ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ЗАДЕЛАННОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА С УЧЕТОМ СЦЕПЛЕНИЯ

МКРТЧЯН А. М., ТЕРЗЯН С. А.

Контактные задачи для прямоугольной области, без учета сцепления, рассмотрены в многих работах, например [1—4, 9] и др. С учетом трения и сцепления рассмотрены в работах [7, 10] и др.

1. Рассматривается плоская контактная задача для упругого прямоугольника длиной $2a$, высотой b, обеими концами заделанного в жесткие стенки (штампы) на некоторую, различную для верхней и нижней плоскостей, глубину (фиг. 1). Принимается, что между стенками и прямоугольником имеет место полное сцепление. На свободных от заделок частях прямоугольника действуют заданные нагрузки.

Прямоугольник имеет одну ось симметрии, и для симметричного нагружения рассматривается одна половина прямоуголника при следующих граничных условиях:

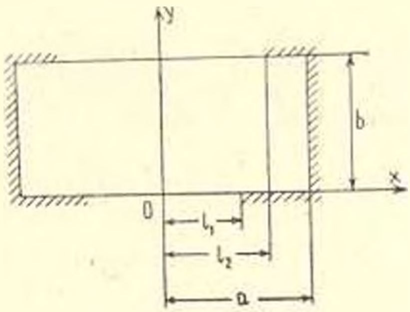
$$\tau_{xy}(0, y)=u(0, y)=0, \quad (0<y<b) \tag{1.1}$$

$$u(a, y)=0, \quad v(a, y)=0, \quad (0\leqslant y\leqslant b) \tag{1.2}$$

$$\sigma_y(x, 0)=h_1(x), \ \tau_{xy}(x, 0)=0 \quad (0<x<l_1) \tag{1.3}$$

$$u(x, 0)=v(x, 0)=0, \quad (l_1\leqslant x\leqslant a) \tag{1.4}$$

$$\sigma_y(x, b)=h_2(x), \ \tau_{xy}(x, b)=0 \quad (0<x<l_2) \tag{1.5}$$



Фиг. 1

$$u(x, b)=v(x, b)=0, \quad (l_2\leqslant x\leqslant a) \tag{1.6}$$

Задача решается при помощи бигармонической функции Эри, представленной в виде суммы двух тригонометрических рядов Фурье [1] где

$$\Phi(x, y)=d_1x^2+d_2y^2+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\operatorname{ch}\alpha_ky+B_k\operatorname{sh}\alpha_ky+$$

$$+\alpha_ky(C_k\operatorname{ch}\alpha_ky+D_k\operatorname{sh}\alpha_ky)]\cos\alpha_kx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(E_k \operatorname{ch}\beta_k x+\beta_k x H_k \operatorname{sh}\beta_k x\right)\cos\beta_k y \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_k=\frac{k\pi}{a}, \qquad \beta_k=\frac{k\pi}{b}$$

При таком выборе функции напряжений условия (1.1) удовлетворяются.

В дальнейшем, величины и уравнения, относящиеся к линии $y=0$, будут снабжены индексом $j=1$, а к линии $y=b$ — индексом $j=2$.

2. Для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) сначала построим решение вспомогательной задачи, когда по всему контуру прямоугольника заданы перемещения. Следовательно, должны быть удовлетворены условия (1.2), (1.4) и (1.6), которые дополним на интервале ортогональности, вводя новые неизвестные функции

$$\begin{aligned}
&u(x,(j-1)b)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(j)}\sin\alpha_k x=\begin{cases} f_j(x), & (0\leqslant x<l_j)\\ 0, & (l_j\leqslant x\leqslant a)\end{cases}\\
&\varphi(x,(j-1)b)=\frac{\varphi_0^{(j)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{(j)}\cos\alpha_k x\begin{cases}\varphi_j(x), & (0\leqslant x\leqslant l_j)\\ 0, & (l_j\leqslant x\leqslant a)\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пользуясь формулами обращения для рядов Фурье и вводя новые неизвестные

$$X_k=(-1)^k\alpha_k^2(C_k\operatorname{ch}\alpha_k b+D_k\operatorname{sh}\alpha_k b),\quad Y_k=(-1)^k\alpha_k^2 C_k,\quad Z_k=(-1)^k\beta_k^2 H_k\operatorname{sh}\beta_k a \tag{2.2}$$

для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&X_p[1+N_p^{(1)}]+Y_p M_p^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{pk}Z_k+a_p^{(1)}\\
&Y_p[1+N_p^{(1)}]+X_p M_p^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_{pk}Z_k+a_p^{(2)}\\
&Z_p[1+N_p^{(2)}]=\sum_{k=1}^{\infty} b_{pk}[X_k-(-1)^p Y_k]+b_p,\quad (p=1,\ 2,\ \dots)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

и следующие связи:

$$\begin{aligned}
\alpha_k^2 A_k=&-\frac{\alpha_k\varphi_k^{(2)}}{(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha_k b}+\frac{\alpha_k\varphi_k^{(1)}\operatorname{cth}\alpha_k b}{1+\nu}+\frac{(-1)^k X_k}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}-\alpha_k b\operatorname{cth}\alpha_k b\right)+\\
&+(-1)^k Y_k\left(\frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}-\frac{1-\nu}{1+\nu}\operatorname{cth}\alpha_k b\right),\quad d_2=\nu d_1\\
\alpha_k^2 B_k=&-\frac{\alpha_k\varphi_k^{(1)}}{1+\nu}+\frac{1-\nu}{1+\nu}(-1)^k Y_k,\quad 2b(d_1-\nu d_2)=\varphi_0^{(2)}-\varphi_0^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\beta_k^2 E_k = \frac{(-1)^k Z_k}{\operatorname{sh}\beta_k a}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \beta_k a \operatorname{cth}\beta_k a\right), \quad E e_0 = \varphi_0^{(1)}$$

Коэффициенты и свободные члены системы (2.3) определяются формулами

$$a_{pk} = \frac{4(1+\nu)\alpha_p^2}{a(3-\nu)} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}, \quad b_{pk} = \frac{4(1+\nu)\beta_p^2}{b(3-\nu)} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}$$

$$a_p^{(j)} = (-1)^{j-1}\frac{(-1)^p}{3-\nu}\left[\alpha_p f_p^{(3-j)} + (-1)^{j-1}\alpha_p \varphi_p^{(3-j)} \operatorname{cth}\alpha_p b\right] - \frac{(-1)^p}{(3-\nu)\operatorname{sh}\alpha_p b}\alpha_p \varphi_p^{(j)}$$

$$b_p = -\frac{2(-1)^p}{b(3-\nu)}\left[\varphi_0^{(1)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(1)}}{\alpha_m^2+\beta_p^2}\right] +$$

$$+ \frac{2}{b(3-\nu)}\left[\varphi_0^{(2)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(2)}}{\alpha_m^2+\beta_p^2}\right] \tag{2.5}$$

В (2.4) и (2.5) введены следующие обозначения:

$$f_p^{(j)} = \frac{2E}{a}\int_0^{l_j} f_j(x)\sin\alpha_p x\,dx, \quad \varphi_p^{(j)} = \frac{2E}{a}\int_0^{l_j} \varphi_j(x)\cos\alpha_p x\,dx$$

$$\varphi_0^{(j)} = \frac{E}{a}\int_0^{l_j} \varphi_j(x)\,dx, \quad M_p^{(1)} = \frac{(1+\nu)\alpha_p b \operatorname{ch}\alpha_p b}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\alpha_p b} - \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_p b} \tag{2.6}$$

$$N_p^{(1)} = \frac{e^{-\alpha_p b}}{\operatorname{sh}\alpha_p b} - \frac{(1+\nu)\alpha_p b}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\alpha_p b}, \quad N_p^{(2)} = \frac{e^{-\beta_p a}}{\operatorname{sh}\beta_p a} - \frac{(1+\nu)\beta_p a}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\beta_p a}$$

3. Для определения неизвестных перемещений удовлетворим условиям для напряжений (1.3) и (1.5) на свободных от штампов участках прямоугольника. Используя связи (2.4), обозначения (2.2) и значения X_k, Y_k из (2.3) с предварительным выделением главных частей, условия (1.3) и (1.5) после ряда преобразований сводятся к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Гильберта второго рода

$$q_j(u) + \frac{i(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} q_j(v)\operatorname{ctg}\frac{v-u}{2}\,dv = K_j(u), \quad (-\alpha_j < u < \alpha_j), \quad (j=1,2) \tag{3.1}$$

относительно некоторых комбинаций, связанных с производными неизвестных перемещений

$$q_j(u) = E\left[f_j\left(\frac{a}{\pi}u\right) + i\varphi_j\left(\frac{a}{\pi}u\right)\right] \tag{3.2}$$

В (3.1) введены обозначения

$$\alpha_j = \frac{\pi}{a} l_j, \quad K_j(u) = H_j(u) + R_{j0} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)}\cos ku + i\sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)}\sin ku \tag{3.3}$$

здесь

$$H_j(u)=-\frac{1}{B}h_j\left(\frac{a}{\pi}u\right),\quad R_{j0}=\frac{1}{B}\left[2d_1+\frac{2}{a(1+\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}Z_m}{\beta_m}\right]$$

$$\begin{aligned}
R_{jk}^{(1)}=&(-1)^j\frac{A}{B}\alpha_k\varphi_k^{(j)}N_{k1}+(-1)^{j-1}\frac{A}{B}\frac{\alpha_k\varphi_k^{(3-j)}}{\operatorname{sh}\alpha_k b}+\\
&+(-1)^j\frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)}\cdot\frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}[(2-j)Y_k+(j-1)X_k]+\\
&+(-1)^{j-1}\frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)}\cdot\frac{\alpha_k b\operatorname{ch}\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}[(2-j)X_k+(j-1)Y_k]+\\
&+\frac{8}{aB(3-\nu)}(-1)^k\alpha_k^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{(\beta_m^2+\alpha_k^2)^2}+\frac{4(-1)^k}{aB(1+\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{\beta_m^2+\alpha_k^2}
\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
R_{jk}^{(2)}=&\frac{A}{B}\frac{\alpha_k\varphi_k^{(3-j)}}{\operatorname{sh}\alpha_k b}-\frac{A}{B}\alpha_k\varphi_k^{(j)}N_{k1}+\frac{2(-1)^k N_k^{(1)}}{B(1+\nu)}[(2-j)Y_k+(j-1)X_k]-\\
&-\frac{(-1)^k}{B\operatorname{sh}\alpha_k b}[(2-j)X_k+(j-1)Y_k]\left|\frac{2}{1+\nu}-\frac{2\alpha_k b\operatorname{cth}\alpha_k b}{3-\nu}\right|+\\
&+\frac{(-1)^{j-1}}{aB(3-\nu)}8(-1)^k\alpha_k^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{(\beta_m^2+\alpha_k^2)^2}
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$N_{k1}=\frac{\exp(-\alpha_k b)}{\operatorname{sh}\alpha_k b},\quad A=\frac{2}{(1+\nu)(3-\nu)},\quad B=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(3-\nu)}$$

Правая часть (3.1)—$K_j(u)$, содержит неизвестные основных бесконечных систем и коэффициенты Фурье граничных функций, однако (3.1) будем решать в предположении, что правая часть—заданная функция, то есть будем обращать главную часть уравнения (3.1) [11]. Решение ищется в классе функций, которые на обоих концах отрезка интегрирования имеют интегрируемые особенности.

Обращением главной части, уравнения (3.1) приводятся к виду

$$q_j(u)=M_jK_j(u)+\frac{N_jZ_j(u)}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{K_j(v)dv}{Z_j(v)\sin\frac{v-u}{2}}-\gamma_j(u),\quad (-\alpha_j<u<\alpha_j)\tag{3.6}$$

где

$$\gamma_j(u)=2N_jZ_j(u)\left(A_j\sin\frac{u}{2}+B_j\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$Z_j(u)=\left(\sin\frac{\alpha-u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^j i\gamma}\left(\sin\frac{\alpha+u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma}\tag{3.7}$$

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu},\quad M_j=-\frac{(1-\nu)^2}{2A},\quad N_j=(-1)^{j-1}2iB$$

Условие разрешимости дает

$$A_j=(-1)^jB_j\operatorname{tg}\alpha i\gamma\tag{3.8}$$

Для определения постоянных B_j проинтегрируем (3.6) в пределах от $-\alpha_j$ до α_j и с учетом (2.1) получим, что $A_j = B_j = 0$.

Уравнения (3.6) после ряда преобразований приводятся также к виду

$$q_j(u) = L_j[H_j(u)] + L_j[R_{j0}] + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} L_j[\cos ku] + i\sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} L_j[\sin ku] \qquad (3.9)$$

где для удобства записи введен оператор

$$L_j[g(u)] = -\frac{iN_j}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma} Z_j(u)\,\mathrm{sh}\left[(-1)^j\alpha_j\gamma - i\frac{u}{2}\right] g(u) +$$

$$+\frac{N_j Z_j(u)}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{g(\tau)-g(u)}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}\,d\tau \qquad (3.10)$$

Для замыкания систем алгебраических уравнений необходимо получить уравнения для коэффициентов Фурье разложений (2.1) $\varphi_p^{(j)}, f_p^{(j)}$. Чтобы получить такие уравнения, достаточно разложить в ряд Фурье функцию $q_j(u)$, представленную в виде (3.9).

Умножая (3.9) на $\sin pu$, $\cos pu$ и интегрируя по u от $-\pi$ до π, для определения этих коэффициентов получим четыре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$\pi[\alpha_p\varphi_p^{(j)}] = R_{j0}C_{0p}^{(1,j)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} C_{kp}^{(1,j)} + i\sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} S_{kp}^{(1,j)} + H_p^{(1,j)}$$

$$\pi[\alpha_p f_p^{(j)}] = R_{j0}C_{0p}^{(2,j)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} C_{kp}^{(2,j)} + i\sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} S_{kp}^{(2,j)} + H_p^{(2,j)} \qquad (3.11)$$

$$(p = 1, 2, \ldots)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_{kp}^{(1,j)} = i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[\cos ku]\sin pu\,du, \quad C_{kp}^{(2,j)} = \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[\cos ku]\cos pu\,du$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.12)$$

$$S_{kp}^{(1,j)} = i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[\sin ku]\sin pu\,du, \quad S_{kp}^{(2,j)} = \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[\sin ku]\cos pu\,du$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

$$H_p^{(1,j)} = i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[H_j(u)]\sin pu\,du, \quad H_p^{(2,j)} = \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} L_j[H_j(u)]\cos pu\,du$$

Задача свелась к решению совокупности бесконечных систем (2.3) и (3.11), которая квазивполне регулярна. Регулярность бесконечных систем типа (2.3) доказана многими авторами [1, 6], а сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечных систем (3.11) имеют порядок $O(k^{-1/2})$, следовательно, общая совокупность бесконечных систем квазивполне регулярна.

4. Формулы для контактных напряжений $\sigma_y(x,(j-1)b), \tau_{xy}(x,(j-1)b)$ $(j=1, 2)$ при $|x|>l_j$, после аналогичных преобразований, сделанных при получении уравнения (3.1), приводятся к виду

$$\sigma_j(u)=\frac{i(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} q_j(v)\operatorname{ctg}\frac{v-u}{2}dv-K_j(u), \quad (|u|>\alpha_j) \tag{4.1}$$

где введены обозначения

$$\sigma_j(u)=-\sigma_y\left(\frac{a}{\pi}u,\ (j-1)b\right)+i\tau_{xy}\left(\frac{a}{\pi}u,\ (j-1)b\right), \quad K_j(u)=K_j(u)-H_j(u) \tag{4.2}$$

Представляя решение (3.6) в (4.1) и вычисляя полученные интегралы при условии $(|u|>\alpha_j)$, в итоге для контактных напряжений получим следующие формулы с выделенными особенностями:

$$\sigma_j(u)=Z_j^{(2)}(u)\left\{\frac{A}{\pi\operatorname{ch}\pi\gamma}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{\overline{K}_j(\tau)-e^{i(\tau-u)}\overline{K}_j(u)}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi(1-\nu)\operatorname{ch}\pi\gamma}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{h_j(\tau)d\tau}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}+e^{(-1)^{j-1}\alpha_j\gamma}\overline{K}_j(u)\left[e^{i\frac{\alpha_j}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(-1)^j i\gamma\right)\sin\frac{u-\alpha_j}{2}+e^{-i\frac{\alpha_j}{2}}\left(-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma\right)\sin\frac{u+\alpha_j}{2}\right]\right\}, \quad (u>\alpha_j) \tag{4.3}$$

где

$$Z_j^{(2)}(u)=\left(\sin\frac{\alpha+u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma}\left(\sin\frac{u-\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^{j}i\gamma}$$

Как видно из полученных формул, напряжения под штампом в точках $(|u|=\alpha_j)$ изменения граничных условий имеют корневые особенности с осциллирующими множителями.

Для определения порядка особенностей в угловой точке воспользуемся процедурой, предложенной в работе [6], предполагая, что неизвестные системы (2.3) имеют порядок $X_k=\frac{A}{k^\alpha}$, $Y_k=\frac{B}{k^\alpha}$.

Для определения α получаем трансцендентное уравнение

$$\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}-\left(\frac{1+\nu}{3-\nu}\right)^2\alpha^2=0 \tag{4.4}$$

Корень этого уравнения для различных ν меняется в пределах

$$1{,}379 < \alpha < 1{,}634 \tag{4.5}$$

следовательно, напряжения в угловой точке особенностей не имеют.

5. Все коэффициенты (3.12), входящие в бесконечные системы, вычисляются и выражаются через гипергеометрические полиномы. Вычислим, к примеру, $C_{kp}^{(1,2)}$. Из (3.12) и (3.10) следует, что

$$C_{kp}^{(1,2)} = i\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} L_2[\cos ku]\sin pu\,du = \frac{N_2}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} Z_2(u)\cos ku \sin pu\,\mathrm{sh}\left(\alpha_2\gamma - i\frac{u}{2}\right)du +$$

$$+\frac{iN_2}{2\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} Z(u)\sin pu\,du\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2}\frac{\cos k\tau - \cos ku}{Z_2(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau$$

Переходим к новым переменным

$$x = e^{iu},\quad t = e^{i\tau},\quad e^{i\alpha_2} = a,\quad e^{-i\alpha_2} = \bar{a} \tag{5.1}$$

с помощью которых коэффициент $C_{kp}^{(1,2)}$ приводится к вычислению интегралов типа

$$\int_{\bar{a}}^{a} x^m Z^*(x)dx = \frac{a^m\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}F\left(-m,\ \frac{1}{2}+i\gamma;\ 1;\ 1-\bar{a}^2\right)$$

$$\int_{\bar{a}}^{a}\frac{dt}{t^m Z^*(t)} = -\frac{2\pi\sin^2\alpha_2}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}\left(\frac{1}{4}+\gamma^2\right)a^{-m}F\left(m,\ \frac{3}{2}-i\gamma;\ 3;\ 1-\bar{a}^2\right) \tag{5.2}$$

где

$$Z^*(y) = (a-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\bar{a})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}$$

а $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Введем обозначение

$$a^{-m}F\left(m,\ \frac{k}{2}\pm i\gamma;\ k;\ 1-\bar{a}^2\right) = F_k^{\pm}(m),\quad (m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\ (k=1,3) \tag{5.3}$$

тогда для $C_{kp}^{(1,2)}$ получим

$$C_{kp}^{(1,2)} = \frac{\pi(1-\nu)}{8}\{F_1^{+}(-k-p) - F_1^{-}(p-k) + F_1^{+}(k-p) - F_1^{-}(k+p) +$$

$$+\exp(2\alpha_2\gamma)[F_1^{-}(1-k-p) - F_1^{-}(1+p-k) + F_1^{-}(1+k-p) - F_1^{-}(1+k+p)]\} +$$

$$+\frac{\pi(1-\nu)(1+4\gamma^2)\sin^2\alpha_2}{16}\sum_{n=1}^{k}\{F_3^{-}(1+n-k)[F_1^{+}(1-n-p) - F_1^{-}(1-n+p)] -$$

$$-F_3^{-}(n+1)[F_1^{+}(1+k-n-p) - F_1^{-}(1+k-n+p)]\} \tag{5.4}$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты.

