

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXXIV, № 4

1987

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրիկար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅՍՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԵՆԻՔԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րղթ. անդամ, Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րղթ. անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՑՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւկ (օտվ սեկրետար), Յ. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Կ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ (զամ. օտվ. ռեդակտօր), Վ. Գ. ՄԽԻԿԱՐՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Գ. Տ. ՏԱԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ժ Մ. ՏԵԺՐԱԿՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ (օտվ. ռեդակտօր), Ա. Ա. ԿԱԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Մ. Լ. ԿԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ:

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Գ. Վ. Վիրաբյան, Գ. Ա. Սարգսյան—*Խառը եզրային խնդրից ծնված մի դիֆերենցիալ փնջի համար բազմապատիկ լրիվության մասին* 147

Ի. Մ. Գևորգյան—*Անալիտիկ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում բազմանդամային մոտարկումների և թույլ հակադարձելիության մի քանի հարցերի մասին* 152

Ա. Ի. Պետրոսյան—*Բազմաշրջանում ողորկ ֆունկցիաների պիկի բազմությունների մասին* 156

Մ. Կ. Կյուրեղյան—*Վարչամովի տեղադրման օպերատորները Գալուայի դաշտում և նրանց կիրառումը* 159

Ֆ. Ա. Թալսլյան—*Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականություններ և տեղափոխություններ* 164

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ա. Կամինսկի, Կ. Կուրբանով, Ա. Գ. Պետրոսյան— *$Y_3Al_5O_{12}$ և $Lu_3Al_5O_{12}$ սենսիբիլիզացված բյուրեղներում Ho^{3+} իոնների երկմիկրոնային ստիպողական ճառագայթման կինետիկան և սպեկտրալ կազմը 300K ջերմաստիճանում* 169

ՔԻՄԻԱ

Գ. Է. Սաֆարյան, Ռ. Հ. Չալրիկյան, Ն. Մ. Բեյլիբյան—*Իմպուլսային լազերով հարուցված ռադիկալաշղթայական պրոցեսների տարրական հաստատունների որոշման մեթոդ* 174

ԻՆՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ս. Աղաբալյան, Ս. Յա. Դավթյան, Ա. Ա. Բաղդասարյան, Ռ. Ա. Ջաֆարյան, Լ. Ա. Ռուխկյան—*Մարդու ուռուցքային ԴՆԹ-ի բիոլոգիական ակտիվությունը* 179

ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱ

Վ. Ի. Պողոսյան—*Կատվի կարմիր կորիզի խոշոր ըջջային մասի հետին շրջանների աֆերենտ մուտքերը* 183

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Գ. Հ. Բաղալյան, Ն. Հ. Եպիսկոպոսյան—*Գանգլիոզիդների կողմից ինֆարկտով տառապող հիվանդների էրիթրոցիտների ազրեզացիոն ակտիվության ձևափոխման ունակության մասին* 188

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Г. В. Вирабян, Г. А. Саргсян*—О кратной полноте для одного дифференциального пучка, порожденного смешанной краевой задачей 147
- И. М. Геворкян*—Аппроксимация многочленами и некоторые вопросы слабей обратимости в весовых пространствах аналитических функций 152
- А. И. Петросян*—О множествах пика гладких функций в полукруге 158
- М. К. Кюрегян*—Операторные подстановки Варшамова в поле Галуа и их приложение 159
- Ф. А. Талалян*—Равномерно распределенные последовательности и перестановки 164

ФИЗИКА

- А. А. Каминский, К. Курбанов, А. Г. Петросян*—Спектральный состав и кинетика двухмикронного стимулированного излучения ионов Ho^{3+} в sensibilizированных кристаллах $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ при 300 К 169

ХИМИЯ

- Г. Э. Сафарян, Р. О. Чалтыкян, Н. М. Бейлерян*—Метод определения констант скорости радикально-цепных реакций при импульсном лазерном стимулировании 174

БИОХИМИЯ

- А. С. Агабалян, О. Я. Давтян, А. А. Багдасарян, Р. А. Захарян, Л. А. Рухкян*—Биологическая активность ДНК из опухоли человека 179

МОРФОЛОГИЯ

- В. И. Погосян*—Афферентные входы дорсальных отделов крупноклеточной части красного ядра кошки 183

МЕДИЦИНА

- Г. О. Бадалян, Н. Г. Епископосян*—О способности ганглиозидов модифицировать агрегационную активность эритроцитов крови больных инфарктом миокарда 188

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- G. V. Vlrabian, G. A. Sargsian*—On multiple completeness for differential pencil generated by mixed boundary problem 147
- I. M. Gevorkian*—On the polynomial approximation and weak inversion in weighted spaces of analytic functions 152
- A. J. Petrosian*—On peak sets for differentiable functions 156
- M. K. Kureghian*—Operator substitutions of Varshamov in Galois fields and its' applications 159
- F. A. Talalian*—Uniformly distributed sequences and rearrangements 164

PHYSICS

- A. A. Kaminskii, K. Kurbanov, A. G. Petrosian*—Spectral composition and kinetics of two micron stimulated emission of Ho^{3+} ions in sensibilized $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ and $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ crystals at 300K 169

CHEMISTRY

- G. E. Safarian, R. H. Chaltykian, N. M. Beylerian*—A method to determine the constants of the elementary steps of radical-chain processes initiated by pulse lasers 174

BIOCHEMISTRY

- A. S. Agaballian, O. J. Davtian, A. A. Bagdasarian, R. A. Zakharian, L. A. Ruchkian*—Biological activity of DNA from human cancer 179

MORPHOLOGY

- V. I. Pogosian*—Afferent inputs to the dorsal regions of the magnocellular part of the cat's red nucleus 183

MEDICINE

- G. O. Badalian, N. G. Epyskoposian*—On gangliosides ability to modify aggregational activity of blood erythrocytes in patients with myocardial infarction 188

Техн. редактор Азизбекян Л. А.

Сдано в набор 27.03. 1987 г. Подписано к печати 29.06. 1987 г. ВФ 02462

Бумага № 2, 70 × 108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4.2.

Учетно-изд. л. 3, 27. Тираж 460. Заказ 529 Издат. 7117

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.98

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян, Г. А. Саргсян

О кратной полноте для одного дифференциального пучка,
 порожденного смешанной краевой задачей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 25/VI 1986)

В единичном круге Ω_0 с центром в начале координат рассматривается следующая смешанная однородная краевая задача на собственные значения;

$$L_\lambda(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \Delta u = 0, \quad (I)$$

$$Gu \stackrel{\text{def}}{=} \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad (II)$$

где Δ —двумерный оператор Лапласа, $\partial \Omega_0$ —единичная окружность, а α и β действительные числа, относительно которых предполагается, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (1)$$

Задача (I), (II) в случае $\alpha=1, \beta=0$ ранее рассмотрена в работе (1), где путем построения рекуррентных формул доказано существование полной системы полиномиальных собственных функций в комплексном соболевском гильбертовом пространстве $H = \overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0) \oplus \overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0)$. В настоящей заметке устанавливается двукратная полнота системы полиномиальных собственных функций задачи (I), (II) в гильбертовом пространстве H .

В комплексных переменных задача (I), (II) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - [\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda)] \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu_1(\lambda) \cdot \mu_2(\lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (I^*)$$

$$\alpha u + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \bar{z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \Big|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad (II^{**})$$

где $\mu_1(\lambda) = 1 - 2\lambda i; \mu_2(\lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda i}$. (2)

Обозначим систему полиномиальных решений задачи (I), (II) в случае $\alpha=1, \beta=0$, существование которых установлено в (1), через

$$v_{\lambda_n}(z, \bar{z}), \quad (n=1, 2, \dots), \quad (3)$$

которые соответствуют собственным значениям λ_n ($n=1, 2, \dots$). Заметим, что система (3) в соболевском пространстве $\overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0)$ является

двукратно полной в смысле М, В, Келдыша ⁽²⁾. Функции из (3) имеют вид

$$v_{\lambda_m}(z, \bar{z}) = \varphi_m(z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}) + \psi_m(z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}), \quad (4)$$

$$(m=1, 2, \dots),$$

$$\text{где } \varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{n_m} c_k^{(m)} t^k, \quad t = z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}; \quad (5)$$

$$\psi_m(\tau) = \sum_{k=0}^{n_m} d_k^{(m)} \tau^k, \quad \tau = z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}. \quad (6)$$

Ищем собственные функции задачи (I), (II) в виде

$$u_{\lambda_m}(z, \bar{z}) = \Phi_m(z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}) + \Psi_m(z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}), \quad (7)$$

где $\Phi_m(t)$, $\Psi_m(\tau)$ — полиномы, с неопределенными коэффициентами, степени n_m :

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{n_m} a_k^{(m)} t^k; \quad \Psi_m(\tau) = \sum_{k=0}^{n_m} b_k^{(m)} \tau^k. \quad (8)$$

Потребуем, чтобы функция $u_{\lambda_m}(z, \bar{z})$ удовлетворяла следующему соотношению:

$$\alpha u_{\lambda_m}(z, \bar{z}) + \beta \frac{\partial u_{\lambda_m}(z, \bar{z})}{\partial n} = v_{\lambda_m}(z, \bar{z}), \quad (9)$$

Из (4), (7) будем иметь

$$\alpha \Phi_m(t) + \beta t \Phi_m'(t) + \alpha \Psi_m(\tau) + \beta \tau \Psi_m'(\tau) = \varphi_m(t) + \psi_m(\tau). \quad (10)$$

Отсюда относительно неизвестных функций $\Phi_m(t)$ и $\Psi_m(\tau)$ можно написать следующую систему равенств:

$$\begin{cases} \alpha \Phi_m(t) + \beta t \Phi_m'(t) = \varphi_m(t), & (11) \\ \alpha \Psi_m(\tau) + \beta \tau \Psi_m'(\tau) = \psi_m(\tau). & (12) \end{cases}$$

Подставляя выражения (5), (6), (8) в систему (11)—(12) обыкновенных дифференциальных уравнений, получим

$$\alpha \sum_{k=0}^{n_m} a_k^{(m)} t^k + \beta t \sum_{k=0}^{n_m} k a_k^{(m)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n_m} c_k^{(m)} t^k, \quad (13)$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n_m} b_k^{(m)} \tau^k + \beta \tau \sum_{k=0}^{n_m} k b_k^{(m)} \tau^{k-1} = \sum_{k=0}^{n_m} d_k^{(m)} \tau^k. \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и τ , будем иметь

$$\begin{cases} \alpha a_k^{(m)} + \beta k a_k^{(m)} = c_k^{(m)}, \\ \alpha b_k^{(m)} + \beta k b_k^{(m)} = d_k^{(m)} \end{cases} \quad k=0, 1, \dots, n_m. \quad (15)$$

Отсюда находим

$$a_k^{(m)} = \frac{c_k^{(m)}}{\alpha + \beta k}; \quad b_k^{(m)} = \frac{d_k^{(m)}}{\alpha + \beta k}; \quad k=0, 1, \dots, n_m. \quad (16)$$

Таким образом, доказана следующая лемма:

Лемма 1. Если $\alpha/\beta \neq -k$, $k=1, 2, 3, \dots$, то каждой собственной функции задачи (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$) соответствует полиномиальная собственная функция задачи (I), (II) с тем же собственным значением.

Таким образом, при выполнении условий

$$\alpha/\beta \neq -k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (17)$$

нами доказано существование бесконечной системы полиномиальных собственных функций задачи (I), (II). Обозначим эту систему через

$$\{\lambda_m, u_{\lambda_m}(z, \bar{z})\}_{m=1}^{\infty}. \quad (18)$$

Теорема 1. Система полиномиальных собственных функций (18) задачи (I), (II) образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $W_2^0(\Omega_0)$.

Доказательству этой теоремы предположим одну вспомогательную лемму. Обозначим через \mathcal{P} множество всех полиномов от z, \bar{z} . Оператор G действует в \mathcal{P} согласно формуле

$$Gp = \alpha p + \beta z \frac{\partial p}{\partial z} + \beta \bar{z} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (19)$$

Легко видеть, что если

$$p(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N a_{ij} z^i \bar{z}^j, \quad (20)$$

$$\text{то } Gp(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N [\alpha + \beta(i+j)] a_{ij} z^i \bar{z}^j.$$

Лемма 2. При выполнении условий (17) оператор G отображает многообразие полиномов \mathcal{P} на себя одно-однозначно.

Доказательство. Очевидно, что G отображает \mathcal{P} в \mathcal{P} . Пусть $p(z, \bar{z})$ произвольный полином из \mathcal{P} . Рассмотрим новый полином

$$q(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N \frac{a_{ij}}{[\alpha + (i+j)\beta]} \cdot z^i \bar{z}^j. \quad (21)$$

$$\text{Легко проверить, что } Gq(z, \bar{z}) = p(z, \bar{z}). \quad (22)$$

$$\text{Пусть теперь } Gp(z, \bar{z}) = 0. \quad (23)$$

$$\text{Тогда } \sum_{i+j=0}^N [\alpha + \beta(i+j)] a_{ij} z^i \bar{z}^j = 0$$

$$\text{Отсюда следует } [\alpha + (i+j)\beta] a_{ij} = 0, \quad i+j=0, 1, \dots, N. \quad (24)$$

В силу (17) имеем $a_{ij} = 0$, $i+j=0, 1, \dots$, т. е. $p(z, \bar{z}) \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. Из доказанной леммы следует существование обратного оператора G^{-1} , отображающего \mathcal{P} на \mathcal{P} , согласно формуле

$$G^{-1}p(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N \frac{a_{ij}}{[\alpha + \beta(i+j)]} z^i \bar{z}^j. \quad (25)$$

Доказательство теоремы 1. Как показано в работе (1), система векторов

$$\left\{ \hat{v}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_m} \\ \lambda_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix} \right\}_{m=1}^{\infty} \quad (26)$$

образует полную систему в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$H = W_2^{(1)}(\Omega_0) \oplus W_2^{(1)}(\Omega_0). \quad (27)$$

Согласно лемме 1 каждой собственной функции v_{λ_m} задачи (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$) соответствует собственная функция u_{λ_m} задачи (I), (II), так что

$$Gu_{\lambda_m} = v_{\lambda_m}. \quad (28)$$

Положим

$$\hat{G} \hat{u}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} Gu_{\lambda_m} \\ \lambda_m Gu_{\lambda_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_m} \\ \lambda_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix} = \hat{v}_{\lambda_m}. \quad (29)$$

Пусть $\hat{w} \in H$ — произвольная вектор-функция с полиномиальными компонентами

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} (1-z\bar{z})^2 p(z, \bar{z}) \\ (1-z\bar{z})^2 q(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где p и q произвольные полиномы от z, \bar{z} . Тогда очевидно, что $\hat{G}\hat{w} \in H$. Но, как показано в работе (1), вектор-функцию $\hat{G}\hat{w}(z, \bar{z})$ можно представить в виде конечной линейной комбинации собственных векторов \hat{v}_{λ_m} , соответствующих задаче (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$):

$$\hat{G}\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{v}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} \sum_m \alpha_m v_{\lambda_m} \\ \sum_m \lambda_m \alpha_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) имеем

$$\hat{G}\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{G} \hat{u}_{\lambda_m} = \hat{G} \left(\sum_m \alpha_m \hat{u}_{\lambda_m} \right). \quad (32)$$

В силу существования (лемма 2) обратного оператора G^{-1} , из (32) заключаем

$$\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{u}_{\lambda_m}. \quad (33)$$

Но поскольку, как это показано в работе (3), множество полиномиальных векторов вида (30) всюду плотно в гильбертовом пространстве H , то теорема доказана.

Замечание. В случае $\alpha=0, \beta=1$, т. е. в случае задачи Неймана для уравнения (1), оператор G принимает вид

$$Gu = z \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}.$$

Этот оператор на пространстве всех полиномов \mathcal{P} не имеет обратного G^{-1} . В этом случае оператор G^{-1} можно применить на тех и только тех полиномах, которые обращаются в нуль в начале коор-

динат. Поэтому с помощью вышеприведенной процедуры можно построить те собственные функции задачи Неймана, которые соответствуют тем собственным функциям задачи Дирихле (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$), которые обращаются в нуль при $z=0$.

Таким образом, построенная система полиномиальных собственных функций задачи Неймана не образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}_2^1(\Omega_0)$.

Ереванский государственный
университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Խառն եզրային խնդրից ծնված մի դիֆերենցիալ փնջի համար
բազմապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում (I), (II) համասեռ եզրային սպեկտրալ խնդրի համար, երբ Ω տիրույթը միավոր շրջանն է, ապացուցված է բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների համակարգի կրկնապատիկ լրիվությունը $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ կոմպակտ սորոկլան-հիլբերտյան տարածության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Т. И. Зеленьяк, ДАН СССР, т. 158, № 6 (1964). ² М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, Тр. междунар. симп. по применению т. ф. к. п. в механике сплошной среды, Наука, М., 1965. ³ Г. В. Вирабян, ДАН АрмССР, т. 48, № 2 (1969).

УДК 517.553

МАТЕМАТИКА

И. М. Геворкян

Аппроксимация многочленами и некоторые вопросы слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 2/X 1986)

1°. Пусть Π — правая полуплоскость, $\mathcal{H}(\Pi)$ — множество всех аналитических в Π функций. Предположим, что φ монотонно растущая, неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Символом A_{φ}^p ($0 < p < +\infty$) обозначим пространство

$$A_{\varphi}^p = \{f \in \mathcal{H}(\Pi) : \|f\|_{A_{\varphi}^p}^p = \int_{\Pi} |f(\xi)|^p \exp(-\varphi(|\xi|)) dm_2(\xi) < +\infty,$$

где m_2 — плоская мера Лебега.

Пусть далее $A_{\varphi}^{\infty} = A_{\varphi} = \{f \in \mathcal{H}(\Pi) : f \in C(\overline{\Pi}), |f(z)| \cdot \exp(-\varphi(|z|)) \rightarrow 0 (|z| \rightarrow +\infty), \|f\|_{A_{\varphi}} = \sup_{z \in \Pi} \{|f(z)| \exp(-\varphi(|z|))\}$.

М. М. Джрбашьяном в работе (1) была найдена полная характеристика тех φ , для которых множество всех многочленов \mathcal{P} всюду плотно в пространствах A_{φ}^2 и A_{φ} . А именно, им была доказана

Теорема А. Пусть φ монотонно растущая, неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Предположим, что $t\varphi'(t) \uparrow \infty (t \rightarrow \infty)$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1) множество \mathcal{P} всюду плотно в пространстве A_{φ}^2 ;

2)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = +\infty.$$

Аналогичное утверждение справедливо и в случае пространства A_{φ} . В первой части этой заметки мы распространим теорему А на случай A_{φ}^p , где $0 < p < +\infty$. При этом отметим, что основная идея доказательства теоремы А о сведении вопроса полноты к изучению проблемы Ватсона сохраняется и при $1 < p < +\infty$.

