

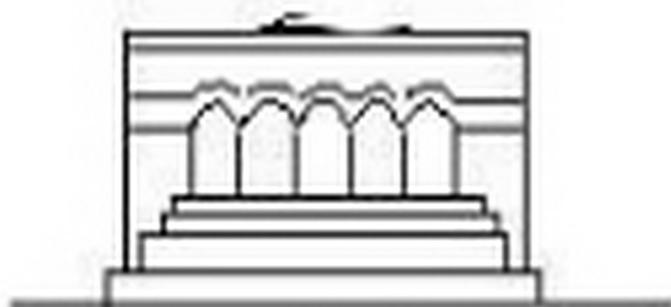
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1987

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТОМЯГКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ՄԿՐՏՅԱՆ Ս. Ա

В работе, исходя из общих нелинейных уравнений возмущенного состояния, выведены линеаризованные уравнения устойчивости магнитомягкой сферической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение оболочки в начальном однородном магнитном поле. Установлена возможность потери устойчивости возмущенного состояния. Получена формула для определения критического значения напряженности внешнего магнитного поля.

1 Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R , изготовленная из магнитомягкого материала, находится в стационарном неоднородном магнитном поле H_0 . Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Ортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2 (α_1 — полярный угол, α_2 — азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливой гипотеза недеформируемых нормалей. Принимается, что силы, с которыми магнитное поле действует на токи проводимости, пренебрежимо малы по сравнению с силой, обусловленной намагниченностью материала оболочки [1, 2].

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве. Это изменение приводит к наложению на начальное поле H_0 магнитного поля H^0 , создаваемого намагничиванием тела. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0$ должно удовлетворять следующим уравнениям магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

где \vec{B} — вектор магнитной индукции. В вакууме векторы \vec{B} и \vec{H} свя-

заны соотношением $\vec{B} = \mu \vec{H}$, а в магнитном материале $-\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, где \vec{M} —вектор намагниченности, μ —универсальная постоянная. Для магнитомягких ферромагнитных материалов с линейной характеристикой [1, 2] $\vec{M} = \chi \vec{H}$ или $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$, где χ —магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ —относительная магнитная проницаемость материала оболочки. На основе этой модели ферромагнетизма невозмущенное магнитное поле определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0, & \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{H}^{(0)} &= \vec{H}_0 \\ [\vec{B}^{(0)} - \vec{B}^{(1)}] \cdot \vec{n}_0 &= 0, & [\vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}] \times \vec{n}_0 &= 0 & \text{при } \vec{r} \in S \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \vec{n}_0 —единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, \vec{r} —радиус-вектор рассматриваемой точки, индекс «1» обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое оболочкой), а индекс «0»—к внешней области (пространство вне оболочки).

Вследствие того, что магнитная проницаемость материала оболочки μ , отлична от единицы ($\mu \gg 1$), на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этими разрывами обусловлено появление магнитного давления P_0 , определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = [\vec{T}^{(0)} - \vec{T}^{(1)}] \cdot \vec{n}_0 \quad (1.3)$$

где \vec{T}^0 —тензор напряжений Максвелла невозмущенного состояния

$$T_{ik}^0 = H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (1.4)$$

δ_{ik} —символ Кронекера.

Под действием нагрузки P_0 в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещений \vec{u}_0 и тензором упругих напряжений $\vec{\tau}^0$. Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформаций поверхностей, ограничивающих оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности S :

$$\operatorname{div} \vec{\tau}^0 = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{\tau}^0 \cdot \vec{n}_0 = \vec{P}_0 \quad \text{при } \vec{r} \in S \quad (1.6)$$

Характеристики возмущенного состояния ($\vec{u}_0 + \vec{u}$, $\vec{\tau}^0 + \vec{\tau}$, $\vec{P}_0 + \vec{P}$, $\vec{H} + \vec{h}$) должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным

условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работам [3, 4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}[\vec{\varepsilon} + 2(\nabla \vec{u})^*] - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

во всем пространстве

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.8)$$

Решения уравнений (1.7) и (1.8) связаны следующими линейными условиями на поверхностях $\alpha_i = \pm h$ оболочки:

$$\varepsilon[\vec{E} - \vec{T}^{(0)} - \vec{T}^{(1)}] \vec{n}_0 = 0 \quad (1.9)$$

$$\{\rho, \vec{h}^{(0)} - \vec{h}^{(1)} + [\mu, \vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}](\nabla \vec{u})^* + \vec{u} \nabla \{ \rho, \vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)} \} \} \cdot \vec{n}_0 = 0 \quad (1.10)$$

$$\{ \vec{h}^{(0)} - \vec{h}^{(1)} + [\vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}](\nabla \vec{u})^* + \vec{u} \nabla [\vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(1)}] \} \times \vec{n}_0 = 0 \quad (1.11)$$

Здесь

$$\vec{\varepsilon} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{E} + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^* \right] \quad (1.12)$$

$$\vec{T}_{ik} = h_i \beta_k + h_k \beta_i - \lambda_{ik} \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (1.13)$$

где \vec{E} — единичный тензор, ∇ — набла-оператор Гамильтона, $(\nabla \vec{u})^*$ — транспонированный тензор $\nabla \vec{u}$, \vec{T} — тензор напряжений Максвелля возмущенного состояния.

2. Пусть для рассматриваемой оболочки справедливы гипотеза Кирхгофа-Лява и допущение Кармана относительно углов поворота $2\omega = \operatorname{rot} \vec{u}$, то есть принимается, что справедливы следующие приближенные соотношения:

$$u_1 = \left(1 + \frac{z_2}{R}\right) u - \frac{z_2}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = \left(1 + \frac{z_1}{R}\right) v - \frac{z_1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = 0 \quad (2.1)$$

где $u(x_1, z_2, t)$, $v(x_1, z_1, t)$, $w(x_1, z_2, t)$ — искомые тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, u_1 , u_2 , u_3 — перемещения произвольной точки оболочки, $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) условия (1.10), (1.11) принимают следующий вид на поверхностях $\alpha_i = \pm h$:

$$h_1^{(0)} = h_1^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)} w), \quad h_2^{(0)} = h_2^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)} w)$$

$$h_3^{(0)} = \frac{1}{\mu_r} h_3^{(e)} + \frac{\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)} A_1 w) \right] \quad (2.2)$$

Подставляя (1.12) и (2.1) в (1.7) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.9) и (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial \delta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (1 - \nu_r)}{2E h \nu_r} \left[\frac{H_3^{(e)+}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_3^{(e)-}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)-} w) + \frac{\nu_r H_1^{(e)+}}{A_1 A_2} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] - \frac{\nu_r H_1^{(e)-}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \right] = 0$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial \delta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (1 - \nu_r)}{2E h \nu_r} \left[\frac{H_3^{(e)+}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_3^{(e)-}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)-} w) + \frac{\nu_r H_2^{(e)+}}{A_1 A_2} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] - \frac{\nu_r H_2^{(e)-}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \delta - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{1 - \nu^2}{2E h} \left[\frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{2\nu^0}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{(1 - \nu^2) \nu_0 (\nu_r - 1)}{2E h \nu_r} \left[\nu_r \left[H_1^{(e)+} h_1^{(e)+} - H_1^{(e)-} h_1^{(e)-} + H_2^{(e)+} h_2^{(e)+} - \right. \right.$$

$$\left. - H_2^{(e)-} h_2^{(e)-} \right] + H_3^{(e)+} h_3^{(e)+} - H_3^{(e)-} h_3^{(e)-} + \nu_r \left[\frac{H_1^{(e)+}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_1^{(e)-}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \times \right.$$

$$\times (H_3^{(e)-} w) + \frac{H_2^{(e)+}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)+} w) - \frac{H_2^{(e)-}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (H_3^{(e)-} w) \left. \right] -$$

$$- \frac{H_3^{(e)+}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)+} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)+} A_1 w) \right] + \frac{H_3^{(e)-}}{A_1 A_2} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_1^{(e)-} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_2^{(e)-} A_1 w) \right] \left. \right] = 0$$

Здесь

$$\theta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 v) \right] + \frac{2w}{R}$$

$$\Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right]$$

T_{11}^0 , T_{22}^0 , S^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, индексами «+», «-» отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки.

Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения составляющих индуцированного магнитного поля $\vec{h}^{(+)}$ и $\vec{h}^{(-)}$ на поверхностях оболочки. Введем потенциалы функций $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$ посредством

$$\vec{h}^{(+)} = \text{grad} \Phi^{(+)}, \quad \vec{h}^{(-)} = \text{grad} \Phi^{(-)} \quad (2.4)$$

задачу определения возмущенного магнитного поля, согласно (1.8) и (2.2), приводим к решению уравнений

$$\Delta_1 \Phi^{(+)} = 0, \quad \Delta_1 \Phi^{(-)} = 0 \quad (2.5)$$

с условиями на поверхностях $z_3 = \pm h$

$$\Phi^{(+)} = \Phi^{(-)} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} H_3^{(+)} w, \quad \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (H_1^{(+)} A_2 w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (H_2^{(+)} A_1 w) \right] \quad (2.6)$$

где Δ_1 — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат.

Найдя решения уравнений (2.5), удовлетворяя граничным условиям (2.6), а также условиям затухания возмущений на бесконечности и ограниченности их в области $z_3 < -h$, определим потенциалы возмущенного магнитного поля $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$

$$\Phi^{(+)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[C_{\xi\gamma} \left(\frac{R+z_3}{R-h} \right)^{\xi} + D_{\xi\gamma} \left(\frac{R+h}{R+z_3} \right)^{\xi-1} \right] P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2$$

$$\Phi^{(-)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[\Phi_{\xi\gamma}^{(+)} \left(\frac{R+h}{R+z_3} \right)^{\xi+1} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \right] \quad \text{при } z_3 > h$$

$$\Phi^{(-)} = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \left[\Phi_{\xi\gamma}^{(+)} \left(\frac{R+z_3}{R-h} \right)^{\xi} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \right] \quad \text{при } z_3 < -h \quad (2.7)$$

Здесь $P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1)$ — присоединенные функции Лежандра.

$$C_{\xi\gamma} = \frac{1}{\Delta_{\xi\gamma}} \left[-\frac{a_{\xi\gamma}}{R-h} \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)^{\xi} b_{\xi\gamma}}{\mu_r(R+h)} \right]$$

$$D_{\xi\gamma} = \frac{1}{\Delta_{\xi\gamma}} \left[\frac{n(1-\mu_r)^{\xi+1} a_{\xi\gamma}}{\mu_r(R-h)} + \frac{b_{\xi\gamma}}{R+h} \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \right], \quad \lambda = \frac{R-h}{R+h}$$

$$\Delta_{1\xi} = \frac{\lambda - \xi}{R - h} \left(\xi + \frac{\xi + 1}{\mu_r} \right) \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{\xi(\xi + 1)^{\xi}}{R + h} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right)^2$$

$$\Phi_{\xi\tau}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_{1\xi}} \left\{ -\frac{Q_{\xi\tau}}{(R-h)^{\xi}} \left[\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} + \frac{\xi(\mu_r - 1)^{\xi+1}}{\mu_r} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{\xi\tau}}{R+h} \left[\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)}{\mu_r} \right] \right\} + \frac{1-\mu_r}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^+$$

$$\Phi_{\xi\tau}^{(2)} = -\frac{1}{\Delta_{1\xi}} \left\{ \frac{a_{\xi\tau}}{R-h} \left[\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} + \frac{\xi(1-\mu_r)}{\mu_r} \right] + \frac{b_{\xi\tau}}{(R+h)^{\xi+1}} \left[\xi + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\xi+1}{\mu_r} + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)^{\xi+1}}{\mu_r} \right] \right\} + \frac{1-\mu_r}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^- \quad (2.8)$$

$$a_{\xi\tau} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \left[\frac{\xi + 1}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^+ + \frac{R+h}{R} f_{\xi\tau}^+ \right], \quad b_{\xi\tau} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \left[-\frac{1}{\mu_r} \Psi_{\xi\tau}^- + \frac{R-h}{R} f_{\xi\tau}^- \right]$$

$$f_{\xi\tau} = \frac{1}{\|Y_{\xi\tau}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} H_1^{(\sigma)} w \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_2^{(\sigma)} w) \right] P_{\xi,1}(\cos \alpha_1) \cos \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\Psi_{\xi\tau} = \frac{1}{\|Y_{\xi\tau}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H_3^{(\sigma)} w P_{\xi,1}(\cos \alpha_1) \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\|Y_{\xi\tau}\|^2 = \frac{2-z_1}{2\xi+1} \frac{(\xi+\tau)!}{(\xi-\tau)!}, \quad z_1 = \begin{cases} 2 & \text{при } \tau=0 \\ 1 & \text{при } \tau>0 \end{cases}$$

Подставляя (2.4) в систему (2.3) с учетом (2.7) и (2.8), получим замкнутую двумерную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений устойчивости относительно некоторых функций u , v , w . Ее решения должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

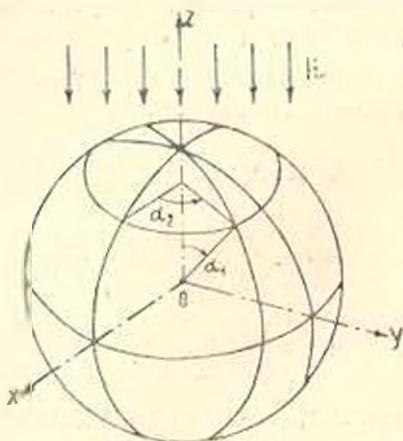
3. На основе полученной системы рассмотрим задачу статической устойчивости магнитомягкой сферической оболочки в однородном магнитном поле с напряженностью \vec{H}_0 (фиг. 1)

$$\vec{H}_0 = H_0 (\sin \tau_3 \cdot \vec{e}_1 - \cos \tau_3 \cdot \vec{e}_3)$$

$$H_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

где \vec{e}_i — единичные векторы по направлениям z_i ($i=1, 2, 3$).

Невозмущенное магнитное поле определяется из решения задачи (1.2), и имеет вид



Фиг. 1

$$\vec{H}^{(v)} = \frac{3H_0(1+2\nu_r)}{\Delta_0} \left\{ \left[1 + \frac{2(1-\nu_r)}{1+2\nu_r} \left(\frac{R-h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \cos \alpha_1 \vec{e}_3 - \right. \\ \left. - \left[1 + \frac{\nu_r-1}{1+2\nu_r} \left(\frac{R-h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2 \right\}$$

$$\vec{H}^{(v)} = \frac{9\nu_r H_0}{\Delta_0} (\cos \alpha_1 \cdot \vec{e}_3 - \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2) \quad \text{при } \alpha_3 < -h$$

$$\vec{H}^{(v)} = -H_0 \left\{ \left[1 + \frac{2(1+2\nu_r)(1-\nu_r)(1-i^3)}{\Delta_0} \left(\frac{R+h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \cos \alpha_1 \cdot \vec{e}_3 - \right. \quad (3.2)$$

$$\left. - \left[1 + \frac{(1+2\nu_r)(\nu_r-1)(1-i^3)}{\Delta_0} \left(\frac{R+h}{R+\alpha_3} \right)^3 \right] \sin \alpha_1 \cdot \vec{e}_2 \right\} \quad \text{при } \alpha_3 > h$$

где $\Delta_0 = 2(\nu_r - 1)^2 i^3 - (2\nu_r + 1)(\nu_r + 2)$.

Подставляя (3.2) в (1.3) и (1.4), находим следующие значения для поверхностных сил, действующих на оболочку в невозмущенном состоянии:

$$\vec{P}_0 = q_0 \begin{cases} (\mu_r \mu_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \mu_2^2 \sin^2 \alpha_1) \vec{n}_0 & \text{при } \alpha_3 = h \\ 9\mu_r (\cos^2 \alpha_1 + \mu_r \sin^2 \alpha_1) \vec{n}_0 & \text{при } \alpha_3 = -h \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\mu_1 = 1 + 2\nu_r + 2i^3(1-\nu_r), \quad \mu_2 = 1 - 2\nu_r + i^3(\nu_r-1), \quad q_0 = \frac{9\nu_r(\nu_r-1)H^2}{2\Delta_0}$$

В исходную систему (2.3) входят неизвестные усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 невозмущенного состояния. Их определяем, решая задачу (1.5) — (1.6). Принимая невозмущенное состояние оболочки безмоментным и усредняя уравнение (1.5) по толщине оболочки, с учетом (1.6) и (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 T_1^0) - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} T_2^0 + A_1 \frac{\partial S^0}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 T_2^0) + \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 S^0) + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} S^0 = 0 \quad (3.4) \\ \frac{T_1^0 + T_2^0}{R} = q_0 i^3 \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right]$$

где $\mu = \mu_r(\mu_1^2 - 9)$, $\gamma = (\mu_2^2 - 9\mu_r)/\mu$.