Используя формулы преобразований гипергеометрических функций, получаем, что $F_k^{\pm}(m)$ — действительные числа, которые определяются рекуррентными формулами

$$F_k^{\pm}(p+1)=\frac{k-p}{p}F_k^{\pm}(p-1)+\left(\frac{2p-k}{p}\cos\alpha_2\mp\frac{2\gamma}{p}\sin\alpha_2\right)F_k^{\pm}(p),\quad (p>1) \tag{5.5}$$

$$F_k^{\pm}(-p-1)=-\frac{p}{k+p}F_k^{\pm}(1-p)+\frac{1}{p+k}[(2p+k)\cos\alpha_2\pm 2\gamma\sin\alpha_2]F_k^{\pm}(-p),(p<-1)$$

а

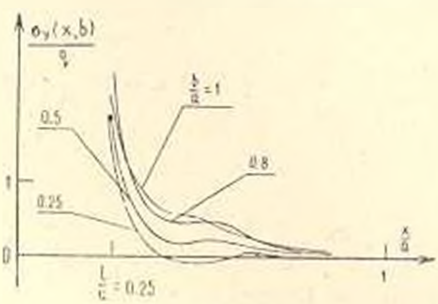
$$F(0,\beta;\gamma;z)=1,\quad \bar{a}F\left(1,\frac{1}{2},\pm i\gamma;\ 1;\ 1-\bar{a}^2\right)=\exp(\pm 2\alpha_2\gamma)$$

$$F_k^{\pm}(-1)=\cos\alpha_2\pm\frac{2\gamma}{k}\sin\alpha_2 \tag{5.6}$$

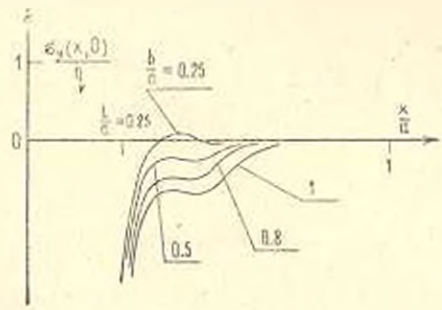
$$\bar{a}F\left(1,\frac{3}{2}\pm i\gamma;\ 3;\ 1-\bar{a}^2\right)=\frac{1}{2\sin^2\alpha_2\left(\frac{1}{4}\pm\gamma^2\right)}[\pm 2\gamma\sin\alpha_2-\cos\alpha_2+\exp(\mp 2\alpha_2\gamma)]$$

Рассмотрен численный пример, когда

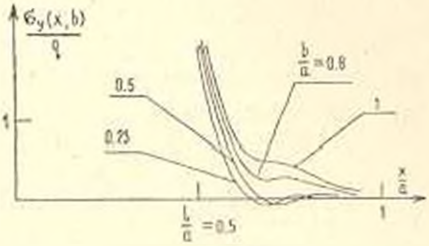
$$l_1=l_2=l,\quad h_1(x)=0,\quad h_2(x)=q\quad (0<x<l)$$



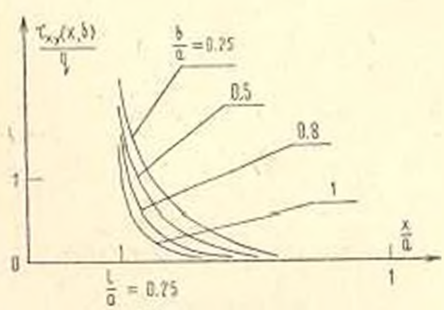
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Ниже приводятся графики распределения контактных напряжений $\sigma_y(x, (j-1)b)$, $\tau_{xy}(x, (j-1)b)$ для конкретных значений геометрических и физических параметров (фиг. 2—5).

$\nu=0{,}3$; $l/a=0{,}25$; $0{,}5$; $b/a=0{,}25$; $0{,}5$; $0{,}8$; 1

Из графиков можно сделать следующие выводы: как нормальные, так и касательные напряжения, действующие на линиях заделки ($l\leqslant x\leqslant a$), с приближением к вершине прямого угла затухают и практически превращаются в нуль. Последнее свидетельствует о том, что в таких заделках напряжения в угловой точке не только не имеют особенностей, но и в случаях неподвижных границ заделки стремятся к нулю; нормальные контактные напряжения, с уменьшением глубины заделки могут менять свой знак [8, 9].

CONTACT PROBLEM FOR PARTIALLY CLAMPED RECTANGULAR WITH ACCOUNT OF COUPLING

A. M. MKRTCHIAN, S. H. TERZIAN

ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ՝ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Հ. ԹԵՐԶՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյան համար կոնտակտային խնդիր, երբ ուղղանկյան եզրագիծը, բացառությամբ երկու զուգահեռ կողմերի կենտրոնական մասերի, որտեղ տրված են լարումները, ամրակցված է։

Խնդիրը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների, որոնք հետագայում բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի։

Լարումների բանաձևերում անջատված են եզակիությունները։

Դիտարկված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.—ПММ, 1957, т. *21*, вып. 1, т. 89—100.
2. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1970, т. *23*, №5, с. 5—19.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, т. *22*, №1, с. 3—16.
4. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Смешанная задача для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1972, т. 25, №2, с. 3—14.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко-защемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.—Тр. 7 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 205—211.

7. *Енгибарян А. А., Мкртчян А. М.* Контактная задача для прямоугольника, ослабленного разрезом.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, № 6, с. 3—11.
8. *Мкртчян А. М.* Плоская задача для полосы с нецентральными разрезами.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1971, т. *24*, № 2, с. 16—23.
9. *Проценко В. Г., Проценко В. С., Синекоп Н. С.* О решении некоторых контактных задач для упругого прямоугольника структурным методом.—Прикл. механика, 1974, т. *10*, вып. 9, с. 60—64.
10. *Терзян С. А.* Контактная задача для упругого прямоугольника симметричным образом частично заделанного в жесткие стенки.—В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела.—Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981, с. 249—251.
11. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.—Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 122, кн. 3, 1962, с. 95—124.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.VII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

О КОНЦЕНТРАЦИЯХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВОЗЛЕ ТРЕЩИНЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

АСАНЯН Д. Д., АСЛАНЯН А. А., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии неоднородной изотропной плоскости, состоящей из двух различных магнитомягких ферромагнитных однородных полуплоскостей, на границе раздела которых находится прямолинейная трещина. Единственным источником, вызывающим упругие деформации и индуцированное магнитное поле в среде, является внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости раздела. Определены основные характеристики напряженно-деформированного состояния и индуцированного магнитного поля и исследованы их особенности около трещины. Аналогичная задача для однородной плоскости рассмотрена в работе [4].

1. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h},\quad \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{b},\quad \vec{M}=\vec{M}_0+\vec{m}$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$, соответственно, векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; $\vec{h}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$ — добавления (возмущения) к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B}^{(e)}=\mu_0\vec{H}^{(e)}$, где μ_0 — абсолютная магнитная постоянная ($\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Г/м), а в магнитомягком материале — соотношением $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(\vec{H}+\chi\vec{H})=\mu_0\mu_r\vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость, $\mu_r=\chi+1$ — относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}_0 = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{n}\cdot[\vec{H}_0 - \vec{H}_0^{(e)}] = 0, \quad \vec{n}\cdot[\vec{B}_0 - \vec{B}_0^{(e)}] = 0, \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3)\in\Gamma \tag{1.1}$$

$$\vec{H}_0^{(e)} \to \vec{H}^0 \quad \text{при} \quad |\vec{z}| \to \infty$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Γ тела, $\vec{r}$ — радиус-вектор, x_i — декартовые координаты рассматриваемой точки, $\vec{H}^0$ — напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс „e" означает принадлежность к внешней (окружающей тела) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Напряженно-деформированное состояние среды и индуцированное в ней магнитное поле определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работе [2, 3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости деформированного состояния

$$\mathrm{div}\,\hat{S} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\vec{h} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{b} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\hat{S} = \hat{t} + \hat{T}$; $\hat{t}$ и $\hat{T}$ — тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла, соответственно, причем

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0\chi H_{0i}H_{0j} + \mu_0\chi(H_{0i}h_j + H_{0j}h_i)$$
$$T_{ij} = \mu_0(\mu_r H_{0i}H_{0j} - 0{,}5\delta_{ij}H_{0k}H_{0k}) + \mu_0[\mu_r(H_{0i}h_j + H_{0j}h_i) - \delta_{ij}H_{0k}h_k] \tag{1.3}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.4}$$

λ и μ — постоянные Ляме, u_i — компоненты вектора упругих перемещений.

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$n_i[S_{ij} - S_{ij}^{(e)}] = 0$$
$$\varepsilon_{ijk}\left[n_j[h_k - h_k^{(e)}] - n_m\frac{\partial u_m}{\partial x_j}[H_{0k} - H_{0k}^{(e)}]\right] = 0 \tag{1.5}$$
$$n_i[b_i - b_i^{(e)}] = n_m\frac{\partial u_m}{\partial x_i}[B_{0i} - B_{0i}^{(e)}]$$

где ε_{ijk} — символ Леви-Чивита.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим плоскую задачу о концентрации упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем.

Пусть на границе раздела двух различных магнитомягких изотропных полупространств имеется прямолинейная туннельная трещина шириной $2a$, берега которой свободны от внешних механических нагрузок.

Прямоугольная декартовая система координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости x_1ox_2 и занимает область $[-a, a]$ на координатной оси ox_1. Среда помещена в постоянном магнитном поле $\vec{B}^0(o, B_0, o)$ (которое является единственным источником внешних воздействий) и находится в условиях плоской деформации в плоскости x_1ox_2 (фиг. 1).

Для рассматриваемого случая задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)} = B_0 \cdot \vec{i}_2, \quad \vec{B}_0^{(i)} = \vec{B}_0^{(e)}, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \vec{B}_0^{(e)}/\mu_0, \quad \vec{H}_0^{(i)} = \vec{B}_0^{(i)}/\mu_0\mu_{ri} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индекс „e" означает принадлежность к области трещины, а индексы $i=1$ и $i=2$ — принадлежность к областям $x_2>0$ и $x_2<0$, соответственно; $\vec{i}_k$ — единичные векторы координатных осей.

В силу (2.1), из (1.2)—(1.4), для рассматриваемой задачи получим следующие уравнения магнитоупругости возмущенного состояния:

$$\Delta u_1^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i}\left(u_{1,1}^{(i)} + u_{2,2}^{(i)}\right)_{,1} + \frac{2\chi_i B_0}{\mu_i \mu_{ri}} h_{1,2}^{(i)} = 0$$

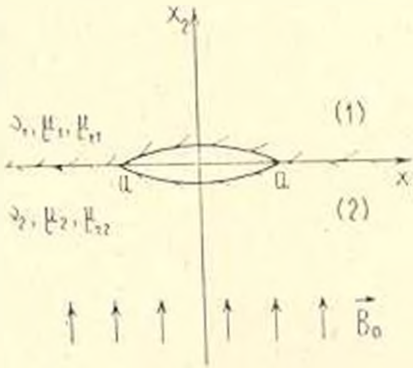
$$\Delta u_2^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i}\left(u_{1,1}^{(i)} + u_{2,2}^{(i)}\right)_{,2} + \frac{2\chi_i B_0}{\mu_i \mu_{ri}} h_{2,2}^{(i)} = 0 \tag{2.2}$$

$$\Delta\varphi^{(i)} = 0, \quad \Delta\varphi^{(e)} = 0$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$h_k^{(i)} = \varphi_{,k}^{(i)}, \quad h_k^{(e)} = \varphi_{,k}^{(e)} \tag{2.3}$$



Фиг. 1

Аналогичным образом из (1.3)—(1.5) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2=0$:

$$\mu_{r1} \cdot h_2^{(1)} = \mu_{r2} \cdot h_2^{(2)}; \quad S_{2j}^{(1)} = S_{2j}^{(2)} \quad (j=1, 2) \quad \text{при} \quad |x_1| < \infty \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} & u_{1,1}^{(1)} = u_{1,1}^{(2)}; \quad u_{2,1}^{(1)} = u_{2,1}^{(2)} \\ & h_1^{(1)} = h_1^{(2)} + \frac{B_0}{\mu_0}\,\frac{\mu_{r2}-\mu_{r1}}{\mu_{r1}\mu_{r2}}\, u_{2,1}^{(1)} \quad \text{при} \quad |x_1| > a \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = h_1^{(2)} + \dfrac{B_0}{\mu_0}\left(\dfrac{\chi_1}{\mu_{r1}} u_{2,1}^{(1)} - \dfrac{\chi_2}{\mu_{r2}} u_{2,1}^{(2)}\right) \\ t_{12}^{(1)} = \dfrac{\chi_1}{\mu_0 \mu_{r1}} B_0^2 u_{2,1}^{(1)}; \quad t_{22}^{(1)} = \dfrac{\chi_1^2}{\mu_{r1}}\left(\dfrac{B_0^2}{2\mu_0\mu_{r1}} + B_0 h_2^{(1)}\right) \text{ при } |x_1| < a \end{cases} \tag{2.6}$$

Кроме условий (2.4)—(2.6) должны удовлетворяться также условия на бесконечности, согласно которых все искомые величины с индексом „i" должны стремиться к нулю при $|\vec{r}| \to \infty$.

Решение задачи (2.2)—(2.6) с учетом условий на бесконечности, представим в виде

$$u_1^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{(-1)^{i+1}\left[A^{(i)}(\alpha) + \frac{2(1-2\nu_i)\chi_i B_0}{\mu_0\mu_{ri}} a^{(i)}(\alpha)\right] - \right.$$

$$\left. -\left[3-4\nu_i + (-1)^i \alpha x_2\right]\frac{B^{(i)}(\alpha)}{\alpha}\right\} \exp[(-1)^i \alpha x_2] \sin\alpha x_1 d\alpha$$

$$u_2^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[A^{(i)}(\alpha) + x_2 B^{(i)}(\alpha)\right]\exp[(-1)^i \alpha x_2]\cos\alpha x_1 d\alpha \tag{2.7}$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty a^{(i)}(\alpha)\exp[(-1)^i \alpha x_2]\cos\alpha x_1 d\alpha$$

где $A^{(i)}(\alpha)$, $B^{(i)}(\alpha)$ и $a^{(i)}(\alpha)$—неизвестные функции, которые определяем, удовлетворяя граничным условиям (2.4)—(2.6).

Подставляя (2.7) в (1.3), определяем магнитоупругие напряжения $t_{kj}^{(i)}$ и максвелловские напряжения $T_{kj}^{(i)}$. В частности, для нормальных напряжений $t_{22}^{(i)}$ и $T_{22}^{(i)}$ получим следующие выражения:

$$t_{22}^{(i)} = \frac{\chi_i B_0^2}{2\mu_0\mu_{ri}}(-1)^i + \frac{4\mu_i}{\pi}\int_0^\infty \left\{(-1)^i \alpha\left[A^{(i)}(\alpha) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(1-2\nu_i)\chi_i B_0}{2\mu_0\mu_{ri}} a^{(i)}(\alpha)\right] + \left[1-2\nu_i - (-1)^i \alpha x_2\right] B^{(i)}(\alpha)\right\} \exp[(-1)^i \alpha x_2]\cos\alpha x_1 d\alpha$$

$$T_{22}^{(i)} = \frac{(1+2\chi_i)B_0^2}{2\mu_0\mu_{ri}} + (-1)^i \frac{2(1+2\chi_i)B_0}{\pi\mu_{ri}}\int_0^\infty \alpha a^{(i)}(\alpha)\exp[(-1)^i \alpha x_2]\cos\alpha x_1 d\alpha \tag{2.8}$$

Перейдем к определению неизвестных функций $A^{(i)}(\alpha)$, $B^{(i)}(\alpha)$ и $a^{(i)}(\alpha)$ путем удовлетворения граничных условий (2.4)—(2.6). Для этой цели введем следующие обозначения:

$$\varphi_1(x) = u_{1,1}^{(1)}(x, 0) - u_{1,1}^{(2)}(x, 0), \quad \varphi_2(x) = u_{2,1}^{(1)}(x, 0) - u_{2,1}^{(2)}(x, 0) \tag{2.9}$$

$$\varphi_3(x)=h_1^{(1)}(x,0)-h_1^{(2)}(x,0)-\frac{\mu_{r1}-\mu_{r2}}{\mu_{r1}\mu_{r2}}\,\frac{B_0}{\mu_0}\,u_{21}^{(1)}(x,0)$$

где $x=x_1/a$, $u_i=a\tilde{u}_i$, $h_i=a\tilde{h}_i$ (в дальнейшем знак „$\sim$" опускается).

Используя граничные условия (2.5), легко показать, что функции $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,3)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_j(x)=0 \quad \text{при} \quad |x|>1 \tag{2.10}$$

$$\varphi_1(-x)=\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x)=-\varphi_2(-x),\quad \varphi_3(-x)=-\varphi_3(x) \tag{2.11}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\,dx=0$$

Подставляя (2.7) в граничные условия (2.4) и учитывая (2.9), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\vec{x}\cdot\hat{A}^T=\vec{\varphi},\quad (\hat{A}^T\text{—транспонированная к матрице }\hat{A}) \tag{2.12}$$

позволяющую выражать неизвестные функции $A^{(j)}(\alpha)$, $B^{(j)}(\alpha)$ и $a^{(j)}(\alpha)$ через новые неизвестные $\varphi_j(x)$.

Матрица $\hat{A}$ и векторы $\vec{x}$ и $\vec{\varphi}$, входящие в (2.12), имеют вид

$$\hat{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -3+4\nu_1 & 3-4\nu_2 & c_1 & c_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{r1}^{-1}-\mu_{r2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -\mu & 1-2\nu_1 & -\mu(1-2\nu_1) & c_3 & c_4 \\ -1 & \mu & 2(1-\nu_1) & 2\mu(1-\nu_2) & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{r1} & \mu_{r2} \end{Vmatrix}$$

$$\vec{x}=(\alpha A^{(1)}(\alpha),\ \alpha A^{(2)}(\alpha),\ B^{(1)}(\alpha),\ B^{(2)}(\alpha),\ \alpha a^{(1)}(\alpha),\ \alpha a^{(2)}(\alpha))$$

$$\vec{\varphi}=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4,\ 0,\ 0)$$

где

$$\psi_1=\frac{2}{\pi}\int_0^1\varphi_1(s)\cos\alpha s\,ds;\quad \psi_2=\frac{2}{\pi}\int_0^1\varphi_2(s)\sin\alpha s\,ds$$

$$\psi_3=\frac{2}{\pi}\int_0^1\varphi_3(s)\sin\alpha s\,ds;\quad \psi_4=\lambda\delta(\alpha)$$

$$\lambda=\frac{\pi B_0^2}{8\mu_0\mu_1}\left(\frac{1+4\chi_2}{\mu_{r2}^2}-\frac{1+4\chi_1}{\mu_{r1}^2}\right);\quad \mu=\mu_2/\mu_1 \tag{2.13}$$

$$c_k=\frac{2(1-2\nu_k)\chi_kB_0^2}{\mu_0\mu_k\mu_{rk}};\quad c_{k+2}=-\frac{(1-2\nu_k)\chi_kB_0^2}{\mu_0\mu_k\mu_{rk}}-\frac{(1+2\chi_k)B_0^2}{2\mu_0\mu_k\mu_{rk}}$$

$$c_{k+4}=(-1)^k\frac{B_0^2}{2\mu_0\mu_{rk}\mu_k}\left|1+(3-4\nu_k)\chi_k/\mu_{rk}\right|;\quad (k=1,2)$$

$\delta(\alpha)$—функция Дирака.

Предполагая $\det\hat{A}\neq 0$, из (2.12) найдем

$$\alpha A^{(i)}(\alpha)=\sum_{k=1}^{4}b_{ik}\psi_k(\alpha);\quad \alpha a_{(0)}^{(l-4)}=\sum_{k=1}^{4}b_{lk}\psi_k(\alpha)\tag{2.14}$$

$$B^{(j-2)}(\alpha)=\sum_{k=1}^{4}b_{jk}\psi_k(\alpha);\quad (i=1,2;\quad j=3,4;\quad l=5,6)$$

где b_{ik}—элементы матрицы обратной $\hat{A}$.

