

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXXXIV, №1

1987

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆառաուդար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՆԻՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Շ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Դ. Մ. ՍԵՐԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԹԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, чл.-корр. АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Հ. Ջ. Անդրեասյան—Վերջավոր էլեմենտների մեթոդի գերզուգամիտությունը բարձր կարգի միաչափ խնդիրների համար 3
- Վ. Ա. Շտրաուս—Հատադորֆի մոմենտների պրոբլեմի դեֆինիդացվող անալոգի մասին 9
- Ա. Հ. Հովհաննիսյան—Սկզբնական խնդրի պարամետրիքսի կառուցումը մի դասի անսահմանափակ գործակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար 13
- Գ. Ա. Կաբազովյան—Ընդհանուր օրթոնորմավորված համակարգերից լակունար խտության համարներով ենթահամակարգերի ընտրության մասին 17
- Գ. Գ. Գեորգյան—Կամայական վերջավոր ինտերվալի վրա $L_p, p > 0$, մետրիկայով գուգամիտող Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության վերաբերյալ 21

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Գ. Ն. Բաղդասարյան—Իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական և պարամետրական տատանումները ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ 26

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱ

- Ռ. Հ. Խաբաթյան—Սպին-ցանցային պոլյարիտոններն անտիֆեռոմագնետիկներում 31

ՖԻԶԻԿԱ

- Վ. Ն. Աղամյան—Ղեկավարվող պարամետրերով բաղմակումպոնենտ համաձուլվածքների բաղադրությունների հաշվման մեթոդ 35
- Տ. Ի. Բուտաևա, Ա. Վ. Գեորգյան, Ա. Ս. Կուզանյան, Ա. Գ. Պետրոսյան—Ֆազաների բաժանման մակերևույթի ձևը հալույթից ալյումինային նոնաքարերի բյուրեղացման դեպքում 38

ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

- Է. Ս. Գաբրիելյան, Հ. Օ. Գյոնջյան, Ս. Է. Ակոպով, Լ. Ն. Սիմոնյան, Ս. Ա. Բաջինյան—Թրոմբոցիտների ագրեգացիայի վրա լիպոսոմների ազդեցության ուսումնասիրությունը 41

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

- Դ. Ն. Գրիգորյան, Ս. Մ. Ստոյբեզ—Ռամոտիկ ճնշման ազդեցությունն առնետների վարքի վրա 44

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИКА

- Г. Д. Андреасян—Суперсходимость метода конечных элементов для одномерных краевых задач высокого порядка 3
- В. А. Штраус—О дефинизируемом аналоге проблемы моментов Хаусдорфа 9
- А. О. Оганесян—Построение параметрикса начальной задачи для одного класса гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами 13
- Г. А. Карагулян—О выделении подсистем сходимости с лакунарной плотностью номеров из произвольных ортонормированных систем 17
- Г. Г. Геворкян—О единственности интегралов Фурье, сходящихся в метриках L_p , $p > 0$, на каждом конечном интервале 21

МЕХАНИКА

- Г. Е. Багдасарян—Вынужденные и параметрические колебания идеально проводящей пластинки, обусловленные нестационарным магнитным полем 26

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

- Р. Г. Тарханян—Спин-решеточные поляритоны в антиферромагнетиках 31

ФИЗИКА

- В. Е. Адамян—Метод расчета составов многокомпонентных сплавов с контролируемыми параметрами 35
- Т. Н. Бутяева, А. В. Геворкян, А. С. Кузьян, А. Г. Петросян—Форма поверхности раздела фаз при кристаллизации алюминиевых гранатов из расплава 38

БИОФИЗИКА

- Э. С. Габриелян, А. О. Генджян, С. Э. Акопов, Л. Х. Симонян, С. А. Баджинян—Исследование влияния липосом на агрегацию тромбоцитов 41

ФИЗИОЛОГИЯ

- Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг—Действие осмотического стресса, вызванного маннитом, на обучение и память крыс 44

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>H. J. Andreasian</i> —Superconvergence of the finite element method for one-dimensional boundary value problems of high order.	3
<i>W. A. Shtraus</i> —On the definitive analogue of Hausdorff moment problem .	9
<i>A. H. Hovhanisian</i> —Parametrices for initial value problem for hyperbolic equations with unbounded coefficients	13
<i>G. A. Karagullian</i> —On the selection of subsystem of convergence with lacunary density of members from arbitrary orthonormal system.	17
<i>G. G. Gevorkian</i> —On the uniqueness of Fourier integrals, which are convergent in L_p , $p > 0$, on each finite interval	21

MECHANICS

<i>G. E. Bagdasarian</i> —Forced and parametric vibrations of perfectly conducting plate under the action of non-stationary magnetic field.	26
---	----

ELECTRODYNAMICS

<i>R. G. Tarkhanian</i> —Spin-lattice polaritons in antiferromagnetics	31
--	----

PHYSICS

<i>V. E. Adamian</i> —Calculation method for compositions of multicomponent alloys with controlled parameters.	35
<i>T. I. Butaeva, A. V. Gevorkian, A. S. Kuzanian, A. G. Petrosian</i> —The interface shape of aluminum garnets grown from the melt	38

BIOPHYSICS

<i>E. S. Gabriellian, A. O. Gendjian, S. E. Akopov, L. Ch. Simonian, S. A. Badynian</i> —Studies on liposomes effects on the platelet aggregations. . . .	41
---	----

PHYSIOLOGY

<i>G. E. Grigorian, A. M. Stolberg</i> —Osmotic stress effects induced by mannitol on learning and memory of rats	44
---	----

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 19. 11. 1986 г. Подписано к печати 10. 03 1987 ВФ 02715

Бумага № 2, 70 × 108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4.2.

Учетно-изд. л. 3, 29. Тираж 460. Заказ 842. Издат. 6968

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 519.632

МАТЕМАТИКА

Г. Д. Андреасян

Суперсходимость метода конечных элементов для
 одномерных краевых задач высокого порядка

(Представлено академиком А. А. Самарским 14/V 1985)

Известно ⁽¹⁾, что для конечноэлементных решений U одномерных эллиптических задач $2m$ -го порядка имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\|u - U\|_{H^r(I)} \leq ch^{k+1-r} \|u\|_{H^{k+1}(I)}, \quad m \geq r \geq 2m - (k+1), \quad (1)$$

где u — точное решение, k — порядок конечных элементов, $I = [0, 1]$, и эти оценки неулучшаемые. Однако в работе ⁽²⁾ установлена суперсходимость производных приближенного решения порядка $r = 0, \dots, m-1$ в точках, являющихся концами конечных элементов $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, со скоростью $O(h^{2(k+1-m)})$, а в ⁽³⁾ на I_i найдены $k-2m+1$ точек, в которых конечноэлементное решение сходится с порядком $k+2$, и $k-2m+2$ других точек, в которых с порядком $k+1$ сходится производная приближенного решения.

В настоящей работе показано, что на конечном элементе I_i существуют $k-2m+r+1$ внутренних точек, где производная порядка $r = 0, \dots, m$ приближенного решения сходится с порядком $k+2-r$, т. е. на один порядок выше, чем глобальный порядок сходимости (1). Указанные точки есть нули полинома Якоби $P_{k-2m+r+1}^{m-r, m-r}$ на I_i . При $r = m$ и $k = m-1$ эти точки совпадают с точками Гаусса и Лобатто соответственно. Более того, порядок сходимости $k+2-r$ сохраняется и для производных более высокого порядка $r = m, \dots, k$ в $k+1-r$ точках на каждом I_i . Эти точки — нули полинома $P_{k-r+1}^{r-m, r-m}$ на I_i . Тем самым, для производных порядка $m-r$ и $m+r$, при $r = 0, \dots, m$, точки суперсходимости совпадают.

1. *Обозначения и определения.* Пусть $I = [0, 1]$. Обозначим через $W_p^m(I)$, $1 \leq p \leq \infty$ пространства Соболева. При $p = 2$ будем писать $H^m(I)$ вместо $W_2^m(I)$, а при $m = 0 - L_p(I)$ вместо $W_p^0(I)$. Норму в $W_p^m(I)$ обозначим через $\|\cdot\|_{W_p^m}$, а полунорму — через $|\cdot|_{W_p^m}$. Пусть

$$H_0^m(I) = \{v \in H^m(I) / v^{(l)}(0) = v^{(l)}(1) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}\},$$

где $v^{(l)} = \frac{d^l v}{dx^l}$, а $l = \overline{0, m-1}$ означает, что l принимает целочисленные значения от 0 до $m-1$. Разобьем отрезок I на конечные элементы $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, а множество их концов обозначим через $\delta = \{0 =$

$=x_0, x_1, \dots, x_N=1\}$. Пусть $h_i=x_i-x_{i-1}>0$ и $h=\max_{1\leq i\leq N} h_i$. Для $k\geq 2m-1$ определим пространство

$$M_0^{k,m}(\mathcal{I}) = \{v \in H_0^m(I) / v \in P_k(I_i), \quad i = \overline{1, N}\},$$

где $P_k(I_i)$ — сужение на I_i пространства многочленов степени не выше k . Скалярное произведение в $L_2(I)$ обозначим через $(\cdot, \cdot)$, а в $L_2(I_i)$ — через $(\cdot, \cdot)_i$. Норму и полунорму в $W_p^m(I_i)$ обозначим через $\|\cdot\|_{W_p^m(I_i)}$ и $|\cdot|_{W_p^m(I_i)}$. Введем также следующие нормы:

$$\|\cdot\|_{W_p^m} = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^N \|\cdot\|_{W_p^m(I_i)}^p \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq N} \|\cdot\|_{W_p^m(I_i)}, & p = \infty \end{cases} \quad \|\cdot\|_{W_p^{-m}} = \sup_{0 \neq \psi \in W_q^m(I_i)} \frac{|(\cdot, \psi)|}{\|\psi\|_{W_q^m(I_i)}},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пусть $P_n^{\alpha, \alpha} \equiv P_n^{\alpha}(t)$ полином Якоби, т. е.

$$P_n^{\alpha}(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha} [t^{n+\alpha}(1-t)^{n+\alpha}]^{(n)}, \quad t \in I, \quad n \geq 0, \quad \alpha > -1.$$

Обозначим через $n_r = k+1-|r-m| - m$, $r = \overline{0, k}$. Пусть $t_j^{(r)}$, $j = \overline{1, n_r}$ — нули полинома $P_{n_r}^{|m-r|}(t)$. Известно ⁽⁴⁾, что $t_j^{(r)} \in (0, 1)$. На конечном элементе I_i , $i = \overline{1, N}$ определим точки Якоби следующим образом*:

$$x_{ij}^{(r)} = x_{i-1} + h_i t_j^{(r)}, \quad j = \overline{1, n_r}. \quad (2)$$

Так как в силу ⁽⁴⁾ $dP_n^{\alpha}(t)/dt = cP_{n-1}^{\alpha+1}(t)$, то при $r \leq m$ имеет место $x_{ij}^{(r)} < x_{ij}^{(r-1)} < x_{ij+1}^{(r)}$.

2. *Проекции на конечномерные пространства и их свойства.* Для $g \in H^m(I)$ определим проекцию $Pg \in P_k(I)$ так, что $(g - Pg) \in H_0^m(I)$ и для любого $v \in P_k(I) \cap H_0^m(I)$

$$((g - Pg)^{(r)}, v^{(r)}) = 0. \quad (3)$$

Лемма 1. Для любого $g \in P_{k+1}$ имеет место соотношение

$$(g - Pg)^{(r)}(t_j^{(r)}) = 0,$$

где $t_j^{(r)}$, $j = \overline{1, n_r}$ — нули полинома $P_{n_r}^{|m-r|}(t)$, $r = \overline{0, k}$.

Доказательство. Так как $(g - Pg) \in P_{k+1}(I) \cap H_0^m(I)$, то $(g - Pg)^{(r)}(t) = t^{m-r}(1-t)^{m-r}z(t)$, где $r = \overline{0, m}$, а $z(t)$ — многочлен степени не выше n_r . Интегрируя (3) по частям $m-r$ раз, $r = \overline{0, m}$, получим

$$((g - Pg)^{(r)}, v^{(2m-r)}) = 0,$$

т. е. $z(t) \in P_{n_r}(I)$ ортогонален с весом $t^{m-r}(1-t)^{m-r}$ любому многочлену $v^{(2m-r)} \in P_{n_r-1}(I)$. Но тогда, в силу ⁽⁴⁾, $z(t)$ пропорционален полиному Якоби $P_{n_r}^{m-r}(t)$, т. е. при $r = \overline{0, m}$ $(g - Pg)^{(r)}(t) \equiv ct^{m-r}(1-t)^{m-r}$.

* При $r=0$ точки Якоби существуют лишь при $k \geq 2m$.

$-t)^{m-r} P_{n_r}^{m-r}(t)$ и при $r = \overline{m, k}$ $(g - P_h g)^{(r)} = (P_{n_m}^0)^{(r-m)} \equiv P_{n_r}^{r-m}$, что и доказывает лемму.

