլները: Ենթադրվում է, որ լցանյութի հիմքը, առանձին շերտը, բջիջները լցնող նյութը և կրող ծածկույթների նյութը իզոտրոպ են: Միջին հաշված կոմպոզիտը բնութագրվում է օրթոտրոպ սիմետրիայով: Որպես օրինակ տրված է բջջապլաստի արդյունավետ առաձգական մոդուլների կախվածությունը բջջային լցանյութից հարաբերական ծավալից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берсудский В. Е., Крысин В. Н., Лесных С. И.* Производство сотовых конструкций. М.: 1966. 282 с.
2. *Иванов В. А., Романенков И. Г.* Прочность сотопласта при плоском напряженном состоянии. — Механика полимеров, 1972, № [illegible], с. 936—938.
3. *Иванов В. А., Романенков И. Г.* Временная зависимость прочности сотопластов. — Проблемы прочности, 1973, № 8, с. 91—92.
4. *Иванов В. А., Романенков И. Г.* Влияние размеров образцов на прочность и деформативность при сжатии сотопластов. — Заводская лаборатория, 1972, № 5, с. 603—606.
5. *[illegible]* [illegible] конструкций. — М.: 1980. 375 с.
6. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: 1972. 498 с.
7. Колокольчиков В. В., Комарова Н. Ю., Макарова Н. С. Термоупругость, теплопроводность и прочность слоистых металлокомпозитов. — Механика композит. материалов, 1983, № 2, с. 257—260.
8. *Колокольчиков В. В., Комаров Н. С., Князева Л. М.* Прочность трехкомпонентного слоистого композита. — Проблемы прочности, 1984, № 4, с. 37—41.

Куйбышевский авиационный институт
им. С. П. Королева
Куйбышевский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.I.198[illegible]

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

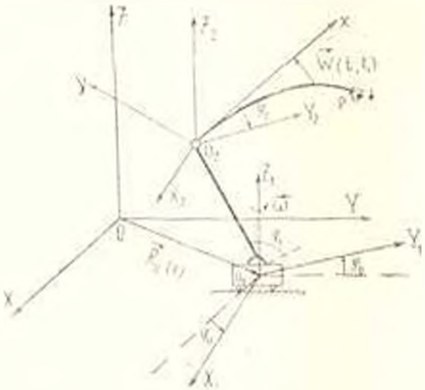
УДК 531.8, 62.50

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ДВУХЗВЕННОГО УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРИВОДНЫМИ СИСТЕМАМИ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Рассматривается кинематическая модель двухзвенного антропоморфного манипулятора, последнее звено которого моделируется как упругий стержень. Управление всеми степенями подвижности манипулятора осуществляется электромеханическими приводами, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока [1]. В рамках линейной теории упругости исследуется задача кинематического управления в смысле [2]. Приведена одна постановка задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора.

1. Механическая модель и уравнения движения. Манипулятор состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 1). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром O_2. Первое звено соединено шарниром с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено манипулятора является упругим стержнем,