Во второй части мы изучаем вопросы полноты рациональных функций в весовых пространствах аналитических в многосвязном круге функций.

2°. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть φ — монотонная, неотрицательная функция на $(0, +\infty)$, и предположим, что $t\varphi'(t) \uparrow +\infty, (t \rightarrow +\infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) система полиномов полна в пространстве $A_{\varphi}^{p_0}$ при некотором $0 < p_0 < +\infty$;

2) система полиномов полна в пространствах A_{φ}^p при всех $0 < p < +\infty$;

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = +\infty.$$

Замечание. Отметим, что если вместо полноты многочленов рассматривать полноту системы $\left\{ \frac{1}{z-z_k} \right\}_1^{\infty}$, $\operatorname{Re} z_k < 0$, $k=1, 2, \dots$, в пространствах A_{φ}^p , то условие полноты существенно зависит от p (см. (2)).

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости и $z = L(w) = \frac{1+w}{1-w}$ — дробно-линейное отображение D на Π . Предположим $f \in \mathcal{H}(\Pi)$. Тогда функция $g(w) = f(L(w)) = f\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \in \mathcal{H}(D)$.

Следовательно, $g(w)$ допускает в D разложение $g(w) = \sum_0^{+\infty} a_k w^k$, $w \in D$.

Поэтому между функциями $f \in \mathcal{H}(\Pi)$ и последовательностями $\{a_k\}_0^{\infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ осуществляется взаимно-однозначное соответствие. Отображение $f \rightarrow \{a_k\}_0^{\infty}$ обозначим через $B(f)$.

Лемма 1. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на A_{φ}^p , $0 < p < +\infty$ и $\{a_k\}_0^{\infty} = B(f)$, тогда имеет место следующее представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi \left[\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^k \right] \rho^k.$$

Лемма 2. Пусть $0 < p_1 \leq p_2 < +\infty$ и $\int_0^{+\infty} \exp\{-\varphi(t)\} dt < +\infty$. Тогда $A_{\varphi}^{p_2} \subset A_{\varphi}^{p_1}$ и имеет место оценка

$$\|f\|_{A_{\varphi}^{p_2}} \leq C(p_1, p_2, \varphi) \|f\|_{A_{\varphi}^{p_1}}, \quad f \in A_{\varphi}^{p_2}.$$

Лемма 3. Пусть $0 < p < +\infty$, $0 < r < \frac{1}{2}$ и $f \in A_{\varphi}^p$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} |f(z)|^2 (\operatorname{Re} z)^{4/p} \exp\left\{-\left(\varepsilon + \frac{2}{p}\right)\varphi(|z|(1+r))\right\} dm_2(z) &\leq \\ &\leq C(r, p) \|f\|_{A_{\varphi}^p} \int_1^{+\infty} \exp(-\varepsilon\varphi(r)) dr. \end{aligned}$$

Наметим ход доказательства теоремы 1. Сначала приведем 3) \Rightarrow 2). Пусть $1 < p < +\infty$ и Φ — линейный непрерывный функционал

на A_φ^p . Положим $l_w(z) = \frac{1}{z-w}$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w < 0$. Тогда с использованием условия 3) устанавливается, что $F(w) = \Phi(l_w) \equiv 0$, $\operatorname{Re} w < 0$. Исходя из этого получаем, что $\Phi(f) = 0$ для любой $f \in \mathcal{H}(\Pi)$, $\|f\|_\infty \leq 1$. Учитывая лемму 1, получаем, что $\Phi(f) = 0$, $\forall f \in A_\varphi^p$. При $0 < p \leq 1$ используется плотность $A_\varphi^2 \cap A_\varphi^p$ в пространстве A_φ^p .

Импликация 1) \Rightarrow 3) при помощи лемм 2, 3 сводится к той же импликации при $p=2$. 2) \Rightarrow 1) очевидно.

3.^o Пусть $D_1 = D$, $z_i \in D_1$. Пусть $0 < \rho_i < 1 - |z_i|$, и предположим, что $|z - z_i| < \rho_i$, $i = 2, \dots, n$ не пересекаются. Обозначим $D_i = \{z \in D : |z - z_i| > \rho_i, i = 2, \dots, n\}$, и положим $G = \bigcap_{i=1}^n D_i$.

Пусть $\mathcal{H}(G)$ — множество всех голоморфных в G функций, $d(z)$ — расстояние от точки $z \in G$ до границы ∂G . Введем также обозначение:

$$A_\varphi(G) = \left\{ f \in \mathcal{H}(G) : |f(z)| = O\left(\exp\left(\varphi\left(\frac{1}{d(z)}\right)\right)\right), d(z) \rightarrow 0 \right\}.$$

Определение. Функция $f \in A_\varphi(G)$, $f(z) \neq 0$, $z \in G$ называется слабообратимой в $A_\varphi(G)$, если существует последовательность рациональных функций, полюсы которых принадлежат CG и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n f = 1$, причем сходимость имеет место в пространстве $A_\varphi(G)$.

Нетрудно заметить, что слабая обратимость функций f в A_{φ_2} эквивалентна полноте системы рациональных функций в весовом пространстве

$$A'_{\varphi_2} = \{f \in \mathcal{H}(G) : \|g\|_{A'_{\varphi_2}} = \|f \cdot g\|_{A_{\varphi_2}} < +\infty\}.$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть φ_1 и φ_2 — положительные возрастающие функции на $(0, +\infty)$. Предположим также, что выполнены следующие условия:

$$1. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \varphi_1(t)}{\log(t)} < +\infty \text{ и при некоторых } \alpha, \beta \in (0, 1) \text{ справедлива}$$

оценка
$$\varphi_1\left(\frac{t^\alpha}{t^\alpha - (t-1)^\alpha}\right) - \beta \varphi_2(t) = o(1), t \rightarrow +\infty;$$

$$2. \quad t\varphi_2'(t-1) \text{ монотонно в окрестности } +\infty \text{ и}$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi_2(t)}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} dt = +\infty.$$

Тогда каждая функция $f \in A_{\varphi_1}(G)$, $f(z) \neq 0$, $z \in G$ слабо обратима в $A_{\varphi_2}(G)$. Отметим, что в случае, когда G совпадает с единичным кругом, аналог теоремы 2 доказан в (3).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Անալիտիկ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում բազմանդամային մոտարկումների և բուլլ հակադարձելիության մի Բանի հարցերի մասին

Դիցուք φ -ն մոնոտոն աճող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ կիսառանցքի վրա ($\varphi(0) > 0$), իսկ Π -ն աջ կիսահարթուծություն է: Նշանակենք A_{φ}^p ($0 < p < +\infty$) Π -ում անալիտիկ այն f ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար

$$\|f\|_{A_{\varphi}^p} = \int_{\Pi} |f(z)|^p l^{\varphi(|z|)} dm_2(z) < +\infty,$$

որտեղ $m_2(z)$ -ը l -երեզի մակերեսային չափն է:

Հոդվածում ստացված են A_{φ}^p ($0 < p < +\infty$) տարածություններում բազմանդամների լրիվությունն անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 4 (XVI), № 6 (1954). ² Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 6 (1978). ³ И. К. Никольский, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974).

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О множествах пика гладких функций в поликруге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 2/X 1986)

Пусть U^n — единичный поликруг в пространстве C^n : $U^n = \{z \in C^n: |z_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$, Γ^n — его n -мерный остов, $A^k(U^n)$ — класс функций, голоморфных в U^n , у которых все производные до k -го порядка включительно непрерывны на \bar{U}^n . Гладкое подмногообразие M остова называется интерполяционным многообразием, если для каждой точки $p \in M$ пересечение касательного пространства $T_p(M)$ с замкнутым конусом K_p в $T_p(\Gamma^n)$, образованным касательными векторами $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n} \Big|_p$, где $\theta_i = \arg z_i, i = 1, \dots, n$, удовлетворяет условию $K_p \cap T_p(M) = \{0\}$.

Множества пика равномерной алгебры $A^0(U^n)$ хорошо изучены (см., например, (1)). Случай гладких функций рассмотрен в (2), где показано, что всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^k является множеством пика для $A^{k-4}(U^n)$. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема. *Всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия M класса C^k ($k \geq 5$) на остове поликруга U^n является множеством пика для $A^{k-3}(U^n)$.*

При доказательстве используется метод, приведенный в (3) и соответствующим образом приспособленный для случая поликруга. Для заданного компакта $K \subset M$ сперва строится так называемая „почти аналитическая“ функция пика $F(z)$.

Лемма 1. *Пусть M — то же, что в теореме, K — компакт на M . Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существует функция $F \in C^k(\Omega)$ такая, что*

- а) $F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in K$;
- б) $\bar{\partial}F = 0$ на M , более того, $\bar{\partial}F(z) = o(d(z, M)^{k-1})$, где $d(z, M)$ — расстояние между z и M ;
- в) $\operatorname{Re}F(z) \geq cd(z, M)^2$;
- г) $|F(z)| \geq cd(z, M)$, где c — абсолютная константа, $z \in \bar{U}^n \cap \Omega$.

Отметим, что в случае строго псевдовыпуклой области оценка $|F(z)|$ получается несколько иная (см. (4)): $|F(z)| \geq cd(z, M)^2$ вдоль комплексного касательного направления.

Рассмотрим замкнутую дифференциальную форму типа $(0, 1)$

$g(z) = \bar{\partial} \frac{\lambda(z)}{F(z)}$, где $\lambda(z)$ бесконечно дифференцируемая, финитная в Ω функция, $\lambda(z) \equiv 1$ в некоторой окрестности компакта K и $0 \leq \lambda(z) \leq 1$.

Лемма 2. Уравнение $\bar{\partial} u = g$ в области U^n имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\bar{U}^n \setminus M$ и удовлетворяющее оценке

$$D^p u(z) = o(d(z, M)^{k-|p|-5}). \quad (1)$$

Здесь $p = (p_1, \dots, p_{2n})$ — целочисленный вектор, $|p| = \sum_{k=1}^{2n} p_k$ и

$$D^p u(z) = \frac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \partial \bar{z}_1^{p_{n+1}} \dots \partial \bar{z}_n^{p_{2n}}}$$

Решение $u(z)$, допускающее оценку (1), выписывается весовой формулой, которая получена в (5). В случае $n=2$ эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} u(z) = & -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=|\zeta_2|} g(\zeta) \wedge \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1 \bar{\zeta}_1} \right)^{\beta_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2 \bar{\zeta}_2} \right)^{\beta_2} \frac{d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{(z_1) \times D_2 \\ |z_1| \geq |\zeta_2|}} g_2(z_1, \zeta_2) d\bar{\zeta}_2 \wedge \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2 \bar{\zeta}_2} \right)^{\beta_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{D_1 \times (z_2) \\ |z_2| \geq |\zeta_1|}} g_1(\zeta_1, z_2) d\bar{\zeta}_1 \wedge \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1 \bar{\zeta}_1} \right)^{\beta_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} + \\ & + \frac{\beta_1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_2| \geq |\zeta_1|} g(z) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1 \bar{\zeta}_1} \right)^{\beta_1-1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2 \bar{\zeta}_2} \right)^{\beta_2} \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{1-z_1 \bar{\zeta}_1} \cdot \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} + \\ & + \frac{\beta_2}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1| \geq |\zeta_2|} g(\zeta) \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2 \bar{\zeta}_2} \right)^{\beta_2-1} \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1 \bar{\zeta}_1} \right)^{\beta_1} \frac{d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{1-z_2 \bar{\zeta}_2} \cdot \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}. \end{aligned}$$

Здесь β_1 и β_2 произвольные неотрицательные числа.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Функ-

ция
$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z),$$

где $u(z)$ является решением $\bar{\partial}$ -уравнения с оценкой (1), очевидно,

голоморфна в U^n . Далее, $\operatorname{Re} v(z) = \lambda(z) \frac{\operatorname{Re} F(z)}{|F(z)|^2} - \operatorname{Re} u(z)$. Из (1) при

$k \geq 5$ и $p=0$ следует, что $u(z) = o(d(z, M))$, т. е. $u(z)$ ограничена на \bar{U}^n . Поэтому с учетом v) и (1) имеем $\operatorname{Re} v(z) \geq -\max_{z \in \bar{U}^n} \operatorname{Re} u(z) > -\infty$.

Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0, \quad z \in \bar{U}^n \setminus K. \quad (2)$$

Функция
$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \quad (3)$$

является искомой; она голоморфна в U^n , и, как следует из (2), $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $z \in \overline{U^n} \setminus K$. Из (3) следует, что нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. с множеством K . На множестве $\overline{U^n} \setminus K$ функция f принадлежит классу C^k . Вычислив производные $D^p f$ и используя оценки (1), убеждаемся, что $f \in A^{k-3}(U^n)$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Բազմաշրջանում ողորկ ֆունկցիաների պիկի բազմությունների մասին

Դիցուք U^n -ը C^n տարածության մեջ բազմաշրջան է, M -ը նրա հենքի վրա գտնվող ինտերպոլացիոն բազմաձևություն է, այսինքն յուրաքանչյուր $p \in M$ կետում M -ի շոշափող տարածությունը հատվում է $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n} \Big|_p$ վեկտորներով առաջացած փակ կոնի հետ միայն մեկ կետով: $A^k(U^n)$ -ով նշանակվում է U^n -ում հոլոմորֆ և $\overline{U^n}$ -ում մինչև k -րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը: Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալն է. եթե M -ը պատկանում է ողորկության C^k դասին, ապա կամայական $K \subset M$ կոմպակտ բազմությունը հանդիսանում է պիկի բազմություն $A^{k-3}(U^n)$ -ի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ V. P. Dine, Теория функций в поликруге, Мир, М., 1974. ² R. Saerens, Ph. D. dissertation, University of Washington, Seattle, 1983. ³ M. Hakim, N. Sibony, Duke Math. J., v. 45, p. 601—617 (1978). ⁴ J. Chaumat, A. M. Chollet, Ann. Inst. Fourier, v. 29, p. 171—200 (1979). ⁵ G. M. Henkin, P. L. Polyakov, Comptes rendus, 298, série I, 5 - 8 (1984).

УДК 512.62

МАТЕМАТИКА

М. К. Кюрегян

Операторные подстановки Варшамова в поле Галуа и их приложение

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 25/XI '1986)

Статья посвящена изложению некоторых результатов конструктивной теории синтеза неприводимых полиномов над полем Галуа. Идейно она тесно связана с работами Р. Р. Варшамова, и поэтому все определения и обозначения взяты из (1).

Пусть $GF(q)$ — поле Галуа порядка $q = p^s$, $\sigma_q^r(g(x), \delta) = \sum_{u=0}^n a_u \left(\sum_{v=0}^m b_v x^{q^v} + \delta \right)^u$ — оператор, областью определения которого являются полиномы $g(x) = \sum_{v=0}^m b_v x^v$ и $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ с коэффициентами $b_v \in GF(q)$ и $a_u \in GF(q^r)$, $r \geq 1$, соответственно, δ — произвольный элемент $GF(q^r)$.

Будем говорить, что степень элемента α над полем $GF(q)$ равна k , или же α является собственным элементом поля $GF(q^k)$, если $\alpha \in GF(q^k)$ и $\alpha \notin GF(q^d)$, где d — любой собственный делитель k . В этом случае пишется $deg_q(\alpha) = k$.

В работе рассматриваются только нормированные полиномы, т. е. полиномы, старший коэффициент которых равен единице.

Теорема 1. Пусть $(rn, q^m - 1) = 1$, $g(x) \neq x - 1$ примитивный над полем $GF(q)$ полином степени m , $f(x)$ — неприводимый над полем $GF(q^r)$ полином степени n , $\sigma_q^r(g(x), 0) \equiv R(x) \pmod{f(x)}$ и $\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — нетривиальное решение сравнения

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}$$

Тогда полиномы $\psi(x)$ и $F(x) = (f(x))^{-1} \sigma_q^r(g(x), 0)$ степени n и $n(q^m - 1)$ соответственно неприводимы над полем $GF(q^r)$.

Доказательство. При $n = 1$ доказательство теоремы следует из (2). Поэтому докажем ее для $n > 1$.

Согласно (2) полином $H(x) = x^{-1} \sigma_q^r(g(x), 0)$ неприводим над полем $GF(q)$. Так как $(rn, q^m - 1) = 1$, то из работы (3) следует, что полином $H(x)$ неприводим также и над полем $GF(q^{rn})$. Пусть α — корень $f(x)$, т. е. $f(\alpha) = 0$, тогда среди коэффициентов полинома $H(x - \alpha) = h(x) = \sum_{u=0}^{q^m - 1} h_u x^u$ согласно (4), поскольку $n > 1$, найдется хотя бы один

коэффициент такой, что $\deg_{q^r}(h_u) = n(u=0, \overline{q^m-2})$. Если одновременно с этим учесть также следующую легко доказываемую формулу

$$h^{(v)}(x) = H(x - \alpha^{q^{rv}}) = \sum_{u=0}^{q^m-1} h_u^{q^{rv}} x^u, \text{ где } h_u \text{ (} u=0, \overline{q^m-1} \text{)} - \text{коэффициенты по-}$$

линома $h(x)$, то согласно (3) полином $F(x) = \prod_{v=0}^{n-1} h^{(v)}(x)$ будет неприво-

димым над полем $GF(q^r)$. Поэтому

$$\prod_{u=0}^{n-1} \left(\sigma_q^x(g(x), 0) - \left(\sum_{v=0}^m b_v \alpha^{q^v} \right)^{q^{ru}} \right) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \alpha^{q^{ru}}) h^{(u)}(x) = f(x) F(x). \quad (1)$$

Покажем теперь, что $\sum_{v=0}^m b_v \alpha^{q^v} = \beta$ является собственным элементом поля $GF(q^{rn})$. Допустим противное, а именно предположим, что максимальная степень элемента β над полем $GF(q^r)$ равна d , т. е. $\deg_{q^r}(\beta) = d$, где d — собственный делитель n . Тогда $\prod_{u=0}^{n-1} (x - \beta^{q^{ru}}) = (\psi(x))^k$ ($n = dk, k > 1$), следовательно, согласно (1) будем иметь $(\psi(\sigma_q^x(g(x), 0)))^k = f(x) F(x)$. Но поскольку полиномы $f(x)$ и $F(x)$ неприводимы, то имеем $k=2$ и $n = n(q^m-1)$, что невозможно. Значит, β является собственным элементом поля $GF(q^{rn})$, что в свою очередь устанавливает неприводимость полинома $\psi(x) = \sum_{u=0}^{n-1} (x - \beta^{q^{ru}})$ над полем $GF(q^r)$.

Таким образом, в силу (1) полином $F(x) = (f(x))^{-1} \psi(\sigma_q^x(g(x), 0))$ будет неприводим над полем $GF(q^r)$.