Определение 1. Назовем $P_h g \in M_0^{k,m}(\delta)$ H_0^m -проекцией функции $g \in H_0^m(I)$, если для любого $v \in M_0^{k,m}(\delta)$

$$((g - P_h g)^{(m)}, v^{(m)}) = 0. \quad (4)$$

Лемма 2. Пусть $g \in W_\infty^{k+1}(I) \cap H_0^m(I)$, тогда имеют место оценки:

$$\|g - P_h g\|_{W_\infty^l} \leq ch^{k+1-l} \|g\|_{W_\infty^{k+1}}, \quad m \geq l \geq 2m - (k+1). \quad (5)$$

Доказательство. Так как $(P_h g)^{(m)} \in M_0^{k-m,0}(\delta)$ есть L_2 -проекция функции $g^{(m)} \in L_2(I)$, то из (5) (лемма 4.2) получим

$$\|g^{(m)} - (P_h g)^{(m)}\|_{L_2} \leq ch^{k+1-m} \|g\|_{W_\infty^{k+1}}.$$

Отсюда, используя прием Нитше и рассуждая аналогично (5) (лемма 4.3), получим (5) для остальных $l = \overline{2m - (k+1), m-1}$.

Лемма 3. Для любых $i = \overline{1, N-1}$ и $l = \overline{0, m-1}$ имеет место равенство

$$(g - P_h g)^{(l)}(x_i) = 0.$$

Доказательство. Представляя решение задачи

$$u^{(2m)}(x) = f(x), \quad x \in I, \quad u^{(l)}(0) = u^{(l)}(1) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}$$

при помощи функции Грина (6) и выполняя интегрирование по частям, находим, что

$$u(x) = \int_0^1 u^{(2m)}(t) G(x, t) dt = (-1)^m \int_0^1 u^{(m)}(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} G(x, t) dt.$$

Полагая здесь $u = g - P_h g$ и дифференцируя полученное соотношение $l = \overline{0, m-1}$ раз по x , с учетом (4) и того, что $\frac{\partial^{l+m}}{\partial x^l \partial t^m} G(x, \cdot) \Big|_{x=x_i} \in M_0^{k,m}(\delta)$, получим

$$(g - P_h g)^{(l)}(x_i) = (-1)^m \int_0^1 (g - P_h g)^{(m)}(t) \frac{\partial^{m+l}}{\partial x^l \partial t^m} G(x_i, t) dt = 0.$$

Лемма 4. Пусть $r = \overline{\max\{0, 2m-k\}, k}$ и $x_{i,j}^{(r)}$, $j = \overline{1, n_r}$, $i = \overline{1, N}$ точки Якоби (2). Тогда для любой функции $g \in W_\infty^{k+2}(I_i)$ имеет место оценка

$$|(g - P_h g)^{(r)}(x_{i,j}^{(r)})| \leq ch_i^{k+2-r} |g|_{W_\infty^{k+2}(I)}. \quad (6)$$

Доказательство. Неравенство (6) докажем с использованием леммы Брэмбла—Гильберта (7). Производя в (6) замену переменного $x = x_{i-1} + h_i t$, $t \in I$, будем иметь

$$|(\hat{g} - P_h g)^{(r)}(t_j^{(r)})| \leq c |\hat{g}|_{W_\infty^{k+2}}, \quad (7)$$

где $\hat{v}(t) \equiv v(x_{i-1} + h_i t)$. Предположим, что $\hat{P}_h g = \hat{P} g$. Вводя в рассмот-

рение функционал $F(\hat{g}) = (\hat{g} - P\hat{g})^{(r)}(t_j^{(r)})$, заключаем, что он ограничен в $W_\infty^{k+2}(I)$, т. е. $|F(\hat{g})| \leq c \|\hat{g}\|_{W_\infty^{k+2}}$ и в силу леммы 1 обращается в нуль на многочленах из $P_{k+1}(I)$. Тем самым, к нему применима лемма Брэмбла—Гильберта, т. е. $|F(\hat{g})| \leq c |\hat{g}|_{W_\infty^{k+2}}$ и неравенство (7) доказано. Докажем справедливость предположения $P_h \hat{g} = \hat{P}g$. Из (4) следует, что для любого $v \in P_k(I_l) \cap H_0^m(I_l)$, продолженного нулем на I ,

$$((g - P_h g)^{(m)}, v^{(m)})_I = 0, \quad (8)$$

причем в силу леммы 3 $(g - P_h g) \in H_0^m(I_l)$. Заменяя переменную $x = x_{i-1} + h_i t$ в (8), получим $((\hat{g} - \hat{P}_h g)^{(m)}, v^{(m)}) = 0$, $(\hat{g} - \hat{P}_h g) \in H_0^m(I)$, т. е. $P_h \hat{g} = \hat{P}g$. Лемма доказана.

3. *Постановка задачи и оценка суперсходимости.* Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv \sum_{l=0}^m (-1)^l (a_l(x) u^{(l)}(x))^{(l)} = f(x), \quad x \in I, \quad u^{(l)}(0) = u^{(l)}(1) = 0, \quad l = 0, m-1. \quad (9)$$

Пусть $B(u, v) = \sum_{l=0}^m (a_l(x) u^{(l)}(x), v^{(l)}(x))$ такая, что для любого $v \in H_0^m(I)$ $B(v, v) \geq c \|v\|_{H^m}^2$. Приближенным решением задачи (9) назовем такую функцию $U \in M_0^{k,m}(\delta)$, которая при любой $v \in M_0^{k,m}(\delta)$ удовлетворяет тождеству

$$B(U, v) = (f, v). \quad (10)$$

Лемма 5. Пусть $k \geq 2m$, $r = \overline{0, k}$, и u и U — решения задач (9) и (10) соответственно. Если $u \in W_\infty^{k+1}(I)$ то для достаточно малых h имеет место оценка

$$\|(U - P_h u)^{(r)}\|_{L_\infty} \leq ch^{k+2-r} \|u\|_{W_\infty^{k+1}}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $r = 0$. Обозначим через φ решение задачи (9) с правой частью $\varphi \in L_1(I)$. Будем предполагать, что имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{W_1^{2m}} \leq c \|\psi\|_{L_1}. \quad (12)$$

Пусть $\eta = U - P_h u$, $\zeta = u - P_h u$, $\tilde{\varphi} = P_h \varphi$. Легко проверить, что

$$(\eta, \psi) = (\eta, L\varphi) = B(\eta, \varphi - \tilde{\varphi}) + B(\zeta, \tilde{\varphi}). \quad (13)$$

Слагаемые в правой части (13) оценим по отдельности. Докажем сначала, что

$$|B(\eta, \varphi - \tilde{\varphi})| \leq ch \|\eta\|_{L_\infty} \|\varphi\|_{W_1^{2m}}. \quad (14)$$

Так как $a_m \eta^{(m)} = (a_m \eta)^{(m)} - \sum_{l=0}^{m-1} C_m^l a_m^{(m-l)} \eta^{(l)}$, то будем иметь

$$\begin{aligned} B(\eta, \varphi - \tilde{\varphi}) &= ((a_m \eta)^{(m)}, (\varphi - \tilde{\varphi})^{(m)}) - \sum_{l=0}^{m-1} C_m^l (a_m^{(m-l)} \eta^{(l)}, (\varphi - \tilde{\varphi})^{(m)}) + \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1} (a_l \eta^{(l)}, (\varphi - \tilde{\varphi})^{(l)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $v \in M_0^{k,m}(\delta)$ удовлетворяет условиям $v^{(l)}(x_l) = (a_m \eta)^{(l)}(x_l)$, $l = \overline{1, N-1}$, $l = \overline{0, m-1}$. Тогда, интегрируя по частям на каждом отрезке I_l , получим

$$\begin{aligned} ((a_m \eta)^{(m)}, (\varphi - \tilde{\varphi})^{(m)}) &= ((a_m \eta)^{(m)} - v^{(m)}, (\varphi - \tilde{\varphi})^{(m)}) = \sum_{l=1}^N (-1)^m (a_m \eta - v, (\varphi - \\ &- \tilde{\varphi})^{(2m)})_l \leq c \max_{1 \leq l \leq N} \|a_m \eta - v\|_{L_\infty(I_l)} \sum_{l=1}^N \|(\varphi - \tilde{\varphi})^{(2m)}\|_{L_1(I_l)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассуждая аналогично (5), будем иметь

$$\inf_v \|a_m \eta - v\|_{L_\infty(I_l)} \leq c h_l^{k+1} \|(a_m \eta)^{(k+1)}\|_{L_\infty(I_l)} \leq c h_l^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \|a_m^{(j)}\|_{L_\infty(I_l)} \|\eta^{(k+1-j)}\|_{L_\infty(I_l)}.$$

Имея в виду обратные неравенства (7) $\|\eta^{(k+1-j)}\|_{L_\infty(I_l)} \leq c h_l^{-(k+1-j)} \|\eta\|_{L_\infty(I_l)}$, получим

$$\inf_v \|a_m \eta - v\|_{L_\infty(I_l)} \leq c h_l^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \|a_m^{(j)}\|_{L_\infty(I_l)} \|\eta\|_{L_\infty(I_l)} h_l^{-(k+1-j)} \leq c h_l \|\eta\|_{L_\infty(I_l)}. \quad (17)$$

Таким образом, из (15)–(17) будем иметь

$$\begin{aligned} |B(\eta, \varphi - \tilde{\varphi})| &\leq c \max_{1 \leq l \leq N} \|a_m \eta - v\|_{L_\infty(I_l)} \sum_{l=1}^N \|(\varphi - \tilde{\varphi})^{(2m)}\|_{L_1(I_l)} + \|\eta\|_{L_\infty} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m-1}} \leq \\ &\leq c h \|\eta\|_{L_\infty} \|\varphi\|_{W_1^{2m}}. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что

$$|B(\zeta, \tilde{\varphi})| \leq c h^{k+2} \|\zeta\|_{W_\infty^{k+1}} \|\tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m}}. \quad (18)$$

Пусть $\chi \in M_0^{k,m}(\delta)$. Как и в (15), интегрируя по частям на I_l , получим

$$\begin{aligned} B(\zeta, \tilde{\varphi}) &= \sum_{l=1}^N \left\{ (-1)^m (\zeta, (a_m \tilde{\varphi} - \chi)^{(2m)})_l - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^m C_m^l (\zeta, (a_m^{(m-l)} \tilde{\varphi}^{(l)})^{(m)})_l + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l (\zeta, a_l \tilde{\varphi}^{(l)})_l \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично (17) при $k \geq 2m$ получим $\inf_\chi \|(a_m \tilde{\varphi} - \chi)^{(2m)}\|_{L_1(I_l)} \leq c h_l \|\tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m}}$.

Отсюда и из (19) будем иметь

$$B(\zeta, \tilde{\varphi}) \leq c (h \|\zeta\|_{L_\infty} + \|\zeta\|_{W_\infty^{-1}}) \|\tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m}}. \quad (20)$$

Так как $k \geq 2m$, то из (20), используя лемму 2, получим (18).

Итак, из (13), (14), (18) следует, что

$$|(\eta, \psi)| \leq c \{ h \|\eta\|_{L_\infty} \|\varphi\|_{W_1^{2m}} + h^{k+2} \|\zeta\|_{W_\infty^{k+1}} \|\tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m}} \}.$$

Имея в виду, что $\|\eta\|_{L_\infty} = \sup_{\|\psi\|_{L_1}=1} |(\eta, \psi)|$, из (12) при достаточно малых h

получим (11) при $r=0$. Утверждение леммы при $r=\overline{1, k}$ следует из обратных неравенств (7).

Теорема. Пусть $k \geq 2m$, $u \in W_\infty^{k+1}(I) \cap W_\infty^{k+2}(I_l)$ — решение задачи (9), а U — решение задачи (10). Пусть $x_j^{(r)}$ — точки Якоби (2). Тогда имеет место оценка

$$|(u-U)^{(r)}(x_j^r)| \leq ch^{k+2-r}(\|u\|_{W_\infty^{k+2}(I)} + \|u\|_{W_\infty^{k+1}}).$$

Доказательство следует из лемм 4 и 5.

