

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXXXIV, № 2

1987

## Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆառսուղար), Է. Գ. ԱՅԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՍԻՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՆԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ս. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՋԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

## Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւ (ոտւ սեկրետար), Յ. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Կ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ (ոամ. ոտւ. ռեդակտոր), Վ. Գ. ՄԻՏԱՐՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Գ. Ս. ՏԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ժ. Մ. ՏԵԺՐԱԿՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ (ոտւ. ռեդակտոր), Ա. Ա. ԿԱԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Մ. Լ. ԿԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ:

**Բ Ո Վ Ա Ն Գ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն**

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

Ս. Խ. Գարբիելյան—Ուղղորդված զրաֆիկերի հատուկ տիպի ցիկլերի մասին . . . . .	51
Թ. Ա. Ավետիսյան, Ս. Մ. Հովհաննիսյան—Եռանկյունաշափական շարքերի բնդ- հանրացված D-հատկության մասին . . . . .	56
Ք. Ն. Թորոսյան—Տրամարանական ֆունկցիաների արգումենտների ակտիվություն- ների և դժայնորեն-բաժանելի ենթարազմությունների գնահատումների շուրջը . . . . .	61
Մ. Կ. Կյուրեղյան—Վերջավոր դաշտերի վրա բառակուսային ձևափոխությունները և անվերածելի բազմանդամների սինթեզը . . . . .	67

**ԷԼԵԿՏՐԱԿԻՆԱՄԻԿԱ**

Ռ. Հ. Թաբլանյան—Էլեկտրամագնիսական սոլիտոնը անտիֆերոմագնետիկներում	72
---	----

**ԱՌՍԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅՈՒՆ**

Ն. Ա. Մաակսիմ—Առաձգականության տեսությունում պոտենցիալի ուղղակի մեթոդի մասին . . . . .	77
--	----

**ՖԻԶԻԿԱ**

Ս. Ա. Աղաբալյան, Ֆ. Պ. Սախարյան—Հազվագյուտ հողի իոններով ակտիվացված դիէլեկտրիկ բյուրեղներում բազմաֆոնոն ոչ ճառագայթային անցումների տեսության շուրջ	82
---	----

**ԷԿՈՆՈՊԻԱ**

Ռ. Հ. Բեկոյան, Ս. Գ. Վուրբյով—Սեանա լճի մերկ հողազրույթներում փամփա- կան տարրերի միգրացիայի մասին . . . . .	87
--	----

**ԲՃՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

Է. Ս. Գարբիելյան, Է. Ա. Ամրոյան, Մ. Ռ. Գրիգորյան—Արյան դաղային բաղադրա- մասերի ներգործության ուսումնասիրությունը թրոմբոցիտների և լեյկոցիտների ֆունկ- ցիոնալ վիճակի վրա . . . . .	92
--	----

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- С. Х. Дарбинян*—О специальных контурах направленных графов . . . 51  
*Р. А. Лветисян, С. М. Оганесян*—Об обобщенном D-свойстве тригонометрических рядов . . . . . 56  
*Б. Е. Торосян*—К оценкам активностей аргументов логических функций и числа линейно-отделимых подмножеств . . . . . 61  
*М. К. Кюрегян*—Квадратичные преобразования и синтез неприводимых полиномов над конечными полями . . . . . 67

### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

- Р. Г. Гарханян*—Электромагнитный солитон в антиферромагнетиках . 72

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- И. А. Матехин*—О прямом методе потенциала в теории упругости . 77

### ФИЗИКА

- С. А. Агабян, Ф. П. Сафарян*—К теории многофононных безызлучательных переходов в диэлектрических кристаллах, активированных редкоземельными ионами . . . . . 82

### ЭКОЛОГИЯ

- Р. Г. Ревазян, О. Г. Воробьев*—О миграции химических элементов в обогащенных почвогрунтах озера Севан . . . . . 87

### МЕДИЦИНА

- Э. С. Габриелян, Э. А. Амроян, М. Р. Григорян*—Исследование влияния изменений газового состава крови на функциональное состояние лейкоцитов и тромбоцитов . . . . . 92

C O N T E N T S

	P.
<b>MATHEMATICS</b>	
<i>S. Kh Darbinian</i> —On the specified cycle in oriented graphs. . . . .	51
<i>R. A. Avetissian, S. M. Hovanissian</i> —On the generalization of <i>D</i> -property of trigonometrical series . . . . .	56
<i>B. E. Torossian</i> —The estimates of activities of the arguments of logic functions and the number of linear-separable subsets. . . . .	61
<i>M. K. Kuregian</i> —Quadratic transformation and synthesis of irreducible polynomials over finite fields . . . . .	67
<b>ELECTRODYNAMICS</b>	
<i>R. G. Turkhanian</i> —Electromagnetic soliton in antiferromagnetics . . . . .	72
<b>THEORY OF ELASTICITY</b>	
<i>N. A. Matehin</i> —A direct potential method in elastostatics . . . . .	77
<b>PHYSICS</b>	
<i>S. A. Agabalian, F. P. Safarian</i> —On the theory of multiphonon nonradiation transitions in dielectric crystals doped by rare-earth ions . . . . .	82
<b>ECOLOGY</b>	
<i>R. G. Revusian, O. G. Vorobyov</i> —About the migration of chemical elements in the uncovered soil of lake Sevan . . . . .	87
<b>MEDICINE</b>	
<i>E. S. Gabrielian, E. A. Amroyan, M. R. Grigorian</i> —A study of the influences of changes of blood gaseous composition on the functional state of leukocytes and thrombocytes. . . . .	92

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 9.01. 1986 г. Подписано к печати 10. 04 1987 г. ВФ 02776

Бумага № 2, 70 × 108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4.2.

Учетно-изд. л. 3, 27. Тираж 460. Заказ 17. Издат. 6996

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван,  
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

### О специальных контурах направленных графов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Р. Варшамовым 2/III 1986)

В настоящей работе рассматриваются конечные оргграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в (1). В работе (2) доказано, что если оргграф  $G$  удовлетворяет достаточному условию гамильтоновости Нэш-Вильямса (3), или Гуйя-Ури (4), или Вудала (5), то  $G$  содержит неполный гамильтоновый контур, т. е. контур, который получается из гамильтонового контура после переориентации одной дуги. Через  $D(p, n) = [x_1x_2 \dots x_n; x_1y_1y_2 \dots y_{p-n}x_n]$  обозначим  $p$ -вершинный оргграф с множеством вершин  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{p-n}\}$  и множеством дуг  $\{x_1y_1, y_{p-n}x_n\} \cup \{x_i x_{i+1} / 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} / 1 \leq i \leq p-n-1\}$ , где  $2 \leq n \leq p$ , т. е. оргграф  $D(p, n)$  получается из  $p$ -вершинного гамильтонового контура после переориентации  $n-1$  последовательных дуг. В частности  $D(p, 2)$  есть неполный гамильтоновый контур. В (6) доказано, что любой  $p$ -вершинный ( $p \geq 10$ ) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими  $\lfloor (p-2)/2 \rfloor^*$ , является панциклическим, т. е. содержит контур любой длины  $k$  ( $3 \leq k \leq p$ ). Автором настоящей работы было доказано, что такие направленные графы (при  $p \geq 12$ ), а также оргграфы, которые удовлетворяют достаточному условию гамильтоновости Мейнила (7), содержат неполные гамильтоновые контуры (эти результаты представлены к опубликованию). В настоящей работе доказывается, что любой  $p$ -вершинный ( $p \geq 10$ ) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими  $\lfloor (p-2)/2 \rfloor$ , содержит оргграф  $D(p, 3)$ .

Пусть  $G$  есть оргграф с множеством вершин  $V$  и множеством дуг  $E$ . Пусть  $A, B \subseteq V$  и  $x \in V$ . Обозначим

$$E(A \rightarrow B) = \{yz \in E / y \in A, z \in B\}; \quad E(A, B) = E(A \rightarrow B) \cup E(B \rightarrow A);$$

$$I(x) = \{y \in V / yx \in E\}; \quad O(x) = \{y \in V / xy \in E\}.$$

Запись  $A \Rightarrow B$  означает, что если  $y \in A$  и  $z \in B$ , то  $yz \in E$ . Через  $\beta(x)$  обозначим количество вершин, отличных от  $x$ , которые не смежны с вершиной  $x$ . В этих обозначениях, если  $A = \{x\}$  или  $B = \{x\}$ , то вместо  $\{x\}$  напишем  $x$ .  $E(x, y) = \emptyset$  означает, что вершины  $x$  и  $y$  не смежны между собой, а  $\bar{G}$  — оргграф, обратный к оргграфу  $G$ , т. е.  $\bar{G}$

\* Как обычно,  $\lfloor a \rfloor$  обозначает наибольшее целое, не большее  $a$ .

получается из  $G$  после переориентации каждой дуги. Через  $\vec{C}_k$  обозначается контур длины  $k$ , а через  $[m, n]$  множество целых чисел, не меньших  $m$  и не больших  $n$ . Если  $\vec{C}_k = x_1 x_2 \dots x_k x_1$ , то всюду индексы вершин контура  $\vec{C}_k$  берутся по  $\text{mod}(k)$ , т. е.  $x_{k+i} = x_i$ . Запись  $D \subseteq G$  означает, что орграф  $D$  является подорграфом орграфа  $G$ , а  $A \rightrightarrows B \rightrightarrows C$  означает, что  $A \rightrightarrows B$  и  $B \rightrightarrows C$ .

**Теорема.** Пусть  $G$  есть  $p$ -вершинный ( $p \geq 10$ ) направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими  $\lfloor (p-2)/2 \rfloor = n-1$ . Тогда  $G$  содержит орграф  $D(p, 3)$ .

**Доказательство.** Пусть  $V$  множество вершин орграфа  $G$ , а  $E$  — множество его дуг. Заметим, что для любой вершины  $x$  имеет место  $\beta(x) \leq 2$ . Если  $A \subseteq V$  и  $|A| \geq n+2$ , то для любой вершины  $y \notin A$  имеют место  $E(y \rightarrow A) \neq \emptyset$  и  $E(A \rightarrow y) \neq \emptyset$ . По (\*) (теорема 2),  $G$  содержит контур длины  $p-1$ . Пусть  $\vec{C}_{p-1} = x_1 x_2 \dots x_{p-1} x_1$  — произвольный контур длины  $p-1$  в орграфе  $G$  и вершина  $y$  не принадлежит этому контуру.

Предположим, что  $G$  не содержит  $D(p, 3)$ . Тогда для любого  $i \in [1, p-1]$  имеет место

$$|E(y \rightarrow x_i)| + |E(x_{i+1} \rightarrow y)| \leq 1. \quad (1)$$

Легко заметить, что для любого  $k \in [1, p-1]$  имеют место утверждения  $1^\circ - 4^\circ$ .

$1^\circ$ . Если  $y \rightrightarrows \{x_k, x_{k+2}\}$  или  $\{x_{k-2}, x_k\} \rightrightarrows y$ , то  $x_{k-1} x_{k+1} \notin E$ .

$2^\circ$ . Если  $y x_k, x_{k-2} y \in E$  или  $x_k y, y x_{k+2} \in E$ , то  $x_{k+1} x_{k-1} \notin E$ .

$3^\circ$ . Если  $x_{k-1} y, y x_{k+2} \in E$ , то  $x_k x_{k+3} \notin E$  и  $x_{k-2} x_{k+1} \notin E$ .

$4^\circ$ . Если  $x_{k-2} y, y x_k \in E$ , то  $|E(x_{k+2} \rightarrow x_{k-1})| + |E(x_{k-1} \rightarrow x_{k+1})| \leq 1$ .

Рассмотрим следующие возможные случаи.

**Случай 1.**  $I(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ .

Очевидно, что  $E(y, x_{p-1}) = \emptyset$ . Нетрудно убедиться, что  $E(x_m, y) \neq \emptyset$ . Действительно, в случае  $E(x_m, y) = \emptyset$  имеет место  $O(y) = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{p-2}\}$ . Поэтому, пользуясь утверждениями  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , получим  $E(x_m, \{x_{m-2}, x_{m+2}\}) = \emptyset$ . Значит, так как  $E(y, x_m) = \emptyset$ , то  $\beta(x_m) \geq 3$ , что невозможно. Из  $E(x_m, y) \neq \emptyset$  следует, что  $y x_m \in E$ . Теперь, пользуясь утверждениями  $1^\circ - 3^\circ$ , получим, что

$$\begin{aligned} E(x_{m-2} \rightarrow \{x_m, x_{m+1}\}) &= E(x_{m-1}, x_{m-3}) = E(x_{m+1} \rightarrow x_{m-1}) = \\ &= E(x_{m-4} \rightarrow x_{m-1}) = \emptyset. \end{aligned} \quad (2)$$

Докажем, что

$$E(\{x_{p-1}, x_1, x_2, \dots, x_{m-5}\} \rightarrow x_{m-1}) = \emptyset. \quad (3)$$

**Доказательство (3).** Предположим, что (3) неверно, т. е. для некоторого  $i \in \{p-1\} \cup [1, m-5]$  имеет место  $x_i x_{m-1} \in E$ . Тогда очевидно, что для любого  $j \in [m, p-2]$  имеет место  $|E(x_{m-2} \rightarrow x_{j+1})| + |E(y \rightarrow x_j)| \leq 1$ . Отсюда и из  $E(x_{m-2} \rightarrow \{x_{m-3}, x_m\}) = \emptyset$  получим, что  $x_{m-2} \rightrightarrows \{x_1, x_2, \dots, x_{m-4}\}$ . Следовательно, для любого  $l \in [1, m-5]$  имеет место  $|E(x_{l-1} \rightarrow x_{m-1})| + |E(x_{m-1} \rightarrow x_l)| \leq 1$ .

Поэтому из  $x_i x_{m-1} \in E$ ,  $\beta(x_{m-1}) \leq 2$  и (2) следует, что вершина  $x_{m-1}$  смежна со всеми вершинами  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{p-2}$  и  $x_{m-1} x_{m+1} \in E$ .

Поэтому из утверждения 1° следует, что  $yx_{m+2} \notin E$ . Значит  $E(y, x_{m+2}) = \emptyset$  и  $yx_{m+1} \in E$ . Следовательно, из утверждения 3° вытекает, что  $x_{m-1}x_{m+2} \notin E$ , т. е.  $x_{m+2}x_{m-1} \in E$ , а это противоречит утверждению 4°. Итак, равенство (3) доказано.

Из (2) и (3) получим, что

$$\{x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_{p-2}\} \Rightarrow x_{m-1}. \quad (4)$$

Отсюда и из утверждения 4° имеем, что  $x_{m-1}x_{m+1} \in E$ . Поэтому, по (2) и (3),  $E(x_{m-1}, x_{m+1}) = \emptyset$  и

$$x_{m-1} \Rightarrow \{x_{p-1}, x_1, x_2, \dots, x_{m-4}\}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) имеем, что  $x_mx_{m-2} \notin E$  и, значит, по (2),  $E(x_m, x_{m-2}) = \emptyset$ .

Пусть  $x_{m+1}x_{m-2} \in E$ . Тогда из (4) следует, что

$$E(x_m \rightarrow \{x_{m+3}, x_{m+4}, \dots, x_{p-1}\}) = \emptyset. \quad (6)$$

Из (6) и  $E(x_m \rightarrow \{y, x_{m-1}, x_{m-2}\}) = \emptyset$  вытекает, что  $x_m \Rightarrow \{x_{m+2}, x_1, x_2, \dots, x_{m-3}\}$ . Поэтому, так как для некоторого  $i \in [m+3, p-2]$  имеет место  $yx_i \in E$ , то, по (4), имеем  $D(p, 3) = [x_mx_{m+1}x_{m-2}; x_mx_{m+2} \dots \dots x_{i-1}x_{m-1}y \ x_ix_{i+1} \dots x_{p-1}x_1x_2 \dots x_{m-2}]$ , что является противоречием.

Пусть теперь  $x_{m+1}x_{m-2} \notin E$ . Тогда из (2) следует, что

$$E(x_{m+1}, \{x_{m-2}, x_{m-1}\}) = \emptyset. \quad (7)$$

Кроме того, по (4), имеем, что для любого  $i \in [m-2, m+2]$  имеет место

$$|E(x_i \rightarrow x_{m+1})| + |E(x_{m+1} \rightarrow x_{i+1})| \leq 1.$$

Отсюда и из (7) получим, что

$$\{y, x_1, x_2, \dots, x_{m-3}\} \Rightarrow x_{m+1} \Rightarrow \{x_{m+3}, x_{m+4}, \dots, x_{p-1}\}. \quad (8)$$

Далее очевидно, что  $E(x_m, x_{m-3}) = \emptyset$ , поскольку в противном случае из (4), (8) и утверждения 3° следует, что  $x_mx_{m-3} \in E$  и  $D(p, 3) = [x_{m+1}x_{m+2}x_{m-1}; x_{m+1}x_{m+3} \dots x_{m-4}yx_mx_{m-3}x_{m-2}x_{m-1}]$ . Из  $E(x_m, \{x_{m-2}, x_{m-3}\}) = \emptyset$  имеем, что  $x_mx_{m+3} \in E$  или  $x_{m+3}x_m \in E$ . Поэтому, по (4) и (8),  $D(p, 3) = [x_{m+2}x_{m-1}y; x_{m+2}x_{m+3}x_mx_{m+1}x_{m+4} \dots x_{m-2}y]$  или  $D(p, 3) = [x_{m+1}x_{m+2}x_{m+3}; x_{m+1}x_{m+4} \dots x_{m-1}yx_mx_{m+3}]$ , что невозможно. Итак, случай 1 рассмотрен.

Случай 2.  $O(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ .

Этот случай сводится к случаю 1 (для этого нужно рассмотреть  $\bar{G}$ ).