Нетрудно убедиться, что $\psi(R(x)) \equiv 0 \pmod{f(x)}$ или

$$\sum_{u=0}^n \psi_u(R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}, \quad (2)$$

где $\psi_u(u=0, \overline{n})$ являются нетривиальным решением (2) и $\sigma_q^x(g(x), 0) \equiv R(x) \pmod{f(x)}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $a_i = \sum_{u=0}^{\lfloor n^{-1}(m-i) \rfloor} b_{nu+i} (i=1, \overline{n-1})$ и пусть кроме того для некоторого $i, a_i \neq 0, a_j = 0 (j \neq i) (j=1, \overline{n-1})$. Тогда многочлен $F(x) = (f(x))^{-1} f(a_i^{-1} \sigma_q^x(g(x), 0))$ неприводим над полем $GF(q^r)$.

В дальнейшем нам будет полезным преобразование Варшамова.

Теорема 2. Пусть $q^n > 2, f(x)$ — примитивный над полем $GF(q)$ полином степени n, β и γ — произвольные элементы поля $GF(q)$ такие, что $\beta + \gamma \neq 0, h(x) = f((\beta + \gamma)x + 1), h^*(x) = x^n h(1/x)$. Тогда полином $F(x) = (x - \gamma)^n f((x - \gamma)^{-1} (x^{q^n} + \beta)) (h^*(x - \gamma))^{-1}$ степени $n(q^n - 1)$ не будет разлагаться над полем $GF(q)$.

Доказательство. Пусть α — корень уравнения $f(x) = 0$. Тогда, учитывая неприводимость полинома $f(x)$ в поле $GF(q)$, мы получим соотношение

$$f(x) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \alpha^{q^u}). \quad (3)$$

Заменив в (3) x на $(x-\gamma)^{-1}(x^{q^n} + \beta)$ и умножив его обе части на $(x-\gamma)^n$, получим:

$$(x-\gamma)^n f((x-\gamma)^{-1}(x^{q^n} + \beta)) = \prod_{u=0}^{n-1} (x^{q^n} - \alpha^{q^u} x + \beta + \gamma \alpha^{q^u}), \quad (4)$$

Так как $q^n > 2$ и элемент α^{q^u} примитивен в поле $GF(q^n)$, то согласно теореме Диксона (8) каждый из полиномов $x^{q^n} - \alpha^{q^u} x + \beta + \gamma \alpha^{q^u}$ является произведением линейного множителя на неприводимый в поле $GF(q^n)$ полином степени $q^n - 1$. Заметим, что в поле $GF(q^n)$ легко найти корень полинома $x^{q^n} - \alpha^{q^u} x + \beta + \gamma \alpha^{q^u}$. Действительно, если $\theta \in GF(q^n)$, то $\theta^{q^{n+u}} = \theta^{q^u}$ ($u = \overline{0, n-1}$), и поэтому $\theta^{q^u}(\alpha^{q^u} - 1) = \beta + \gamma \alpha^{q^u}$ в том и только том случае, если $\theta^{q^u} = (\beta + \gamma \alpha^{q^u})(\alpha^{q^u} - 1)^{-1}$. Стало быть $x^{q^n} - \alpha^{q^u} x + \beta + \gamma \alpha^{q^u} = (x - \theta^{q^u})(x^{q^n-1} + \theta^{q^u} x^{q^n-2} + \theta^{2q^u} x^{q^n-3} + \dots + \theta^{(q^n-2)q^u} x + 1 - \alpha^{q^u}) = (x - \theta^{q^u})Q^{(u)}(x)$, где $u = \overline{0, n-1}$.

Из (4) непосредственно вытекает выражение

$$(x-\gamma)^n f((x-\gamma)^{-1}(x^{q^n} + \beta)) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \theta^{q^u}) Q^{(u)}(x).$$

Как легко показать, каждый из полиномов $Q^{(u)}(x)$ имеет хотя бы один коэффициент, являющийся собственным элементом поля $GF(q^n)$, поэтому из работы (3) следует неприводимость полинома $\prod_{u=0}^{n-1} Q^{(u)}(x)$ над полем $GF(q)$.

Таким образом, исходя из того, что θ является собственным элементом поля $GF(q^n)$, мы получим $(x-\gamma)^n f((x-\gamma)^{-1}(x^{q^n} + \beta)) = H(x)F(x)$.

Покажем теперь, что $\prod_{u=0}^{n-1} (x - \theta^{q^u}) = H(x) = h^*(x-\gamma)$. Действительно, но, $\theta^{q^u} = (\beta + \gamma)(\alpha^{q^u} - 1)^{-1} + \gamma$, и так как $(\beta + \gamma)^{-1}(\alpha^{q^u} - 1)$ является корнем полинома $h(x) = f((\beta + \gamma)x + 1)$, то согласно (8) $(\beta + \gamma)(\alpha^{q^u} - 1)^{-1}$ будет корнем $h^*(x)$, а, следовательно, θ^{q^u} — корень полинома $h^*(x-\gamma)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $q > 2$, $(n, q-1) = 1$, $f(x)$ — неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n , θ — примитивный элемент поля $GF(q)$, δ — произвольный элемент $GF(q)$, $\sigma_q^x(x-\theta, 0) \equiv R(x) \pmod{f(x)}$ и

$\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — нетривиальное решение сравнения

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}.$$

Тогда полином $\psi(x)$ степени n , а также полином $(f(x - \delta(\theta - 1)^{-1}))^{-1} \sigma_q^x(x - \theta, \delta)$ степени $n(q-1)$ неприводимы в поле $GF(q)$.

Доказательство. Для $n=1$ доказательство теоремы непосредственно следует из (5). Поэтому докажем ее для $n > 1$.

Действительно, по теореме Диксона (5) полином $x^q - \theta x + \delta =$

$= (x - \beta)Q(x)$, где $Q(x) = \sum_{u=0}^{q-1} \beta^{q-1-u} x^u - \theta$, $(\beta = \delta(\theta - 1)^{-1})$. Так как $(n, q - 1) = 1$, то согласно (3) полином $Q(x)$ неприводим также и над полем $GF(q^n)$. Пусть α — корень $f(x)$, тогда среди коэффициентов полинома $Q(x - \alpha) = h(x) = \sum_{v=0}^{q-1} h_v x^v$ согласно (4), поскольку $n > 1$, найдется хотя бы один коэффициент такой, что $\deg_q(h_v) = n(v = 0, \overline{q-2})$. Если одновременно с этим учесть также и следующую легко доказываемую формулу $h^{(u)}(x) = Q(x - \alpha^{q^u}) = \sum_{v=0}^{q-1} h_v^{q^u} x^v$, где $h_v (v = 0, \overline{q-1})$ коэффициенты полинома $h(x)$, то согласно (3) будет вытекать неприводимость полинома $F(x) = \prod_{u=0}^{n-1} h^{(u)}(x)$ над $GF(q)$, а поэтому

$$\prod_{u=0}^{n-1} (\tau_q^x(x - \theta, \delta) - (\alpha^q - \theta\alpha)^{q^u}) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - (\alpha + \beta)^{q^u}) h^{(u)}(x).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 1.

Теорема 4. Пусть $(n, p) = 1$, $f(x)$ — неприводимый над $GF(q)$ полином степени n , $x^p + \beta x + \delta$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q)$ полином, $x^p + \beta x \equiv R(x) \pmod{f(x)}$ и $\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — нетривиальное решение сравнения

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv C \pmod{f(x)}. \quad (5)$$

Тогда полином $\psi(x)$ степени n и полином $\psi(x^p + \beta x + \delta)$ степени pn неприводимы над полем $GF(q)$.

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая $n=1$. Учитывая, что $x^p + \beta x = (x + \gamma)(x^{p-1} - \gamma x^{p-2} + \dots + (-\gamma)^{p-2} x + (-\gamma)^{p-1} + \beta) - \gamma(\beta + \gamma^{p-1})$, где $\gamma \in GF(q)$, имеем: $(R(x))^0 = 1$, $R(x) = -\gamma(\beta + \gamma^{p-1})$. Согласно сравнению (5) коэффициенты $\psi(x)$ будут иметь вид: $\psi_1 = 1$ и $\psi_0 = \gamma(\beta + \gamma^{p-1})$, следовательно $\psi(x) = x + \gamma(\beta + \gamma^{p-1})$. Таким образом, $\psi(x^p + \beta x + \delta) = (x + \gamma)^p + \beta(x + \gamma) + \delta$. Однако последний полином неприводим над полем $GF(q)$ по условию теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $n > 1$. Так как полином $x^p + \beta x + \delta$ неприводим над полем $GF(q)$, то согласно (3) он неприводим также и над полем $GF(q^n)$.

Пусть α — корень $f(x)$. Тогда согласно (4), поскольку $n > 1$, $x^p + \beta x - (\alpha^p + \beta\alpha - \delta)$ неприводим над полем $GF(q^n)$ и $\alpha^p + \beta\alpha$ является собственным элементом поля $GF(q^n)$. Следовательно, полином

$$\psi(x) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - (\alpha^p + \beta\alpha)^{q^u}) \quad (6)$$

неприводим над полем $GF(q)$. Заменяя в соотношении (6) x на $x^p + \beta x + \delta$, получим $\psi(x^p + \beta x + \delta) = \prod_{u=0}^{n-1} (x^p + \beta x + \delta - (\alpha^p + \beta\alpha)^{q^u})$. Следова-

тельно, согласно (3) полином $\prod_{u=0}^{n-1} (x^u + \beta x + \delta - (\alpha^u + \beta \alpha)^{q^u})$ неприводим над полем $GF(q)$. В дальнейшем теорема 4 доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 5. Пусть $(rn, 2) = 1$, $f(x)$ — неприводимый над полем $GF(2^r)$ полином степени n , $x^4 + x \equiv R(x) \pmod{f(x)}$ и $\psi(x) = \sum_{u=0}^n \psi_u x^u$, где ψ_u — нетривиальное решение сравнения

$$\sum_{u=0}^n \psi_u (R(x))^u \equiv 0 \pmod{f(x)}.$$

Тогда полином $\psi(x)$ степени n , а также и полином $\psi(x^4 + x + 1)$ степени $4n$ неприводимы над полем $GF(2^r)$.

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамову за постановку задачи и полезные советы.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Մ. Կ. ԿՅՈՒՐԵԳՅԱՆ

Վարչամովի տեղադրման օպերատորները Գալուայի դաշտում և նրանց կիրառությունը

Գալուայի դաշտերի վրա բազմանդամների վերլուծելիության արտակարգ ինքնուրույն հետաքրքրություն ներկայացնող պրոբլեմը կարևոր դեր է կատարում ժամանակակից տեխնիկայում: Աշխատանքում դիտարկվում են մի շարք օպերատորներ, որոնց որոշման տիրույթը՝ Գալուայի $GF(q)$ դաշտից վերցված գործակիցներով բազմանդամներ են:

Աշխատանքում ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս անվերածելի բազմանդամներ կառուցել բացահայտ տեսքով Գալուայի կամայական դաշտի վրա: Բացի այդ, տրվում է Գալուայի $GF(q)$ դաշտի վրա բարձր աստիճանների անվերածելի բազմանդամների կառուցման եղանակներ:

Թեորեմ. Դիցուք $q^r > 2$, $f(x)$ — n -րդ աստիճանի պրիմիտիվ բազմանդամ է Գալուայի $GF(q)$ դաշտի վրա, β և γ կամայական սարքեր են $GF(q)$ դաշտից, այնպես, որ $\beta + \gamma \neq 0$, $h(x) = f[(\beta + \gamma)x + 1]$ $h^*(x) = x^n h(1/x)$ Այդ դեպքում

$$F(x) = (x - \gamma)^n f((x - \gamma)^{-1}(x^{q^n} + \beta))(h^*(x - \gamma))^{-1}$$

$n(q^n - 1)$ -րդ աստիճանի բազմանդամն անվերածելի է $GF(q)$ դաշտի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. Р. Варшамов, ДАН СССР, т. 211, № 4 (1973). ² Р. Р. Варшамов, ДАН АрмССР, т. 79, № 1 (1984). ³ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 81, № 2, (1985). ⁴ М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 83, № 2 (1986). ⁵ А. А. Альберт, Кибернетический сб. Новая серия, вып. 3, Мир, М., 1966. ⁶ Р. Р. Варшамов, Г. А. Гараков, Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники, т. 6 (1970)

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Равномерно распределенные последовательности и перестановки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 27/XI 1986)

Следуя ⁽¹⁾, введем следующее обозначение. Если E — некоторое множество действительных чисел, (x_k) — последовательность действительных чисел и $n \in \mathbb{N}$ — натуральное число, то обозначим через $A(E; n, (x_k))$ количество тех значений $k \leq n$, для которых $x_k \in E$. Последовательность $(x_k) \subset [0, 1)$ называется равномерно распределенной (на $[0, 1)$) если равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A([a, b); n, (x_k))}{n} = b - a$$

имеет место для всех a и b таких, что $0 \leq a < b \leq 1$.

Перестановкой последовательности (x_k) называется любая последовательность вида $(x_{\sigma(k)})$, где σ есть взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел \mathbb{N} на себя.

В настоящей заметке мы с помощью гипотезы континуума доказываем следующую теорему.

Теорема. *Существует последовательность (f_k) функций, заданных на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ со значениями в $[0, 1)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) для любой точки $t \in [\alpha, \beta]$ существует равномерно распределенная перестановка $(f_{\sigma(k)}(t))$ последовательности $(f_k(t))$;
- 2) для любой перестановки σ множество $\{t \in [\alpha, \beta] : (f_{\sigma(k)}(t)) \text{ равномерно распределена}\}$ не более чем счетно.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству этой теоремы, нам необходимо получить некоторые предварительные результаты. Сначала мы докажем, что, если для последовательности (x_k) все точки отрезка $[0, 1]$ являются предельными (т. е. пределами сходящихся подпоследовательностей), то (x_k) имеет равномерно распределенную перестановку. Этот факт известен (⁽¹⁾, с. 202), но он может быть получен также как непосредственное следствие из одного старого результата (⁽²⁾, см. также ⁽³⁾, с. 326), которому мы здесь даем новое доказательство.

Лемма 1. *Пусть (a_k) и (b_k) — ограниченные последовательности действительных чисел, у которых множества предельных точек совпадают. Тогда существует такая перестановка $(b_{\sigma(k)})$ последовательности (b_k) , что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_k - b_{\sigma(k)}) = 0. \quad (1)$$

Доказательство. Положим

$$\xi_k = \inf\{\xi > 0 : \sup\{k \in N : b_k \in (a_n - \xi, a_n + \xi)\} = \infty\}, \quad n \in N$$

и

$$\eta_n = \inf\{\eta > 0 : \sup\{k \in N : a_k \in (b_n - \eta, b_n + \eta)\} = \infty\}, \quad n \in N.$$

Из условия леммы следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0. \quad (2)$$

Перестановку σ построим следующим образом. Пусть $\delta_n > 0$ и $\delta_n \rightarrow 0$. Положим

$$\sigma(1) = \min\{k : b_k \in (a_1 - \xi_1 - \delta_1, a_1 + \xi_1 + \delta_1)\}$$

и

$$\sigma^{-1}(n_1) = \min\{k : k \neq 1; a_k \in (b_{n_1} - \eta_{n_1} - \delta_1, b_{n_1} + \eta_{n_1} + \delta_1)\},$$

где $n_1 = \min\{k : k \neq \sigma(1)\}$.

Далее, для натурального числа $m_2 = \min\{k : k \neq 1, \sigma^{-1}(n_1)\}$ положим $\sigma(m_2) = \min\{k : k \neq \sigma(1), n_1; b_k \in (a_{m_2} - \xi_{m_2} - \delta_2, a_{m_2} + \xi_{m_2} + \delta_2)\}$ и для $n_2 = \min\{k : k \neq \sigma(1), n_1, \sigma(m_2)\}$ положим $\sigma^{-1}(n_2) = \min\{k : k \neq 1, \sigma^{-1}(n_1), m_2; a_k \in (b_{n_2} - \eta_{n_2} - \delta_2, b_{n_2} + \eta_{n_2} + \delta_2)\}$.

Допустим, построены $\sigma(1), \sigma^{-1}(n_1), \dots, \sigma(m_{p-1}), \sigma^{-1}(n_{p-1})$. Для $m_p = \min\{k : k \neq 1, \sigma^{-1}(n_1), m_2, \sigma^{-1}(n_2), \dots, m_{p-1}, \sigma^{-1}(n_{p-1})\}$ положим $\sigma(m_p) = \min\{k : k \neq \sigma(1), n_1, \sigma(m_2), n_2, \dots, \sigma(m_{p-1}), n_{p-1}; b_k \in (a_{m_p} - \xi_{m_p} - \delta_p, a_{m_p} + \xi_{m_p} + \delta_p)\}$ и для $n_p = \min\{k : k \neq \sigma(1), n_1, \sigma(m_2), n_2, \dots, n_{p-1}, \sigma(m_p)\}$ положим $\sigma^{-1}(n_p) = \min\{k : k \neq 1, \sigma^{-1}(n_1), m_2, \dots, \sigma^{-1}(n_{p-1}), m_p; a_k \in (b_{n_p} - \eta_{n_p} - \delta_p, b_{n_p} + \eta_{n_p} + \delta_p)\}$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность $1, \sigma^{-1}(n_1), m_2, \sigma^{-1}(n_2), \dots$ и соответствующую последовательность $\sigma(1), n_1, \sigma(m_2), n_2, \dots$ значений функции σ на ее элементах. Очевидно обе эти последовательности без повторений заполняют весь натуральный ряд N . Таким образом σ взаимно-однозначно отображает N на себя. Из построения видно, что

$$|a_{m_k} - b_{\sigma(m_k)}| < \xi_{m_k} + \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (m_1 = 1)$$

и

$$|a_{\sigma^{-1}(n_k)} - b_{n_k}| < \eta_{n_k} + \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу (2) и условия $\delta_n \rightarrow 0$ из этих неравенств получаем (1).

Нам понадобится также следующая

Лемма 2. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$ — последовательность перестановок натурального ряда N , E — произвольное счетное, всюду плотное подмножество $[0, 1)$ и $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда элементы E можно расположить в последовательность (x_n) так, чтобы для каждого $i \in N$ выполнялись равенства

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A([\delta, 1 - \delta]; n, (x_{\sigma_i(k)}))}{n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A([\delta, 1 - \delta]; n, (x_{\sigma_i(k)}))}{n} = 1. \quad (3)$$

Доказательство. Сначала возьмем некоторую произвольную нумерацию элементов E . В ходе приводимых ниже построений мы бу-

дем иметь дело с этой фиксированной нумерацией. Произведя выбор без возвращения из множества E , мы припишем элементам E новые номера.

Пусть $\frac{1}{2} > \epsilon_n \downarrow 0$. Процесс перенумерации E мы разбиваем на шаги и проводим описание первых двух шагов, после чего его дальнейший ход станет очевидным.