Автор благодарен В. Б. Андрееву за проявленное внимание к данной работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

2. 2. ԱՆԴՐՆԱՍՅԱՆ

Վերջավոր էլեմենտների մերձողի գերզուգամիտությունը բարձր կարգի միաշափ խնդիրների համար

Հողվածում ցույց է տրվում, որ ամեն մի $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ վերջավոր էլեմենտում գոյություն ունեն $k - 2m + r + 1$ ներքին կետեր, որտեղ $2m$ -րդ կարգի խնդրի k -րդ աստիճանի վերջավոր էլեմենտային լուծման r -րդ ($r = 0, \dots, m$) կարգի ածանցյալը գուգամիտում է $O(h^{k+2-r})$ արագություն, այսինքն մի կարգով ավելի, քան գուգամիտության գլոբալ կարգը:

Բացի դրանից գուգամիտության $O(h^{k+2-r})$ արագությունը պահպանվում է նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալների համար ($r = m, \dots, k$) $k + 1 - r$ կետերում: Այդ կետերը $P_{k+1-(r-m)-m}^{(m-r)(m-r)}$, $r = 0, k$ Յակոբիի բազմանդամի զրոներն են, որոշված ամեն մի I_i -ի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. Стренг, Дж. Фикс, Теория метода конечных элементов, Мир, М., 1977. ² M. Bakker, SIAM J. Numer. Anal., v. 19, № 3 (1982). ³ M. Bakker, SIAM J. Numer. Anal., v. 21, № 1 (1984). ⁴ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Наука, М., 1966. ⁵ J. Jr. Douglas, T. Dupont, L. Wahlbin, Math. comput., v. 29, № 130 (1977). ⁶ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969. ⁷ Ф. Сьярле, Метод конечных элементов для эллиптических задач, Мир, М., 1980.

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

В. А. Штраус

О дефинизируемом аналоге проблемы моментов Хаусдорфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 27/XI 1985)

Настоящая заметка посвящена интегральному (точнее—интегрополиномиальному) представлению вещественной последовательности $\{c_q\}_0^\infty$, которая может быть преобразована с помощью разностного выражения к позитивной последовательности ⁽³⁾ и, кроме того, имеет определенное ограничение на рост при $q \rightarrow \infty$ (точные определения см. ниже). Вопрос об интегральном представлении такой последовательности и назван здесь дефинизируемым аналогом проблемы моментов Хаусдорфа. Сходные проблемы уже рассматривались в целом ряде работ (см. обзор ⁽²⁾), а также более поздние работы ⁽³⁻⁵⁾), однако содержащиеся в настоящем сообщении результаты отличаются от известных как классом изучаемых последовательностей, так и некоторыми особенностями их представления. По поводу классической проблемы моментов Хаусдорфа см. ⁽¹⁾.

Определение. Вещественная последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ называется (строго) дефинизируемой (деф.), если найдутся такие числа $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, что последовательность $\{\bar{c}_q\}_0^\infty$: $\bar{c}_q = \sum_{p=0}^n \gamma_p c_{p+q}$ будет позитивной.

Пусть $\{\alpha_i\}_1^\nu$ —некоторое конечное множество точек отрезка $\Delta = [-1; 1]$. Будем говорить, что заданная на множестве $\Delta \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ функция $\rho(t)$ кусочно-монотонна на нем, если это множество можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых она монотонна и, кроме того, для любого $x \in (-1; 1) \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ существуют конечные односторонние пределы $\rho(x-0)$ и $\rho(x+0)$; при этом для определенности будем считать, что $\rho(x) = \frac{1}{2}(\rho(x-0) + \rho(x+0))$. Если $x = \pm 1 \in \{\alpha_i\}_1^\nu$, то в этой точке также существуют соответствующие односторонние пределы. Точку $x \in \Delta \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ назовем точкой изменения для $\rho(t)$, если в любой окрестности этой точки $\rho(t) \neq \text{const}$.

Теорема 1. Пусть деф. последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ такова, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$c_q = O(q^\varepsilon), \quad q \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда найдутся такие числа $\{\xi_j\}_1^\mu$, $\xi_j \neq \bar{\xi}_j$, $|\xi_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, \mu$, $\{\alpha_i\}_1^\nu$, $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, \nu$; натуральные числа $\{m_j\}_1^\mu$, $\{n_i\}_1^\nu$ и опре-

деленная на $[-1; 1] \setminus \{a_i\}_1^v$ кусочно-монотонная функция $\rho(t)$, число точек изменения которой бесконечно, что

$$c_q = \sum_{k=0}^M a_k^{(q)} c_k + \int_{-1}^1 (t^q - P_q(t)) d\rho(t), \quad (2)$$

где $M = -1 + \sum_{j=1}^u m_j + \sum_{i=1}^v n_i$, $P_q(z) = \sum_{k=0}^M a_k^{(q)} z^k$ — интерполяционный многочлен для z^q с узлами интерполяции $\{\xi_j\}_1^u$ и $\{a_i\}_1^v$ кратности $\{m_j\}_1^u$ и $\{n_i\}_1^v$ соответственно. Интеграл в (2) понимается в несобственном смысле с особыми точками $\{a_i\}_1^v$. Обратно, если последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ допускает представление (2), то она дефинируема и удовлетворяет условию (1).

Наметим доказательство. Из условия (1) следует, что на пространстве $\mathcal{S}$ финитных последовательностей вида $\bar{z} = \{z_q\}_0^\infty$ можно определить скалярное произведение $(\bar{z}, \bar{\eta}) = \sum_{q=0}^\infty (q+1)^{s+1} z_q \bar{\eta}_q$ и эрмитово-

билинейную форму $[\bar{z}, \bar{\eta}] = \sum_{p,q=0}^\infty z_p \bar{\eta}_q c_{p+q}$ так, что оператор $A: A\bar{z} = \{0,$

$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots\}$ является непрерывным вместе с формой $[\cdot, \cdot]$ по отношению к введенной гильбертовой норме, имеет спектральный радиус, равный единице, симметричен относительно формы $[\cdot, \cdot]$ и дефинируем (2.6) относительно нее многочленом $Q(z) = \sum_{k=0}^n \gamma_k z^k$. Далее, ис-

пользуя некоторые результаты М. Г. Крейна (7), можно ввести на $\mathcal{S}$ новое скалярное произведение так, что пространство $\mathcal{Q}$, получающееся из $\mathcal{S}$ после пополнения его по новой норме и, возможно, факторизации полученного пространства по его изотропной относительно $[\cdot, \cdot]$ части, будет J -пространством, а определенный на $\mathcal{Q}$ оператор $\tilde{A}$, индуцированный оператором A , — непрерывным оператором с тем же спектральным радиусом. Поскольку $\tilde{A}$ — это дефинируемый самосопряженный оператор, то у него существует J -ортогональная спектральная функция с конечным множеством критических точек (6), сосредоточенных к тому же в замкнутом единичном круге.

Далее, как следует из некоторых результатов П. Йонаса (8), если $f(z)$ — функция, регулярная в некоторой окрестности спектра оператора $\tilde{A}$, $\{\xi_j\}_1^u$ — его невещественный спектр, $\{a_i\}_1^v$ — критические точки спектральной функции E_λ , то можно подобрать системы натуральных чисел $\{m_j\}_1^u$ и $\{n_i\}_1^v$ так, что

$$f(\tilde{A}) = P_f(\tilde{A}) + \int_{-1}^1 (f(\lambda) - P_f(\lambda)) dE_\lambda, \quad (3)$$

где $P_f(z)$ — интерполяционный многочлен для $f(z)$ с узлами интерполяции $\{\xi_j\}_1^u$ и $\{a_i\}_1^v$, причем кратность узлов ξ_j и a_i равна m_j и n_i соответственно (выбор m_j и n_i не зависит от f). Из представления (3) непосредственно следует представление (2), если $\rho(t) = [E_t x, x]$, x —

элемент из Ω , соответствующий последовательности $\{1; 0; 0; \dots\}$ из $\mathcal{S}$. Тем самым доказательство прямого утверждения теоремы завершено. Справедливость обратного утверждения вытекает непосредственно из вида представления (2).

Рассмотрим теперь связанную с последовательностью $\{c_q\}_0^\infty$, удовлетворяющей условию (1), регулярную функцию $F(z)$, определенную в области $|z| > 1$ по формуле $F(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots$, а затем регулярно продолженную в область $|z| \leq 1$.

Теорема 2. *Последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ допускает представление (2) в том и только том случае, когда $F(z)$ представима в виде*

$$F(z) = \frac{1}{Q(z)} \left\{ - \sum_{q=0}^M c_q \sum_{p=q}^M b_{p+1} z^{p-q} + \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{t-z} d\rho(t) \right\}, \quad (4)$$

где $Q(z) = \sum_{q=0}^{M+1} b_q z^q = \prod_{j=1}^{\mu} \prod_{i=1}^{\nu} (z - \xi_j)^{m_j} (z - \alpha_i)^{n_i}$, остальные элементы те же, что и в (2).

Остановимся теперь на вопросе о единственности элементов представления (2). Отметим, прежде всего, что функция $\rho(t)$ определяется с точностью до кусочно-постоянного слагаемого, скачки которого сосредоточены в точках из $\{\alpha_i\}_1^{\nu}$. Что касается узлов интерполяционного многочлена $P_q(z)$, то существует единственная минимальная по M (т. е. с учетом кратности) их совокупность, при которой еще возможно представление (2). Любая другая совокупность узлов интерполяции, связанная с представлением (2), является расширением указанной минимальной совокупности. Представление (2) с минимальным множеством узлов интерполяции будем называть неприводимым. Элементы неприводимого представления однозначно (с учетом сказанного выше относительно $\rho(t)$) восстанавливаются по поведению функции $F(z)$ в окрестности ее особых точек. В частности, $\{\xi_j\}_1^{\mu}$ — это система невещественных полюсов функции $F(z)$, а $\{m_j\}_1^{\mu}$ — соответствующая совокупность их порядков. Далее, пусть $\Gamma(\tau, \upsilon)$ — прямоугольный контур, симметричный относительно вещественной оси $\mathbf{R}$, ограничивающий замкнутую область, не содержащую точек из $\{\xi_j\}_1^{\mu}$, и пересекающий $\mathbf{R}$ в точках τ и υ . Тогда с точностью до кусочно-постоянного слагаемого

$$\rho(t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-(1+\delta)}^t F(z) dz, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения с особыми точками $(-(1+\delta), 0)$ и $(t, 0)$. Наконец, система $\{\alpha_i\}_1^{\nu}$ состоит из тех точек из $[-1; 1]$, для которых выполняется одно из условий: 1) функция $\rho(t)$ не ограничена в любой окрестности точки α_i ; 2) найдется такое натуральное n , что существует и отличен от нуля предел $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma(\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta)} (z - \alpha_i)^n F(z) dz$, а кратность узла интерполяции n_i — это

наименьшее из натуральных чисел, для которых одновременно выполнены условия:

$$1) \text{ существует } \eta > 0: \left| \int_{a_i - \eta}^{a_i + \eta} (t - x_i)^n d\rho(t) \right| < \infty;$$

$$2) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma(a_i - \delta, a_i + \delta)} (z - x_i)^n F(z) dz = 0,$$

где интегралы трактуются так же, как и в (2) и (5).

В заключение укажем, что аналогично проблеме моментов Хаусдорфа могут быть рассмотрены и дефинируемая тригонометрическая проблема моментов и ее интегро-полиномиальное представление, по форме близкое к (2).

Челябинский политехнический институт
им. Ленинского комсомола

Վ. Ա. ՇՏՐԱՈՒՍ

Հանուդորֆի մոմենտների պրոբլեմի դեֆինիզացվող անալոգի մասին

Աշխատանքում ապացուցվում է իրական թվերի հաջորդականության խնդիր-բազմանդամային ներկայացման վերաբերյալ թեորեմ, երբ գոյություն ունի որոշակի ձևափոխություն, որն այդ հաջորդականությունը դարձնում է դրական որոշյալ հաջորդականություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, М., физматгиз, 1962. ² Т. Я. Азизов, И. С. Исхвидов, в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 17 (1979). ³ М. G. Krein, H. Langer, Wiss. Beitr. M.—Luther-Univ. Halle-Wittenberg, № 14 (1979). ⁴ М. G. Krein, H. Langer, Beitr. Anal., № 15 (1981). ⁵ И. С. Исхвидов, Укр. мат. журн., т. 35, № 6 (1984). ⁶ H. Langer, Lect. Notes Math., 948 (1982). ⁷ М. Г. Крейн, Журн. Ин-та математики АН УССР, № 9 (1947). ⁸ P. Jonas, Beitr. Anal., № 16 (1981).

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. О. Оганесян

Построение параметрикса начальной задачи для одного класса гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 27/І 1986)

Рассмотрим следующее гиперболическое уравнение с неограниченными коэффициентами

$$Pu \equiv D_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) D_i D_j u + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_i u + \frac{1}{t} b(t, x) D_t u + \frac{1}{t^2} c(t, x) u = 0, \quad \left(t \in (0, T), x \in R^n, D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}, D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

где функции a_{ij} , a_i ($i, j = 1, \dots, n$), b , c бесконечно дифференцируемы в $\overline{R_+} \times R^n$. Кроме того, пусть существуют положительные постоянные

γ_1 и γ_2 такие что $\gamma_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ($x \in R^n$, $\xi \in R^n$), а

функция $\text{Im} \sum_{i=1}^n a_i(0, x) \xi_i / a(x, \xi)$ ограничена при $x \in R^n$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$, где $a(x, \xi) = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0, x) \xi_i \xi_j)^{1/2}$.