Случай 3.  $I(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+\alpha+1}, x_{k+\alpha+2}, \dots, x_{k+t}\}$ ;  $O(y) = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+\alpha-1}, x_{k+t+1}, x_{k+t+2}, \dots, x_{p-2}\}$  и  $E(y, \{x_{p-1}, x_{k+\alpha}\}) = \emptyset$ , где  $k \geq 1$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $t - \alpha \geq 1$  и  $p - 2 \geq k + t + 1$ .

Можем предположить, что  $k \geq 2$ , иначе вместо вершины  $x_{p-1}$  рассмотрим вершину  $x_{k+\alpha}$ .

Подслучай 3.1.  $y \Rightarrow \{x_{p-2}, x_{p-3}\}$  и  $\{x_{p-4}, x_{p-3}\} \Rightarrow x_{p-1}$ .

Нетрудно убедиться, что

$$E(x_1, \{x_{p-3}, x_{p-2}\}) = \emptyset. \quad (9)$$

Отсюда вытекает, что  $x_{p-1}x_2 \notin E$ , так как в случае  $x_{p-1}x_2 \in E$  для контура  $x_{p-1}x_2x_3 \dots x_kyx_{k+1} \dots x_{p-2}x_{p-1}$  и для вершины  $x_1$  не имеет

место неравенство (1). Если  $x_2x_{p-2} \notin E$ , то, по (9) и неравенству (1), для контура  $x_{p-3}x_{p-1}x_1x_2 \dots x_kyx_{k+1} \dots x_{p-3}$  имеет место случай 1. Поэтому предположим, что  $x_2x_{p-2} \in E$ . Пусть  $x_3x_1 \in E$ . Тогда из (9) следует существование такого  $i \in [3, p-5]$ , что  $x_ix_1, x_1x_{i+1} \in E$ , и, значит,  $D(p, 3) \subseteq G$ . Пусть теперь  $x_3x_1 \notin E$ . Тогда из (9) имеем, что  $x_1x_3 \in E$  и  $D(p, 3) = [x_2yx_{p-3}; x_2x_{p-2}x_{p-1}x_1x_3 \dots x_{p-3}]$ , что невозможно.

Подслучай 3.2.  $y \rightarrow \{(x_{p-2}, x_{p-3})\}$  и  $|E(\{x_{p-4}, x_{p-3}\} \rightarrow x_{p-1})| \leq 1$ .

Можем предположить, что

$$|E(x_{p-1} \rightarrow \{x_2, x_3\})| \leq 1, \quad (10)$$

так как иначе в орграфе  $\bar{G}$  имеем подслучай 3.1.

Предположим, что  $x_{p-3}x_{p-1} \in E$ . Тогда  $x_{p-4}x_{p-1} \notin E$ , и так как не существует такое  $i \in [1, p-3]$ , что  $x_ix_{p-1}, x_{p-1}x_{i+1} \in E$ , то из (10) имеем, что  $x_{p-1}x_{p-4} \in E$ . Отсюда вытекает, что  $E(x_1, x_{p-2}) = \emptyset$ . Поэтому предположим, что  $x_2x_{p-2} \in E$  (иначе приходим к случаю 1). Отсюда очевидно, что  $yx_3 \in E$ . Так как не существует такое  $i \in [1, p-3]$ , что  $x_ix_{p-1}, x_{p-1}x_{i+1} \in E$ , то  $x_{p-1}x_2 \in E$  или  $x_2x_{p-1} \in E$ . Поэтому  $D(p, 3) = [x_{p-1}x_2x_{p-2}; x_{p-1}x_1yx_3x_4 \dots x_{p-2}]$  или  $D(p, 3) = [x_1x_2x_{p-1}; x_1yx_3x_4 \dots x_{p-1}]$ , что невозможно.

Теперь предположим, что  $x_{p-3}x_{p-1} \notin E$ . Пользуясь вышерассмотренными подслучаями, предположим, что  $E(x_{p-1}, x_n) = \emptyset$  и

$$\{x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\} \rightarrow x_{p-1} \rightarrow \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{p-3}\}. \quad (11)$$

Очевидно, что  $yx_{p-4}, x_3y \in E$ . Из утверждения 2° следует, что  $x_{t+k+3}x_{t+k+1} \notin E$ , а из утверждения 1° следует, что если  $x_{t+k+1}x_{t+k+3} \in E$ , то  $t+k=p-5$  и  $D(p, 3) = [x_{p-1}x_{p-3}x_{p-2}; x_{p-1}x_1x_2 \dots x_kyx_{k+1}x_{k+2} \dots x_{p-4}x_{p-2}]$ , что невозможно. Отсюда  $E(x_{k+t+1}, x_{k+t+3}) = \emptyset$ . Далее, пользуясь (11), получим, что  $E(x_1, x_{t+k+1}) = \emptyset$ . Поэтому, так как  $x_{p-1}x_{t+k+1} \in E$ , то если рассмотрим контур  $x_1x_2 \dots x_{t+k}yx_{t+k+2}x_{t+k+3} \dots x_{p-1}x_1$ , пользуясь (1), получим, что  $\text{od}(x_{t+k+1}) \leq 1$ , а это невозможно.

Подслучай 3.3.  $x_{p-3}y \in E$ .

Тогда  $\alpha = n-1$ . Поэтому, учитывая подслучай 3.1, предположим, что  $p = k + \alpha + 4$ . Имеем, что  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\} \rightarrow y \rightarrow \{x_{n-1}, x_n, \dots, x_{p-5}\}$ . Следовательно, пользуясь утверждениями 1°–3°, получим, что  $E(x_{n-1} \rightarrow x_{n+2}) = E(x_{n-1}, x_{n-3}) = E(x_{n-4} \rightarrow x_{n-1}) = E(x_{n+1} \rightarrow x_{n-1}) = \emptyset$ . Отсюда видно, что для контура  $x_1x_2 \dots x_{n-2}yx_nx_{n+1} \dots x_{p-1}x_1$  имеет место подслучай 3.1 или 3.2.

Таким образом все возможные случаи рассмотрены. Теорема доказана.

*Замечание.* Пусть  $G$  есть направленный граф с множеством вершин  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , где  $|X_i| = 3$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) и  $X_i \cap X_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), и дуга  $xu$  принадлежит графу  $G$  тогда и только тогда, когда  $x \in X_i$  и  $u \in X_{i+1(\text{mod } 3)}$ . Очевидно, что  $G$  не содержит орграфа  $D(p, 3)$ .

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и  
Ереванского государственного университета

Ուղղորդված գրաֆների հատուկ տիպի ցիկլերի մասին

Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝

*թեորեմ*. Իիցույժ  $G$ -ն կամայական  $p$ -գագաթանի ( $p \geq 10$ ) ուղղորդված գրաֆ է, որի մինիմալ կիսաստիճանները փոքր չեն  $(p-2)/2$  թվից: Ապա  $G$ -ն պարունակում է այնպիսի ցիկլ, որը ստացվում է համիլտոնյան ցիկլից երկու հաջորդական աղեղների կողմնորոշումը շրջելուց:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> *Ф. Харари*. Теория графов, Мир, М., 1973. <sup>2</sup> *A. Benhocine*, Journal of Graph Theory, v. 8 (1984). <sup>3</sup> *C. St. J. A. Nash-Williams*, Springer Lecture Notes, v. 110 (1969). <sup>4</sup> *A. Ghoutla-Houri*, C. R. Acad. Sci., Paris, v. 25 (1960). <sup>5</sup> *D. R. Woodall*, Proc. London Math. Soc., v. 14 (1972). <sup>6</sup> *С. Х. Дарбинян*, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Ереван, № 14 (1985). <sup>7</sup> *H. Meyniel*, Journal Combinatorial Theory, Ser. B, v. 14 (1973).

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Р. А. Аветисян, С. М. Оганесян

Об обобщенном  $D$ -свойстве тригонометрических рядов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 1/IV 1986)

Классическая теорема Лузина—Данжуа гласит, что если тригонометрический ряд абсолютно сходится на некотором множестве положительной меры, т. е.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \infty$ , при  $x \in E$ ,  $|E| > 0$  (через  $|E|$  мы обозначаем лебеговскую меру множества  $E$ ), то  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$ .

Пусть  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  произвольная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через  $A_i(x)$  следующее выражение:  $A_i(x) = \sum_{m=n_{i-1}}^{n_i-1} a_m \cos mx + b_m \sin mx$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (считаем  $n_0 = 1$ ).

Определение. Будем говорить, что тригонометрическая система обладает обобщенным  $D$ -свойством относительно подпоследовательности  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , если из условия  $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$ ;  $x \in E$ ,  $|E| > 0$ , следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$ .

В работе (1) доказано, что если последовательность  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию

$$n_{k+1} - n_k \leq C \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{1}$$

где  $C$ —абсолютная постоянная, то из условия  $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$ ,  $x \in E$ ;

$|E| > 0$ , следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$ .

Иначе говоря условие (1) является достаточным, чтобы тригонометрическая система обладала обобщенным  $D$ -свойством.

В статье (2) приведен пример некоторой последовательности  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , которая удовлетворяет условию  $n_k = O(k^4)$ , и построен тригонометрический ряд такой, что  $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$  п. в. на  $[0, 2\pi]$ , однако

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = +\infty.$$

Оказывается, что этот пример можно значительно усилить. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x \in [a, b]$  произвольная ортонормированная система, а  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = +\infty. \quad (2)$$

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=n_{i-1}}^{n_i-1} a_m \varphi_m(x) \right| < \infty \text{ п. в. на } [a, b],$$

но  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = +\infty$ .

Доказательство. Так как выполняется условие (2), то найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{j_m\}_{m=1}^{\infty}$ , что  $n_{j_m+1} - n_{j_m} > 2^m$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Положим

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{2^m}, & n_{j_m} \leq i < n_{j_m} + 2^m \\ 0, & n_{j_m} + 2^m \leq i \leq n_{j_{m+1}}; 1 \leq i < n_1 \end{cases} \quad (3)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (4)$$

Имеем, по неравенству Коши—Буняковского,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b \left[ \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b-a} = \\ &= \sqrt{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (3), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \\ &+ \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}}_{2^n \text{ слагаемых}} + \dots = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2^n}} + \dots \end{aligned}$$

Так как ряд в правой части последнего равенства сходится, то учитывая (5), получим  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| dx < \infty$ .

Отсюда, по теореме Леви, следует, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| < \infty$  п. в. на  $[a, b]$ . А по построению  $a_i$  имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}_{2^n \text{ слагаемых}} + \dots = \infty.$$

Таким образом из этой теоремы следует, что условие (1) является необходимым и достаточным, чтобы тригонометрическая система обладала обобщенным  $D$ -свойством относительно подпоследовательности  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

В связи с теоремой 1 возникает следующий вопрос: может ли существовать тригонометрический ряд, который удовлетворяет утверждению этой теоремы независимо от выбора последовательности  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющей условию (2)? (Этот вопрос был поставлен А. А. Талаляном).

Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

**Теорема 2.** Пусть некоторый тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (5)$$

удовлетворяет следующему условию:

для любой последовательности натуральных чисел  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющей условию (2), существует некоторое множество  $E(\{n_k\})$  положительной меры (множество  $E$  зависит от последовательности  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ ) такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty \text{ при } x \in E.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty.$$

**Доказательство.** Мы будем использовать следующую лемму из совместной работы С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова (1).

**Лемма 1.5.** Пусть  $E \subset [0, 2\pi]$  — измеримое множество меры  $|E| = \mu > 0$ ,  $n$  — натуральное число,  $r \geq 1$ ,  $q \geq 1$  — действительные числа и  $T(x)$  — тригонометрический многочлен следующего вида:

$$T(x) = \sum_{k=N+1}^{N+n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда для всех  $N \geq 0$  справедливо неравенство

$$\|T\|_{L^r(0, 2\pi)} \leq C(n, \mu) \cdot \|T\|_{L^q(E)}. \quad (6)$$

Здесь, как обычно, под нормой понимается число  $\|f\|_{L^q(E)} = \left( \int_E |f|^q dx \right)^{1/q}$  ( $q \geq 1$ ).

Заметим также, что постоянная  $C(n, \mu)$  зависит только от „дли-

ны" и многочлена  $T(x)$  и от меры множества  $E$ .  $C(n, \mu)$  возрастает с убыванием  $\mu$ .

Переходя к доказательству теоремы 2, предположим, что ее утверждение неверно, т. е.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = +\infty$ .

Выберем натуральное число  $m$  настолько большим, чтобы

$$\sum_{n=1}^{3m} |a_n| + |b_n| > 3 \cdot C\left(3, \frac{1}{3}\right)$$

Сгруппируем члены ряда (5) до номера  $3m$  по 3 члена в каждой группе:

$$T_1^{(1)}(x) + T_2^{(1)}(x) + \dots + T_m^{(1)}, \text{ где}$$

$$T_1^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^3 a_i \cos ix + b_i \sin ix; \dots, \quad T_m^{(1)} = \sum_{i=3m-2}^{3m} a_i \cos ix + b_i \sin ix.$$

Так как  $\sum_{k=3m+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = +\infty$ , то можно выбрать настолько

большое натуральное число  $l$ , чтобы  $\sum_{k=3m+1}^{3m+4l} |a_k| + |b_k| > 4 \cdot C\left(4, \frac{1}{4}\right)$ . (6')

Сгруппируем члены ряда (5) с номера  $3m+1$  до номера  $3m+4l$  по 4 члена в каждой группе:

$$T_1^{(2)}(x) + T_2^{(2)}(x) + \dots + T_l^{(2)}(x), \text{ где}$$

$$T_1^{(2)}(x) = \sum_{i=3m+1}^{3m+4} a_i \cos ix + b_i \sin ix, \dots, \quad T_l^{(2)}(x) = \sum_{i=3m+4l-3}^{3m+4l} a_i \cos ix + b_i \sin ix.$$

Этот процесс продолжим до бесконечности.

По условию теоремы, ряд

$$|T_1^{(1)}(x)| + \dots + |T_m^{(1)}(x)| + |T_1^{(2)}(x)| + \dots + |T_l^{(2)}(x)| + \dots \quad (7)$$

сходится на некотором множестве  $E$  положительной меры. По теореме Егорова, найдется множество  $F \subset E$ ,  $|F| > 0$ , такое, что ряд (7) на множестве  $F$  сходится равномерно. Следовательно,

$$\int_F |T_1^{(1)}(x)| dx + \dots + \int_F |T_m^{(1)}(x)| dx + \int_F |T_1^{(2)}(x)| dx + \dots + \int_F |T_l^{(2)}(x)| dx + \dots < \infty. \quad (8)$$

Применим лемму 1.5 для  $r=2$  и  $q=1$  для многочлена  $T_j^{(s)}(x)$ , который по построению содержит  $s+2$  членов.

$$\|T_j^{(s)}\|_{L_1(0, 2\pi)} \leq C(s+2, |F|) \|T_j^{(s)}\|_{L_1(F)}. \quad (9)$$

Пусть  $T_j^{(s)}(x) = \sum_{k=N}^{N+s+2} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ .

Тогда, учитывая, что

$$\|T_j^{(s)}(x)\|_{L_1(0, 2\pi)} = \sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2},$$

неравенство (9) можно переписать следующим образом:

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx \geq \frac{1}{C(s+2, |F|)} \cdot \sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2}$$

Заметим также, что

$$\sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2} \geq \frac{1}{s+2} \sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k|.$$

Окончательно будем иметь

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx \geq \frac{1}{(s+2)C(s+2, |F|)} \sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k|.$$

Из построения многочленов  $T_j^{(s)}(x)$  следует, что

$$\sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k| > (s+2) \cdot C\left(s+2, \frac{1}{s+2}\right).$$

Очевидно, что для достаточно больших значений  $s$   $C\left(s+2, \frac{1}{s+2}\right) > C(s+2, |F|)$ , следовательно, для этих значений  $s$  будем иметь

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx > 1,$$

что противоречит сходимости ряда (8).

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Ереванский государственный  
университет

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ս. Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Եռանկյունաչափական շարքերի ընդհանրացված  $D$ - հատկության  
մասին

Հոդվածում ապացուցված են հետևյալ 2 թեորեմները.

1. Եթե  $\{n_k\}$  բնական թվերի հաջորդականությունը բավարարում է  
2) պայմանին, ապա ցանկացած օրթոնորմալ սիստեմ օժտված չէ ընդհանրացված  $D$ - հատկությամբ այդ հաջորդականության նկատմամբ:

2. Եթե որևէ եռանկյունաչափական շարք ցանկացած ընդլայնվող խմբերով բացարձակ զուգամետ է որևէ դրական չափի բազմության վրա (բազմությունը կախված է խմբերից), ապա այն բացարձակ զուգամետ է ամենուրեք:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 86 (1965).

<sup>2</sup> Р. А. Аветисян, ДАН АрмССР, т. 74, № 3 (1982).

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

К оценкам активностей аргументов логических функций и числа  
линейно-отделимых подмножеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/IV 1986)

Работа состоит из двух частей. В первой части (п. 1.2) устанавливается одно общее утверждение о «типичных» значениях характеристик дискретных объектов, что применяется для характеристики набора активностей аргументов у почти всех функций алгебры логики. Во второй части доказывается необходимое и достаточное условие линейной отделимости подмножества в конечном множестве, что используется для установления различных верхних оценок числа таких подмножеств в зависимости от характера исходного конечного множества.