Первый шаг. Будем выбирать элементы из E , приписывая им номера $\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots$ так, чтобы при некотором $p_{1,1}$, для полученной последовательности $(x_{\sigma_1(k)})$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta, 1-\delta); p_{1,1}, (x_{\sigma_1(k)})}{p_{1,1}} < \epsilon_1.$$

После этого продолжим выбор с приписыванием последующих номеров $\sigma_1(p_{1,1}+1), \sigma_1(p_{1,1}+2), \dots$ так, чтобы при некотором $q_{1,1} > p_{1,1}$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta, 1-\delta); q_{1,1}, (x_{\sigma_1(k)})}{q_{1,1}} > 1 - \epsilon_1.$$

Наконец, продолжая выбор, возьмем из оставшихся элементов E элемент с наименьшим номером и в качестве нового номера для этого элемента возьмем наименьшее натуральное число n_1 , отличное от $\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(q_{1,1})$.

Второй шаг. Из оставшихся после первого шага элементов E будем выбирать элементы, приписывая им номера $\sigma_1(q_{1,1}+1), \sigma_1(q_{1,1}+2), \dots$ с учетом того, что номер n_1 уже использован. Произведем этот выбор так, чтобы при некотором $p_{1,2} > q_{1,1}$ для последовательности $(x_{\sigma_1(k)})$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta_1, 1-\delta_1); p_{1,2}, (x_{\sigma_1(k)})}{p_{1,2}} < \epsilon_2.$$

После этого продолжим выбор с приписыванием последующих неиспользованных номеров $\sigma_1(p_{1,2}+1), \sigma_1(p_{1,2}+2), \dots$ так, чтобы при некотором $q_{1,2} > p_{1,2}$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta, 1-\delta), q_{1,2}, (x_{\sigma_1(k)})}{q_{1,2}} > 1 - \epsilon_2.$$

Теперь, продолжая выбор, будем приписывать выбранным элементам неиспользованные номера из σ_2 , учитывая их порядок следования в σ_2 . При этом выбор произведем так, чтобы при некотором $p_{2,2} > q_{1,2}$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta, 1-\delta); p_{2,2}, (x_{\sigma_2(k)})}{p_{2,2}} < \epsilon_2.$$

Далее будем выбирать элементы из E и приписывать им номера $\sigma_2(p_{2,2}+1), \sigma_2(p_{2,2}+2), \dots$ так, чтобы при некотором $q_{2,2} > p_{2,2}$ выполнялось неравенство

$$\frac{A(|\delta, 1-\delta); q_{2,2}, (x_{\sigma_2(k)})}{q_{2,2}} > 1 - \epsilon_2.$$

Наконец, из оставшихся элементов E возьмем элемент с наименьшим номером и припишем ему новый номер, равный наименьшему натуральному числу, отличному от номеров, которыми обозначены уже выбранные элементы, т. е. от $\sigma_1(1), \dots, \sigma_1(q_{1,1}), n_1, \sigma_1(q_{1,1}+1), \dots, \sigma_1(q_{2,2}), \sigma_2(1), \dots, \sigma_2(q_{2,2})$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы переберем все элементы E и расположим их в последовательность (x_n) . Параллельно мы для каждого натурального i построим две возрастающие последовательности натуральных чисел $(p_{i,m})_{m=1}^{\infty}$ $(q_{i,m})_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{i,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} q_{i,m} = \infty; \quad (4)$$

$$\frac{A([\delta, 1-\delta]; p_{i,m}, (x_{\sigma_i(k)}))}{p_{i,m}} < \varepsilon_m \quad m = i, i+1, \dots; \quad (5)$$

$$\frac{A([\delta, 1-\delta]; q_{i,m}, (x_{\sigma_i(k)}))}{q_{i,m}} > 1 - \varepsilon_m \quad m = i, i+1, \dots \quad (6)$$

Из (4), (5) и (6) следует (3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Множество Π — всех перестановок натурального ряда имеет мощность континуума. Следовательно, пользуясь гипотезой континуума, можно вполне упорядочить Π по типу ω_1 , где ω_1 — наименьшее порядковое число третьего класса: $\Pi = \{\sigma_i, i < \omega_1\}$. Вполне упорядочим по типу ω_1 также множество точек отрезка $[\alpha, \beta]: [\alpha, \beta] = \{t_i, i < \omega_1\}$. Перейдем к построению функций f_n . Для каждого порядкового числа $j < \omega_1$, применив лемму к счетному множеству перестановок $\{\sigma_i, i < j\}$, получим нумерацию $(x_n^j)_{n=1}^{\infty}$ всех точек E , такую, что последовательность $(x_{\sigma_i^j(k)}^j)$ не является равномерно распределенной ни при каком $i < j$.

Пусть $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $t = t_j$ при некотором $j < \omega_1$. Положим $f_n(t) = f_n(t_j) = x_n^j$. Докажем, что построенная последовательность f_n удовлетворяет утверждению теоремы. Действительно, пусть σ — произвольная перестановка натурального ряда. Тогда $\sigma = \sigma_i$ при некотором $i < \omega_1$. Тогда для каждого $j > i$ имеем $f_n(t_j) = x_n^j$ и, следовательно, последовательность $(f_{\sigma_i(k)}(t_j)) = (x_{\sigma_i(k)}^j)$ не является равномерно распределенной. С другой стороны, так как E всюду плотно на $[0, 1)$, то согласно лемме любая нумерация E имеет равномерно распределенную перестановку. Таким образом для любого $t \in [\alpha, \beta]$ последовательность $(f_n(t))$ имеет равномерно распределенную перестановку. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Յ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականություններ և տեղափոխություններ

Այս աշխատանքը է հետախալ թեորեմը.

Ի՞նչ և ո՞ր ե՞մ. Գոյություն ունի ֆունկցիաների (f_k) հաջորդականություն, որը բավարարում է հետախալ պայմաններին՝

1) Յուրաքանչյուր t -ի համար գոյություն ունի բնական թվերի այնպիսի $\varepsilon(k)$ տեղափոխություն, որ $f_{\varepsilon(k)}(t)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ բաշխված է:

2) Ցանկացած ε տեղափոխության համար, այն t կետերը, որոնց համար $f_{\varepsilon(k)}(t)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ բաշխված է, կազմում են ոչ ավելի, քան հաշվելի բազմություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1) Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, Равномерное распределение последовательностей, Наука, М., 1985. 2) J. von Neumann, Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators, (Act. sc. et ind), Paris, 1935. 3) Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве Наука М., 1966.

УДК 548.0+535.35

ФИЗИКА

А. А. Каминский, К. Курбанов, А. Г. Петросян

Спектральный состав и кинетика двухмикронного стимулированного излучения ионов Ho^{3+} в сенсibilизированных кристаллах $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ при 300 К

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/IX 1986)

Стимулированное излучение (СИ) основного канала $^5I_7 \rightarrow ^5I_8$ ионов Ho^{3+} в кристаллах (особенно сенсibilизированных) представляет собой интересное физическое явление как последний акт в сложной цепи процессов преобразования энергии накачки в генерацию ⁽¹⁾. Если этот эффект возбуждается излучением ламп накачки и при 300 К, то он становится привлекательным и с прикладной точки зрения, например, СИ двухмикронного диапазона менее опасно для глаз человека, соответствует окну прозрачности земной атмосферы и т. д. ^(2,3).

Для возбуждения СИ ионов Ho^{3+} на волнах канала $^5I_7 \rightarrow ^5I_8$ при 300К и ламповой накачке используется несколько фторидных и оксидных кристаллов ($\text{Li}(\text{Y}, \text{Er})\text{F}_4 : \text{Tm}^{3+}$; $\text{CaF}_2 - \text{ErF}_3 - \text{TmF}_3 - \text{YbF}_3$; $\text{BaEr}_2\text{F}_8 : \text{Tm}^{3+}$; $\text{Y}_2\text{SiO}_5 : \text{Er}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$; $(\text{Y}, \text{Er})\text{AlO}_3 : \text{Tm}^{3+}$; $(\text{Y}, \text{Er})\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Tm}^{3+}$) ⁽⁴⁻¹⁰⁾. Недавно в ⁽¹¹⁾ представлены результаты по энергетике двухмикронной генерации кристаллов $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+} - \text{Ho}^{3+}$.

Настоящая работа, продолжая исследования ⁽¹²⁻¹⁵⁾, описывает параметры двухмикронного СИ ионов Ho^{3+} в $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ и дополняет ⁽¹¹⁾ новыми спектроскопическими данными.

Полученные экспериментальные данные сведены в таблице и поясняются рис. 1 и 2. Эти результаты демонстрируют несовпадение длины волны линий СИ изученных кристаллов с длиной волны максимальных по интенсивности пиков в их спектрах люминесценции. Этот факт в физике и спектроскопии лазерных кристаллов хорошо известен—он обусловлен спецификой четырехуровневых систем с низкорасположенными конечными рабочими уровнями ($E_{\text{кон}}$) ⁽¹⁶⁾. Осциллограммы кинетики двухмикронного СИ ионов Ho^{3+} в $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$, а также данные ⁽¹¹⁾ по энергетике генерации при 300К показывают, что в сложной системе трех коактиваторов (при указанных концентрациях) процессы преобразования энергии возбуждения в СИ более эффективны при низких температурах ⁽¹⁶⁾. Подбор матрицы-основы со структурой граната (пространственная группа $O_h^{10} - Ia3d$), которая обеспечит большое расщепление мультиплета 5I_8 , и типов ионов-сенсibilизаторов и их концентрации, даст возможность

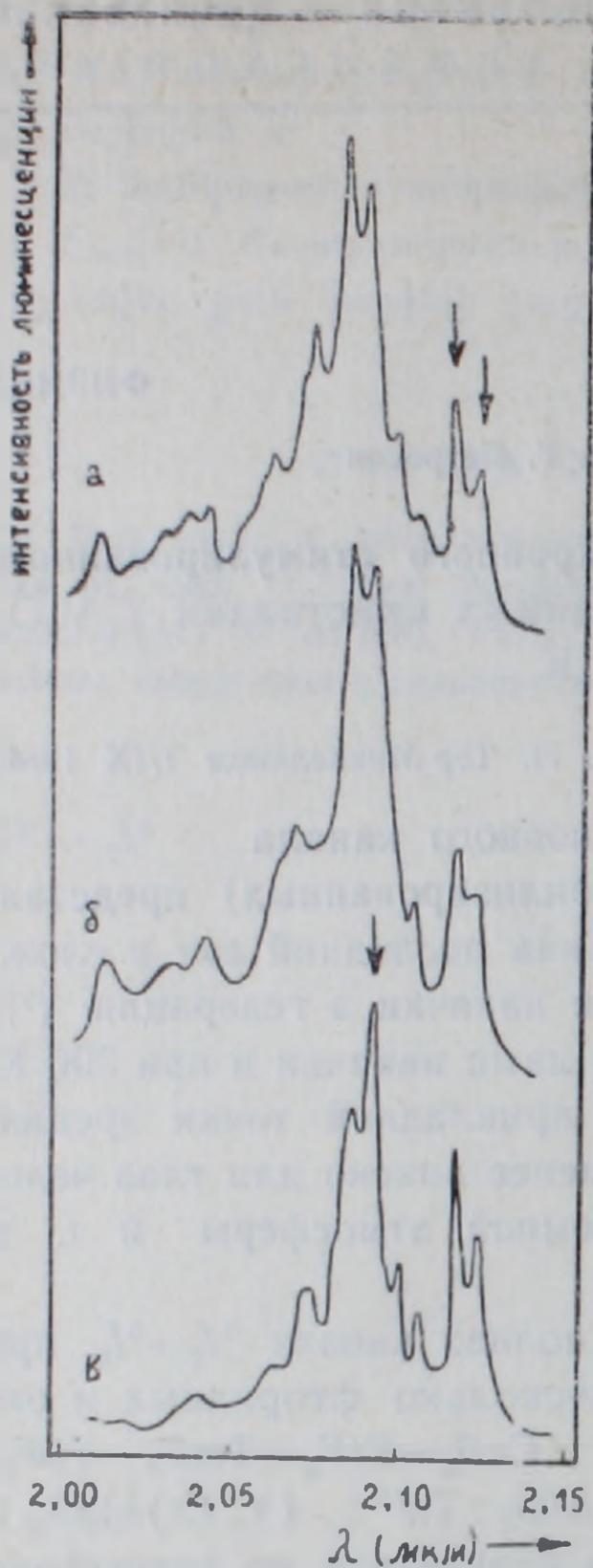


Рис. 1. Длинноволновые фрагменты спектров люминесценции ионов Ho^{3+} (канал ${}^5I_7 \rightarrow {}^5I_8$) в кристаллах: а — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Cr}^{3+}$ при 300 К; б — $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Cr}^{3+}$ при 300 К; в — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Cr}^{3+}$ при 77 К. Стрелками указаны линии, на волнах которых возбуждено СИ

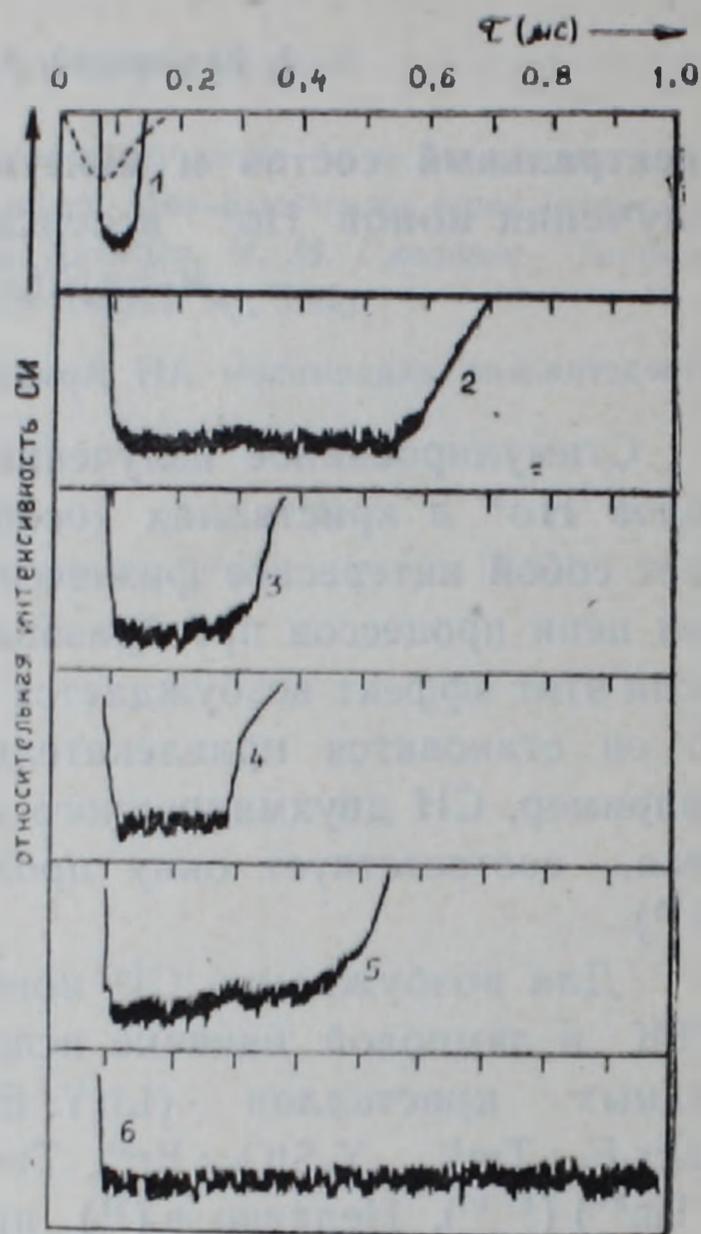


Рис. 2. Осциллограммы кинетики двухмикронного СИ ионов Ho^{3+} при $E_{\text{возб}}/E_{\text{п}} \approx 5$ кристаллов: 1 — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Cr}^{3+}$ при 300 К; 2 — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Cr}^{3+}$ при 110 К; 3 — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Er}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ при 110 К; 4 — $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Er}^{3+}, \text{Tm}^{3+}, \text{Yb}^{3+}$ при 110 К; 5 — $\text{Yb}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Er}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ при 110 К; 6 — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Tm}^{3+}, \text{Yb}^{3+}$ при 110 К. Импульс возбуждения показан штриховой кривой

получать СИ при 300 К с лучшими энергетическими характеристиками.

Условие возникновения (порога возбуждения $E_{\text{п}}$) СИ для нашего случая можно пояснить при помощи феноменологической формулы для коэффициента усиления

$$\sigma_{ji} = (N_2 b_j - N_1 b_i) \sigma(\nu_{ji}) - \rho, \quad (1)$$

где N_1 и N_2 — населенность верхнего (5I_7) и нижнего (5I_8) состояний резонансного канала ${}^5I_7 \rightarrow {}^5I_8$; b_j и b_i — больцмановские факторы, учитывающие термическую заселенность начального (j) и конечного (i)

лазерных уровней мультиплетов 5I_7 и 5I_8 относительно нижайших ($j, i=1$) штарковских компонент; $\sigma(\nu_{ji})$ —пиковое (или эффективное) поперечное сечение перехода $j \leftrightarrow i$, характеризующее интенсивность линии люминесценции на частоте ν_{ji} и ρ —полные потери, обусловленные оптическим качеством кристалла и параметрами зеркал резонатора.

Спектроскопические характеристики СИ ионов Ho^{3+} (канал $^5I_7 \rightarrow ^5I_8$, $C_{\text{Ho}}=1$ ат.%) в кристаллах $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$, „сенсibilизированных“ ионами Tm^{3+} ($C_{\text{Tm}}=10$ ат.%) и Cr^{3+}

Кристалл (C_{Cr} , ат.%)*	$\lambda_{\text{си}}$, мкм**	T , К	$E_{\text{п}}$ Дж***	$\Delta\nu_{\text{люм}}$, см $^{-1}$	$E_{\text{кон}}$, см $^{-1}$	$\tau_{\text{си}}^{\times 5}$ ****, мс	Литература
$\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ $C_{\text{Cr}} \approx 1,0$ $C_{\text{Cr}} \approx 0,4$	2,12	300	45	—	—	—	(11)
	2,0982	110	6	5	462	0,6	Настоящая работа
	2,1223	300	70*****	10	518	—	
	2,1295	300	60*****	10	535	0,1	
$\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ $C_{\text{Cr}} \approx 0,45$	2,1008	110	2,5	6	465	0,55	Настоящая работа
	2,1241	300	50	11	520	—	
	2,1303	300	43	11	540	0,1	

* Концентрация хрома в исходной шихте.

** Точность измерения $\pm 0,0005$ мкм обеспечивалась дифракционным монохроматором МДР—3 с охлаждаемым фотосопротивлением InSb с эмитерным повторителем и осциллографом С1—93.

*** Порог возбуждения для импульсной Хе лампы ($\tau_{\text{возб}}=40-70$ мкс) и кристаллов длиной ~ 40 и диаметром до 6 мм с плоскопараллельными торцами ($\sim 5''$) в конфокальном ($R=600$ мм) резонаторе.