Как известно ^(1,2), задача Коши в обычной постановке с данными на гиперплоскости $t=0$ может оказаться не корректной. В таких случаях возникает необходимость ее весовой постановки. Такого типа задачи рассматривались, например, в ⁽³⁻⁵⁾. В работе ⁽⁵⁾ строится параметрикс задачи Коши с весом для уравнения (1) в случае, когда некоторая функция $r=r(x)$, зависящая от коэффициентов уравнения, не принимает целочисленных значений. В настоящей работе рассматривается случай $r(x)=\gamma+1$, $\gamma=0, \pm 1, \dots$. При этом существенно меняется поведение параметрикса при $t \rightarrow 0$, а соответственно меняются и весовые функции. Это связано со свойствами вырожденной гипергеометрической функции $\Psi(a, c, z)$, с помощью которой строится параметрикс, при целочисленных значениях параметра c ⁽¹⁾. Случай $r(x) \equiv 1$ интересен также с точки зрения связи уравнения (1) с гиперболическими уравнениями, вырождающимися с бесконечной скоростью на гиперплоскости $t=0$. Остальные случаи представляют интерес, например, при изучении принципа Гюйгенса для уравнений второго порядка с особенностями ⁽⁶⁾. Заметим, что уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу является частным случаем уравнения (1).

Пусть $s=s(x)$ является одним из корней уравнения $s^2 - s(1 -$

$-ib(0, x) - c(0, x) = 0$. Тогда $r(x) = ib(0, x) + 2s(x)$ (5). Допустим также, что $s(x)$ — ограниченная функция при $x \in R^n$.

Определение 1. Для действительных чисел γ и k обозначим через $S^{\gamma, k}$ пространство бесконечно дифференцируемых на $R_+ \times R^n \times R^n$ функций $p(t, x, \xi)$ таких, что для любого целого числа $l \geq 0$, мультииндексов α, β , действительного числа $T > 0$ и компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство $|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\beta t^{-s(x)} p(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{\gamma - |\beta|} (|\xi|^{-1} + t)^{k - l}$, где $0 \leq t \leq T$, $x \in K$, $|\xi| \geq 1$, а постоянная c зависит от l, α, β, T и K .

Через S^r будет обозначаться обычный класс символов интегральных операторов Фурье, определенных на $T^*(R^n)$ и зависящих от $t \in [0, T]$ как от параметра.

Пусть

$$\mu(\sigma) = \frac{i\sigma \sum_j a_j(0, x) \xi_j / a(x, \xi) + r(x)}{2}, \quad m(\sigma) = \sup_{\substack{x \in R^n \\ \xi \in R^n \setminus \{0\}}} (-\operatorname{Re} \mu(\sigma)),$$

а функции $\varphi_\sigma(t, x, \xi)$ ($\sigma^2 = 1$) являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma t} &= \sigma \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i} \varphi_{\sigma x_j} \right)^{1/2}; \\ \varphi_\sigma|_{t=0} &= \langle x, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие начальные условия. При $q = 0$

$$\begin{aligned} (\ln t)^{-1} t^{-s(x)} u|_{t=0} &= f_1(x); \\ t D_t(t^{-s(x)} u)|_{t=0} &= f_2(x) \end{aligned} \quad (2)$$

и при $q \neq 0$

$$\begin{aligned} t^{q-s(x)} u|_{t=0} &= f_1(x); \\ t^{q+1} D_t(t^{-s(x)} u)|_{t=0} &= f_2(x) \end{aligned} \quad (2')$$

$(f_1, f_2 \in \mathcal{E}'(R^n)).$

При указанных выше условиях на коэффициенты уравнения (1) доказывается

Теорема. Пусть $r(x) = q + 1$, $q = 0, \pm 1, \dots$. Тогда существуют символы

$$\begin{aligned} p_{1\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+q+\varepsilon, m(\sigma)+\varepsilon}; \\ p_{2\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+q+\varepsilon, m(\sigma)+\varepsilon}; \\ \tilde{p}_{1\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+q+\varepsilon}; \\ \tilde{p}_{2\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+q+\varepsilon}; \end{aligned} \quad (3)$$

($\sigma^2 = 1$, $(t, x, \xi) \in R_+ \times R^n \times R^n$, $\varepsilon > 0$ произвольное число) такие, что

$$\begin{aligned} E(f_1, f_2)(t, x) &= \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^2 (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma(t, x, \xi) - \langle y, \xi \rangle]} p_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi + \\ &+ \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^2 (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma(t, x, \xi) - \langle y, \xi \rangle]} \tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

является параметриком задачи (1)–(2) при $q=0$ и (1)–(2') при $q \neq 0$, т. е. функция $E(f_1, f_2)(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) в $R_+ \times R^n$ по модулю функций из $C(R_+ \times R^n)$ и условиям (2) или соответственно (2') в R^n по модулю функций из $C^s(R^n)$. Интегралы в (4) понимаются как интегральные операторы Фурье.

Доказательство теоремы проводится в основном по схеме, изложенной в (5), и делится на два этапа. На первом этапе задача (1)–(2) (или (1)–(2')) сводится к задаче с нулевыми начальными данными при тех же весовых функциях и неоднородному уравнению с правой частью, обращающейся в ноль вместе со всеми производными по переменной t при $t=0$. На втором этапе строится параметрикс полученной на первом этапе задачи.

Функции $p_{l_2}(t, x, \xi)$ строятся в виде асимптотических сумм

$$p_{l_2}(t, x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{l_2}^k(t, x, \xi), \quad (5)$$

где $p_{l_2}^k(t, x, \xi)$ являются $\rho = (-1, 1, \dots, 1)$ квазиоднородными функциями порядка $s_k = q - s(x) - k$, т. е.

$$p_{l_2}^k(\lambda^{-1}t, x, \lambda\xi) = \lambda^{s_k} p_{l_2}^k(t, x, \xi) \quad (k \geq 0). \quad (6)$$

Эти функции выбираются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной t (x и ξ играют роль параметров).

Доказывается, что $p_{l_2}^k \in S^{m(x)+q+s-k}$. Это обстоятельство не позволяет при построении параметрикса ограничиваться функциями $p_{l_2}^k(t, x, \xi)$, с помощью которых удастся только свести задачу (1)–(2) или (1)–(2') к задаче с однородными начальными условиями и уравнению с правой частью, которая вместе со всеми производными по переменной t при $t=0$ обращается в ноль, т. е. осуществить первый этап построения параметрикса. Далее вводятся символы интегральных операторов Фурье $\tilde{p}_{l_2}(t, x, \xi)$, с помощью которых строится параметрикс полученной на первом этапе задачи. Функции $\tilde{p}_{l_2}(t, x, \xi)$ строятся в виде асимптотических сумм $\tilde{p}_{l_2}(t, x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_{l_2}^k(t, x, \xi)$, где $\tilde{p}_{l_2}^k(t, x, \xi)$ определяются как решения уравнений в частных производных первого порядка, которые вместе со всеми производными по t при $t=0$ обращаются в ноль. Доказывается, что $\tilde{p}_{l_2}^k \in S^{m(x)+q+s-k}$.

Описанный выбор функций p_{l_2} и $\tilde{p}_{l_2}$ позволяет доказать теорему.

В заключение приведем пример вырождающегося с бесконечной скоростью уравнения, которое сводится к уравнению (1).

$$\begin{aligned} D_t^2 u - \frac{1}{t^{2(k+1)}} e^{-\frac{2}{t^k}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) D_i D_j u + \frac{1}{t} b(t, x) D_t u + \\ + \frac{1}{t^{2(k+1)}} e^{-\frac{1}{t^k}} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_i u + \frac{1}{t^{2(k+1)}} c(t, x) u = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где функции a_{ij} , a_i ($i, j=1, \dots, n$), b , c такие же, как соответствующие

щие коэффициенты уравнения (1). После замены переменной $\eta = \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}}$ получаем $D_\eta^2 \tilde{u} - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\eta, x) D_i D_j \tilde{u} + \frac{1}{\eta} \tilde{b}(\eta, x) D_\eta \tilde{u} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(\eta, x) D_i \tilde{u} + \frac{1}{\eta^2} \tilde{c}(\eta, x) \tilde{u} = 0$.

Непосредственные вычисления показывают, что $r(x) \equiv i\tilde{b}(0, x) = 1$. Если при этом функции $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ окажутся бесконечно дифференцируемыми в $\overline{R_+} \times R^n$, то можно будет применить приведенную теорему. Начальные условия (2) диктуют естественную постановку начальной задачи для уравнения (7).

Ереванский государственный
университет

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Սկզբնական խնդրի պարամետրիքի կառուցումը մի դասի անսահմանափակ գործակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար

Հոդվածում ուսումնասիրվում են երկրորդ կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարումներ, որոնք ցածր կարգի անդամների գործակիցներն անսահմանափակ են, երբ $t \rightarrow 0$: Նշվում են կշռային ֆունկցիաներ՝ կախված հավասարման գործակիցներից, որոնց միջոցով $t=0$ հիպերհարթության վրա տրվում են Կոշու սկզբնական պայմանները: Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների միջոցով կառուցվում է այդպիսի սկզբնական պայմաններով Կոշու խնդրի պարամետրիքը:

Բերվում է թույլ հիպերբոլական տիպի հավասարման օրինակ, որի ուսումնասիրությունը հանգում է հոդվածում հետազոտված խնդրին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. В. Бицадзе, Некоторые классы уравнений в частных производных, Наука, М., 1981, ² С. А. Терсенов. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, 1973, ³ А. Б. Нерсисян, ДАН СССР, т. 196, № 2 (1971). ⁴ Ф. Т. Барановский, Мат. сб., т. 20 (162), № 2 (1983). ⁵ А. О. Оганесян, ИАН АрмССР, т. 21, № 1 (1986). ⁶ Н. Х. Ибрагимов, Группы преобразований в математической физике, Наука, М., 1983. ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, Наука, М., 1973.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.3

Г. А. Карагулян

О выделении подсистем сходимости с лакунарной плотностью номеров
из произвольных ортонормированных систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/III 1986)

I. Известна следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо друг от друга Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем.

Теорема А (см. ^(1,2)). Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, существуют номера $n_1 < n_2 < \dots$ такие, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости. (ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если из условия $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ следует сходимость почти всюду ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$).

По этому поводу в работе ⁽³⁾ Г. Беннетом был поставлен следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k/r_k = 0$?

В работе ⁽⁴⁾ Б. С. Кашиным дан положительный ответ на этот вопрос. В ней сформулирована следующая

Теорема Б. Из произвольной ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k < R_k$, $k=1, 2, \dots$, где

$$R_1=3, R_{k+1}=(R_k)! \quad (k=2, 3, \dots).$$

В той же работе ⁽⁴⁾ Б. С. Кашин поставил следующий вопрос: можно ли в формулировке теоремы Б последовательность R_k , $k=1, 2, \dots$ заменить на $k^{1+\epsilon}$, $k=1, 2, \dots$ для любого $\epsilon > 0$?

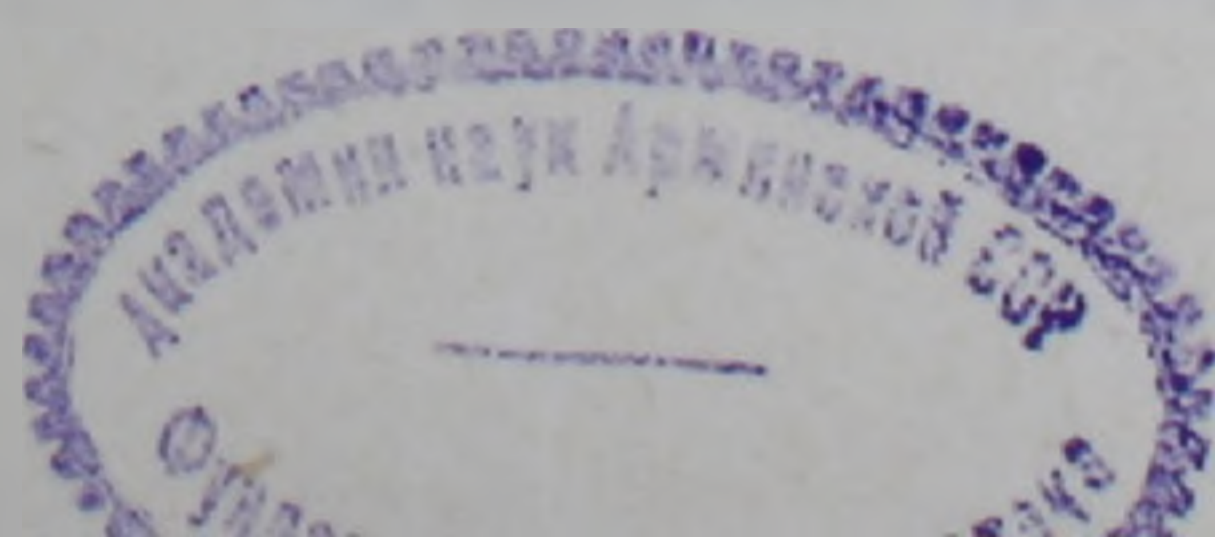
В настоящей работе усилен результат теоремы Б. Точнее, справедлива

Теорема. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная ОНС и $\lambda > 1$ некоторое число. Тогда существует подсистема сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с условием

$$n_k < \lambda^k, \quad k=k_0, k_0+1, k_0+2, \dots \quad (k_0 \geq 1).$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$, $x \in (0, 1)$, конечная ОНС и $\{E_l\}_{l=1}^m$ семейство измеримых множеств из $(0, 1)$. Тогда существует целое число $1 \leq k \leq n$ такое, что



$$\frac{1}{\mu(E_p)} \left| \int_{\tilde{E}_p} \varphi_k(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{m}{n \cdot \min_{1 \leq i \leq m} \mu(E_i)}}, \quad p=1, 2, \dots, m$$

(μ — мера Лебега на $(0, 1)$).