1.1. Пусть для каждого  $n$  имеется совокупность объектов  $A^{(n)} = \{A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_{\psi(n)}^{(n)}\}$ , где  $\psi(n)$  некоторая, стремящаяся к  $\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , целочисленная функция от натуральной переменной  $n$  (например,  $n$ -вершинные графы, функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $k$ -значной логики и т. д.). Часто рассматривается некоторое свойство  $P$ , которым объекты из  $A^{(n)}$  могут обладать или не обладать, и возникает вопрос о нахождении числа  $\varphi_n(P)$  объектов из  $A^{(n)}$ , обладающих свойством  $P$ . Причем в роли  $P$  могут выступать как качественные, так и количественные характеристики объектов из  $A^{(n)}$  (например, гамильтоновость для графов, длины дизъюнктивных нормальных форм для функций двузначной логики и т. д.).

Однако вычисление точного значения функции  $\varphi_n(P)$  не всегда оказывается возможным, и тогда возникают задачи либо об оценке значения функции  $\varphi_n(P)$ , либо же о нахождении для него асимптотической формулы. Если  $P$  представляет количественные характеристики, то возникает также задача о нахождении «типичных» значений этих характеристик. Нередко на помощь в таких ситуациях приходят вероятностные методы (см., например, (1,2)).

Говорят, что почти все объекты из  $A^{(n)}$  обладают свойством  $P$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(P)}{\psi(n)} = 1$ . Тогда говорят также, что свойство  $P$  «типично» для объектов из  $A^{(n)}$ .

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  произвольная функция двузначной логики (3). Число  $\omega_f^J = 2^{-n} \cdot \sum_{\bar{\alpha} \in E^n} [f(\bar{\alpha}) \oplus f^J(\bar{\alpha})]$  называется активностью совокупности аргументов  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$  относительно функции  $f$ , где  $E = \{0, 1\}$ ,  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \overline{\{1, n\}}$ ,  $f^J = f(x_1, \dots, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}, \dots, x_n)$ ,

$\bar{x} = 1 - x$ , а  $\oplus$  — сложение по модулю два. Очевидно, каждой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  двузначной логики можно сопоставить набор активностей всех непустых совокупностей аргументов из  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Число последних  $2^n - 1$ .

Активность  $\omega_f^{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  выражает меру существенности выбранной совокупности аргументов относительно рассматриваемой функции и представляет определенный практический интерес. К ее использованию приводят различные задачи помехоустойчивости, повышения надежности и диагностики логических схем (4,5), задачи определения меры важности совокупности столбцов бинарных таблиц (например, в задачах классификации объектов с бинарными признаками) (6) и т. д.

Если  $P_1, P_2, \dots, P_k$  конечная совокупность свойств, при каждом из которых известно, что почти все объекты из  $A^{(n)}$  им обладают, то легко устанавливается, что тогда почти все объекты из  $A^{(n)}$  одновременно обладают всеми свойствами  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . В пункте 2 доказывается аналогичное утверждение для одного случая, когда объектам из  $A^{(n)}$  сопоставлены наборы числовых характеристик и число свойств (относительно этих характеристик) стремится к бесконечности с ростом  $n$ . Утверждение используется для характеристики набора активностей аргументов у почти всех функций алгебры логики.

Пусть также  $A$  — произвольное множество точек  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$ . Подмножество  $A_0 \subseteq A$  называется линейно-отделимым в  $A$ , если существует гиперплоскость, отделяющая точки из  $A_0$  от точек  $A \setminus A_0$ .

К оценкам полного числа линейно-отделимых подмножеств  $n$ -мерного единичного куба  $E^n$  (пороговых функций) посвящены работы (7-11). В пункте 2 приводится одно необходимое и достаточное условие линейной отделимости подмножества произвольного конечного множества, что используется для установления различных верхних оценок как для полного числа таких подмножеств, так и для числа таких подмножеств, имеющих фиксированную мощность. При рассмотрении частного случая — вопроса оценки полного числа линейно-отделимых подмножеств в  $E^n$ , они дают известную оценку из (9-12).

1.2. В общем случае относительно множества объектов  $A^{(n)}$  будем предполагать следующее:

а) каждому объекту  $A_m^{(n)} \in A^{(n)}$  сопоставлен некоторый (числовой) вектор  $\Omega_m^{A^{(n)}} = (\omega_1^{A_m^{(n)}}, \omega_2^{A_m^{(n)}}, \dots, \omega_{\varphi(n)}^{A_m^{(n)}})$ , компонентами которого являются определенные характеристики объекта  $A_m^{(n)}$ , где  $\varphi(n)$  известная неубывающая целочисленная функция. Тем самым множество  $A^{(n)}$  разбивается на классы эквивалентностей — объекты  $A_{m_1}^{(n)}$  и  $A_{m_2}^{(n)}$  из  $A^{(n)}$  считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда  $\Omega_{m_1}^{A^{(n)}} = \Omega_{m_2}^{A^{(n)}}$ .

б) каждая случайная величина  $\omega_t^{A_m^{(n)}}$  для данных  $n$  и  $t$  (над множеством элементарных событий  $A^{(n)}$ ) имеет конечные математическое ожидание  $M_t(n)$  и дисперсию  $D_t(n)$ .

Для многих исследований, а также для данной работы важное значение имеет известное неравенство Чебышева (14).

**Лемма 1** (неравенство Чебышева). Пусть  $\xi$  — произвольная случайная величина, имеющая конечные математическое ожидание  $M\xi$  и дисперсию  $D\xi$ . Тогда для любого  $a > 0$  справедливо неравенство  $P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{D\xi}{a^2}$ , где  $P(C)$  — вероятность наступления события  $C$ .

Прямым следствием леммы 1 является следующее утверждение.

**Утверждение.** Пусть  $\theta(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $t$  — произвольный фиксированный номер. Тогда почти для всех объектов из  $A^{(n)}$  выполняется неравенство

$$|\omega_t^{A_m^{(n)}} - M_t(n)| < \sqrt{D_t(n) \cdot \theta(n)}. \quad (1)$$

Как уже было сказано в пункте 1.1, данное утверждение останется верным, если вместо неравенства (1) рассматривать одновременное выполнение аналогичных неравенств для произвольного конечного числа номеров  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Следующее утверждение применимо к случаям, когда число таких номеров стремится к  $\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\theta(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $D(n) = \max_t D_t(n)$ . Тогда почти для всех объектов из  $A^{(n)}$  одновременно выполняются неравенства

$$|\omega_t^{A_m^{(n)}} - M_t(n)| < \sqrt{D(n) \cdot \varphi(n) \cdot \theta(n)}, \quad t = 1, \varphi(n) \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $Q_t(n)$  есть доля объектов  $A_m^{(n)}$  из  $A^{(n)}$  таких, что  $|\omega_t^{A_m^{(n)}} - M_t(n)| \geq \sqrt{D(n) \cdot \varphi(n) \cdot \theta(n)}$ . Из леммы 1 следует, что

$$Q_t(n) \leq \frac{D_t(n)}{D(n) \cdot \varphi(n) \cdot \theta(n)}. \quad \text{Следовательно, имеем } Q(n) =$$

$$= \max_t Q_t(n) \leq \frac{1}{\varphi(n) \cdot \theta(n)}. \quad \text{Если теперь } Q_0(n) \text{ — доля объектов } A_m^{(n)} \text{ из}$$

$A^{(n)}$  таких, у которых в  $\Omega^{A_m^{(n)}}$  найдется хотя бы одна компонента  $\omega_t^{A_m^{(n)}}$ ,

что  $|\omega_t^{A_m^{(n)}} - M_t(n)| \geq \sqrt{D(n) \cdot \varphi(n) \cdot \theta(n)}$ , то, очевидно, будем иметь

$$Q_0(n) \leq \sum_{t=1}^{\varphi(n)} Q_t(n) \leq \varphi(n) \cdot Q(n) \leq \frac{1}{\theta(n)}. \quad \text{Последнее же неравенство дока-$$

зывает лемму.

Для произвольной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  двузначной логики и для произвольного подмножества  $\mathcal{Y} \subseteq \overline{\{1, n\}}$  обозначим  $a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} =$

$= 2^{n-1} \cdot \omega_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ . Число  $2 \cdot a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  представляет количество

всех вершин  $\bar{a} \in E^n$  таких, что  $f(\bar{a}) \neq f^{\mathcal{Y}}(\bar{a})$ .

**Теорема 1.** Пусть для каждого  $n$  имеется способ порождения системы  $\mathcal{S}(n)$  подмножеств из  $\overline{\{1, n\}}$  и пусть  $\theta(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда почти для всех функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  двузначной логики одновременно выполняются неравенства

$$|a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} - 2^{n-2}| < \sqrt{2^{n-3} \cdot |\mathcal{S}(n)| \cdot \theta(n)}, \quad \mathcal{Y} \in \mathcal{S}(n), \quad (3)$$

где  $|X|$  — мощность множества  $X$ .

Доказательство. Пусть  $A^{(n)}$  множество функций двузначной логики от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Заметим, что по каждому множеству  $\mathcal{Y} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, n\}$  множество  $E^n$  можно разбить на два подмножества таким образом, чтобы для любого  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E^n$  из одного подмножества вершина  $(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_{i_1}, \dots, \bar{\alpha}_{i_k}, \dots, \alpha_n)$  принадлежала другому подмножеству.

После такого представления легко убедиться, что вероятность того, что  $a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = p$ , будет  $2^{2^{n-1}} \cdot (2_p^{n-1}) \cdot 2^{-2^n} = 2^{-2^{n-1}} \cdot (2_p^{n-1})$ .

$$\begin{aligned} \text{Далее имеем } M(a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}) &= 2^{-2^{n-1}} \cdot \sum_{p=0}^{2^{n-1}} (2_p^{n-1}) \cdot p = (\text{после неслож-} \\ \text{ных преобразований)} &= 2^{n-2}; \quad M[(a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)})^2] = 2^{-2^n} \cdot \sum_{p=0}^{2^{n-1}} (2_p^{n-1}) \cdot p^2 = \\ &= (\text{после аналогичных преобразований}) = \frac{1}{4} \cdot [2^{2(n-1)} + 2^{n-1}]; \quad D(a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}) = \\ &= M[(a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)})^2] - [M(a_{\mathcal{Y}}^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)})]^2 = 2^{n-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $A^{(n)}$  выполняются условия а), б) и, следовательно, условие (2) леммы 2. Последние же, при  $|\mathcal{S}(n)| = \varphi(n)$ , эквивалентны выполнению условий (3). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть для  $\mathcal{S}(n)$  из теоремы имеет место  $|\mathcal{S}(n)| = o(2^n)$ . Тогда для почти всех функций двузначной логики активности всех совокупностей аргументов из  $\mathcal{S}(n)$  асимптотически равны  $\frac{1}{2}$ . В частности, для любого фиксированного натурального  $k$  активности всех совокупностей из не более  $k$  аргументов у почти всех функций двузначной логики асимптотически равны  $\frac{1}{2}$ .

2. Здесь будут рассматриваться только конечные множества.

Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве зафиксировано множество точек  $A$ . Подмножество  $A_0 \subseteq A$  называется линейно-отделимым в  $A$ , если существует гиперплоскость  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$  (или, по-другому,  $a \cdot x = b$ ), отделяющая подмножества  $A_0$  и  $A \setminus A_0$ , т. е. если

$$\begin{cases} a \cdot x - b > 0, & \text{если } x \in A_0 \\ a \cdot x - b < 0, & \text{если } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$$

Положим  $\varphi_{A_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_0 \\ -1, & \text{если } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$  Тогда нетрудно убедиться, что подмножество  $A_0 \subseteq A$  будет линейно-отделимым в  $A$  тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} (a \cdot x - b) \cdot \varphi_{A_0}(x) = |a \cdot x - b| & \text{для всех } x \in A \\ a \cdot x - b \neq 0 \end{cases}$$

имеет решение  $(a; b) = (a_1, a_2, \dots, a_n; b)$ .

Преобразование этой системы, частный случай которого был рассмотрен в (15), а именно — сложение всех ее уравнений и по координат-

ные группировки в левой части полученного, приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. Подмножество  $A_0 \subseteq A$  линейно-отделимо в  $A$  тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{x \in A_0} x_i - \sum_{x \in A \setminus A_0} x_i \right) \cdot a_i + (|A| - 2 \cdot |A_0|) \cdot b = \sum_{x \in A} |a \cdot x - b|$$

имеет решение  $(a; b)$  такое, что  $a \cdot x - b \neq 0$  при любом  $x \in A$ .

Следствие 2. Для любого подмножества  $A_0 \subseteq A$  вектор  $\Omega^{A_0} = (\sum_{x \in A_0} x_1, \sum_{x \in A_0} x_2, \dots, \sum_{x \in A_0} x_n; |A_0|)$  полностью и однозначно определяет линейную отделимость подмножества  $A_0$  в  $A$ .

Таким образом, произвольная верхняя оценка для числа векторов типа  $\Omega^{A_0}$  в  $A$  будет и верхней оценкой для полного числа линейно-отделимых подмножеств в  $A$ . Разумеется, вид такой оценки будет строго зависеть от характера множества  $A$ . Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть  $A$  есть  $n$ -мерная целочисленная решетка  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \{0, k_i - 1\}, i = 1, n\}$  и  $N_A(n, p)$  — число линейно-отделимых в  $A$  подмножеств мощности  $p$ . Тогда прямая по координатная оценка числа всевозможных векторов типа  $\Omega^{A_0}$  приводит к следующему утверждению.

$$\text{Теорема 3. } N_A(n, p) \leq \prod_{i=1}^n [p \cdot (k_i - 1) + 1].$$

$$\text{Следствие 3. } N_{E^n}(n, p) \leq (p + 1)^n.$$

$$\text{Пусть также } m_i = \sum_{j=1}^{k_i-1} (j \cdot \prod_{t=1}^{i-1} k_t) + 1, m_0 = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n + 1 \text{ и } N_A(n)$$

обозначает полное число линейно-отделимых подмножеств в  $n$ -мерной целочисленной решетке  $A$ . Тогда имеет место

$$\text{Теорема 4. } N_A(n) < m_0 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n.$$

Несколько более тонкий подсчет числа возможных векторов приводит к известной оценке (9-12).

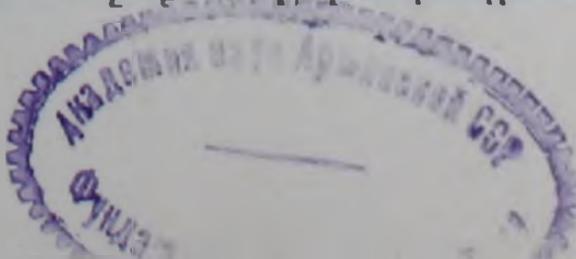
$$\text{Следствие 4. } N_{E^n}(n) < 2^{n^2} \text{ при } n \geq 2.$$

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Р. Б. ՔՈՐՈՍՅԱՆ

Տրամաբանական ֆունկցիաների արգումենտների ակտիվությունների և գծայնորեն—բաժանելի ենթաբազմությունների քանակի գնահատումների շուրջը

Աշխատանքը բաղկացած է երկու մասից: Առաջին մասում հավանականային մեթոդների կիրառմամբ հաստատվում է մի ընդհանուր պնդում դիսկրետ օբյեկտների բնութագրիչների «տիպիկ» արժեքների մասին այն դեպքի համար, երբ բնութագրիչների քանակը ձգտում է անվերջության: Պնդումն օգտագործվում է տրամաբանության հանրահաշվի համարյա բոլոր ֆունկցիաների արգումենտների ակտիվությունների հավաքածուի բնութագրման հար-



ցում: Ծրկրորդ մասում ապացուցվում է էվկլիդեսյան տարածության կամայական վերջավոր բազմությունում ենթաբազմության գծայնորեն—բաժանելի լինելու մի անհրաժեշտ և բավարար պայման, որն օգտագործվում է գծայնորեն—բաժանելի ենթաբազմությունների քանակի տարբեր վերին գնահատականների ստացման հարցերում՝ կախված դիտարկվող վերջավոր բազմության բնույթից:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, Сборник задач по дискретной математике, Наука, М., 1977. <sup>2</sup> П. Эрдеи, Дж. Спенсер, Вероятностные методы в комбинаторике, Мир, М., 1976. <sup>3</sup> С. В. Яблонский, Введение в дискретную математику, Наука, М., 1979. <sup>4</sup> Ш. Е. Бозоян, Изв. АН СССР, Тех. киб., № 5, 1975. <sup>5</sup> А. В. Петросян, ДАН АрмССР, т. 36, № 3 (1963). <sup>6</sup> Б. Е. Торосян, Тр. ВЦ АН АрмССР, т. 17 (1987). <sup>7</sup> М. Блох, Я. Моравек, Кибернетический сб., н. с., вып. 6, 1969. <sup>8</sup> С. Яджима, Т. Ибараки, Кибернетический сб., н. с., вып. 6, 1969. <sup>9</sup> Э. И. Нечипорук, Проблемы кибернетики, вып. 11, 1964. <sup>10</sup> R. O. Winder, AIEE, S—134 (1961). <sup>11</sup> S. H. Cameron, Bionics symposium, Rept 60—600 (1960). <sup>12</sup> E. Goto, H. Takahasi, Proc. IFIP, Publ. CO (1963). <sup>13</sup> S. Muroga, IEEE, EC—14, № 2 (1965). <sup>14</sup> В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, Мир, М., 1967. <sup>15</sup> М. Дертоузос, Пороговая логика, Мир, М., 1967.

УДК 512.62

МАТЕМАТИКА

М. К. Кюреган

**Квадратичные преобразования и синтез  
 неприводимых полиномов над конечными полями**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/VIII 1986)

Как известно, для всякого простого  $p$  и натурального числа  $s$  существует с точностью до изоморфизма единственное поле Галуа  $F_q$  порядка  $q = p^s$ .