Решение уравнений (3.4) имеет вид

$$T_1^0 = \frac{q_0 R \mu}{4} \left[1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right], \quad S^0 = 0 \\ T_2^0 = -\frac{q_0 R \mu}{4} \left[1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 - 3\gamma \frac{A_2^2}{A_1^2} \right] \quad (3.5)$$

Подстановкой (3.5), (3.2) в систему (2.3) с учетом (2.4), (2.7) и исключением неизвестных u и v рассматриваемая задача устойчивос-

ти сводится к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения w :

$$\begin{aligned} & \left[\delta^2(\Delta+1)^2 + 1 \right] (\Delta+2)w - \frac{q_0 R_0^2}{Eh} \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \Delta w - \right. \\ & - \frac{3A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + \left. \left[1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w \right] + \gamma \left[\frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \frac{5A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + \right. \\ & + 4 \left(1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \right) w \left. \right] - \frac{q_0 R(1-\nu_r)}{Eh \mu_r} (\Delta+1-\nu) \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{\Phi}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} - \right. \\ & - \frac{\gamma_1 \mu_r}{1-\mu_r} \left[1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w \left. \right] - \frac{q_0 R \mu_r}{4Fh} (\Delta+1-\nu) \left[\Delta w + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \Delta w \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} F_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2, \quad \lambda^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2} \\ \Phi &= \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \Phi_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos z_1) \cos \gamma \alpha_2, \quad \gamma_1 = \mu_r (9\mu_r - \mu_1 \mu_2) \\ F_{\xi\gamma} &= [\mu_1 (\xi+1) \mu_{1\xi} + 3\xi \mu_{2\xi} + \gamma_1] I_{\xi\gamma}^{(2)} + (3\mu_r \mu_{2\xi} - \mu_2 \mu_{1\xi}) I_{\xi\gamma}^{(1)} \\ \Phi_{\xi\gamma} &= [(\xi+1)(\mu_{3\xi} + \mu_{1\xi}) \mu_1 + 3\xi \mu_{4\xi} + 9\mu_r] I_{\xi\gamma}^{(3)} + (\mu_r \mu_{4\xi} - \mu_2 \mu_{3\xi}) I_{\xi\gamma}^{(1)} \\ I_{\xi\gamma}^{(1)} &= \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} w \right) P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 dz_1 dz_2 \\ I_{\xi\gamma}^{(2)} &= \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} w P_{\xi\gamma}(\cos \alpha_1) \cos \gamma \alpha_2 \sin \alpha_1 dz_1 dz_2 \\ \mu_{1\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left[\left(\xi+1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) + \frac{\xi(1-\mu_r)}{\mu_r \lambda^{\xi+1}} \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right] \\ \mu_{2\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left[\frac{(\xi+1)(\mu_r-1)\lambda^{\xi}}{\mu_r} \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) - \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right] \\ \mu_{3\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left\{ \left(\xi+1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] + \frac{\xi(\mu_r-1)\lambda^{\xi+1}}{\mu_r} \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] \right\} \\ \mu_{4\xi} &= \frac{1}{R \Delta_{1\xi}} \left\{ \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)}{\mu_r \lambda^{\xi}} \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Решение уравнения (3.6) представим в виде разложения

$$w = \left(\sum_{n=l}^{\infty} w_n P_{nk}(\cos z_1) \right) \cos k z_2, \quad (k \leq n, \quad i=2, 3, \dots) \quad (4.1)$$

где w_m — неизвестные коэффициенты. $P_{nk}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.6) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно w_m :

$$\Omega_m^2 w_m - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{(k)} w_n = 0, \quad (m=l, l+1, l+2, \dots, k \leq n) \quad (4.2)$$

где

$$\Omega_m^2 = \frac{E}{\rho R^2} (i_m - 2) \frac{1 + 2\gamma(i_m - 1)^2}{i_m - 1 + \gamma}, \quad i_m = m(m+1)$$

$$b_{mn}^{(k)} = \frac{q_0}{\rho R h} \frac{i_m - 1 + \gamma}{i_m - 1 + \gamma} [A_{kn}^{(1)} \delta_{m,n} + A_{kn}^{(2)} \delta_{m,n-2} + A_{kn}^{(3)} \delta_{m,n+2}] \quad (4.3)$$

В (4.3) Ω_m — частота собственных колебаний оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, $\delta_{i,j}$ — символы Кронекера

$$A_{kn}^{(1)} = -\frac{\mu}{4\Delta_0^2(4i_n - 3)} \left\{ 3i_n(i_n - 1) + i_n^2 \gamma + (5i_n - 6)(\gamma - 1) - \frac{8(1+\gamma)}{i_n - 1 + \gamma} [i_n(1 - \gamma) + (2i_n - k^2) + (6 - \gamma)i_n - 1, 5k^2(\gamma + 5)] + \frac{8\gamma}{\mu} (3i_n^2 - k^2 - 2) \right\} + B_{kn}$$

$$A_{kn}^{(2)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)\mu}{8(4n^2-1)} \left\{ (i_n - 2n - 2)(1 - \gamma) + \frac{8(1+\gamma)(n-2)[n - \gamma(n-1)]}{i_n - 1 + \gamma} + \frac{8\gamma}{\mu} \right\} - B_{kn}^{(2)}$$

$$A_{kn}^{(3)} = -\frac{(n-k+1)(n-k+2)\mu}{8(2n+1)(2n+3)} \left\{ (i_n + 2n)(1 - \gamma) + \frac{8(1+\gamma)(n+3)[n+1 - \gamma(n+2)]}{i_n - 1 + \gamma} + \frac{8\gamma}{\mu} \right\} - B_{kn}^{(3)}$$

$$B_{kn} = \frac{1}{\Delta_0^2(2n+1)} \left\{ \frac{n^2 - k^2}{2n-1} [(n-1)a_n - c_n] + \frac{(n-k+1)(n+k+1)}{2n+3} [(n+2)b_n + d_n] \right\}$$

$$B_{kn}^{(1)} = \frac{(n+k)(n+k-1)}{4n^2-1} (na_n + c_n), \quad B_{kn}^{(2)} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n+3)} [(n+1)b_n - d_n]$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ [n\mu_1 + (n-1)\mu_2] \left[\frac{(n-1)(\mu_r - 1)}{\mu_r i^{n-1}} \left(\mu_r + \frac{3\mu_r}{\lambda^n} \right) - \left(n - \frac{n-1}{\mu_r} \right) \left(3\mu_r - \frac{\mu_r}{i^{n-1}} \right) \right] + 3(n-1)(\mu_r - 1) \left[\frac{n(\mu_r - 1)\lambda^{n-1}}{\mu_r} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(3\mu_r - \frac{\mu_r}{\lambda^{n-1}} \right) - \left(n-1 + \frac{n}{\mu_r} \right) \left(\mu_r + \frac{3\mu_r}{\lambda^n} \right) \right] \right\} - \frac{\gamma_1(1-\nu_r)}{\mu_r} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (\nu_1 - \nu_2) \left[\left(n + 2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) + \frac{(n+1)(1-\nu_r)}{\nu_r \lambda^{n+2}} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + 3[n+1 + (n+2)\nu_r] \left[\frac{(n+2)(\nu_r-1)\lambda^{n+1}}{\nu_r} \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \right. \\
&\left. - \left(n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] \left. \right\} + \frac{\nu_2(1-\nu_r)}{\nu_r} \\
c_n &= \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ (n-1)(\nu_r-3) \left[\left(n-1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{n(\nu_r-1)}{\nu_r \lambda^{n-1}} \left(3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) \right] - [(n-1)\nu_2 + n\nu_1] \left[\left(n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) \left(3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) + \right. \\
&\left. + \frac{(n-1)(\nu_r-1)\lambda^n}{\nu_r} \left(n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) \right] \left. \right\} + (\nu_r-1)(n\nu_1^2+9) \\
d_n &= \frac{1}{\Delta_{1n}} \left\{ (n+2)(\nu_1-\nu_2) \left[\left(n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left(3n-3 + \frac{n\nu_1+2\nu_1}{\lambda^{n+1}} \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{(n+1)(\nu_r-1)\lambda^{n+2}}{\nu_r} \left(n\nu_1+2\nu_1 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + [(n+2)\nu_r+3(n-1)] \left[\left(n+1 + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1+2\nu_1 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+2}} \right) + \frac{(n+2)(\nu_r-1)}{\nu_r \lambda^{n+1}} \left(3n+3 + \frac{n\nu_1+2\nu_1}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \left. \right\} + \\
&+ (1-\nu_r)[(n+2)\nu_1^2+9] \\
\Delta_{2n} &= \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)\lambda^{n-1}} \left(n-1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) + \frac{n(n-1)(1-\nu_r)\lambda^{n-1}}{\nu_r} \\
\Delta_{3n} &= \frac{\nu_r}{(1+\nu_r)\lambda^{n+1}} \left(n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) + \frac{(n+1)(n+2)(1-\nu_r)\lambda^{n+1}}{\nu_r}
\end{aligned}$$

Условием существования нетривиального решения системы (4.2) является равенство нулю следующего бесконечного определителя:

$$|\delta_{mn} + c_{mn}| = 0 \quad (4.5)$$

где $c_{mn} = -b_{mn}^{(k)} / \Omega_m \Omega_n$.

В силу (4.3) и (4.1) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (4.5), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (4.5) в первом приближении ($n=m=i$) для критического значения внешнего магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость, получим следующую формулу:

$$H_{0k} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2Ek(\nu_n-2)}{2\nu_r k(\nu_r-1)\lambda_{kn}} \frac{1+\epsilon^2(\nu_n-1)^2}{\nu_n-1+\nu}}$$

В таблице для оболочки, изготовленной из железоникелевого сплава (пермаллой 68: никеля 68%, железа 32%), для которого $\nu = 2.5 \cdot 10^4$, приведены минимальные значения H_{0k} по числам волн n и k при различных отношениях h/R .

STABILITY OF WEAK-FERROMAGNETIC SPHERICAL SHELL IN THE UNIFORM MAGNETIC FIELD

P. A. MIKRTCHIAN

ՀԱՄԱՍԵՐ՝ ԽՍՔՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ ՄԱԳՆԵԻՍԱԳԵՍ ՓՍՓՈՒԿ ԴԵՒՈՅԻՆ ԹԱՂԱՆՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Պ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Այնպիսի զրգռված վիճակի բնագծանույր ոչ զծային հավասարումներից, ստացված են մագնիսապես փափուկ պնդային թաղանթի պծայնացված կայունության հավասարումները ստացիոնար անհամասեռ մագնիսական դաշտում: Իրանց հիման վրա հետազոտված է թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում և փաստված է կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը:

Ստացված է բանաձև՝ արտաբին մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքի որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мун, Пао И-синь. Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки. Прикл. механика, 1968, № 1.
2. Мун, Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле. Прикл. механика, 1969, № 1.
3. Амбарцумян С. А.; Багдасарян Г. Е., Белубегян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, 38, № 5, с. 22—32.

Երևանский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.III.1987

УДК 539.3:532.59

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ,
 СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ С ПРИМЕСЯМИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Нелинейные волны в диспергирующих средах являются сложным процессом и даже в случае малых возмущений возможны качественно различные картины волнового движения, возникшего из начального монохроматического профиля:

а) в случае значительной дисперсии волна меняется медленно и амплитуды огибающих пакетов удовлетворяют уравнениям модуляции;

б) в случае большого значения параметра нелинейности синусоидальный профиль превращается в солитоны, которые описываются уравнением совершенно иного вида—КдВ [1—3].

Для пластин и оболочек различные аспекты первого типа задач исследованы в [4—6] и др. В частности, показано, что как правило, для металлических пластин и оболочек волны модуляции неустойчивы, в то время как для биологических сред устойчивы.

В настоящей работе для цилиндрической оболочки, содержащей жидкость с примесью, изучаются задачи развития возмущений с сильной и слабой нелинейностями. Получены уравнения КдВ и модуляции и обоснованы возможности применения уравнений к различным задачам, в частности, к гемодинамическим.

1. Основные уравнения

Рассмотрим движение смеси несжимаемой жидкости с деформируемыми (жидкость или газ) частицами в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке в предположении равенства скоростей компонент смеси. Как известно, плотность смеси определяется формулой [7, 8]

$$\rho = \rho_f(1 - \beta) + \rho_c \beta, \quad \rho_c = \text{const} \quad (1.1)$$

где ρ_f , ρ_c — плотности несущей жидкости и примеси, а β — концентрация примеси.

Определяющие соотношения для смеси в предположении политропности колебания частиц включений можно брать в виде [7, 8]

$$P_c = \rho_c^n \text{const}, \quad \rho_c = \frac{\text{const}}{r^n}, \quad \frac{1 - \beta}{\beta \rho_c} = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь r — радиус частиц, n — показатель политропы.

Вообще говоря, для газовых пузырьков в жидкости [7, 8] давление в пузырьках P_c связано с давлением смеси P уравнением Рс-14

ля, которое после отбрасывания нелинейных и вязких членов имеет вид

$$P_x = P - \gamma r \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Одномерные уравнения движения оболочки и жидкости берем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho_0 + \rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ (w + R) \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\rho_0 + \rho) \frac{\partial w}{\partial t} + (v_0 + v)(R + w) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + (\rho_0 + \rho)(R + w) \frac{\partial v}{\partial x} + 2(\rho_0 + \rho)(v_0 + v) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma_2 x + \frac{Eh}{R^2} w - \gamma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P + \gamma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ρ_0 , v_0 , P_0 — начальная плотность, скорость и давление смеси, R — начальный радиус оболочки

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2Eh^3}{81(1-\nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3h^3}{10} A^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + [2A^2(1-3\nu^2) + B^2 - 6\nu AB] \left(\frac{w}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + \\ + \frac{8Eh}{27R(1+\nu)} \left\{ [2A^2(1+\nu^2) - 4\nu AB(1+\nu^2) + 2B^2\nu^2] \left(\frac{w}{R} \right)^2 + \frac{h^2}{12} [2A^2(1+ \right. \\ & \left. + 3\nu^2) - 6\nu AB + B^2] \frac{w}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \\ A &= \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}, \quad B = \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2} \end{aligned}$$

Система (1.3) отличается от известных уравнений движения оболочки с жидкостью тем, что для включений давление связано с плотностью уравнениями (1.2). Как будет показано ниже, для металлических оболочек в вопросах нелинейности и дисперсии это является определяющим.

На основании (1.2) и (1.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{n}{\rho_x} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} &= \frac{1}{P_x} \frac{\partial P_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = (3-1) \frac{\rho}{nP_x} \frac{\partial P_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{nP_x}{3[\rho_f + \rho(\rho_x - \rho_f)]}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = - \frac{r}{3nP_x} \frac{\partial P_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.4)$$

и такие же соотношения для производных по x .

2. Уравнение коротких волн

Для изучения решения (1.3) при наличии (1.4) вблизи фронта волны следует ввести новую переменную

$$\tau = t - \frac{x}{a} \quad (2.1)$$

где a — возмущающая скорость волны, и оставить в уравнениях главные по порядку величины ($P \approx P_0$). Тогда получаются соотношения

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{P}{\rho_0 a} = \frac{Ekw}{\rho_0 a R^2}, \quad V_0 = 1 - \frac{v_0}{a} \\ \beta &= \frac{P}{c_0^2}, \quad c_0^2 = \frac{n P_0}{\rho_0 [\rho_1 + \rho_0 (\rho_2 - \rho_1)]} \\ \beta &= (\beta_0 - 1) \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad r = -\frac{r_0}{3\rho_0} \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\beta = \beta_0 - \beta_1$, $r = r_0 + r_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$ и формулы для скорости волны

$$\frac{1}{a^2} = V_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_1^2} \right), \quad c_1^2 = \frac{Eh}{2\rho_0 R} \quad (2.3)$$

В уравнениях (1.3), записанных в переменных (x, τ) , подставляя в нелинейные и дисперсионные слагаемые (1.5), оставляя в них лишь производные по τ и исключая $\partial \rho / \partial z$ и $\partial \omega / \partial z$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \eta v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \delta \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} + \frac{\gamma_2}{\rho_0 a} \bar{v} = 0 \quad (2.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{H_1}{A_1}, \quad \gamma = \gamma_1 + \frac{C_1}{A_1}, \quad \delta = \frac{D_1}{A_1}, \quad A_1 = \frac{\rho_0 a}{c_1^2} V_0 + \frac{2R\rho_0 \gamma_0 a^2}{Eh} V_0 + 1 - \frac{1}{V_0} \\ B_1 &= V_0 \left(\frac{3a^2}{c_0^2} V_0^2 \frac{R\rho_0}{Eh} - \frac{2}{c_0^2} - \frac{5R\rho_0}{Eh} - \frac{V_0^2 \rho_0 a^2}{c_1^2} \right) \\ C_1 &= \frac{aR}{2\rho_0 c_{1x}^2} V_0^2 \left(\frac{T_0}{a^2} - \bar{\rho} h \right), \quad D_1 = -\frac{1}{2\rho_0 c_{1x}^2} V_0^2 \frac{D}{a^2}, \quad \gamma_1 = -\frac{\rho_1}{3\rho_0 c_0^2} V_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

\bar{v} есть значение $\frac{\partial v}{\partial \tau}$, в котором ω заменено на v по (2.2) и при-

нято $\frac{\partial}{\partial x} \approx -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Уравнение (2.4) описывает длинноволновые возмущения и при не синусоидальных волнах последний член можно отбросить (задача второго типа). В частном случае, когда жесткость оболочки мала, из (2.4) получаем уравнение КдВ [1]

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \eta v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.6)$$

которое с использованием соотношения $\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \tau}$ и заменой переменных

$$\xi = -\frac{a}{l} \tau, \quad z = \frac{v'}{l} t, \quad u = -\frac{a^2 \eta}{v'} v \quad (2.7)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.8)$$

где $a^2 = -\frac{\rho v'}{a^2}$, l , v' — постоянные, характеризующие длину и амплитуду начального импульса.

Задавая начальные данные в виде [1]

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi) \quad (2.9)$$

можно получить для больших σ набор солитонов, число которых определяется формулой

$$N = \frac{\sigma}{\pi \sqrt{6}} \int_{\sigma > 0} \sqrt{\varphi} d\xi \quad (2.10)$$

Как известно, уравнение КдВ допускает рассмотрение задач с начальным или граничным условиями. В частности, в (2.9), характеризующем возмущение, локализованное в интервале l можно поменять $l=0$ на $x=0$.

Представляет интерес задача о первоначально синусоидальном возмущении большой амплитуды

$$P_{z=0} = -\gamma_0 \frac{v'}{a\eta} V_0 \sin \xi \quad (2.11)$$

Численный расчет уравнения КдВ показывает [9] распад синусоидального возмущения на солитоны.

Для примера рассмотрим стальную трубу, внутри которой движется жидкость с пузырьками, с небольшой скоростью $V_0 \approx 1$. Принимая $\beta_0 = 0.1$, $\rho_0 R = \rho h$, будем иметь $c_0 = 50$ м · сек⁻¹, $a \approx c_0$. При этом параметр дисперсии $\epsilon = aR^2 \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{c_1^2}{3K^2 c_0^3} \right)$, где $c_1 = \sqrt{E/\rho} = 5 \cdot 10^3$ м · сек⁻¹.

Отсюда видно, что при $r_0/R \gg 10^{-4}$ пузырьковая дисперсия преобладает по сравнению с оболочечной; параметр ϵ может быть сделан достаточно малым, и при этом применима теория модуляций [4—6]. С другой стороны, для кропеносных сосудов, в которых с некоторой точностью эритроциты можно описывать моделью (1.2) (с приведенными значениями радиуса сфер), где жидкие [15] примеси — эритроциты, имеют показатель политропы $n \approx 5$ и скорость звука в трубке $c_1 = 10$ м · сек⁻¹, оболочечная дисперсия является определяющей. Для нестационарных процессов длительностью $t = 2 \cdot 10^{-2}$ сек, принимая $l/R = 20$, $R/h = 10$, получим $\epsilon = 28$, то есть нелинейность велика.

Следует отметить, что для длительных процессов (порядка десятков секунд) величина σ очень большая, что приводит к большим N .

При этом солитоны сливаются и получается ударная волна, имеющая осциллирующую структуру, чем объясняются звуки Коротконова [9].

3. Исследование волн модуляции

В случае монохроматических волн решение (2.4) можно брать в виде волновых пакетов с учетом (2.2)

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1 e^{i\psi} + \bar{w}_2 e^{-i\psi} + \bar{w}_3 e^{2i\psi} + \bar{w}_4 e^{-2i\psi}, \quad \psi = k'x - \omega t \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.4) и приравнивая слагаемые при одинаковых гармониках, можно получить нелинейное уравнение дисперсии для длинных волн ($kR \ll 1$)

$$\omega = \omega_0(k) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w_1^2} \right)_0 w_1^2 \quad (3.2)$$

где ω_0 — линейная частота и $k = k' + \omega/a$

$$\omega_0 = ak + \frac{1}{2} a^4 k^3 - \frac{1}{2} \beta a^4 k^3 \quad (3.3)$$

Следует отметить, что при получении как ω_0 , так и $(\partial \omega / \partial w_1^2)_0$ учтено, что $kR \ll 1$.