Лемма 2. Пусть $E \subset (0, 1)$ есть некоторое измеримое множество положительной меры и $f(x)$ — измеримая функция на $(0, 1)$ такая, что

$$|f(x)| \leq M \text{ при } x \in (0, 1), \quad f(x) = 0 \text{ при } x \notin E.$$

Тогда существует такая последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, что

$$|f_n(x)| = 10M \text{ при } x \in E, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$f_n(x) = 0 \text{ при } x \notin E, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\frac{\mu(E)}{2\sqrt{2}} \leq \mu\{f_n(x) = 10M\} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \mu(E)}{2}, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\frac{\mu(E)}{2\sqrt{2}} \leq \mu\{f_n(x) = -10M\} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \mu(E)}{2}, \quad n=1, 2, \dots,$$

и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к $f(x)$ в $L^2(0, 1)$.

Лемма 3. Пусть $E \subset (0, 1)$ есть измеримое множество положительной меры, а $f(x)$ — всюду конечная функция из $L^2(0, 1)$ такая, что

$$f(x) = 0 \text{ при } x \notin E.$$

Тогда существуют слабо сходящаяся к $f(x)$ в $L^2(0, 1)$ последовательность функций $f^{(n)}(x)$, $n=1, 2, \dots$, и такие семейства измеримых множеств $\{E_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$, $n=1, 2, \dots$, что для любого $n=1, 2, \dots$, функция $f^{(n)}(x)$ постоянна на каждом множестве $E_i^{(n)}$, $i=1, 2, \dots$ и выполняются следующие соотношения:

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ при } x \notin E, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\|f^{(n)}\|_{L^2(0,1)} \leq 20 \|f\|_{L^2(0,1)}, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)} = \emptyset \text{ при } i \neq j,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{(n)} = E, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\mu(E) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k+3} \leq \mu(E_k^{(n)}) \leq \mu(E) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k+2}, \quad k=1, 2, \dots$$

Лемма 4. Пусть $\{E_{i_1 \dots i_n}, i_1, \dots, i_n \in N\}$ ($n \geq 1$) семейство измеримых множеств из $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям

$$\bigcup_{i_1, \dots, i_n \in N} E_{i_1 \dots i_n} = (0, 1),$$

$$E_{i_1 \dots i_n} \cap E_{j_1 \dots j_n} = \emptyset \text{ при } (i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{i_1 + \dots + i_n + 3n} \leq \mu(E_{i_1 \dots i_n}) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{i_1 + \dots + i_n + 2n},$$

для любых $i_1, \dots, i_n \in N$. Тогда обозначая $A = \left\{ (i_1, \dots, i_n); \mu(E_{i_1, \dots, i_n}) > \frac{1}{2^{10n}} \right\}$, имеем

$$\mu\left(\bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in A} E_{i_1, \dots, i_n}\right) > 1 - c \cdot \alpha^n \quad (0 < \alpha < 1), \quad |A| < 2^{10n},$$

где $0 < \alpha < 1$ и $c > 0$ абсолютные постоянные, а $|A|$ есть количество элементов множества A .

II. Известно, что из любой ортонормированной системы можно извлечь подсистему безусловной сходимости (см. (5)). Тем не менее, для наперед заданных номеров $1 < N(1) < N(2) < N(3) < \dots$ можно построить такую ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что для любых номеров $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, $n_k \leq N(k)$, $k=1, 2, \dots$ существует перестановка членов системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что переставленная система является системой расходимости. Для этого определим зависящие от последовательности $\{N(k)\}_{k=1}^{\infty}$ номера $\{R(k)\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$R(1) = N(1), \quad R(k+1) = N(R(k)+1), \quad k=1, 2, \dots \quad (1)$$

Определим также числа l_k , $k=1, 2, \dots$

$$l_1 = R(1), \quad l_{k+1} = R(2^{l_1} + \dots + 2^{l_k} + 1), \quad k=1, 2, \dots; \quad (2)$$

построим систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Если $n \leq l_1 (=R(1))$, полагаем

$$\varphi_n(x) = r_n(x), \quad n=1, 2, \dots, l_1, \quad (3)$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Радемахера. Если же $n \geq l_1$, то однозначно определяются числа $k \geq 1$ и $0 \leq i \leq 2^{l_k+1} - 1$ такие, что

$$R(2^{l_1} + \dots + 2^{l_k} + i) < n \leq R(2^{l_1} + \dots + 2^{l_k} + i + 1), \quad (4)$$

Тогда определим функцию $\varphi_n(x)$ следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{|\Delta_{l+1}^{(l_k)}|^{1/2}} \cdot \chi_{\Delta_{l+1}^{(l_k)}}(x) \cdot r_n(x) \quad (n \geq l_1), \quad (5)$$

где $\Delta_l^{(k)} = (l - 1/2^k, l/2^k)$ есть двоичный интервал Хаара, а $\chi_{\Delta_l^{(k)}}(x)$ — ее характеристическая функция.

Итак, система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ построена, и очевидно, что она является ортонормированной. Если $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность номеров с условием $n_k \leq N(k)$, $k=1, 2, \dots$, то, учитывая определение чисел $R(k)$ (см. (1)), легко усмотреть, что для любого $k=1, 2, \dots$ существует хотя бы одно число $m_k \in \{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ такое, что $R(k) < m_k \leq R(k+1)$. Чтобы доказать, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не является системой безусловной сходимости, достаточно доказать аналогичное для системы $\{\varphi_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ($\subset \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$). Из условия $R(k) < m_k \leq R(k+1)$, имея в виду определение системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (2-5)) легко убедиться, что $\{\varphi_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ станет подсистемой некоторой системы типа Хаара $\tilde{\chi}_0^{(0)}, \tilde{\chi}_i^{(n)}$, $i=1, 2, \dots, 2^n$, $n=1, 2, \dots$ (опр. системы типа Хаара см. (6), с. 122), причем она составлена из функций $\tilde{\chi}_i^{(0)}, \tilde{\chi}_i^{(l_k)}$, $i=1, 2, \dots, 2^{l_k}$, $k=1, 2, \dots$. Отсюда следует, что система $F_j^{(k)}$, $j=1, 2, \dots, 2^k$, $k=0, 1, 2, \dots$, определенная равенствами

$$F_j^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_k-k}}} \sum_{l=(j-1) \cdot 2^{n_k-k}+1}^{j \cdot 2^{n_k-k}} \tilde{\chi}_l^{(l_k)}(x), \quad (6)$$

$$j=1, 2, \dots, 2^k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

тоже является системой типа Хаара, но другого вида (в ней не участвует только первая функция $F_0^{(0)} \equiv 1$). Поэтому существует ряд по этой системе, с коэффициентами из l^2 , который расходится почти всюду после некоторой перестановки членов (см. (6), с. 112). В силу (6) этот ряд можно рассматривать как ряд по системе $\{\{\tilde{\chi}_l^{(l_k)}\}_{l=1}^{2^k}\}_{k=1}^\infty$ и, следовательно, по системе $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$. Очевидно, что этот ряд будет рядом с коэффициентами из l^2 и расходится почти всюду после некоторой перестановки.

Автор благодарен профессору А. А. Талаляну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱԴՈՒԼՅԱՆ

Ընդհանուր օրթոնորմավորված համակարգերից լակունար խտության համարներով ենթահամակարգերի ընտրության մասին

Աշխատանքի առաջին մասում ձևակերպվում է հետևյալ առաջադրությունը.

Թեորեմ. Կամայական $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ օրթոնորմավորված համակարգից կարելի է ընտրել այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ զուգամիտության ենթահամակարգ, որի համար $n_k < \lambda^k$, $k=1, 2, \dots$, որտեղ $\lambda > 1$ նախապես տրված թիվ է:

Երկրորդ մասում՝ նախապես տված $1 < N_1 < N_2 < \dots$ համարների համար կոոսցվում է այնպիսի $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ համակարգ, որ եթե $n_k \leq N_k$, $k=1, 2, \dots$ ինչ-որ ենթահամարներ են, ապա $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ չէ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ D. Menchoff, Bull de la Soc. Math. de France, № 3—4 (64) (1936). ² J. Marcinkiewicz, Studia Math., 6, 39—45 (1936). ³ G. Bennett, In: Notes in Banach spaces—Austin: University of Texas Press, 1980. ⁴ Б. С. Кашин, Усп. мат. наук, № 3 (40), 181—182 (1985). ⁵ J. Komlos, Arkiv for Mat., 1(12), 41—49 (1974). ⁶ Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Наука, М., 1984.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Г. Г. Геворкян

О единственности интегралов Фурье, сходящихся в метриках L_p , $p > 0$, на каждом конечном интервале

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1986)

Теорема Планшереля утверждает, что если $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$,

$$\text{то } \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = \hat{f}(x),$$

где $\lim_{a \rightarrow +\infty}$ обозначает предел в смысле сходимости в L_2 при $a \rightarrow +\infty$, имеет место формула обращения

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(t) e^{-itx} dt \text{ и } \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

В частности, из того, что интегралы $\int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt$ сходятся к нулю в метрике $L_2(-\infty, +\infty)$ при $a \rightarrow +\infty$, следует, что $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$.

Из одной теоремы А. А. Талаляна (см. (1), теорема 3) следует, что существует неэквивалентная нулю измеримая функция $f(x)$, обладающая тем свойством, что для любого отрезка $[-c, c]$ и любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [-c, c]$, $\mu E > 2c - \epsilon$, на котором функции

$$f_a(x) = \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt \quad (1)$$

сходятся к нулю в метрике $L_2(E)$ при $a \rightarrow +\infty$.

В связи с этим А. А. Талаляном была поставлена следующая задача. Пусть функции (1) сходятся к нулю на каждом отрезке $[-b, b]$ в метрике $L_1[-b, b]$ при $a \rightarrow +\infty$. Следует ли из этого, что $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$?

В этой заметке дается положительный ответ на этот вопрос.

А именно, верна следующая

Теорема 1. Если $f(t) \in L_p[-a, a]$, для некоторого $p \geq 1$, при любом $a > 0$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = g(x)$ в метрике $L_p[-b, b]$, на каждом отрезке $[-b, b]$, то интегралы

$$\varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma}\right) g(u) e^{-iux} du$$

стремятся к $f(x)$ почти всюду и в метрике $L_p[-a, a]$ на любом ограниченном отрезке $[-a, a]$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$.

Для доказательства теоремы нам нужна следующая

Лемма 1. Пусть функция $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ имеет конечную вариацию на каждом отрезке $[-a, a]$. Если интегралы

$$\int_{-a}^a e^{itx} dF(x) \quad (2)$$

на множестве $[-1, 1]$ сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$ для некоторого $p > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sup_{|h| \leq 1} |F(x+h) - F(x)| = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a e^{itx} dF(x) &= \int_0^a \cos tx d(F_1(x) - F_1(-x)) - \int_0^a \sin tx d(F_2(x) + F_2(-x)) + \\ &+ i \int_0^a \cos tx d(F_2(x) - F_2(-x)) + i \int_0^a \sin tx d(F_1(x) + F_1(-x)) = \\ &= I_1(t) + I_2(t) + i(I_3(t) + I_4(t)). \end{aligned}$$

Из того, что интегралы (2) сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$, следует сходимость их действительной части $I_1(t) + I_2(t)$. Будет сходиться также $I_1(-t) + I_2(-t)$, которая равна $I_1(t) - I_2(t)$, так как $I_1(t)$ — четная функция, а $I_2(t)$ — нечетная. Из этого следует, что сходится $I_1(t)$. Точно так же можно доказать, что сходятся интегралы $I_j(t)$, $j=2, 3, 4$. Итак, интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos tx d(F_1(x) - F_1(-x)), \quad \int_0^a \sin tx d(F_2(x) - F_2(-x)), \\ \int_0^a \cos tx d(F_2(x) - F_2(-x)), \quad \int_0^a \sin tx d(F_1(x) + F_1(-x)) \end{aligned} \quad (4)$$

сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$.