Фиг. 1

на конце которого расположен схват с грузом. Соединительные шарниры — идеальные цилиндрические. Платформа механической руки может перемещаться в горизонтальной плоскости. Манипулятор имеет пять степеней свободы: движение осуществляется посредством электромеханических приводов D_α ($\alpha = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$). Приводы D_x, D_y, D_{φ_0}, D_{φ_1} расположены на платформе и управляют перемещением платформы, поворотом манипулятора относительно вертикальной оси, а также поворотом первого звена относительно платформы, соответственно. Привод D_{φ_1} расположен в шарнире O_2 и уп-равляет поворотом второго звена относительно первого. Для описа-ния уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальные $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат. Введе обозначения: L_1—длина первого звена; L_2—длина второго звен $R_0(t)=(x(t), y(t), 0)^T$—радиус-вектор платформы относительно систе-мы координат $OXYZ$ (символ ^{T} означает транспонирование); h—высо-та платформы; φ_0—угол между осями OX и O_1X_1 (φ_0—угол поворот манипулятора относительно оси O_1Z_1); φ_1—угол поворота первого зве-на относительно платформы; φ_2—угол поворота второго упругог звена относительно оси O_2Y_2 (φ_2—угол между касательной O_2x к уп-ругому звену O_2p в точке O_2 и осью O_2Y_2); m_0—масса платформы m_1—масса первого звена; m_2—масса второго звена; m—масса груза в схвате; m_1—масса привода в шарнире O_2; ξ $(0\leqslant\xi\leqslant L_2)$—координат точки нейтральной линии второго звена; $\vec{\omega}$—вектор угловой скорост вращения манипулятора относительно оси O_1Z_1; $\vec{W}(t, \xi)$—вектор уп-ругой деформации второго звена относительно точки O_2 в систем $O_2X_2Y_2Z_2$; $\vec{R}(t, \xi)$—радиус-вектор точки нейтральной линии второг звена с координатой ξ в момент времени t относительно точки O системе $OXYZ$; $\rho(\xi)$—линейная плотность второго звена; $EJ(\xi)$—жест-кость второго звена на изгиб (E—модуль Юнга материала, $J(\xi)$—мо-мент инерции поперечного сечения); $s(\xi)$—площадь поперечного се-чения второго звена; функции $\rho(\xi)$, $J(\xi)$, $s(\xi)$ предполагаются достаточ-но гладкими; n_i—передаточное число привода D_i; $\vec{Q}=(F_x, F_y, M_{\varphi_0}, M_{\varphi_1}, M_{\varphi_2})$—вектор, компоненты которого—электромагнитные силы моменты, приложенные к ротору электродвигателей приводов; L_ν—коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя D_ν-г привода; R_ν—электрическое (омическое) сопротивление обмотки ро-тора электродвигателя D_ν-го привода; k_ν—коэффициент пропорцио-нальности между электрическим током цепи ротора электродвигател D_ν-го привода и соответствующей электромагнитной силой или мо-ментом ($F_x=i_xk_x$, $F_y=i_yk_y$, $M_{\varphi_0}=i_{\varphi_0}k_{\varphi_0}$, $M_{\varphi_1}=i_{\varphi_1}k_{\varphi_1}$, $M_{\varphi_2}=i_{\varphi_2}k_{\varphi_2}$); u_ν—электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигател D_ν-го привода. Статоры электродвигателей и корпусы редукторо приводов D_ν ($\nu=x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$) жестко связаны с платформой первым звеном механической руки манипулятора, соответственно.

Векторы $\vec{R}(t, \xi)$ (в системе $OXYZ$); $\vec{\omega}(t)$ (в системе $O_1X_1Y_1Z_1$) $\vec{W}(t, \xi)$ (в системе $O_2X_2Y_2Z_2$) имеют вид:

$$\vec{W}(t, \xi)=\begin{vmatrix} -w_2(t, \xi) \\ -w_1(t, \xi)\sin\varphi_2 \\ w_1(t, \xi)\cos\varphi_2 \end{vmatrix} \quad \vec{\omega}(t)=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_0 \end{vmatrix} \qquad (1.1$$

$$\vec{R}(t, \xi)=\begin{vmatrix} x(t)-w_2(t, \xi)\cos\varphi_0-[L_1\cos\varphi_1+\xi\cos\varphi_2-w_1(t, \xi)\sin\varphi_2]\sin\varphi_0 \\ y(t)-w_2(t, \xi)\sin\varphi_0+[L_1\cos\varphi_1+\xi\cos\varphi_2-w_1(t, \xi)\sin\varphi_2]\cos\varphi_0 \\ h+L_1\sin\varphi_1+\xi\sin\varphi_2+w_1(t, \xi)\cos\varphi_2 \end{vmatrix}$$

В рамках линейной теории упругих стержней предполагается, что упругие смещения второго звена механической руки манипулятора малы (большая изгибная жесткость $EJ(\xi)$) по сравнению с его длиной $|W(t, \xi)|/L_2 = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, а максимальный период T_1 собственных упругих колебаний мал по сравнению с характерным временем T процесса управления манипулятором $T_1/T = O(\varepsilon^{1/2})$. Начальные распределения $w_i(t_0, \xi) = f_i^1(\xi)$, $\dot{w}_i(t_0, \xi) = f_i^2(\xi)$, $(i = 1, 2)$ при этом, естественно, считаются малыми, а x, y, φ_0, φ_1, $\varphi_2 \sim 1$; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}_0$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2 \sim \varepsilon$.