В выражении $\left(\frac{\partial \omega}{\partial w_1^2} \right)_0$ слагаемое, соответствующее упругой нелинейности, не связано с нелинейностью жидкости и поэтому его можно получить, как и [4—6]. Тогда выражение $(\partial \omega / \partial w_1^2)_0$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial w_1^2} \right)_0 = -\frac{1}{6} \frac{(Z\gamma)^2}{k^2} + \frac{12\bar{c}D}{h^2} \left[2\omega_0 \left(\bar{c}h + \frac{2\rho_0 R}{m^2} \right) + \frac{4\rho_0 \bar{c}_0}{m} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

$$Z = -\frac{Eh}{\rho_0 a R^2 V_0}$$

$$\bar{c} = \frac{\gamma_1}{9} \left[\frac{\nu_1 h^4 k^5}{20} + \frac{4}{R^4} (1-\nu)^4 (1-\nu) + \frac{h^2 k^4}{R^2} \frac{1-2\nu + 4\nu^3 - 3\nu^4 - 2\nu^5 + 2\nu^6}{(1-\nu)^2} \right]$$

В силу предположения $kR \ll 1$ слагаемое от \bar{c} в (3.4) отброшено.

В [6, 11] приведено неточное значение \bar{c} . Для несжимаемого материала ($\nu=0,5$) формулы (3.4) и работ [6, 11] совпадают и дают

$$\bar{c} = \frac{3\gamma_1}{4R^4} \left[\frac{3}{2} + \frac{h^4 k^5 R^4}{30} + \frac{1}{3} h^2 k^4 R^2 \right] \quad (3.5)$$

что получено в [5].

В случае металлических труб $a \approx c_0$, $\omega_0 \approx c_0 k$ и получится (при $\nu=0,5$)

$$\frac{R^4 k c_0}{c_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial w_1^2} \right)_0 = A_2 + \frac{2}{3} \frac{\bar{c}^2}{1 + \frac{2\rho_0 R}{h(kR)^2}} \quad (3.5)$$

$$A_2 = \frac{1}{8} \frac{3_0^{-1}}{c_0} \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 \left(\frac{\bar{c}}{\rho_0} \right)^2 \left(\frac{h}{r_0} \right)^2, \quad \bar{c} = R^4 c$$

Хотя $\gamma_2 < 0$, первое слагаемое в (3.6) (связанное с жидкостью) намного больше второго и $\partial \omega / \partial \omega_1^2 > 0$. Согласно (3.3) $\frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \approx 6 \cdot a^3 k$ и при отсутствии натяжения ($T_0 = 0$) $\frac{d^2 \omega_0}{dk^2} < 0$, что следует из (2.5).

Таким образом, благодаря изменению знаков обоих множителей (по сравнению с оболочкой без жидкости) вшив имеет место соотношение

$$\frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega_1^2} \right)_0 < 0 \quad (3.7)$$

что приводит к неустойчивости волн модуляции.

Рассмотрим случай биологических сосудов. В этом случае [12] $\epsilon_0 = 0,5$ и $c_0 = 14 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $a = 7 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Как известно [12], при $T_0 \geq 0,18 E h$, $\epsilon > 0$, $\frac{d^2 \omega_0}{dk^2} > 0$ и знак $\frac{\partial \omega}{\partial \omega_1^2}$ определяет устойчивость. Как известно [12], кровеносные сосуды, в основном, состоят из эластика и коллагена, причем нелинейные характеристики их различные (для эластика $\gamma_2 > 0$, а для коллагена $\gamma_2 < 0$). В нормальных условиях влияние эластика преобладает и для всего сосуда $\gamma_2 > 0$. Тогда $\partial \omega / \partial \omega_1^2 > 0$ и имеет место устойчивость волн модуляций. Для малых T_0 и (или) для старых сосудов (преобладание коллагена) имеет место неустойчивость волн. В последнем случае возмущение распадается на солитоны [1, 13]. Для вычисления амплитуды и количества солитонов следует решить уравнение типа Шредингера [1]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + q |\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.8)$$

где $\psi = \omega_1 e^{i\Phi}$, а Φ — добавочная фаза за счет нелинейности,

$$p = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \left(\frac{d\omega_0}{dk} \right)^{-3}, \quad q = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega_1^2} \right)_0 \left(\frac{d\omega_0}{dk} \right)^{-1}, \quad \xi = t - \frac{x}{c_0(t)}$$

Следует [14], возьмем простейший случай прямоугольного импульса

$$\psi(t, 0) = \begin{cases} \psi_1 & \text{для } |t| < t_1/2 \\ 0 & \text{для } |t| > t_1/2 \end{cases}$$

где t_1 — время действия граничного импульса амплитуды ψ_1 .

Тогда решение (3.8) можно записать в виде

$$\psi = s \exp \left(\frac{i}{2} s^2 q x \right) \text{sch} \sqrt{\frac{q}{2p}} \xi$$

$$s = 2\psi_{np} \sqrt{\left(\frac{\psi_1}{\psi_{np}} \right)^2 - \gamma_n^2}, \quad \psi_{np} = \sqrt{\frac{2p}{q}} \frac{\pi}{2t_1}$$

где γ_n — корни уравнения

$$1 \pm \frac{\gamma}{2} \gamma_0 + \gamma_0 / \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \gamma_0^2} = 0$$

При этом число солитонов меньше или равно целой части γ_0/γ_0 .
В случае стальной трубы $c_0/c_1 = 10^{-2}$ имеем

$$\frac{\psi_{np}}{R} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{Rkr_0}{c_1 t_1}$$

откуда видно, что даже для очень малых возмущений получатся солитоны.

Для вышеприведенного биологического материала при малых T_0 , $\gamma_0 = 10^4$, $\gamma = 0,5$, $kR = 1$ пороговое значение амплитуды равно

$$\psi_{np} = \frac{8}{c_1 t_1} \frac{h^2}{8}$$

то есть здесь пороговое значение амплитуд на несколько порядков больше, чем для металлов.

ON THE NON-LINEAR WAVES IN CYLINDRICAL SHELLS CONTAINING FLUID WITH INCLUSIONS

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՎ ՀԵՂՈՒԿ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԳԻԱՆԱՅԻՆ ԹԱՎԱՆԹՈՒՄ
ՈՉ ԳԻԱՅԻՆ ԱՂԻՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՅԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Կլանային թաղանթի համար, որը պարունակում է խառնուրդով հեղուկ փտարկվում են թույլ և ուժեղ ոչ գծայնությունների գրգռումների դարձադարձ ման խնդիրները: Ստացված են կի՛վ և մոդուլյացիաների հավասարումներ և քննարկված են լուծումների օգտագործման հնարավորությունները տարբեր, մասնավորապես հեմոդինամիկայի խնդիրներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1977. 175 с.
2. Пелиновский Е. И., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения.—Таллин: Валгус, 1984. 154 с.
3. Островский Л. А., Сутин А. М. Нелинейные упругие волны в стержнях.—ИММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 531—537.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Уравнения модуляции в нелинейных диспергирующих средах и их применение к волнам в тонких телах.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, №3, с. 169—176.

5. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К устойчивости распространения пульсовой волны. *Механика (Междуз. со. науч. трудов)*, 1982, вып. 1, с. 31—39.
6. Bagdoyev A. G. and Movsisian L. A. Some Problems of Stability of Propagation of Non-Linear Waves in Shells and Plates.—*Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1984, v. 19, № 3, p. 245—253.
7. Ван-Вейнгарден Л. Одномерное течение жидкости с пузырьками газа. Реология суспензий (сб. статей). М.: Мир, 1975, с. 69—103.
8. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, с. 1331—1333.
9. Чугаевский Ю. В. Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. Кишинев: Изд. «Штиинца», 1974, 183 с.
10. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения, М.: Мир, 1981. 624 с.
11. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—*Изв. АН АрмССР, Механика*, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.
12. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
13. Уизем Дж. Линеиные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 612 с.
14. Лукомский В. П. Самоиндуцированная прозрачность при акустическом ядерном резонансе в антиферромагнетиках. Украинский физический журнал, 1979, т. 24, № 7, с. 975—981.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.XI.1986

УДК 539.319

ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение плоской задачи о распространяющейся полубесконечной трещины, на границах которого заданы нормальные импульсы. Соответствующая задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и свертки. В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [2, 3, 7], получено в замкнутом виде решение на оси, направленной вдоль трещины; определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано совпадение полученных формул с частным решением [3] для стоящей трещины. Получено также решение для заданного на трещине касательного импульса.

§1. Определение решения на продолжении трещины для приложенного нормального импульса

Уравнения движения для анизотропной упругой среды в плоской задаче имеют вид [3]

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \left(a = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{C_{22}}{\rho} \right) \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & \left(d = \frac{C_{66}}{\rho}, \quad c = \frac{C_{66} + C_{12}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды.

При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u=0$, $v=0$. На границе трещины имеет место ($y=0$)

$$\begin{aligned} \tau_y = \tau_-(t, x), \quad -\infty < x < l(t) \\ v = v_+(t, x) = 0, \quad x > l(t); \quad \sigma_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $l(t)$ — закон движения края трещины.

Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координате x от компонент смещения по осям x и y

$$u^l; v^l = \int_0^\infty u; v \exp(-st) dt$$

$$\sigma^{LF} = \sigma_{+}^{LF} + \sigma_{-}^{LF}, \quad v^{LF} = v_{+}^{LF} + v_{-}^{LF}, \quad v_{+}^{LF} = 0 \quad (1.7)$$

где v_{\pm}^{LF} и σ_{\pm}^{LF} неизвестны. При этом $v(t, x) = v_{+}(t, x)H[x-l(t)] + v_{-}(t, x)H[l(t)-x]$, $\sigma(t, x) = \sigma_{+}(t, x)H[x-l(t)] + \sigma_{-}(t, x)H[l(t)-x]$, $H(x)$ — единичная функция. Нетрудно заметить, что функция S^{LF} такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям S_{\pm}^{LF} , $P_{\pm}^{LF} = 1/S_{\pm}^{LF}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$P_{+}(t, x) = S_{+}(t, x) = 0 \quad \text{при } x < c_R t \quad (1.8)$$

$$P_{-}(t, x) = S_{-}(t, x) = 0 \quad \text{при } x > -c_R t$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и учитывая (1.8), можно, как и в [1], получить решение поставленной задачи в форме свертки по x, t

$$v_{-} = S_{-} ** (S_{+} ** \sigma_{-}) H(l - x + 0), \quad \sigma_{+} = -P_{+} ** (S_{+} ** \sigma_{-}) H(x - l + 0) \quad (1.9)$$

Так как $D_{\pm}(iq/s)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости iq/s за исключением точек, принадлежащих разрезам $[\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d}]$, с помощью интеграла Коши для неограниченной области имеем

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{u \mp \frac{iq}{s}} du, \quad D_{\pm}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{u \mp \frac{iq}{s}} du$$

$$F_1(u) = \gamma_1(u) \exp(\alpha(u)), \quad F_2(u) = -\gamma_2(u) \exp(-\alpha(u)) \quad (1.10)$$

$$\gamma_1(u) = \frac{\alpha \beta_2^*(u) \sqrt{u^2 - a^{-1}} + (b - K_1 u^2) \sqrt{ab^{-1}} \sqrt{d^{-1} - u^2} \beta_1^*(u)}{\pi \{[(b - K_1 u^2) ab^{-1} (d^{-1} - u^2) + a^2 (u^2 - a^{-1}) (bd)^{-1} \sqrt{\Delta(u)}]\}^{1/2}}$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \ln \left| \frac{\overline{R(\xi)}}{R(\xi)} \frac{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)} \right| \frac{d\xi}{\xi - u}$$

$$\beta_1^*(u) = -i\beta_1(q, s), \quad q = u, \quad s = i; \quad \beta_2^*(u) = -i\beta_2(q, s), \quad q = iu, \quad s = 1$$

§2. Решение на оси для нормального импульса на границе трещины

Вычисление оригиналов $S_{\pm}(t, x)$, $P_{\pm}(t, x)$ проводится так же, как и в [1] и имеет вид

$$S_{+}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - t/x}} H(c_R^{-1} - t/x) - \int_{t/x}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - t/x}} du \right] H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (2.1)$$

УДК 539.319

ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение плоской задачи о распространяющейся полубесконечной трещины, на границах которой заданы нормальные импульсы. Соответствующая задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и сверток. В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [2, 3, 7], получено в замкнутом виде решение на оси, направленной вдоль трещины; определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано совпадение полученных формул с частным решением [3] для стоящей трещины. Получено также решение для заданного на трещине касательного импульса.

§1. Определение решения на продолжении трещины для приложенного нормального импульса

Уравнения движения для анизотропной упругой среды в плоской задаче имеют вид [3]

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \left(a = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{C_{22}}{\rho} \right) \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & \left(d = \frac{C_{44}}{\rho}, \quad c = \frac{C_{64} + C_{12}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды.

При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u=0$, $v=0$. На границе трещины имеет место ($y=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma_-(t, x), & -\infty < x < l(t) \\ v &= v_+(t, x) = 0, & x > l(t); \quad \sigma_{xy} = 0, & -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $l(t)$ — закон движения края трещины.

Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координате x от компонент смещения по осям x и y

$$u^t; v^t = \int_0^{\infty} u; v \exp(-st) dt$$

$$B = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_2(u) \frac{du}{u - c_R^{-1}}$$

$$P_+(t, x) = \frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ A(c_R^{-1} - a^{-1/2}) \delta\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \left[\frac{1}{2} - \int_{t/x}^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} \left(\frac{(c_R^{-1} - u)F_2(u)}{\sqrt{u-1/\sqrt{a}}} \right) \frac{du}{\sqrt{u-t/x}} \right] H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[A \delta\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \int_{1/\sqrt{d}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h) \delta(t - hx) dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \quad (2.2)$$

$$A = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_2(u) \frac{du}{u - 1/\sqrt{a}}, \quad F_3(h) = \int_h^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} \left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-1/\sqrt{a}}} \right) \frac{du}{u-h}$$

Для граничных значений на трещине в виде сосредоточенного импульса $\sigma_-(t, \tau, x, \xi) = -P \delta(x - \xi) H(t - \tau)$, можно получить нормальные напряжения вне трещины в виде (1.9). После вычисления интегралов [1] имеем

$$\sigma_+^0(t, \tau, x, \xi) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A \delta(t - t_1 - (x - x_1) a^{-1/2}) + \int_{1/\sqrt{d}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h) \delta(t - t_1 - h(x - x_1)) dh \right] \frac{H(x - x_1)}{\sqrt{x - x_1}} \left\{ (x_1 - \xi)^{-1/2} \left[1 - \right. \right. \quad (2.3)$$

$$- B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - T}} H(c_R^{-1} - T) - \int_T^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - T}} du \left. \right\} \frac{\delta(x_1 - l(t_1))}{[l(t_1) c_R^{-1} - 1]^{-1}} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} + \int_T^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} (F_2(u) \sqrt{u - a^{-1/2}}) \frac{du}{\sqrt{u - T}} \right] \frac{H(x_1 - l(t_1))}{(x_1 - \xi)^{3/2}} \left. \right\} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) dx_1 dt_1$$

$$T = (t_1 - \tau)(x_1 - \xi)^{-1}$$

Полученные формулы по форме совпадают с [1] или со случаем изотропной среды, только функции D_+ даются (1.6). Вычисление интегралов по x_1, t_1 дает

$$\sigma_+^0 = \frac{P}{\pi} \left[AN\left(t, \tau, x, \xi, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \int_{1/\sqrt{d}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h) N(t, \tau, x, \xi, h) dh \right] H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$N(t, \tau, x, \xi, h) = \frac{1 - c_R^{-1} l}{1 - hl} \frac{N_1^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}} - \frac{N_2^0 H(L_0 - 1/\sqrt{a})}{x - \xi} - N_3^0 \frac{H(1/\sqrt{a} - L_0)}{x - \xi}, \quad N_1^0 = \Phi(L_0, c_R^{-1}) - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) \quad (2.4)$$

$$N_3^0 = \left(\frac{x-l}{l-\xi} \right)^{1/2} \Phi(L_0, T), \quad \Phi(p_1, p_2) = 1 - \int_{p_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{p_2 - u} \sqrt{\frac{u - 1/\sqrt{a}}{u - p_1}} du H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - p_1\right)$$

$$N_2^0 = N_3^0 + \pi F_1(T) \sqrt{\frac{T - a^{-1/2}}{T - h}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0\right)$$

$$T = \frac{t - \tau}{x - \xi}, \quad L_0 = \frac{t_0 - \tau}{l - \xi}, \quad l = l(t_0), \quad t - t_0 = h(x - l(t_0))$$

Полученная формула несколько отличается от [1] последним слагаемым N_3^0 , не влияющим на концентрацию напряжений.

Учитывая, что при $x \rightarrow l(t)$, $t_0 \rightarrow t$ и $\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)} \rightarrow 1 - hl(t)$, можно из (2.4) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l(t))} \sigma_+^0 &= P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l(t)}{\sqrt{l(t) - \xi}} \left\{ \frac{AN_1^0}{\sqrt{1-l(t)a^{-1/2}}} + \right. \\ &+ \left. \lim_{x \rightarrow l(t)+0} \int_{a^{-1/2}}^{a^{-1/2}} F_3(h) \frac{N_1^0 \sqrt{1-hl(t)}}{1-hl(t_0)} dh \right\} = \\ &= P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l(t)}{\sqrt{1 - a^{-1/2} l(t)}} \frac{g(t)K(l)}{\sqrt{l-\xi}} H(L_0 - a^{-1/2}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$g(t) = 1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) - \int_{L_0}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - L_0}} du H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0\right)$$

$$K(l) = 1 - l \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{1 - ul} du, \quad L_0 = \frac{t - \tau}{l - \xi}, \quad l = l(t)$$

§3. Сравнение с решением, полученным методом Винера-Хопфа

В случае $l(t) = 0$, рассмотренном в [2, 3], также найдено значение σ_y в виде

$$\sigma_{+}^{t, \xi} = -\frac{P}{2\pi^2} \frac{c_R^{-1} - iq/s}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{iq}{s}}} D_{+}^{-1} \left(\frac{iq}{s} \right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\infty} \frac{D_{+}(\tau) \sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}}}{(c_R^{-1} - \tau)(\tau - iq/s)} e^{\tau s} d\tau$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi^2 x} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\eta_1} \frac{D_{+}(\tau) D_{+}^{-1}(\eta) \sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}} (c_R^{-1} - \eta)}{(c_R^{-1} - \tau)(\tau - \eta) \sqrt{\eta - 1/\sqrt{a}}} d\tau$$

или

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi^2 x} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\eta_1} \frac{D_{+}(\tau) \sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}} (c_R^{-1} - \eta)}{(c_R^{-1} - \tau)(\tau - \eta) \sqrt{\eta - 1/\sqrt{a}}} \left[A + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(\zeta) (\eta - 1/\sqrt{a})}{(\zeta - 1/\sqrt{a})(\zeta - \eta)} d\zeta \right] d\tau = J_1 + J_2, \quad \eta = \frac{t + \tau \xi}{x}, \quad T = \frac{t}{x - \xi}$$

$$\eta_1 = -\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right) \xi^{-1}$$

где D_{+} , D_{+}^{-1} , F_2 , A даются формулами (1.10), (2.2) и верхний предел по τ выбран $\eta_1 = -\frac{1}{3}\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right)$, поскольку вне него интеграл равен нулю.