Обозначим $\varphi(x) = F_1(x) - F_1(-x)$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \cos tx d\varphi(x) = \cos bt \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] + t \int_a^b \sin tx \cdot [\varphi(x) - \varphi(a)] dx.$$

Для любого a можно найти такое b , что $|b-a| \leq 1$ и $\sup_{|b| \leq 1} |\varphi(a+h) -$

$-\varphi(a)| \leq \frac{101}{100} |\varphi(b) - \varphi(a)|$. Тогда

$$\left| \int_a^b \cos tx d\varphi(x) \right| \geq |\cos bt| |\varphi(b) - \varphi(a)| - \frac{101}{100} |t| |\varphi(b) - \varphi(a)| =$$

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \left| |\cos bt| - \frac{101}{100} |t| \right|. \quad (5)$$

Если интегралы (2) сходятся в L_p , $p > 1$, то сходятся и в L_1 . Поэтому для доказательства леммы нам достаточно доказать, что из сходимости интегралов (2) в метрике L_p , для некоторого $p \leq 1$, следует (3). Допустим, интегралы (2) сходятся в метрике $L_p \left[0, \frac{1}{2} \right]$, $0 < p \leq 1$. Тогда левая часть (5) должна сходиться к нулю в метрике $L_p \left[0, \frac{1}{2} \right]$ для того же p , $0 < p \leq 1$, когда a стремится к $+\infty$. Из этого и из того, что (см. (5))

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \int_a^b \cos tx d\varphi(x) \right|^p dt \geq |\varphi(b) - \varphi(a)|^p \int_0^{\frac{1}{2}} \left| |\cos bt| - \frac{101}{100} |t| \right|^p dt \geq$$

$$\geq 2^{p-1} |\varphi(b) - \varphi(a)|^p \left[\int_0^{\frac{1}{2}} |\cos bt| dt - \frac{101}{100} \int_0^{\frac{1}{2}} t dt \right] \geq 2^{p-1} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{101}{800} \right) |\varphi(b) - \varphi(a)|^p,$$

следует, что $|\varphi(b) - \varphi(a)| \rightarrow 0$, когда $a \rightarrow +\infty$.

Таковыми же методами можно доказать, что требованиям леммы удовлетворяют функции $F_2(x) + F_2(-x)$, $F_2(x) - F_2(-x)$ и $F_1(x) + F_1(-x)$. Следовательно, функция $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ удовлетворяет (3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Легко видеть, что

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma} \right) g(u) e^{-iux} du = v \cdot p \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t), \quad (6)$$

$$\text{где } F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Пусть a_j нуль функции $\left(\frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} \right)'$ на интервале $\left(\frac{2\pi}{\sigma} j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right)$.

Легко видеть, что на отрезках $\left[\frac{2\pi}{\sigma} j, a_j \right]$, $\left[a_j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right]$, $j=1, 2, \dots$,

функция $\left(\frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} \right)'$ не меняет свой знак. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma} j}^{a_j} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| + \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \left| \int_{a_j}^{\frac{2\pi}{\sigma}(j+1)} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq$$

(7)

$$\leq \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \left\{ |F(x+a_j) - F(x+\xi_j)| + |F(x+a_j) - F(x+\xi_j^*)| \right\},$$

где ξ_j и ξ_j^* некоторые точки, соответственно, из отрезков $\left[\frac{2\pi}{\sigma} j, a_j \right]$ и

$\left[a_j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right]$. Из (7) следует, что

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq 2 \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \sup_{\frac{2\pi}{\sigma} j \leq t_1 < t_2 \leq \frac{2\pi}{\sigma} (j+1)} |F(x+t_1) - F(x+t_2)|. \quad (8)$$

Точно так же можно получить

$$\left| \int_{-\infty}^{-\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq 2 \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \sup_{\frac{2\pi}{\sigma} j \leq t_1 < t_2 \leq \frac{2\pi}{\sigma} (j+1)} |F(x-t_1) - F(x-t_2)|. \quad (9)$$

Учитывая (3) и $\sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{1}{\sigma a_j^2} = O(1)$, из (8), (9) получим

$$v \cdot p \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{2\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} f(x+t) dt + o(1), \quad (10)$$

где $o(1)$ равномерно на любом конечном отрезке. Из (10) и (6) следует утверждение теоремы 1.

Можно доказать аналог теоремы 1 для функций двух переменных. А именно, верна следующая

Теорема 2. Пусть $f(x, y) \in L_p([-a, a]^2)$, $p \geq 1$, при любом $a > 0$ и на каждом прямоугольнике $[-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2]$

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow +\infty \\ \sigma_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} dx \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{i(\alpha x + \beta y)} f(x, y) dy = g(\alpha, \beta) \text{ в метрике } L_p, p \geq 1. \quad (11)$$

Тогда верна следующая формула обращения:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow +\infty \\ \sigma_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\sigma_1}\right) \left(1 - \frac{|\beta|}{\sigma_2}\right) g(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\beta d\alpha$$

п. в. на $(-\infty, +\infty)^2$ и в метрике $L_p([-a, a]^2)$ на любом квадрате $[-a, a]^2$.

Замечание 1. Легко видеть, что для всех функций $f(x)$ из классов L_p , $1 \leq p \leq 2$, существует

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{itx} f(t) dt \text{ в метрике } L_p[-b, b] \text{ на каждом отрезке } [-b, b]. \quad (12)$$

Однако (12) имеет место и для других функций. Например, на любом отрезке $[-b, b]$ интегралы

$$\int_{-a}^a e^{itx} e^t \sin e^{2t} dt$$

сходятся равномерно.

Замечание 2. Повторяя рассуждения работы 1, можно построить неэквивалентную нулю локально интегрируемую функцию $f(x)$, для которой интегралы $\int_{-a}^a e^{itx} f(t) dt$ сходятся к нулю на любом отрезке $[-b, b]$ в метрике $L_p[-b, b]$, $p < 1$.

Ереванский государственный университет

Կ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Կամայական վերջավոր ինտերվալի վրա L_p , $p > 0$ մետրիկայով զուգամիտող Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցված է.

թեորեմ 1. Եթե կամայական $a > 0$ և որևէ $p \geq 1$ համար $f(t) \in L_p[-a, a]$ և ամեն մի $[-b, b]$ հատվածի վրա ըստ $L_p[-b, b]$ մետրիկայի

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = g(x), \text{ ապա՝}$$

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma}\right) g(u) e^{-iux} du$$

ինտեգրալները համարյա ամենուրեք և ամեն մի $[-a, a]$ հատվածի վրա ըստ $L_p[-a, a]$ մետրիկայի ձգտում են $f(x)$ -ին, երբ $\sigma \rightarrow +\infty$:

Ճիշտ է թեորեմ 1-ի երկչափ առաջադր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Талалаян, Мат. сб., т. 53 (95), № 3, с. 287—312 (1961).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

Вынужденные и параметрические колебания идеально проводящей пластинки, обусловленные нестационарным магнитным полем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/VIII 1986)

В работе установлена возможность возбуждения резонансных колебаний (как обычного, так и параметрического типа) идеально проводящей пластинки при помощи нестационарного магнитного поля. Получены формулы для нахождения критических частот внешнего магнитного поля, определяющие границы параметрического резонанса. Определены также амплитуды вынужденных колебаний и исследована их зависимость от частоты и амплитуды нестационарного магнитного поля.

1. Рассмотрим идеально проводящую, тонкую упругую пластинку постоянной толщины $2h$, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $x_1 O x_2$. Пусть пластинка занимает область $(|x_3| \leq h, |x_1| \leq a, -\infty < x_2 < \infty)$ и является частью бесконечной идеально проводящей жесткой неподвижной диафрагмы постоянной толщины $2h$. Пусть далее в области $x_3 > h$ установлено начальное нестационарное магнитное поле $H_0 + H_1 \cos \omega t$, параллельное координатной линии Ox_1 .

Известно (1), что нестационарная часть магнитного поля не проникает в область, занимаемую идеальным проводником (область $|x_3| < h$). Поэтому на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению нестационарного магнитного поля внутрь тела. Из условия непроникания для рассматриваемой задачи легко определить поверхностные токи и с их помощью из квазистатических уравнений Максвелла найти создаваемое ими магнитное поле. Путем наложения начального поля и магнитного поля, создаваемого поверхностными токами, получим окончательное выражение для невозмущенного магнитного поля, претерпевающего разрыв на поверхности $x_3 = h$. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = - \frac{H_1 \cos \omega t}{2\pi} (H_0 + H_1 \cos \omega t) \vec{n}_0, \quad (1.1)$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки.

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ пластинка совершает вынужденные

колебания по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии ox_2 . Вследствие этих колебаний появляются индуцированные токи и магнитное поле, приводящие к возникновению добавочных объемных и поверхностных сил. Добавочные силы выражаются через неизвестные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях $x_3 = \pm h$. Определение указанных граничных значений, как и в работах (2-4), сводится к решению задач Неймана в полупространствах $|x_3| > h$. При помощи известного решения задачи Неймана найдены добавочные объемные и поверхностные силы, выраженные через прогиб пластинки. После подстановки (1.1) и найденных выражений для добавочных сил в уравнение движения пластинки, полученное на основе гипотез Кирхгофа в работе (4), анализ динамического поведения пластинки в нестационарном магнитном поле сводится к решению следующего интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{h}{2\pi} \left[(H_0 + H_1 \cos \omega t)^2 + H_1^2 \cos^2 \omega t \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - x_1} \right] = -\frac{H_1}{2\pi} (H_0 + H_1 \cos \omega t) \cos \omega t, \quad (1.2)$$

при обычных условиях закрепления краев пластинки.

В (1.2) $w(x_1, t)$ — прогиб, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ε — коэффициент линейного затухания, ρ — плотность материала пластинки.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях пластинки, длинные стороны которой жестко зашлемлены.

Представляя искомый прогиб пластинки в виде $w(x_1, t) = f(t)(a^2 - x_1^2)^2$, удовлетворим граничным условиям жесткого зашлемления, а из уравнения (1.2) методом Галеркина получим следующее линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\frac{a^2 f}{dt^2} + \varepsilon \frac{df}{dt} + \Omega^2 (1 + 2\mu_1 \cos \omega t + 2\mu_2 \cos 2\omega t) f = \delta (\mu_2 + \mu_1 \cos \omega t + \mu_2 \cos 2\omega t), \quad (2.1)$$

где

$$\Omega^2 = [1 + \beta(H_0^2 + H_1^2)] \Omega_0^2, \quad \Omega_0^2 = \frac{63D}{4\rho h a^4},$$

$$\beta = \frac{3}{4\pi \rho a^2 \Omega_0^2} \left(1 + \frac{35}{24\pi} \frac{a}{h} \right), \quad \delta = -\frac{\Omega^2}{48\pi \beta D}, \quad (2.2)$$

$$\mu_1 = \frac{\beta H_0 H_1}{1 + \beta(H_0^2 + H_1^2)}, \quad 2\mu_2 = \frac{\beta H_1^2}{1 + \beta(H_0^2 + H_1^2)},$$

В (2.1) Ω_0 — частота собственных поперечных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, Ω — частота магнитоупругих колебаний, μ_1 и μ_2 — коэффициенты пульсации.

Общее решение уравнения (2.1) складывается из общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \varepsilon \frac{df}{dt} + \Omega^2(1 + 2\mu_1 \cos \omega t + 2\mu_2 \cos 2\omega t)f = 0 \quad (2.3)$$

и какого-нибудь частного решения уравнения (2.1), характеризующего вынужденные колебания.

Уравнение (2.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно (^{5,6}), при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой системы.

Границы областей динамической неустойчивости $\omega_{\pm}$, расположенных вблизи частот 2Ω и Ω , при весьма малом затухании ($\varepsilon \rightarrow 0$), согласно (⁶), определяются следующими приближенными формулами:

для области, расположенной вблизи частоты 2Ω ,

$$\omega_{\pm} = 2\Omega_0 [1 + \beta(H_0^2 + H_1^2) \pm \beta H_0 H_1]^{1/2} \quad (2.4)$$

для области, расположенной вблизи частоты Ω ,

$$\omega_{\pm} = \Omega_0 \left[1 + \beta(H_0^2 + H_1^2) \pm \frac{1}{2} \beta H_1^2 \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Из формул (2.4), (2.5) следует: а) при любом $H_1 \neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $H_1 = 0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен); б) если $H_0 = 0$, то параметрический резонанс наступает при частотах внешнего магнитного поля, близких к значениям $\omega = \Omega/k$ ($k = 1, 2, 3 \dots$); в) ширины обеих областей неустойчивости являются монотонно возрастающими функциями амплитуды H_1 нестационарной части внешнего магнитного поля; г) при фиксированном H_1 ширина области (2.4) является монотонно возрастающей, а ширина области (2.5) — монотонно убывающей функцией постоянной составляющей H_0 заданного магнитного поля.