Кинетическая энергия движения рассматриваемой механической системы манипулятора имеет вид

$$K = \sum_{i=0}^{3} K_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho s |\dot{R}(t, \xi)|^2 d\xi \tag{1.2}$$

где K_0 — кинетическая энергия движения платформы, K_1 — кинетическая энергия движения первого звена, K_2 — кинетическая энергия двигателя в шарнире O_2, как точечный груз на конце первого звена, K_3 — кинетическая энергия вращения роторов двигателей приводов, а последнее слагаемое — кинетическая энергия движения второго звена с грузом на схвате. Кинетическая энергия движения точечной массы на схвате манипулятора учитывается путем добавления к $\rho(\xi)s(\xi)$ дельта функции интенсивности m, то есть $\rho s = \rho(\xi)s(\xi) + m\delta(\xi - L_2)$.

Вычисляя кинетическую энергию по формуле (1.2) и оставляя члены, порядок малости которых не превышает ε^2, получим

$$K = \frac{1}{2} A\dot{x}^2 + \frac{1}{2} B\dot{y}^2 + \frac{C}{2}(\dot{\varphi}_1^2 - \dot{\varphi}_0^2\cos^2\varphi_1) - D(\dot{x}\dot{\varphi}_0\cos\varphi_1 +$$

$$+ \dot{y}\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1) + \frac{1}{2} E\dot{\varphi}_0 L_1\cos\varphi_1(\dot{\varphi}_0 L_1\cos\varphi_1 - 2\dot{x}) +$$

$$+ \frac{1}{2} E\dot{\varphi}_1 L_1(\dot{\varphi}_1 L_1 - 2\dot{y}\sin\varphi_1) + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho s \Big[\dot{w}_1^2(t, \xi) + \dot{w}_2^2(t, \xi) +$$

$$+ 2\dot{w}_1(t, \xi)[\dot{\varphi}_2\xi + L_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{y}\sin\varphi_2] + 2\dot{w}_2(t, \xi) \times$$

$$\times [\dot{\varphi}_0 L_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_0\xi\cos\varphi_2 - \dot{x}] + 2w_1(t, \xi)[\dot{\varphi}_0\dot{x}\sin\varphi_2 -$$

$$- L_1\dot{\varphi}_0^2\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2\xi\sin 2\varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 L_1\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] +$$

$$+ 2w_2(t, \xi)\dot{\varphi}_0[\dot{\varphi}_2\xi\sin\varphi_2 + \dot{\varphi}_1 L_1\sin\varphi_1 - \dot{y}] + \dot{\varphi}_2^2\xi^2 + \tag{1.3}$$

$$+ \dot{\varphi}_0^2\xi^2\cos^2\varphi_2 - 2\dot{\varphi}_0\dot{x}\xi\cos\varphi_2 - 2\dot{\varphi}_2\dot{y}\xi\sin\varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 L_1\xi \times$$

$$\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\Big] d\xi + \frac{1}{2}(J_0 n_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + J_1 n_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 n_2^2 \dot{\varphi}_2^2)$$

где $A = m_0 + m_1 + m_2 + m + m_1' + J_x n_x^2$, $B = m_0 + m_1 + m_2 + m + m_1' + J_y n_y^2$,

$$C = (J_1 + m_1' L_1^2), \quad D = m_1' L_1 + \frac{m_1 L_1}{2}, \quad E = m + m_2.$$

Здесь $J_1 = m_1 L_1^2/3$, J_α $(\alpha = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$—момент инерции вращения ротора электродвигателя D_α-го привода.

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы равна сумме потенциальных энергий сил тяжести и упругих сил, возникающих при деформации стрелы:

$$\Pi = \left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m_1'\right) gh + \left(m_1' + \frac{m_1}{2}\right) g L_1 \sin\varphi_1 +$$

$$+ g \int_0^{L_2} \rho s [L_1 \sin\varphi_1 + \xi \sin\varphi_2 + w_1(t, \xi) \cos\varphi_2 + h] d\xi - \tag{1.4}$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EJ(\xi) \sum_{i=1}^{2} [w_i''(t, \xi)]^2 d\xi$$

Для вывода уравнений движения манипулятора используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [3]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - \Pi + A) dt = 0 \tag{1.5}$$

где δK и $\delta \Pi$—вариации кинетической и потенциальной энергий, а $\delta A = \vec{Q} \cdot \delta \vec{q}$—элементарная работа электромагнитных сил и моментов. Здесь $\vec{q}$—вектор с компонентами: $\vec{q} = (x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.