Подставляя значение D_{+} из (1.10) и вычисляя двукратные интегралы, получим

$$J_1 = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} AN\left(t, 0, x, \xi, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

где $\eta_1 = L_0$, $l(t_0) = 0$, $N(t, 0, x, \xi, 1/\sqrt{a})$ даются формулой (2.4). Второй интеграл дает

$$J_2 = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left\{ \frac{(1-A)\sqrt{x}}{(x-\xi)\sqrt{-\xi}} + \frac{B(A-1)}{\sqrt{-\xi x}} \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - \eta_1}} H\left(\frac{1}{c_R} - \eta_1\right) - \frac{B\sqrt{x}}{\sqrt{-\xi}} \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - \eta_1}} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(\tau) d\tau}{(x\tau - \xi c_R^{-1} - t)} H\left(\frac{1}{c_R} - \eta_1\right) - \frac{\sqrt{-\xi} H(1/\sqrt{d} - \eta_1)}{(x-\xi)\sqrt{x}} \times \right. \\ \left. \times \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(\tau) d\tau}{\tau - 1/\sqrt{a}} \int_{\eta_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u) \sqrt{(u - 1/\sqrt{a})(u - \eta_1)} [u + t\xi^{-1} - x(\xi c_R)^{-1}]}{(c_R^{-1} - u)(T - u) \left| u + \frac{1}{\xi} (t - \tau x) \right|} du + \right. \\ \left. + \frac{\xi \sqrt{-\xi}}{x\sqrt{x}(x-\xi)} \int_{\eta_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(\tau) \sqrt{\tau - \eta_1} (\tau - c_R^{-1}) d\tau}{\sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}} (t/x + \xi/x c_R^{-1} - \tau)(T - \tau)} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u) du H(1/\sqrt{d} - \eta_1)}{t/x - \tau + u\xi/x} \right\}$$

$$+ \frac{\pi}{x-\xi} (T - a^{-1/2}) F_1(T) \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(\tau) d\tau}{(\tau - 1/\sqrt{a})(\tau - T)} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - \tau_1\right), \quad \tau_1 = \frac{t}{x} + \frac{\xi}{x\sqrt{a}}$$

что совпадает с значением σ_y на ox , определяемой формулой (2.4) после упрощений. Окончательно из (3.2) получите значение σ_y вблизи вершины трещины $x=0$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} + \frac{t}{\xi}}} H\left(\frac{1}{c_R} + \frac{t}{\xi}\right) - \int_{t/\xi}^{1/\sqrt{d}} \frac{\sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}} F_1(\tau)}{\left(\frac{1}{c_R} - \tau\right) \sqrt{\tau + \frac{t}{\xi}}} \times \right. \\ \left. \times d\tau H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{t}{\xi}\right) \right\} \frac{H\left(\frac{t}{-\xi} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{-\xi x}}$$

где в скобках второй и третий члены равны нулю при прохождении через вершину трещины волны $x=c_R t$ и продольной волны $x=\sqrt{a} t$, что совпадает с (2.5) при $l(t)=0$, $\tau=0$. Таким образом показано, что формула для коэффициента интенсивности напряжений [2, 3] может быть приведена к более удобной записи, полученной в [1] для изотропной упругой среды.

§ 4. Случай касательного импульса

Граничные данные при $y=0$ имеют вид

$$\sigma_{xy} = \tau_0^0(t, \tau, x, \xi) = -Q_0^0(x-\xi)H(t-\tau), \quad x < l(t) \\ u = 0, \quad x > l(t); \quad \sigma_y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.1)$$

Решение уравнений (1.1) пишется в виде (1.3) и для

$$u^{LF} = u_+^{LF} + u_-^{LF}, \quad \sigma_{xy}^{LF} = \tau_+^{LF} + \tau_-^{LF}, \quad u_+^{LF} = 0$$

получится уравнение

$$u^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma_{xy}^{LF}(s, q)$$

$$S^{LF}(s, q) = -\frac{C_0 \sqrt{ab}}{\rho} \frac{\sqrt{\frac{s^2}{d} + q^2}}{\frac{s^2}{c_R^2} + q^2} D_+ \cdot D_- = S_+^{LF} \cdot S_-^{LF} \quad (4.2)$$

$$S_{\pm}^{LF}(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}} - iq}}{\frac{s}{c_R} - iq} D_{\pm}(iq/s), \quad S_{\pm}^{LF}(s, q) = -\frac{C_0 \sqrt{ab}}{\rho} \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}} + iq}}{\frac{s}{c_R} + iq} D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right)$$

Вводя аналогично § 1 преобразованные значения $D_{\pm}(iq/s)$, можно найти

$$\begin{aligned}
S_+(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left\{ \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - t/x}} H\left(c_R^{-1} - \frac{t}{x}\right) \right] \times \right. \\
&\times H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \int_{1/\sqrt{a}}^{t/x} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{d^{-1/2} - u}{t/x - u}} du H(d^{-1/2} - t/x) \Big\} \\
P_+(t, x) &= \frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (c_R^{-1} - d^{-1/2}) D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \delta\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \right. \\
&- \left. \left[\frac{1}{2} H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{t/x} \frac{d}{du} \left(\frac{(c_R^{-1} - u) F_2(u)}{\sqrt{d^{-1/2} - u}} \right) \frac{du}{\sqrt{t/x - u}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{t}{x}\right) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \delta\left(t - \frac{x}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_4(h) \delta(t - hx) dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \\
F_4(h) &= \int_{1/\sqrt{a}}^h \frac{d}{du} \left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{1/\sqrt{d} - u}} \right) \frac{du}{\sqrt{h - u}}, \quad D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{u - 1/\sqrt{d}} du
\end{aligned}$$

Значение $\tau_+^0(t, \tau, x, \xi)$ на оси x имеет вид

$$\begin{aligned}
\tau_+^0(t, \tau, x, \xi) &= \frac{Q}{\pi} \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) M_0 \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_4(h) M_0(h) dh \right] H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\
M_0(h) &= \frac{1 - c_R^{-1} l}{1 - hl} \frac{M_1^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}} - \frac{M_2^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{x - \xi}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
M_1^0 &= \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) \right] H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0\left(L_0, \frac{1}{c_R}\right) \\
M_2^0 &= \sqrt{\frac{x-l}{l-\xi}} \left[H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0(L_0, T) \right] - \pi F_1(T) \sqrt{\frac{d^{-1/2} - T}{h-T}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0\right)
\end{aligned}$$

$$\Phi_0(p_1, p_2) = \int_{1/\sqrt{a}}^{p_1} \frac{F_1(u)}{p_2 - u} \sqrt{\frac{d^{-1/2} - u}{p_1 - u}} du H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - p_2\right), \quad T = \frac{t - \tau}{x - \xi}$$

$$t - t_0 = h(x - l), \quad L_0 = (t_0 - \tau)(l - \xi)^{-1}, \quad l = l(t_0)$$

§ 5 Нахождение коэффициента интенсивности напряжений в случае касательного импульса

При $x \rightarrow l(t)$ из (4.4) получится

$$\lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_{xy} = Q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g_1(t)(1-c_R^{-1}l)}{\sqrt{l-\xi} \sqrt{1-l d^{-1/2}}} H(L_0 - a^{-1/2}) \quad (5.1)$$

$$g_1(t) = \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) \right] H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0\left(L_0, \frac{1}{c_R}\right)$$

$$L_0 = (t - \tau)/(l - \xi), \quad l = l(t)$$

Для $l(t)=0$, $\tau=0$ в [3] получена формула

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_{xy} = Q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g_1(t)}{\sqrt{-\xi}} H(L_0 - a^{-1/2}) \quad (5.2)$$

что следует из (5.1).

Для произвольной нагрузки $\sigma_y = \sigma_-(t, x)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины получается из решения (2.4) путем суперпозиции ($P=1$)

$$\sigma_+(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0}^{t+0} \frac{\partial \sigma_-(\tau, \xi)}{\partial \tau} \sigma_+^0(t, \tau, x, \xi) d\tau d\xi \quad (5.3)$$

Более простым способом, чем сделано в [1], можно подставить (2.5) в (5.3) и получить формулу

$$\lim_{x \rightarrow t+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_+ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1}l}{\sqrt{1 - la^{-1/2}}} K(l) (-J_1 + J_2 + J_3) \quad (5.4)$$

$$J_1 = \int_{l-t\sqrt{a}}^l \sigma_-\left(t - \frac{l-\xi}{\sqrt{a}}, \xi\right) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}}, \quad J_2 = \int_{l/\sqrt{a}}^{t/\sqrt{a}} F_5(u) \int_{-0}^{t+0} \sigma'_-(t-\tau, l-\tau/u) \sqrt{\tau} d\tau du$$

$$J_3 = B \sqrt{c_R^{-1} - a^{-1/2}} \int_{lc_R}^{t\sqrt{a}} (uc_R^{-1} - t)^{-1/2} \int_{-0}^{\lambda} \sigma'_-(\tau, l + \tau c_R - u) d\tau du$$

$$F_5(u) = u^{-3/2} \int_u^{1/\sqrt{a}} \frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1} - \omega} \sqrt{\frac{\omega - a^{-1/2}}{\omega - u}} d\omega, \quad \lambda = \frac{t - ua^{-1/2}}{1 - c_R a^{-1/2}}$$

$$l = l(t), \quad \sigma'_-(\tau, g(\tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_-(\tau, \xi) \quad \text{при} \quad \xi = g(\tau)$$

В частности, для $\sigma_- = -PH(-x)H(t)$ из (5.4) получится

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_+ = 2P \sqrt{\frac{2c_R^2 t}{\pi \sqrt{a}}} D_-(0), \quad D_+(0) = \frac{\sqrt{K_2}}{c} \left(2b\sqrt{ab} + \frac{Lb}{d} \right)^{-1/2}$$

что для изотропной среды совпадает с решением [10] с вычислением интеграла $D_+(0)$. Если $\sigma_- = -P\lambda(x)H(t)$, то получится формула

(2.5) при $\tau=\xi=0$ и при $l < c_R$, $g=1$, что в изотропном случае получено в работе [6]. В случае касательной нагрузки $\sigma_{xy} = \tau_-(t, x)$ аналогично (5.4) получится ($Q=1$)

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \tau_+ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K(l) \frac{1-c_R^{-1}l}{\sqrt{1-l^2}} (-J_1 + J_2 - J_3) \quad (5.5)$$

$$J_1 = \int_{l-\sqrt{d}}^l \tau_-\left(t - \frac{l-\xi}{\sqrt{d}}, \xi\right) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}}, \quad J_2 = \int_{l-\sqrt{d}}^l F_0(u) du \int_{-0}^{l+0} \tau_-\left(t-\tau, l - \frac{\tau}{u}\right) \sqrt{\tau} d\tau$$

$$J_3 = B \sqrt{c_R^{-1} - d^{-1/2}} \int_{c_R}^{l\sqrt{d}} du \int_0^{\lambda_1} (c_R^{-1}u - t)^{-1/2} \tau_-(\tau, l + c_R u - u) d\tau$$

$$\lambda_1 = \frac{l\sqrt{d} - u}{\sqrt{d} - c_R}, \quad F_0(u) = u^{-3/2} \int \frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1} - \omega} \sqrt{\frac{d^{-1/2} - \omega}{u - \omega}} d\omega$$

При $\tau_- = -QH(-x)H(t)$ можно из (5.5) получить

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi x} \tau_+ = 2Q \sqrt{\frac{2c_R t}{\pi \sqrt{d}}} D_+(0) = 2Q \left(\frac{2K_1 t}{\pi(2bd\sqrt{ab} + Lb)^{1/2}} \right)^{1/2}$$

что другим путем получено в [4].

Если $\tau_-(t, x) = -Q\zeta(x)f(t)$, то получится формула (5.1) при $\tau=\xi=0$ и для $l < c_R t$, $g_1(t)=1$.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

THE MOTION OF CUT IN ANISOTROPIC MEDIUM

A. N. MARTIROSSIAN

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՃԱՔԻ ՏԱՐԱՄՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ու մ

Տրվում է կիսաանվերջ ճաքի եզրին կիրառված նորմալ և շոշափող իմպուլսների վերաբերյալ խնդրի լուծումը անիզոտրոպ առանձակաձև միջավայրի համար, երբ ճաքի պագաթը շարժվում է կամայական օրենքով ճաքի շարժման ուղղությամբ ուղղված առանցքի վրա հաշվված են լարումները: Բևոնավորման մասնավոր դեպքերի և կամայական եզրային պայմանների համար որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները: Ստացված արդյունքները համեմատված են անիզոտրոպ և իզոտրոպ միջավայրերի համար նախորդ ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4, с. 54—73.
2. Мартиросян А. Н. Решение некоторых нестационарных задач для анизотропной среды.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, с. 34—48.
3. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 1, с. 100—110.
4. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с. 885—896.
5. Зволинский Н. В., Флигман Л. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А., Некоторые задачи дифракции упругих волн. В сб.: Приложения теории функции в механике сплошной среды, т. 1, М.: 1965.
6. Freund L. B. Crack Propagation in an elastic solid subjected to general loading—I constant rate of extension.—J. Mech. Phys. Solids, 1972, v. 20, P. 129—140.
7. Norris A. N., Achenbach J. D. Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material.—Q. J. Mech. appl. Math., v. 37, pt. 4, 1984, p. 565—580.
8. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986, 328 с.
9. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 548—555.
10. Baker V. R. Dynamic stresses created by a moving crack.—Trans. ASME ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, № 3.
11. Ахинян Ж. О., Багдоев А. Г. Определение движения магнитоупругой среды при точечных воздействиях.—Прикл. механика, 1977, т. XIII, № 4, с. 9—14.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна.

Поступила в редакцию
12.XI.1986

УДК 539.319

ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение плоской задачи о распространяющейся полубесконечной трещины, на границах которой заданы нормальные импульсы. Соответствующая задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и свертки. В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [2, 3, 7], получено в замкнутом виде решение на оси, направленной вдоль трещины; определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано совпадение полученных формул с частным решением [3] для стоящей трещины. Получено также решение для заданного на трещине касательного импульса.

§1. Определение решения на продолжении трещины для приложенного нормального импульса

Уравнения движения для анизотропной упругой среды в плоской задаче имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
 a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\sigma^2 u}{\partial t^2}, \quad \left(a = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{C_{22}}{\rho} \right) \\
 c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \left(d = \frac{C_{12}}{\rho}, \quad e = \frac{C_{21} + C_{12}}{\rho} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды.

При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u=0, v=0$. На границе трещины имеет место ($y=0$)

$$\begin{aligned}
 \sigma_y = \sigma_y^-(t, x), \quad -\infty < x < l(t) \\
 \sigma_x = \sigma_x^+(t, x) = 0, \quad x > l(t); \quad \sigma_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где $l(t)$ — закон движения края трещины.

Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координате x от компонент смещения по осям x и y

$$u^l, v^l = \int_0^{\infty} u, v \exp(-st) dt$$

$$u^L, v^L = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n^{LF}, v_n^{LF} \exp[-iqx + iy\beta_n(q)] dq \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$v_n^{LF} = \frac{d\beta_n^2 - a\mu_1^2}{cq\beta_n} u_n^{LF}, \quad \beta_n = i \left| \frac{(b+d)s^2 + Lq^2 - (-1)^n \sqrt{\Delta(q)}}{2ba} \right|^{1/2}$$

$$\Delta(q) = [(b+d)s^2 + Lq^2]^2 - 4abd^2\mu_1^2\mu_2^2 \quad (1.4)$$

$$\mu_1 = i \left(\frac{s^2}{a} + q^2 \right)^{1/2}, \quad \mu_2 = i \left(\frac{s^2}{d} + q^2 \right)^{1/2}$$

$$a > d, \quad b > d > 0, \quad L = ab + d^2 - c^2$$

$$N_2 = b(a-d) - c^2 > 0, \quad K_1 = ab - (c-d)^2 > 0$$

Из (1.2) получится функциональное уравнение

$$v^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) v^{LF}(s, q)$$

$$S^{LF}(s, q) = -iaC_0 [\rho\mu_2 F(s, q)]^{-1}, \quad C_0 = \left[2 \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} + \frac{L}{ad} \right]^{1/2} K_1^{-1} \quad (1.5)$$

$$F(s, q) = C_0 R(s, q) [\mu_1 \mu_2 (\beta_1 + \beta_2)]^{-1}, \quad F(s, q) \rightarrow 1, \quad q \rightarrow \infty$$

$$R(s, q) = -(bs^2 + K_1 q^2) \mu_2 \sqrt{\frac{a}{b}} - as^2 \mu_1 = -\frac{ad\sqrt{a}K_1}{4(a-d)s^2\sqrt{b}} \{Q_1 s^4 -$$

$$- P_1 s^2 (q^2 + \mu_1 \mu_2) + 4q^2 \mu_1 \mu_2 + (\mu_2^2 - q^2)^2\} (\mu_1 + \mu_2)$$

$$P_1 = \frac{4}{K_1} (\sqrt{ab} - b), \quad Q_1 = \frac{P_1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{d^2 K_1} [b(b-a) + (c+d-b)(c+b-3d)]$$

где $R(s, q)$ — функция Рэлея. Число и положение точек разветвления функций β_n на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в [9].

После выбора ветвей функций μ_n, β_n легко получить [3]

$$S^{LF}(s, q) = S_+^{LF}(s, q) S_-^{LF}(s, q) \quad (1.6)$$

$$S_+^{LF}(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}} - iq}}{\frac{s}{c_R} - iq} D_+, \quad S_-^{LF}(s, q) = -\frac{aC_0}{\rho} \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{a}} + iq}}{\frac{s}{c_R} + iq} D_-$$

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \ln \left[\frac{\overline{R(\xi)}}{R(\xi)} \frac{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)} \right] \frac{d\xi}{\xi \mp \frac{iq}{s}} \right\}, \quad R \left(\pm \frac{1}{c_R} \right) = 0$$

$\beta_n(\xi), R(\xi)$ даются формулами (1.4), (1.5), где берется $s=1, q=i\xi$.