Подставляя (2.14) в граничные условия (2.6), получим следующую систему интегральных уравнений относительно ψ_k $(k=1,2,3)$

$$\sum_{k=1}^{3}\beta_{jk}\int_0^\infty\psi_k(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha=0,\quad (j=1,3)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\beta_{2k}\int_0^\infty\psi_k(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha=d\tag{2.15}$$

где

$$\beta_{11}=\gamma_1,\quad \beta_{12}=\gamma_2-\frac{\chi_1}{\mu_{r1}},\quad \beta_{13}=\gamma_3$$

$$\gamma_k=\frac{\mu_{r1}+\mu_{r2}}{\mu_{r2}}b_{1k}+\left(\frac{\chi_2}{\mu_{r2}}-\frac{\chi_1}{\mu_{r1}}\right)b_{2k}\quad (k=1,2,3)$$

$$\beta_{2k}=-b_{1k}+(1-2\nu_1)b_{3k}+\frac{\chi_1(\chi_1-2+4\nu_1)B_0^2}{2\mu_0\mu_{r1}\mu_1}b_{5k}$$

$$d=\frac{B_0^2\chi_1\pi(\chi_1-2)}{8\mu_0\mu_{r1}^2\mu_1}+\frac{\lambda}{2}\left|-b_{14}+(1-2\nu_1)b_{34}+\frac{\chi_1(\chi_1-2+4\nu_1)B_0^2}{2\mu_0\mu_1\mu_{r1}}b_{54}\right|$$

$$\beta_{3k}=\left(\frac{\chi_1B_0^2}{\mu_0\mu_{r1}\mu_1}-1\right)b_{1k}+2(1-\nu_1)b_{3k}-\frac{(3-4\nu_1)\chi_1B_0^2}{2\mu_0\mu_1\mu_{r1}}b_{5k}$$

Воспользуясь следующими формальными представлениями:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin pt\sin px\,dp=\delta(x-t)-\delta(x+t);\quad \int_0^\infty\sin pt\cos px\,dp=\frac{t}{t^2-x^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos pt\cos px\,dp=\delta(x-t)+\delta(x+t)$$

систему интегральных уравнений (2.15), в силу (2.13), можно привести к виду

$$\frac{\alpha_{11}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(s)}{x-s}ds+\alpha_{12}\varphi_2(x)=0,\quad \alpha_{21}\varphi_1(x)-\frac{\alpha_{22}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(s)}{x-s}ds=d$$

$$\varphi_3(x)=\gamma\varphi_2(x) \tag{2.16}$$

Здесь

$$\alpha_{11}=\beta_{31};\quad \alpha_{12}=\beta_{32}+\eta\beta_{33};\quad \alpha_{21}=\beta_{21};\quad \alpha_{22}=\beta_{22}+\eta\beta_{23}$$

$$\gamma=(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{31})(\beta_{13}\beta_{31}-\beta_{11}\beta_{33})^{-1}$$

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния среды сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений (2.16), которую необходимо рассматривать совместно с условиями (2.10), (2.11). Отметим, что система типа (2.16) получена также в работе [5].

3. В случае однородной задачи ($\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$) система (2.16) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(s)}{x-s}ds=0;\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(s)}{x-s}ds=\lambda_*;\quad \lambda_*=-\frac{d_0}{\alpha_{22}}$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{4(1-\nu_1)}-\frac{\chi_1^2(\chi_1^2-2+4\nu_1)B_0^2}{4\mu_0\mu_1\mu_{r1}^2};\quad d_0=\pi\chi_1(\chi_1-2)B_0^2/8\mu_0\mu_1\mu_{r1}^2 \tag{3.1}$$

которая в классе неограниченных функций имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (2.11) [6]:

$$\varphi_1(x)=0,\quad \varphi_2(x)=\frac{\lambda_* x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.2}$$

Легко убедиться, что решение (3.2) совпадает с решением однородной задачи, полученного в работе [4].

В случае неоднородной задачи ($\alpha_{12}\neq 0$, $\alpha_{21}\neq 0$) система (2.16) введением оператора K посредством

$$K\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{x-s}ds$$

приводится к одному особому интегральному уравнению для определения функции $\varphi_1(x)$

$$(I+i\gamma K)(I-i\gamma K)\varphi_1=f \tag{3.3}$$

где I—единичный оператор.

$$f=\frac{d}{\alpha_{21}},\quad \gamma^2=\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}}{\alpha_{12}\alpha_{21}} \tag{3.4}$$

Остальные неизвестные функции $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ определяются посредством функции $\varphi_1(x)$ следующим образом:

$$\varphi_2(x) = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} K\varphi_1, \quad \varphi_3(x) = -\eta \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} K\varphi_1 \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.3) в классе неограниченных функций представляется в виде [6, 7]

$$\varphi_1(x) = K_1 K_2 f \tag{3.6}$$

где операторы K_j ($j=1, 2$) определяются формулами

$$K_j\psi = \psi(x) + (-1)^j i\gamma Z_j(x) \int_{-1}^{1} \frac{\psi(s)}{x-s} ds + E_j Z_j(x) \psi(x) \tag{3.7}$$

В (3.7) E_j — произвольные постоянные, $Z_j(x)$ — определенные функции, вид которых зависит от знака и модуля γ^2.

Численные расчеты показывают, что γ^2 является монотонно убывающей функцией величины B_0 и имеет единственную точку ($B_0 = B_{0*}$) разрыва первого рода, ($\gamma^2 \to \pm 1$ при $B_0 \to B_{0*} \pm 0$), причем $\gamma^2 > 1$ при $B_0 < B_{0*}$ и $\gamma^2 < -1$ при $B_0 < B_{0*}$.

В силу вышеуказанного свойства γ^2, функции $Z_j(x)$ определяются следующим образом [6, 7]:

при $B_0 < B_{0*}$

$$Z_1(x) = (1-x^2)^{-1/2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\varkappa}, \quad Z_2(x) = \overline{Z_1(x)}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{3.8}$$

при $B_0 > B_{0*}$

$$Z_1(x) = \frac{1}{1+x} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\varkappa}, \quad Z_2(x) = \frac{1}{1+x} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{|\gamma^2|}} \tag{3.9}$$

На основе (3.6)—(3.9), (1.13) и (2.14) из (2.7) найдем перемещения $u_j^{(i)}$ и потенциалы индуцированного магнитного поля $\varphi^{(i)}$. Подставляя найденные выражения для $u_j^{(i)}$ и $\varphi^{(i)}$ в (1.3) и (2.3), определяем магнитоупругие напряжения и индуцированное магнитное поле в среде. В частности, в случае $B_0 < B_{0*}$, используя (2.8), для $t_{22}^{c(1)} = t_{22}^{(1)} + T_{22}^{(1)}$ при $x_2 = 0$ получим следующие выражения:

при $|x| > 1$

$$t_{22}^{c(1)}(x, 0)/\mu_1 = r_0 + \frac{\pi^2 r_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 r_1 d}{4\alpha_{22}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ x \cos\left(\varkappa \ln \frac{x-1}{x+1}\right) - 2\varkappa \sin\left(\varkappa \ln \frac{x-1}{x+1}\right) \right\} \tag{3.10}$$

$$h_2^{(1)}(x, 0) = k_0 + \frac{\pi^2 k_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 k_1 d}{4\alpha_{22}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ x \cos\left(\varkappa \ln \frac{x-1}{x+1}\right) - 2\varkappa \sin\left(\varkappa \ln \frac{x-1}{x+1}\right) \right\}$$

при $|x| < 1$

$$t_{22}^{c(1)}(x,0)/\mu_1 = r_0 + \frac{\pi^2 r_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 d}{8\gamma\alpha_{21}}\left[r_1(e^{-x\pi}-e^{x\pi}) + r_2\gamma\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}(e^{-x\pi}+e^{x\pi})\right]F(x)$$

$$h_2^{(1)}(x,0) = k_0 + \frac{\pi^2 k_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 d}{8\gamma\alpha_{21}}\left[k_1(e^{-x\pi}-e^{x\pi}) + k_2\gamma\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}(e^{-x\pi}+e^{x\pi})\right]F(x) \tag{3.11}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[x\sin\left(\varkappa\ln\frac{1-x}{1+x}\right) + 2\varkappa\cos\left(\varkappa\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right]$$

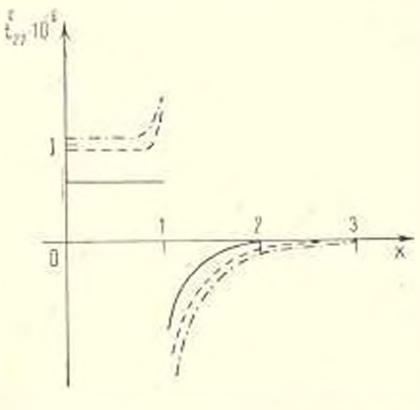
где

$$k_0 = -\frac{2}{\pi}b_{54},\quad k_1 = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 b_{51},\quad k_2 = -\frac{2}{\pi}(b_{52}+\eta b_{53})$$

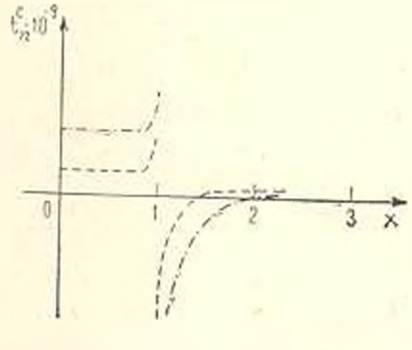
$$r_0 = \xi_0 + \eta_{14},\quad r_1 = \frac{2}{\pi}\eta_{11},\quad r_2 = \eta_{12}+\eta\eta_{13},\quad \eta_{1k} = -b_{1k} + (1-2\nu_1)b_{3k} + \xi_1 b_{5k}$$

$$\xi_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0\mu_1}\left[\frac{\chi_1}{\mu_{r1}^2} + \frac{1+2\chi_1}{2\mu_{r1}^2}\right],\quad \xi_1 = -\frac{(1-2\nu_1)\chi_1 B_0^2}{\mu_0\mu_1\mu_{r1}} - \frac{(1+2\chi_1)B_0^2}{2\mu_0\mu_1\mu_{r1}},\quad k=(1,2,3,4)$$

На основе (3.10) и (3.11) произведены численные расчеты, результаты которых приведены на фиг. 2 -3. Расчеты приведены для следующих данных: $\nu_2 = 0{,}25$; $\mu_{r2} = 10^5$; $\mu_2 = 1{,}1\cdot 10^5$ МПа при различных ν_1; μ_{r1}; μ_1. Анализ показывает, что: а) с увеличением напряженности магнитного поля B_0 суммарное напряжение t_{22}^c возрастает и стремится к бесконечности при $B_0 \to B_{0*}$; б) суммарное напряжение монотонно убывает при уменьшении μ_{r1}; в) неоднородность существенно влияет на напряженно-деформированное состояние среды, при-



Фиг. 2. График зависимости $t_{22}^c(x,0)/\mu_1$ от x при $B_0^2/\mu_0\mu_1 = 9\cdot 10^{-4}$ и $\mu_1 = 1{,}1\cdot 10^4$ МПа;
—·—·— кривая для $\nu_1 = 0{,}3$, $\mu_{r1} = 10^6$;
— — — кривая для $\mu_{r1} = 10^1$, $\nu_1 = 0{,}3$
——— кривая для $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}25$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^4$



Фиг. 3. График зависимости $t_{22}^c(x,0)/\mu_1$ от x при $B_0^2/\mu_1\mu_0 = 0{,}8\cdot 10^{-4}$, $\mu_1 = 0{,}7\cdot 10^4$ МПа;
—·— кривая для $\nu_1 = 0{,}22$, $\mu_{r1} = 10^5$;
— — — кривая для $\nu_1 = 0{,}22$, $\mu_{r1} = 10^2$

чем, как видно из (3.10) и (3.11), коэффициент интенсивности различен при $x \to 1+0$; г) как видно из табл. 1, в котором приведены значения B_{0*}, неоднородность существенно изменяет величину B_{0*} (в последнем столбце приведены результаты для однородного случая; $\nu_i = 0.25$; $\mu_{ri} = 10^3$; $\mu_i = 1.1 \cdot 10^5$ МПа; $i = 1, 2$).

Таблица 1

	$\mu_{r1} = 10^5$	$\mu_{r1} = 10^3$	
μ_1 (МПа)	$B_{0*}^2/\mu_1\mu_0$	$B_{0*}^2/\mu_1\mu_0$	$B_{0*}^2/\mu_1\mu_0$
$1{,}1 \cdot 10^5$	$0{,}45 \cdot 10^{-4}$	$3{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$
$1{,}7 \cdot 10^5$	$0{,}37 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$	
$2{,}3 \cdot 10^5$	$0{,}27 \cdot 10^{-4}$	$2{,}25 \cdot 10^{-4}$	

В заключение отметим, что существование критического значения B_{0*} магнитного поля, при котором напряжения стремятся к бесконечности, по-видимому связано с допущениями, принятыми в работе [2] и поэтому теория магнитоупругости, предложенная в работе [2], при $B \geq B_{0*}$ нуждается в уточнении.

ON CONCENTRATION OF ELASTIC STRESSES AND INDUCED MAGNETIC FIELD CAUSED BY EXTERNAL MAGNETIC FIELD NEAR TO A CRACK

D. D. ASANYAN, A. A. ASLANYAN, G. E. BAGDASARYAN

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՎ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ՄԱԿԱԾՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Դ. Ջ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է խնդիր անհամասեռ, իզոտրոպ հարթության դեֆորմացված լարվածային վիճակի մասին: Ենթադրվում է, որ հարթությունը բաղկացած է երկու տարբեր մագնիսապես փափուկ համասեռ կիսահարթություններից, որոնց եզրի վրա գտնվում է ուղղագիծ ճաք: Արտաքին աղբյուրը, որը առաջ է բերում առաձգական դեֆորմացիաներ, հանդիսանում է արտաքին մագնիսական դաշտը: Որոշված են դեֆորմացված լարվածային վիճակը բնորոշող բոլոր պարամետրերը և հետազոտված են նրանց եզակիությունները ճաքի մոտակայքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. F. Brown*, Jr., Magnetoelastic Interactions, Spring. (1966).
2. *Pao. Y.—H, Yeh, C.—S.* A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids.—Int. J. Engin. Sci., 11, 415 (1973).
3. *Varma P. D. S., Singh M.* Finite deformation theory for soft ferromagnetic elastic solids.—Int. J. Non-Linear Mechanics. 1984, v. 19, № 4, pp. 273—286.
4. *Shindo Y.* The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack.—ASME. J. Appl. Mech. 44, 47 (1977).
5. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.—ПММ, 1975, №2, с. 358.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.VII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3:534.1

ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ

ВАЙС Г. Б., КОСМОДАМИАНСКИЙ А. С., СТОРОЖЕВ В. И.

Анализ напряженно-деформированного состояния прямолинейно анизотропных пластин с криволинейными (в частном случае круговыми) граничными контурами является актуальной теоретической и прикладной задачей в механике конструкций из композиционных материалов и теории расчета упругих элементов электроакустических устройств. Далеко не исчерпывающие исследования в этой области относятся к краевым задачам, формулируемым для замкнутых односвязных областей [1—7] и задачам определения спектра собственных частот композитных пластин с вырезами [8, 9].

В настоящей работе рассматривается методика и результаты применения вариационного подхода в задаче о плоских гармонических колебаниях тонкой прямолинейно ортотропной пластины в форме концентрического кругового кольца, возбуждаемых равномерно распределенными по внутреннему или внешнему контуру нормальными пульсирующими усилиями.

Отнесем тонкую кольцевую ортотропную пластину, имеющую параллельную срединной поверхности плоскость симметрии упругих свойств, к безразмерным прямоугольным декартовым координатам (x_1, x_2) и полярным координатам (r, θ), $r\exp(i\theta)=x_1+ix_2$, начало которых совмещено с центром кольца. Безразмерный внутренний радиус пластины считаем равным единице, а на внешнем контуре $r=R$.

Вариационное уравнение рассматриваемой задачи для амплитудных характеристик при анализе колебаний в рамках модели динамического обобщенного плоского напряженного состояния имеет вид

$$\int_1^R\int_0^{2\pi} \langle A\vec{u}, \delta\vec{u}\rangle r\,d\theta\,dr + \int_0^{2\pi} \{((\sigma_{rr}-P_{r1})\delta u_r + \sigma_{r\theta}\delta u_\theta)_{r=1} +$$

$$+((\sigma_{rr}-P_{r2})\delta u_r + \sigma_{r\theta}\delta u_\theta)_{r=R}\}d\theta = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{u}$—безразмерный амплитудный вектор упругих смещений, компоненты которого в прямоугольных декартовых координатах обозначены (u_1, u_2), а в полярных координатах—(u_r, u_θ); σ_{ij}—безразмерные компоненты тензора напряжений, P_{rj}—характеристики интенсивности усилий, приложенных к граничным контурам, а символом $\langle f, g \rangle$ введено скалярное произведение указанных векторов. Символом A, в соотношении (1.1) обозначен дифференциальный оператор уравнений стационарных колебаний тонкой ортотропной пластины

$$A=\begin{pmatrix} (c_{11}+c_{66})D^2+(c_{11}-c_{66})L^2+2\Omega^2 & (c_{12}+c_{66})H^2 \\ (c_{12}+c_{66})H^2 & (c_{22}+c_{66})D^2+(c_{66}-c_{22})L^2+2\Omega^2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

где $D^2=\partial_1^2+\partial_2^2$, $L^2=\partial_1^2-\partial_2^2$, $H^2=2\partial_1\partial_2$, $\partial_j=\partial/\partial x_j$, c_{ij}—безразмерные упругие постоянные пластины, отнесенные к величине модуля упругости $\bar{c}_{12}$, $\Omega^2=\rho\omega^2\bar{R}^2\bar{c}_{12}^{-1}$—приведенный безразмерный частотный параметр, ρ—плотность материала пластины, ω—круговая частота колебаний, $\bar{R}$—величина внутреннего радиуса пластины, выступающая в качестве нормирующего параметра для всех характеристик, имеющих размерность смещений.

Вводя отражающие симметрию упругих свойств и нагрузки относительно координатных осей представления

$$u_1=\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{mn}r^n\cos m\theta,\quad u_2=\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl}r^l\sin k\theta \tag{1.3}$$

и используя выражения

$$\begin{gathered} D^2=\partial_r^2+r^{-1}\partial_r+r^{-2}\partial_\theta^2,\quad L^2=\cos 2\theta\cdot L_1+2\sin 2\theta\cdot L_2 \\ H^2=\sin 2\theta\cdot L_1-2\cos 2\theta\cdot L_2,\quad L_1=\partial_r^2-r^{-1}\partial_r-r^{-2}\partial_\theta^2 \\ L_2=r^{-2}\partial_\theta-r^{-1}\partial_r\partial_\theta,\quad \partial_r=\partial/\partial r,\quad \partial_\theta=\partial/\partial\theta \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$u_r=u_1\cos\theta+u_2\sin\theta,\quad u_\theta=-u_1\sin\theta+u_2\cos\theta \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}=1/2(((c_{11}+c_{12})+(c_{11}-c_{12})\cos 2\theta)\partial_1u_1+((c_{22}+c_{12})+ \\ +(c_{12}-c_{22})\cos 2\theta)\partial_2u_2+2c_{66}\sin 2\theta(\partial_2u_1+\partial_1u_2)) \\ \sigma_{r\theta}=\frac{1}{2}\sin 2\theta((c_{12}-c_{11})\partial_1u_1+(c_{22}-c_{12})\partial_2u_2)+c_{66}\cos 2\theta(\partial_1u_2+\partial_2u_1) \end{gathered} \tag{1.6}$$