Подставляя (1.3), (1.4) в (1.5) и учитывая, что $\delta \vec{q} = \delta w_1(t, \xi) = \delta w_2(t, \xi) = 0$ при $t = t_1, t_2$, получим с точностью до ε следующие нелинейные интегро-дифференциальные уравнения движения манипулятора в виде:

$$A\ddot{x} + A_1 \ddot{\varphi}_0 - \int_0^{L_2} \rho s \ddot{w}_2(t, \xi) d\xi + f_1(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_x F_x$$

$$B\ddot{y} + A_2 \ddot{\varphi}_1 + A_3 \ddot{\varphi}_2 - \sin\varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s \ddot{w}_1(t, \xi) d\xi + f_2(\varphi_1, \varphi_2) = n_y F_y$$

$$A_4 \ddot{\varphi}_0 + A_1 \ddot{x} + \int_0^{L_2} \rho s \{\ddot{w}_2(t, \xi) [L_1 \cos\varphi_1 + \xi \cos\varphi_2]\} d\xi + f_3(x, \varphi_0, \varphi_1) = n_{\varphi_0} M_{\varphi_0}$$

$$A_6 \ddot{\varphi}_1 + A_7 \ddot{\varphi}_2 + A_2 \ddot{y} + L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s \ddot{w}_1(t, \xi) d\xi +$$

$$+f_4(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{x_1} M_{x_1} \tag{1.6}$$

$$A_9\ddot{\varphi}_1 + A_{10}\ddot{\varphi}_2 + A_{11}\ddot{y} + \int_0^{L_2} \rho s \xi \ddot{w}_1(t, \xi)\, d\xi +$$

$$+ f_5(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{x_2} M_{x_2} + g\cos\varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s w_1(t, \xi)\, d\xi$$

где коэффициенты при старших производных и функции $f_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) определяются следующим образом (скобкой $(\cdot)$ обозначены соответствующие аргументы функции f_i):

$$A_1 = A_5 = -L_1\cos\varphi_1(EL_1 + D) - \int_0^{L_2} \rho s \xi \cos\varphi_2\, d\xi$$

$$A_2 = A_6 = -L_1\sin\varphi_1(EL_1 + D); \quad A_3 = A_{11} = -\sin\varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s \xi\, d\xi$$

$$A_4 = \cos\varphi_1(EL_1^2 - C\cos\varphi_1); \quad A_8 = C + EL_1^2 + J_{x_1} n_{x_1}^2$$

$$A_7 = A_{10} = L_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s \xi\, d\xi; \quad A_9 = \int_0^{L_2} \rho s \xi^2\, d\xi + J_{x_2} n_{x_2}^2$$

$$f_1(\cdot) = \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1(L_1E + D) + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2 \int_0^{L_2} \rho s \xi \sin\varphi_2\, d\xi$$

$$f_2(\cdot) = -\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1(L_1E + D) - \dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s \xi\, d\xi$$

$$f_3(\cdot) = -\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1(2C\cos\varphi_1 + EL_1^2) + \dot{\varphi}_1 x\sin\varphi_1(D + L_1E) +$$

$$+ \int_0^{L_2} \rho s \left[-\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2\xi\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi_2 + 2L_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right) - x\dot{\varphi}_2\xi\sin\varphi_2 - \right.$$

$$\left. - 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 L_1\xi\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \right] d\xi; \quad f_4(\cdot) = -Dx\dot{\varphi}_0\sin\varphi_1 +$$

$$+ C\dot{\varphi}_0^2\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + Dy\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \frac{E}{2}\dot{\varphi}_0^2 L_1^2\sin 2\varphi_1 +$$

$$+ g\cos\varphi_1(D + L_1E) - \dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)L_1\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s \xi\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{L_2} \rho s [\dot{\varphi}_0^2 L_1\xi\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 L_1\xi\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\, d\xi$$

$$f_z(\cdot) = [y\dot{\varphi}_2(2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) -$$

$$-\sin\varphi_2\dot{\varphi}_0(x - \dot{\varphi}_0^2 L_1 \cos\varphi_1) + g\cos\varphi_2] \int\limits_0^{L_2} \rho s d\xi + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 \sin 2\varphi_2 \int\limits_0^{L_2} \rho s \xi d\xi$$