**** Длительность импульса СИ при пятикратном превышении энергии накачки над пороговой.

***** Пропускание выходного зеркала резонатора около 30%.

***** Пропускание зеркал резонатора 0,5%.

Из (1) следует, что СИ с наименьшим порогом возбуждётся на волне самой интенсивной линии люминесценции только в двух случаях—при предельно низких температурах ($T \approx 0$), когда $b_i = \exp(-\Delta E_{i1}/kT)$, определяющий реабсорбцию на частоте ν_{ji} , пренебрежимо мал (здесь ΔE_{i1} —энергетический зазор между i -м и первым нижним уровнем мультиплета 5I_8 , k —постоянная Больцмана), либо при низкой добротности резонатора (больших значениях ρ). В том и другом случаях это приводит к неравенству $N_2 b_j \gg N_1 b_i$, а это означает, что $\alpha_{ji} \sim \sigma(\nu_{ji})$. В обычных условиях эксперимента, т. е. в интервале температур от 77 до 300 К, где $b_i \neq 0$ ($i > 10$, ΔE_{i1} от типа кристалла может изменяться от 250 до 550 см $^{-1}$ (16)) и при малых ρ (обычно 10 $^{-2}$ см $^{-1}$), населенности $N_2 b_j$ и $N_1 b_i$ по величине будут одного порядка. Для переходов с малоразняющимися $\sigma(\nu_{ji})$ максимальная инверсная заселенность между их j - и i -м уровнями будет реализовываться для тех из них, которые заканчиваются на самых верхних штарковских компонентах мультиплета 5I_8 . Этим длинноволновым переходам в спектрах люминесценции чаще всего соответствуют не самые интенсивные пики, и, тем не менее, на их волнах (рис. 1) возбуждается генерация с меньшим порогом. Это одно из проявлений

„красного смещения“ длины волны СИ активированных кристаллов, которое обуславливается потерей „четырёхуровневости“ их лазерной схемы при повышении как рабочей температуры, так и концентрации генерирующих ионов (¹²⁻¹⁶). Общий характер этого явления, разумеется, распространяется и на область температур > 300 К. Все эти выводы подтверждают проведенные эксперименты по спектроскопии СИ ионов Ho^{3+} на линиях основного канала $^5I_7 \rightarrow ^5I_8$ в двух кристаллах-гранатах $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$, коактивированных ионами-сенситизаторами Tm^{3+} и Cr^{3+} .

Таким образом, впервые проведены измерения спектрального состава и кинетики импульсной генерации СИ ионов Ho^{3+} в $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ и $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ при 300 К в условиях применения обычной техники ламповой накачки. Показано, что изменение добротности резонатора является одним из путей перестройки длины волны СИ сред, генерирующих по четырёхуровневой схеме с низкорасположенными конечными рабочими уровнями. Излучение кинетики СИ свидетельствует, что при 300 К в изученных кристаллах имеются каналы потерь возбуждения, которые могут быть уменьшены путем более точного подбора гранатовой матрицы, концентрации генерирующих и сенситизирующих ионов, а также комбинации последних.

В продолжение последнего заключения здесь добавим некоторую информацию по спектроскопии и кинетике двухмикронного СИ при 110 К ионов Ho^{3+} в алюминиевых гранатах: $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Er}^{3+}$ (33 ат. %), $\text{Tm}^{3+}, \text{Ho}^{3+}$ (3 ат. %) — $\lambda_{\text{СИ}} = 2,0983$ мкм, $E_{\text{п}} = 6,5$ Дж и $\tau_{\text{СИ}}^{x5} \approx 0,32$ мс; $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Er}^{3+}$ (33 ат. %), Tm^{3+} (3 ат. %), Yb^{3+} (3 ат. %) — Ho^{3+} (3 ат. %) — $\lambda_{\text{СИ}} = 2,1005$ мкм, $E_{\text{п}} = 6,5$ Дж и $\tau_{\text{СИ}}^{x5} \approx 0,3$ мс; $\text{Yb}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Er}^{3+}$ (5 ат. %) Tm^{3+} (5 ат. %) — Ho^{3+} (1 ат. %) — $\lambda_{\text{СИ}} = 2,0998$ мкм, $E_{\text{п}} = 7$ Дж и $\tau_{\text{СИ}}^{x5} \approx 0,45$ мс; $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Tm}^{3+}$ (5 ат. %), Yb^{3+} (40 ат. %) — Ho^{3+} (0,25 ат. %) — $\lambda_{\text{СИ}} = 2,0983$ мкм, $E_{\text{п}} = 15$ Дж и $\tau_{\text{СИ}}^{x5} \approx 2$ мс (¹²⁻¹⁶).

Авторы благодарят К. Л. Ованесян и А. С. Кузаняна за помощь в экспериментах.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԿԱՄԻՆՍԿԻ, Կ. ԿՈՒՐԲԱՆՈՎ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

$\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ և $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ սենսիթիվիզացված բյուրեղներում Ho^{3+} իոնների երկմիկրոնային ստիպողական ճառագայթման կինետիկան և սպեկտրալ կազմը 300 К ջերմաստիճանում

Տվյալ աշխատանքում չափված է $\text{Lu}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Cr}^{3+}, \text{Tm}^{3+}$ բյուրեղում Ho^{3+} իոնների երկմիկրոնային ստիպողական ճառագայթման պարամետրերը: Ուսումնասիրված բարդ համակարգում գրգռման էներգիայի փոխակերպումը ստիպողական ճառագայթման ավելի էֆեկտիվ է ցածր ջերմաստիճանների դեպքում: Ճառագայթման կորուստների ուղիները կարող են փոքրացվել նոնաբարային հիմքի և խառնուրդների կոնցենտրացիայի ճշգրիտ ընտրության միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. A. Kaminski, Phys. stat. sol. (a), 87, 11 (1985). ² Справочник по лазерам. Т. 1. Ред. А. М. Прохоров, Сов. радио, М., 1978. ³ Handbook of laser science and technology, v. 1. Ed. M. J. Weber, CRC Press, Boca Raton, 1983. ⁴ M. Robinson, D. P. Devor, Appl. Phys. Lett., v. 10, 167 (1967). ⁵ E. P. Chiklits, S. C. Natman, R. C. Folweiler e. a., IEEE J. Quantum Electron., v. 8, 225 (1972). ⁶ M. Weber, M. Bass, T. Varimotos e. a., IEEE J. Quantum Electron, v. 9, 1079 (1973). ⁷ R. L. Remski, D. J. Smith, IEEE J. Quantum Electron., v. 6, 750 (1970). ⁸ А. М. Морозов, М. В. Петров, В. Р. Старцев и др., Оптика и спектроскопия, т. 41, 1056 (1976). ⁹ A. Erbil, H. P. Jenssen, Appl. Optics, v. 19, 1729 (1980). ¹⁰ Б. М. Антипенко, А. А. Мак, Л. К. Сухарева, Письма в ЖТФ, т. 10, 513 (1984). ¹¹ Б. М. Антипенко, А. С. Глебов, Т. И. Киселева и др. Письма в ЖТФ, т. 11, 682 (1985). ¹² А. А. Каминский, А. Г. Петросян, В. А. Федоров и др., ДАН СССР, т. 260, 64 (1981). ¹³ А. А. Каминский, А. Г. Петросян, В. А. Федоров и др., Изв. АН СССР. Неорганические материалы, т. 17, 1920 (1981). ¹⁴ А. А. Каминский, А. Г. Петросян, К. Л. Ованесян, Изв. АН СССР. Неорганические материалы, т. 19, 1217 (1983). ¹⁵ A. A. Kaminski, Kh. S. Bagdasarov, A. G. Petrosyan e. a., Phys. stat. sol. (a), v. 18, K31 (1973). ¹⁶ A. A. Kaminski, Laser crystals, their physics and properties, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

УДК 541.127+678.744.422

Г. Э. Сафарян, Р. О. Чалтыкян, Н. М. Бейлерян

Метод определения констант скорости радикально-цепных реакций при импульсном лазерном стимулировании

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Б. Налбандяном 2/VI 1986)

Важными характеристиками радикально-цепных процессов, в частности радикальной полимеризации, являются среднее время жизни макрорадикалов (τ), а также величина K_p/K_0 .

Наиболее распространенным методом определения констант радикально-цепных процессов является метод прерывистого освещения, который теоретически детально обсуждался в работе (1), был использован для изучения рекомбинации радикалов авторами (2). Для жидкофазной полимеризации этот метод был впервые применен в работе (3). Недостатком метода является, например, то, что требуется применение источника освещения с высокой степенью постоянства (1), важно также сохранение постоянства интервалов освещения и затемнения, и наконец, предполагается мгновенное начало и прекращение освещения всей реакционной кюветы одновременно, тогда как вращающийся диск осуществляет постепенное освещение и затемнение кюветы.

В настоящем сообщении рассмотрены случаи применения импульсных лазеров с изменяемой частотой повторения импульсов для определения τ и элементарных констант радикально-цепных процессов. Такая постановка задачи оправдана стабильностью лазерного излучения и высокой монохроматичностью. Кроме того, включение и выключение лазерного света происходит мгновенно. Экспериментально же различная частота повторения импульсов идентична применению вращающихся дисков с разными секторами. Создание такой методики связано с тем, что в последние годы импульсные лазеры часто применяются для стимулирования химических реакций, в том числе полимеризации (5-7).

Однако применение импульсного лазерного излучения в методе прерывистого освещения требует трансформации известной формулы (8) $W'_{\text{пер}}/W_{\text{непр}} \sim f(\tau)$, так как длительность светового времени ($T \approx 10^{-8}$ с) значительно меньше темнового ($t' = 1/\nu = 10^{-1} \div 10^{-2}$ с в зависимости от частоты повторения импульсов ν), т. е. $m = t'/T \gg 1$ и $T/\tau \ll 1$, где m — отношение t'/T ; τ — время жизни макрорадикалов, следовательно, $e^{t'/\tau} \approx 1 + T$ и $t'/\tau \approx 1$. Легко показать, что принятые достаточно корректные допущения приводят к трансформации известной формулы в формулу (1):

$$W_{\text{прер}} / W_{\text{непр}} = (\tau / mT) \cdot \ln(1 + T\sqrt{m}/\tau), \quad (1)$$

Время жизни макрорадикалов равно

$$\tau = 1/\sqrt{K_0 W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}}, \quad (2)$$

где $W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}$ скорость инициирования при лазерном облучении. Подставляя (2) в (1), получим

$$W_{\text{прер}} / W_{\text{непр}} = \frac{1}{mT\sqrt{K_0 W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}}} \cdot \ln(1 + T\sqrt{mK_0 W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}}). \quad (3)$$

Так как скорость инициирования за время импульса лазерного облучения намного больше, чем при фотооблучении (при тех же средних мощностях они отличаются в T раз), а после импульса она убывает, то для среднего времени жизни макрорадикалов будет правильным выражение

$$\tau_0 = 1/\sqrt{K_0 W_{\text{ин}}^{\text{фото}}}, \quad (4)$$

где $W_{\text{ин}}^{\text{фото}}$ — скорость фотоинициирования. В этом случае уравнение (3) примет следующий вид:

$$W_{\text{прер}} / W_{\text{непр}} = \frac{\tau_0}{t'} \sqrt{\frac{W_{\text{ин}}^{\text{фото}}}{W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}}} \cdot \ln\left(1 + \frac{t'}{\tau_0} \sqrt{\frac{W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}}{m \cdot W_{\text{ин}}^{\text{фото}}}}\right). \quad (5)$$

При отсутствии нелинейных эффектов в интервале рабочих мощностей скорость полимеризации при непрерывном лазерном облучении можно выразить формулой

$$W_{\text{непр}}^{\text{лаз}} = K_p / K_0^{0.5} \sqrt{W_{\text{ин}}^{\text{лаз}}} \cdot [M]. \quad (6)$$

Но так как непрерывный лазер с мощностью порядка нескольких сот кВт для тех же длин волн пока невозможно иметь, то в этом случае как непрерывный источник света можно применять фотоисточник со средней мощностью, соответствующей средней мощности лазерного излучения при максимальной частоте повторения импульсов. Подставляя (6) в (5) и разделив последнее на скорость полимеризации при фотооблучении, получаем уравнение

$$W_{\text{прер}} / W_{\text{непр}} = 1/P \cdot \ln(1 + P \cdot \sqrt{W_{\text{ин}}^{\text{лаз}} / m \cdot W_{\text{ин}}^{\text{фото}}}), \quad (7)$$

где $P = t' / \tau_0$. Применимость формулы (7) нами опробована на примере инициированной азо-бис-изобутиронитрилом (АИБН) полимеризации в массе винилацетата (ВА), при стимулировании процесса азотным лазером АЛ-202 со следующими характеристиками излучения: $\lambda = 337,1$ нм, $\tau_{\text{имп}} = 5 \cdot 10^{-9}$ с. Частота повторения импульсов варьировалась в пределах 1–65 Гц, $[АИБН] = 0,042$ м/л, $T = 30^\circ\text{C}$. мощность единичного импульса сохранялась постоянной — 140 кВт. Так как $W_{\text{ин}}^{\text{лаз}} = \beta_{\text{лаз}} \cdot f \cdot I_{\text{лаз}}$ и $W_{\text{ин}}^{\text{фото}} = \beta_{\text{фото}} \cdot f \cdot I_{\text{фото}}$, где $\beta_{\text{лаз}}$ и $\beta_{\text{фото}}$ — эффективности гомолиза инициатора при лазерном и фотооблучении соответственно, f — эффективность инициирования, $I_{\text{лаз}}$, $I_{\text{фото}}$ мощности излучения при лазерном и фотооблучении. Отношение $W_{\text{ин}}^{\text{лаз}} / W_{\text{ин}}^{\text{фото}}$ можно заменить:

$W_{\text{лаз}}/W_{\text{фото}} \approx \beta_{\text{лаз}} \cdot I^{\text{лаз}}/\beta_{\text{фото}} I^{\text{фото}}$. В (8) нами показано, что при вышеуказанных условиях $\beta_{\text{лаз}} = 0,5 \cdot \beta_{\text{фото}}$, кроме того при тех же средних мощностях $I^{\text{лаз}}/I^{\text{фото}} \approx 1/T$. В конечном счете получим

$$W_{\text{прер}}/W_{\text{непр}} = 1/P \cdot \ln(1 + P/\sqrt{2t'}), \quad (8)$$

Соответствующая теоретическая зависимость $W_{\text{прер}}/W_{\text{непр}}$ от P при разных значениях t' показана на рис. 1. Получена экспериментальная зависимость $W_{\text{прер}}/W_{\text{непр}} \sim t'$, показанная на рис. 2. Совмещая кривые рис. 2 и рис. 1 путем наложения, при данном t' , определены значения τ , усреднение которых дает $\tau = (5,1 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$ с, откуда по формуле из (8) вычислено значение $K_p/K_0 = 1,1 \cdot 10^{-5}$, соответствующее порядку величин, приведенных в литературе (10-14). Значения K_p/K_0 , определенные в работах (10,11), должны превышать истинные значения, так как смазывается четкость интервалов освещения и завышается, соответственно, значение τ .

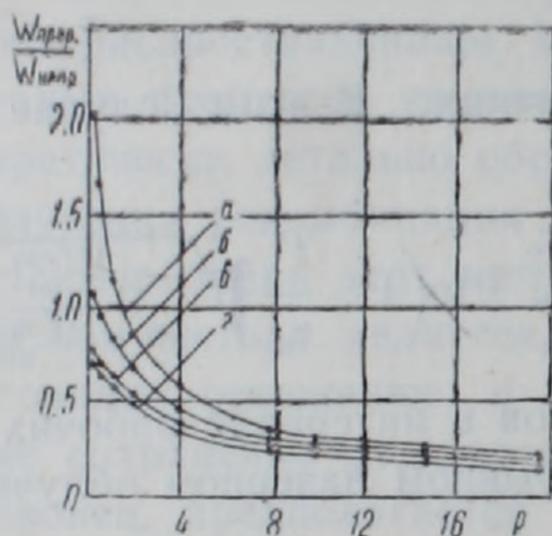


Рис. 1. Теоретические кривые зависимости отношения скорости полимеризации от P при прерывистом и непрерывном лазерном облучении при $t' = 0,1(a); 0,4(б); 0,7(в); 0,83(г)$.