Проблема синтеза неприводимых над полем Галуа  $F_q$  полиномов заданной степени в явном виде является одной из важных и трудных проблем современной алгебры. Основа теории неприводимости заложена в работах Е. Артина, Л. Диксона, О. Оре, А. Альберта, Р. Р. Варшамова и др. Отметим, что наибольший вклад в решение данной проблемы внес Р. Р. Варшамов, получивший ряд фундаментальных результатов в области синтеза неприводимых полиномов. В частности, он рассмотрел общий подход к построению неприводимых над основным полем  $F_q$  полиномов заданной степени в явном виде. Настоящая работа, посвященная построению неприводимых над полем  $F_q$  полиномов, возникла на основе идей, изложенных в работе (1). В ней предлагается конструктивный метод построения неприводимых полиномов, сложность которого меньше ранее известных методов. Помимо этого впервые проводится метод построения неприводимых самодвойственных полиномов над конечным полем нечетной характеристики.

В работе рассматриваются только нормированные полиномы, т. е. полиномы, старший коэффициент которых равен единице.

**Теорема 1.** Пусть  $q > 2$ ,  $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$  произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$  и  $\sigma$  — порядок эл.  $\delta = (-1)^n a_0 \neq 1$ , где  $a_0$  — свободный член полинома  $f(x)$ ,  $t > 1$  — такое целое число, что все его простые делители  $p_i$  являются также делителями числа  $\sigma = \prod_{i=0}^r p_i^{t_i} \cdot N$ , и  $(p_i, N) = 1$ ,  $p_i^{t_i+1} \nmid q-1$ . Положим также, что  $t \not\equiv 0 \pmod{4}$ , если  $q^n \equiv -1 \pmod{4}$ . Тогда  $f_t(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^{ut}$  неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $nt$  и принадлежит показателю  $et$ , где  $e$  — показатель полинома  $f(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha$  — произвольный корень полинома в некотором расширении поля  $F_q$ , тогда  $\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{n-1}}$  образуют совокупность всех корней  $f(x)$ , которые имеют порядок  $e$ . По теореме Виетта

$$\alpha \frac{q^n - 1}{q - 1} = (-1)^n a_0 = \delta, \quad (1)$$

поэтому  $e \nmid \frac{q^n - 1}{q - 1}$ , значит,  $q^n - 1 = ekM$ , где  $k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$ ,

$k_1 = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$ ,  $\gamma_i \leq \beta_i (i = \overline{1, r})$ ,  $k_1 \nmid \varepsilon$ ,  $(p_i, M) = 1$ ,  $\varepsilon = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} N$ ,  $(p_i, N) = 1$ ,  $p_i^{\alpha_i + 1} \nmid q - 1$ . С другой стороны, согласно (1)  $\delta \frac{q-1}{k_1} = \alpha^{\frac{k}{k_1} M} = 1$ , но это равенство невозможно, так как  $\alpha \nmid \frac{q-1}{k_1}$ . Таким образом,

$q^n - 1 = eM$ , где  $(M, p_i) = 1$ . Отсюда, согласно работе (2), если  $t$  удовлетворяет условиям теоремы, то полином  $f_t(x)$  степени  $nt$  неприводим над полем  $F_q$  и принадлежит показателю  $et$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $q > 2$ ,  $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $\delta = (-1)^n a_0$  является примитивным элементом поля  $F_q$ ,  $t > 1$  — такое целое число, что все его простые делители являются также делителями числа  $q - 1$ . Положим также, что  $t \not\equiv 0 \pmod{4}$ , если  $q^n \equiv -1 \pmod{4}$ .

Тогда  $f_t(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^{ut}$  неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $nt$  и принадлежит показателю  $et$ , где  $e$  — показатель полинома  $f(x)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $q > 2$  — нечетное число,  $f(x)$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $a_0$  — свободный член полинома  $f(x)$ ,  $\varepsilon$  — порядок элемента  $\delta = (-1)^n a_0 \neq 1$ ,  $k$  — простое число. Тогда корень  $\alpha$  полинома  $f(x)$  не может быть представлен в виде  $k$ -ой степени ни одного из элементов поля  $F_{q^n}$ , если  $\varepsilon = k^m N$ ,  $(k, N) = 1$ , но  $k^{m+1} \nmid q - 1$ .

**Доказательство.** Из доказательства теоремы 1 следует, что  $q^n - 1 = eM$ , где  $e$  — показатель полинома  $f(x)$  и  $k \nmid e$ ,  $(k, M) = 1$ . Пусть  $\beta$  — некоторый примитивный элемент поля  $F_{q^n}$ , тогда, как известно,  $\alpha = \beta^v$ , так что  $e = \frac{q^n - 1}{(v, q^n - 1)} = \frac{eM}{(v, eM)}$ , а это значит, что  $k \nmid v$ . С другой стороны, если  $\alpha = \theta^k$ , где  $\theta \in F_{q^n}$ , то  $\alpha = (\beta^r)^k = \beta^{rk}$ , где  $\theta = \beta^r$ , следовательно  $\beta^{rk-v} = 1$ . Отсюда вытекает, что  $rk = (q^n - 1)u + v$ , а это невозможно, так как  $k \nmid v$ . Лемма доказана.

Элемент  $\alpha \in F_q$  будем называть квадратом, если можно указать такой элемент  $\beta \in F_q$ , что  $\alpha = \beta^2$ , и неквадратом в противном случае.

**Следствие 2.** Пусть  $q > 2$  — нечетное число,  $f(x)$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $a_0$  — свободный член полинома  $f(x)$ ,  $\varepsilon$  — порядок эл.  $\delta = (-1)^n a_0 \neq 1$ , тогда корень  $\alpha$  полинома  $f(x)$  не является квадратом поля  $F_{q^n}$ , если  $\varepsilon = 2^m N$ ,  $2 \nmid N$ , но  $2^{m+1} \nmid q - 1$ .

**Лемма 2.** Пусть  $f(x)$  произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $g(x) = \alpha h(x) = \sum_{v=0}^{n_1} g_v x^v - \alpha \left( \sum_{u=0}^{n_2} h_u x^u \right)$  неприво-

димый над полем  $F_{q^n}$  полином, где  $g, h$  принадлежат  $F_q$  и  $f(x) \neq 0$ .

Тогда полином  $(h(x))^n f\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$  не будет разлагаться в поле  $F_q$ .

Доказательство. Учитывая неприводимость полинома  $f(x)$  над полем  $F_q$ , имеем над полем  $F_{q^n}$  соотношение

$$f(x) = \prod_{u=0}^{n-1} (x - \alpha^{q^u}). \quad (2)$$

Заменяя в соотношении (2)  $x$  на  $\frac{g(x)}{h(x)}$  и умножив обе части (2) на  $(h(x))^n$ , получим:

$$(h(x))^n f\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \prod_{u=0}^{n-1} (g(x) - \alpha^{q^u} h(x)).$$

Согласно (3)  $(h(x))^n f\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$  неприводим над полем  $F_q$ . Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть  $q > 2$  нечетное число,  $f(x)$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ , и  $a, b, c, d$  — произвольные элементы поля  $F_q$ , такие что  $c \neq 0$ . Тогда полином

$$F(x) = (cx + d)^n f\left(\frac{x^2 + ax + b}{cx + d}\right)$$

не будет разлагаться над полем  $F_q$ , если  $d^2 - dca + c^2b = \delta^2 \neq 0$  является квадратом в поле  $F_q$ , а среди элементов  $(-1)^n f\left(\frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right) \neq 0$  и  $(-1)^n f\left(\frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right) \neq 0$  лишь один не является квадратом в поле  $F_q$ .

Доказательство. Пусть  $\alpha$  — корень  $f(x)$ , т. е.  $f(\alpha) = 0$ . Тогда, заменив в формуле (2)  $x$  на  $\frac{x^2 + ax + b}{cx + d}$  и умножив обе части (2) на  $(cx + d)^n$ , получим

$$(cx + d)^n f\left(\frac{x^2 + ax + b}{cx + d}\right) = \prod_{u=0}^{n-1} (x^2 - (c\alpha^{q^u} - a)x + b - d\alpha^{q^u}).$$

Дискриминант многочлена  $x^2 - (c\alpha - a)x + b - d\alpha$  согласно теореме Суона (4) определяется формулой  $D(x^2 - (c\alpha - a)x + b - d\alpha) = (c\alpha - a)^2 - 4(b - d\alpha) = c^2\alpha^2 + 2(2d - ca)\alpha + a^2 - 4b$ .

Учитывая, что  $d^2 - dca + c^2b = \delta^2$  является квадратом в поле  $F_q$ , имеем  $c^2x^2 + 2(2d - ca)x + a^2 - 4b = c^2\left(x - \frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right)\left(x - \frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right)$ .

Учитывая, что  $q^n$  степень нечетного простого числа, по теореме Штикельбергера (4) квадратный многочлен неприводим над полем  $F_{q^n}$ , если его дискриминант есть неквадрат в  $F_{q^n}$ . Легко понять, что если  $f(x)$  неприводим над  $F_q$ , то полиномы  $f\left(x + \frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right)$  и

$f\left(x + \frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right)$  со свободными членами  $f\left(\frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right)$  и  $f\left(\frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right)$  и с корнями  $\alpha - \frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}$  и  $\alpha - \frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}$  соответственно будут также неприводимы над полем  $F_q$ . Учитывая, что из  $(-1)^n f\left(\frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right) \neq 0$  и  $(-1)^n f\left(\frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right) \neq 0$  лишь один не является квадратом в поле  $F_q$ , нетрудно убедиться, что согласно следствию 2 лишь один из элементов  $\alpha - \frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}$  и  $\alpha - \frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}$  не является квадратом в поле  $F_{q^n}$ , что в свою очередь устанавливает неприводимость полинома  $x^2 - (ca - a)x + b - da$  над полем  $F_{q^n}$ . Теперь из леммы 2 следует неприводимость полинома  $(cx + d)^n f\left(\frac{x^2 + ax + b}{cx + d}\right)$  над полем  $F_q$ . Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда  $b = 1, c = 1, d = 0$  и, следовательно,  $a^2 - dca + c^2b = 1$ .

Тогда полином  $F(x) = x^n f\left(\frac{x^2 + ax + 1}{x}\right)$  степени  $2n > 0$  при любой функции  $f(x)$  является самодвойственным полиномом (см. (1)). Дей-

$$\begin{aligned}
 \text{ствительно, } F^*(x) &= x^{2n} F\left(\frac{1}{x}\right) = x^{2n} \frac{1}{x^n} f\left(\frac{\frac{1}{x^2} + a\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x}}\right) = x^n f\left(\frac{x^2 + ax + 1}{x}\right) = \\
 &= F(x).
 \end{aligned}$$

Для этого случая из теоремы 2 получим следующее следствие.

Следствие 3. Пусть  $q > 2$  — нечетное число,  $f(x)$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $a$  — произвольный элемент поля  $F_q$ , тогда самодвойственный полином  $F(x) = x^n f\left(\frac{x^2 + ax + 1}{x}\right)$  неприводим над полем  $F_q$ , если из элементов  $(-1)^n f(a + 2) \neq 0$  и  $(-1)^n f(a - 2) \neq 0$  лишь один не является квадратом в поле  $F_q$ .

Теорема 3. Пусть  $q > 2$  — нечетное число,  $f(x)$  — произвольный неприводимый над полем  $F_q$  полином степени  $n$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  — произвольные элементы поля  $F_q$ . Тогда полином  $F(x) = f(x^2 + \delta x + \gamma)$  не будет разлагаться над полем  $F_q$ , если  $(-1)^n f\left(\frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$  не является квадратом в поле  $F_q$ .

Доказательство. Пусть  $\alpha$  — корень  $f(x)$ . Заменяя в формуле (2)  $x$  на  $x^2 + \delta x + \gamma$ , получим

$$f(x^2 + \delta x + \gamma) = \prod_{u=0}^{n-1} (x^2 + \delta x + \gamma - \alpha^{q^u}).$$

Дискриминант многочлена  $x^2 + \delta x + \gamma - \alpha$  согласно (4) определяется формулой  $D(x^2 + \delta x + \gamma - \alpha) = \delta^2 - 4\gamma + 4\alpha = 4\left(\alpha - \frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$ .

Легко понять, что если  $f(x)$  неприводим над  $F_q$ , то  $f\left(x + \frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$  со свободным членом  $f\left(\frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$  и корнем  $\alpha - \frac{4\gamma - \delta^2}{4}$  будет неприводим над полем  $F_q$ . Учитывая, что  $(-1)^n f\left(\frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$  не является квадратом в поле  $F_q$ , нетрудно убедиться, что согласно следствию 2  $\alpha - \frac{4\gamma - \delta^2}{4}$  будет неквадратом в поле  $F_{q^n}$ , что в свою очередь устанавливает неприводимость полинома  $x^2 + \delta x + \gamma - \alpha$  над полем  $F_{q^n}$ . Теперь из работы (3) следует неприводимость полинома  $f(x^2 + \delta x + \gamma)$  над полем  $F_q$ .

Теорема доказана

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамову за полезные советы в процессе работы над статьей.

Вычислительный центр Академии наук  
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Մ. Կ. ԿՅՈՒՐԵՂՅԱՆ

Վերջավոր դաշտերի վրա քառակուսային անվերածելի և անվերածելի բազմանդամների սինթեզը

Աշխատանքում ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս անվերածելի բազմանդամներ կառուցել բացահայտ տեսքով Գալուայի կամայական դաշտի վրա:

**Թեորեմ 1.** Դիցուք  $q > 2$  կենտ թիվ է,  $f(x)$ -ը  $n$ -րդ աստիճանի անվերածելի բազմանդամ է  $F_q$  Գալուայի դաշտի վրա, իսկ  $a, b, c, d$  կամայական տարրեր են Գալուայի  $F_q$  դաշտից այնպես, որ  $c \neq 0$ . Այդ դեպքում

$F(x) = (cx + d)^n f\left(\frac{x^2 + ax + b}{cx + d}\right)$  բազմանդամը անվերածելի է  $F_q$  դաշտի վրա, եթե  $d^2 - dca + c^2b = \delta^2 \neq 0$  այսինքն քառակուսային տարր է  $F_q$  դաշտում, իսկ

$$(-1)^n f\left(\frac{ac - 2d + 2\delta}{c^2}\right) \neq 0 \text{ և } (-1)^n f\left(\frac{ac - 2d - 2\delta}{c^2}\right) \neq 0$$

տարրերից միշտ միայն մեկն է հանդիսանում ոչ քառակուսային տարր  $F_q$  դաշտում:

**Թեորեմ 2.** Դիցուք  $q > 2$  կենտ թիվ է,  $f(x)$ -ը  $n$ -րդ աստիճանի անվերածելի բազմանդամ է  $F_q$  Գալուայի դաշտի վրա, իսկ  $\delta$  և  $\gamma$  — կամայական տարրեր են  $F_q$  դաշտից: Այդ դեպքում  $F(x) = f(x^2 + \delta x + \gamma)$  բազմանդամը անվերածելի է  $F_q$  դաշտի վրա, եթե  $(-1)^n \left(\frac{4\gamma - \delta^2}{4}\right)$  հանդիսանում է ոչ քառակուսային տարր  $F_q$  դաշտում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆԱԻԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Р. Р. Варшамов, К математической теории кодов. Докт. дис., ИАТ АН СССР. 1966. <sup>2</sup> А. А. Альберт, Кибернетический сборник. Новая серия, Мир, М., 1966. <sup>3</sup> М. К. Кюрегян, ДАН АрмССР, т. 81, № 2 (1985). <sup>4</sup> Э. Берлекэмп, Алгебраическая теория кодирования, Мир, М., 1971.

УДК 537.8

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Тарханян

## Электромагнитный солитон в антиферромагнетиках

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяном 21/VI 1985)

Солитоны—уединенные волны, локализованные в пространстве и во времени, возникают во многих физических объектах, обладающих дисперсией и нелинейностью самой различной природы <sup>(1)</sup>. В настоящей статье показана возможность существования солитонов нового типа в антиферромагнетиках, а именно, солитонов спин-решеточных (СР) поляритонов, представляющих собой своеобразный гибрид магнитоактивной ветви тепловых колебаний спиновой решетки антиферромагнитного кристалла с электромагнитными волнами. Наличие таких коллективных колебаний было предсказано в работе <sup>(2)</sup>, где построена линейная феноменологическая теория СР-поляритонов на основе совместного решения инверсионно-сопряженной системы уравнений Иосифьяна <sup>(3)</sup> и макроскопического уравнения движения для колебаний магнитоионной кристаллической решетки. Эти волны существенно отличаются как от волн намагниченности (полагается, что смещения узлов решетки происходят без изменения ориентации магнитных моментов), так и от обычных поляритонов в ионном кристалле, так как СР-поляритоны существуют, даже если все атомы в узлах решетки нейтральные <sup>(2)</sup>.

В настоящей работе получены точные аналитические решения системы уравнений, описывающих нелинейные механические колебания спиновой решетки в антиферромагнетике, связанные с линейными электромагнитными волнами инфракрасного диапазона. Указанная связь приводит к изменению знака коэффициента квазиупругой силы, действующей на атом при его смещении в элементарной ячейке. При этом упругая сила становится невозвращающей, а эффективная потенциальная энергия колебательной моды имеет два минимума, что и приводит к возможности солитонного решения. Скорость солитонов, как оказывается, лежит в области значений, запрещенных для фазовой скорости СР-поляритонов, исследованных в <sup>(2)</sup>.