К уравнениям (1.6) необходимо также добавить уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей [1]:

$$L_\nu \frac{dI_\nu}{dt} + R_\nu I_\nu + n_\nu k_\nu \dot{\chi}_\nu = u_\nu, \quad (\nu = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$(\chi_x = x, \ \chi_y = y, \ \chi_{\varphi_0} = \varphi_0, \ \chi_{\varphi_1} = \varphi_1, \ \chi_{\varphi_2} = \varphi_2) \tag{1.7}$$

Уравнения упругих колебаний в вертикальной и в горизонтальной плоскостях второго упругого звена манипулятора с грузом на схвате имеют вид (при $\rho(\xi) = \rho_0 = \text{const}$, $s(\xi) = s_0 = \text{const}$, $J(\xi) = J_0 = \text{const}$)

$$\ddot{w}_i(t, \xi) + c_1 w_i^{IV}(t, \xi) = F_i(\cdot, \xi)$$

$$w_i(t, 0) = w_i'(t, 0) = w_i''(t, L_2) = 0 \tag{1.8}$$

$$w_i'''(t, L_2) = c_2[\ddot{w}_i(t, L_2) - F_i(\cdot, L_2)]$$

$$w_i(t_0, \xi) = f_i^1(\xi), \quad \dot{w}_i(t_0, \xi) = f_i^2(\xi)$$

где

$$c_1 = EJ_0/\rho_0 s_0, \ c_2 = m/EJ_0, \ 0 \leqslant \xi \leqslant L_2$$

$$F_1(\cdot, \xi) = [-\ddot{\varphi}_2 \xi + y\sin\varphi_2 - L_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + f_n(\cdot, \xi)\rho_0 s_0$$

$$F_2(\cdot, \xi) = [x - \varphi_0 L_1 \cos\varphi_1 - \ddot{\varphi}_0 \xi\cos\varphi_2] + f_\tau(\cdot, \xi)\rho_0 s_0$$

$$f_n(\cdot, \xi) = \dot{\varphi}_0 x\sin\varphi_2 + L_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_0^2\sin\varphi_2(L_1\cos\varphi_1 + \xi\cos\varphi_2) - g\cos\varphi_2$$

$$f_\tau(\cdot, \xi) = 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 L_1 \sin\varphi_1 + \varphi_0 y - 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2 \xi\sin\varphi_2$$

Здесь скобкой $(\cdot, \xi)$ обозначены соответствующие аргументы функций F_i, f_n, f_τ.

Решение задачи (1.8) ищем в виде [4]

$$w_i(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^i(t) X_n(\xi) \tag{1.9}$$

где собственные функции $X_n(\xi)$ с точностью до постоянного множителя C_n имеют вид

$$X_n(\xi) = C_n[\operatorname{ch}\lambda_n\xi - \cos\lambda_n\xi + \beta_n(\sin\lambda_n\xi - \operatorname{sh}\lambda_n\xi)]$$

$$\beta_n = (\operatorname{ch}\lambda_n L_2 + \cos\lambda_n L_2)(\operatorname{sh}\lambda_n L_2 + \sin\lambda_n L_2), \ n \geqslant 1 \tag{1.10}$$

C_n определяется из условий ортогональности собственных функций. Собственные частоты λ_n задачи (1.8) определяются из трансцендентного уравнения

$$1+\operatorname{ch}\lambda_n L_2\cos\lambda_n L_2+\gamma\lambda_n(\operatorname{sh}\lambda_n L_2\cos\lambda_n L_2-\operatorname{ch}\lambda_n L_2\sin\lambda_n L_2)=0$$

$$\gamma=c_1 c_2, \quad n\geqslant 1$$

Используя условия ортогональности собственных функций, граничные условия задачи (1.8) и решая соответствующие дифференциальные уравнения, получим для коэффициентов Фурье $Q^i_n(t)$ следующие выражения:

$$Q^i_n(t)=A\cos\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t+B\sin\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t+\frac{1}{\lambda^2_n\sqrt{c_1}}\int\limits_0^t\sin\lambda^2_n\sqrt{c_1}(t-\tau)\,\Phi_i[\tau]d\tau,\ (i=1,2)$$