Функции S_+^{LF} и S_-^{LF} — аналитические функции соответственно в верхней и нижней полуплоскости плоскости q . Представим функции S_+^{LF}, S_-^{LF} в виде [1]

$$\sigma^{LF} = \sigma_{+}^{LF} + \sigma_{-}^{LF}, \quad v^{LF} = v_{+}^{LF} + v_{-}^{LF}, \quad v_{+}^{LF} = 0 \quad (1.7)$$

где v_{\pm}^{LF} и σ_{\pm}^{LF} неизвестны. При этом $v(t, x) = v_{+}(t, x)H|x-l(t)| + v_{-}(t, x)H|l(t)-x|$, $\sigma(t, x) = \sigma_{+}(t, x)H|x-l(t)| + \sigma_{-}(t, x)H|l(t)-x|$, $H(x)$ — единичная функция. Нетрудно заметить, что функция S_{\pm}^{LF} такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям S_{\pm}^{LF} , $P_{\pm}^{LF} = 1/S_{\pm}^{LF}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$P_{+}(t, x) = S_{+}(t, x) = 0 \quad \text{при } x < c_R t \quad (1.8)$$

$$P_{-}(t, x) = S_{-}(t, x) = 0 \quad \text{при } x > -c_R t$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и учитывая (1.8), можно, как и в [1], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t

$$v_{\pm} = S_{\pm} ** (S_{\mp} ** \sigma_{\mp}) H(l-x+0), \quad \sigma_{\pm} = -P_{\pm} ** (S_{\mp} ** \sigma_{\mp}) H(x-l+0) \quad (1.9)$$

Так как $D_{\pm}(iq/s)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости iq/s за исключением точек, принадлежащих разрезам $|\pm 1/\sqrt{a}|$, $|\pm 1/\sqrt{d}|$, с помощью интеграла Коши для неограниченной области имеем

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{1/\sqrt{a} \cdot u \mp \frac{iq}{s}} du, \quad D_{\pm}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{1/\sqrt{a} \cdot u \mp \frac{iq}{s}} du$$

$$F_1(u) = \gamma_1(u) \exp(\alpha(u)), \quad F_2(u) = -\gamma_2(u) \exp(-\alpha(u)) \quad (1.10)$$

$$\gamma_1(u) = \frac{\alpha \beta_2(u) \sqrt{u^2 - a^{-1}} + (b - K_1 u^2) \sqrt{ab^{-1}} \sqrt{d^{-1} - u^2} \beta_1^*(u)}{\pi \{[(b - K_1 u^2) ab^{-1} (d^{-1} - u^2) + a^2 (u^2 - a^{-1})] (bd)^{-1} \sqrt{\Delta(u)}\}^{1/2}}$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \ln \left| \frac{R(\xi)}{R(\xi)} \frac{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)} \right| \frac{d\xi}{\xi - u}$$

$$\beta_1^*(u) = -i\beta_1(q, s), \quad q = u, \quad s = i; \quad \beta_2^*(u) = -i\beta_2(q, s), \quad q = iu, \quad s = 1$$

§ 2. Решение на оси для нормального импульса на границе трещины

Вычисление оригиналов $S_{\pm}(t, x)$, $P_{\pm}(t, x)$ проводится так же, как и в [1] и имеет вид

$$S_{\pm}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - t/x}} H(c_R^{-1} - t/x) - \int_{t/x}^{1/\sqrt{a}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - t/x}} du \right] H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (2.1)$$

$$B = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_1(u) \frac{du}{u - c_R^{-1}}$$

$$P(t, x) = \frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ A(c_R^{-1} - a^{-1/2}) \delta \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) - \left[\frac{1}{2} - \int_{t/x}^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} \left(\frac{(c_R^{-1} - u) F_2(u)}{\sqrt{u-1}\sqrt{a}} \right) \frac{du}{\sqrt{u-t/x}} \right] H \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \right\} -$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[A \delta \left(t - \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_3(h) \delta(t - hx) dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \quad (2.2)$$

$$A = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_2(u) \frac{du}{u - 1/\sqrt{a}}, \quad F_3(h) = \int_h^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} \left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-1}\sqrt{a}} \right) \frac{du}{u-h}$$

Для граничных значений на трещине в виде сосредоточенного импульса $\sigma_+(t, \tau, x, \xi) = -P \delta(x - \xi) H(t - \tau)$, можно получить нормальные напряжения вне трещины в виде (1.9). После вычисления интегралов [1] имеем

$$\sigma_+^0(t, \tau, x, \xi) = \frac{P}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[A \delta(t - t_1 - (x - x_1) a^{-1/2}) + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_2(h) \delta(t - t_1 - h(x - x_1)) dh \right] \frac{H(x - x_1)}{\sqrt{x - x_1}} \left((x_1 - \xi)^{-1/2} \left[1 - \right. \right. \quad (2.3)$$

$$- B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - T}} H(c_R^{-1} - T) - \int_T^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - T}} du \left. \left. \frac{\delta(x_1 - l(t_1))}{|l(t_1) c_R^{-1} - 1|^{-1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left[\frac{1}{2} + \int_T^{1/\sqrt{d}} \frac{d}{du} (F_2(u) \sqrt{u - a^{-1/2}}) \frac{du}{\sqrt{u - T}} \right] \frac{H(x_1 - l(t_1))}{(x_1 - \xi)^{3/2}} \right] H \left(T - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) dx_1 dt_1,$$

$$T = (t_1 - \tau)(x_1 - \xi)^{-1}$$

Полученные формулы по форме совпадают с [1] или со случаем изотропной среды, только функции Ω_i даются (1.6). Вычисление интегралов по x_1, t_1 даст

$$\sigma_+^0 = \frac{P}{\pi} \left[AN \left(t, \tau, x, \xi, \frac{1}{\sqrt{a}} \right) + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_3(h) N(t, \tau, x, \xi, h) dh \right] H \left(T - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

$$N(t, z, x, \xi, h) = \frac{1 - c_R^{-1} l}{1 - hl} \frac{N_1^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}} - \frac{N_2^0 H(L_0 - 1/\sqrt{a})}{x-\xi} \quad (2.4)$$

$$- N_3^0 \frac{H(1/\sqrt{a} - L_0)}{x-\xi}, \quad \Lambda_1^0 = \Phi(l_0, c_R^{-1}) - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0)$$

$$N_3^0 = \left(\frac{x-l}{l-\xi} \right)^{1/2} \Phi(L_0, T), \quad \Phi(p_1, p_2) = 1 - \int_{p_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{p_2 - u} \sqrt{\frac{u - 1/\sqrt{a}}{u - p_1}} du \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} - p_1 \right)$$

$$N_2^0 = N_3^0 + \pi F_1(T) \sqrt{\frac{T - a^{-1/2}}{T - h}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0\right)$$

$$T = \frac{l-\xi}{x-\xi}, \quad L_0 = \frac{l_0-\xi}{l-\xi}, \quad l = l(t_0), \quad t - t_0 = h(x - l(t_0))$$

Полученная формула несколько отличается от [1] последним слагаемым N_3^0 , не влияющим на концентрацию напряжений.

Учитывая, что при $x \rightarrow l(t)$, $t_0 \rightarrow t$ и $\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)} \rightarrow 1 - hl(t)$, можно из (2.4) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l(t)}{\sqrt{l(t) - \xi}} = P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l(t)}{\sqrt{l(t) - \xi}} \left\{ \frac{AN_1^0}{\sqrt{1 - l(t)a^{-1/2}}} + \right.$$

$$\left. + \lim_{x \rightarrow l(t)+0} \int_{a^{-1/2}}^{a^{-1/2}} F_2(h) \frac{N_2^0 \sqrt{1 - hl(t)}}{1 - hl(t_0)} dh \right\} =$$

$$= P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l(t)}{\sqrt{1 - a^{-1/2} l(t)}} \frac{g(t) K(l)}{\sqrt{l-\xi}} H(L_0 - a^{-1/2}) \quad (2.5)$$

$$g(t) = 1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) - \int_{L_0}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1/2}}{u - L_0}} du \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0 \right)$$

$$K(l) = 1 - l \int_{L_0}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{1 - ul} du, \quad L_0 = \frac{l-\xi}{l-\xi}, \quad l = l(t)$$

§3. Сравнение с решением, полученным методом Винера-Хопфа

В случае $l(t) = 0$, рассмотренном в [2, 3], также найдено значение λ_y в виде

$$z_1 = -\frac{P}{2\pi^2} \frac{c_R^{-1} - lq/s}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{lq}{s}}} D_+^{-1} \left(\frac{lq}{s} \right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\tau} \frac{D_-(z) \sqrt{z-1/\sqrt{a}}}{(c_R^{-1}-z)(z-lq/s)} e^{z\tau} dz$$

$$z_2 = -\frac{P}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\tau_1} \frac{D_+(z) D_+^{-1}(\tau) \sqrt{z-1/\sqrt{a}} (c_R^{-1}-\tau)}{(c_R^{-1}-z)(z-\tau) \sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}} dz$$

или

$$z_2 = -\frac{P}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \int_{1/\sqrt{a}}^{\tau_1} \frac{D_+(z) \sqrt{z-1/\sqrt{a}} (c_R^{-1}-\tau)}{(c_R^{-1}-z)(z-\tau) \sqrt{\tau-1/\sqrt{a}}} \left[A + \right.$$

$$\left. + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(z) (\tau-1/\sqrt{a})}{(z-1/\sqrt{a})(z-\tau)} dz \right] dz = J_1 + J_2, \quad \tau = \frac{t+z}{x}, \quad T = \frac{t}{x-\xi}$$

$$\tau_1 = -\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right)^{-1}$$

где D_+ , D_+^{-1} , F_2 , A даются формулами (1.10), (2.2) и верхний предел по z выбран $\tau_1 = -\frac{1}{3}\left(t - \frac{x}{\sqrt{a}}\right)$, поскольку вне него интеграл равен нулю.

Подставляя значение D_+ из (1.10) и вычисляя двукратные интегралы, получим

$$J_1 = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} AN\left(t, 0, x, \xi, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

где $\eta_1 = L_0$, $l(t_0) = 0$, $N(t, 0, x, \xi, 1/\sqrt{a})$ даются формулой (2.4). Второй интеграл дает

$$J_2 = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left\{ \frac{(1-A)\sqrt{x}}{(x-\xi)\sqrt{-\xi}} + \frac{B(A-1)}{\sqrt{-\xi}x} \sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-\eta_1}} H\left(\frac{1}{c_R} - \eta_1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{B\sqrt{x}}{\sqrt{-\xi}} \sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}-\eta_1}} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(z) dz}{(x-\xi)(c_R^{-1}-z)} H\left(\frac{1}{c_R} - \eta_1\right) - \frac{\sqrt{-\xi} H(1/\sqrt{d} - \eta_1)}{(x-\xi)\sqrt{x}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(z) dz}{z-1/\sqrt{a}} \int_{\tau_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u) \sqrt{(u-1/\sqrt{a})(u-\eta_1)} |u+\xi|^{-1} - x(\xi c_R)^{-1}}{(c_R^{-1}-u)(T-u) \left| u + \frac{1}{\xi}(t-zx) \right|} du + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi\sqrt{-\xi}}{x\sqrt{x}(x-\xi)} \int_{\tau_1}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(z) \sqrt{z-\eta_1}(z-c_R^{-1}) dz}{\sqrt{z-1/\sqrt{a}}(t/x + \xi/x c_R^{-1})(T-z)} \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_1(u) du H(1/\sqrt{d} - \eta_1)}{t/x - z + u\xi/x} \right\}$$

$$+ \frac{1}{x-\xi} (T - a^{-1/2}) F_1(T) \int \frac{1 \cdot \sqrt{d}}{1 \cdot \sqrt{a}} \frac{F_2(\tau) d\tau}{(\tau - 1/\sqrt{a})(\tau - T)} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - \tau\right), \quad \tau_2 = \frac{t}{x} + \frac{\xi}{x\sqrt{a}}$$

что совпадает с значением σ_y на ox , определяемой формулой (2.4) после упрощений. Окончательно из (3.2) получите значение σ_y вблизи вершины трещины $x=0$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1/2}}{c_R^{-1} + \frac{t}{\xi}}} H\left(\frac{1}{c_R} + \frac{t}{\xi}\right) - \int_{\eta=\xi}^{1/\sqrt{d}} \frac{\sqrt{\tau - 1/\sqrt{a}} F_1(\tau)}{\left(\frac{1}{c_R} - \tau\right) \sqrt{\tau + \frac{t}{\xi}}} \times \right. \\ \left. \times d\tau H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{t}{\xi}\right) \right\} \frac{H\left(\frac{t}{-\xi} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{-\xi x}}$$

где в скобках второй и третий члены равны нулю при прохождении через вершину трещины волны $x=c_R t$ и продольной волны $x=\sqrt{a} t$, что совпадает с (2.5) при $l(t)=0$, $\tau=0$. Таким образом показано, что формула для коэффициента интенсивности напряжений [2, 3] может быть приведена к более удобной записи, полученной в [1] для изотропной упругой среды.

§ 4. Случай касательного импульса

Граничные данные при $y=0$ имеют вид

$$\sigma_{xy} = \tau^0(t, \tau, x, \xi) = -Q_0^0(x-\xi)H(t-\tau), \quad x < l(t) \\ u = 0, \quad x > l(t); \quad \sigma_y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.1)$$

Решение уравнений (1.1) пишется в виде (1.3) и для

$$u^{LF} = u_+^{LF} + u_-^{LF}, \quad \sigma_{xy}^{LF} = \tau_+^{LF} + \tau_-^{LF}, \quad \sigma_y^{LF} = 0$$

получится уравнение

$$n^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma_{xy}^{LF}(s, q)$$

$$S^{LF}(s, q) = -\frac{C_0 \sqrt{ab}}{q} \frac{\sqrt{\frac{s^2}{d} + q^2}}{\frac{s^2}{c_R^2} + q^2} D_+ \cdot D_- = S_+^{LF} \cdot S_-^{LF} \quad (4.2)$$

$$S_+^{LF}(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}} - iq}}{\frac{s}{c_R} - iq} D_+(iq/s), \quad S_-^{LF}(s, q) = -\frac{C_0 \sqrt{ab}}{q} \frac{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{d}} + iq}}{\frac{s}{c_R} + iq} D_-\left(\frac{iq}{s}\right)$$

Вводя аналогично § 1 преобразования значения $D_{\pm}(iq/s)$, можно найти

$$\begin{aligned}
S_+(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left\{ \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - t/x}} H\left(c_R^{-1} - \frac{t}{x}\right) \right] \times \right. \\
&\quad \times H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \int_{1/\sqrt{a}}^{t/x} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{d^{-1/2} - u}{t/x - u}} du H(d^{-1/2} - t/x) \left. \right\} \\
P_+(t, x) &= \frac{H(x)}{x\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (c_R^{-1} - d^{-1/2}) D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \xi \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \right. \\
&\quad - \left. \left[\frac{1}{2} H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{t/x} \frac{du}{du} \left(\frac{(c_R^{-1} - u) F_2(u)}{\sqrt{d^{-1/2} - u}} \right) \frac{du}{\sqrt{t/x - u}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{t}{x}\right) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \xi \left(t - \frac{x}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_4(h) \xi(t - hx) dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \\
F_4(h) &= \int_{1/\sqrt{a}}^h \frac{d}{du} \left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{1/\sqrt{d} - u}} \right) \frac{du}{\sqrt{h - u}}, \quad D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = 1 + \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} \frac{F_2(u)}{u - 1/\sqrt{d}} du
\end{aligned}$$

Значение $\tau_+^0(t, \tau, x, \xi)$ на оси x имеет вид

$$\begin{aligned}
\tau_+^0(t, \tau, x, \xi) &= \frac{Q}{\pi} \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) M_0 \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) - \int_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{d}} F_4(h) M_0(h) dh \right] H\left(T - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\
M_0(h) &= \frac{1 - c_R^{-1} l}{1 - hl} \frac{M_1^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}} - \frac{M_2^0 H(L_0 - a^{-1/2})}{x - \xi} \\
M_1^0 &= \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) \right] H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0\left(L_0, \frac{1}{c_R}\right) \\
M_2^0 &= \sqrt{\frac{x-l}{l-\xi}} \left[H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0(L_0, T) \right] - \pi F_1(T) \sqrt{\frac{d^{-1/2} - T}{h-T}} H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - L_0\right) \\
\Phi_0(p_2, p_1) &= \int_{1/\sqrt{a}}^{p_1} \frac{F_2(u)}{p_2 - u} \sqrt{\frac{d^{-1/2} - u}{p_1 - u}} du H\left(\frac{1}{\sqrt{d}} - p_1\right), \quad T = \frac{t - \tau}{x - \xi} \\
l - t_0 &= h(x - l), \quad L_0 = (t_0 - \tau)(l - \xi)^{-1}, \quad l = l(t_0)
\end{aligned}$$

§ 5 Нахождение коэффициента интенсивности напряжений в случае касательного импульса

При $x \rightarrow l(t)$ из (4.4) получится

$$\lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_{xy} = Q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g_1(t)(1-c_R^{-1}l)}{\sqrt{l-\xi} \sqrt{1-la^{-1/2}}} H(L_0 - a^{-1/2}) \quad (5.1)$$

$$g_1(t) = \left[1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - d^{-1/2}}{c_R^{-1} - L_0}} H(c_R^{-1} - L_0) \right] H\left(L_0 - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \Phi_0\left(L_0, \frac{1}{c_R}\right)$$

$$L_0 = (t - \tau) / (l - \xi), \quad l = l(t)$$

Для $l(t) = 0$, $\tau = 0$ в [3] получена формула

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_{xy} = Q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g_1(t)}{\sqrt{-\xi}} H(L_0 - a^{-1/2}) \quad (5.2)$$

что следует из (5.1).