после ряда преобразований из вариационного уравнения (1.1) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных B_{mn}, C_{kl}:

$$\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{mn}a_{mnst}+\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl}b_{klst}=P_{st}$$

$$\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{mn}u_{mnij}+\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl}v_{klij}=\bar{P}_{ij}$$

$$s,t=1,3,5,\ldots,\infty;\quad i,j=\overline{-\infty,\infty}$$

Здесь

$$a_{mnst}=(R^{n+t}-1)(n+t)^{-1}((c_{11}+c_{66})\gamma_3^{(mn),(1)}{}_{s,m,0,0}+(c_{11}-c_{66})(\gamma_4^{(mn),(1)}{}_{s,m-2,0,0}+$$

$$+\gamma_5^{(mn)}\lambda^{(1)}_{s,m+2,0,0}))+2\Omega^2(R^{n+t+2}-1)(n+t+2)^{-1}\lambda^{(1)}_{s,m,0,0}+[1/2(c_{11}+$$

$$+c_{12})(\gamma_1^{(mn)}\lambda^{(1)}_{s,m-1,1,0}-\gamma_2^{(mn)}\lambda^{(1)}_{s,m+1,1,0})+1/2(c_{11}-c_{12})(\gamma_1^{(mn)}(\lambda^{(1)}_{s,m-1,1,2}+$$

$$+\lambda^{(2)}_{s,m-1,1,2})-\gamma_2^{(mn)}(\lambda^{(1)}_{s,m+1,1,2}+\lambda^{(2)}_{s,m+1,1,2}))+c_{66}(\gamma_1^{(mn)}(\lambda^{(2)}_{s,2,m-1,1}-\lambda^{(2)}_{s,1,m-1,2})+$$

$$+\gamma_2^{(mn)}(\lambda^{(2)}_{s,2,m+1,1}-\lambda^{(2)}_{s,1,m+1,2}))](1+R^{n+t-1})$$

$$b_{klst}=(R^{l+t}-1)(l+t)^{-1}(c_{12}+c_{66})(\gamma_4^{(kl)}\lambda^{(1)}_{s,k-2,0,0}-\gamma_5^{(kl)}\lambda^{(1)}_{s,k+2,0,0})+$$

$$+[1/2(c_{12}+c_{66})(\gamma_1^{(kl)}\lambda^{(1)}_{s,k-1,1,0}+\gamma_2^{(kl)}\lambda^{(1)}_{s,k+1,1,0})+1/2(c_{12}-c_{22})(\gamma_1^{(kl)}(\lambda^{(1)}_{s,k-1,1,2}+$$

$$+\lambda^{(2)}_{s,k-1,1,2})+\gamma_2^{(kl)}(\lambda^{(1)}_{s,k+1,1,2}+\lambda^{(2)}_{s,k+1,1,2}))+c_{66}(\gamma_1^{(kl)}(\lambda^{(2)}_{s,1,k-1,2}-\lambda^{(2)}_{s,2,k-1,1})-$$

$$-\gamma_2^{(kl)}(\lambda^{(2)}_{s,1,k+1,2}-\lambda^{(2)}_{s,2,k+1,1}))](1+R^{l+t-1})$$

$$u_{mnij}=(1-R^{n+i})(n+j)^{-1}(c_{12}+c_{66})(\gamma_4^{(mn)}\lambda^{(3)}_{i,m-2,0,0}-\gamma_5^{(mn)}\lambda^{(3)}_{i,m+2,0,0})+$$

$$+[1/2(c_{11}+c_{12})(\gamma_1^{(mn)}\lambda^{(2)}_{m-1,0,i,1}-\gamma_{mn}^{(2)}\lambda^{(2)}_{m+1,0,i,1})+1/2(c_{11}-c_{12})(\gamma_1^{(mn)}(\lambda^{(2)}_{m-1,2,i,1}-$$

$$-\lambda^{(2)}_{m-1,1,i,2})-\gamma_2^{(mn)}(\lambda^{(2)}_{m+1,2,i,1}-\lambda^{(2)}_{m+1,1,i,2}))-c_{66}(\gamma_1^{(mn)}(\lambda^{(3)}_{i,m-1,1,2}+\lambda^{(2)}_{1,2,i,m-1})+$$

$$+\gamma_2^{(mn)}(\lambda^{(3)}_{i,m+1,1,2}+\lambda^{(2)}_{1,2,i,m+1}))](1+R^{n+j-1})$$

$$v_{klij}=(R^{l+j}-1)(l+j)^{-1}((c_{22}+c_{66})\gamma_3^{(kl)}\lambda^{(3)}_{i,k,0,0}+(c_{66}-c_{22})(\gamma_4^{(kl)}\lambda^{(3)}_{i,k-2,0,0}+$$

$$+\gamma_5^{(kl)}\lambda^{(3)}_{i,k+2,0,0}))+2\Omega^2\lambda^{(3)}_{i,k,0,0}(R^{l+j+2}-1)(l+j+2)^{-1}+[1/2(c_{12}+$$

$$+c_{22})(\gamma_1^{(kl)}\lambda^{(2)}_{k-1,0,i,1}+\gamma_2^{(kl)}\lambda^{(2)}_{k+1,0,i,1})+1/2(c_{12}-c_{22})(\gamma_1^{(kl)}(\lambda^{(2)}_{k-1,2,i,1}-\lambda^{(2)}_{k-1,1,i,2})+$$

$$+\gamma_2^{(kl)}(\lambda^{(2)}_{k+1,2,i,1}-\lambda^{(2)}_{k+1,1,i,2}))+c_{66}(\gamma_1^{(kl)}(\lambda^{(3)}_{i,k-1,1,2}+\lambda^{(2)}_{1,2,i,k-1})-$$

$$-\gamma_2^{(kl)}(\lambda^{(3)}_{i,k+1,1,2}+\lambda^{(2)}_{1,2,i,k+1}))](1+R^{l+j-1})$$

$$P_{st}=(P_{r1}+P_{r2}R^t)\lambda^{(1)}_{s,1,0,0},\quad \bar{P}_{ij}=(P_{r1}+P_{r2}R^j)\lambda^{(3)}_{i,1,0,0}$$

$$\lambda^{(1)}_{ijkl}=\int_0^{2\pi}\cos i\theta\cos j\theta\cos k\theta\cos l\theta d\theta,\quad \lambda^{(2)}_{ijkl}=\int_0^{2\pi}\cos i\theta\cos j\theta\sin k\theta\sin l\theta d\theta$$

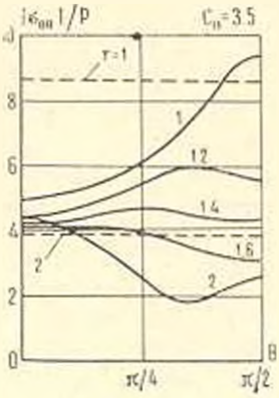
$$\lambda^{(3)}_{ijkl}=\int_0^{2\pi}\sin i\theta\sin j\theta\sin k\theta\sin l\theta d\theta,\quad \gamma_1^{(mn)}=1/2(m+n),\quad \gamma_2^{(mn)}=1/2(m-n)$$

$$\gamma_3^{(mn)}=n^2-m^2,\quad \gamma_4^{(mn)}=1/2(n^2+m^2)-n-m(1-n)$$

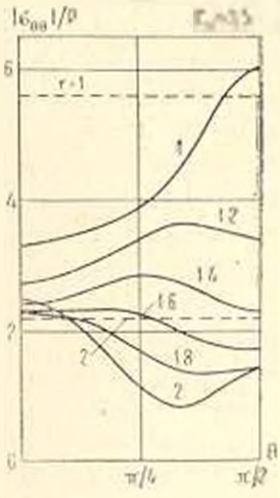
$$\gamma_5^{(mn)}=1/2(n^2+m^2)-n+m(1-n)$$

P_{r1} и P_{r2}—соответственно, амплитуды нагрузки, распределенной по внутреннему ($r=1$) и внешнему ($r=R$) контуру кольца.

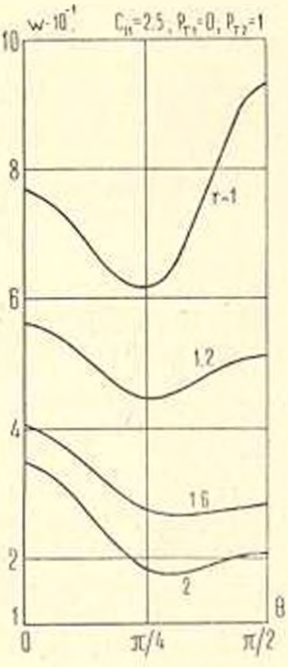
На фиг. 1—4 приведены результаты расчета при помощи описанной методики амплитудных значений возникающих в кольцевой пластине с $R=2$ при колебаниях с частотой $\Omega^2=0{,}5$ напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и плотности средней за период энергии упругих деформаций, безразмерное значение которой определяется по формуле



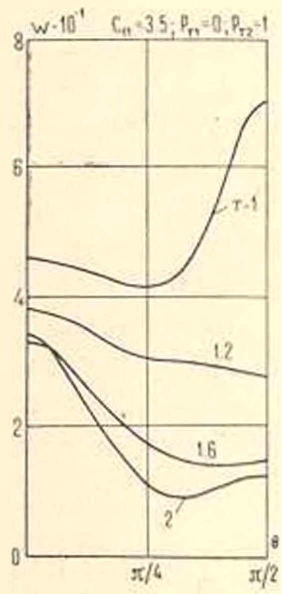
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$w=c_{11}\sigma_{11}^2+c_{22}\sigma_{22}^2+c_{66}\sigma_{12}^2+2c_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}+\Omega^2(u_1^2+u_2^2)$$

Материал, составляющий пластину, характеризуется параметрами $c_{22}=2{,}0$; $c_{12}=1{,}0$; $c_{66}=0{,}5$; а постоянная c_{11} принимает значения $c_{11}=2{,}5$ или $c_{11}=3{,}5$, что соответствует различной степени анизотропии механических свойств (при $c_{11}=2{,}0$ пластина является изотропной и соответствующая задача—осесимметричной). При редуцировании системы (1.7) вводились конечные пределы изменения индексов

$n, l=\overline{-N, N}$; $m, k=\overline{1, M_n}$. В процессе расчетов контролировалась точность удовлетворения поставленным краевым условиям в напряжениях и устойчивость численного решения в целом по отношению к ошибке удовлетворения краевым условиям и изменениям пределов суммирования N, M_n. Обнаружено, что для получения устойчивых решений с ошибкой удовлетворения краевым условиям, не превышающей 7% по отношению к P необходимо удерживать в редуцируемой системе порядка 90 уравнений.

Как свидетельствуют приведенные на фиг. 1, 2 распределения $|\sigma_{\theta\theta}|/P$, соответственно, при действии на пластину внутреннего ($P_{r1}=P$, $P_{r2}=0$) и внешнего ($P_{r1}=0$, $P_{r2}=P$) гармонического давления при учете анизотропии материала обнаруживаются не только качественные, но и значительные количественные отличия в картине напряженно-деформированного состояния по сравнению с напряженным состоянием изотропной пластины (пунктирные линии на фиг. 1, 2). Анализ распределения плотности энергии упругих деформаций (фиг. 3, 4) дает основания для оценок прочности рассматриваемого тела на основании энергетических критериев разрушения.

PLANE VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATE MADE OF ELASTIC MATERIAL WITH RECTANGLE ANISOTROPIC PROPERTIES

G. B. VICE, A. S. KOSMODAMIANSKY, V. I. STOROZHEV

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅՈՎ ՆՅՈՒԹԻՑ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՍԱԼԻ ՀԱՐԹ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Գ. Բ. ՎԱՅՍ, Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Վ. Ի. ՍՏՈՐՈԺԵՎ

Ամփոփում

Վարիացիոն մեթոդի օգնությամբ ստացված է ուղղագիծ օրթոտրոպ նյութից կոնցենտրացված օղակի տեսք ունեցող բարակ սալի հարթ դեֆորմացված լարվածային վիճակի մասին խնդրի լուծումը՝ հարմոնիկ տատանումների դեպքում, որոնք առաջանում են եզրում բարախող նորմալ ճիգերի միջոցով։

Բերված են թվային արդյունքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bert Charles W.* Vibration of composite structures.—In Recent. adv. struct. dyn. pap. int. conf. (Southampton, 1980), Southampton, 1980, vol. 2, p. 693—712.
2. *Cowdrey D. R., Willis J. R.* Application of the finite element method to the vibration of quartz plates.—J. Acoust. Soc. Amer., 1974, 56, № 1, p. 94—98.
3. *De Capua N. J., Sun B. C.* Transverse vibration of a class of orthotropic plates.—Trans. ASME, E, 1972, 39, № 2, p. 613—615.

4. *Dokmeci M. G.* Vibrations of piezoelectric crystals.— Int. J. Eng. Sci., 1986. 18, № 3A, p. 431—448.
5. *Laura P. A. A., Luisoni L. E., Sarmiento G. S.* A method for the determination of the fundamental frequency of orthotropic plates of polygonal boundry shape.— J. Sound and Vibr., 1980, 70, № 1, p. 77—84.
6. *Luisoni L. E., Laura P. A. A.* Vibrations of rectangularly orthotropic, circular plates with edges elastically restrained against rotation.—Fibre Sci. and Technol., 1981, 15, № 1, p. 1—11.
7. *Lubowe A. G., Mindlin R. D.* Extensional vibrations of thin quartz disks.—J. Acoust. Soc. Amer., 1962, 34, № 12, p. 1911—1918.
8. *Преображенский И. Н., Шасалимов Ж. Ш.* О колебаниях пластинок с вырезами из композитных материалов.—Механ. композитных материалов, 1981, № 5, с. 797—801.
9. *Преображенский И. Н., Шасалимов Ж. Ш.* Влияние граничных условий на частоты собственных колебаний ортотропных прямоугольных пластинок с вырезами.— Механ. композитных материалов, 1982, № 1, с. 68—72.

Донецкий Государственный университет

Поступила в редакцию
8.VII.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 537.84

ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ МАГНИТНЫХ И ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ

БАГДОЕВ А. Г., ГУРГЕНЯН А. А.

В настоящее время большое внимание уделяется вопросу взаимодействия нелинейных волн в связи с созданием акустических приборов для генерации и излучения мощных волновых пучков. Особый интерес представляют резонаторы, в которых происходит взаимодействие пучков. Подобные устройства, имеющие многоволновой характер, изучаются в акустике и оптике, где нелинейность приводит к явлению бистабильности, имеющему важное значение для практики.

В настоящей работе исследуется влияние магнитного поля на волновые движения магнитной или проводящей жидкости с пузырьками газа, находящихся в осевом магнитном поле при наличии встречных пучков. Подобная задача представляет интерес для изучения акустических свойств магнитной жидкости, находящейся в резонаторе, при этом наличие пузырьков приводит к дисперсии скорости звука и позволяет применять метод медленно-меняющихся амплитуд так, как применяется в оптике [10]. Магнитная жидкость оказывается хорошим средством для усиления модуляции пучков и бистабильности, то есть наличие скачка частоты происходит при весьма небольших амплитудах ультразвуковых, входящих в резонатор, волн.

Как показано в [1—3], для анализа нелинейных волн в акустическом резонаторе, используя метод медленно-изменяющегося профиля и метод усреднения уравнений для быстропериодических колебаний, можно представить колебания в виде суперпозиции двух встречных волн, причем в первом порядке можно считать уравнения независимыми.

Уравнения для встречных пучков берутся в форме уравнения коротких волн [4—6], где рассмотрен случай одной волны.

§ 1. Уравнения коротких волн для магнитной жидкости

Полагая, что проекция возмущенной скорости частицы на ось пучков $u=u_1(\tau_1, y, t)-u_2(\tau_2, y, t)$, где $\tau_{1,2}$—эйконалы пучков, причем $\tau_{1,2}=(\pm x+l)/H_1-t$, y—координата по нормали к оси пучка, вдоль которого направлена ось x, отсчет x ведется от середины резонатора, $x=\pm l$—координаты акустических зеркал (рефлектор); H_1—линейная скорость распространения волны, вышеуказанные уравнения можно записать в виде [4—6]

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} L(u_{1,2}) = \mp \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left(\Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right) \qquad (1.1)$$

Здесь Γ, D, E—коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии, $L(u)$—оператор по поперечным координатам, причем, при магнитном поле, направленном по оси x, имеет место

$$L(u) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \qquad (1.2)$$

где y—радиальная координата в задаче с осевой симметрией ($k=1$), или декартова координата для плоской задачи ($k=0$), ω—частота невозмущенной волны, (α_1, α_2)—волновые векторы, которые в силу того, что ось пучка совпадает с осью x и волны близки к плоским, имеют координаты $\sigma_1 \approx 1/H_1$, $\sigma_2 \approx 0$.

Для электропроводящей жидкости значения всех величин даны в [4—6], где обосновывается метод конкретизации коэффициентов уравнения (1.1) с помощью уравнения совместности на волне.

Получим коэффициенты (1.1) для магнитной непроводящей жидкости с пузырьками газа. Уравнения движения имеют вид [7—9]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta v = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho \nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)$$

$$\operatorname{rot} H = 0, \; \nabla(\mu H) = 0, \; \rho = \rho_f (1-\beta), \; \frac{1-\beta}{\beta \rho_g} = \text{const} \qquad (1.3)$$

$$p_g = p - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} + 4 \frac{\nu}{R} \rho \frac{dR}{dt} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2$$

$$\rho_f = \text{const}$$

где принято $\beta \rho_g \ll \rho_f (1-\beta)$.

Система уравнений для смеси магнитной жидкости и газа записана для односкоростного приближения [9], связь давления в пузырьке p_g, p взяты из [8, 9], ρ_f—плотность жидкости, газ считается политропным, R—радиус пузырька, H—магнитное поле, μ—магнитная проницаемость, β—концентрация пузырьков, ν—кинематическая вязкость.

Для конкретизации коэффициентов в (1.1) следует написать обобщенные уравнения совместности на волне. Следуя [5], можно в (1.3) заменять $d/dt \to -\iota\delta$, $\nabla \to \vec{n}\delta$, где $\iota = c_n + v_n$, δ—скачок производных по нормали к волне, $\vec{n}$—единичный вектор по нормали к волне. Включая в уравнения совместности малые члены с дисперсией и диссипацией, можно получить соотношения

$$\delta\rho = \frac{\rho}{c_n} \delta v_n, \quad \delta H_t = 0, \quad \delta H_n = \frac{H_n}{\mu \rho_f} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \delta\rho, \quad \delta p_g = a^2 \delta\rho, \quad \delta R = -\frac{R}{3 n p_g} \delta p_g \qquad (1.4)$$

$$c_n^2=a^2-\frac{2-\beta}{\rho_f}\frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}+\frac{2-\beta}{\rho_f}\frac{H_n^2}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2+\frac{R^2a^3C_n^2}{3np_g}\frac{\partial^3 v_n}{\delta v_n}-\frac{4\nu a^2C_n^2}{3np_g}\frac{\partial^2 v_n}{\delta v_n} \tag{1.5}$$

где $a^2=np_g/\beta\rho_f(1-\beta)$ — квадрат скорости звука, $c_n+v_n=H_1+(\gamma+1)v_n$ — нелинейная скорость волны с учетом того, что $C_n=H_1=1/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$. Из (1.5) при отсутствии нелинейности, дисперсии и диссипации получится дисперсионное уравнение

$$1-\frac{2-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2(\alpha_1H_{x_0}+\alpha_2H_{y_0}+\alpha_3H_{z_0})^2=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\left[a_0^2-(2-\beta_0)\frac{H_0^2}{8\pi\rho_f}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}\right] \tag{1.6}$$

Поскольку ось x направлена по нормали к волне, можно считать $\alpha_{2,3}\approx 0$ и получать коэффициенты в L.

С учетом того, что $H_{y_0}=H_{z_0}=0$, получится $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}=0$

$$-D_0\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=H_1\chi,\quad D_0=\chi+\frac{2-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f}H_0^2\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2 \tag{1.7}$$

$$\chi=a_0^2-\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{2-\beta_0}{\rho_f}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2},\quad \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}$$

Из уравнения (1.5) получится

$$c_n+v_n=H_1+(\gamma+1)v_n+D\frac{\partial^2 v_n}{\delta v_n}+E\frac{\partial^3 v_n}{\delta v_n} \tag{1.8}$$

$$\gamma+1=\frac{a_0}{H_1}\alpha^0-\frac{2-\beta_0}{2H_1^2}\frac{H_0^2}{8\pi\rho_f}\left[\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}-(2-\beta_0)\frac{\partial^3\mu_0}{\partial\beta_0^3}-\frac{2}{\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2+\right.$$
$$\left.+6(2-\beta_0)\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\left(\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)\right] \tag{1.9}$$

$$D=-\frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0)H_1},\quad E=\frac{R_0^2}{6\beta_0(1-\beta_0)H_1},\quad \Gamma=\gamma+1,\quad \alpha^0=\frac{1}{\beta_0} \tag{1.10}$$

Для электропроводящей жидкости получится, соответственно, вместо (1.5)

$$c^4-c^2(a_0^2+a_1^2)+a_0^2a_1^2\frac{H_x^2}{H^2}=0 \tag{1.11}$$

$$\gamma+1=-\alpha^0\frac{C^2-a_1^2}{a_0^2+a_1^2-2C^2}+\frac{3}{2}\frac{a_0^2-C^2}{a_0^2+a_1^2-2C^2}$$

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{C^2}{a_0^2+a_1^2-2C^2},\quad a_1^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0},\quad H_1=C$$

Поскольку $H_x\approx H$, $C=a_0$, $C=a_1$ на оси пучка и для $C=a_0$

$$\gamma+1=\frac{1}{\beta_0},\quad \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{a_0^2}{a_1^2-a_0^2}$$

Таким образом, получено нелинейное уравнение коротких волн для магнитной или электропроводящей жидкости.

§ 2. Уравнения для медленно-меняющихся амплитуд и фаз

Для квазимонохроматических пучков решение уравнения (1.1) можно искать в виде [4]

$$u_{1,2}=\frac{1}{2}\left[U^{(0)}_{1,2}+U^{(1)}_{1,2}\exp(-\nu_1\alpha^2 t+i\theta_{1,2})+U^{(2)}_{1,2}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t+2i\theta_{1,2})\right] \qquad (2.1)$$

Здесь $U^{(0,1,2)}_{1,2}$—амплитуды гармоник и зависят от $\tau'_{1,2}$, y, $\tau'_{1,2}=(\pm x+t)/H_1$, $\theta_{1,2}=\alpha\tau_{1,2}-\omega t$—фаза с учетом малой частоты ω за счет дисперсии, α—основная частота.