Переходим к исследованию вынужденных колебаний пластинки, для простоты ограничиваясь случаем $H_0 = 0$ (тогда и $\mu_1 = 0$). В этом случае частное решение уравнения (2.1), характеризующее вынужденные колебания, ищем в виде (⁶)

$$f(t) = b_0 + a_1 \sin 2\omega t + b_1 \cos 2\omega t \quad (2.6)$$

где b_0 , a_1 и b_1 некоторые постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.6) в уравнение (2.1) (при $\mu_1 = 0$) и приравнивая коэффициенты при $\sin 2\omega t$ и $\cos 2\omega t$, а также свободные члены, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно b_0 , a_1 и b_1 . Указанные уравнения решаются в предположении, что определитель системы отличен от нуля. В результате для постоянной составляющей динамического прогиба $A_0 = a^4 b_0$ и амплитуды колебания $A = a^4 \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ центра ($x_1 = 0$) пластинки получим следующие выражения:

$$A_0 = \frac{\delta \mu_2 a^4}{\Omega^2} \left[1 - \frac{\mu_2 (1 - 2\mu_2)(1 - n^2)}{(1 - n^2)(1 - n^2 - 2\mu_2^2) + (n\Delta/\pi)^2} \right]; \quad (2.7)$$

$$A = \frac{\mu_2 (1 - 2\mu_2) a^4}{48\pi \beta D} \frac{\sqrt{(1 - n^2)^2 + (\Delta n/\pi)^2}}{(1 - n^2)(1 - n^2 - 2\mu_2^2) + (n\Delta/\pi)^2}, \quad (2.8)$$

где

$$n = \frac{2\omega}{\Omega}, \quad \Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}.$$

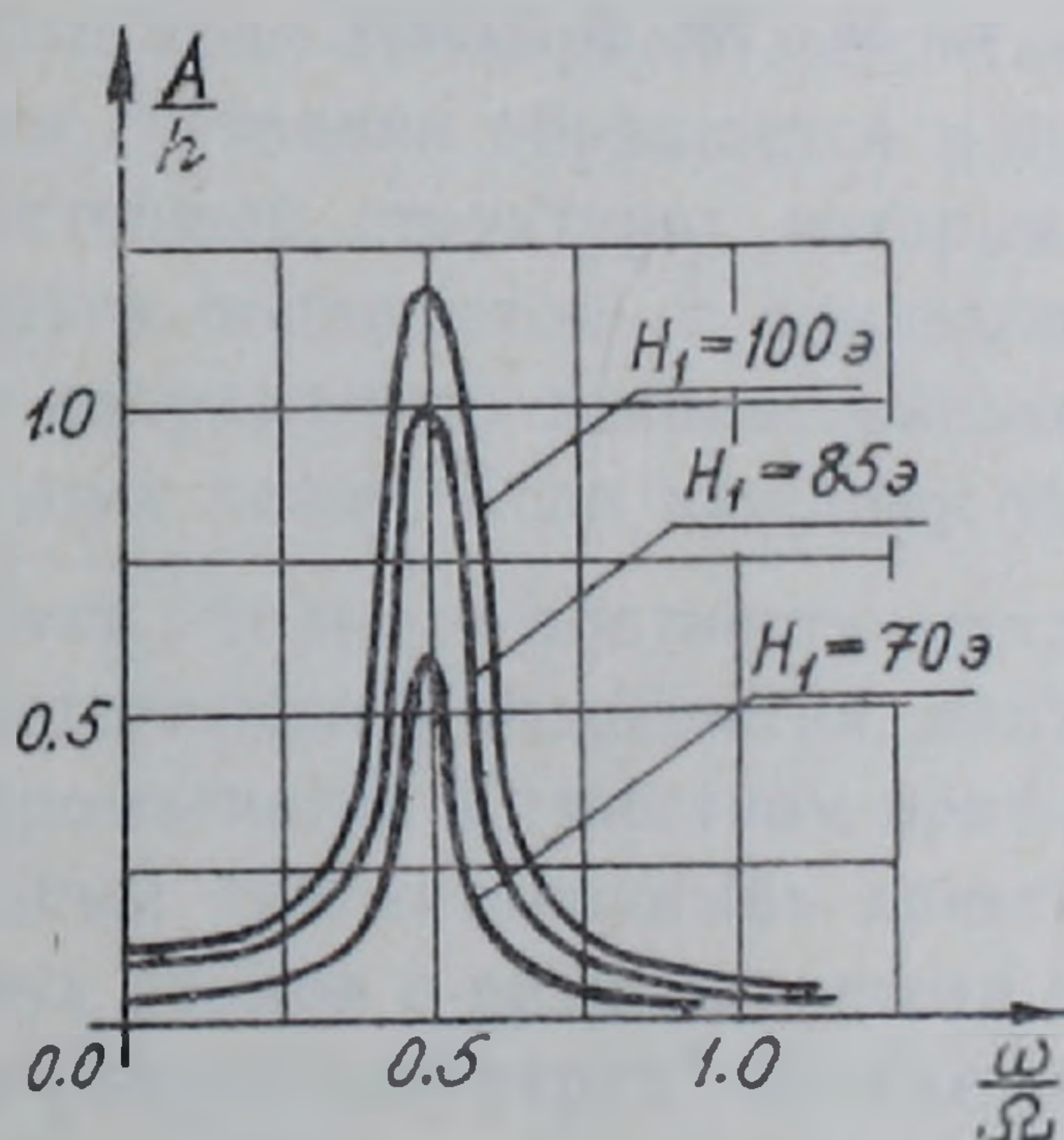
Последняя величина представляет собой декремент затухания собственных магнитоупругих колебаний пластинки.

Из условия, что знаменатель выражений (2.7) и (2.8) отличен от нуля, определяем следующее множество значений коэффициента пульсации μ_2 :

$$0 \leq \mu_2 < \sqrt{\Delta/\pi}, \quad (2.9)$$

при которых система находится вне второй области динамической неустойчивости (области, расположенной около частоты $\omega = \Omega/2$).

На основании уравнения (2.8) произведены вычисления амплитуды вынужденных колебаний пластинки в зависимости от частоты ω заданного магнитного поля при различных значениях амплитуды H_1 , удовлетворяющие условию (2.9). Для расчета принято $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см²; $\nu = 0,36$; $\Delta = 0,1\pi$; $h/a = 5 \cdot 10^{-3}$. Результаты подсчета значений A/h приведены на рисунке.



Как видно из формулы (2.8) и графика, вблизи частоты внешнего магнитного поля, равной половине собственной частоты пластинки, даже для достаточно слабых магнитных полей ($H_1 < 10^2$ э), происходит бурное увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Формулы (2.7), (2.8) и численные расчеты показывают также, что амплитуда колебаний монотонно возрастает с увеличением как величины a/h , так и амплитуды H_1 внешнего магнитного поля. При $a \geq 10^2 h$ и $H_1 \geq 10^3$ э амплитуда вынужденных колебаний может в несколько сотен раз превосходить толщину пластинки. Это свидетельствует о необходимости в таких случаях решать задачу на основе нелинейных уравнений магнитоупругости тонких пластин, полученных в работе (7).

Իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական և պարամետրական տատանումները ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ

Աշխատանքում հաստատված է, որ ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի օգնությամբ կարելի է իդեալական հաղորդիչ սալին հաղորդել ռեզոնանսային (ինչպես սովորական, այնպես էլ պարամետրական) տատանումներ: Ստացված են բանաձևեր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականությունների և ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաների որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Наука, М., 1982.
- ² S. Kaliski, Proc. Vib. Probl., v. 3, N 4 (1962). ³ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977.
- ⁴ Г. Е. Багдасарян, Прикладная механика, т. 19, № 12 (1983). ⁵ В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, Наука, М., 1972. ⁶ В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М., 1956. ⁷ Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 38, № 2 (1985).

УДК 537.8

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Тарханян

Спин-решеточные поляритоны в антиферромагнетиках

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Носифьяном 25/III 1985 г.)

В макроскопической модели антиферромагнетизма предполагается, что кристаллическая решетка представляет собой совокупность нескольких подрешеток, с каждым l -м узлом которых связан локализованный магнитный момент, пропорциональный спиновой переменной $\vec{S}_l$ ⁽¹⁾. При температурах, достаточно низких по сравнению с температурой Нееля, обменное взаимодействие между спинами ближайших соседей приводит к появлению антиферромагнитного порядка, так что в отсутствие внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент антиферромагнетика в основном состоянии обращается в нуль. Рассмотрим антиферромагнетик простейшей структуры, который состоит из двух вставленных друг в друга подрешеток с одинаковыми по величине и противоположными по направлению локализованными магнитными моментами последовательных узлов. Если каждому узлу приписать «магнитный заряд» $\varphi = -\text{div} \vec{m}$, где $\vec{m}(\vec{r})$ — плотность макроскопического магнитного момента соответствующей подрешетки, приходящаяся на один атом, то такой антиферромагнетик в известном приближении можно рассматривать как идеальный «магнитоионный» кристалл, каждая ячейка которого состоит из двух атомов с разноименными магнитными зарядами $\pm \varphi$, так что полный «магнитный заряд» ячейки равен нулю. Очевидно, что в таком кристалле возможны механические колебания решетки, аналогичные оптическим фононам в гетерополярных кристаллах типа NaCl ⁽²⁾. Введение понятия магнитных зарядов в макроскопической теории антиферромагнетиков оказывается весьма полезным, так как позволяет использовать некоторые результаты теории диэлектриков. Исследуем, например, длинноволновые оптические колебания, возникающие при малом смещении узлов спиновой решетки из положений равновесия в магнитоионном кристалле. Речь идет о колебаниях, длина волны которых значительно меньше размеров образца, но достаточно велика по сравнению с межатомным расстоянием, так что можно воспользоваться континуальным приближением. Полагаем, кроме того, что смещения атомов происходят без изменения ориентации магнитных моментов, и не будем рассматривать ни спиновые волны, ни их взаимодействие с интересующими нас тепловыми колебаниями. Поскольку все элементарные ячейки в кристалле эквивалентны, то достаточно рассмотреть движение атомов в одной ячейке. Обозначив через $\vec{w}$ относительное

смещение подрешеток с разноименными магнитными зарядами в узлах, получим уравнение движения в виде

$$m\ddot{\vec{w}} = -\chi\vec{w} + \varphi\vec{H}, \quad (1)$$

где $m^{-1} = m_+^{-1} + m_-^{-1}$ — приведенная масса атомов в элементарной ячейке, χ — коэффициент квазиупругой силы, $\vec{H}$ — возмущение : ффективно-го магнитного поля, возникающее при колебаниях, либо внешнее магнитное поле, действующее на магнитный заряд φ . Если рассматривать $\vec{w}$ как обобщенную координату, то (1) можно получить из уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{w}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{w}} = 0$, где плотность лагранжиана для длинноволновых оптических колебаний в отсутствие диссипации

$$L = \frac{N}{2} (m\dot{\vec{w}}^2 - \chi\vec{w}^2) + N\varphi\vec{w} \cdot \vec{H}, \quad (2)$$

N — число ячеек в единице объема. При этом вектор магнитной индукции имеет вид

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + N\varphi\vec{w}, \quad (3)$$

где второй член в правой части, равный $\frac{\partial L}{\partial \vec{H}}$ дает магнитный момент, возникающий при смещении атомов из положений равновесия, $\mu \approx 1$ магнитная проницаемость при $\omega \rightarrow \infty$. Для определения характера колебаний положим $\vec{w} = \vec{w}_l + \vec{w}_t$, где $\vec{w}_l$ — соленоидальный, а $\vec{w}_t$ — потенциальный вектор ($\text{div}\vec{w}_l = 0$, $\text{rot}\vec{w}_t = 0$). Поскольку в отсутствие свободных магнитных зарядов $\text{div}\vec{B} = 0$, то из (3) получим

$$\vec{H} = -\frac{N\varphi}{\mu}\vec{w}_t. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя соленоидальную и потенциальную части, получим

$$\ddot{\vec{w}}_t = -\omega_t^2\vec{w}_t, \quad \omega_t^2 = \frac{\chi}{m}, \quad (5)$$

$$\ddot{\vec{w}}_l = -\omega_l^2\vec{w}_l, \quad \omega_l^2 = \frac{\chi + N\varphi^2\mu^{-1}}{m}. \quad (6)$$

В силу магнитостатических эффектов частота продольных колебаний ω_l значительно больше частот поперечных колебаний ω_t^* . В отличие от последних, в которых $\vec{H} = 0$, продольные колебания соп-

* Нетрудно показать, что формула Лиддена—Сакса—Теллера здесь заменяется соотношением $\frac{\omega_l^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{M_s}{2H_s}$, где M_s — намагниченность насыщения одной магнитной подрешетки, $H_s = H_e + \frac{1}{2}H_A$ — эффективное магнитное поле, H_e — поле обмена, H_A — поле анизотропии.