Для произвольной нагрузки $\sigma_y = \sigma_-(t, x)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины получается из решения (2.4) путем суперпозиции ($P=1$)

$$\sigma_-(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0}^{t+\xi} \frac{\partial \sigma_-(\tau, \xi)}{\partial \tau} \rho_+(t, \tau, x, \xi) d\tau d\xi \quad (5.3)$$

Более простым способом, чем сделано в [1], можно подставить (2.5) в (5.3) и получить формулу

$$\lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1}l}{\sqrt{1-la^{-1/2}}} K(l) (-J_1 + J_2 + J_3) \quad (5.4)$$

$$J_1 = \int_{l-t\sqrt{a}}^l \sigma_-\left(t - \frac{l-\xi}{\sqrt{a}}, \xi\right) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}}, \quad J_2 = \int_{l-t\sqrt{a}}^l F_3(u) \int_{-0}^{t+\xi} \sigma_-(t-\tau, l-\tau(u)\sqrt{a}) d\tau du$$

$$J_3 = B \sqrt{c_R^{-1} - a^{-1/2}} \int_{c_R}^{t\sqrt{a}} (uc_R^{-1} - t)^{-1/2} \int_{-0}^{\lambda} \sigma_-(\tau, l - \tau c_R - u) d\tau du$$

$$F_3(u) = u^{-3/2} \int_{c_R}^{t\sqrt{a}} \frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1} - \omega} \sqrt{\frac{\omega - a^{-1/2}}{\omega - u}} d\omega, \quad \lambda = \frac{t - ua^{-1/2}}{1 - c_R a^{-1/2}}$$

$$l = l(t), \quad \sigma_-(\tau, g(\tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_-(\tau, \xi) \quad \text{при } \xi = g(\tau)$$

В частности, для $\sigma_- = -PH(-x)H(t)$ из (5.4) получится

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_{xy} = 2P \sqrt{\frac{2c_R^{-1}l}{\pi\sqrt{a}}} D_-(0), \quad D_-(0) = \frac{\sqrt{K_1}}{c} \left(2b\sqrt{ab} - \frac{Lb}{d} \right)^{-1/2}$$

что для изотропной среды совпадает с решением [10] с вычислением интеграла $D_+(0)$. Если $\sigma_- = -P\tau^2(x)H(t)$, то получится формула

(2.5) при $\tau = \xi = 0$ и при $l < c_R$, $g = 1$, что в изотропном случае получено в работе [6]. В случае касательной нагрузки $\tau_{xy} = \tau_-(t, x)$ аналогично (5.4) получится ($Q = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \tau_{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K(l) \frac{1 - c_R^{-1} l}{\sqrt{1 - l^2}} (-J_1 + J_2 - J_3) \quad (5.5)$$

$$J_1 = \int_{t - l\sqrt{d}}^t \tau_-\left(t - \frac{l - \xi}{\sqrt{d}}, \xi\right) \frac{d\xi}{\sqrt{l - \xi^2}}, \quad J_2 = \int_{l\sqrt{d}}^{l\sqrt{d}} F_0(u) du \int_{-\infty}^{t=0} \tau_-\left(t - \tau, t - \frac{\tau}{u}\right) \sqrt{\tau} d\tau$$

$$J_3 = B\sqrt{c_R^{-1} - d^{-1/2}} \int_{c_R}^{l\sqrt{d}} du \int_{\frac{u}{c_R}}^u (c_R^{-1} u - t)^{-1/2} \tau_-(\tau, l + c_R u - u) d\tau$$

$$\tau_1 = \frac{l\sqrt{d} - u}{\sqrt{d} - c_R}, \quad F_0(u) = u^{-1/2} \int_{l\sqrt{d}}^u \frac{F_1(\alpha)}{c_R^{-1} - \alpha} \sqrt{\frac{d - \alpha^2}{u - \alpha}} d\alpha$$

При $\tau_- = -QH(-x)H(t)$ можно из (5.5) получить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \tau_{xy} = 2Q \sqrt{\frac{2c_R l}{-l\sqrt{d}}} D_+(0) = 2Q \left(\frac{2K_2 l}{-(2bd)^{1/2} ab + Lb} \right)^{1/2}$$

что другим путем получено в [4].

Если $\tau_-(t, x) = -Q_2^*(x)H(t)$, то получится формула (5.1) при $\tau = \xi = 0$ и для $l < c_{A1}$, $g_1(t) = 1$.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

THE MOTION OF CUT IN ANISOTROPIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՃԱՔԻ ՏԱՐԱՆՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍԻԱՆ

Ո. մ փ ո փ ու մ

Տրվում է կիսաանվերջ ճաքի եզրին կիրառված նորմալ և շոշափող իմպուլսների վերաբերյալ խնդրի լուծումը անիզոտրոպ առաձգական միջավայրի համար, երբ ճաքի դադարի շարժվում է կամայական օրենքով: ճաքի շարժման ուղղությունը ուղղված առանցքի վրա հաշվված են լարումները: Բևոնավորման մասնավոր դեպքերի և կամայական եզրային պայմանների համար որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները: Ստացված արդյունքները համեմատված են անիզոտրոպ և իզոտրոպ միջավայրերի համար նախօրոք ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1979, №4, с. 54—73.
2. Мартиросян А. Н. Решение некоторых нестационарных задач для анизотропной среды.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, №1, с. 34—48.
3. Багдоев А. Г., Мартиросян А. И. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, №1, с. 100—110.
4. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с. 885—896.
5. Зволинский И. В., Флигман Л. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А., Некоторые задачи дифракции упругих волн. В сб.: Приложения теории функции в механике сплошной среды, т. 1. М.: 1965.
6. Freund L. B. Crack Propagation in an elastic solid subjected to general loading—I constant rate of extension.—J. Mech. Phys. Solids, 1972, v. 20, P. 129—140.
7. Norris A. N., Achenbach J. D. Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material.—Q. Jl. Mech. appl. Math., v. 37, pt. 4, 1984, p. 565—580.
8. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
9. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 548—555.
10. Baker V. R. Dynamic stresses created by a moving crack.—Trans. ASME ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, № 3.
11. Ахикян Ж. О., Багдоев А. Г. Определение движения магнитоупругой среды при точечных воздействиях.—Прикл. механика, 1977, т. XIII, №4, с. 9—14.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна.

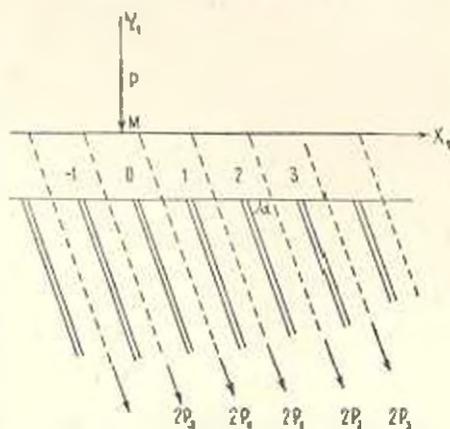
Поступила в редакцию
12.XI.1986

УДК 539.375

ЗАДАЧА ФЛАМАНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НАКЛОННЫХ ЩЕЛЕЙ

КАМЫШЕВА Г. А., МУЛЛЕР В. М.

1. Пусть упругая изотропная полуплоскость $-\infty < X_1 < \infty$, $Y_1 \leq 0$ с коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G ослаблена периодической системой параллельных прямолинейных полубесконечных закрытых щелей. Вершины щелей находятся на прямой $Y_1 = -H$, щели наклонены к этой прямой под углом α ($0 < \alpha < \pi/2$), расстояние между щелями равно 2 (фиг. 1). Берега щелей свободны от касательных напряжений. К границе полуплоскости в точке M (начало координат X_1, Y_1) приложена сосредоточенная нормальная сила P . На бесконечности, к области, заключенной между l -й и $(l+1)$ -й щелями, приложена продольная растягивающая сила $2P_l$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Требуется определить упругие деформации полуплоскости при условии ограниченности локальной энергии деформаций в окрестности вершин щелей.



Фиг. 1

Разделим плоскость X_1, Y_1 на ряд одинаковых наклонных полос с полубесконечными осевыми щелями. В каждой полосе введем две местные прямоугольные декартовы системы координат с началом в вершине щели: X, Y — с осями, параллельными X_1, Y_1 и x, y — с осью x при $x > 0$, совпадающей со щелью. Перенумеруем полосы, считая, что точка M с координатами (x_0, y_0) находится в нулевой полосе. Номера полос и расположенных в них щелей совпадают.

Решение поставленной задачи будем искать в виде суммы решений u^1 задачи Фламана для полуплоскости, нагруженной силой P и u^2 корректирующей смешанной задачи для полуплоскости с указанной системой щелей.

2. Решение задачи Фламана имеет вид

$$u_{X_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{X_1^2 Y_1}{r^4}, \quad u_{Y_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{Y_1^3}{r^4}, \quad u_{X_1 Y_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{X_1 Y_1^2}{r^4}, \quad r^2 = X_1^2 + Y_1^2 \quad (2.1)$$

Определяемые им касательные напряжения на площадках, параллельных оси Ox , выражаются формулой

$$\tau = [(\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}^1) a + \tau_{x_1 y_1}^1 (1 - a^2)] (1 + a^2)^{-1}, \quad a = \operatorname{ctg} \alpha \quad (2.2)$$

В координатах x, y на l -ой щели ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отсюда имеем

$$\tau^l(x, 0) = \frac{2P}{\pi(1+a^2)} \frac{P f_1(x) - l f_2(x) + f_3(x)}{[4l^2(1+a^2) + 4l g_1(x) + g_2(x)]^2} \quad (2.3)$$

$$f_1(x) = -1 + a \sqrt{1+a^2} (x + \sqrt{1+a^2} x_0)$$

$$f_2(x) = -2[\sqrt{1+a^2} x^2 + 2(a y_0 + x_0)x + 1 + \sqrt{1+a^2} x_0] a y_0 + x_0 + a(y_0 - a x_0)$$

$$f_3(x) = (a x_0 + y_0) x^2 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} [(y_0 + a x_0)^2 + 2(x_0^2 - y_0^2)] x + x_0(x_0 + a y_0)(a x_0 - y_0)$$

$$g_1(x) = a x + y_0 \sqrt{1+a^2}, \quad g_2(x) = x^2 + \frac{2(x_0 + a y_0)}{\sqrt{1+a^2}} x + x_0^2 + y_0^2$$

3. Корректирующая задача для полуплоскости определяется касательными напряжениями, равными $-\tau^l(x, 0)$ на l -ой щели, и заданными на бесконечности продольными растягивающими силами P_l ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пусть $u_{j1}^l(x, y)$ и $u_{j2}^l(x, y)$ — перемещения вдоль осей Ox и Oy , $u_{j3}^l(x, y)$, $u_{j5}^l(x, y)$, $u_{j4}^l(x, y)$ — соответственно нормальные ε_x и ε_y и касательные τ_{xy} напряжения в l -ой полосе. Индекс $j=1$ ($j=2$) обозначает принадлежность функций и параметров к области $0 \leq y \leq 1$ ($-1 \leq y \leq 0$).

Граничные условия и условия на бесконечности запишем в виде

$$\sigma_{y_1}(X_1, 0) = \tau_{x_1 y_1}(X_1, 0) = 0 \quad (3.1)$$

$$u_{1s}^{l-1}(x+a, 1) = u_{2s}^l(x-a, -1), \quad s=1, 2, 3, 4 \quad (3.2)$$

$$u_{1s}^l(x, 0) = u_{2s}^l(x, 0) \quad s=2, 3, 4 \quad (3.3)$$

$$u^l(x) = u_{11}^l(x, 0) - u_{21}^l(x, 0) = 0 \quad (x < 0) \quad (3.4)$$

$$\tau^l(x) = u_{14}^l(x, 0) = -\tau^l(x, 0) \quad (x \geq 0) \quad (3.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\int_0^1 u_{15}^l(x, y) dy + \int_{-1}^0 u_{25}^{l-1}(x, y) dy \right] = 2P_l \quad (3.6)$$

Применим к выражениям (3.1)–(3.6) дискретное преобразование Фурье с параметром $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$f(x, y, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f^l(x, y) \exp(-i\varphi l) \quad (3.7)$$

$$f^l(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y, \varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi \quad (3.8)$$

Тогда задача (3.1)–(3.6) для полуплоскости сведется к смешанной краевой задаче в плоскости трансформант для полуполосы с косым торцом $-1 \leq y \leq 1$, $-\infty < Y \leq H$ (фиг. 2)

$$v_Y(X, H, \varphi) = v_{XY}(X, H, \varphi) = 0 \quad (3.9)$$

$$u_{1s}(x+a, 1, \varphi) = e^{i\varphi} u_{2s}(x-a, -1, \varphi) \quad (3.10)$$

$$s=1, 2, 3, 4$$

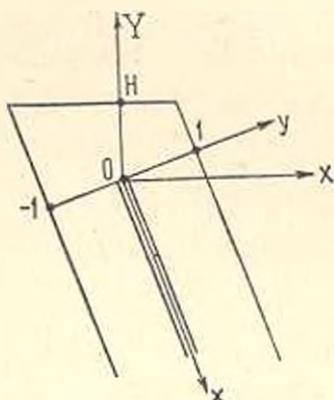
$$u_s(x, 0, \varphi) = u_{2s}(x, 0, \varphi), \quad s=2, 3, 4 \quad (3.11)$$

$$u(x, \varphi) = u_{11}(x, 0, \varphi) - u_{21}(x, 0, \varphi) = 0, \quad (x < 0) \quad (3.12)$$

$$v_1(x, \varphi) = -v_1(x, \varphi), \quad (x \geq 0) \quad (3.13)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 u_{1s}(x, y, \varphi) dy + e^{i\varphi} \int_{-1}^0 u_{2s}(x, y, \varphi) dy \right| = 0$$

$$= 2z(\varphi) \quad (3.14)$$



Фиг. 2

$$v(x, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l^*(x) e^{-i\varphi l}, \quad \sigma(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l e^{-i\varphi l} \quad (3.15)$$

Задачу (3.9)–(3.15) будем решать методом кусочно-однородных решений, полагая

$$u^2(x, y, \varphi) = u_{js}(x, y, \varphi) + \sum_{k=1}^n u_k^k(x, y, \varphi) \quad (3.16)$$

где $u_{js}(x, y, \varphi)$ – решение неоднородной, а $\{u_k^k(x, y, \varphi)\}$ – система кусочно-однородных решений задачи для бесконечной полосы со щелью.

4. Неоднородная задача для бесконечной полосы ($-\infty < x < \infty$, $-1 \leq y \leq 1$) определяется условиями (3.10)–(3.15). Возьмем ее решение в форме Папковича-Нейбера и применим к нему двустороннее преобразование Лапласа по x . Удовлетворив семи основным граничным условиям (3.10), (3.11), получим аналогично [1]

$$u_{js}(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p, \varphi) u_{j1}^*(p, y, \varphi) e^{px} dp \quad (4.1)$$

$$u_{j1}^*(p, y, \varphi) = \sin py (\rho_j + x_1 \delta \sin 2p) + \cos py [(-1)^j x_1 \delta g_j - \varepsilon] \quad (4.2)$$

$$u_{j2}^*(p, y, \varphi) = \sin py [(-1)^{j+1} x_2 \delta g_j - \varepsilon] + \cos py (\rho_j + x_2 \delta \sin 2p) \quad (4.3)$$

$$u_{j3}^*(p, y, \varphi) = 2Gp \{ \sin py (\rho_j + 2\delta \sin 2p) + \cos py [(-1)^j 2\delta g_j + \varepsilon] \} \quad (4.4)$$

$$u_{j4}^*(p, y, \varphi) = 2Gp \{ \sin py [(-1)^{j+1} \delta g_j - \varepsilon] + \cos py (\rho_j + \delta \sin 2p) \} \quad (4.5)$$

$$u_{j5}^*(p, y, \varphi) = -2Gp \{ \rho_j \sin py + \varepsilon \cos py \} \quad (4.6)$$

где контур L – прямая, $\text{Re } p = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, лежащая правее мнимой оси.

$$\delta = \delta(p, \varphi) = \text{ch}(2ap - i\varphi) - \cos 2p, \quad x_1 = 2(1-\nu), \quad x_2 = 2\nu - 1$$

$$g_j = g_j(p, \varphi) = \exp|(-1)^j (2ap - i\varphi)| - \cos 2p$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \varphi) = p \sin 2p [\delta y - 2 \operatorname{sh}(2ap - i\varphi)]$$

$$\rho_j = \rho_j(p, \varphi) = p \{ (-1)^{j+1} y^2 g_j - 2[1 - \cos 2p \operatorname{ch}(2ap - i\varphi)] \}, \quad j = 1, 2$$

Подставив (4.1)–(4.6) в смешанные условия (3.12)–(3.13), получим систему двух функциональных уравнений

$$u^-(p, \varphi) = -2\gamma_1 D_1(p, \varphi) C(p, \varphi), \quad \tau^-(p, \varphi) + \tau^+(p, \varphi) = 2GD_2(p, \varphi) C(p, \varphi) \quad (4.7)$$

где

$$u^{\pm}(p, \varphi) = \int_0^{\infty} u(x, \varphi) e^{-px} dx, \quad \tau^{\pm}(p, \varphi) = \int_0^0 \tau_1(x, \varphi) e^{-px} dx$$

$$\tau^+(p, \varphi) = \int_0^{\infty} \tau_1(x, \varphi) e^{-px} dx \quad (4.8)$$

$$D_1(p, \varphi) = D^2(p, \varphi), \quad D_2(p, \varphi) = p \sin 2p \lambda(p, \varphi) - 2p^2 [1 - \cos 2p \operatorname{ch}(2ap - i\varphi)] \quad (4.9)$$

Исключив из (4.7) функцию $C(p, \varphi)$, получим уравнение Винера-Хопфа

$$u^+(p, \varphi) = K(p, \varphi) [\tau^-(p, \varphi) + \tau^+(p, \varphi)] \quad (p \in L) \quad (4.10)$$

$$K(p, \varphi) = -\frac{\gamma_1}{G} \frac{D_1(p, \varphi)}{D_2(p, \varphi)}$$

Общее решение неоднородной задачи (4.10) согласно [2] выражается формулами

$$u^{\pm}(p, \varphi) = u_0^{\pm}(p, \varphi) [I(p, \varphi) + A(\varphi)] \quad (4.11)$$

$$I(p, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau_0^{\pm}(t, \varphi)}{\tau_0^{\pm}(t, \varphi)(t-p)} dt$$

Здесь $u_0^{\pm}(p, \varphi)$, $\tau_0^{\pm}(p, \varphi)$ — каноническое решение однородного уравнения Винера-Хопфа $u^{\pm}(p, \varphi) = K(p, \varphi) \tau^{\pm}(p, \varphi)$, построенное, как в [3], и имеющее вид

$$u_0^+(p, \varphi) = \frac{\Gamma(1+p)}{p^2 \Gamma(1/2+p)} \exp I_1(p, \varphi), \quad \operatorname{Re} p \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\tau_0^-(p, \varphi) = \frac{G}{\gamma_1} \frac{\Gamma(1/2-p)}{\Gamma(1-p)} \exp I_1(p, \varphi), \quad \operatorname{Re} p < 0 \quad (4.13)$$

$$I_1(p, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_1(t, \varphi)}{t-p} dt, \quad K_1(p, \varphi) = -p \operatorname{tg} \pi p \frac{D_1(p, \varphi)}{D_2(p, \varphi)}$$

Найдем функцию $A(\varphi)$. Подставив (4.7) в (4.1), учитывая (4.10), (4.11) и заменив функцию $K(p, \varphi)$ выражением $u_0^+(p, \varphi) [\tau_0^-(p, \varphi)]^{-1}$, получим

$$u_{js}(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l [A(\varphi) + K(p, \varphi)] \frac{\tau_0(p, \varphi) u_{js}^*(p, y, \varphi)}{2iD_2(p, \varphi)} e^{px} dp \quad (4.14)$$

Разложим внешний интеграл (2.14) в ряд по вычетах, взятым в полюсах функции $[D_2(p, \varphi)]^{-1}$, и перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$, ($\operatorname{Re} p \leq 0$). Тогда имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{1s}(x, y, \varphi) = -1/2 \tau_0^-(0) (e^{i\varphi} - 1) [A(\varphi) + I^-(0, \varphi)] \quad (4.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{2s}(x, y, \varphi) = 1/2 \tau_0^-(0) (e^{-i\varphi} - 1) [A(\varphi) + I^-(0, \varphi)] \quad (4.16)$$

Подставив (4.15), (4.16) в (3.14), получим

$$A(\varphi) = \frac{\tau(\varphi)}{\tau_0^-(0)(1 - e^{i\varphi})} - I^-(0, \varphi) \quad (4.17)$$

Из (4.17) и из формулы Сохоцкого следует

$$A(\varphi) = \frac{\tau(\varphi)}{\tau_0^-(0)(1 - e^{i\varphi})} + \frac{1}{2} \frac{\tau_0^-(0, \varphi)}{\tau_0^-(0)} + \frac{2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_0^-(t, \varphi)}{\tau_0^-(t, \varphi)} \frac{dt}{t} \quad (4.18)$$

$$\tau_0^-(0) = \frac{2G \exp I(0, \varphi)}{x_1 \sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

Таким образом, решение смешанной неоднородной задачи (3.10) — (3.15) для бесконечной полосы получено в квадратурах.