(1.[illegible])

где

$$A=Q^i_n(t_0)\cos\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t_0-\frac{1}{\lambda^2_n\sqrt{c_1}}\,\dot{Q}^i_n(t_0)\sin\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t_0$$

$$B=Q^i_n(t_0)\sin\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t_0+\frac{1}{\lambda^2_n\sqrt{c_1}}\,\dot{Q}^i_n(t_0)\cos\lambda^2_n\sqrt{c_1}\,t_0$$

$$Q^i_n(t_0)=\frac{1}{\lambda^2_n}\int\limits_0^{L_2}F_i(\xi)[1+\gamma\delta(\xi-L_2)]X_n(\xi)d\xi$$

$$\dot{Q}^i_n(t_0)=\frac{1}{\lambda^2_n}\int\limits_0^{L_2}\dot{F}_i(\xi)[1+\gamma\delta(\xi-L_2)]X_n(\xi)d\xi$$

$$\Phi_i[t]=\frac{1}{\lambda^2_n}\int\limits_0^{L_2}F_i(t,\xi)[1+\gamma\delta(\xi-L_2)]X_n(\xi)d\xi$$

Скобки $[t]$ означают неявную зависимость функций Φ_i от времени.

2. *Задача кинематического управления.* Пусть задано движение абсолютно жесткой модели манипулятора, то есть заданы $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и их производные. Требуется определить движение упругой модели манипулятора, движение груза на схвате, электромагнитные силы и моменты, приложенные к ротору электродвигателей, электрические напряжения, подаваемые на вход электродвигателей, которые необходимы для обеспечения заданного движения для упругой модели манипулятора.

Из уравнений (1.6) следует, что электромагнитные силы и моменты можно представить в виде суммы двух слагаемых $\vec{Q}=\vec{Q}^0+\vec{Q}^1$, где $\vec{Q}^0=(F^0_x,\ F^0_y,\ M^0_{\varphi_0},\ M^0_{\varphi_1},\ M^0_{\varphi_2})$, $\vec{Q}^1=(F^1_x,\ F^1_y,\ M^1_{\varphi_0},\ M^1_{\varphi_1},\ M^1_{\varphi_2})$. $\vec{Q}^0$ соответствует абсолютно жесткой модели манипулятора и определяется следующим образом:

$$F^0_x=\frac{1}{n_x}[A\ddot{x}+A_1\ddot{\varphi}_0+l_1(\ldots)],\quad F^0_y=\frac{1}{n_y}[B\ddot{y}+A_2\ddot{\varphi}_1+$$

$$+A_3\ddot{\varphi}_2+f_2(\cdot)], \quad M^0_{\varphi_0}=\frac{1}{n_{\varphi_0}}[A_4\ddot{\varphi}_0+A_5\ddot{x}+f_3(\cdot)]$$

$$M^0_{\varphi_1}=\frac{1}{n_{\varphi_1}}[A_6\ddot{\varphi}_1+A_7\ddot{\varphi}_2+A_8\ddot{y}+f_4(\cdot)], \quad M^0_{\varphi_2}=\frac{1}{n_{\varphi_2}}[A_9\ddot{\varphi}_2+A_{10}\ddot{\varphi}_1+A_{11}\ddot{y}+f_5(\cdot)] \qquad (2.1)$$

а $\dot{Q}^1$ обусловлен упругой податливостью второго звена и его компоненты имеют вид

$$F^1_x=-\frac{1}{n_x}\int_0^{L_2}\rho s\,\ddot{w}_2(t,\xi)d\xi, \quad F^1_y=-\frac{1}{n_y}\sin\varphi_2\int_0^{L_2}\rho s\,\ddot{w}_1(t,\xi)d\xi$$

$$M^1_{\varphi_0}=\frac{1}{n_{\varphi_0}}\int_0^{L_2}\rho s\{\ddot{w}_2(t,\xi)[L_1\cos\varphi_1+\xi\cos\varphi_2]\}d\xi$$

$$M^1_{\varphi_1}=\frac{1}{n_{\varphi_1}}\int_0^{L_2}\rho sL_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{w}_1(t,\xi)d\xi$$

$$M^1_{\varphi_2}=\frac{1}{n_{\varphi_2}}\int_0^{L_2}\rho s[\xi\ddot{w}_1(t,\xi)-g\cos\varphi_2 w_1(t,\xi)]d\xi \qquad (2.2)$$

$w_i(t,\xi)$, $(i=1,2)$ определяются из (1.9)–(1.11).