Подставляя (2.1) в (1.1) и приравнивая слагаемые при гармониках и в силу стационарности пучков, принимая $\partial U/\partial t=\partial U/\partial\tau'_{1,2}$, можно получить формулы для возмущенной частоты ω, затухания ν_1 в функции от основной частоты α и уравнение модуляции для стационарных пучков

$$\omega=-\frac{E}{H_1}\alpha^3,\quad \nu_1=-\frac{D}{H_1} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial\tau'_{1,2}}(i\alpha+2\nu_1\alpha^2+3i\omega)-L(U^{(1)}_{1,2})=\pm\frac{\Gamma}{2H_1}\alpha^2 U^{(2)}_{1,2}\bar{U}^{(1)}_{1,2}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t) \qquad (2.3)$$

$$U^{(2)}_{1,2}(4i\nu_1\alpha^3-12\alpha\omega)+\frac{\partial U^{(2)}_{1,2}}{\partial\tau'_{1,2}}(2i\alpha+10\nu_1\alpha^2+30i\omega)-L(U^{(2)}_{1,2})=\pm\frac{\Gamma}{H_1}\alpha^2 U^{(1)2}_{1,2} \qquad (2.4)$$

Пусть $\omega\ll\alpha$, однако, $\omega t\gg 1$, где t - характерное время, $t\approx x/H_1$. Тогда слагаемыми с производными от второй гармоники можно пренебречь, и (2.3), (2.4) примут вид

$$U^{(2)}_{1,2}=\pm\frac{\Gamma\alpha}{H_1(4i\nu_1\alpha^2-12\omega)}U^{(1)2}_{1,2}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial\tau'_{1,2}}(i\alpha+2\nu_1\alpha^2+3i\omega)-\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 U^{(1)}_{1,2}}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial y}\right)=$$

$$=\pm\frac{\Gamma^2\alpha^3}{8H_1^2(i\nu_1\alpha^2-3\omega)}U^{(1)2}_{1,2}\bar{U}^{(1)}_{1,2}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t) \qquad (2.5)$$

или после подстановки $U=ae^{i\varphi}$ получим одинаковые по форме уравнения для обоих пучков

$$-a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau'}\left(1-\frac{3}{H_1}E\alpha^2\right)+\frac{\partial a}{\partial\tau'}2\nu_1\alpha-\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x_2^2}\left|\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial a}{\partial y}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right|=\chi_1 a^3$$

$$\frac{\partial a}{\partial\tau'}\left(1-\frac{3}{H_1}E\alpha^2\right)+2a\nu_1\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\tau'}-\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x_2^2}\left|a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+a\frac{k}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|=\chi_2 a^3 \qquad (2.6)$$

где обозначено $\chi_1=3E\alpha^2\xi$, $\chi_2=-\nu_1\alpha H_1\xi$

$$\xi = \frac{\Gamma^2 \chi}{8H_1(9E^2\alpha^4 + \nu_1^2\alpha^2 H_1^2)} \exp(-2\nu_1\alpha^2 t)$$

В предположении малости линейной диссипации в левых частях полученной системы уравнений и в экспоненте при наличии симметричных относительно $x=0$ граничных условий можно считать с точностью до постоянного слагаемого a четной функцией, а φ—нечетной функцией от x, можно получить решение узких пучков для (2.6) в виде [4, 6]

$$a = \frac{K}{f(\tilde{\tau})} \exp(-y^2/y_0^2 f^2), \quad \varphi = \sigma(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2R_0^*} y^2, \quad \tilde{\tau} = \alpha\tau', \quad \tau' = \frac{-|x|+t}{H_1} \tag{2.7}$$

$\dfrac{H_1}{R_0^*\alpha}$ — кривизна волны.

Для импульсных пучков амплитуда K в начальном сечении зависит от t, а окончательное решение будет содержать $K(-\tilde{\tau})$ и кривые $f(\tilde{\tau})$ движутся со временем.

Уравнения (2.6) в приближении узких пучков для случая осевой симметрии [4—6] удовлетворяются и получится для безразмерной ширины пучка

$$\frac{d^2 f}{d\tilde{\tau}^2} = \frac{\xi}{f^3}, \quad \xi = -\frac{4K^2\nu\mu}{\alpha}\chi_2 + 4\nu^2\mu^2, \quad \nu = \frac{1}{\alpha_1 H_1^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}, \quad \mu = \frac{H_1^2}{\alpha^2 y_0^2} \tag{2.8}$$

Решения уравнения (2.8) при граничных данных $\tilde{\tau}=0$, $f=1$

$$\frac{df}{d\tilde{\tau}} = -\frac{1}{R_0^*(0)}\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} - \chi_2 K^2$$

запишется в следующей форме, где последнее соотношение получено из (2.6)

$$-\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{C f^2 - \xi}}{C} - \frac{\sqrt{C - \xi}}{C}, \quad C = \left(\frac{1}{R_0^*}\frac{H_1^2}{\alpha^2}\nu + \frac{\chi_2 K^2}{H_1^2\alpha^3}\right)^2 + \xi \tag{2.9}$$

Из полученного решения и (2.8) видно, что фокус $f=0$ будет при $\xi<0$, а последнее возможно при $\nu>0$ и в предположении, что первое слагаемое ξ или нелинейность больше дифракции. Это выполнено для медленных магнитозвуковых волн [5]. Схождение пучка будет также при $\nu<0$, $1/R_0^*<0$, но фокус не получится.

§ 3. Расчет звукового интерферометра

Для получения σ следует приравнять в первом уравнении (2.6) члены порядка 1 (не содержащие y).

Тогда получится в главном порядке с учетом $E\alpha^2/H_1 \ll 1$, $\nu_1\alpha \ll 1$ уравнение

$$\frac{d\sigma}{d\tilde{\tau}} = \frac{2}{\alpha_1\alpha^2}\frac{1}{f^2 y_0^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} - \frac{\chi_1 K^2}{f^2} \tag{3.1}$$

Допустим, что $\xi>0$, то есть дифракция больше, чем нелинейность, тогда кривизна кривой $f(\bar{\tau})$ больше нуля и имеется для пучков фокальное пятно

$$
f^2_{фп}=\frac{\bar{\xi}}{C'},\quad \bar{\tau}_{фп}=\frac{\sqrt{C'\bar{\xi}}}{C'} \tag{3.2}
$$

Для того, чтобы имелся гладкий переход пучков при $x=0$, значения $\bar{\tau}_{фп}$ для них должны совпадать, откуда следует $\frac{l+x_{фп}}{H_2}=$

$=\frac{l-x_{фп}}{H_1}=\frac{\sqrt{C'\bar{\xi}}}{\alpha C'}$, $x_{фп}=0$, тогда (2.9) примет вид

$$
\pm\frac{\alpha x}{H_1}=\frac{\sqrt{C'f^2-\bar{\xi}}}{C'}
$$

откуда найдем

$$
f^2=\frac{\bar{\xi}}{C'}+\alpha^2\frac{C'x^2}{H_1^2},\quad f_0^2=\frac{\bar{\xi}}{C'} \tag{3.3}
$$

Для левого пучка $\tau'=(x+l)/H_1$ уравнение (3.1) имеет вид

$$
\frac{d\sigma}{dx}=\frac{A'}{H_1f^2},\quad A'=\frac{1}{\alpha x_0}\frac{2}{y_0^2}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial\tau_1^2}-\chi_1K^2
$$

или для обоих пучков

$$
\frac{d\sigma_{1,2}}{dx}=\pm\frac{A'}{H_1f_0^2\left(1+\frac{C'\alpha^2}{\bar{\xi}H_1^2}x^2\right)},\quad A'<0 \tag{3.4}
$$

Решение этого уравнения запишется

$$
\sigma_{1,2}=\pm\frac{A'}{H_1f_0^2}\sqrt{\frac{\bar{\xi}H_1^2}{C'^2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C'^2\alpha^2}{\bar{\xi}H_1^2}}\,x+\sigma_{01,2}
$$

или

$$
\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=\frac{A'}{H_1f_0^2}\sqrt{\frac{\bar{\xi}H_1^2}{C'^2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C'^2\alpha^2}{\bar{\xi}H_1^2}}\,x+\Delta \tag{3.5}
$$

где постоянная Δ находится из того, что при $x=l$ для резонатора суммарная фаза равна нулю [10] $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=-\frac{\alpha}{H_1}l$.

Значение $1/2(\sigma_1-\sigma_2)$ при $x=-l$ равно

$$
\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=-\frac{\alpha}{H_1}l-\frac{2A'}{H_1f_0^2}\sqrt{\frac{\bar{\xi}H_1^2}{C'^2\alpha^2}}\,\frac{\pi}{4} \tag{3.6}
$$

Следуя работе [10], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси x ($v\|x$), можно записать аналогичные соотношения на зеркалах

$$
|u_2|^2=R|u_1|^2 \tag{3.7}
$$

$$(1-R)K_0^2=u_1^2+Ru_2^2-2Ru_1u_2$$

Первое соотношение означает равенство мощности отраженной волны $|u_2|^2$ значению мощности падающей $|u_1|^2$, умноженной на квадрат коэффициента отражения, второе есть равенство скорости частиц прямой волны u_1 скорости частиц прошедшей части начальной волны $K_0\sqrt{1-R}$ плюс скорости частиц отраженной части обратной волны

$$u_1=K_0\sqrt{1-R}+u_2\sqrt{R}, \quad K_0=|K_0|\cos\alpha.$$

Для коэффициента пропускания интерферометра Фабри-Перо принято полагать [10]

$$P=\frac{|u_1|^2(1-R)}{|K_0|^2} \tag{3.8}$$

Поскольку $u_1=|u_1|\cos\Phi_1$, $u_2=|u_2|\cos\Phi_2$, $\Phi_{1,2}=(-\omega t+\alpha z_{1,2}+\varphi_{1,2})$, можно получить уравнение

$$|K_0|^2(1-R)\cos^2\Phi_0=|u_1|^2\cos^2\Phi_1+R^2|u_1|^2\cos^2\Phi_2-2\sqrt{R}|u_1||u_2|\cos\Phi_1\cos\Phi_2 \tag{3.9}$$

Интегрируя это уравнение по ωt от 0 до 2π, можно найти $|u_1|=K$

$$(1-R)|K_0|^2=|u_1|^2\left|(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right| \tag{3.10}$$

Пропускная способность, определяемая по формуле (3.8), примет вид

$$P=\left|1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right|^{-1} \tag{3.11}$$

Подставляя в (3.11) значение $\frac{1}{2}(\Phi_1-\Phi_2)=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{\alpha l}{H_1}$ и учитывая, что для конфокальных зеркал имеет место [10]

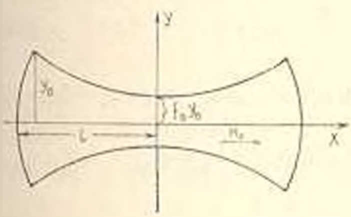
$l_0^2=\frac{a^2}{4H_1^2}\varepsilon 2l(2R-2l)$, $R'=|R_0'|\frac{\alpha}{H_1}=2l$, можно получить

$$P=\left|1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta+F(x'))\right|^{-1} \tag{3.12}$$

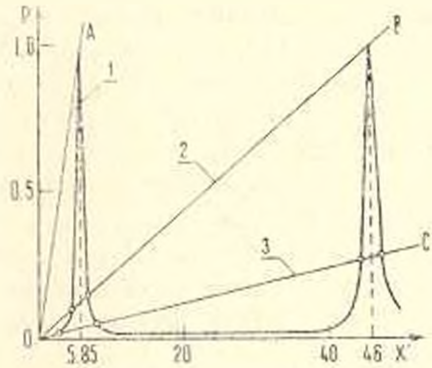
$$\delta=-\frac{2\alpha l}{H_1}, \quad F(x')=-\frac{\pi}{4}\frac{2\pm x'}{\sqrt{1\pm x'}}, \quad x'=\frac{\chi_1K^2}{2\mu|\lambda|} \tag{3.13}$$

Уравнения (3.12), (3.13) дают неявные значения для x'. Следует отметить, что уравнение (3.12) с точностью до значения x' в зависимости от K совпадает с уравнением [10].

Ход пучков указан на фиг. 1, где принято $\bar{\varepsilon}>0$, что выполнено для сред $\lambda<0$, например, для непроводящей магнитной жидкости с пузырьками газа, в которой при малых β можно считать $\mu=\mu_f+$ $+\frac{3(1-\mu_f)}{1+2\mu_f}\beta$, $\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}=0$ [7]. Для электропроводящей немагнитной смеся $\lambda > 0$ для медленных и $\lambda < 0$ для быстрых магнитозвуковых волн. При этом для $a_0 < a_1$ медленная волна есть звуковая и имеет место (1.11), и поскольку $\bar{\xi} < 0$, требуется выполнение $x' < 1$. При выполненных соотношениях нет фокусировки и обеспечена равномерная работа интерферометра.



Фиг. 1



Фиг. 2

При больших K_0 левая часть (3.12), являющаяся прямой линией (фиг. 2), имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам в интерферометре, приводя к появлению бистабильности [10, 11]. При $\frac{\partial^2 a_1}{\partial a_2^2} > 0$ имеется критическое значение $x' = 1$, при котором достигается фокус.

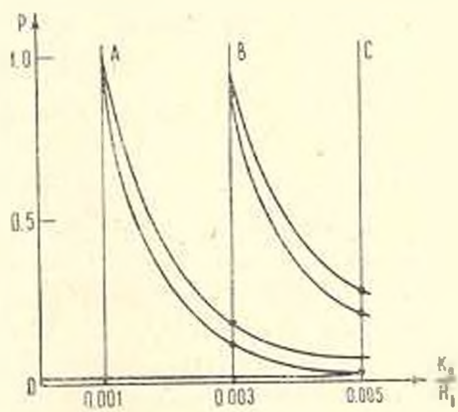
Для выяснения влияния магнитного поля на появление бистабильности напишем x' в развернутой форме

$$x' = \frac{\beta_0(1-\beta_0)y_0^2}{4R_0^2}\left|\frac{a_0}{H_1}\right|^{2} + \frac{2-\beta_0}{\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2 \times$$

$$\times \left|\frac{2}{\mu_0} + \frac{6(2-\beta_0)}{\mu_0^2}\right|\xi_1\xi_2^2\Big|^2 \frac{K^2}{a_0^2} \qquad (3.14)$$

где обозначено $\frac{a_0}{H_1} = \xi_1$, $\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\Big/ a_0^2 = \xi_2$.

Вычисление пропускной способности P интерферометра в зависимости от мощности падающей волны K^2 или K_0^2 представлены на фиг. 2 и 3.



Фиг. 3

Расчеты показывают, что для магнитной жидкости с пузырьками газа при увеличении напряженности внешнего магнитного поля (ξ_2) явление бистабильности уменьшается, то есть увеличивается мощность падающей волны K.

В случае проводящей жидкости, для которой x' принимает более простой вид

$$x' = \frac{(1-\beta_0)(\xi_2-1)y_0^2}{4\beta_0 R_0^2} K^2, \quad \xi_2=a_1^2/a_0^2 \tag{3.15}$$

следует, что при $a_0>a_1$, то есть для быстрой магнитозвуковой волны, $\xi_2<1$—явление аналогично магнитным жидкостям. В самом деле, когда $\xi_2=0$ ($H=0$), требуются меньшие мощности для появления бистабильности, чем при $\xi_2=0.5$ ($H\approx10^4$ Гц).

Для медленной магнитозвуковой волны, то есть при $a_0<a_1$ в (3.13) берутся нижние знаки и $x'<1$, поэтому K мало и при увеличении ξ_2 уменьшается мощность K^2, то есть магнитное поле усиливает бистабильность.

Таким образом, как и в [10], с помощью акустических зеркал, между которыми находится магнитная или проводящая жидкость с пузырьками газа, можно получить преобразователь частот, «транзистор», ограничитель мощности.

THE STUDY OF NONLINEAR BISTABILITY FOR ELECTROCONDUCTING AND MAGNETIC FLUIDS

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԿՀԱՍՏԱՏՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԳԱԶԻ ՊՂՊՋԱԿՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԵՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿՆԵՐՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է հանգիպակաց փնջերի տարածման խնդիրը գազի պղպջակներ պարունակող էլեկտրահաղորդիչ և մագնիսական հեղուկում, որը գտնվում է փնջերի առանցքով ուղղված հաստատուն մագնիսական դաշտում։

Գրված են կարճ ալիքների հավասարումները, որոնք, ի տարբերություն օպտիկայի, ակուստիկայի խնդիրներում իրարից անկախ են։ Հավասար և սիմետրիկ փնջերը անդրադարձող հայելիների համար ստացված են մոդուլյացիայի հավասարումները, և գտնված են նրանց լուծումները Գաուսյան փնջերի տեսքով։

Ըստ գտնված ալիքների փուլերի տարբերության որոշված է ակուստիկական ինտերֆերոմետրի թողարկման գործակիցը։

Սկզբնական փնջերի ամպլիտուդների համար ստացված են սահմանափակումներ, որոնց դեպքում տեղի ունի երկհաստատունության երևույթը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канер В. В., Руденко О. В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах. Вестник Московського университета. Сер. Физическая астрономия. 1978, т. 19, с. 78.
2. *Hunter J. K., Keller J. B.* Weakly nonlinear high frequency waves Comm. Pure Appl. Math. 1983, 36, p. 547—563.
3. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Эволюция квазимонохроматических волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН АрмССР. Механика. 1984, т. 37, №1, с. 34—45.
4. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР. Механика. 1983, т. 36, №6, с. 3—16.
5. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. 307 с.
6. *Bagdoev A. G., Gourgenian A. A.* The determonation of parameters of a chemically active magnetogasdynamic medium in the proximity of a wave.—Atti della Academie del Sc. 1976, vol 111, 1, p. 41.
7. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. В кн.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: 1981, т. 16, 208 с.
8. *Тарапов И. Е.* Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Респ. науч. сб. Изд-во при Харьковском ун-те. 1973, вып. 17, с. 221—239.
9. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырками газа. В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
10. *Marburger J. H., Felber F. S.* Theory of a lossless nonlinear Fabry-Perot interferometer.—Phys. Rev. A, 1978, vol. 17, № 1, p. 336—342.
11. *Багдоев А. Г., Безирганян Г. С.* О дифракции интенсивной световой волны в неоднородной, кубически-нелинейной среде. Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 79, №1, с. 29—34.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.VI.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ СООСНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЕ ДЛИНЫ И РАЗНЫЕ ДИАМЕТРЫ

ЗАРГАРЯН С. С., МАРТИРОСЯН З. А.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для трех соосных цилиндров, имеющих конечные длины и разные диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами. Контакт между цилиндрами предполагается гладким, то есть без сцепления, а зоны контакта считаются неизвестными. Для простоты принимается, что на боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки таким способом, что обе контактные области образуются в виде круга.

Решение рассматриваемой задачи представляется в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены три бесконечные системы со свободными членами, стремящимися к нулю и две системы парных рядов уравнений, содержащих функции Бесселя, решение которых сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

Для решения описанной задачи величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему цилиндрам, будем отмечать соответственно индексами 1, 2 и 3 (фиг. 1).

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i)=F_i(r)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_{ki} r) \qquad (i=1, 3)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0)=\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i)=0 \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R_i, z)=\sigma_r^{(i)}(R_i, z)=0 \qquad (i=1, 2, 3) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0)=-u_z^{(2)}(r, 0) & 0\leqslant r\leqslant c_1 \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0)=0 & c_1<r<R_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0)=\sigma_z^{(2)}(r, 0) & 0\leqslant r<c_1 \\ \sigma_z^{(2)}(r, 0)=0 & c_1<r<R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_z^{(2)}(r, l_2)=u_z^{(3)}(r, 0) & 0\leqslant r\leqslant c_2 \\ \sigma_z^{(2)}(r, l_2)=0 & c_2<r<R_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_z^{(2)}(r, l_2)=\sigma_z^{(3)}(r, 0) & 0\leqslant r<c_2 \\ \sigma_z^{(3)}(r, 0)=0 & c_2<r<R_3 \end{cases}$$

где l_i $(i=1, 2, 3)$—длины, R_i—радиусы цилиндров, $J_n(x)$—функция Бесселя действительного аргумента первого рода, β_{ki}—положительные корни уравнения $J_1(\beta_{ki}R_i)=0$, а c_i $(i=1, 3)$—размеры области контакта двух цилиндров.