Рассмотрим изотропный антиферромагнетик, кристаллическая решетка которого состоит из двух подрешеток атомов с противоположно направленными спинами. Как и в <sup>(2)</sup>, полагаем, что в элементарной ячейке имеются два атома с эффективными «магнитными зарядами»  $\pm\varphi$ , где  $\varphi = -\text{div}\vec{M}$ ,  $\vec{M}(r)$ —плотность макроскопического магнитного момента подрешетки, приходящаяся на один атом. Обозначим относительное смещение атомов из положений равновесия в элементарной

ячейке через  $\vec{w}$  и рассмотрим длинноволновые колебания решетки, уравнение движения которых имеет вид:

$$m\ddot{w} = -\alpha\vec{w} - \gamma w^2\vec{w} + \varphi\vec{H}. \quad (1)$$

Здесь  $m = (m_+^{-1} + m_-^{-1})^{-1}$  — приведенная масса атомов в элементарной ячейке.  $\alpha$  и  $\gamma$  — линейный и нелинейный коэффициенты квазиупругой силы, действующей на атом при его смещении относительно другого атома,  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля, действующего на данный атом со стороны всех остальных атомов кристалла и внешнего поля. Для построения нелинейной теории СР-поляритонов необходимо наряду с уравнением механических колебаний (1) использовать уравнения электромагнитного поля, которые удобно применять в инверсионно-сопряженной форме, предложенной в (3):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, & \text{div}\vec{B} &= 0, \\ \text{rot}\vec{H} &= -\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, & \text{div}\vec{D} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Удобство этих уравнений заключается в том, что при наличии свободных магнитных зарядов  $\text{div}\vec{B} \neq 0$  ( $\vec{B} \neq \text{rot}\vec{A}$ ), но  $\vec{D} = \text{rot}\vec{K}$ .

Полагая  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость кристалла, и исключая из (2) вектор  $\vec{E}$ , получим:

$$\text{rot rot}\vec{H} = -\epsilon \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Вектор магнитной индукции имеет вид (2)

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + N\varphi\vec{W}, \quad (4)$$

где  $\mu = 1$  — магнитная проницаемость,  $N$  — число ячеек в единице объема. Рассмотрим распространение линейно-поляризованных ( $\vec{W} \parallel \vec{H}$  оси  $x$ ) поперечных СР-поляритонов в направлении оси  $z$ . Тогда из (1), (3) и (4) получим систему уравнений

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha w - \gamma w^3 + \varphi H, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \epsilon\varphi N \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Для нахождения стационарного решения этой системы будем считать, что  $w$  и  $H$  являются функциями только от  $\zeta = z - vt$ , т. е. перейдем к системе координат, движущейся вместе с волной с фазовой скоростью  $v$ . Тогда из (6) после двукратного интегрирования получим:

$$H = \frac{\epsilon\varphi N v^2}{1 - \epsilon\mu v^2} w, \quad (7)$$

при этом постоянные интегрирования выбраны из условий  $H = w = \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0$  при  $\zeta \rightarrow \pm \infty$ . Подстановка (7) в (5) дает

$$mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = -\alpha' w - \gamma w^3, \quad (8)$$

где 
$$\alpha' = \alpha + \frac{m(\omega_l^2 - \omega_l^2)}{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2} \quad (9)$$

$\omega_l = \sqrt{\alpha/m}$ ,  $\omega_l = \sqrt{(\alpha + N\phi^2\mu^{-1})/m}$  — частоты поперечных и продольных колебаний решетки соответственно (<sup>2</sup>),  $v_0 = (\epsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$ . Легко видеть, что (8) совпадает с уравнением движения для ангармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$u(w) = \frac{\alpha' w^2}{2} + \frac{\gamma w^4}{4}, \quad (10)$$

где  $\alpha'$  — эффективный линейный коэффициент квазиупругой силы, учитывающий взаимодействие механических колебаний магнитоионной решетки с электромагнитными волнами. Пока  $\alpha' > 0$ , квазиупругая сила является возвращающей, а точка  $w = 0$  является единственным минимумом функции  $u(w)$ , где имеет место устойчивое равновесие, при этом солитоны отсутствуют. Но как только  $\alpha'$  становится отрицательным, т. е. когда связь механических и электромагнитных колебаний приводит к изменению знака линейного коэффициента квазиупругой силы, уравнение (8) допускает солитонное решение

$$w = \pm w_0 \operatorname{ch}^{-1} \left( \frac{\zeta - \zeta_0}{\Delta} \right), \quad (11)$$

где 
$$w_0 = \sqrt{-\frac{2\alpha'}{\gamma}}, \quad (12) \quad \Delta = v \sqrt{-\frac{m}{\alpha'}} \quad (13)$$

— амплитуда и ширина солитона соответственно,  $\zeta_0$  — произвольная постоянная интегрирования. При этом квазиупругая сила становится невозвращающей, а в точке  $w = 0$  имеет место бифуркация — возникают

две новые точки устойчивого равновесия  $w = \pm \sqrt{-\frac{\alpha'}{\gamma}}$ , соответствующие

минимумам потенциальной энергии  $u(w)$ , в окрестности которых колебания имеют квазигармонический характер. Солитон возникает, если амплитуда колебаний достигает значения (12), при этом потенциальная энергия (10) исчезает:  $u(w_0) = 0$ . Из условия  $\alpha' < 0$  легко видеть, что рассматриваемые солитоны существуют в области значений скорости

$$v_0 \frac{\omega_l}{\omega_l} < v < v_0, \quad (14)$$

т. е.  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  — максимальная скорость самого узкого ( $\Delta \rightarrow 0$ ) и са-

мого высокого ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) солитона. Заметим, что в области (14) поперечные СР-поляритоны распространяться не могут, так как волновое число оказывается чисто мнимым <sup>(2)</sup>. Скорость, амплитуда и область локализации солитона связаны соотношением

$$\frac{\omega_0 \Delta}{v} = \sqrt{\frac{2m}{\gamma}} = \text{const.} \quad (15)$$

Используя (9), соотношения (12) и (13) можно переписать в виде

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2m(\omega_l^2 v^2 - \omega_l^2 v_0^2)}{\gamma(v_0^2 - v^2)}}, \quad (12a)$$

$$\Delta = v \sqrt{\frac{v_0^2 - v^2}{\omega_l^2 v^2 - \omega_l^2 v_0^2}}, \quad (13a)$$

откуда следует, что с увеличением скорости солитона в области (14) его амплитуда монотонно возрастает от нуля до бесконечности, а область локализации монотонно уменьшается от бесконечности до нуля при  $v = v_0$ . Стационарный профиль импульса с конечной амплитудой устанавливается благодаря балансу между двумя конкурирующими процессами: деформацией волны из-за ее нелинейности и расплыванием из-за дисперсии. Заметим, что в отличие от соотношения (12), которое существенно зависит от нелинейного коэффициента  $\gamma$ , соотношение (13) не содержит никаких нелинейных свойств. Если ввести квазиволновое число  $K = \frac{1}{\Delta}$  и квазичастоту  $\Omega = Kv$ , то из (13a) получим дисперсионное соотношение для солитонов

$$\frac{K^2}{\Omega^2} = \epsilon \mu \frac{\Omega^2 + \omega_l^2}{\Omega^2 + \omega_l^2}, \quad (16)$$

которое совпадает с законом дисперсии СР-поляритонов (см. формулу (10) в работе <sup>(2)</sup>), если в последнем заменить частоту  $\omega$  и волновой вектор  $k$  на чисто мнимые величины  $i\Omega$  и  $iK$  соответственно.

В заключение приведем выражения для напряженностей электрического и магнитного поля солитона:

$$E = \frac{m\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{2N}{\epsilon\gamma} (\omega_l^2 - \omega_l^2)(\omega_l^2 \beta^2 - \omega_l^2)} \text{ch}^{-1}\left(\frac{z-vt-\zeta_0}{\Delta}\right),$$

$$H = \epsilon v E, \quad \beta = \frac{v}{v_0}. \quad (17)$$

Автор признателен академику АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяну за полезное обсуждение.

Институт радиофизики и электроники  
Академии наук Армянской ССР

էլեկտրամագնիսական սոլիտոնը անտիֆերոմագնետիկներում

Ցույց է տրված, որ անտիֆերոմագնետիկներում կարող են տարածվել նոր տեսակի սոլիտոններ՝ ժամանակի և տարածության մեջ լուկալիզացված ոչ գծային ալիքներ, որոնք իրենցից ներկայացնում են էլեկտրամագնիսական ալիքների և սպինային ցանցի օպտիկական տատանումների յուրատեսակ հիբրիդ: Ստացված է այդ կոլեկտիվ տատանումները նկարագրող ոչ գծային հավասարումների սխեմեմի ճշգրիտ անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ սոլիտոնների արագությունը փոխվում է մի տիրույթում, որն արգելված է սպին—ցանցային սոլյարիտոնների համար: Սոլիտոնի արագությունը մեծանալու հետ նրա ամպլիտուդան մոնոտոն կերպով աճում է, իսկ լայնությունը՝ նվազում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Дж. Л. Лэм, Введение в теорию солитонов, Мир, М., 1983. • Р. Г. Тарханян, ДАН АрмССР, т. 84, № 1 (1987). <sup>3</sup> А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 51, вып. 1 (1970).

УДК 539,3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. А. Матехин

О прямом методе потенциала в теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 3/VI 1985)

В статье предлагаются новые интегральные уравнения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа первой пространственной и основных плоских задач теории упругости. Уравнения построены таким образом, что алгебраически находятся граничные значения любых величин первого дифференциального порядка непосредственно по решениям. В задачах теории упругости это дает граничные напряжения: отметим, что знание граничных значений производных гармонической функции требуется в задачах гидромеханики. Неизвестные величины предлагаемых уравнений очевидным образом связаны с решениями соответствующих краевых задач, поэтому в процессе решения легко использовать дополнительную информацию, например, асимптотику в окрестности нерегулярностей. Уравнения, как правило, имеют простую и хорошо изученную структуру, что позволяет использовать разработанные численные схемы и, после небольших изменений, готовые пакеты программ.

В работе используется прямой метод потенциала: для некоторой системы в частных производных строятся формулы Грина, фундаментальные решения, интегральные представления; предельный переход приводит к уравнениям. В качестве исходных служат системы первого порядка, полученные из уравнения Лапласа или системы Ламе. В плоской задаче теории упругости используется постановка, данная в (1). Рассматриваются односвязные области с ляпуновскими границами.

1. Вводя переменные  $u_i = \sigma_{,i}$ , запишем плоское уравнение Лапласа  $\Delta \sigma = 0$  в виде системы  $u_{1,1} + u_{2,2} = 0$ ;  $u_{1,2} - u_{2,1} = 0$ . Формула Грина будет иметь вид:

$$\int_{\Omega} \left[ \begin{pmatrix} u_{1,1} + u_{2,2} \\ u_{1,2} - u_{2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{,1} + \beta_{,2} \\ \alpha_{,2} - \beta_{,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial n} - \beta \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right] d\Gamma; \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальное решение сопряженной системы  $E = -\frac{1}{2\pi r} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{pmatrix}$

(здесь введены обозначения  $r_i = x_i - y_i$ ,  $e_i = r_i/r$ ) позволяет получить интегральные представления

$$\sigma_{,1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{e_1}{r} - \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{e_2}{r} \right] d_x \Gamma; \quad \sigma_{,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{e_2}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{e_1}{r} \right] d_x \Gamma.$$

Отсюда после предельного перехода получаем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} d_x \Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial \ln r}{\partial s_y} d_x \Gamma; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} d_x \Gamma = - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{\partial \ln r}{\partial s_y} d_x \Gamma. \quad (2)$$

Аналогичный подход к уравнению Лапласа в пространстве приводит к переопределенной системе  $u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 0$ ,  $u_{1,2} - u_{2,1} = 0$ ,  $u_{1,3} - u_{3,1} = 0$ ,  $u_{2,3} - u_{3,2} = 0$ . Из первых трех уравнений получим представление для  $u_1$ , из первого, второго и четвертого — для  $u_2$ , первого, третьего и четвертого — для  $u_3$ :

$$\nabla \sigma = \int_{\Gamma} \left[ \nabla F \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \nabla F \times (\nabla \sigma \times \bar{n}) \right] d_x \Gamma, \quad F \equiv - \frac{1}{4\pi r}.$$

После домножения на  $\bar{n}$  и предельного перехода имеем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial n_y} d_x \Gamma = - \int_{\Gamma} (\nabla \sigma \times \bar{n}) \cdot (\nabla F \times \bar{n}_y) d_x \Gamma, \quad (3)$$

для задачи Неймана — систему

$$\frac{1}{2} (\nabla \sigma \times \bar{n}) + \int_{\Gamma} \left\{ (\nabla \sigma \times \bar{n}) \frac{\partial F}{\partial n_y} + \nabla F [(\nabla \sigma \times \bar{n}) \cdot \bar{n}_y] \right\} d_x \Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} (\nabla F \times \bar{n}_y) d_x \Gamma. \quad (4)$$

Вводя ортонормированные координаты на поверхности тела ( $\bar{t}^1 \times \bar{t}^2 = \bar{n}$ ), запишем иную систему для задачи Неймана:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial t^1} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t^1} \nabla F \cdot (\bar{t}^2 \times \bar{t}_y^1) + \frac{\partial \sigma}{\partial t^2} \nabla F \cdot (\bar{t}^1 \times \bar{t}_y^2) \right] d_x \Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial t_y^1} d_x \Gamma;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial t^2} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t^1} \nabla F \cdot (\bar{t}^2 \times \bar{t}_y^2) - \frac{\partial \sigma}{\partial t^2} \nabla F \cdot (\bar{t}^1 \times \bar{t}_y^1) \right] d_x \Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial t_y^2} d_x \Gamma. \quad (5)$$

Интегральные операторы уравнений (1), (2), (3) совпадают с операторами уравнений внешней задачи Неймана в теории потенциала. Следовательно, предлагаемые уравнения расположены не на спектре, для них сходится ряд последовательных приближений. Системы (4), (5) классических аналогов не имеют, однако определитель и главные миноры символических матриц этих систем равны единице; индексы равны нулю. Система (5) имеет слабую особенность.

II. В случае плоской деформации, сославшись на (1), рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} R_{1,1} - R_{2,2} &= 0 \\ \Delta \sigma &= 0 \\ R_{1,2} + R_{2,1} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad R_i \equiv \sigma_{ij,j}; \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

с граничными условиями  $R_i = 0$ ;  $\sigma_{ij} n_j = p_i$ . Получаем представления:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ e_1 e_2 \frac{\partial \sigma}{\partial n} - \sigma \frac{\partial}{\partial n} (e_1 e_2) \right] d_x \Gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{p_1 e_2 + p_2 e_1}{r} d_x \Gamma;$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ \sigma \frac{\partial}{\partial n} (e_2^2 - e_1^2) - (e_2^2 - e_1^2) \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right] d_x \Gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{p_1 e_1 - p_2 e_2}{r} d_x \Gamma.$$

От нормальных производных избавляемся, интегрируя по частям:

$$\int_{\Gamma} e_i^2 \frac{\partial \sigma}{\partial n} d_x \Gamma = - \int_{\Gamma} e_i^2 \frac{\partial \tau}{\partial s} d_x \Gamma = \int_{\Gamma} \tau \frac{\partial e_i^2}{\partial s} d\Gamma; \quad \tau \equiv \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (u_{1,2} - u_{2,1}).$$

Введем величины  $q_1 \equiv \sigma n_1 + \tau n_2$ ;  $q_2 \equiv \sigma n_2 - \tau n_1$ . Тогда на границе  $\bar{\sigma} \equiv \bar{q} \cdot \bar{n}$

$$\sigma_{11} = p_1 n_1 - p_2 n_2 + \sigma n_2^2; \quad \sigma_{12} = p_1 n_2 + p_2 n_1 - \sigma n_1 n_2.$$

Кроме того, если  $\bar{t} \equiv 2\mu \left( -\frac{\partial u_2}{\partial s}; \frac{\partial u_1}{\partial s} \right)$ , то соотношение  $\bar{p} = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \bar{q} + \bar{t}$ ,

позволяет перейти к задаче в перемещениях. Приведем результат:

$$\bar{q} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[ \left( 1 - \frac{1}{z} \right) I + \frac{2}{z} K \right] \bar{q} \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} d_x \Gamma = 2 \left[ \bar{f} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} C \bar{f} d_x \Gamma \right],$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 \\ e_1 e_2 & e_2^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} & -\frac{\partial \ln r}{\partial s_y} \\ \frac{\partial \ln r}{\partial s_y} & \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\bar{f} = \bar{t}$ ,  $z = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$  для первой задачи,  $\bar{f} = \bar{p}$ ,  $z = -1$  для второй.

Предлагаемые уравнения сопряжены известной системе Шермана—Лауричеллы, поэтому останавливаться на их свойствах нет необходимости. Другие уравнения, позволяющие находить напряжения на границе, были построены в (2); более сложный вид последних, по-видимому, связан с тем, что в них используются неизвестные разных дифференциальных порядков. Но уравнения А. И. Каландия пригодны и для многосвязных областей, в нашем же случае такое обобщение требует дополнительного исследования. Другим возможным обобщением является смешанная задача, на это указывает отмеченная выше аналогия. Применение системы к границам с угловыми точками следует осуществлять на основе работы (3).