5. Построим систему кусочно-однородных решений $u_{js}^n(x, y, \varphi)$ ($k=1, 2, \dots$) задачи (3.10) — (3.13) при $\tau(x, \varphi) = 0$, $P_l = 0$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) [4] с особенностями при $x = -\infty$. Распространим условие (3.12) на всю границу $-\infty < x < \infty$, $y = 0$. Тогда полученным однородным граничным условиям

$$u_{1s}(x+a, 1, \varphi) = e^{i\varphi} u_{2s}(x-a, -1, \varphi), \quad u_{1s}(x, 0, \varphi) = u_{2s}(x, 0, \varphi), \quad s=1, 2, 3, 4 \quad (5.1)$$

удовлетворяет решение

$$u_{js}^k(x, y, \varphi) = A_k [u_{js}^*(-p_k, y, \varphi) + x u_{js}^*(-p_k, y, \varphi)] e^{-p_k x} + B_k u_{js}^*(-p_k, y, \varphi) e^{-p_k x} \quad (5.2)$$

Здесь штрих означает производную по p , A_k, B_k — комплексные произвольные постоянные, p_k — комплексные нули функции $D_2(p, \varphi)$ в правой полуплоскости ($k=1, 2, \dots$)

$$p_{4n-3} = \frac{[(4n-3)\pi + \varphi/2](1+ai)}{1+a^2}, \quad p_{1n-1} = \frac{[(1n-1)\pi - \varphi/2](1+ai)}{1+a^2} \quad (5.3)$$

$$p_{1n-2} = \bar{p}_{1n-3}, \quad p_{4n} = \bar{p}_{4n-1}, \quad A_{4n-2} = \bar{A}_{4n-3}, \quad A_{4n} = \bar{A}_{4n-1}$$

$$B_{1n-2} = \bar{B}_{1n-3}, \quad B_{4n} = \bar{B}_{4n-1}, \quad n=1, 2, \dots$$

Для удовлетворения условию $\tau_1(x, \varphi) = 0$ при $x \geq 0$ добавим к решению (3.2) решение смешанной задачи (3.10)–(3.13) при условии

$$\tau(x, \varphi) = u_{11}^k(x, 0, \varphi) \quad (x \geq 0) \quad (5.4)$$

которое находится так же, как в п. 4 при $P_1 = 0$, и имеет вид

$$u_{j_1}^{k2}(x, y, \varphi) = A_k [T_{k1} J_{j_1}^1(x, y, \varphi) + L_{k1} J_{j_1}^2(x, y, \varphi) + L_{k2} J_{j_1}^3(x, y, \varphi)] + \\ + B_k [T_{k1} J_{j_1}^4(x, y, \varphi) + L_{k1} J_{j_1}^5(x, y, \varphi)] \quad (5.5)$$

$$T_{ki} = T_i(-p_k), \quad L_{ki} = L_i(-p_k), \quad i = 1, 2$$

$$T_1(p) = \frac{\tau_1(p)}{p \tau_0^-(p, \varphi)} - \frac{[\tau_1(p) p^{-1} - \tau_2(p)]}{p \tau_0^-(p, \varphi)}, \quad T_2(p) = \frac{\tau_2(p)}{p \tau_0^-(p, \varphi)}$$

$$L_1(p) = \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)} + \frac{\tau_2(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)}, \quad L_2(p) = \frac{\tau_2(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)}$$

$$\tau_1(p) = u_{11}^+(p, 0, \varphi), \quad \tau_2(p) = u_{11}^-(p, 0, \varphi)$$

$$J_{j_1}^k(x, y, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i k_1} \int_{\Sigma} \frac{u_{11}^+(p, \varphi) u_{j_1}^-(p, y, \varphi) \exp(p x)}{(p - p_k)^{n-1} J_{j_1}^k(p, \varphi)} dp \quad (k=1, 2, 3) \quad (5.6)$$

Теперь k -й элемент системы кусочно-однородных решений может быть выписан как сумма

$$u_{j_1}^k(x, y, \varphi) = u_{j_1}^{k1}(x, y, \varphi) + u_{j_1}^{k2}(x, y, \varphi) \quad (5.7)$$

Перейдем к решению задачи для волуполосы в плоскости трансформант. Для удовлетворения условию на торе (3.9) воспользуемся построенной в п. 5 системой кусочно-однородных решений (5.7).

6. Разложим интегралы (5.6) при $s=3, 4$ в ряды по вычетам в полюсах функции $[D_s(p, \varphi)]^{-1}$. Используя выражения (4.2)–(4.6) и комплексную сопряженность функций (5.3) вычислим $u_{j_1}^{2k-1}(x, y, \varphi) + u_{j_1}^{2k}(x, y, \varphi)$ ($k=1, 2, \dots$). В полученных выражениях перейдем к координатам X, Y . Полагая $Y=H$, $X_{k1} = \operatorname{Re} A_k \exp(q_k H)$, $X_{k2} = \operatorname{Im} A_k \exp(q_k H)$, $X_{k3} = \operatorname{Re} B_k \exp(q_k H)$, $X_{k4} = \operatorname{Im} B_k \exp(q_k H)$, получим

$$u_{j_1}^{2k-1}(X, H, \varphi) + u_{j_1}^{2k}(X, H, \varphi) = \sum_{l=1}^4 \left\{ a_s b_{ks} X_{kl} | (d_{ks}^l H + e_{ks}^l) \cos q_k X + \right. \\ \left. + (-1)^l (d_{ks}^l H + e_{ks}^l) \sin q_k X \right| + \gamma_s \sum_{n=1}^{\infty} b_{ns} \exp(-(q_k + q_n) H) X_{kl} | (b_{ns}^l H + \\ + c_{ns}^l) \cos q_n X + (-1)^l (\bar{b}_{ns}^l H + \bar{c}_{ns}^l) \sin q_n X \left. \right\} \quad (6.1)$$

Здесь и ниже \sum' означает суммирование по нечетным k

$$q_k = \sqrt{1 + a^2} \operatorname{Re} p_k, \quad a_3 = a_4 = 8G, \quad \theta_{k3} = \theta_{k4} = q_k, \quad \gamma_3 = -\gamma_4 = 1G_{k1}^{-1}$$

$$d_{k1}^1 = -d_{k2}^1 = F_k, \quad d_{k3}^1 = d_{k4}^1 = E_k, \quad d_{n3}^2 = d_{n4}^2 = \bar{d}_{k1}^2 = \bar{d}_{k2}^2 = 0$$

$$e_{k3}^1 = -H_{k3}, \quad e_{k1}^1 = H_{k4}, \quad e_{k3}^2 = -G_{k3}, \quad e_{k1}^2 = G_{k4}, \quad e_{k3}^3 = -e_{k1}^3 = F_{k3}(1-a^2)^{-1/2}$$

$$e_{k3}^3 = e_{k1}^4 = -F_{k3}(1+a^2)^{-1/2}, \quad \bar{e}_{k1}^1 = e_{k3}^2, \quad \bar{e}_{k3}^2 = e_{k1}^1, \quad \bar{e}_{k1}^3 = -e_{k3}^1, \quad \bar{e}_{k3}^1 = e_{k1}^3$$

$$c_{ns}^{kl} = H_n \operatorname{Re} S_i + G_n \operatorname{Im} S_i + \gamma_{ni}^l, \quad \bar{c}_{ni}^{kl} = G_n \operatorname{Re} S_i - H_n \operatorname{Im} S_i - \bar{\gamma}_{ni}^l, \quad (s=3, 4)$$

$$b_{n1}^{kl} = -\bar{b}_{n3}^{kl} = \alpha_{1i}, \quad b_{n3}^{kl} = \bar{b}_{n1}^{kl} = \alpha_{2i}, \quad \bar{\gamma}_{n3}^l = \gamma_{n1}^l = \beta_{1i}, \quad -\gamma_{n1}^l = \bar{\gamma}_{n3}^l = \beta_{2i}$$

$$\alpha_{1i} = F_n \operatorname{Re} S_i + E_n \operatorname{Im} S_i, \quad \alpha_{2i} = E_n \operatorname{Re} S_i - F_n \operatorname{Im} S_i, \quad (i=1, 3)$$

$$\alpha_{1i} = E_n \operatorname{Re} S_i + F_n \operatorname{Im} S_i, \quad \alpha_{2i} = -F_n \operatorname{Re} S_i + E_n \operatorname{Im} S_i, \quad (i=2, 4)$$

$$\beta_{1i} = (F_n \operatorname{Re} V_i + E_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1}, \quad \beta_{2i} = (E_n \operatorname{Re} V_i - F_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1} \quad (i=1, 3)$$

$$\beta_{1i} = (E_n \operatorname{Re} V_i - F_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1}, \quad \beta_{2i} = (-F_n \operatorname{Re} V_i + E_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1} \quad (i=2, 4)$$

$$F_n = q_n(\xi_{1n} - a\xi_{2n}), \quad E_n = q_n(\xi_{1n} + a\xi_{2n}), \quad H_{n1} = \alpha_1 \xi_{1n} - a\alpha_2 \xi_{2n} + \rho_{1n}$$

$$H_{n3} = \alpha_2 \xi_{1n} - a\alpha_1 \xi_{2n}, \quad H_{n4} = \xi_{2n} + a\xi_{1n} + \rho_{1n}$$

$$G_{n1} = -\alpha_2 \xi_{1n} - a\alpha_1 \xi_{2n} + \rho_{2n}, \quad G_{n2} = -\alpha_1 \xi_{2n} - a\alpha_2 \xi_{1n} - \rho_{1n}$$

$$G_{n3} = -\alpha_1 \xi_{2n} + \rho_{2n}, \quad G_{n4} = \xi_{1n} - a\xi_{2n} + \rho_{2n}, \quad \xi_{1n} = \operatorname{Re}(\sin^2 2p_n)$$

$$\xi_{2n} = \operatorname{Im}(\sin^2 2p_n), \quad \rho_{1n} = q_n(1+a^2)^{-1/2} \{2a \operatorname{Re}(\sin 4p_n) + (1-a^2) \operatorname{Im}(\sin 4p_n)\}$$

$$\rho_{2n} = q_n(1+a^2)^{-1/2} \{(1-a^2) \operatorname{Re}(\sin 4p_n) - 2a \operatorname{Im}(\sin 4p_n)\}$$

$$S_i = S_i(-p_n, p_n) = |f_n(-p_n) + (-1)^{i-1} f_n(-\bar{p}_n)| |2'(p_n, \varphi)|^{-2}, \quad i=1, 2$$

$$S_i = S_i(-p_n, p_n) = |g_n(-p_n) + (-1)^{i-1} g_n(-\bar{p}_n)| |2''(p_n, \varphi)|^{-2}, \quad i=3, 4$$

$$V_i = V_i(-p_n, p_n) =$$

$$\frac{|m_n(-p_n) + (-1)^{i-1} m_n(-\bar{p}_n)| |2'(p_n, \varphi)| - |f_n(-p_n) + (-1)^{i-1} f_n(-\bar{p}_n)| |2''(p_n, \varphi)|}{|2'(p_n, \varphi)|^2} \quad (i=1, 2)$$

$$V_i = V_i(-p_n, p_n) =$$

$$\frac{|k_n(-p_n) + (-1)^{i-1} k_n(-\bar{p}_n)| |2'(p_n, \varphi)| - |g_n(-p_n) + (-1)^{i-1} g_n(-\bar{p}_n)| |2''(p_n, \varphi)|}{|2'(p_n, \varphi)|^2} \quad (i=3, 4)$$

$$f_n(p) = u_0^-(p_n, \varphi) \left[T_1(p) + \frac{\gamma_1(p) + \gamma_2(p)(p_n - p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\gamma_1(p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} \right]$$

$$g_n(p) = u_0^-(p_n, \varphi) \left[T_3(p) + \frac{\gamma_1(p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)} \right]$$

$$m_n(p) = u_0^-(p_n, \varphi) \left[T_1(p) - \frac{\gamma_1(p) - \gamma_2(p)(p_n - p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\gamma_1(p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)} \right] -$$

$$-u_0^-(p_n, \varphi) \left[\frac{2\gamma_2(p) + \gamma_2(p)(p_n - p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\gamma_1(p)}{\gamma_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} \right]$$

$$h_n(p) = u_0^+(p_n, \varphi) \left[T_1(p) + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0(p, \varphi)(p_n - p)} \right] + \frac{u_0^+(p_n, \varphi)\tau_1(p)}{\tau_0(p, \varphi)(p_n - p)^2}$$

Разложим интегралы (4.1) при $s=3, 4$ в ряды по вычетам в полюсах функции $|D_1(p, \varphi)|^{-1}$. Учитывая (5.3), перейдем к координатам X, Y и положим $Y=H$. Тогда получим

$$u_{j1}(X, H) = 4G\alpha^{-1} \sum_{k=1}^s q_k \exp(-q_k H) \{ \cos q_k X [\beta_{k3}^1 H + \beta_{k3}^2] + \sin q_k X [\beta_{k3}^3 H + \beta_{k3}^4] \} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_{k3}^i &= a_{k3}^i \operatorname{Re} Q_1(p_k) + \mu_{k3}^i \operatorname{Im} Q_1(p_k) + k_{k3}^i \\ \alpha_{k3}^1 &= -\alpha_{k4}^1 = -\mu_{k3}^2 = -\mu_{k4}^1 = E_k, \quad \alpha_{k3}^2 = \alpha_{k4}^2 = \mu_{k3}^1 = -\mu_{k4}^2 = -F_k \\ \mu_{k3}^4 &= -\alpha_{k3}^3 = H_{k3}, \quad \alpha_{k3}^4 = \mu_{k3}^3 = -G_{k3}, \quad \alpha_{k4}^3 = -\mu_{k4}^4 = H_{k4} \\ \alpha_{k4}^1 &= \mu_{k4}^2 = G_{k4}, \quad k_{k3}^1 = k_{k3}^2 = k_{k4}^1 = k_{k4}^2 = 0 \\ k_{k3}^2 &= -k_{k4}^1 = [-\operatorname{Re} Q_2(p_k) E_k + \operatorname{Im} Q_2(p_k) F_k] (1 - \alpha^2)^{-1/2} \\ k_{k3}^4 &= k_{k4}^3 = [\operatorname{Re} Q_2(p_k) F_k + \operatorname{Im} Q_2(p_k) E_k] (1 - \alpha^2)^{-1/2} \\ Q_1(p) &= u^-(p, \varphi) |\delta'(p, \varphi)|^{-2} \\ Q_2(p) &= [u^+(p, \varphi) \delta'(p, \varphi) - u^+(p, \varphi) \alpha''(p, \varphi) |\delta'(p, \varphi)|^{-2}] \end{aligned}$$

Учитывая (6.1), (6.2), подставим выражение (3.16) в граничные условия (3.9). В образовавшихся двойных рядах поменяем порядок суммирования. Приравнявая множители при функциях $\cos q_k X$ и $\sin q_k X$, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \left\{ (d_{k1}^i H + e_{k1}^i) X_{k1} + (2x_1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{k3}^{ni} H + c_{k3}^{ni}) \exp(-(q_n + q_k) H) X_{n1} \right\} &= \\ = 4G(x_1)^{-1} q_k \exp(-q_k H) (\beta_{k3}^1 H + \beta_{k3}^2), \quad k=1, 2, \dots, \quad s=3, 4 \quad (6.3) \\ \sum_{i=1}^s \left\{ (\tilde{d}_{k3}^i H + \tilde{e}_{k3}^i) X_{k3} + (2x_3)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{k3}^{ni} H + \tilde{c}_{k3}^{ni}) \exp(-(q_n + q_k) H) X_{n3} \right\} &= \\ = 4G(x_3)^{-1} q_k \exp(-q_k H) (\beta_{k3}^3 H + \beta_{k3}^4), \quad k=1, 2, \dots, \quad s=3, 4 \end{aligned}$$

Эта система является нормальной по Пуанкаре-Коху, в ней диагональные матричные элементы экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов. Неизвестные $X_{ki} = X_{ki}(\varphi)$ могут быть найдены из соответствующей редуцированной системы.

Применив к полученному решению для полуплоскости обратное преобразование Фурье (3.8), перейдем от трансформированных к исходным компонентам напряженно-деформированного состояния полуплоскости.

В частности, коэффициент интенсивности касательных напряжений на продолжении l -ой щели определяется по формуле

$$N^I = \frac{G}{\kappa_2 T} \left[\int A(\varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi + \sum_{k=1}^N \int C_k(\varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi \right] \quad (6.4)$$

где

$$C_k(\varphi) = |X_{k1} \operatorname{Re} T_{k1} - X_{k2} \operatorname{Im} T_{k1} - X_{k3} \operatorname{Re} T_{k2} - X_{k4} \operatorname{Im} T_{k2}| \exp(-q_k H)$$

FLAMANT PROBLEM FOR HALF-PLANE WEAKENED BY PERIODIC SYSTEM OF INCLINED CRACKS

G. A. KAMYSEVA, B. M. NULLER

ԹԵՄ ՃԱՔԵՐ ՊԱՐԵՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱՎԱՐԳՈՎ ԹՈՒԱՑՎԱՍ
ԿՈՍԱԶԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՅԼԱՄԱՆԻ ԿՆԴԻՐԸ

Գ. Ա. ԿԱՄՍԵՎԱ, Բ. Մ. ՆՈՒԼԵՐ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ի հատրկում է առաձգական կիսահարթուի շեֆորմացիայի խնդիրը որը թուլացված է կիսաանվերջ, փակ, թեք ճաքերի պարբերական համակարգով: Ենթադրվում է, որ ճաքերում շոշափող լարումները հավասար են զրոյի, ճաքի ափերը դեֆորմացիայի ընթացքում չեն հեռանում, կիսահարթուի լայն կերի կիրառված է կենտրոնացված նորմալ ուժ, իսկ անվերջությունում երկու հարևան ճաքեր ձգված են կամայական երկայնական ուժերով: Այս խնդրի օրինակով մշակված է կտոր առ կտոր համասեռ լուծումների մեթոդի մի տարբերակ, որը թույլ է տալիս Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների հետ համատեղ լուծել քվադրպարբերական խառը խնդիրների մի ամբողջ դաս: Խնդիրը ընդված է Պոանկարե-Կոշի նորմալ համակարգի: Ստացված է բանաձև ցանկացած ճաքում լարումների ինտենսիվության գործակցի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Камышева Г. А., Нуллер Б. М. Об одном классе смешанных периодических задач теории упругости, разрешимых в квадратурах — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 2, с. 311—314.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.
3. Камышева Г. А., Нуллер Б. М., Рыжков М. Б. Деформация упругой плоскости, подкреплённой периодической системой неперпендикулярно нагруженных наклонных полубесконечных стержней. — МТТ, 1982, № 3, с. 118—123.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1977. 403 с.