Функции напряжения Лява ищем в виде

$$\Phi^{(i)}(r, z)=z(A_ir^2+B_iz^2+C_iz)+\sum_{k=1}^{\infty}[E_k^{(i)}I_0(\lambda_{ki}r)+G_k^{(i)}\lambda_{ki}rI_1(\lambda_{ki}r)]\sin\lambda_{ki}z+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(i)}\mathrm{sh}\beta_{ki}z+B_k^{(i)}\mathrm{ch}\beta_{ki}z+C_k^{(i)}\beta_{ki}z\,\mathrm{sh}\beta_{ki}z+D_k^{(i)}\beta_{ki}z\,\mathrm{ch}\beta_{ki}z)J_0(\beta_{ki}r) \quad (2)$$

где $I_n(x)$—функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $\lambda_{ki}=k\pi/l_i$ $(i=1, 2, 3)$, $c_2=0$.

Пользуясь обычными формулами [2] и вычисляя при помощи (2) напряжения и перемещения, удовлетворим далее условиям (1), получим следующие соотношения:

$$A_i=\frac{\nu_i}{2(1+\nu_i)}a_0^{(i)}, \quad B_i=\frac{1-2\nu_i}{6(1+\nu_i)}a_0^{(i)} \quad (i=1, 3), \quad -2(1-2\nu_2)A_2+6\nu_2B_2=0$$

$$(3)$$

$$E_k^{(i)}I_1(\lambda_{ki}R_i)+G_k^{(i)}[2(1-\nu_i)I_1(\lambda_{ki}R_i)+\lambda_{ki}R_iI_0(\lambda_{ki}R_i)]=0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$B_k^{(i)}+2\nu_iC_k^{(i)}=0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$A_k^{(i)}\mathrm{sh}\mu_{ki}+C_k^{(i)}\mu_{ki}\mathrm{sh}\mu_{ki}+D_k^{(i)}(\mu_{ki}\mathrm{ch}\mu_{ki}+2\nu_i\mathrm{sh}\mu_{ki})=0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$-A_k^{(i)}\mathrm{ch}\mu_{ki}-C_k^{(i)}(\mu_{ki}\mathrm{ch}\mu_{ki}-\mathrm{sh}\mu_{ki})-D_k^{(i)}[\mu_{ki}\mathrm{sh}\mu_{ki}-(1-2\nu_i)\mathrm{ch}\mu_{ki}]=\frac{a_k^{(i)}+P_{ki}^*}{\beta_{ki}^2}$$

$$(i=1, 3)$$

$$(1-2\nu_1)C_1+\sum_{k=1}^{\infty}[\beta_{k1}^2(1-\nu_1)C_k^{(1)}J_0(\beta_{k1}r)+\beta_{k2}^2G(1-\nu_2)C_k^{(2)}J_0(\beta_{k2}r)]=0 \quad 0\leqslant r\leqslant c_1$$

$$a_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k1}^2[-A_k^{(1)}+(1-2\nu_1)D_k^{(1)}]J_0(\beta_{k1}r)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k1}J_0(\beta_{k1}r) \quad c_1<r<R_1 \quad (5)$$

$$4(1-\nu_2)A_2+3(1-2\nu_2)B_2-G^*(1-2\nu_3)C_3+\sum_{k=1}^{\infty}[\beta_{k2}^2(1-\nu_2)(C_k^{(2)}\mathrm{ch}\mu_{k2}+$$

$$+D_k^{(2)}\mathrm{sh}\mu_{k2})J_2(\beta_{k2}r)-\beta_{k3}^2(1-\nu_3)G^*C_k^{(3)}J_0(\beta_{k3}r)]=0 \qquad 0\leqslant r\leqslant c_3$$

$$4(2-\nu_2)A_2+6(1-\nu_2)B_2+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k2}^2\{-A_k^{(2)}\mathrm{ch}\mu_{k2}-C_k^{(2)}(\mu_{k2}\mathrm{ch}\mu_{k2}-\mathrm{sh}\mu_{k2})- \quad (6)$$

$$-D_k^{(2)}[\mu_{k2}\mathrm{sh}\mu_{k2}-(1-2\nu_2)\mathrm{ch}\mu_{k2}]\}J_0(\beta_{k2}r)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}^*J_0(\beta_{k2}r) \quad c_3<r<R_2$$

$$a_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\{\beta_{k1}^2[-A_k^{(1)}+(1-2\nu_1)D_k^{(1)}]-P_{k1}\}J_0(\beta_{k1}r)-4(2-\nu_2)A_2+6(1-\nu_2)B_2-$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{\beta_{k2}^3[-A_k^{(2)}+(1-2\nu_2)D_k^{(2)}]-P_{k2}\}J_0(\beta_{k2}r)\quad 0\leqslant r<c_1 \tag{7}$$

$$4(2-\nu_2)A_2+6(1-\nu_2)B_2+\sum_{k=1}^{\infty}\{\beta_{k2}^3[-A_k^{(2)}+(1-2\nu_2)D_k^{(2)}]-P_{k2}\}J_0(\beta_{k2}r)=0$$

$$c_1<r<R_2$$

$$4(2-\nu_2)A_2+6(1-\nu_2)B_2+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k2}^3[-C_k^{(2)}(\mu_{k2}\operatorname{ch}\mu_{k2}-\operatorname{sh}\mu_{k2})-D_k^{(2)}[\mu_{k2}\operatorname{sh}\mu_{k2}-$$

$$-(1-2\nu_2)\operatorname{ch}\mu_{k2}]-A_k^{(2)}\operatorname{ch}\mu_{k2}\}J_0(\beta_{k2}r)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}^*J_0(\beta_{k2}r)+a_0^{(3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\{\beta_{k3}^3[-A_k^{(3)}+$$

$$+(1-2\nu_3)D_k^{(3)}]-P_{k3}\}J_0(\beta_{k3}r)\quad 0\leqslant r<c_3 \tag{8}$$

$$a_0^{(3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\{\beta_{k3}^3[-A_k^{(3)}+(1-2\nu_3)D_k^{(3)}]-P_{k3}\}J_0(\beta_{k3}r)=0\quad c_3<r<R_3$$

$$Y_k^{(i)}=\frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{pi}^4J_0(\beta_{pi}R_i)[(-1)^k(C_p^i\operatorname{ch}\mu_{pi}+D_p^{(i)}\operatorname{sh}\mu_{pi})-C_p^{(i)}]}{(\lambda_{ki}^2+\beta_{pi}^2)^2}\quad (i=1,2,3) \tag{9}$$

где введены обозначения

$$\mu_{ki}=\beta_{ki}l_i\quad (i=1,2,3),\quad G=\frac{G_1}{G_2},\quad G^*=\frac{G_2}{G_3}$$

$$\lambda_{ki}^3J_1(\lambda_{ki}R_i)G_k^{(i)}=Y_k^{(i)}\qquad \varphi_{ki}=\lambda_{ki}R_i\left[1-\frac{J_0^2(\lambda_{ki}R_i)}{J_1^2(\lambda_{ki}R_i)}\right]+\frac{2(1-\nu_i)}{\lambda_{ki}R_i}$$

$$(i=1,2,3)$$

$$P_{ki}=-\frac{4\beta_{ki}^2}{R_iJ_0(\beta_{ki}R_i)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}Y_n^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_{ki}^2)^2}\qquad P_{ki}^*=-\frac{4\beta_{ki}^2}{R_iJ_0(\beta_{ki}R_i)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda_{ni}Y_n^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_{ki}^2)^2}$$

$G_i(i=1,2,3)$ — модули сдвига, а ν_i $(i=1,2,3)$ — коэффициент Пуассона.

Введем обозначения

$$-A_k^{(i)}+(1-2\nu_i)D_k^{(i)}=\frac{X_k^{(i)}}{\beta_{ki}^3}\quad (i=1,2,3)$$

$$\tag{10}$$

$$-A_k^{(2)}\operatorname{ch}\mu_{k2}-C_k^{(2)}(\mu_{k2}\operatorname{ch}\mu_{k2}-\operatorname{sh}\mu_{k2})-D_k^{(2)}[\mu_{k2}\operatorname{sh}\mu_{k2}-(1-2\nu_2)\operatorname{ch}\mu_{k2}]=\frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3}$$

Тогда из соотношений (4)—(8) получим

$$\Delta_k^{(i)}C_k^{(i)}=-H_k^{(i)}\frac{X_k^{(i)}}{\beta_{ki}^3}+F_k^{(i)}\frac{a_k^{(i)}+P_{ki}^*}{\beta_{ki}^3}$$

$$(i=1,3)$$

$$\Delta_k^{(i)}D_k^{(i)}=\operatorname{sh}^2\mu_{ki}\frac{X_k^{(i)}}{\beta_{ki}^3}-\mu_{ki}\operatorname{sh}\mu_{ki}\frac{a_k^{(i)}+P_{ki}^*}{\beta_{ki}^3}$$

$$\tag{11}$$

$$\Delta_k^{(2)} C_k^{(2)} = -H_k^{(2)} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3} + F_k^{(2)} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3}, \quad \Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} = \mathrm{sh}^2\mu_{k2} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3} - \mu_{k2}\,\mathrm{sh}\mu_{k2} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}^3}$$

где

$$\Delta_k^{(i)} = \mathrm{sh}^2\mu_{ki} - \mu_{ki}^2, \quad H_k^{(i)} = \mathrm{sh}\mu_{ki}\mathrm{ch}\mu_{ki} + \mu_{ki}, \quad F_k^{(i)} = \mathrm{sh}\mu_{ki} + \mu_{ki}\mathrm{ch}\mu_{ki} \quad (i=1,2,3)$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ в (5)—(8) и учитывая (10), получим следующие системы парных рядов уравнений:

$$q_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha(1+M_k^{(1)}) \frac{X_k^{(1)}}{\beta_{k1}} J_0(\beta_{k1} r) + (1-\alpha)(1+M_k^{(2)}) \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2} r) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{F_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)}} \frac{a_k^{(1)} + P_{k1}^*}{\beta_{k1}} J_0(\beta_{k1} r) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha) \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2} r) \quad 0 \leqslant r \leqslant c_1 \tag{12}$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} J_0(\beta_{k1} r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k1} J_0(\beta_{k1} r) \qquad c_1 < r < R_1$$

$$q_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha^*(1+M_k^{(2)}) \frac{Z_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2} r) + (1-\alpha^*)(1+M_k^{(3)}) \frac{X_k^{(3)}}{\beta_{k3}} J_0(\beta_{k3} r) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^* \frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_{k2}} J_0(\beta_{k2} r) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha^*) \frac{F_k^{(3)}}{\Delta_k^{(3)}} \frac{a_k^{(3)} + P_{k3}^*}{\beta_{k3}} J_0(\beta_{k3} r) \quad 0 \leqslant r < c_3 \tag{13}$$

$$4(2-\nu_2) A_2 + 6(1-\nu_2) B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(2)} J_0(\beta_{k2} r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k2}^* J_0(\beta_{k2} r) \qquad c_3 < r < R_2$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(1)} - P_{k1}) J_0(\beta_{k1} r) = 4(2-\nu_2) A_2 + 6(1-\nu_2) B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(2)} - P_{k2}) J_0(\beta_{k2} r) = 0$$

$$0 \leqslant r < c_1 \tag{14}$$

$$4(2-\nu_2) A_2 + 6(1-\nu_2) B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(2)} - P_{k2}) J_0(\beta_{k2} r) = 0 \quad c_1 < r < R_2$$

$$4(2-\nu_2) A_2 + 6(1-\nu_2) B_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k^{(2)} - P_{k2}^*) J_0(\beta_{k2} r) = a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(3)} - P_{k3}) J_0(\beta_{k3} r)$$

$$0 \leqslant r < c_3 \tag{15}$$

$$a_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(3)} - P_{k3}) J_0(\beta_{k3} r) = 0 \qquad c_3 < r < R_3$$

где

$$q_0^{(1)} = \frac{(1-2\nu_1) C_1}{1-\nu_1 + G(1-\nu_2)}, \quad q_0^{(2)} = \frac{4(1-\nu_2) A_2 + 3(1-2\nu_2) B_2 - G^*(1-2\nu_3) C_3}{1-\nu_2 + G^*(1-\nu_3)} \tag{16}$$

$$\alpha = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_1 + G(1-\nu_2)}, \quad \alpha^* = \frac{1-\nu_2}{1-\nu_2 + G^*(1-\nu_3)}$$

$$\Delta_k^{(i)} M_k^{(i)} = \mathrm{sh}\mu_{ki}(\mathrm{ch}\mu_{ki} - \mathrm{sh}\mu_{ki}) + \mu_{ki}(1+\mu_{ki}) \quad (i=1, 2, 3)$$

Представим $X_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ и $Z_k^{(2)}$ в виде

$$X_k^{(1)}=\frac{1}{(\beta_{k1}c_1)^{1/2}J_0^2(\beta_{k1}R_1)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)}J_{2n+1/2}(\beta_{k1}c_1)+P_{k1} \qquad c_2=c_1$$

$$Z_k^{(1)}=\frac{1}{(\beta_{k2}c_2)^{1/2}J_0^2(\beta_{k2}R_2)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)}J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_2)+P_{k2}^{*} \tag{17}$$

Подставляя (17) во вторые уравнения (12)—(15), получим

$$b_n^{(i)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_n^{(i)}\ (i=1,3),\quad b_0^{(1)}=b_0^{(1)}=[4(2-\nu_2)A_2+6(1-\nu_2)B_2]\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{18}$$

Подставляя $X_k^{(i)}$ $(i=1,2)$ в первое уравнение (14), затем умножая полученное соотношение на $r(c_1^2-r^2)^{1/2}F(-s, s+3/2, 1, r^2/c_1^2)$, далее интегрируя по r в пределах от 0 до c_1 и пользуясь значением интеграла [3, 4]

$$\int_0^{c_1} r^{\nu+1}(c_1^2-r^2)^{p/2}F\left(-s, s+1+\frac{p}{2}+\nu, \nu+1, \frac{r^2}{c_1^2}\right)J_\nu(\beta_k r)=$$

$$=\left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+p/2}c^{1+\nu+p/2}\,\frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+p/2+s)}{2\Gamma(1+\nu+s)}J_{\nu+2s+1+p/2}(\beta_k c_1)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k1}c_1)J_{2s+3/2}(\beta_{k1}c_1)}{\beta_{k1}^2J_0^2(\beta_{k1}R_1)}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_1)J_{2s+3/2}(\beta_{k2}c_1)}{\beta_{k2}^2J_0^2(\beta_{k2}R_2)} \tag{19}$$

где $\Gamma(x)$—гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$—гипергеометрический ряд.

Пользуясь значением ряда [3, 4]

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2n+1/2}(\beta_k c)J_{2s+3/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}=\int_0^{\infty} J_{2n+1/2}\left(\frac{cx}{R}\right)J_{2s+3/2}\left(\frac{cx}{R}\right)x^{-1}dx$$

из (19) получим

$$b_n^{(2)}=\frac{R_1^2}{R_2^2}b_n^{(1)} \tag{20}$$

Аналогичным образом из (15) получим

$$b_n^{(1)}=\frac{R_1^2}{R_2^2}b_n^{(3)} \tag{21}$$

При помощи (3), (18), (20), (21) получим

$$A_2=\frac{\nu_2}{2(1+\nu_2)}\frac{R_1^2}{R_2^2}a_0^{(i)} \qquad B_2=\frac{1-2\nu_2}{6(1+\nu_2)}\frac{R_1^2}{R_2^2}a_0^{(i)} \quad (i=1,3)$$

Подставляя (17) в первые уравнения (12)—(13), имея в виду (20)—(21) и применяя известные методы решения парных рядов уравнений [1, 3, 4], решение уравнений (12)—(13) сводится к решению следующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$b_s^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(1)}b_n^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(3)}b_n^{(3)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(1)}Y_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(2)}Y_n^{(2)}+d_s^{(1)}$$

$$(s=1, 2, \ldots) \qquad (22)$$

$$b_s^{(3)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(3)}b_n^{(3)}+\sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(1)}b_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(3)}Y_n^{(3)}+\sum_{n=1}^{\infty} d_{sn}^{(2)}Y_n^{(2)}+d_s^{(3)}$$

где

$$a_{sn}^{(1)}=-2(4s+1)\left\{\frac{(-1)^{n+s}}{\pi}\left[\alpha\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_1y}{R_1}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{c_1y}{R_1}\right)dy+\right.\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_1y}{R_2}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{c_1y}{R_2}\right)dy\right]+$$

$$+\left[\frac{\alpha}{R_1^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k^{(1)}J_{2n+1/2}(\beta_{k1}c_1)J_{2s+1/2}(\beta_{k1}c_1)}{\beta_{k1}^2J_0^2(\beta_{k1}R_1)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\alpha}{R_2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k^{(2)}J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_1)J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_1)}{\beta_{k2}^2J_0^2(\beta_{k2}R_2)}\right]\right\}$$

$$b_{sn}^{(3)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_3}}(1-\alpha)\frac{R_3^2}{R_1^2R_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}}\frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_3)J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_1)}{\beta_{k2}^2J_0^2(\beta_{k2}R_2)}$$

$$c_{sn}^{(1)}=\frac{8(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^3}\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{k1}^{1/2}[H_k^{(1)}-(-1)^nF_k^{(1)}]\lambda_{n1}}{\Delta_k^{(1)}J_0(\beta_{k1}R_1)(\lambda_{n1}^2+\beta_{k1}^2)^2}J_{2s+1/2}(\beta_{k1}c_1)$$

$$c_{sn}^{(2)}=\frac{8(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^2R_2}(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{k2}^{1/2}[H_k^{(2)}-(-1)^nF_k^{(2)}]}{\Delta_k^{(2)}J_0(\beta_{k2}R_2)(\lambda_{n2}^2+\beta_{k2}^2)^2}\lambda_{n2}J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_1)$$

$$a_{sn}^{(3)}=-2(4s+1)\left\{\frac{(-1)^{n+s}}{\pi}\left[\alpha^*\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_3y}{R_2}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{c_3y}{R_2}\right)dy+\right.\right.$$

$$\left.+(1-\alpha^*)\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_3y}{R_3}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{c_3y}{R_3}\right)dy\right]+$$

$$+\left[\frac{\alpha^*}{R_2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{k2}^{(2)}J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_3)J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_3)}{\beta_{k2}^2J_0^2(\beta_{k2}R_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\alpha^*}{R_3^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k^{(3)}J_{2n+1/2}(\beta_{k3}c_3)J_{2s+1/2}(\beta_{k3}c_3)}{\beta_{k3}^2J_0^2(\beta_{k3}R_3)}\right]\right\}$$

$$b_{sn}^{(1)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{\sqrt{c_1}}\alpha^*\frac{R_1^2}{R_2^2R_3^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}}\frac{J_{2n+1/2}(\beta_{k2}c_1)J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_3)}{\beta_{k2}^2J_0^2(\beta_{k2}R_2)}$$

$$c_{sn}^{(3)}=\frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_3^3}(1-\alpha^*)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{k3}^{1/2}[H_k^{(3)}-F_k^{(3)}(-1)^n]\lambda_{n3}}{\Delta_k^{(3)}J_0(\beta_{k3}R_3)(\lambda_{n3}^2+\beta_{k3}^2)^2}J_{2s+1/2}(\beta_{k3}c_3)$$

$$d_{sn}^{(2)}=\frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_2R_3^2}\alpha^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{k2}^{1/2}[(-1)^nH_k^{(2)}-F_k^{(2)}]\lambda_{n2}}{\Delta_k^{(2)}J_0(\beta_{k2}R_2)(\lambda_{n2}^2+\beta_{k2}^2)^2}J_{2s+1/2}(\beta_{k2}c_3)$$

$$d_s^{(1)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{R_1^2}\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(1)}a_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)}\beta_{k1}^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_{k1}c_1)$$

$$d_s^{(3)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{R_3^2}(1-\alpha^*)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(3)}a_k^{(3)}}{\Delta_k^{(3)}\beta_{k3}^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_{k3}c_3)$$

$K_n(x)$—функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ в (9) и учитывая (16), получим

$$Y_k^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}^{(i)}b_n^{(i)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}^{(i)}Y_n^{(i)}+d_k^{(i)}\quad(i=1, 3)$$

$$Y_k^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}^{(2)}b_n^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{kn}^{(2)}b_n^{(3)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}^{(2)}Y_n^{(2)}\tag{23}$$

где

$$a_{kn}^{(i)}=\frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}c_i^{1/2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{pi}^{1/2}[H_p^{(i)}-(-1)^kF_p^{(i)}]J_{2n+1/2}(\beta_{pi}c_i)}{\Delta_p^{(i)}J_0(\beta_{pi}R_i)(\lambda_{ki}^2+\beta_{pi}^2)^2}\quad(i=1, 3)$$

$$c_{kn}^{(i)}=\frac{16\lambda_{ki}^2}{l_iR_i\varphi_{ki}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{pi}^3[-(-1)^k(-1)^nH_p^{(i)}+(-1)^kF_p^{(i)}+(-1)^nF_p^{(i)}-H_p^{(i)}]}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_{pi}^2)^2(\lambda_{ni}^2+\beta_{pi}^2)^2}\lambda_{ni}$$

$$d_k^{(i)}=\frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{pi}J_0(\beta_{pi}R_i)[(-1)^kH_p^{(i)}-F_p^{(i)}]a_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_{pi}^2)^2}$$

$$a_{kn}^{(2)}=\frac{4\lambda_{k2}^2R_1^2}{l_2\varphi_{k2}c_1^{1/2}R_2^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p2}^{1/2}[H_p^{(2)}-(-1)^kF_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)}J_0(\beta_{p2}R_2)(\lambda_{k2}^2+\beta_{p2}^2)^2}J_{2n+1/2}(\beta_{p2}c_1)$$

$$b_{kn}^{(2)}=\frac{4\lambda_{k2}^2R_3^2}{l_2\varphi_{k2}c_3^{1/2}R_1^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p2}^{1/2}[(-1)^kH_p^{(2)}-F_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)}J_0(\beta_{p2}R_2)(\lambda_{k2}^2+\beta_{p2}^2)^2}J_{2n+1/2}(\beta_{p2}c_3)$$

$$c_{kn}^{(2)}=\frac{16\lambda_{k2}^2}{l_2R_2\varphi_{k2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p2}^3[(-1)^kF_p^{(2)}-(-1)^n(-1)^kH_p^{(2)}-H_p^{(2)}+(-1)^nF_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)}(\lambda_{k2}^2+\beta_{p2}^2)^2(\lambda_{n2}^2+\beta_{p2}^2)^2}\lambda_{n2}$$

Квазиполная регулярность бесконечных систем алгебраических уравнений (21) и (22) доказывается аналогично [1,5].