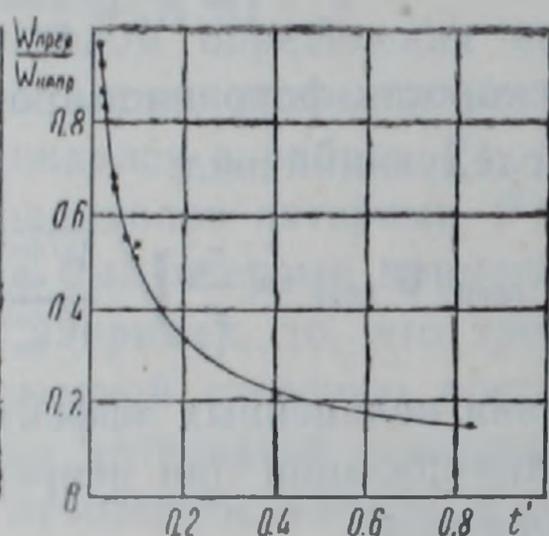


Рис. 2. Экспериментальная зависимость скорости полимеризации от t' при прерывистом и непрерывном лазерном облучении

Проведено также теоретическое и экспериментальное исследование полимеризации ВА в массе ($[AIBN] = 0,042$ моль/л, $T = 30^\circ\text{C}$) при прерывистом, квазиимпульсном фотоосвещении. Источником служила ртутная лампа ДРШ-500 с комбинированным фильтром (10%-ный водный раствор медного купороса + стекло УФС-3), имеющим пропускание с $\lambda_{\text{макс}} = 365$ нм ($\Delta\lambda = 40$ нм). На дисках делались вырезы, которые обеспечивали при постоянной скорости вращения световое время $T_{\text{свет}} = 3,03 \cdot 10^{-3}$ с. Увеличением числа вырезанных секторов увеличивалась частота повторения импульсов света, и темновое время (t') рассчитывалось по формуле $t' = 1/\nu - T$. Созданные параметры прерывистого освещения соответствуют приблизительно одному порядку величин T , t' , τ (а), при котором формула (1) будет иметь вид

$$W_{\text{прер}}/W_{\text{непр}} = \frac{m}{P(m+1)} \left[\ln \frac{(1+z_1)e^{P/m} + (1-z_1)e^{-P/m}}{2} + \ln \frac{1/z_2 + P/m + P}{1/z_2 + P/m} \right] \quad (9)$$

Формула (9) решена на ЭВМ при задаваемых значениях m и P , откуда получены семейства теоретических кривых функции $W_{\text{пер}}/W_{\text{непр}} \sim f(P)$ (рис. 3). Сочетанием экспериментальных данных (рис. 4) с теоретическими кривыми рис. 3 определено значение $\tau = 1,7 \cdot 10^{-2}$ с, откуда $K_p/K_0 = 2 \cdot 10^{-6}$. Надо отметить, что полученное значение, которое определено при условиях, идентичных условию (а), т. е. когда полимеризация все время протекает при нестационарной концентрации полимерных радикалов, совпадает с литературными⁽¹⁵⁾ ($K_p/K_0 = 1,8 \cdot 10^{-6}$ при 16°C). Из сравнения видно, что при применении метода

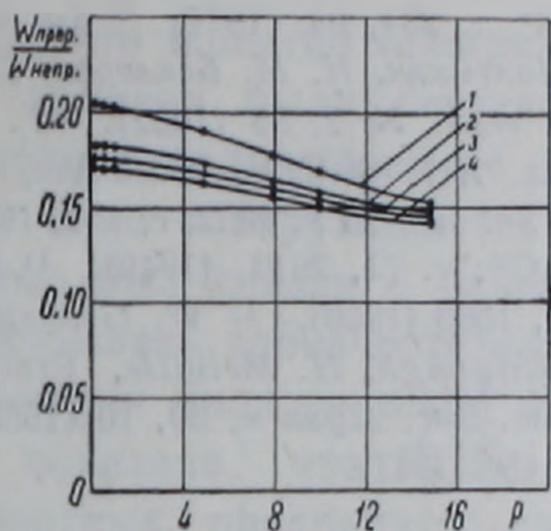


Рис. 3. Теоретические кривые функции $W_{\text{пер}}/W_{\text{непр}}$ от P при $m = 25,0(1); 28,0(2); 30,0(3); 32,0(4)$

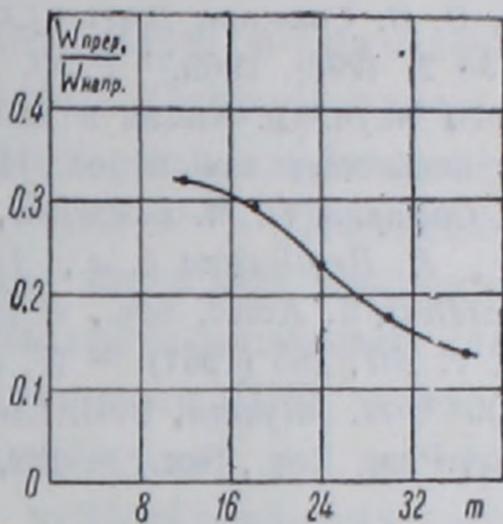


Рис. 4. Экспериментальная кривая функции $W_{\text{пер}}/W_{\text{непр}}$ от m при квазипульсном фотооблучении

прерывистого освещения при высоких скоростях вращения диска и большом количестве вырезов смазывается четкость включения и выключения светового интервала, что приводит к неточностям измерений и, соответственно, к занижению значения τ . Т. е. применение квазипульсных режимов облучения фотонисточниками приводит к большим неточностям, чем в методиках, описанных в^(10,11) для малых скоростей вращения дисков и малого числа вырезов.

Таким образом, импульсные лазерные источники с большим набором частоты повторения импульсов можно рекомендовать для определения с большой точностью констант скоростей элементарных радикально-цепных процессов с использованием формулы (7).

Ереванский государственный университет

Գ. Է. ՍԱՖԱՐՅԱՆ, Ռ. Հ. ՉԱԼԻԿՅԱՆ, Ն. Մ. ԲՅՅԼԵՐՅԱՆ

Իմպուլսային լազերով հարուցված ռադիկալաշղթայական պրոցեսների տարրական հաստատունների որոշման մեթոդ

Առաջարկված է ընդհանուր մեթոդ և դուրս է բերված տեսական բանաձև բոլոր տեսակի իմպուլսային լազերներով հարուցված ռադիկալաշղթայական պրոցեսների տարրական հաստատունների որոշման համար, համաձայն հայտնի ընդհատ լուսավորման եղանակի: Մեթոդի և բանաձևի ճշտությունը ստուգված է վինիլացետատի հարուցված պոլիմերման օրինակով:

Յույց է տրված, որ քվազիիմպուլսային ֆոտոճառագայթման ժամանակ, մակրոռադիկալների միջին կյանքի տևողության որոշումը բերում է անճշտությունների:

ЛИТЕРАТУРА — ՊՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ L. Bateman, G. Gee, Trans. Farad. Soc. v. 47, 155 (1951).
- ² И. М. Бельговский, М. А. Маркевич, Н. С. Ениколопян, Высокомолекулярные соединения, т. 6, 871(1964).
- ³ P. D. Bartlett, C. G. Swain, J. Am. Chem. Soc., v. 67, 2273(1945); v. 68, 2381 (1946).
- ⁴ X. C. Багдасарьян, Теория радикальной полимеризации, Наука, М., с. 111 (1966).
- ⁵ В. Н. Генкин, В. В. Соколов, ДАН СССР. т. 234, 94 (1977).
- ⁶ Ам. пат. № 3. 405. 045. С. А., 70, № 2, 4798j, 1969.
- ⁷ P. O. Чалтыкяч, Н. М. Бейлерян, Л. X. Симонян и др., Межвуз. сб. науч. тр. Химия и хим. техн., № 2, 35 (1982).
- ⁸ Г. П. Гладышев, Полимеризация виниловых мономеров, Изд. АН КазССР, Алма-Ата, 1964.
- ⁹ P. O. Чалтыкяч, Г. Э. Сафарян, Н. М. Бейлерян, Уч. зап. ЕГУ, № 2, с. 152, 1985.
- ¹⁰ M. Matheson, E. Auer, E. Bevilacqua e. a., JACS, v. 71, 2610 (1949).
- ¹¹ H. Kwart, H. Brodbent, P. Bartlett, J. Amer. Soc., v. 72, 1060 (1950).
- ¹² W. Grassie, H. Melville, Proc. Roy. Soc., v. 207, 285 (1951).
- ¹³ W. Bengough, H. Melville, Proc. Roy. Soc., v. A230, 429 (1955).
- ¹⁴ H. Miyama, Bull. Chem. Soc. Japan v. 30, 10 (1957).
- ¹⁵ G. Burnett, H. Melville, Proc. Roy., Soc., v. 189, 456 (1947).

УДК 576. 858. 6.006. 094/097

БИОХИМИЯ

А. С. Агабалян, О. Я. Давтян, А. А. Багдасарян, Р. А. Захарян, Л. А. Рухкян

Биологическая активность ДНК из опухоли человека

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Галояном 19/І 1987)

Известно, что попытки обнаружить вирус в опухолевой клетке до настоящего времени были безуспешны. Предполагалось, что вирус, вызвав опухоль, в дальнейшем не участвует в злокачественном процессе, а потому и не обнаруживается в ней^(1,2). Дальнейший подход к этой проблеме был связан с поиском вирусных нуклеиновых кислот, способных вызывать злокачественную трансформацию клетки.

При изучении биологической активности ДНК опухолеродных вирусов было показано, что ДНК, выделенная из экспериментальной опухоли животных, предварительно инфицированных опухолевым вирусом, обладает способностью вызывать у животных развитие опухоли⁽³⁻⁵⁾. Однако не имеется никаких данных о биологической активности ДНК, полученных непосредственно из опухолей человека. В 1969 г. Хюбнером и Тодаро⁽⁶⁾ была выдвинута гипотеза о вертикальной (наследственной) передаче информации РНК-содержащего вируса С-типа (виrogen). Последний служит, по предположению авторов, эндогенным источником онкогенной информации и трансформирует нормальную клетку в опухолевую, при этом фенотипическое выявление вирусной трансформации может происходить или не происходить.

В связи с вышесказанным представляло интерес изучить биологические и физико-химические свойства ДНК, выделенных из опухолей толстой кишки человека, и исследовать морфогистологическую картину толстой кишки животных после введения им опухолевой ДНК.

Опухоль получали после резекции толстой кишки по поводу аденокарциномы. ДНК из опухоли получали двумя методами: по Мармуру и по Хирту^(7,8).

Количественную и качественную характеристику ДНК проводили на спектрофотометре СФ—46 (ЛОМО). Физико-химическую характеристику ДНК проводили при помощи горизонтального электрофореза в 1%-ном геле агарозы. Электронно-микроскопическую визуализацию опухолевой ДНК осуществляли в электронном микроскопе (в S—613). Препараты для электронной микроскопии готовили по способу Кляйншмидта⁽⁹⁾.

ДНК, полученную из опухолей и полипов толстой кишки человека, вводили экспериментальным животным (крысам) массой 180—200 г внутрибрюшинно в количестве 100 мкг/крысу. Контрольные (интактные) животные получали ДНК из селезенки крупного рогатого скота в тех же дозах. После гибели животных толстую кишку отбирали на гистоморфологическое исследование. ДНК из печени экспериментальных животных выделяли по методу Хирта⁽⁸⁾.

При изучении биологических свойств ДНК, выделенных из опухолей и полипов толстой кишки, было установлено, что введение этих ДНК экспериментальным животным в количестве 100 мкг/крысу приводило к гибели животных через 3—4 недели после инъекции. В то же время животные контрольной группы, получившие ДНК из селезенки крупного рогатого скота, сохраняли 100%-ную жизнеспособность (рис. 1). Эти данные с убедительностью свидетельствуют о выражен-

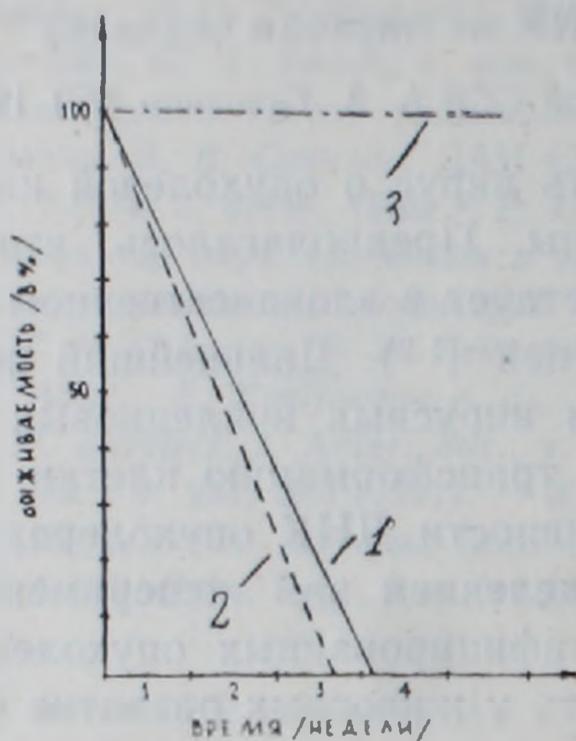


Рис. 1. Биологическое действие ДНК из опухолей и полипов толстой кишки человека. 1—выживаемость животных после введения ДНК из полипов; 2—выживаемость животных после введения ДНК из опухолей; 3—выживаемость животных после введения ДНК из селезенки крупного рогатого скота (контроль)

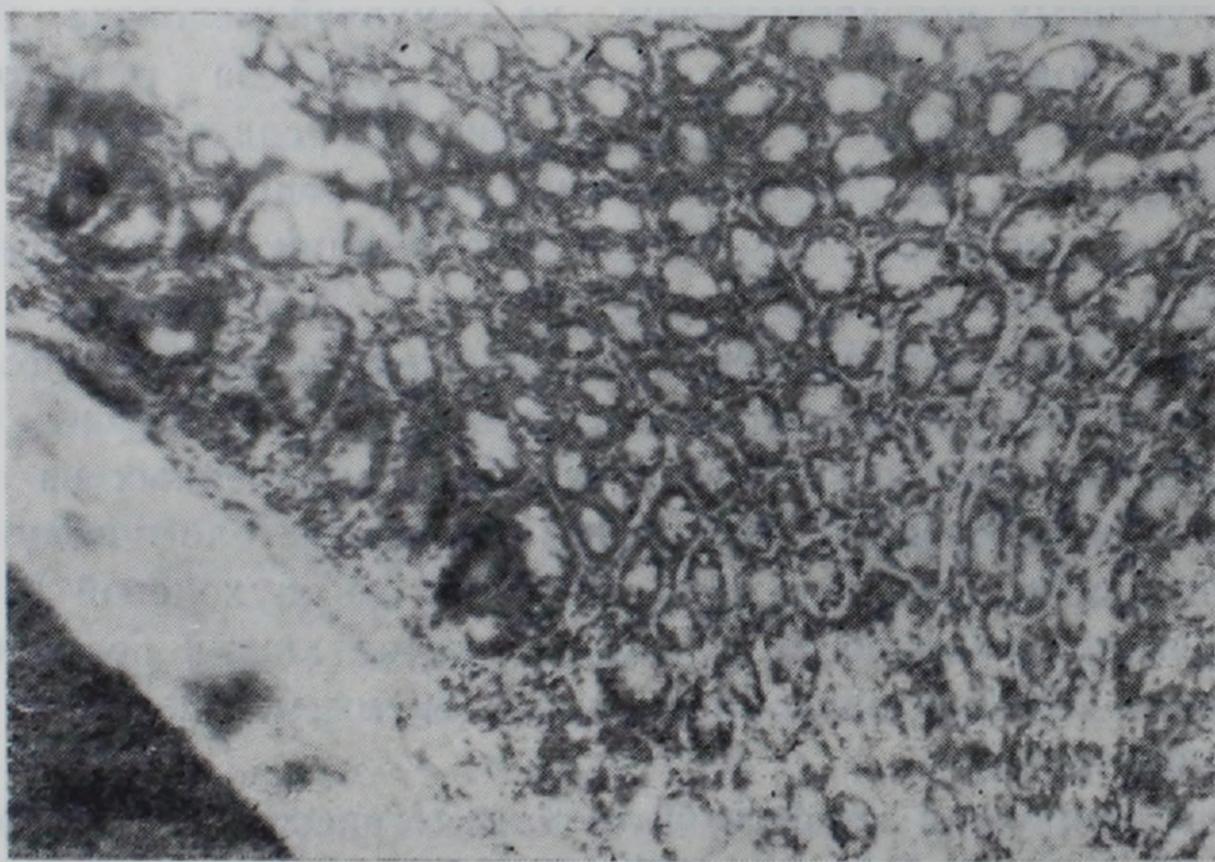


Рис. 2. Утолщение слизистой оболочки толстой кишки с аденоматозным разрастанием и признаками выраженной атипии. Окраска гематоксилин-эозином. Увеличение в 100 раз

ной биологической активности ДНК, выделенной из опухолей и полипов толстой кишки человека. Наши результаты имеют аналогию с данными, полученными при изучении биологической активности ДНК, выделенных из ДНК-содержащих онкогенных вирусов, и ДНК из опухолей, индуцированных онкогенными вирусами (¹⁰⁻¹²). В то же время в доступной литературе нам не удалось обнаружить аналогичных результатов в отношении биологической активности ДНК, непосредственно выделенных из опухолей различных органов человека.

Морфологическое исследование препаратов толстой кишки экспе-

риментальных животных установило, что опухолевая ДНК, в отличие от неопухолевой, контрольной ДНК из селезенки крупного рогатого скота, вызывает очаговое развитие опухолевого процесса.

Выявлена картина плоской тубулярной аденомы с признаками выраженной атипии. В соседних участках вблизи аденомы обнаруживается гиперплазия желез с умеренной пролиферацией эпителия (рис. 2). Данные морфологических исследований препаратов толстой кишки экспериментальных животных наглядно показывают развитие опухолевого процесса у крыс после однократного введения 100 мкг опухолевой ДНК. Эти результаты с убедительностью демонстрируют наличие биологически активного фактора в тотальном пуле опухолевой ДНК.

При изучении физико-химических свойств опухолевой ДНК последнюю вместе с ДНК, выделенной из печени опытных и контрольных животных, подвергали электрофорезу в 1%-ном геле агарозы. Как видно из рис. 3, в гелевых дорожках с ДНК из опухоли и ДНК из печени экспериментальных животных выявляется четкая, окрашенная этидиум бромидом полоса внехромосомной ДНК, мигрирующая медленнее хромосомной ДНК с ориентировочным молекулярным весом около $40-50 \times 10^6$ дальтон. Ранее нами при исследовании физико-химических свойств ДНК экспериментальной опухоли саркомы-45 крыс, индуцированной химическим канцерогеном, были обнаружены две внехромосомные молекулы ДНК с молекулярной массой 3 и 5×10^6 дальтон, обладающие выраженной биологической активностью (¹³⁻¹¹). Опухолоподобные образования, наблюдаемые после введения этих ДНК крысам, позволили судить об ответственности этих внехромосомных молекул ДНК в развитии опухоли саркомы-45. Аналогичная ситуация, связанная с активностью внехромосомной ДНК, имеет место и в нашем случае с использованием ДНК, выделенной из опухолевой ткани человека. Обнаружение этих добавочных, внехромосомных молекул ДНК в тотальном пуле ДНК, полученной из печени экспериментальных животных, говорит об активном транспорте фактора (внехромосомной ДНК), ответственного за индукцию пролиферации и трансформации, что по видимому, является причиной возникновения последующих метастазов в различных органах.

Электронно-микроскопическая визуализация препаратов опухолевых ДНК выявила две формы нуклеиновых кислот в общем пуле ДНК:



Рис. 3. Электрофоретическая характеристика, ДНК: 1-я дорожка—ДНК, выделенная из опухоли толстой кишки по Мармуру; 2-я дорожка—ДНК, выделенная из полипов толстой кишки по Хирту; 3-я дорожка—ДНК, выделенная из печени опытных животных по Хирту; 4-я дорожка—ДНК, выделенная из печени контрольных животных; 5-я дорожка—ДНК, выделенная из печени интактной крысы

линейные двухспиральные молекулы хромосомной ДНК и суперспирализованные внехромосомные ДНК, описанные выше.

Таким образом, полученные данные демонстрируют выраженную биологическую активность опухолевой ДНК. Такая активность, приводящая к образованию аденом в толстой кишке экспериментальных животных с последующей их гибелью, связана с наличием в тотальном пуле опухолевой ДНК добавочной, внехромосомной, суперспирализованной формы ДНК с молекулярной массой в пределах $40-50 \times 10^6$ дальтон. Аналогичные результаты в отношении внехромосомных ДНК с относительно высоким молекулярным весом, ответственных за опухолевый рост, были получены на примере октопиновой плазмиды *Agrobacter tumefaciens*, вызывающей опухоли у растений (15).