Ленинградская Лесотехническая академия
им. С. М. Кирова.

ВНИИГидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила в редакцию
18.VI.1985

УДК 539.375

КОСОЕ СОУДАРЕНИЕ УПРУГИХ ПОЛОСЫ И
 ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РЕЗКО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ
 ПАРАМЕТРАМИ

САЖИН В. В.

1. В декартовой подвижной системе координат xOy рассмотрим соударение жидкой полосы ($0 < y < 1$, $|x| < \infty$) с упругим полупространством ($y < 0$, $|x| < \infty$) как установившееся движение. При $x < 0$, $y = 0$ полоса и полупространство взаимодействуют при условии непрерывности нормальных компонент скорости и давления: при $x > 0$, $y = 0$ (разрез) ставится условие отсутствия давлений и задается скачок нормальной скорости на бесконечности: верхняя грань полосы не нагружена. Скорость движения точки контакта c — дозвуковая, а касательная скорость полосы мала по сравнению с волновыми. Обозначим (u, v) — компоненты массовой скорости по осям x, y : σ_{xx}, τ, τ — нормальные и тангенциальные компоненты тензора напряжений: p — давление в жидкости. За единицы измерения примем: плотность упругого полупространства ρ_1 , скорость поперечных волн c_1^0 и $2\rho_1$, где ρ — модуль сдвига, c_1 и $c_2 = 1$ — безразмерные скорости продольных и поперечных волн в упругом теле, а c_0 — безразмерная скорость звука в акустической среде. Уравнения для продольного φ и поперечного ψ потенциалов скоростей в упругой области и уравнение для потенциала скорости χ в жидкости будут уравнениями эллиптического типа:

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 \chi_{,xx} + \chi_{,yy} &= 0, & \Delta_1^2 \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} &= 0 \\ \Delta_2^2 \psi_{,xx} + \psi_{,yy} &= 0, & \beta_j &= \sqrt{1 - c_0^2/c_j^2}, \quad j=0, 1, 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Скорости, напряжения и давление связаны с φ, ψ, χ известными соотношениями [5].

Краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p=0 \quad (y=1, |x| < \infty); \quad \tau=0 \quad (y=0, |x| < \infty) \\ \tau=-p, \quad \tau=0 \quad (y=0, x < 0); \quad \tau=p=0 \quad (y=0, x > 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

σ — скачок скорости на границе раздела двух сред. Для выделения постоянной составляющей скачка скорости при $x \rightarrow \infty$ используем условие [4]

$$v_x = \lim_{x_1, x_2, x_1/x_2 \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x, 0)}{x_2 - x_1} dx = -v_0 \quad (1.3)$$

Необходимость этого условия обусловлена тем, что решение на бесконечности может содержать собственные волны. В точках нерегулярности решения $x=y=0$ и $x=\pm\infty$ следует наложить дополнительные условия: конечности и неотрицательности потока энергии в точку $x=y=0$:

$$0 \leq e_0 < \infty \quad (1.4)$$

а на бесконечности учтем энергетический принцип излучения Мандельштама [6] — энергия распространяется от источника на бесконечность, но не наоборот.

2. Выполним преобразование Фурье всех функций по x с параметром k .

Введем обозначения:

$$V^+(k) = \int_0^{\infty} v(x, 0) \exp(ikx) dx, \quad \Sigma^-(k) = \int_{-\infty}^0 z(x, 0) \exp(ikx) dx$$

Функция $V^+(\xi)$ ($\Sigma^-(\xi)$) аналитична в верхней (нижней) полуплоскости комплексного переменного $\xi = k + im$. Решая преобразованные уравнения (1.1) с учетом краевых условий (1.2), можно получить выражения для Фурье-образов потенциалов скоростей через функцию $\Sigma^-(k)$

$$\chi = \frac{2i\Sigma^-}{k\beta_0 c} \cdot \frac{\text{sh}[\beta_0 k(y-1)]}{\text{sh}(\beta_0 k)} \quad (2.1)$$

$$\Phi = -\frac{ic\Sigma^-}{k\beta R} \exp(\beta_1 |k| y), \quad \Psi = \frac{c\beta_1 \Sigma^- \text{Sgn} k}{k\beta^2 R} \exp(\beta_2 |k| y)$$

где $R = \beta_1 \beta_2 / \beta^2 - 1$ — функция Рэлея, $\beta = (1 + \beta_2^2) / 2$.

Удовлетворяя условию $V(k, 0) = V^-(k)$, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^+(k) = H(k) \Sigma^-(k), \quad (2.2)$$

$$H(k) = \frac{2i\beta_0}{c\beta R} \{R \text{cth}(\beta_0 |k|) - 2B\} \text{Sgn} k, \quad B = \frac{\beta_0 c^2 \beta_1}{8\beta_0^2 \beta^2}$$

$$H(k) \sim \frac{2i}{\beta_0 c k}, \quad k \rightarrow 0; \quad H(k) \sim \frac{2i\beta_0 S}{\beta_0 c R} = \pm A, \quad k \rightarrow \pm\infty$$

где $S = R - 2B = 0$ — уравнение Стоунли для случая, когда одна из двух сред является идеальной сжимаемой жидкостью. Функция $H(k)$ может обращаться в нуль лишь в интервале $c_S < c < c_R$, где c_S (c_R) — единственный положительный корень уравнения Стоунли (Рэлея). При $0 < c < c_S$ и $c_R < c < c^*$, где $c^* = \min(c_0, 1)$, функция $H(k)$ не имеет действительных корней, а в интервале $c_S < c < c_R$ $H(k)$ имеет два действительных симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_0$, которым отвечают собственные волны, распространяющиеся с групповой скоростью $c_k < c$. Принцип излучения имеет вид

$$c_k < c, \quad x \rightarrow -\infty; \quad c_k > c, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Проводя факторизацию коэффициента $H(k)$ [7, 8] и используя обобщенную теорему Лувинья, приходим к следующим результатам.

Интервалы $c < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$. Особенности $V^*(z)$ определяют следующую структуру $v(x, 0)$: в него входят постоянное слагаемое (вычет в точке $z=0$) и локальное возмущение-экспоненциально исчезающая на бесконечности функция

$$v(x, 0) \underset{x \rightarrow -0}{\sim} \frac{AC_1 \exp(-i\pi/4)}{\sqrt{-\pi x}}, \quad \varepsilon(x, 0) \underset{x \rightarrow -0}{\sim} \frac{C_1 \exp(i\pi/4)}{\sqrt{-\pi x}} \quad (2.4)$$

Используя условие (1.3), получим

$$C_1 = -\sqrt{R/\beta_0} S \rho_0 c v_0 \exp(-i\pi/4) / 2$$

$e_0 = \rho_0 c v_0^2 / 2$. Расход кинетической мощности на единицу длины $K = -\rho_0 c v_0^2 / 2$. Учитывая, что все функции экспоненциально стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$, сразу видим, что энергия сохраняется, $e_0 = K$, то есть вся кинетическая энергия выделяется в нуле. Собственные волны в указанных интервалах отсутствуют. При $x \rightarrow -\infty$ решение экспоненциально стремится к нулю. Полюс $z=0$ обходится сверху.

Интервал $c_s < c < c_R$. В этом интервале $e_0 = 0$, скачок скорости и напряжение $\varepsilon(x, 0)$ непрерывны в точке $x = y = 0$

$$v(x, 0) \sim -2v_0 k_s \sqrt{-S \beta_0 x / \pi R}, \quad x \rightarrow +0$$

$$\varepsilon(x, 0) \sim -\rho_0 c v_0 k_s \sqrt{R x / \pi S \beta_0}, \quad x \rightarrow -0$$

Скачок $v(x, 0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а функция $\varepsilon(x, 0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны (вклад полюсов в точках $z = \pm k_s$ обходится снизу). Выделим эту собственную волну:

$$\varepsilon(x, 0) \sim -\rho_0 c v_0 \sqrt{-R/\beta_0} S \ln\{Q(k_s) \exp[-i(k_s x - \pi/4)]\} / 2, \quad x \rightarrow -\infty$$

Функция $Q(k)$ возникает при факторизации коэффициента $H(k)$ и является аналитической в нижней полуплоскости z .

Рассмотрим теперь нормальные и касательные компоненты скоростей упругой и жидкой фаз на границе раздела. Их Фурье-изображения при $y=0$ выражаются по формулам:

$$W_1(k) = ic^2 \beta_1 \operatorname{Sgn} k \Sigma^-(k) / 2 \beta^2 R, \quad W_0(k) = 2i \beta_0 \operatorname{cth}(\beta_0 k) \Sigma^-(k) / \rho_0 c$$

$$U_1(k) = c(R + 1 + \beta^{-1}) \Sigma^-(k) / R, \quad U_0(k) = -2 \Sigma^-(k) / \rho_0 c$$

Из формулы для $U_0(k)$ сразу видно, что поведение и асимптотики касательной скорости на поверхности жидкой фазы $u_0(x)$ с точностью до коэффициента $-2/\rho_0 c$ совпадает с поведением функции $\varepsilon(x, 0)$. Сложность определения структуры и асимптотик остальных функций в том, что они имеют особенности в обеих z -полуплоскостях. Выделяя особенности в функциях $W_1(k)$, $W_0(k)$ и $U_1(k)$, приходим к следующим результатам.

Интервалы $0 < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$. Поведение функций $w_1(x)$, $w_0(x)$ и $u_1(x)$ — одинаково. И слева, и справа от точки $x=0$ решение

есть локальное возмущение (слева $O(1)$, справа $O(x^{-1/2})$). Для функции $w_0(x)$ в решение добавляется скорость на бесконечности.

Интервал $c_S < c < c_R$. Решение для всех функций представляет из себя локальное возмущение $O(1)$ при $x > 0$ и расщепляется на локальное возмущение $O(1)$ и собственные волны при $x < 0$. Для функции $w_0(x)$ добавляется скорость на бесконечности. Можно показать, что все полученные асимптотики для функций $w_1(x)$ и $w_0(x)$ согласуются с асимптотиками для скачка скорости v .

3. Перейдем теперь к решению задачи, в которой среды менялись местами. Область $0 < y \leq 1$, $|x| < \infty$ занята упругой средой, а область $y < 0$, $|x| < \infty$ — акустическим полупространством, все обозначения остаются прежними. В крайних условиях (1.2) условие $p = 0$ ($y = 1$, $|x| < \infty$) заменяется условием $\tau = 0$ ($y = 1$, $|x| < \infty$).

Действуя аналогично п. 1—2, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^-(k) = H_1(k) \Sigma^-(k), \quad H_1(k) = \frac{2i\beta_0}{c} \frac{F_1(k)}{\Delta_1(k) \Delta_2(k)}$$

$$H_1(k) \sim \Sigma_1 c k, \quad k \rightarrow 0; \quad H_1(k) \sim \pm A, \quad k \rightarrow \pm \infty$$

$$F_1(k) = \left[\Delta_1(k) \Delta_2(k) - B \left[\Delta_1(|k|) - i \operatorname{th} \frac{\beta_1}{2} \operatorname{th} \frac{\beta_2}{2} \Delta_2(|k|) \right] \right] \operatorname{Sgn} k$$

$$\Delta_1(k) = (R+1) \operatorname{th} \frac{i_1}{2} - i \operatorname{th} \frac{i_2}{2}$$

$$\Delta_2(k) = (R+1) \operatorname{th} \frac{i_2}{2} - i \operatorname{th} \frac{i_1}{2}, \quad i_j = k \beta_j, \quad j = 1, 2$$

Не нулевые действительные решения уравнений $\Delta_1(k) = 0$, $\Delta_2(k) = 0$ известны [9]. Для определения нулей уравнения $F_1(k) = 0$ использовался численный счет. В результате выяснилось, что уравнение $F_1(k) = 0$ в интервале $c_S < c < c_R$ не имеет действительных ненулевых корней, а в интервалах $0 < c < c_S$ и $c_S < c < c^*$ — по два действительных симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_3$ и $k = \pm k_4$. Корни уравнения $\Delta_1(k) = 0$, $k = \pm k_1$ существуют только при $c > c_R$, а корни уравнения $\Delta_2(k) = 0$, $k = \pm k_2$ существуют лишь при $c < c_R$. Для уравнения $F_1(c, k) = 0$ была численно рассчитана производная $c'(k)$ в точках $k = \pm k_i$, $i = 3, 4$. Оказалось, что корням $k = \pm k_3$ отвечают собственные волны с $c_R > c$, а корням $k = \pm k_4$ — собственные волны с $c_R < c$ (совместные локализованные колебания упругой и жидкой фаз).

Выделяя особенности и проводя факторизацию коэффициента $H_1(k)$, получим выражения для оригиналов $v(x, 0)$ и $\tau(x, 0)$ в трех интервалах звукового диапазона точки контакта.

Интервал $0 < c < c_S$. $v(x, 0)$ состоит из постоянного слагаемого, локального возмущения и собственной волны. Асимптотическое поведение оригиналов вблизи точки $x = y = 0$ описывается формулами (2.4), где вместо коэффициента C_1 стоит C_4 :

$$C_2 = -cv_0 k_2 \sqrt{\rho_0 k / \rho_0 S} \exp(-i\pi/4) / 2k_2, \quad e_0 = cv_0^2 k_1^2 / 2k_2^2$$

Расходуемая кинетическая мощность $K = cv_0^2/2$, следовательно, часть энергии, выделяющаяся в нуле, зависит от отношения k_2/k_1 (причем $k_2 < k_1$). Решение исчезает при $x \rightarrow -\infty$. Принцип излучения (2.3) удовлетворяется, то есть собственная волна уносит энергию вправо на бесконечность.

Интервал $c_S < c < c_R$. В этом интервале нет потока энергии в нуле, а асимптотики оригиналов в этой точке таковы, что решение является непрерывной функцией x в точке $x=y=0$:

$$v(x, 0) \sim -2v_0 k_2 \sqrt{-S \beta_0 x / \rho_0 \pi} / R, \quad x \rightarrow +0$$

$$z(x, 0) \sim -cv_0 k_2 \sqrt{\rho_0 R x / \pi S \beta_0}, \quad x \rightarrow -0$$

Полюса действительной оси обходятся сверху. Поведение $v(x, 0)$, определяемое особенностями $V(\xi)$ такое же, как и в интервале $0 < c < c_S$. Вся кинетическая энергия столкновения уносится собственной волной вправо на бесконечность.

Интервал $c_R < c < c^$.* Асимптотики в нуле описываются формулами, аналогичными (2.4) (C_1 заменяется на C_2):

$$C_2 = -cv_0 k_1 \sqrt{\rho_0 R / \rho_0 S} \exp(-i\pi/4) / 2k_1$$

Полюс $\xi=0$ обходит сверху, а полюса $\xi = \pm k_1$ — снизу. $v(x, 0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а $z(x, 0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны. Энергия уносится собственной волной влево на бесконечность, что находится в согласии с принципом излучения.

Нормальные и касательные компоненты скорости при $y=0$ имеют следующую структуру. В интервале $0 < c < c_S$ асимптотики всех функций ($w_1(x)$, $w_0(x)$, $u_1(x)$) есть $O(1)$ при $x \rightarrow -0$ и $O(x^{-1/2})$ при $x \rightarrow +0$. Поведение функций таково. При $x < 0$ $w_1(x)$ есть локальное возмущение, при $x > 0$ функция $w_1(x)$ расщепляется на локальное возмущение, собственные волны (сумма вычетов в точках $\xi = \pm k_2$) и скорость упругой полосы при $x \rightarrow \infty$ ($w_1(x) \rightarrow -v_0$, $x \rightarrow \infty$). Для функции $w_0(x)$ решение и слева, и справа представляет из себя локальное возмущение. Функция $u_1(x)$ при $x < 0$ есть локальное возмущение, а при $x > 0$ в решении присутствуют локальное возмущение и собственные волны. Интервал $c_S < c < c_R$. Поведение всех функций не отличается от их поведения в первом интервале, а асимптотики при $x \rightarrow \mp \sim O(1)$. Интервал $c_R < c < c^*$. При $x < 0$ все функции представимы в виде локального возмущения и собственных волн, при $x > 0$ — локального возмущения. Асимптотическое поведение функций качественно совпадает с их поведением в первом интервале при $|x| \rightarrow 0$.

Автор выражает благодарность Н. В. Симонову за полезные обсуждения.

OBLIQUE IMPACTION BETWEEN ELASTIC STRIPS AND HALF-SPACE WITH STRONG DIFFERENT PARAMETERS

V. V. SAZHIN

ԽԻՍՏ ՏԱՐԲԵՐՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԵՎ
ԿԻՍԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ՇԵՂ ՀԱՏՎԱՍԸ

Վ. Վ. ՍԱՅԻՆ

Գիտարկվում են ալիքային դաշտի ելակիրությունները ակուստիկական շերտի և առաձգական կիսատարածության (սուսձգական շերտի և ակուստիկական կիսատարածության) մինչձայնային ուժիմում փոքր անկյան տակ ստացիոնար հատվածի դեպքում: Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ խոնդիրը բերվում է Ռիմանի ընդհանրացված խնդրին: Ֆակտորիզացիայի մեթոդով ստացված լուծումը պարունակում է մի շարք կամայական շաստատուններ, որոնք որոշվում են ելակի կետերում հղած պայմաններից: Կոնտակտի կետի շարժման արագությունների դիսպազոնը Ռեյլի և Սթրոնլիի ալիքների արագություններով բաժանվում է երեք միջակայքի, որոնցից յուրաքանչյուրում լուծման վարքը տարբեր է: Որոշված է լուծման վարքը կոնտակտի կետի շրջակայքում և անվերջությունում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.—М.: Наука, 1977. 408С.
2. Ефремов В. В. Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №1, с. 171—179.
3. Ефремов В. В. О косых соударениях металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №5, с. 167—172.
4. Симонов Н. В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе.—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №6, с. 90—99.
5. Новацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.—М.: Наука, 1972. 439 с.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1977. 640 с.
8. Гахов Ф. Д., Черский Ю. П. Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978. 295 с.
9. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979. 349 с.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию
8.XII.1986