Используя связь между электрическим током в цепи роторов электродвигателей приводов и электромагнитными силами и моментами (см. п. 1), получим уравнения (1.7) баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей в виде

$$L_a(\dot{Q}^0_a+\dot{Q}^1_a)+R_a(Q^0_a+Q^1_a)+k^*_a n_a\dot{\chi}_a=k_a u_a \qquad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что управляющие напряжения, подаваемые на вход электродвигателей приводов, также можно представить в виде суммы двух слагаемых. Напряжение, которое необходимо для управления жесткой моделью манипулятора, и добавка, обусловленная упругостью второго звена, то есть $u_a=u^0_a+u^1_a$, определяются следующими выражениями:

$$u^0_a=\frac{1}{k_a}(L_a\dot{Q}^0_a+R_aQ^0_a+k^*_a n_a\dot{\chi}_a), \quad u^1_a=\frac{1}{k_a}(L_a\dot{Q}^1_a+R_aQ^1_a) \qquad (2.4)$$

где Q^0_a и Q^1_a определяются из (2.1), (2.2) соответственно.

Состояние механической системы в каждый момент времени, а также положение груза в системе $OXYZ$ можно определить с помощью радиуса-вектора $\bar{R}(t,\xi)$ из (1.1) после определения $w_i(t,\xi)$ $(i=1,2)$ (1.9).

3. Некоторые частные случаи. Важным случаем, когда в нулевом приближении можно получить более простые расчетные формулы для определения электромагнитных сил и моментов, является случай, когда $L_i \ll R_i$. Физический смысл неравенства означает, что время $\tau_i = L_i/R_i$ установления токов в цепях электродвигателей намного меньше времени рабочей операции манипулятора ($\tau_i \ll T$). Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов.

Из рассматриваемой задачи следует также анализ движения и задача кинематического управления некоторых часто встречающихся конструкций промышленных роботов с учетом упругой податливости второго звена: а) случай неподвижного основания манипулятора ($x(t)=y(t)=\text{const}$). Подвижными степенями свободы являются: $\varphi_i(t)$ ($i=0, 1, 2$); б) случай, когда $\varphi_1=90^\circ$. Подвижными степенями являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_2(t)$; в) случай, когда $\varphi_1=\varphi_2=90^\circ$. Подвижными степенями свободы являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$; г) случай, когда $\varphi_1=\varphi_2=0$. Подвижными степенями свободы являются $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$.

4. Об одной постановке задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора. Пусть заданы достигаемые манипулятором начальное и конечное состояния

$$\chi_i(t_0)=\chi_i^0, \quad \dot\chi_i(t_0)=\dot\chi_i^0, \quad w_i(t_0,\xi)=f_i^1(\xi), \quad \dot w_i(t_0,\xi)=f_i^2(\xi), \quad (i=1,2) \tag{4.1}$$

$$\chi_i(T)=\chi_i^T, \quad \dot\chi_i(T)=\dot\chi_i^T, \quad w_i(T,\xi)=g_i^1(\xi), \quad \dot w_i(T,\xi)=g_i^2(\xi), \quad (i=1,2)$$

Здесь $f_i^j(\xi)$, $g_i^j(\xi)$ ($j=1, 2$) — заданные согласованные с граничными условиями функции, описывающие начальные и конечные распределения упругих отклонений манипулятора. Время T окончания процесса управления манипулятора и конечные условия χ_i^T, $\dot\chi_i^T$, $g_i^j(\xi)$ могут быть фиксированными или свободными, принадлежащими некоторым допустимым областям:

$$T \in G_1, \quad \chi_i^T \in G_2, \quad \dot\chi_i^T \in G_3, \quad g_i^j \in G_4 \tag{4.2}$$

Через $\vec{\zeta}=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ обозначим конструктивные параметры манипулятора. В качестве этих параметров могут быть физико-геометрические параметры, то есть линейные размеры звеньев манипулятора, материалы, из которых изготовлены звенья, массы звеньев, грузоподъемность и т. п. Компоненты вектора $\vec{\zeta}$ могут характеризовать также типы приводов (электромеханические, пневматические, гидравлические) и их расположение в конструкции манипулятора.