III. К системе Ламе  $\Delta u_i + k e_{,i} = 0$  ( $e = u_{,i,i}$ ;  $k = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ ) добавим

уравнения, вытекающие из перестановочности дифференцирования:  $u_{1,12} - u_{1,21} = 0$ ;  $u_{1,13} - u_{1,31} = 0$  и т. д. Рассматривая первые производные в качестве неизвестных, имеем переопределенную систему первого порядка. Выписывая представления для  $u_{,i,i}$ , рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} + k e_{,1} &= 0 \\ v_{1,2} - v_{1,2} &= 0 \\ v_{1,3} - v_{3,1} &= 0 \\ v_{2,3} - v_{3,2} &= 0 \\ \Delta e &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad v_i \equiv u_{,i,i}.$$

Для каждого из трех представлений будем выбирать четыре уравнения из пяти, исключая соотношение перестановочности, не содержащее  $v_i$ . Подобным образом поступаем и для остальных компонент градиента. После некоторых преобразований получим:

$$u_{i,j} = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{k}{2} [F(\delta_{ij} - e_i e_j)] \frac{\partial e}{\partial n} - e \frac{\partial}{\partial n} [F(\delta_{ij} - e_i e_j)] \right\} d_x \Gamma + \\ + \int_{\Gamma} \left\{ \left[ \frac{\partial u_i}{\partial n} + k e n_i \right] F_{,j} + [(\nabla u_i \times \bar{n}) \times \nabla F]_j \right\} d_x \Gamma.$$

От нормальных производных объемной деформации освобождаемся с помощью теоремы Гаусса—Остроградского:

$$2\mu u_{i,j} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \int_{\Gamma} \left\{ (3e_i e_j - \delta_{ij}) \bar{q} \cdot \nabla F - q_i F_{,j} - q_j F_{,i} \right\} d_x \Gamma + 2 \int_{\Gamma} \left[ \mu \frac{\partial u_i}{\partial n} + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu) e n_i \right] F_{,j} d_x \Gamma + 2\mu \int_{\Gamma} [\nabla F \times (\nabla u_i \times \bar{n})]_j d_x \Gamma; \quad \bar{q} = (\lambda + 2\mu) e \bar{n} + 2\mu \bar{\omega} \times \bar{n}.$$

Для того чтобы сформулировать окончательный результат, удобно ввести следующие обозначения. Пусть  $\bar{s}^i = \bar{a}^i \times \bar{n}$ ,  $\bar{a}^i$  — орты декартовой системы координат. Направления  $\bar{s}^i$  лежат в касательной к  $\Gamma$  плоскости. Тогда

$$[\nabla u_i \times \bar{n}]_j = -\frac{\partial u_i}{\partial s^j}; \quad R_1 \equiv \frac{\partial u_3}{\partial s^2} - \frac{\partial u_2}{\partial s^3}; \quad R_2 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial s^3} - \frac{\partial u_3}{\partial s^1}; \quad R_3 \equiv \frac{\partial u_2}{\partial s^1} - \frac{\partial u_1}{\partial s^2}.$$

Несложно показать, что  $\bar{p} = \bar{q} + 2\mu \bar{R}$ .  $\bar{R}$ , равно как и все  $\frac{\partial u_i}{\partial s^j}$ , будем считать заданными на границе (первая задача). Формируем вне интегралов нормальную производную, переходим к пределу:

$$\frac{1}{2} \bar{q} - \frac{1}{\lambda + 3\mu} \int_{\Gamma} [3(\lambda + \mu) e_i e_j - 2\mu \delta_{ij}] q_j \frac{\partial F}{\partial n_y} d_x \Gamma = \frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \left\{ -R_i + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} R_i \frac{\partial F}{\partial n_y} d_x \Gamma - \int_{\Gamma} \left[ \nabla u_i \times \bar{n} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\bar{\omega} \cdot \bar{n}) \bar{a}^i \right] \cdot [\nabla F \times \bar{n}_y] d_x \Gamma \right\}^+.$$

Ядро полученной системы сопряжено ядру регулярной системы теории потенциала, получаемой на основе введения псевдонапряжений. За подробностями можно обратиться к (4), спектральные свойства регулярной системы изучены в (5), там же доказана сходимость ряда последовательных приближений. Все эти результаты верны и для введенной системы. Как и в плоском случае, все градиенты перемещений на границе выражаются через граничные условия (в данном случае — проекции градиентов на поверхность) и переменные, относительно которых составлено уравнение.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую признатель-

ность профессору Н. Ф. Морозову и старшему научному сотруднику М. В. Паукшто, без деятельной поддержки которых работа не могла быть выполнена.

Ленинградский университет  
им. А. А. Жданова

Ն. Ա. ՄԱՏԵԻՆ

Առաձգականության տեսությունում պոտենցիալի ուղղակի  
մեթոդի մասին

Հոդվածում պոտենցիալի մեթոդի հիմունքներով ստացվել են առաձգականության տեսության և Հապլասի հավասարումների խնդիրների համար ինտեգրալ հավասարումները: Առաջարկված հավասարումներն ունեն հասարակ, լավ ուսումնասիրված կառուցվածքներ և թույլ են տալիս անմիջականորեն որոշել եզրագծի վրա առաջին դիֆերենցիալ կարգի մեծությունների արժեքները:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Б. Е. Победря, ДАН СССР, т. 253, № 2 (1980). <sup>2</sup> А. И. Каландия, ПММ, т. 43, № 5 (1979). <sup>3</sup> С. С. Заргарян, Изв. АН СССР МТТ, № 3 (1982). <sup>4</sup> В. Д. Купрадзе, Методы потенциала в теории упругости, М., 1963. <sup>5</sup> Pham The Lai. Potentiels élastiques; tenseurs de Green et de Neumann, J. Мéc., v. 6, № 2 (1967).

УДК 535. 341

ФИЗИКА

С. А. Агабян, Ф. П. Сафарян

К теории многофононных безызлучательных переходов в  
 диэлектрических кристаллах, активированных  
 редкоземельными ионами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/VII 1986)

1. Обзор современных представлений теории многофононных безызлучательных переходов (МБП) для активированных редкоземельными ионами (РЗ ионами) диэлектрических кристаллов приведен в (1). Первоначально количественные вычисления вероятностей МБП проводились на основе адиабатической теории МБП (2-5), затем в (6,7) использовался неадиабатический подход, предложенный в (8,9), который по существу представляет собой учет вклада n-фононного члена гамильтониана электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ) в вероятность МБП. Однако учет только последнего (n-фононного) члена гамильтониана ЭФВ и пренебрежение вкладами всех предыдущих членов (до линейного включительно) теоретически никак нельзя считать обоснованным. Вклад линейного члена ЭФВ гамильтониана учтен в (10-14). В настоящей статье показано, что этот вклад является наиболее общим: на его основе мы получили известные формулы адиабатического приближения (2-5). Кроме того, формула для линейного вклада преобразована к виду, позволяющему провести сравнительно простые количественные вычисления.

2. В (12) на основе общего гамильтониана ЭФВ (где учтены линейный и n-фононный члены) вычислена вероятность n-фононного БП. Здесь мы приводим только вклад линейного члена:

$$W_{\lambda\mu}^{(n)} = \frac{\pi n!}{\hbar^{2n-1}} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} |B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{*(n)}(\lambda\mu)|^2 \prod_{i=1}^n (1 + \nu_{\alpha_i}) \delta\left(\Delta_{\lambda\mu} - \sum_{i=1}^n \omega_{\alpha_i}\right), \quad (1)$$

где буквами  $\lambda$  и  $\mu$  пронумерованы электронные состояния, между которыми происходит БП,  $\Delta_{\lambda\mu} = \frac{1}{\hbar} (\epsilon_\lambda - \epsilon_\mu)$  энергетическая щель между уровнями  $\lambda$  и  $\mu$ ;  $\hbar\omega_\alpha$  — энергия фонона типа  $\alpha$ ,  $\nu_\alpha$  — число фононов, имеющих энергию  $\hbar\omega_\alpha$ , ( $\nu_\alpha = [\exp(\hbar\omega_\alpha/kT) - 1]^{-1}$ ).  $B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{*(n)}(\lambda\mu)$  связан с коэффициентами  $B_\alpha^{(1)}(\lambda\mu)$  ЭФВ посредством формулы

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{*(n)}(\lambda\mu) = \sum_{\{\nu_i\}} \frac{B_{\alpha_1}^{(1)}(\lambda\nu_1) B_{\alpha_2}^{(1)}(\lambda\nu_2) \dots B_{\alpha_n}^{(1)}(\lambda\nu_n)}{(\Delta_{\nu_1\lambda} + \omega_{\alpha_1}) \left(\Delta_{\nu_2\lambda} + \sum_{i=1}^2 \omega_{\alpha_i}\right) \dots \left(\Delta_{\nu_n\lambda} + \sum_{i=1}^n \omega_{\alpha_i}\right)}, \quad (2)$$

где  $\{v_i\}$  представляет собой набор промежуточных состояний, по которым идет суммирование в (2).

Допустим, что из  $n$ -фоонных переходов  $k$  переходы происходят между штарковскими состояниями верхнего мультиплета (их обозначаем буквами  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, k$ ), один переход перекрывает энергетическую щель  $\Delta_{\lambda\mu}$ , а оставшиеся  $(n-1-k)$  переходы происходят между штарковскими состояниями нижнего мультиплета ( $\mu_i$ ,  $i=k+1, \dots, n-1$ ). Обозначения  $\lambda$  и  $\mu$  мы сохраним для нижнего штарковского состояния верхнего мультиплета и верхнего штарковского состояния нижнего мультиплета, соответственно. Тогда, как нетрудно видеть, сумму (2) мы можем представить в следующем виде:

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{*(n)}(\lambda\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \sum_{\{\lambda_i\}} \frac{B_{\alpha_1}^{(1)}(\lambda\lambda_1) B_{\alpha_2}^{(1)}(\lambda_1\lambda_2) \dots B_{\alpha_k}^{(1)}(\lambda_{k-1}\lambda_k)}{(\Delta_{\lambda\lambda} + \omega_{\alpha_1}) \dots (\Delta_{\lambda_k\lambda} + \sum_{i=1}^k \omega_{\alpha_i})} \times \\ \times \sum_{\{\mu_i\}} \frac{B_{\alpha_{k+1}}^{(1)}(\lambda_k\mu_{k+1}) B_{\alpha_{k+2}}^{(1)}(\mu_{k+1}\mu_{k+2}) \dots B_{\alpha_n}^{(1)}(\mu_{n-1}\mu)}{(\Delta_{\mu\mu_{k+1}} + \sum_{i=k+2}^n \omega_{\alpha_i}) \dots (\Delta_{\mu\mu_{n-1}} + \omega_{\alpha_n})}. \quad (3)$$

При получении формулы (3) мы заменили  $\Delta_{\mu\lambda}$  на  $(-\Delta_{\lambda\mu} - \Delta_{\mu\mu})$  и учитывали также закон сохранения энергии, фигурирующий в формуле (1) в виде  $\delta$ -функции  $(\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^n \omega_{\alpha_i})$ . Далее сделаем два предположения:

1) допустим, что система является чисто адиабатической (имеются только два изолированных от всех остальных уровней невырожденных уровня  $\lambda$  и  $\mu$ ); 2) допустим, что в процессе БП участвуют  $n$ -фооны одинакового типа. Тогда все индексы  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  в (3) принимают только два значения ( $\lambda$  и  $\mu$ ) и выражение (3) приобретает вид

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{*(n)}(\lambda\mu) = \frac{B_{\alpha}^{(1)}(\lambda\mu)}{\omega_{\alpha}^{n-1} (n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} \left[ B_{\alpha}^{(1)}(\lambda\lambda) \right]^k \left[ B_{\alpha}^{(1)}(\mu\mu) \right]^{n-1-k}. \quad (4)$$

Входящая в (4) сумма представляет собой биномиальное разложение. Таким образом, подставляя (4) в (1), для вероятности МБП получим формулу адиабатического приближения (2-5)

$$W_{\lambda\mu}^{(n)} = \frac{\pi n}{\hbar^2 (n-1)!} \sum_{\alpha} |B_{\alpha}^{(1)}(\lambda\mu)|^2 \left\{ \frac{B_{\alpha}^{(1)}(\lambda\lambda) - B_{\alpha}^{(1)}(\mu\mu)}{\hbar \omega_{\alpha}} \right\}^{2n-2} (1 + v_{\alpha})^n \delta(\Delta_{\lambda\mu} - n \omega_{\alpha}) \quad (5)$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой стоксовы потери в системе при электронном переходе. Для РЗ-ионов они малы и, как показывают вычисления, проводимые в (1,5) (и наши вычисления тоже), для примесных РЗ-ионов адиабатический вклад (5) в вероятности МБП мал и при увеличении  $n$  быстро стремится к нулю. Однако для ионов группы железа, а также для межконфигурационных переходов типа  $f \rightarrow d$  этот вклад может быть существенным.

3. Формулу (3) можно упростить также в случае вырожденных уровней  $\lambda$  и  $\mu$ . В этом случае величины расщеплений  $\Delta_{\lambda\lambda_i}$  и  $\Delta_{\mu\mu_i}$  рав-

ны нулю. Тогда, если снова учитывать, что в процессе БП участвуют фононы одинакового типа, и заменить матричные элементы их средними значениями, то формулу для вероятности МБП можно представить в следующем упрощенном виде:

$$W_{\lambda\mu}^{(n)} = \frac{\pi n}{\hbar^2 (n-1)!} \sum |B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \mu)|^2 \left\{ \frac{\sum_{\lambda_1} B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda_1) - \sum_{\mu_1} B_{\alpha}^{(1)}(\mu, \mu_1)}{\hbar v_{\alpha}} \right\}^{2n-2} (1 + v_{\alpha})^n \delta(\Delta_{\lambda\mu} - n\omega_{\alpha}). \quad (6)$$

Формула (6) отличается от (5) лишь тем, что в квадратных скобках вместо матричных элементов  $B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda)$  и  $B_{\alpha}^{(1)}(\mu, \mu)$  стоят суммы  $\sum_{\lambda_1} B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda_1)$  и  $\sum_{\mu_1} B_{\alpha}^{(1)}(\mu, \mu_1)$  по всем штарковским состояниям верхнего и нижнего электронных уровней. По этой причине неadiaбатические вклады (6) могут оказаться намного большими по сравнению с адиабатическими (5).

Очевидно, формула (6) может быть применена также в случае примесных РЗ-ионов, так как величины штарковских расщеплений электронных уровней малы и в (3) ими можно пренебречь относительно энергии фононов.

4. В формуле (6) перейдем от коэффициентов  $B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \nu)$  к матричным элементам ЭФВ  $\langle \lambda | V^{(1)} | \nu \rangle$  посредством формулы (12,14)

$$B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \mu) = \left( \frac{\hbar}{2Mv_0^2} \right)^{1/2} \sqrt{v_{\alpha}} \langle \lambda | V^{(1)} | \mu \rangle \quad (7)$$

( $M$  — масса кристалла,  $v_0$  — средняя скорость звуковых волн в кристалле),  $V^{(1)}$  — линейный член в потенциале электрон-ионного взаимодействия, его можно представить в виде

$$V^{(1)} = \sum_{lm} A_{ol} \Phi_{lm} Y_{lm}, \quad (8)$$

где  $Y_{lm}$  — сферические функции оптического электрона примеси. Выражения для коэффициентов  $A_{ol}$ ,  $\Phi_{lm}$  приведены в (12,15).

Волновые функции штарковских состояний примесных РЗ-ионов можно представить в виде суперпозиций по волновым функциям свободного иона. Далее, необходимо от матричных элементов типа  $\langle J, M_{\lambda} | Y_{lm} | J, M_{\nu} \rangle$  перейти к соответствующим приведенным матричным элементам  $\langle J_{\lambda} || Y_l || J_{\nu} \rangle$  по теореме Вигнера — Эккарта. После чего можно отвлечься от штарковской структуры уровней, проводя усреднение по нижним штарковским состояниям.

Окончательно для вероятности МБП можно найти следующее приближенное выражение:

$$W_{\lambda\mu}^{(n)} = \frac{\pi n Z^{2n}}{\hbar^{2n} (n-1)!} \left( \frac{3\hbar}{4\pi^2 \rho v_0^5} \right)^n \left( \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{n} \right)^{2n+1} [A_{ol_1} \Phi_{l_1}]^2 [A_{ol} \Phi_l]^{2n-2} \times \\ \frac{|\langle J_{\lambda} || Y_{l_1} || J_{\mu} \rangle|^2}{(2J_{\lambda} + 1)(2J_{\mu} + 1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} \left[ \frac{\langle J_{\lambda} || Y_l || J_{\lambda} \rangle}{\sqrt{2J_{\lambda} + 1}} \right]^{2(n-1-k)} \left[ \frac{\langle J_{\mu} || Y_l || J_{\mu} \rangle}{\sqrt{2J_{\mu} + 1}} \right]^{2k} \times \\ \times \frac{\exp(\beta \Delta_{\lambda\mu})}{[\exp(\beta \Delta_{\lambda\mu}/n) - 1]^n}, \quad (9)$$

где  $\beta = \hbar/kT$ .

Входящие в формулу (9) приведенные матричные элементы табулированы в (16). Число фононности ( $n$ ) можно определить с помощью неравенства  $(n-1)\omega_D \leq \Delta_{\lambda\mu} < n\omega_D$  (для ИАГ использовано значение  $\omega_D = 521 \text{ см}^{-1}$ ).

Температурная зависимость вероятности  $W_{\lambda\mu}^{(n)}$  определяется последним, хорошо известным, множителем в формуле (9), который при  $T \rightarrow 0$  стремится к единице.

Переход	$\Delta E$ ( $\text{см}^{-1}$ )	$n$	$W_{\text{лин}}$ ( $\text{с}^{-1}$ )	$W_{\text{нел}}$ ( $\text{с}^{-1}$ )	$W_{\text{экс}}$ ( $\text{с}^{-1}$ )	Лит.
$Nd^{3+}$						
${}^4G_{7/2} \rightarrow {}^2G_{7/2}^{(20)}$	1150	3	$2.3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{10}$	$10^5$	(19)
${}^4H_{11/2}^{(21)} \rightarrow {}^4F_{9/2}$	837	2	$5.4 \cdot 10^8$		$10^5$	(19)
${}^4F_{9/2} \rightarrow {}^4F_{7/2}$	993	2	$3 \cdot 10^9$		$10^3$	(19)
${}^4F_{5/2} \rightarrow {}^4F_{3/2}$	860	2	$2 \cdot 10^9$		$10^3$	(19)
${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$	4690	9	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^3$	(21)
${}^4I_{15/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$	1250	3	$2 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^1$		
${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$	1400	3	$5 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^9$		
${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$	1150	3	$2 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^2$	(20)
$Er^{3+}$						
${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4F_{5/2}$	1521	3	$1.2 \cdot 10^8$			
${}^4F_{9/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$	2525	5	$1.3 \cdot 10^5$			
${}^4I_{9/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$	1885	4	$8 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^6$		
${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$	3370	7	35	$9 \cdot 10^4$		

В таблице приведены вычисленные на основе формулы (9) значения вероятностей МБП, происходящих в кристаллах ИАГ— $Nd^{3+}$  и ИАГ— $Er^{3+}$ .