После решения бесконечных систем (22) и (23) из первых уравнений (12) и (13) при фиксированном r определяются $\varphi^{(i)}$ $(i=1, 2)$, а из уравнений (16) находится c_i $(i=1, 3)$.

Подставив значение $X_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ и $Z_k^{(2)}$ по формуле (17) во вторых рядах (12) и (13), для контактных напряжений получим следующие выражение [1]:

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0)=\sigma_z^{(2)}(r, 0)=\frac{R_1^2(c_1^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\,c_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(1)}\frac{n!F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_1^2)}{\Gamma(n+1/2)}\qquad 0\leqslant r<c_1\tag{24}$$

$$\sigma_z^{(2)}(r, l_2)=\sigma_z^{(3)}(r, 0)=\frac{R_3^2(c_3^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\,c_3}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(3)}\frac{n!F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_3^2)}{\Gamma(n+1/2)}\qquad 0\leqslant r<c_3$$

Коэффициент при особенности $(c_i^2-r^2)^{-1/2}$ $(i=1, 3)$ в формуле (24) в окрестности $r=c_i$ имеет вид [1]

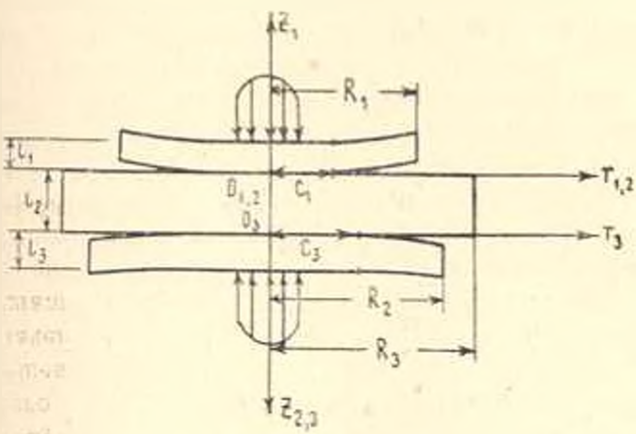
$$\frac{R_i^2}{c_i\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-L)^n b_n^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

Неизвестные величины c_i $(i=1, 3)$ можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n^{(i)}=0 \quad (i=1, 3) \tag{25}$$

В частном случае, если $R_1=R_2=R_3$, решение задачи совпадает с решением [5].

Численные примеры. В частности, рассмотрим три цилиндра одинаковых диаметров, изготовленых из различных материлов, которые контактированы между собой торцами. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки (фиг. 1).



Фиг. 1

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i)=\begin{cases} -P & \text{при} \quad 0<r<a \\ 0 & \text{при} \quad a<r<R \end{cases}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 3)$$

где

$$a_0=-\frac{a^2}{R^2}P, \qquad a_k=-\frac{2aJ_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)}P, \qquad \begin{matrix} R=R_1=R_2=R_3 \\ \beta_k=\beta_{k1}=\beta_{k2}=\beta_{k3} \end{matrix}$$

Вычисления проведены для значений $a=0.70\,R$, $\nu_1=0{,}1$, $\nu_2=0{,}3$, $\nu_3=0{,}2$, $G_1=G_2=G_3$, $l_1=l_3=0{,}5l_2=0{,}2R$.

Для этого частного случая получается $c_1=0{,}80\,R$, $c_3=0{,}807\,R$.

При решении системы уравнений (22) и (23) сначала были подобраны значения c_1 и c_3 (примерные их значения известны из [6]), по ним решались бесконечные системы алгебраических уравнений и полученные значения неизвестных были подставлены в (25). Этот процесс многократно повторялся до тех пор, пока в левой части (25) не получались числа с разными знаками, близкие к нулю.

ON CONTACT INTERACTION OF THREE COAXIAL ELASTIC CYLINDERS WITH FINITE LENGTHS AND DIFFERENT DIAMETERS

S. S. ZARGARIAN, Z. A. MARTIROSSIAN

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐ ՏՐԱՄԱԳԾԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ, ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ԵՐԵՔ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ, Զ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկություններ, տարբեր տրամագծեր և վերջավոր երկարություններ ունեցող երեք շրջանային գլանների առաձգականության առանցքասիմետրիկ խնդիրը։ Գլանային մակերևույթների վրա նորմալ և շոշափող լարումները բացակայում են։ Գլանների կոնտակտների տիրույթներն անհայտ են։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրիեի և Ֆուրիե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ համակարգեր և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք հավասարումներ, որոնց լուծումները հանգում են քվազիլիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը։

Բերված են թվային օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартиросян З. А.* Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 14—25.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier—Bessels series.—Quart.—J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, Pt 3, p. 379—386.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, т. 22, № 5, с. 3—15.
5. *Мартиросян З. А.* Осесимметричная контактная задача для трех цилиндров.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т. 39, № 4, с. 25—34.
6. *Мартиросян З. А., Тонoян В. С.* О контактном взаимодействии трех соосных упругих цилиндров конечных длин.—МТТ, 1981, № 6, с. 94—102.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
13.IV.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 532.517.4

УСЛОВИЕ ГЕНЕРАЦИИ СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ НА ОБТЕКАЕМОЙ СТЕНКЕ

НИКОЛАЕВСКИЙ В. Н.

Граничное условие для угловой скорости вращения частиц жидкости Коссера задается в форме зависимости от градиента средней поступательной скорости потока, обтекающего стенку. Условие для касательного напряжения оказывается соответствующим представлению Прандтля, суммарно учитывающего линейную ньютонову и турбулентную вязкость. Рассмотрены задачи обтекания стенки неограниченным потоком и течения в плоском канале.

1. В асимметричной механике [1] известна проблема выбора краевого условия для скорости собственного вращения жидких частиц. Ранее предлагались условия полного прилипания, то есть совпадения поступательных и вращательных скоростей частиц потока и обтекаемой стенки [2, 3], а также условие линейной пропорциональности спиновой скорости частицы и средней угловой скорости потока [2]. Ниже формулируется близкое краевое условие, соответствующее применению гидромеханики Коссера для расчета турбулентных потоков. Полученное краевое условие позволяет выразить собственную угловую скорость турбулентных вихрей через локальные параметра течения в месте их генерации, тогда как ранее [4] эта величина определялась через глобальные характеристики (расход) потока.

Будем исходить из идеи о существовании связи между скоростью собственного вращения ω_w вихрей, срывающихся со стенки, шероховатостью e последней, а также градиентом скорости (угловой скоростью Ω среднего потока $(\partial u/\partial n)_w$ и кинематической вязкостью ν. Здесь w— символ значения на стенке. Для системы указанных параметров должна выполняться связь, следующая из требований [5] анализа размерностей

$$\omega_w/(\partial u/\partial n)_w = f(e^2\partial u/\partial n/\nu) \tag{1.1}$$

В простейшем варианте соотношение (1.1) при $\alpha>0$ определяет

$$\omega_w = \alpha\frac{e^2}{\nu}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w = -4\alpha\frac{e^2}{\nu}|\Omega|_w\Omega_w \tag{1.2}$$

нелинейное замедление полной скорости вращения $\Phi=\Omega+\omega$ вихря на стенке. Заметим, что условие прилипания $\Phi=0$ означает $\omega=-\Omega$, а условие [2] имеет вид также линейного условия $\omega=-(1-\alpha)\Omega$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$.

В гидромеханике Коссера для несжимаемой жидкости напряжения τ_{ij} представляются в виде суммы ньютоновой вязкой части и антисимметричной, определяемой собственным вращением вихрей

$$\tau_{ij}=-p\delta_{ij}+\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+2\rho\gamma e_{ijk}\omega_k \tag{1.3}$$

Из сопоставления (1.2) и (1.3) для касательного напряжения на обтекаемой стенке получается формула Прандтля [6]

$$\frac{\tau}{\rho}=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w+2\gamma\omega_w=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w+\frac{\gamma}{\nu}\varkappa e^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w \tag{1.4}$$

которая здесь выступает в форме краевого условия, тогда как внутри потока выполняется линейный закон (1.3). Знаменитая прандтлева длина смешения l согласно (1.4) выражается через меру шероховатости и отношение сдвиговой и вращательной ν, γ вязкостей

$$l=e\sqrt{\varkappa\gamma/\nu} \tag{1.5}$$

$$\nu_t=l^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w=\varkappa\frac{\gamma}{\nu}e^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w$$

и имеет масштаб ламинарного подслоя, при потери устойчивости которого и генерируется турбулентный вихрь [7]. Здесь ν_t — турбулентная вязкость, которая здесь действует только на самой стенке.

Система уравнений движения помимо закона (1.3) включает в себя [8] уравнения несжимаемости, количества движения и момента количества движения, а также эволюции момента инерции J

$$\partial u_i/\partial x_i=0 \tag{1.6}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+2\gamma e_{ijk}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}[J(\Omega_i+\omega_i)]+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}[J(\Omega_i+\omega_i)]=\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial x_j}+2\gamma e_{ijk}e_{jkl}\omega_l \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}+u_j\frac{\partial J}{\partial x_j}=\xi\frac{\partial^2 J}{\partial x_j\partial x_j} \tag{1.9}$$

причем моментные напряжения μ_{ij} будем считать пропорциональными градиенту момента количества $M_i=\rho J(\Omega_i+\omega_i)$, $\Omega=1/2e_{ijk}\partial u_j/\partial x_k$

$$\mu_{ij}=\zeta(\Omega_i+\omega_i)\frac{\partial J}{\partial x_j}+2\eta J\frac{\partial}{\partial x_j}(\Omega_i+\omega_i) \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим стационарное обтекание бесконечной пластины при нулевом продольном градиенте давления $\partial p/\partial x=0$, где $x=x_1$. При этом $u_1=u(y)$, где $y=x_2$, $u_2=0$, $\omega_3=\omega(y)$, $\Omega=-1/2(\partial u/\partial y)$ и система уравнений движения упрощается

$$\frac{d}{dy}\left(\nu\frac{du}{dy}+2\gamma\omega\right)=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\xi\left(-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+\omega\right)\frac{dJ}{dy}+2\eta J\frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+\omega\right)\right]=4\gamma\omega \qquad (2.2)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\xi\frac{dJ}{dy}\right)=0 \qquad (2.3)$$

Последнее уравнение дает закон расширения вихря по мере его удаления от стенки

$$J(y)=Ay+J_w \qquad (2.4)$$

а исключение скорости u из уравнений (2.1), (2.2) сводит последние к уравнению Бесселя

$$z\frac{d^2\omega}{dy^2}+\left(1+\frac{\xi}{2\eta}\right)\frac{d\omega}{dy}-\beta^2\omega=0 \qquad (2.5)$$

$z=(Ay+J_w)/A$, решение которого имеет следующий вид:

$$\omega=z^{\lambda/2}[C_1I_\lambda(2\beta z^{1/2})+C_2K_\lambda(2\beta z^{1/2})] \qquad (2.6)$$

если $\beta^2=2\gamma/[\eta(\nu-\gamma)A]>0$, $\lambda=-\xi/2\eta$. Когда $J=J_w$, уравнение (2.5) упрощается

$$\frac{d^2\omega}{dy^2}=k^2\omega, \qquad k^2=\beta^2\frac{A}{J_w} \qquad (2.7)$$

и дает экспоненциальное затухание вращения

$$\omega=\omega_w\exp(-ky) \qquad (2.8)$$

Из решения (2.6) при $C_1=0$ следует ($A\neq0$, $\lambda=1$) асимптотическое распределение

$$\omega=C_2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-2\beta\sqrt{z}) \qquad (2.9)$$

определяющее несколько более слабое затухание с расстоянием от стенки.

Уравнение баланса количества движения (2.1) имеет первый интеграл

$$\frac{du}{dy}+2\frac{\gamma}{\nu}\omega=\frac{\tau}{\rho\nu} \qquad (2.10)$$

Второе интегрирование приводит к профилю скорости

$$u=\frac{\tau}{\rho\nu}y-\frac{2\gamma}{\nu}\frac{\omega_w}{k}(1-\exp(-ky)) \qquad (2.11)$$

удовлетворяющему условию $u_w=0$. Величину ω_w определим из условия (1.2), что дает

$$\omega_w\approx\frac{\tau^2}{\rho^2}\alpha\frac{e^2}{\nu^2}\frac{\gamma}{\nu}\theta, \qquad \theta=\operatorname{sgn}\frac{du}{dy} \qquad (2.12)$$

Отсюда, при фиксированном напряжении τ профиль u вблизи стенки более пологий, чем ламинарный, а при одинаковом профиле u поток по Коссера требует большего сдвигающего усилия.

3. При установившемся течении в канале ширины $2a$ градиент давления $\partial p/\partial x=\rho h=\text{const}\neq 0$ и уравнения (1.7) и (1.8) принимают вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}+2\gamma\omega\right)=0 \tag{3.1}$$

$$\eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\gamma}{J}\omega, \quad J=J_{\omega} \tag{3.2}$$

что приводит к интегралам

$$\nu\frac{du}{dy}+2\gamma\omega=yh+C \tag{3.3}$$

$$\omega=\omega_a\frac{\operatorname{sh} yk}{\operatorname{sh} ak} \tag{3.4}$$

Удовлетворение краевым условиям (1.2), $u=0$ при $y=\pm a$ и условию симметрии дает решение

$$\frac{2\gamma}{\nu}\omega_a=2\frac{a^3\gamma\alpha e^3}{\nu^4}h^2\theta, \quad \theta=\operatorname{sgn} h=-1 \tag{3.5}$$

$$u=-\frac{ha^2}{2\nu}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)+2\frac{a^2\gamma\alpha}{\nu^4 k}h|h|\operatorname{cth} ak\left(1-\frac{\operatorname{ch} yk}{\operatorname{ch} ak}\right) \tag{3.6}$$

причем для расхода Q получаем

$$Q=\int_{-a}^{a}u\,dy=-\frac{2}{3}\frac{a^3}{\nu}h\left|1-|h|\frac{6\gamma\alpha e^3}{\nu^3 k}\left(\operatorname{cth} ak-\frac{1}{ak}\right)\right| \tag{3.7}$$

С ростом ширины канала эффект второго слагаемого уменьшается, но в отличие от линейной постановки [3] с ростом перепада давления его роль растет.

Разрешая (3.7) относительно градиента давления, получим формулу

$$-h=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{3}{2}\frac{\nu}{a^3}Q+\frac{27}{2}\alpha\frac{\gamma}{a^6 k}\left(\operatorname{cth} ak-\frac{1}{ak}\right)Q^2 \tag{3.8}$$

соответствующую гидравлическому закону сопротивления канала турбулентному потоку.

Для совпадения расчетного и экспериментально наблюдаемых профилей скорости u повидимому требуется использование нелинейных определяющих законов, см. [8, 9], а не только граничного условия, или (и) выделения ламинарного подслоя, который соответствует вводимой иногда скорости «скольжения» на стенке, см. [4, 10].

THE CONDITIONS OF GENERATION OF FLUID PARTICLES OWN ROTATION AT A WALL, BOUNDING THE STREAM

V. N. NIKOLAEVSKY

ՇՐՋՀՈՍՎՈՂ ՊԱՏԻ ՎՐԱ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՊՏՏՄԱՆ ՎԵՐԱՐՏԱԴՐՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ

Վ. Ն. ՆԻԿՈԼԱԵՎՍԿԻ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կոսերի հեղուկի մասնիկների պտտման անկյունային արագության համար եզրային պայմանը տրվում է, պատը շրջհոսող հոսքի համընթաց միջին արագության գրադիենտից կախվածության տեսքով։ Շոշափող լարման համար պայմանը համապատասխանում է Պրանդտլի ներկայացմանը, որը գումարային ձևով հաշվի է առնում նյուտոնյան և մրրկային մածուցիկությունը։ Դիտարկված են անսահմանափակ հոսքով պատի շրջհոսման խնդիրները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика.— ПММ, 1964, т. *29*, вып. 2.
2. *Мигун Н. П., Прохоренко П. П.* Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск. Наука и техника, 1984.
3. *Петросян Л. Г.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984.
4. *Николаевский В. Н., Искандеров Д. Ш., Коржов Е. Н.* Турбулентная жидкость как сплошная среда с внутренней структурой. В сб.: «Тр. 3 Всесоюзн. Семинара по моделям сплошной среды». Новосибирск: Вычислит. Центр СО АН СССР, 1976.
5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
6. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. Пер. с нем. М.: Изд-во Иностр. лит. 1951.
7. *Кантуэлл Б. Дж.* Организованные движения в турбулентных потоках. Пер. с англ.—В сб.: «Вихри и волны», М.: Мир, 1984.
8. *Николаевский В. Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности.— В сб.: «Вихри и волны», М.: Мир, 1984.
9. *Бабкин В. А.* Турбулентный поток между параллельными плоскими стенками как течение анизотропной жидкости.—ПММ, 1985, т. *49*, вып. 3.
10. *Хейнлоо Я. Л.* Феноменологическая механика турбулентных потоков. Таллин: Валгус, 1984.

Институт физики Земли АН СССР

Поступила в редакцию
24.VII.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механи

УДК 536.241

НАГРЕВ СОСТАВНОГО СЛОЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМ ТЕПЛА

САРГСЯН А. М.

В работе определяется трехмерное квазистационарное температур ное поле в составном слое, нагреваемом двумя точечными источникам тепла постоянной мощности, движущимися с постоянной скорость параллельно поверхности раздела двух разнородных полубесконечны сред. Через поверхности составного слоя происходит теплообмен внешней средой постоянной температуры по закону Ньютона. Тепл вой контакт между слоями принимается неидеальным. На бесконечност разность температур слоя и среды, а также производные температу исчезают. Для однородного слоя решение этой задачи получено в р боте [1].

В предположении постоянства теплофизических характерист материалов слоев и коэффициентов теплоотдачи с боковых поверхно тей температурное поле удовлетворяет уравнению [1]

$$\Delta T_j + \frac{v}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial x} = -\frac{q_j}{\lambda_j}\delta(x-x_j)\,\delta(y-y_j)\,\delta(z-z_j)$$

$$|x|<\infty,\ |z|<\delta,\ j=1,\ y>0;\ j=2,\ y<0$$

граничным условиям

$$\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial z} = \mp\alpha_j^{\pm}T_j,\quad z=\pm\delta$$

и условиям на контактной поверхности $y=0$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha(T_1-T_2)$$

Здесь T_j—приращение температуры по сравнению с равномерной н чальной, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$, v—скорость движения источник тепла, q_j—мощность источников тепла, λ_j и a_j—коэффициенты тепл проводности и температуропроводности материалов слоев, (x_j, y_j, z_j) координаты точек приложения источников тепла, $\alpha_j^{\pm}$—коэффициен теплоотдачи с боковых поверхностей $z=\pm\delta$, α—контактная пров димость, 2δ—толщина слоев, $\delta(x)$—функция Дирака.