Вектор $\vec{\zeta}$ выбирается, исходя из реального назначения манипулятора. Очевидно, что компоненты ζ_i должны удовлетворять условиям

$$\zeta_i \in G_i^{\zeta} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4.3}$$

Условия (4.3) определяют в пространстве конструктивных параметров n-мерная область Q_k, каждой точке которого соответствует некоторая конструкция манипулятора [8].

Кроме ограничений на краевые условия (4.2) и на конструктивные параметры манипулятора (4.3), в общем случае на его движение и режим управления, могут быть наложены также ограничения вдоль траектории

$$(Q_k, \gamma_x, \gamma_y, \beta_i) \in G \tag{4.4}$$

Ограничения на управления Q_k, на фазовые координаты (γ_x, γ_y) и на конструктивные параметры β_i манипулятора могут быть разделены и не разделены. К числу ограничений типа (4.4) можно отнести также ограничения на частоты и амплитуды упругих колебаний манипулятора, напряженно деформируемое состояния звеньев и т. д.

Для оценки технического уровня проектируемого манипулятора и качества выполнения манипулятором поставленной задачи зададим некоторый функционал, который в общем виде запишем

$$J(\gamma_s^*, Q_k^*, \beta_i^*) = \sup_{Q_k, \gamma_s} J(\gamma_s, Q_k, \beta_i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad s = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \tag{4.5}$$

В качестве критерия типа (4.5) можно, например, принять мощность манипулятора, энергозатраты приводов, быстродействия, вес манипулятора, стоимость, надежность и т. п. Применимость того или иного метода решения задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора существенно зависит от вида ограничений (4.2)—(4.4) и от функционала (4.5). Исследованию некоторых задач оптимального управления и оптимального проектирования упругого манипулятора посвящен ряд работ [5—8 и др.].

ANALYSIS OF TWO SECTION ELASTIC MANIPULATORS MOTION WITH ELECTROMECHANIC DRIVINGS SYSTEMS ON A MOVING FOUNDATION

A. A. GUKASIAN

ՇԱՐԺԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՇԱՐԺԱՐԱՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՐԿՕՂԱԿ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ամփոփում

Առաձգական ձողերի գծային տեսության առնչություններում ուսումնասիրվում է շարժական հիմքի վրա գտնվող անտրոպոմորֆ մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկական ղեկավարման խնդիրը։

Որոշված են առաձգական տեղափոխությունները, էլեկտրամագնիսական ուժերը, մոմենտները և էլեկտրական շարժիչների հոսանքի արժեք լա-

ռումները։ Քննարկվում է առաձգական դյուրաթեքություն ունեցող և հաճախ հանդիպող մանիպուլյատորների կոնստրուկցիաներ, որոնց հնարավորությունները բխում են դիտարկված խնդրից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С.* Теория автоматического электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, №5, с. 142—152.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
5. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.—Изв. АН СССР, ПММ, 1981, №6, с. 1045—1103.
6. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, №5, с. 33—41.
7. *Болотник Н. Н., Гукасян А. А.* Управление движением манипулятора с учетом упругих колебаний стрелы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 1, с. 38—46.
8. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В.* Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 2, с. 59—67.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6.VII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 621.073.2:639.376

РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ НА ОСНОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ, ОБЛАДАЮЩЕМ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ

КАКОСИМИДИ Н. Ф.

Рассматривается плоская задача о расчете фундаментальной полосы переменной жесткости на основании конечной глубины, материал которого удовлетворяет предпосылкам теории упругой наследственности Больцмана-Вольтерра. Реактивные давления основания разыскиваются в виде суммы реактивных давлений, соответствующих упруго-мгновенной задаче, и приращении давлений, вызываемых за счет ползучести. Последние, являющиеся неизвестными, определяются из условия их самоуравновешенности, а также условия контактности полосы и основания, выполняемого в интегральной форме на отдельных участках контакта. Решение иллюстрированного числовым примером расчета, показывающим, что ползучесть основания существенно влияет на распределение реактивных давлений.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за №7096—В 88 от 21.09.1988

Поступила в редакцию
24.X.1988