При вычислении были использованы волновые функции свободных ионов с учетом перемешивания термов спин-орбитальным взаимодействием (17, 18). В 3-м столбце таблицы приведены значения вероятностей для тех же каналов МБП, рассчитанные в (1, 9) в рамках «нелинейной» теории МБП, а в 4-м—экспериментальные значения.

Из приведенных в таблице данных видно, что формула (9) дает близкие к экспериментальным значениям величины для вероятностей МБП. Это свидетельствует о том, что при вычислении вероятности МБП учет вклада от линейных по фононам членов гамильтониана ЭФВ необходим.

Институт физических исследований  
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ԱՂԱԲԱՅԱՆ, Յ. Պ. ՍԱՅԱՐՅԱՆ

Հաղվագյուտ հոդի ինններով ակտիվացված զիլիկտրիկ բյուրեղներում  
բազմաֆոնոն ոչ ճառագայրային անցումների տեսության շուրջ

Ցույց է տրված, որ էլիկտրոն-ֆոնոն փոխազդեցության համընթաց հարաբերակցության անդամով պայմանավորված խառնուրդային խոնների ոչ ճառագայրային անցումների հավանականության բանաձևն ունի ընդհանուր բնույթ,

որից որպէս մասնավոր դեպք, կարելի է ստանալ ադիարատիկ մոտարկման համապատասխան բանաձևը: Բազմաֆոնոն ոչ ճառագայթային անցման հաճախանության համար ստացված է մոտավոր բանաձև, որը հնարավորութիւն է տալիս քանակական հաշվարկներ կատարել հաղվագչուտ—հողի խմբի իոններով ակտիվացված դիէլեկտրիկ բյուրեղների համար:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Yu. E. Perlín, A. A. Kaminskii, Phys. Sol. (b), v. 132, p. 11 (1985). <sup>2</sup> Ю. Е. Перлин, УФН т. 80, с. 553 (1963). <sup>3</sup> И. С. Андриеш, В. Я. Гомурарь, Д. Н. Вылегжанин и др. ФТТ, т. 14, с. 2967 (1972). <sup>4</sup> Ю. Е. Перлин, в кн.: Спектроскопия кристаллов, Наука, Л., 1973. <sup>5</sup> Yu. E. Berlin, A. A. Kaminskii, V. N. Enakil e. a., Phys. Stat. Sol. (b), v. 92, p. 403 (1979). <sup>6</sup> Ю. Е. Перлин, А. А. Каминский М. Г. Блажа и др., ФТТ, т. 24, с. 685 (1982). <sup>7</sup> Yu. E. Perlín, A. A. Kaminskii, M. A. Blazha e. a., Phys. Stat. Sol. (b), v. 112, p. K 125 (1982). <sup>8</sup> F. Möglich, R. W. Rompe, Z. Phys, v. 115, p. 707 (1940). <sup>9</sup> К. К. Pukhov, V. P. Sakun, Phys. Stat. Sol. (b), v. 95, p. 391 (1979). <sup>10</sup> Б. З. Малкин, ФТТ, т. 4, с. 2214 (1962). <sup>11</sup> L. A. Risalerg, H. W. Moos, Phys. Rev., v. 174, p. 429 (1968). <sup>12</sup> Ф. П. Сафарян, Изв. АН АрмССР, физ. т. 4, с. 16 (1979). <sup>13</sup> Ф. П. Сафарян, ФТТ, т. 21, с. 300 (1979). <sup>14</sup> Ф. П. Сафарян, ФТТ, т. 19, с. 1947; т. 20, с. 1563 (1976). <sup>15</sup> Г. Г. Демирханян, Ф. П. Сафарян, Уч. зап. ЕГУ, № 2, с. 61 (1981). <sup>16</sup> C. W. Nielson, G. F. Koster, Spectroscopic Coefficients for  $p^n$ ,  $d^n$ , and  $f^n$  configurations, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963. <sup>17</sup> H. P. Christensen, Phys. Rev. B, v. 19, p. 6564 (1979). <sup>18</sup> Н. А. Кулагин, Д. Т. Сзиридов, Методы расчета электронных структур свободных ионов, Наука, М., 1986. <sup>19</sup> T. Kushida, S. Kinoshita, T. Ohtsuki e. a., Solid. State Communications, v. 4, p. 1363 (1982). <sup>20</sup> В. В. Григорянц, М. Е. Жаботинский, В. М. Марушев, Квантовая электроника, т. 9, с. 1576 (1982). <sup>21</sup> P. F. Liao, H. P. Weber, S. Appl. Phys., v. 45, p. 2931 (1974).

УДК 631.416

ЭКОЛОГИЯ

Р. Г. Ревазян, О. Г. Воробьев

### О миграции химических элементов в обнаженных почвогрунтах озера Севан

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 28/VII 1986)

В результате спуска вод оз. Севан обнажились значительные территории почвогрунтов, часть которых покрыта лесонасаждениями, часть же используется под сельскохозяйственные культуры. Почвогрунты представлены очень слабо гумусированными песчано-галечниками, обладающими высоким фильтрационным промывным свойством, что обуславливает усиленную миграцию химических веществ в грунтовые воды, сообщающиеся с водами озера. Изучение миграции химических элементов на обнаженных почвогрунтах имеет научное и практическое значение в связи с возрастающей загрязненностью вод оз. Севан и поисками путей предотвращения его химического загрязнения.

Миграция химических веществ, помимо механических, водных и других путей, осуществляется также с атмосферными осадками, которые приносят на подстилающую поверхность значительное количество химических элементов (<sup>1-3</sup>).

Опыты проводились на почвогрунтах под пологом леса и на открытой площадке—прогалине. Лесная растительность опытного участка представлена сосновыми насаждениями, травяной покров—горно-степной злаковой и разнотравно-злаковой растительностью, местами трагакантовыми элементами.

Для выявления характера миграции химических элементов проводились наблюдения за динамикой поступления атмосферных осадков, а также лизиметрических вод методом воронок Эбермайера, установленных под подстилкой, дерновым слоем (5—3 см) и на глубинах 50 и 150 см.

Химический анализ атмосферных осадков и лизиметрических вод проводили общепринятыми методами (<sup>4,5</sup>).

В табл. 1 приводится количество атмосферных осадков, поступающих на исследуемую территорию. Из этих данных видно, что наибольшее количество осадков выпадает весной.

Исследования показали (табл. 2) заметные различия химического состава лизиметрических вод под покровом леса и на прогалине. Под покровом леса формируются слабоминерализованные воды, что, очевидно, связано с интенсивным поглощением элементов питания лесным фитоценозом, а в фильтраатах лизиметрических вод с прогали-

Таблица 1

## Поступление атмосферных осадков за годы наблюдений, мм

Месяц	1981	1982	1983	
Март	71,2	101,2	35,6	
Апрель	82,2	48,2	20,3	
Май	84,4	72,3	80,4	
Σ	237,8	222,0	136,3	ср. 198,7
Сентябрь	3,9	23,4	3,4	
Октябрь	42,1	50,3	36,0	
Ноябрь	132,9	74,5	42,3	
Σ	178,9	148,2	81,7	ср. 136,2

ны отмечается повышенная минерализация. С увеличением минерализации меняется и ионный состав лизиметрических вод. Наибольшее количество ионов как на прогалине, так и под покровом леса обнаружено в фильтрах, полученных с подстилки и из 0—50-см слоя и относительно меньше из 0—150-см слоя.

В лизиметрических водах обоих вариантов фосфор обнаружен в небольших количествах, что объясняется его слабой водной миграцией.

Известно, что соединения азота отличаются высокой подвижностью и легко мигрируют в толще почвы. Вымывание азота из почвогрунтов происходит как под покровом, так и на прогалине. Потеря азота из почвогрунтов происходит в основном в форме нитратов и нитритов. В меньшей степени мигрируют ионы аммония. Содержание нитратов и нитритов в фильтрате из нижнего слоя на прогалине высокое, что объясняется разреженностью растительного покрова и их слабым биологическим поглощением, под покровом же леса высокое их содержание обнаруживается лишь в фильтрате, полученном из-под подстилки. Очевидно, лесной покров препятствует их вымыванию в грунтовые воды, тем самым предотвращая загрязнение вод оз. Севан.

Загрязнение грунтовых вод нитратами путем инфильтрации их через профиль почв, очевидно, происходит в основном вследствие применения удобрений на соседних пашнях.

Химизм инфильтрационных вод, как показывают данные, значительно меняется в зависимости от сезона. Так, весенний период характеризуется наибольшей концентрацией лизиметрических фильтратов, что объясняется, очевидно, большим количеством осадков и весенней подкормкой сельскохозяйственных культур удобрениями.

Оценка влияния атмосферных осадков и инфильтрационных вод на оз. Севан может быть выполнена по величине их относительной токсичной массы (ОТМ) в соответствии с методикой (?). Относительная токсичная масса стока, содержащего  $n$   $i$ -х загрязняющих компонентов, определяется по формуле  $m_n = \sum_{i=1}^n I_i V$ , где  $I_i = I_0 c_i$  — относительная токсичность  $i$ -го компонента, присутствующего в стоке, объемом  $V$ , м<sup>3</sup>, в концентрации  $C_i$ , г/м<sup>3</sup>;  $I_0 = \frac{1}{\text{ПДК}_i}$  — индекс относитель-

Таблица 2

Концентрация ионов и значения относительной токсичности инфильтрационных вод и атмосферных осадков

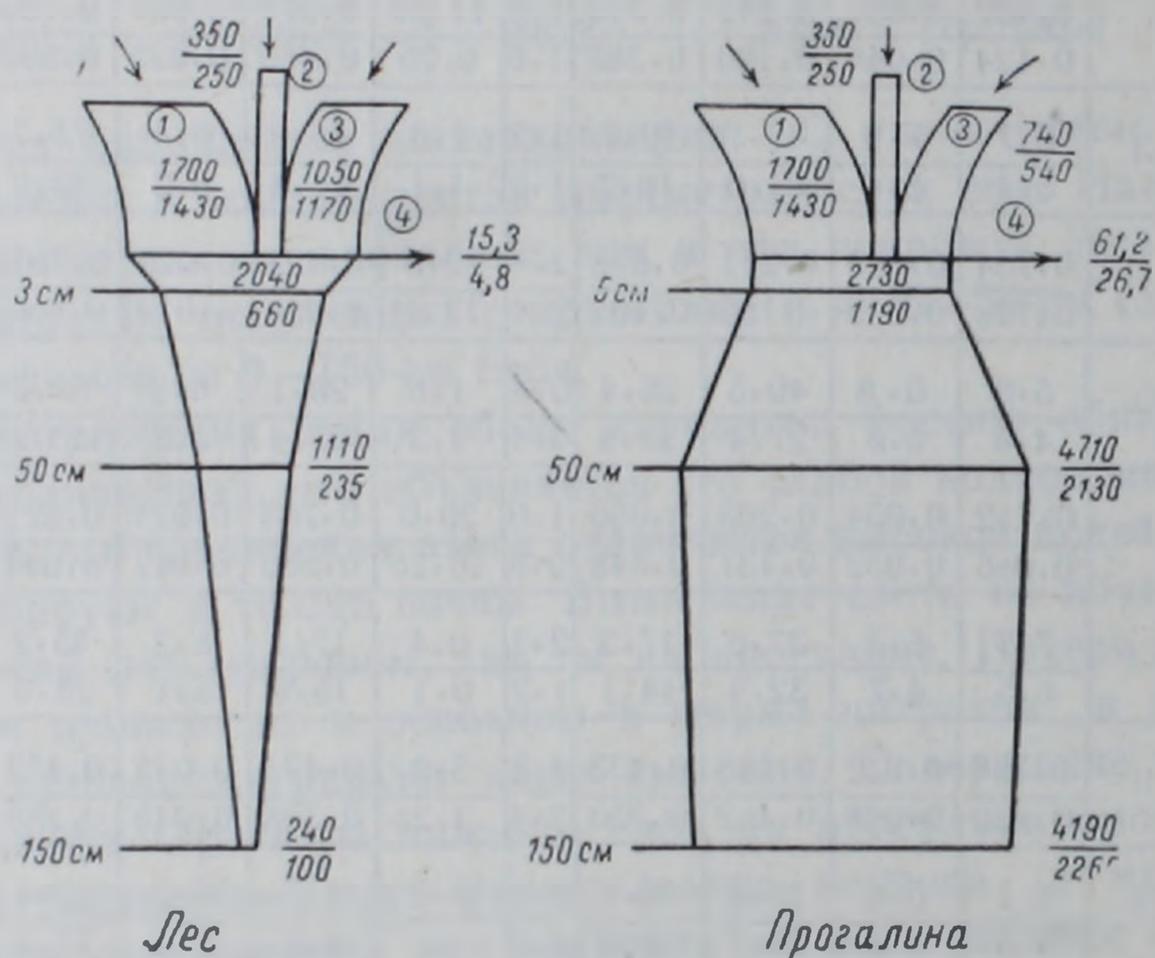
Компонент	K <sup>+</sup>	Na <sup>+</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	NO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Сумма Iп		
ПДК, мг/л	50	120	180	40	0,5	0,08	40	300	100	3,5			
I <sub>0</sub>	0,02	0,008	0,005	0,025	2,0	12,5	0,025	0,003	0,01	0,29			
На прогалине	3 см	Сi	8,1 6,2	7,1 5,8	48,3 39,1	20,5 15,4	0,9 0,6	0,9 0,5	22,9 18,2	12,3 8,4	70,3 59,8	1,9 1,4	
		Иi	0,162 0,124	0,057 0,046	0,242 0,196	0,513 0,385	1,8 1,6	11,25 6,25	0,573 0,455	0,039 0,025	0,703 0,598	0,551 0,406	15,89 10,08
	50 см	Сi	6,7 5,4	7,9 5,4	42,1 31,0	22,7 16,2	1,2 1,2	1,8 1,1	16,9 14,3	8,4 6,2	75,7 63,0	1,0 0,7	
		Иi	0,134 0,105	0,063 0,043	0,211 0,155	0,568 0,405	2,4 2,4	22,5 13,75	0,423 0,358	0,025 0,019	0,757 0,630	0,290 0,203	27,37 18,07
	150 см	Сi	5,6 4,3	6,8 6,5	40,5 27,4	26,4 19,9	0,8 0,4	1,6 1,3	28,1 22,4	6,9 5,8	82,5 68,4	0,6 0,3	
		Иi	0,112 0,086	0,054 0,052	0,203 0,137	0,660 0,448	1,6 0,8	20,0 16,25	0,703 0,560	0,021 0,017	0,825 0,684	0,174 0,087	24,35 19,17
	Под покровом леса	5 см	Сi	7,9 6,5	5,3 4,7	37,6 32,4	17,3 14,1	2,1 1,2	0,4 0,1	17,1 15,9	8,2 5,1	45,2 28,9	1,0 0,7
			Иi	0,158 0,130	0,042 0,038	0,188 0,162	0,433 0,353	4,2 2,4	5,0 1,25	0,423 0,398	0,025 0,015	0,452 0,289	0,290 0,203
		50 см	Сi	6,1 5,0	5,4 4,3	30,4 28,2	19,1 16,8	1,1 0,4	0,2 —	6,7 3,9	4,9 3,4	22,4 16,5	0,7 0,4
			Иi	0,122 0,100	0,043 0,034	0,152 0,141	0,478 0,420	2,2 0,8	2,5 —	0,168 0,098	0,015 0,010	0,224 0,165	0,203 0,116
		150 см	Сi	6,5 4,1	5,9 4,8	34,8 23,0	17,9 11,3	— —	— —	0,1 —	3,9 0,1	52,1 31,3	— —
			Иi	0,130 0,082	0,047 0,038	0,174 0,115	0,448 0,283	— —	— —	0,002 —	0,012 0,0003	0,521 0,313	— —
Атмосфер- ные осадки	Сi	0,7 0,9	1,6 1,9	8,0 12,2	3,1 4,4	0,6 0,9	0,5 0,6	6,1 4,9	8,5 7,4	68 71	0,5 0,6		
	Иi	0,014 0,018	0,013 0,015	0,040 0,061	0,079 0,110	1,2 1,8	6,25 7,50	0,153 0,123	0,025 0,022	0,680 0,712	0,145 0,174	8,599 10,535	

Примечание. Числитель — весна, знаменатель — осень; Сi—концентрация ионов в г/м<sup>3</sup>; Иi—индекс относительной токсичности i-го компонента при ПДК<sub>i</sub> в г/м<sup>3</sup>

ной токсичности i-го компонента при его предельно допустимой концентрации в водоеме рыбохозяйственного значения ПДК<sub>i</sub>, г/м<sup>3</sup>. За единицу токсичной массы (етм) принята загрязненность природной или техногенной среды объемом 1 м<sup>3</sup>, содержащей 1 кг относительной токсичной массы при значении I<sub>0</sub> = 1.

В табл. 2 приведены рассчитанные по данным исследований характеристики инфильтрационных вод. При расчете распределения ОТМ принято: площадь исследуемой территории 1 км<sup>2</sup>; поверхностный сток в лесу—8% от суммы выпавших осадков, а с прогалины—13%; количество выпавших на 1 км<sup>2</sup> атмосферных осадков составляет 198 м<sup>3</sup> весной и 136 м<sup>3</sup> в осенний период.