Если на поверхностях $z=\pm\delta$ заданы температура окружающ среды или условия тепловой изоляции, то эти граничные условия пол чаются из (2) путем предельного перехода $\alpha_j^{\mp}\to\infty$ или $\alpha_j^{\pm}\to 0$. Так как на границах каждого слоя возможны девять различных комбинаций таких условий, то для составного слоя их восемьдесят одно. Соответствующие краевые задачи (из них только двадцать семь независимых) решаются единым методом интегральных преобразований Фурье и предельными переходами.

Применение экспоненциального преобразования Фурье по x и конечного преобразования по z [2] к уравнению (1) и условиям (2) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\tilde{\bar{T}}_j}{dy^2}-(\xi^2+i\xi p_j+\beta_{jm})\tilde{\bar{T}}_j=-\frac{q_j}{2\pi\lambda_j}\,\frac{K_j(\beta_{jm},z_j)}{\exp(-i\xi x_j)}\,\delta(y-y_j) \tag{4}$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\bar{T}}_j(\xi,y,\beta_{jm})=C_{jm}(\xi)\exp\left[-|y|b_{jm}(\xi)\right]+\frac{q_j}{4\pi\lambda_j}\,\frac{K_j(\beta_{jm},z_j)}{b_{jm}(\xi)}\times$$
$$\times\exp\left[i\xi x_j-|y-y_j|b_{jm}(\xi)\right] \tag{5}$$

В (4) и (5) введены следующие обозначения:

$$\tilde{\bar{T}}_j(\xi,y,\beta_{jm})=\int_{-\delta}^{\delta}\bar{T}_j(\xi,y,z)\cdot K_j(\beta_{jm},z)dz,\quad \bar{T}(\xi,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T_j(x,y,z)\exp(i\xi x)dx$$

$$K_j(\beta_{jm},z)=\frac{[\beta_{jm}\cos\beta_{jm}(\delta+z)+h_j^-\sin\beta_{jm}(\delta+z)]\sqrt{2}}{[h_j^-+(\beta_{jm}+h_j^-h_j^-)(2\delta+h_j^+(\beta_{jm}+h_j^+h_j^-)^{-1})]^{1/2}}$$

$$b_j(\xi)=(\xi^2+i\xi p_j+\beta_{jm}^2)^{1/2},\quad \mathrm{Re}\,b_{jm}(\xi)>0,\quad p_j=v/a_j$$

β_{jm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mathrm{tg}\,2\delta\beta_{jm}=\beta_{jm}(h_j^++h_j^-)(\beta_{jm}^2-h_j^-h_j^+) \tag{6}$$

Возвращаясь по формуле $\bar{T}_j(\xi,y,z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{\bar{T}}_j(\xi,y,\beta_{jm})K_j(\beta_{jm},z)$ от $\tilde{\bar{T}}_j(\xi,y,\beta_{jm})$ к $\bar{T}_j(\xi,y,z)$ и удовлетворяя преобразованным контактным условиям, полученным из (3) после применения экспоненциального преобразования Фурье, для определения неизвестных коэффициентов $C_{jm}(\xi)$ получим совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$C_{1n}(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{(1)}(\xi)C'_{2m}(\xi)+\gamma_n^{(1)}(\xi),\qquad C'_{2n}(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{(2)}(\xi)C'_{1n}(\xi)+\gamma_n^{(2)}(\xi)$$
$$C'_{1k}(\xi)=C_{1k}(\xi)\sqrt{b_{1k}(\xi)},\quad C'_{2k}(\xi)=C_{2k}(\xi)b_{2k}(\xi) \tag{7}$$

Учитывая асимптотическое решение трансцендентного уравнения (6)

$$\beta_{jk}=\pi k/2\delta+(h_j^++h_j^-)/\pi k-O(k^{-3})$$

при больших значениях k [3] и метод исследования бесконечных систем, приведенный, например, в работе [4], доказывается, что сумма $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}^{(j)}|$ при больших значениях n стремится к нулю, как $O(1/\sqrt{n})$. Следовательно, бесконечная система (7), свободные члены которой также стремятся к нулю, квазивполне регулярна и ее решение можно получить с любой необходимой точностью методом последовательных приближений.

В частном случае $h_1^{\pm}=h_2^{\pm}=h^{\pm}$ система (7) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, находим ($h_j=\alpha_j/\lambda_j$)

$$C_{jm}(\xi)=\frac{2h_j b_{jm}(\xi)A_{(3-j)m}(\xi)+[b_{1m}(\xi)b_{2m}(\xi)+(-1)^j(h_1 b_{1m}(\xi)-h_2 b_{2m}(\xi))]A_{jm}(\xi)}{b_{jm}(\xi)[h_1 b_{2m}(\xi)+b_{1m}(\xi)b_{2m}(\xi)+h_2 b_{1m}(\xi)]} \tag{8}$$

$$A_{jm}(\xi)=\frac{q_j}{4\pi\lambda_j}K_j(\beta_{jm}, z_j)\exp[i\xi x_j-|y_j|b_{jm}(\xi)]$$

Определяя из (7) или (8) $C_{jm}(\xi)$ для температурного поля будем иметь

$$T_j(x, y, z)=\sum_{m=1}^{\infty} K_j(\beta_{jm}, z)\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{C_{jm}(\xi)\exp[-|y|b_{jm}(\xi)]+$$

$$+\frac{q_j K_j(\beta_{jm}, z_j)}{4\pi\lambda_j b_{jm}(\xi)}\exp[i\xi x_j-|y-y_j|b_{jm}(\xi)]\Big\}\exp(-i\xi x)d\xi \tag{9}$$

Имея фундаментальное решение (9), можно получить температурное поле в составном слое, нагреваемом линейными, плоскими и объемными источниками тепла [5]. Например, температурное поле в составном слое с теплоизолированными поверхностями, возникающее от линейных источников тепла имеет вид

$$T_j(x, y)=\sqrt{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{C_{j0}(\xi)\exp[-|y|b_{j0}(\xi)]+\frac{q_j\exp(-i\xi x)}{4\pi\lambda_j b_{jm}(\xi)}\times$$

$$\times\exp[-|y-y_j|b_{j0}(\xi)]\Big\}\exp(-i\xi x)d\xi$$

Полученное решение представляет собой температуру в составной бесконечной пластинке единичной толщины с теплоизолированными поверхностями, нагреваемой двумя линейными источниками тепла [6].

Подставляя в (8) и (9) $p_2=p_1$, $h_j^{\pm}=0$, $q_2/\lambda_2=q_1/\lambda_1$, $x_2=x_1$, $|y_2|=y_1$, $z_2=z_1$, получим

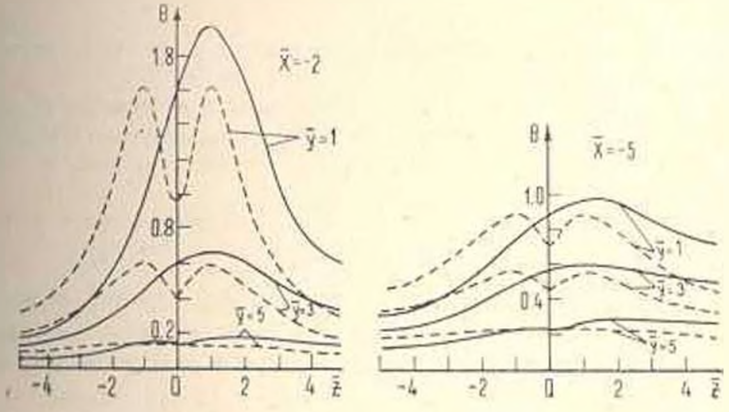
$$T_1(x, y, z)=T_2(x, y, z)=\frac{q_1}{2\pi\delta\lambda_1}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\beta_m(\delta+z)\cos\beta_m(\delta+z_1)\times$$

$$\times\exp[(x-x_1)p_1/2][K_0(\gamma_m r_+)+K_0(\gamma_m r_-)]$$

где $K_0(u)$—функция Макдональда нулевого порядка,

$$\gamma_m=(\beta_m^2+p_1^2/4)^{1/2},\quad r_\pm=[(x-x_1)^2+(y\pm y_1)^2]^{1/2},\quad \beta_m=\pi m/2\delta$$

Температурное поле не зависит от условий на контактной поверхности и симметрично относительно этой поверхности. Штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $m=0$ содержит множитель 0,5.



Фиг. 1

Численные расчеты проведены по формуле (10) после перехода к безразмерным величинам $\bar{x}=p_1x$, $\bar{y}=p_1y$, $\bar{z}=p_1z$, $\bar{\delta}=p_1\delta$, $\theta=2\pi\lambda_1T_1/q_1$, $\bar{\beta}_m=\beta_m/p_1$. Результаты расчетов при $\bar{x}_1=p_1x_1=0$; $\bar{y}_1=p_1y_1=0{,}5$; $\bar{z}_1=p_1z_1=1$ представлены на фиг. 1 сплошными линиями. Там же, для сравнения, пунктирными линиями приведены графики распределения температуры, симметричной относительно оси $\bar{z}$.

COMPOSITE LAYER HEATING BY MOVING HEAT SOURCES

A. M. SARGSYAN

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇԵՐՏԻ ՏԱՔԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐՈՎ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Որոշված է բաղադրյալ շերտի եռաչափ քվազիստացիոնար ջերմային դաշտը, որը տաքացվում է երկու տարասեռ կիսաանվերջ շերտերի բաժանման մակերևույթին զուգահեռ շարժվող ջերմային աղբյուրներով։ Ջերմային կոնտակտը շերտերի միջև ընդունված է ոչ իդեալական։

Շերտերի մակերևույթների միջոցով շրջապատի հետ կատարվող ջերմափոխանակությունը տեղի է ունենում ջերմատվության տարբեր գործակիցներով՝ ըստ Նյուտոնի օրենքի։

խնդրի լուծումը, որը ստացված է Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, բերված է անհայտ գործակիցների նկատմամբ քվազիլիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные поля от объемных источников.—Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
2. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.—Киев: Наукова думка, 1976, 282 с.
3. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции.—М.: Наука, 1978. 376 с.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25. № 2, с. 15—36.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1971. 512 с.
6. *Саргсян А. М.* Нагрев составной пластинки источниками тепла, движущимися параллельно прямолинейному контакту.—Изв. АН Арм. ССР, серия тех. наук, 1980, № 3, с. 52—59.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.X.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3.01

ОБ ЭФФЕКТЕ НЕМОНОТОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИНГУЛЯРНОСТИ В РЕШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

БЕРКУН В. Б., ПОПОВ В. А.

Рассматривается решение двумерной задачи теории упругости в области, представляющей собой бесконечный угол. На одной стороне угла заданы условия в напряжениях, на другой—в перемещениях. Асимптотическое решение в окрестности вершины угла строится методом, изложенным в работах [1, 2]. Исследовано изменение показателей сингулярности в решениях при различных растворах угла и коэффициентах Пуассона в случае плоской деформации.

Пусть область, занимаемая упругим однородным телом на плоскости $(x_1, x_2)\in R^2$, представляет собой бесконечный угол $K=\{(x_1, x_2):$ $:0<r<+\infty,\ 0<\theta<\omega\}$ с вершиной в начале координат с границей $\theta=0$ и $\theta=\omega$. Здесь θ—полярный угол, $0<\omega\leqslant 2\pi$, а $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. На одной стороне угла $\theta=0$ заданы условия в напряжениях $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$, а на другой $\theta=\omega$—в перемещениях (u_r, u_θ).

Равновесие области K описывается уравнениями Ляме

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot} u=0 \tag{1}$$

где λ, μ—коэффициенты Ляме, $u=(u_r, u_\theta)$, с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u=0 &&\text{при}\quad \theta=\omega \\ &\sigma_{\theta\theta}=p_1(r) &&\text{при}\quad \theta=0 \\ &\sigma_{r\theta}=p_2(r) && \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагается для простоты, что $p_i(r)\equiv 0$ $(i=1, 2)$ в малой окрестности вершины угла.

Исследуется обобщенное решение задачи (1)—(2) $u\in W_2^1(K)^2$, где $W_2^1(K)^2$—векторное пространство Соболева с нормой $\|u\|^2=\int\limits_K |u|^2+$ $+\sum\limits_{i=1}^{2}|\partial u/\partial x_i|^2 dK$. Обобщенное решение задачи (1)—(2) в области с кусочно-гладкой границей существует и единственно [3].

Асимптотическое решение задачи в окрестности вершины O, согласно [1, 2], имеет вид

$$u=\sum_{j=1}^{5} r^{-i\gamma_j}\sum_{k=1}^{2} c_{kj}\varphi_{kj}(\theta)+w(r, \theta) \tag{3}$$

где показатели сингулярности ρ_j—корни трансцендентного уравнения

$$F(\rho, \omega, \nu) = \mathrm{sh}^2\rho\omega + \frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu} + \frac{\rho^2}{3-4\nu} \sin^2\omega = 0 \tag{4}$$

попадающие в интервал $0 < \mathrm{Im}\,\rho_j < 1$, ν—коэффициент Пуассона, $\varphi_{jk}(\theta)$—собственные функции задачи с параметром на дуге, получаемые из задачи (1)–(2) после преобразования Меллина по r, c_{kj}—коэффициенты, зависящие от величины правой части, коэффициента Пуассона, раствора угла. В формуле (3) $S = [N(\nu, \omega)]$, где $[N(\nu, \omega)]$—целочисленная функция, принимающая значения, равные количеству корней трансцендентного уравнения (4) в полосе $]0, i[$, $w \in W_2^1(K)^2$, и имеет первые производные (деформации и напряжения), стремящиеся к нулю при стремлении к нулю r. Следует отметить, что если корень ρ_j кратный, то в (3) добавляется присоединенный вектор.

Исследование распределения корней уравнения (4) в интервале $0 < \mathrm{Im}\,\rho_j < 1$ проводилось аналитически и численно с использованием ЭВМ. Распределение корней в зависимости от ω и ν представлено на фиг. 1. Кривые 1 соответствуют корням трансцендентного уравнения (4) при $\nu = 0{,}2$, кривые 2 – при $\nu = 0{,}3269$, кривые 3 – при $\nu = 0{,}4$.

При $\nu > 0{,}3269$ в области $\pi < \omega < 2\pi$ имеется зона, где минимальные корни ρ_1 и ρ_2 уравнения (4) чисто мнимые. При $\nu = 0{,}3269$ эта зона вырождается в точку $\omega = \omega_0$, в которой существуют кратные корни ($\rho_1 = \rho_2$). Из теоремы о неявной функции следует, что в данной точке должны выполняться, кроме равенства (4), также равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\omega\,\mathrm{sh}\rho\omega\,\mathrm{ch}\rho\omega + \frac{2\rho}{3-4\nu} \sin^2\omega = 0$$

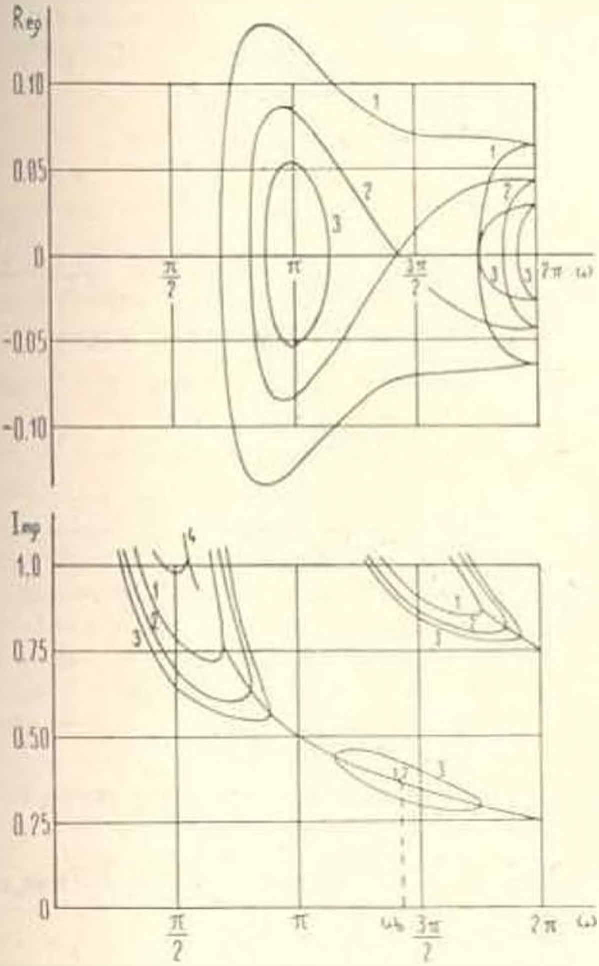
$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = 2\rho\,\mathrm{sh}\rho\omega\,\mathrm{ch}\rho\omega + \frac{2\rho^2}{3-4\nu} \sin\omega \cos\omega = 0$$

Из этих двух равенств находим уравнение для определения величины ω_0:

$$\mathrm{tg}\,\omega_0 = \omega_0$$

При исследовании распределения корней обнаружен эффект нарушения монотонности по ω для минимального корня уравнения (4). В решении (3) этому корню соответствует первый член в асимптотической сумме. Таким образом, показатель сингулярности в главном члене разложения (3) в области $\pi/2 < \omega < \pi$ для $\nu = 0{,}2$; $0{,}3269$; $0{,}4$ при возрастании раствора угла вначале убывает, затем достигает локального минимума и возрастает до кратного корня, а затем переходит из чисто мнимого в комплексный. Аналогичный эффект наблюдается при $\nu > 0{,}3269$ в зоне $\pi < \omega < 2\pi$.

При малых $\nu < 0{,}038$ эффект немонотонности приводит к нарушению сингулярности (фиг. 1, кривая 4). Как видно из поведения кривой 4 ($\nu = 0{,}02$), в интервале $\pi/2 < \omega < \pi$ при возрастании ω главный член



Фиг. 1

асимптотики вначале сингулярен, то есть его первые производные (деформации и напряжения) стремятся к бесконечности при приближении к вершине угла, а затем он становится регулярным ($u \in W_2^2(K)^2$), ρ_l выходит из полосы $0 < \mathrm{Im}\,\rho_l < 1$. После комплексного ветвления минимального корня ρ_l, быстроосциллирующий главный член асимптотики вновь становится сингулярным.

В заключение необходимо отметить, что на наличие подобного эффекта не указано в известной литературе, посвященной исследованию решений в окрестности угловой точки границы [4, 5]. Кроме того, качественная картина поведения решений в окрестности угловой точки для плоского напряженного состояния, изученная в [6], во многом отличается от случая плоской деформации.

THE EFFECT OF THE NON-MONOTONOUS BEHAVIOUR ON SINGULAR INDEX IN THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE ANGLE

V. B. BERKOUN, V. A. POPOV

ԵԶՐԻ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿԵՏԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐՈՒԹՅԱՆ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՈՉ ՄՈՆՈՏՈՆ ՎԱՐՔԻ ԷՖԵԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Բ. ԲԵՐԿՈՒՆ, Վ. Ա. ՊՈՊՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկված է սեպի համար առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններով երկչափ խնդիր՝ հարթ դեֆորմացիայի դեպքում։ Հետազոտված է բնութագրիչ հավասարման սինգուլյար արմատների վարքը։ Հայտնաբերված է սինգուլյար արմատների՝ անկյան մեծությունից ոչ մոնոտոն կախվածության էֆեկտը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.—Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. *16*, с. 209—292.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками — Math. Nachr., 1977, Bd. 76, s. 29—60.
3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1982. 688 с.
5. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension.—J. Appl. Mech., 1952, v. 19, № 4 p. 526—528.
6. *Тер-Акопянц Л. Г.* О корнях характеристических уравнений упругого клина — Вестник Ленинградского гос. университета, 1983, № 7, с. 116—118.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
31.V.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ ДАВЛЕНИЯ

АЗАТЯН Л. Д., АВЕТИСЯН Д. К.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального проектирования круглых пластин из композиционного материала, закрепленных в жесткой стенке, при взаимодействии с акустической волной давления.

Предполагается, что пластинка состоит из $2n$ слоев, поочередно армированных в радиальном и окружном направлениях. Элементарные слои, армированные как в радиальном, так и в окружном направлениях, имеют одинаковое содержание армирующего материала в единице объема, то есть упругие характеристики этих слоев в ортогональных направлениях одинаковы. Величина $\xi = k_1/k$ определяет относительную толщину радиально армированных слоев пластинки в пакете.

Принимается, что в акустической среде в направлении оси z движется волна, которая в момент времени $t=0$ достигает поверхности пластинки.

Решается задача нахождения оптимальной пластинки заданного веса из условия

$$\min_{\xi} \max_{t,r} w(t, r, \xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad t \geqslant 0$$

Результаты расчетов показывают, что оптимальным выбором параметра ξ можно существенно увеличить жесткость пластинки.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за № 5057—В 57 от 14 марта 1987 г.

Поступила в редакцию
6.II. 1987