НИИ проктологии Министерства здравоохранения Армянской ССР
Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ԱՂԱԲԱՅԱՆ, Օ. Յա. ԳԱՎԹՅԱՆ, Ա. Ս. ՐԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ
Թ. Ա. ԶԱՔՍՐՅԱՆ, Լ. Ս. ՌՈՒԽԿՅԱՆ

Մարդու ուռուցքային ԴՆԹ-ի բիոլոգիական ակտիվությունը

Ուսումնասիրված է ԴՆԹ-ի բիոլոգիական ակտիվությունը, ստացված մարդու հաստ աղու ուռուցքից: Ցույց է տրված, որ մարդու ուռուցքային ԴՆԹ-ի միանվազ ներմուծման ժամանակ փորձարկվող կենդանիներին, վերջինները ոչնչանում են 3—4 շաբաթվա ընթացքում: Հաստ աղու պրուպարատների մորֆոլոգիական ուսումնասիրությունները փորձարկվող կենդանիների մոտ հայտնաբերել է աղենամատող աճ, բջիջների արտահայտված ձևով: Ուռուցքային ԴՆԹ-ի ֆիզիկաքիմիական հատկանիշների էլեկտրաֆորետիկ ուսումնասիրությունը 1% ազարոզ գելում ի հայտ բերեց հավելյալ արտաբրոմոսոմային ԴՆԹ $40-50 \times 10^6$ դալտոն մոտավոր մոլ. կշռով:

Ուռուցքային ԴՆԹ-ի էլեկտրոնոմիկրոսկոպիկ նկարագրումը ցույց է տվել երկու տեսակի ԴՆԹ-ի առկայություն. դժաբրոմոսոմային ԴՆԹ-ներ, որոնցից վերջինի՝ արտաբրոմոսոմային ԴՆԹ-ի մասնակցությունն էլ հենց վերադրվում է ուռուցքի զարգացումը կենդանիներին մոտ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Л. А. Зильбер, в кн.: Вирусо-генетическая теория возникновения опухолей, Медицина М., 1968.
- 2 Д. Б. Голубев, Шлякевич, в кн.: Современные аспекты вирусной теории происхождения злокачественных новообразований, Медицина, М., 1972.
- 3 Y. Ito, C. A. Evans, J. Exp. Med., v. 114, p. 485—500 (1961).
- 4 J. P. Butnett, J. A. Harrington, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 60, p. 1023—1029, (1968).
- 5 N. Mayne, J. P. Burnett, L. K. Butler, Nature New Biol, v. 232, p. 182—183 (1971).
- 6 R. J. Hubner, G. J. Todaro, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 64, p. 1087—1094 (1969).
- 7 J. A. Marmur, J. Mol. Biol., v. 12, p. 468—487 (1961).
- 8 B. Hirt, J. Mol. Biol., v. 26, p. 365—369 (1967).
- 9 A. Kleinschmidt, Methods in Enzymology, v. 12, p. 361—368 (1968).
- 10 V. C. Chambers, Y. Ito, Virology, v. 23, p. 434—436 (1964).
- 11 C. Orth, P. Atanasium, M. Balron e. a., Proc. Soc. Exp. Biol. Med., v. 115, p. 1090—1095 (1964).
- 12 F. L. Graham, Adv. Cancer Res., v. 25, p. 20—22 (1977).
- 13 А. С. Агабалян, Р. Г. Погосян, Г. М. Степанян, Биол. журн. Армении, т. 4, с. 320—324 (1979).
- 14 А. С. Агабалян, Ю. А. Израелян, Г. М. Степанян, Вопр. онкологии, т. 1, с. 97—98 (1980).
- 15 M. Chilton, M. Dreemond, D. Mirle, J. sell., v. 11, p. 263—267 (1977).

УДК 612.823.5

МОРФОЛОГИЯ

В. И. Погосян

Афферентные входы дорсальных отделов крупноклеточной части красного ядра кошки

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 19/XII 1986)

Морфологический анализ нейронных группировок крупноклеточной части красного ядра (КЯ) кошки позволил подразделить ее на дорсальный и вентральный отделы (¹⁻³). Посредством применения импрегнационных методов изучения волоконных систем мозга установлено, что указанные отделы КЯ, помимо нейронной организации, различаются и в отношении их афферентных входов (⁴⁻⁷). Целью настоящей работы было дальнейшее исследование афферентных входов КЯ с использованием метода ретроградного аксонного транспорта пероксидазы хрена (ПХ).

Опыты были поставлены на 14 взрослых кошках под нембуталовым наркозом (50 мг/кг, внутривенно). В дорсальные отделы крупноклеточной части КЯ вводили стеклянную микропипетку (диаметр кончика 50—100 мкм), заполненную 10%-ным раствором ПХ (Boehringer, Sigma VI). Для растворения фермента применяли буферный раствор (⁸) в сочетании с 0,5%-ным раствором диметилсульфоксида, который титровали 1 Н-ным раствором соляной кислоты до рН 8,3. Осуществляли локальную микроионофоретическую инъекцию раствора ПХ в КЯ с последующим изучением топографии распределения маркированных нейронов-мишеней в различных отделах центральной нервной системы. Через 48 ч после введения фермента производили повторную наркотизацию животного и перфузию мозга. Последний разрезали на блоки, из которых получали фронтальные срезы (75 мкм), окрашиваемые по методу Мезулама (⁹). Для определения места локализации аккумуляировавших фермент клеток использовали атласы мозга кошки (¹⁰⁻¹²).

Как видно из рис. 1, б в результате применения новой прописи буферного раствора, использованного для растворения фермента, в области локализации микропипетки не выявляются гранулы ПХ, так как происходит эффективный захват фермента концевыми образованиями афферентных волокон, проецирующихся на дорсальный отдел КЯ. Из рисунка также видно, что вблизи места введения ПХ и на противоположной стороне мозга прослеживаются ретроградно маркированные пучки волокон, имеющие различную ориентацию.

Анализ топографии распределения нейронов-мишеней в центральных ядрах мозжечка (рис. 1, а) показал, что все они контралатераль-

но проецируются на дорсальный отдел крупноклеточной части КЯ, со значительным превалированием проекций промежуточного ядра. Нами получены данные относительно существования проекций фастигиального ядра на КЯ. Что же касается зубчатого и промежуточного ядер мозжечка, то результаты настоящего исследования полностью согласуются с литературными данными (4,5,13,14).

Выраженная аккумуляция ПХ выявлена в пирамидных нейронах слоя V крестовидной борозды (рис. 1, в), значительное скопление которых обнаружено в ее латеральных отделах—в зоне представительства передних лап (15). Подобные результаты получены и другими исследователями, использовавшими в своих экспериментах импрегнационные методы изучения корково-рубральных связей (6,16). Нами получены данные относительно проекций на дорсальные отделы круп-

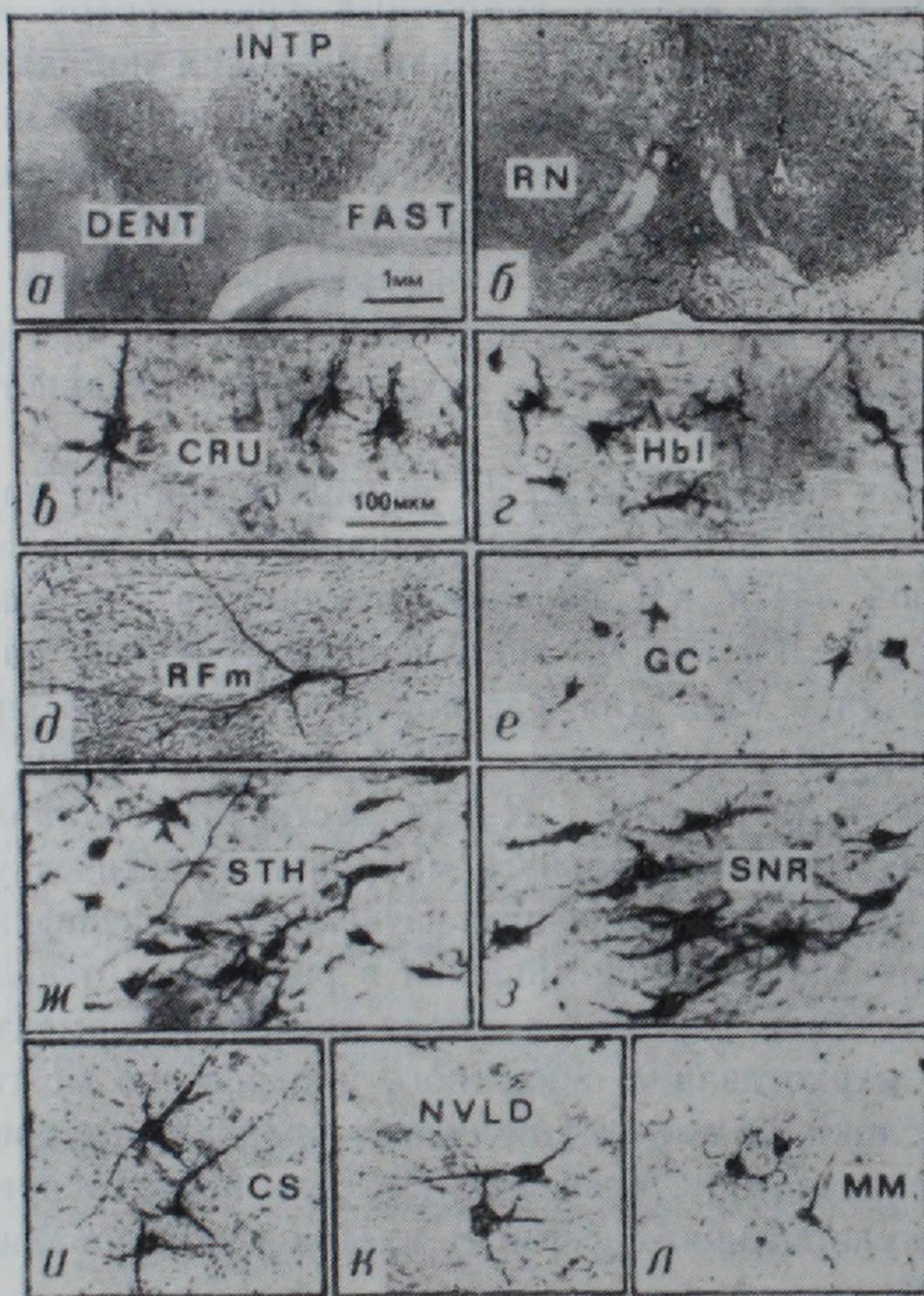


Рис. 1. Микрофотографии области локального микроавтофлуоресцентного введения пероксидазы хрена в дорсальный отдел крупноклеточной части красного ядра и нейроны-мишени некоторых образований мозга кошки. DENT—зубчатое, INTp—промежуточное и FAST—фастигиальное ядра мозжечка; RN—красное ядро; CRU—крестовидная борозда; Hbl—медиальное ядро уздечки; RFm—ретикулярная формация продолговатого мозга; GC—центральное серое вещество; STH—субталамическое ядро; SNR—ретикулярный отдел черной субстанции; CS—верхнее двуххолмие; NVLD—дорсальный отдел латерального вестибулярного ядра и MM—сосковидное тело. Масштаб: 1 мм (для а и б) и 100 мкм (для в—л)

ноклеточной части КЯ медиального ядра уздечки (рис. 1, г), ретикулярной формации продолговатого мозга (рис. 1, д), центрального серого вещества (рис. 1 е), субталамического ядра (рис. 1, ж), верхнего двуххолмия (рис. 1 и), дорсального отдела латерального вестибулярного ядра (рис. 1 к) и сосковидного тела (рис. 1 л). Уточнены связи черной субстанции с КЯ. Показано, что на его дорсальные отделы проецируется ретикулярный отдел черной субстанции. Следует также отметить, что у опоссума описаны эфферентные проекции верхнего двуххолмия на КЯ (17).

На рис. 2 показана обобщенная схема локализаций нейронов-мишеней в различных структурах центральной нервной системы, составленная на основе анализа данных микроионофоретических инъекций ПХ в дорсальный отдел крупноклеточной части КЯ кошки. Большинство исследователей признает только ипсилатеральные корково-рубральные связи крестовидной и коронарной борозд (16, 18—20). Е. Ринвиком (7) описаны билатеральные проекции крестовидной борозды на КЯ, выявленные посредством изучения антерсградной дегенерации аксонов пирамидных клеток, проецирующихся на КЯ. Исследование топографии ретроградно маркированных корковых нейронов-мишеней показало, что на дорсальные отделы КЯ билатерально проецируются коронарная, пресильвиевая, крестовидная, латеральная и передняя эктосильвиевая борозды. Подсчет количества меченых клеток симметричных областей коры больших полушарий мозга выявил, что на ипсилатеральной стороне количество нейронов-мишеней в 4—5 раз больше, чем на контралатеральной стороне. Обнаружены билатеральные связи клиновидного и нежного ядер с КЯ, что согласуется с данными других авторов (21, 22).

Кроме отмеченных выше образований мозга, нами получены данные относительно билатерального представительства в КЯ переднего, дорсального, вентромедиального, латерального, заднего, супрахиазматического гипоталамических ядер; поля Фореля, ядра задней комиссуры, интерстициального ядра Кахаля, ретикулярной формации среднего мозга и моста; медиального вестибулярного ядра и передних рогов шейных отделов спинного мозга. Ипсилатеральные проекции на КЯ выявлены от парафасцикулярного ядра, срединного центра, неопределенной зоны и вентрального ядра латерального коленчатого тела, а контралатеральные—от красного ядра и ядра лицевого нерва. Подтверждены контралатеральные проекции на КЯ боковых и задних рогов шейных отделов спинного мозга (23).

Применение локальных микроионофоретических инъекций ПХ в дорсальные отделы крупноклеточной части КЯ кошки и изучение последующего ретроградного аксонного транспорта фермента в нейроны-мишени различных структур центральной нервной системы выявило удивительное многообразие и неоднородность его афферентных входов, что, вероятно, играет существенную роль в регуляции мышечного тонуса и соответствующих двигательных реакций передних конечностей указанного животного.

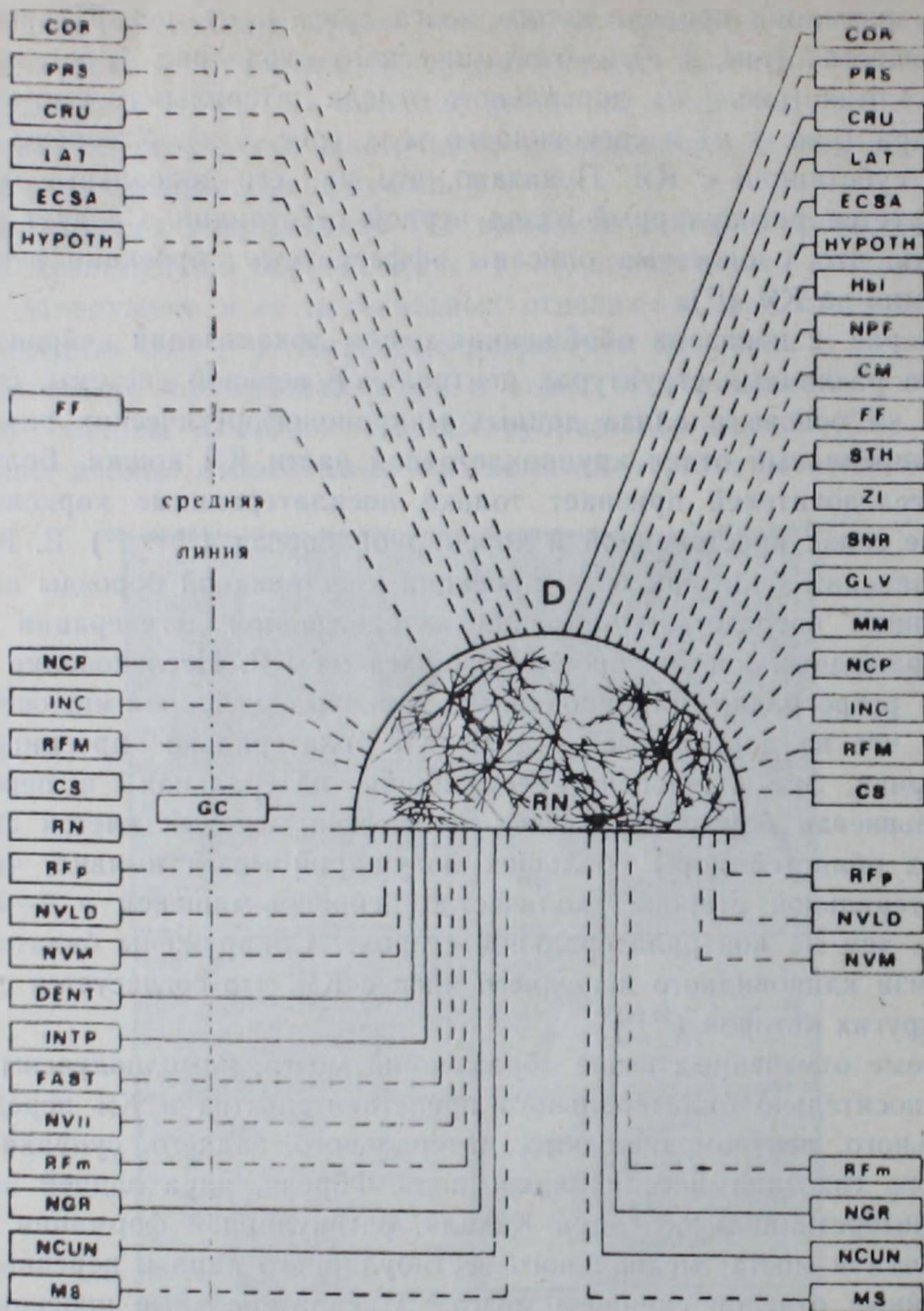


Рис. 2. Схематические связи различных образований центральной нервной системы с дорсальным отделом крупноклеточной части красного ядра кошки, выявленные посредством ретроградного маркирования пероксидазой хрена нейронов-мишеней. D—дорсальный отдел красного ядра; COR—коронарная, PRS—пресильвиевая, LAT—латеральная и ECSA—передняя эктосильвиевая борозды коры больших полушарий; NPF—парафасцикулярное ядро; CM—срединный центр; FF—поле Фореля; ZI—неопределенная зона; GLV—вентральное ядро латерального коленчатого тела; NCP—ядро задней комиссуры; INC—интерстициальное ядро Кахаля; RFM—регулярная формация среднего мозга и RFP—моста; NVM—медиальное вестибулярное ядро; NVII—ядро лицевого нерва; MS—передние рога шейных отделов спинного мозга; NGR—нежное и NCUN—клиновидное ядра. Остальные обозначения структур см. на рис. 1. Непрерывной линией обозначены подтвержденные связи, а пунктирной—выявленные впервые

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Կատվի կարմիր կորիզի խոշոր բջջային մասի հետին շրջանների
աֆերենտ մուտքեր

Հասուն կատուների մոտ խոշոր բջջային մասի հետին շրջաններում ծովաբողկ պերոքսիդազայի միկրոսիոնոֆորեատիկ ներմուծման պայմաններում ուսումնասիրվել է կենտրոնական նյարդային համակարգուիջան սարբեր գոյացություններում հետրնթաց նշված նեյրոն-թիրախների տեղակայումը:

Բացահայտված են հետևյալ պրոյեկցիաները՝ հիպոթալամուսի մի շարք կորիզներից միջային, կենտրոնից, պարաֆաստիկուլյար և ենթաթալամիկ կորիզներից, անորոշ շրջանից, ֆորելի գալշտից, սանձի միջային կորիզից, կամրջի ցանցաձև գոյացությունից, երկարավուն և միջին ուղեղից, կենտրոնական գորշ նյութից, վերին երկրորակից, Կախալի ինտերտալիցիալ կորիզից, կարմիր, ուղեղիկի ֆաստիգիալ և գիմային ներվի հակակողմյան կորիզներից, մեղիալ վեստիրուլյար կորիզից և լատերալ վեստիրուլյար կորիզի հետին բաժնից, ողնուղեղի պարանոցային հասվածների տոաչնային եղջյուրներից: Ճշտվել են կարմիր կորիզի և սև սուբստանցիայի միջև եղած կապերը և հաստատվել են ուղեղի մի շարք գոյացությունների պրոյեկցիաները: Նկարագրված են երկկողմանի կեղևա-ոուրրալ պրոյեկցիաներ:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն

- ¹ В. И. Погосян, Арх. анаг., т. 68, с. 71—78 (1975). ² В. И. Погосян, в кн.: Матеріалы I Закавказской конф. морфологов, Тбилиси, 1975. ³ В. В. Фанарджян, Д. С. Саркисян, В. И. Погосян, в кн.: Механизмы деятельности головного мозга, Мещниереба, Тбилиси, 1975. ⁴ J. Courville, Exp. Brain Res., v. 2, p. 191—215 (1966). ⁵ J. Courville, Rev. Can. Biol., v. 27, p. 127—144 (1968). ⁶ M. Mabuchi, T. Kusama, Brain Res., v. 2, p. 254—273 (1966). ⁷ E. Rinvik, Exp. Neurol., v. 12, p. 278—291 (1965). ⁸ В. И. Погосян, В. В. Фанарджян, Нейрофизиология, т. 18, с. 35—45 (198). ⁹ M.—M. Mesulam, J. Histochem. and Cytochem., v. 26, с. 106—117 (1978). ¹⁰ A. L. Berman, The brain stem of the cat: A cytoarchitectonic atlas with stereotaxic coordinates, Medison ect.: Univ. Wisc. press, 1968. ¹¹ F. Reinoso-Suarez, Topographischer Hirnatlas der Katze, Darmstadt: Merk, 1961. ¹² S. Snalder, W. T. Niemer, A stereotaxic atlas of the cat brain, Chicago: Univ. press. Chicago, 1961. ¹³ J. J. Dekker, Brain Res., v. 205, p. 229—244 (1981). ¹⁴ Y. Nakamura, N. Mizuno, A. Konishi, Brain Res., 147, p. 17—27 (1978). ¹⁵ C. N. Woolsey, in: Biological and Biochemical basis of behavior, Ed. by H. F. Harlow, C. N. Woolsey, Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1958. ¹⁶ E. Rinvik, F. Walberg, J. Comp. Neurol., v 120, p. 393—407 (1963). ¹⁷ G. F. Martin, J. Comp. Neurol., v. 135, p. 209—224 (1969). ¹⁸ В. Ю. Ермолаева, в кн.: Морфология путей и связей центральной нервной системы, Наука, М.—Л., 1965. ¹⁹ A. Sadum, Brain Res., v. 99, p. 145—151 (1975). ²⁰ J. R. Villablanca, C. E. Olmstead, B. J. Sonntag e. a. Neurosci. Lett, v. 33, p. 241—246 (1982). ²¹ K. J. Berkley, P. J. Hand, Brain Res., v. 153, p. 263—283 (1978). ²² P. J. Hand, T. van Winkle, J. Comp. Neurol., v. 171, p. 83—110 (1977). ²³ В. А. Майский, Структурная организация и интеграция нисходящих нейронных систем головного и спинного мозга, Наукова думка, Киев, 1983.

УДК 616.127—005.8—07:616.151.5:547.915

МЕДИЦИНА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Г. О. Бадалян, Н. Г. Епископосян

**О способности ганглиозидов модифицировать агрегационную
активность эритроцитов крови больных инфарктом миокарда**

(Представлено 15/XII 1986)

Несмотря на очевидность важной роли расстройств эритроцитарного звена регуляции агрегатного состояния крови (РАСК) в патогенезе микрогемореологических нарушений, развивающихся при различных заболеваниях сердечно-сосудистой системы, ключевые механизмы, лежащие в основе изменений функционального состояния эритроцитов, продолжают оставаться недостаточно изученными. Исследованиями, проведенными в указанном направлении, выявлено повышение способности эритроцитов к агрегации при атеросклерозе (1,2), артериальной гипертонии (3,4), нарушениях коронарного и мозгового кровообращения (5-8).

В настоящее время большинство исследователей считает, что изменения структурно-функциональных свойств эритроцитов лимитируются внутриклеточными метаболитами (9,10), белковыми факторами крови (11), существенная роль при этом придается перестройкам, происходящим в белковой и липидной фазах эритроцитарных мембран (12).

Ввиду широкого липидного спектра мембранных образований эритроцитов приобретает актуальность изучение селективной роли различных классов гетерогенных липидов плазматических мембран эритроцитов в обеспечении их многообразных функций. Большинство работ по данной проблеме посвящено изучению наиболее распространенных липидов—фосфолипидов (13) и холестерина (14). В значительно меньшей степени исследован другой класс липидов—гликосфинголипиды, которые являются структурными элементами плазматических мембран, локализованными преимущественно в их внешнем монослое и участвующими в формировании наиболее динамической части мембранных структур—гликокаликса. Показано, что гликосфинголипиды, встраиваясь в мембранные структуры, приводят к развитию в них перестроек, в виде изменения микровязкости (15), способности связывать Ca^{2+} (16), активировать липид-зависимые ферменты, в том числе и $Na^+ - K^+ - АТФ-азу$ (17). Обогащение мембран эритроцитов крови практически здоровых лиц кислыми (ганглиозиды) и нейтральными (цереброзиды) гликосфинголипидами сопровождается увеличением агрегационной способности эритроцитов и уменьшением степени их деформируемости (18).

Вышеприведенные данные послужили основанием для изучения

влияния ганглиозидов на агрегационную активность эритроцитов крови больных инфарктом миокарда в динамике заболевания. Подобный подход в значительной степени был продиктован результатами исследований, выявившими высокое содержание кислых и нейтральных гликофинголипидов в плазме и форменных элементах крови больных ишемической болезнью сердца (19).

Исследованию подверглись эритроциты крови 64 больных инфарктом миокарда в возрасте от 35 до 76 лет, из них 11 женщин и 53 мужчин. В 41 случае выявлен крупноочаговый инфаркт миокарда, в 14—мелкоочаговый. У 9 больных диагностирован трансмуральный инфаркт. Нарушения ритма и проводимости наблюдали у 42 больных. В качестве контроля использовали эритроциты крови практически здоровых лиц (доноры).

Кровь забирали из локтевой вены, стабилизировали 3,8%-ным раствором цитрата натрия в соотношении 9:1. Эритроциты трижды отмывали в изотоническом трис-НСI буфере, рН 7,4. Отмытые эритроциты (0,1 мл) ресуспензировали в 10 мл буфера, при этом число эритроцитов составляло в 1 мкл 100 000—200 000. Подсчет числа эритроцитов проводили на Picoscale. В качестве индуктора агрегации использовали катионный краситель алциановый синий. Агрегацию эритроцитов определяли фотометрическим методом (20), с графической регистрацией по (21), в модификации (22). При анализе агрегограмм оценивали величину максимальной агрегации эритроцитов (m_a), время наступления максимальной агрегации (t_{max}) и среднюю скорость агрегации (v_{cp}). Ганглиозиды растворяли непосредственно в плазме, время инкубации—2 ч (23). Результаты были подвергнуты статистической обработке с оценкой достоверности по критерию Стьюдента.

Полученные данные свидетельствуют, что обогащение эритроцитов крови практически здоровых лиц суммарной фракцией ганглиозидов (выделенной из головного мозга людей, погибших от несчастных случаев), достигаемое путем их двухчасовой пренкубации, влечет за собой повышение агрегационной способности эритроцитов. Тем самым подтверждаются данные относительно влияния ганглиозидов на агрегацию эритроцитов крови практически здоровых лиц, индуцированную фибриногеном и γ -глобулином (24). Способность гликофинголипидов потенцировать агрегацию эритроцитов и уменьшать их деформируемость лишь в условиях довольно продолжительного контакта рассматривается как свидетельство необходимости внедрения последних в эритроцитарную мембрану, причем в ее наружный монослой (25). Указанные данные приобретают существенное значение в плане объяснения роли ганглиозидов в регуляции функционального состояния эритроцитов, поскольку показана важная роль N-ацетилнейраминовой кислоты (N-АНК)—характерного структурного компонента молекулы ганглиозидов в формировании на поверхности мембран эритроцитов центров для связывания различных индукторов (26) и обеспечения отрицательного заряда (27)

Диаметрально противоположная картина выявлена при изучении влияния ганглиозидов на агрегационную активность эритроцитов крови больных острым инфарктом миокарда. Как свидетельствуют дан-

ные, приведенные в таблице, обогащение эритроцитов крови больных инфарктом миокарда тем же количеством ганглиозидов сопровождается не усилением, а, наоборот, понижением агрегации эритроцитов, при этом величина максимальной агрегации уменьшается более чем в 2 раза. При интерпретации подобного качественного различия в об-

Влияние ганглиозидов на агрегационную активность эритроцитов крови практически здоровых лиц и больных инфарктом миокарда в динамике заболевания (300 мкг/мл)

Показатели	m, %		t _{max} , мин		v _{ср} , мин	
	1	2	1	2	1	2
Практически здоровые лица	28,7±1,2	41,5±5,9	8,0±0,9	11,2±2,7*	3,5±0,1	3,4±0,2
1—3-й дни заболевания	54,8±2,9	25,8±3,3	10,8±1,8	5,4±0,3*	5,4±1,2	4,7±0,3
10-й день заболевания	60,0±1,1	49,5±5,9	10,3±0,3	9,2±0,1	6,0±0,3	5,3±0,3
20-й день заболевания	46,0±1,7	50,8±2,7	9,0±1,9	9,7±0,3	5,1±1,1	5,2±0,1
30-й день заболевания	34,0±2,1	43,0±2,9	10,3±1,0	11,6±1,1	3,3±0,3	3,7±0,1

1—без воздействия ганглиозидов; 2—в условиях обогащения ганглиозидами; *— $P < 0,05$; в остальных случаях сдвиги недостоверны

наруженных эффектах со стороны эритроцитов крови практически здоровых лиц и больных инфарктом миокарда следует учесть то обстоятельство, что согласно имеющимся данным (19) в эритроцитах крови больных острым инфарктом миокарда содержание ганглиозидов значительно выше, чем в контроле, причем и по характерному компоненту их молекулы N-АНК. Одновременно в лейкоцитах крови указанных больных определяется пониженная активность β -галактозидаз, ферментов, участвующих в распаде ганглиозидов (28). Следовательно, можно полагать, что количество эндогенных ганглиозидов в мембранах нативных эритроцитов является своеобразным лимитирующим фактором степени встраивания ганглиозидов в эритроцитарные мембраны, в которые они внедряются церамидной частью своей молекулы (29). Допускается, что избыточное содержание ганглиозидов в мембранах эритроцитов способствует увеличению двойного электрического слоя на поверхности мембраны за счет карбоксильных групп N-АНК, что уменьшает доступность мембраны к внедрению экзогенных ганглиозидов. Что касается выявления в этих условиях уменьшения агрегации эритроцитов, то последнее может быть следствием глубоких структурно-функциональных перестроек мембран эритроцитов, развивающихся вследствие накопления ганглиозидов, поскольку показана способность последних влиять как на липидную, так и на белковую фазы биомембран (30).

Доказательством состоятельности подобного допущения являются данные, полученные при изучении влияния ганглиозидов на агрегационную способность эритроцитов крови больных инфарктом миокарда в динамике заболевания. Так, установлено, что на 10-ый день заболевания обогащение эритроцитов крови больных не сопровождается статистически достоверными сдвигами со стороны их агрегационной

активности. Существенно, что в указанном периоде способность к агрегации продолжает оставаться у эритроцитов крови больных инфарктом миокарда исключительно возросшей. На 20-ый день заболевания, когда агрегационная активность эритроцитов несколько снижается, обогащение эритроцитов ганглиозидами приводит к некоторому увеличению степени их агрегации. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что к 30-му дню заболевания, когда наблюдается снижение агрегации эритроцитов, их обогащение ганглиозидами уже начинает сопровождаться усилением агрегационной способности. В эти же сроки отмечается уменьшение, по сравнению с 1—3-им днями инфаркта миокарда, уровня ганглиозидов в эритроцитах, причем как по галактозе, так и по N-АНК, с одновременным повышением в лейкоцитах активности β -галактозидаз (28).

Таким образом, в динамике инфаркта миокарда обнаружена различная картина последствий обогащения эритроцитарных мембран ганглиозидами на способность эритроцитов к агрегации. Выявленная неоднозначность эффектов, по-видимому, обусловлена различным исходным уровнем ганглиозидов в эритроцитах практически здоровых лиц и больных инфарктом миокарда в динамике заболевания. Полученные данные свидетельствуют о роли сравнительно малоизученных мембранных липидов—гликосфинголипидов в регуляции функционального состояния эритроцитов и механизмах расстройств эритроцитарного звена РАСК при ишемической болезни сердца.

Ереванский медицинский институт

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ րզրակից-անդամ Կ. Հ. ԲԱԴՄԱԼՅԱՆ, Ն. Հ. ՆՊԻՍԿՈՊՈՍՅԱՆ

Գանգլիոզիդների կողմից ինֆարկտով տառապող հիվանդների էրիթրոցիտների ազրեգացիոնն ակտիվության ձևափոխման ունակության մասին

Բացահայտված է, որ պրակտիկապես առողջ մարդկանց արյան էրիթրոցիտների հարստացումը գանգլիոզիդներով ոնդեկցվում է նրանց ազրեգացիոնն ակտիվության բարձրացումով, մինչդեռ եույն պայմաններում գանգլիոզիդները արդեկակում են սուր ինֆարկտով տառապող հիվանդների արյան էրիթրոցիտների ազրեգացիան:

Ինֆարկտով տառապող հիվանդների մոտ, հիվանդության տարբեր շրջաններում նկատվում է գանգլիոզիդների կողմից հանգեպ էրիթրոցիտները ցուցաբերվող ազրեգացիոնն տարբեր փոփոխություններ:

Ստացված տվյալները վկայում են գանգլիոզիդների դերի մասին էրիթրոցիտար թաղանթների գործունեության մեջ և նրանց ախտահարման պրոցեսում, սրտի իշեմիկ հիվանդության ժամանակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Люсов, Ю. Б. Белоусов, Кардиология, т. 14, № 4 (1974). ² J. A. Dormandi, Brit. J. Haematol., v. 45, № 4 (1980). ³ Э. С. Габриелян, С. Э. Акопов, Клетки крови и кровообращение, Айастан Ереван 1985. ⁴ Ю. С. Тунян, Э. Е. Мхейн, С. Э. Акопов и др., Советск. мед., № 8 1981. ⁵ В. Г. Высоцкая, Т. Н. Лобкова, Тхуан Ван Хоанг, Журн. невро. и психиатр., т. 82, № 12 (1982). ⁶ Ю. С. Тунян, С. Э. Акопов, Г. О. Бакунц, Клинич. мед., т. 60, № 10 (1982). ⁷ В. А. Люсов, А. С. Парфенов, Ю. Б. Белоусов и др., Кардиология, т. 18, № 6 (1978). ⁸ Г. О. Бадалян, Н. Г. Епископосян, Тер. архив, т. 40, № 11 (1983). ⁹ S. M. P. Sheetz, S. J. Stinger, Proc. Nat. Acad. Sci USA., v. 71 (1974). ¹⁰ L. S. Wolfe, S. E. Lux, V. Ohanian, J. Cell. Biol., v. 82, № 2 (1980). ¹¹ H. Schmid-Schonbein, K. L. P. Tozeren, H. Sung e. a., Biophys. J., v. 36, № 1, (1981). ¹² Е. А. Черницкий, А. В. Воробей, в кн.: Структура и функции эритроцитарных мембран, Наука и техника, Минск, 1981. ¹³ B. Roelfosen, T. M. Sibenius, A. Verheij e. a., Biochim. biophys. acta., v. 600, № 3 (1980). ¹⁴ T. Shiga, N. Maeda, A. Sudat e. a., Biorheology, v. 16, № 4—5 (1979). ¹⁵ Э. Е. Мхейн, О. П. Соцкий, С. А. Баджунян и др., Биофизика, № 4, 1980. ¹⁶ Э. С. Секоян, Гликолипиды мозга и мозговое кровообращение, докт. дис., Ереван, 1979. ¹⁷ С. А. Мирзоян, Э. Е. Мхейн, Э. С. Секоян и др., Бюлл. эксп. биол. и мед., № 12 (1978). ¹⁸ С. Э. Акопов, Фармакологическая регуляция функционального состояния тромбоцитов и эритроцитов и ее особенности при расстройствах мозгового кровообращения, канд. дис., Ереван, 1982. ¹⁹ Г. М. Саркисова, О. П. Соцкий, Н. Г. Епископосян, Э. С. Секоян, Вопр. мед. химии, т. 30, № 2 (1984). ²⁰ G. V. Born, J. Physiol. (Lond.), v. 162 (1962). ²¹ J. R. O. Brien, Nature, v. 212 (1966). ²² М. А. Котовщикова, Е. Г. Неплох, О. Е. Белязо и др., Лаб. дело, № 11, 1980. ²³ R. Callies, G. Schwarzmann, K. Radsak, e. a., Eur. J. Biochem., v. 80 (1977). ²⁴ Э. Е. Мхейн, О. П. Соцкий, С. Э. Акопов, Журн. эксп. и клинич. мед., т. 21, № 1 (1981). ²⁵ Э. Е. Мхейн, Г. О. Бакунц, С. Э. Акопов, Журн. эксп. и клинич. мед., т. 20, № 2 (1980). ²⁶ K. M. Yamakada, D. W. Kennedy, J. Grotendorst e. a., Cell. Phys. v. 109, № 2 (1981). ²⁷ G. M. W. Cook, D. H. Heard, Y. E. Seaman, Nature, v. 191 (1961). ²⁸ С. А. Мирзоян, Э. С. Секоян, О. П. Соцкий и др., ДАН АрмССР, т. 78, № 2 (1984). ²⁹ Э. Е. Мхейн, С. Э. Акопов, О. П. Соцкий, Биол. журн. Армении, т. 32, № 11 (1979). ³⁰ С. А. Мирзоян, Э. С. Секоян, О. П. Соцкий, Болл. эксп. биол. и мед., № 6, 1984.