На рисунке показаны диаграммы распределения ОТМ для исследуемых участков в пересчете на 1 км<sup>2</sup>. Анализ полученных результатов показывает, что основным загрязняющим веществом, присутствующим во всех видах стоков, является ион NO<sub>2</sub><sup>-</sup>, на долю которого приходится 23—84% ОТМ (в среднем 70%). Поверхностный сток с территории леса загрязнен в 4—5 раз меньше, чем с прогалины. Осо-



Диаграммы потоков ОТМ: 1—поступление с атмосферными осадками; 2—сухое осаждение из атмосферы; 3—накопление растительностью (поверхностное осаждение); 4—поверхностный сток. Числитель—весна, знаменатель—осень

бую опасность для загрязнения озера представляют инфильтрационные воды на глубине 0,5 м и более. Загрязненность инфильтрационных вод в лесу на глубине 0,5 м в 4—9 раз меньше, чем на прогалине, а на глубине 1,5 м—в 17—22 раза.

Этим обстоятельством еще раз подтверждается надежная водо-защитная роль леса.

Приведенные результаты позволяют сделать следующее заключение:

1. С изменением минерализации инфильтрационных вод соответственно меняется и их ионный состав.
2. Весенний сезон отмечается наиболее интенсивным вымыванием химических элементов.
3. Вымывание химических элементов более интенсивно происходит из почвогрунтов, покрытых травяным покровом, чем из-под покрова соснового леса, при этом для леса характерен особый миграционный режим химических элементов.

4. Вымывание нитритов и нитратов отмечается только лишь с открытой площадки, лесной покров практически задерживает их вымывание в грунтовые воды.

Институт геологических наук Академии наук Армянской ССР  
Петрозаводский государственный университет

Ռ. Հ. ՌԵՎԱԶՅԱՆ, Օ. Գ. ՎՈՐՈԲՅՈՎ

### Սևանա լճի մերկ հողագրունտներում ֆիմիական տարրերի միգրացիայի մասին

Հիդրմետրիկ հետազոտություններով որոշվել է, որ Սևանա լճի մերկ հողագրունտներից արտալվացվում են զգալի քանակությամբ ֆիմիական տարրեր: Արտալվացված ջրերում հիմնական աղտոտիչներ են հանդիսանում նիտրիտները և մասամբ նիտրատները:

Յուշյ է տրված նաև, որ լիդիմետրիկ ջրերի հանքայնացման և ֆիմիական կազմի փոփոխությունները հիմնականում պայմանավորված են բուսածածկի լնույթով: Անտառածածկը, շնորհիվ կենսաբանական կլանման, կանխում է վերջիններիս արտալվացումը և հետևապես գրունտային ջրերի միջոցով Սևանա լճի աղտոտումը:

### ЛИТЕРАТУРА — ՊՐՈՎՈՆՔՆԵՐՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Т. И. Евдокимова, Т. К. Быковская, Применение лизиметрических методов в почвенно-мелноративных, агрохимических, ландшафтных и биохимических исследованиях, Наука, Л., 1972. <sup>2</sup> Л. О. Карпичевский, Лес и лесные почвы, Лесная промышленность, М., 1981. <sup>3</sup> Р. Г. Ревизян, Э. Г. Бабаян, М. А. Халифян, Биол. журн. Армении, т. 36, № 3 (1983). <sup>4</sup> О. А. Алекин, Химический анализ вод суши, Гидрометеониздат, Л., 1954. <sup>5</sup> А. А. Резников, Е. П. Муликовская, И. Ю. Соколов, Методы анализа природных вод, Госгеолтехиздат, 1963. <sup>6</sup> О. Г. Воробьев, В. М. Кириллов, Методические рекомендации по расчету экономического эффекта от внедрения природоохранных мероприятий..., ЛенНИИГипрохим, 1985.

УДК 612.112+612.111.7:612.23

МЕДИЦИНА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Э. С. Габриелян, Э. А. Амроян,  
М. Р. ГригорянИсследование влияния изменений газового состава крови  
на функциональное состояние лейкоцитов и тромбоцитов

(Представлено 1/X 1986)

Развитие исследований регуляции циркуляторного гомеостаза со всей очевидностью показало, что он в равной мере определяется функциональным состоянием как сосудистой сети, так и элементов крови (1). Соответственно и изучение тех или иных типов воздействия на гемоциркуляцию необходимо вести в плане исследования их сочетанных гематовазальных эффектов. Сказанное относится и к изменениям газового состава крови, который рассматривается в качестве весьма важного звена регуляции регионального кровообращения, особенно мозгового и коронарного. Эффекты гипоксии, гипероксии, гиперкапнии и т. д. на региональный кровоток трактуются в настоящее время как чисто сосудистые воздействия. Тщательному анализу в многочисленных исследованиях подвергнуты сосудорасширяющие воздействия понижения  $pO_2$  (нормокапническая гипоксия) и увеличения  $pCO_2$  (2-5). Однако влияние этих факторов на функциональное состояние элементов крови практически не изучено.

Целью настоящей работы явилось исследование влияния изменений газового состава крови на функциональное состояние тромбоцитов и лейкоцитов, которые способны самыми разнообразными путями влиять на циркуляторный гомеостаз.

Исследование выполнено на 20 кошках массой 2,5—4 кг. Изменения газового состава крови достигались варнациями ингаляционной смеси в условиях ИВЛ и контролировались на микроанализаторе «Radiometer» (Дания). Гиперкапнию вызывали добавлением 5%  $CO_2$  к вдыхаемому воздуху, гипоксию—вдыханием смеси 5% кислорода с азотом (6). Кровь забирали из бедренной артерии на высоте стабилизированных сдвигов  $pO_2$  и  $pCO_2$  при длительности изменений газового состава не менее 10 мин. Уровень изменений этих показателей составлял соответственно от 83,4 до 29,6 мм рт. ст. и от 26,5 до 70,3 мм рт. ст. Агрегацию тромбоцитов и их секрецию контролировали в БТП на агрегометре «Payton» (США) и в цельной крови на агрегометре «Chrono-Log» (США). В качестве индукторов агрегации использовали АДФ и коллаген (Dade).

Полиморфноядерные лейкоциты ПМЯЛ выделяли методом осаждения эритроцитов декстраном с последующим их лизисом (7). Уро-

вень генерации супероксидных радикалов (СОР) оценивали по восстановлению феррицитохрома при длине волны  $\lambda = 550$  нм<sup>(8)</sup>. В качестве стимулятора лейкоцитов использовали  $\gamma$ -гексахлорциклогексан, который посредством индукции синтеза лейкотриена В<sub>4</sub> приводит к образованию СОР<sup>(9)</sup>.

Способность ПМЯЛ влиять на развитие ангиоспазма исследовали на перфузируемом сегменте сонной артерии кошки, диаметр которой контролировали с помощью блока для оптического измерения диаметра, модель 275 К (ФРГ)<sup>(10)</sup>. Проагрегантную активность ПМЯЛ оценивали по способности фильтрата активированных ПМЯЛ увеличивать агрегацию тромбоцитов, индуцируемую АДФ ( $10^6$ -М). Чтобы избежать артефактов, связанных с изменениями оптической плотности, данное исследование проводили не оптическим, а электродинамическим методом на универсальном агрегометре «Chrono-Log». В обоих последних случаях активация ПМЯЛ достигалась воздействием форбил-метионил-лейцил-фенилаланина (ФМЛФ) ( $10^7$ -М), который отличается от  $\gamma$ -гексахлорциклогексана меньшей выраженностью своих сосудисто-тромбоцитарных эффектов.

Данные обработаны статистически с применением критерия Стьюдента—Фишера и непараметрического критерия Вилкоксона—Манна—Утти.

Результаты исследования показали, что при острой гипоксии и при гиперкапнии наблюдается тенденция к уменьшению агрегации тромбоцитов, более отчетливая в последнем случае. Этот эффект выражен как в цельной крови, так и в БТП и не зависит от применяемого агреганта (таблица). Ранее проведенный анализ показал, что антиагрегантное действие рСО<sub>2</sub> связано с прямым влиянием на тромбоциты и, следовательно, может наблюдаться в условиях *in vitro*<sup>(11)</sup>. Этот вопрос не вполне ясен в случае гипоксии. Согласно некоторым данным в условиях *in vitro* гипоксия вызывает усиление агрегации тромбоцитов<sup>(12)</sup> и провоцирует развитие тромбоэмболических расстройств<sup>(13)</sup>, связанных как с изменением тромбоцитарных функций, так и с увеличением свертываемости крови, уменьшением ее фибринолитической активности и т. д.<sup>(14)</sup>. Поэтому можно предположить, что в отличие от понижения агрегируемости тромбоцитов при гиперкапнии, в случае гипоксии оно носит вторичный характер и является проявлением секвестрации активных тромбоцитов при внутрисосудистом агрегатообразовании и микроэмболическом синдроме. Известно, что в этих случаях оцениваемая обычным методом агрегация тромбоцитов понижается<sup>(15,16)</sup>.

В еще большей степени различия в воздействии гиперкапнии и гипоксии прослеживаются в случае исследования их влияния на функциональное состояние ПМЯЛ. Для его оценки был избран интегральный параметр их функциональной активности—способность генерировать СОР. Их образование отражает характерный для активированных ПМЯЛ «метаболический взрыв», а кроме того с образованием СОР связано воздействие ПМЯЛ на сосудистый тонус, гемостаз и т. д.<sup>(1)</sup>. Исследования показали, что при гипоксии способность ПМЯЛ генерировать СОР достоверно увеличивается (таблица). В случае же

Влияние гипоксии и гиперкапнии на функциональное состояние тромбоцитов и ПМЯЛ

	Агрегируемость тромбоцитов				Генерация СОР ПМЯЛ, отн. ед.
	БТП, %		Цельная кровь, ом		
	АДФ, 10 <sup>-4</sup> М	Коллаген, 2мкг/мл	АДФ, 10 <sup>-4</sup> М	Коллаген 2 мкг/мл	
Контроль	61,2 51,1÷68	66,3 55,1÷77,5	17,4 14,8÷20	31,2 25÷37,4	0,75 0,1÷0,3
Гипоксия	50,0* 44,5÷55,6	33,3* 32,1÷44,5	17,3 14,3÷20	22,2* 17,6÷26,8	1,52* 1,2÷1,8
Контроль	72,5 57,9÷87,1	78,4 61÷95,8	23,3 14,5÷32,1	30,4 23,2÷37,6	2,0 1,1÷3,0
Гиперкапния	47,5* 36,2÷58,7	25,3** 14,3÷40,3	2,8** 0,0÷5,6	29,8 22÷37,6	2,9 1,6÷3,2

\*  $P < 0,05$ .

\*\* —  $P < 0,01$ .

гиперкапнии это увеличение носит характер тенденции и не является достоверным.

Прямое изучение сосудисто-тромбоцитарных эффектов активированных ПМЯЛ также позволило выявить их изменения при гипоксии, но не гиперкапнии. При гипоксии способность лейкоцитов вызывать сокращение сосудистого сегмента увеличивается на 23,6% (15,2÷32,0,  $P < 0,05$ ), а их проагрегантный эффект на 47,8% (20,0÷75,5,  $P < 0,01$ ). При гиперкапнии же вазотропная активность ПМЯЛ возрастает мало (на 2,9%), а в 40% наблюдений она даже несколько уменьшилась.

Таким образом, изменение газового состояния крови сложным образом влияет на функциональное состояние тромбоцитов и ПМЯЛ. Можно допустить, что для острой гипоксии характерен его сдвиг, достаточно опасный для развития циркуляторных расстройств, связанных с гематогенными факторами. При этом изменение способности ПМЯЛ к активации может стать важным фактором, провоцирующим при гипоксии внутрисосудистое агрегатообразование тромбогенеза за счет активации тромбоцитов. С другой стороны, воздействие гипоксии на вазотропную активность ПМЯЛ раскрывает новую сторону ее участия в формировании разнообразных вазомоторных реакций. Известно, что при гипоксии, за счет непосредственного влияния недостатка кислорода на гладкую мускулатуру сосудов, развивается региональная вазодилатация с функциональной гиперемией (1,4). Это явление рассматривается в качестве важного фактора компенсации гипоксии соответствующим увеличением кровотока. Однако полученные данные показывают, что гипоксия, наряду с вазодилатацией, может привести и к другим видам вазомоторных реакций, действуя в частности через активацию ПМЯЛ. Не исключено, что в тех областях кровеносного русла, где произойдет активация и выброс вазоконстрикторов из ПМЯЛ, конечное изменение сосудистого тонуса будет результирующей прямого сосудорасширяющего действия гипоксии и опосредованного ПМЯЛ ее вазоконстрикторного эффекта. И если способность сосудов к вазодилатации ослаблена, например при атероскле-

розе, нарушениях иннервации и т. д., при острой гипоксии может наблюдаться развитие ангиоспазма. Это обстоятельство может иметь определенное значение в патогенезе развития дисциркуляции при гипоксии, особенно у людей с начальными формами ишемической болезни сердца и мозга, у которых достаточно выражена способность сосудов к ангиоспазму.

Интересно отметить, что активация ПМЯЛ выбранными стимуляторами во многом опосредуется лейкотриеном  $B_4$  (9). Следовательно, изменения их функционального состояния при гипоксии могут в какой-то мере объясняться сдвигами в липоксигеназном пути метаболизма арахидоновой кислоты.

В этом смысле изменения  $pCO_2$  не несут в себе подобной угрозы. Наоборот, мало влияя на ПМЯЛ, гиперкапния подавляет агрегируемость кровяных пластинок, препятствуя тем самым развитию нарушений агрегатного состояния крови. С другой стороны, сосудорасширяющий эффект  $pCO_2$  является фактором, препятствующим развитию дисциркуляции, вызванной в частности дисфункцией ПМЯЛ. Следовательно, гипоксия и гиперкапния по характеру своего воздействия на клетки крови выступают как антагонисты, а поскольку в патологии они часто сопутствуют друг другу, можно допустить, что изменения  $pCO_2$  в какой-то мере компенсируют неблагоприятное влияние гипоксии на клеточные факторы циркуляторного гомеостаза.

Подводя итоги, можно заключить, что влияние газового состава крови на региональное кровообращение не может связываться только с влиянием на сосудистый тонус. Анализ его воздействий раскрывает новые пути влияния газового состава крови на циркуляторный гомеостаз.

Ереванский государственный медицинский институт

Է. Ս. ԳՈՒՐԲԵԼՅԱՆ, Է. Ա. ԱՄՐՈՅԱՆ, Մ. Ռ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Արյան գազային բաղադրամասերի ներգործության ուսումնասիրությունը բրոմբոցիտների և լեյկոցիտների ֆունկցիոնալ վիճակի վրա

Ցավազրկման պայմաններում կատոնների վրա կատարված փորձերի պայմաններում բացահայտված է թրոմբոցիտների ագրեգացիայի (կպման) նվազում սուր հիպոքսիայի և հիպերկապնիայի ժամանակ:

Թթվածնային քաղցի պայմաններում բարձրանում է լեյկոցիտների ազատ ռադիկալներ արտադրելու և անոթասեղմիչ ազդեցություն հասունացնելու ունակությունը, ինչը չի կարելի հավաստիություն հաստատել հիպերկապնիայի դեպքում:

Այդպիսով արյան գազային բաղադրամասերի փոփոխությունները դրսև-վորվում են բարդ և բազմերանգ ներգործություն թրոմբոցիտների և լեյկոցիտների ֆունկցիոնալ վիճակի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՇԱԿՆԵՐՈՒՄ

- <sup>1</sup> Э. С. Габриелян, С. Э. Акопов, Клетки крови и кровообращение Айастан, Ереван, 1985. <sup>2</sup> А. Л. Азин, Патол. физиол., т. 14, № 2, с. 56—58 (1983). <sup>3</sup> J. De. Meu, P. N. Vanhoutt, *Circulat. Res.*, v. 51 (1982). <sup>4</sup> С. А. Берштейн, М. И. Гуревич, А. И. Соловьев, Физиол. журн., № 4 с. 473—487 (1985). <sup>5</sup> Э. А. Амроян, Кровообращение, № 2, с. 49—51 (1977). <sup>6</sup> Э. С. Габриелян, Э. А. Амроян, Вазоактивные простагландины в гомеостазе мозгового кровообращения, Айастан, Ереван, 1983. <sup>7</sup> T. G. Gabig, S. I. Berman, B. M. Babior, *Blood*, v. 53, № 6, p. 1133—1139 (1979). <sup>8</sup> P. E. Newburger, M. E. Chovaniec, H. J. Cohen, *Blood*, v. 55, № 1 p. 85 (1980). <sup>9</sup> C. J. Meade J. Harvey, J. R. Boot e. a., *Biochem. Pharmacol.*, v. 32 p. 289 (1984). <sup>10</sup> A. Schabert, R. D. Bauer, R. Busse, *Pflügers Archiv*, v. 385, p. 239—242 (1980). <sup>11</sup> Э. С. Габриелян, Э. А. Амроян, Бюл. экспер. биол. и мед., № 4, с. 391—393 (1984). <sup>12</sup> M. Doni, *Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.*, v. 54, p. 1652—1658 (1978). <sup>13</sup> E. Genton, *Aspen. Atv. Carticl.*, v. 5, p. 468—492 (1970). <sup>14</sup> В. В. Баканская Физиол. журн., № 2, с. 219—221 (1986). <sup>15</sup> J. Knutsen, J. Gormsen, A. Skagen, *Tromb. and Haemost.*, v. 42 p. 1513—1522 (1980). <sup>16</sup> Э. С. Габриелян, С. Э. Акопов, Ю. С. Тунян и др. Клин. мед., № 3, с. 68—71 (1985).