ровождаются полем (4). Это поле следует рассматривать как малое возмущение эффективного поля, ответственного за магнитный порядок.

Рассмотрим теперь образование нового типа коллективных колебаний, представляющих собой своеобразный гибрид колебаний спиновой решетки с электромагнитными волнами в магнитоионном кристалле. Взаимодействие между указанными подсистемами колебаний оказывается особенно существенным в окрестности точек пересечения соответствующих дисперсионных кривых. Кванты таких связанных колебаний будем называть спин-решеточными (СР) поляритонами. Макроскопическая теория последних сводится к совместному решению уравнений (1), (3) и уравнений электромагнитного поля

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Система (7) представляет собой инверсно-сопряженную форму уравнений Максвелла, предложенную А. Г. Иосифьяном (3) и обоснованную в (4). Основное отличие этих уравнений от общепринятой формы уравнений макроскопической электродинамики заключается в том, что при наличии свободных „магнитных зарядов“ $\vec{B} \neq \operatorname{rot} \vec{A}$, но $\vec{D} = \operatorname{rot} \vec{A}_g$. До сих пор мы пользовались только одним из уравнений системы (7): $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, которое не учитывает запаздывания. Полагая в (1), (3) и (7) все векторы $\sim \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, используя материальное соотношение $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и исключая $\vec{E}$, в рассматриваемом недиссипативном приближении получим

$$\vec{\omega} = \frac{\varphi \vec{H}}{m(\omega_l^2 - \omega^2)}, \quad \vec{B} = \mu \frac{(\omega^2 - \omega_l^2) \vec{H}}{\omega^2 - \omega_l^2}, \quad (8)$$

$$k^2 \vec{H} - \vec{k} \cdot (\vec{H} \vec{k}) = \epsilon \omega^2 \vec{B}. \quad (9)$$

С помощью (8), (9) легко видеть, что продольные ($\vec{\omega} \parallel \vec{k}$) магнитоактивные колебания решетки не связываются с электромагнитными волнами: в них $\vec{E} = 0$, $\vec{H} \neq 0$, $\vec{H} \parallel \vec{B} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{k}$, а частота по-прежнему равна ω_l . С другой стороны, возникают поперечные спин-решеточные поляритоны с законом дисперсии

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \epsilon \mu \frac{\omega^2 - \omega_l^2}{\omega^2 - \omega_l^2}. \quad (10)$$

В этих связанных колебаниях $\vec{E} \perp (\vec{B} \parallel \vec{H} \parallel \vec{\omega}) \perp \vec{k}$. Из (10) следует, что СР-поляритоны распространяются лишь в двух областях частот: $\omega < \omega_l$ и $\omega > \omega_l$, а между ними кристалл непрозрачен для электромагнитных волн ($k^2 < 0$)*. При $\omega = \omega_l$ имеет место отсечка ($k = 0$), при

* Такая щель в спектре поляритонов была обнаружена в CoF_2 (5).

$\omega = \omega_l$ — резонанс ($k \rightarrow \infty$). При заданном значении волнового вектора $\vec{k}$ существуют две ветви поперечных СР-поляритонов с частотами

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\mu}} \left\{ k^2 + \epsilon\mu\omega_l^2 \pm \left[(k^2 + \epsilon\mu\omega_l^2)^2 - 4\epsilon\mu k^2\omega_l^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Легко видеть, что при $k \rightarrow \infty$ высокочастотная ветвь приближается к прямой $\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, которая соответствует распространению чистых (не смешанных с колебаниями решетки) электромагнитных волн в кристалле. Низкочастотная ветвь приближается к этой прямой лишь при $k \rightarrow 0$. Естественно, что соотношения (11) напоминают зависимость частоты от волнового вектора обычных поляритонов в ионном кристалле. Но если последние возникают лишь при наличии ионов с разноименными электрическими зарядами, то СР-поляритоны в антиферромагнетиках существуют даже если все атомы в узлах решетки нейтральные.

В заключении заметим, что предсказанные выше СР-поляритоны могут быть обнаружены при исследовании частотной зависимости инфракрасного поглощения или отражения. Используя (10), легко показать, например, что в случае нормального падения волны на плоскую поверхность образца коэффициент отражения имеет максимум в области частот $\omega_l < \omega < \omega_l$ и быстро падает с увеличением частоты, достигая минимума при значении

$$\omega_{\min} = \left(\frac{\epsilon\mu\omega_l^2 - \omega_l^2}{\epsilon\mu - 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Весьма удобным материалом для экспериментальных исследований указанных особенностей может служить, например, твердый кислород.

Автор признателен академику АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяну за полезное обсуждение.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Թ. Հ. ԹԱՐԽԱՆՅԱՆ

Սպին-ցանցային պոլյարիտոններն անտիֆերոմագնետիկներում

Աշխատանքում հետազոտված են անտիֆերոմագնետիկական բյուրեղային ցանցի երկայնալիք տատանումների առանձնահատկությունները: Ցույց է տրված, որ այդպիսի բյուրեղներում բացի սպինային ալիքներից հնարավոր են նոր տեսակի կոլեկտիվ տատանումներ, որոնք իրենցից ներկայացնում են էլեկտրամագնիսական ալիքների և սպինային ցանցի օպտիկական տատանումների յուրատեսակ հիբրիդ: Ստացված և հետազոտված են այդպիսի սպին-ցանցային պոլյարիտոնների դիսպերսիոն առնչությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ч. Киттель, Квантовая теория твердых тел, Наука, М., 1967. ² М. Борн, Х. Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ, 1958. ³ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 51, № 1 (1970); т. 55, № 2 (1972). ⁴ Р. Г. Тарханян, ДАН АрмССР, т. 53, № 3 (1972). ⁵ К. Haussler, Phys. Stat. Sol. (b), v. 105, K81 (1981).

УДК 538. 662. 13,54—165

ФИЗИКА

В. Е. Адамян

Метод расчета составов многокомпонентных сплавов с контролируемыми параметрами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 29/VII 1986)

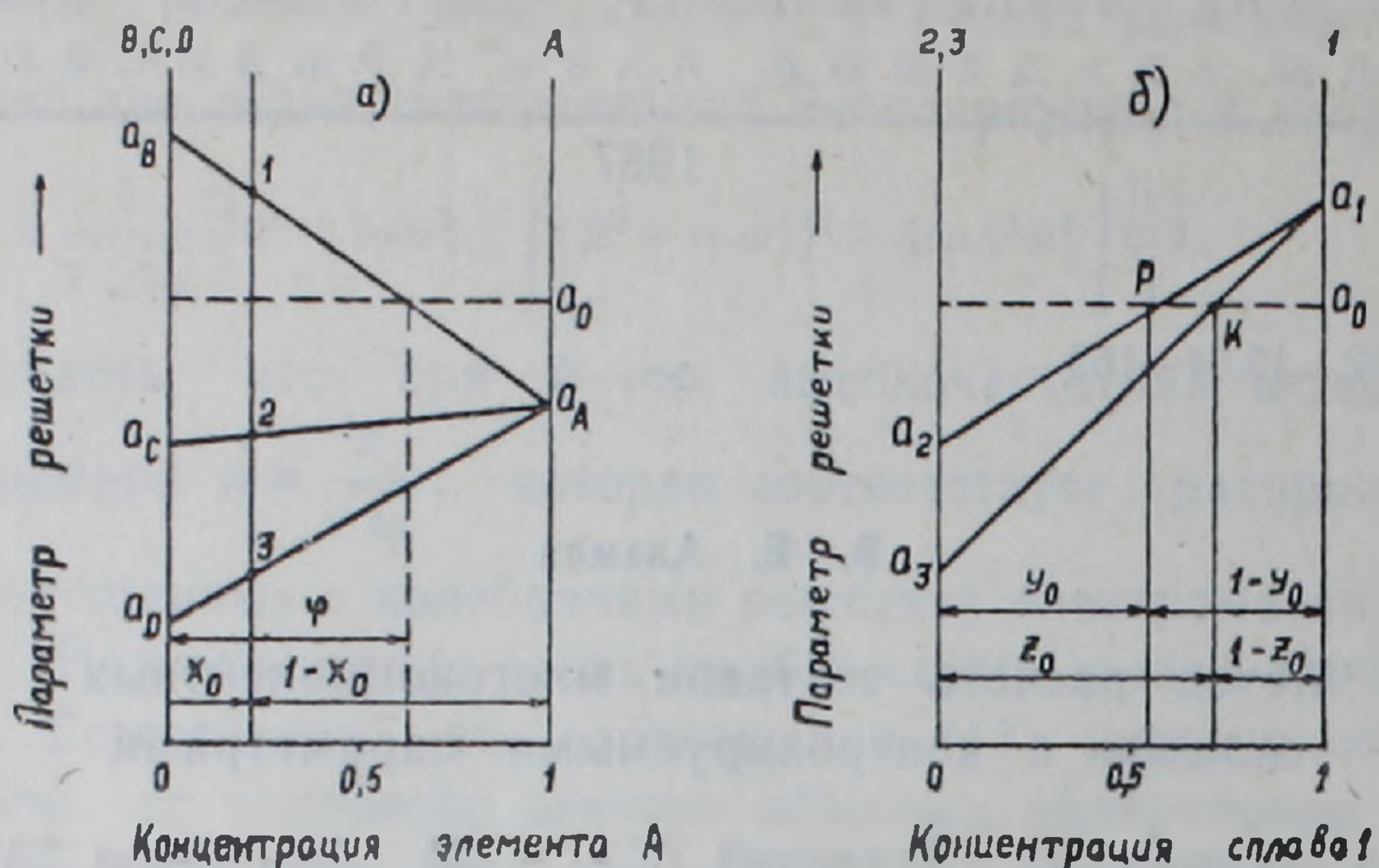
Получение новых материалов с заданными и регулируемые физическими свойствами является одной из важнейших задач научно-технического прогресса. Большую группу применяемых в технике материалов составляют магнитоупорядоченные металлические сплавы и твердые растворы Их изучение, помимо очевидной практической важности, представляет и чисто научный интерес. Исследуя зависимость магнитных свойств от состава и кристаллической структуры сплавов и соединений, можно ближе подойти к решению проблемы возникновения магнитоупорядоченного состояния.

Обычно в зависимости от поставленной задачи готовятся образцы с различным соотношением компонентов и исследуется зависимость интересующей физической величины от состава. Меняя соотношения компонентов сплава, можно получить различные концентрационные зависимости интересующих физических свойств. Однако в ряду сплавов вместе с концентрацией меняется также и параметр кристаллической решетки, что делает невозможным однозначную интерпретацию полученных результатов^(1,2).

В настоящей работе предлагается метод расчета состава многокомпонентных сплавов, в которых желаемым образом, независимо друг от друга можно менять в определенных пределах концентрацию магнитоактивных ионов, параметр решетки, а также концентрацию электронов проводимости (число электронов в элементарной ячейке) для кристаллов с кубической структурой. Суть метода заключается в следующем.

Пусть A , B , C и D —вещества (металлы, соединения или твердые растворы), имеющие кубическую кристаллическую структуру и одинаковые концентрации электронов проводимости. Допустим, далее, что A —магнитный, а B , C и D —немагнитные материалы. На рисунке представлена зависимость параметров решетки твердых растворов между магнитным A и немагнитными материалами B , C и D .

Пусть надо рассчитать составы различных сплавов с концентрацией магнитоактивных ионов x_0 ($0 < x_0 < \varphi_0$), с параметром кристаллической решетки a_0 ($a_3 < a_0 < a_1$) и с постоянной концентрацией электронов проводимости. Для этого рассмотрим твердые растворы составов $A_{x_0}B_{1-x_0}$, $A_{x_0}C_{1-x_0}$ и $A_{x_0}D_{1-x_0}$ (точки 1, 2 и 3 на рисунке, а) с параметрами решеток, соответственно равными a_1 , a_2 и a_3 . Если те-



Зависимость параметра решетки от состава

перь сделать допущение, что между составами 1—2 и 1—3 образуются также твердые растворы с линейным изменением параметра решетки (см. рисунок, б), то можно найти такое соотношение компонентов y_0 между 1 и 2, при котором параметр решетки равен a_0 .

$$P \equiv (A_{x_0} B_{1-x_0})_{y_0} (A_{x_0} C_{1-x_0})_{1-y_0} = A_{x_0} B_{(1-x_0)y_0} C_{(1-x_0)(1-y_0)}. \quad (1)$$

Подобным образом можно найти соотношение z_0 между 1 и 3 с параметром решетки, равным a_0 .

$$K \equiv (A_{x_0} B_{1-x_0})_{z_0} (A_{x_0} D_{1-x_0})_{1-z_0} = A_{x_0} B_{(1-x_0)z_0} D_{(1-x_0)(1-z_0)}. \quad (2)$$

И наконец, образовав твердые растворы составов $P_t K_{1-t}$ ($0 \leq t \leq 1$), получим серию многокомпонентных твердых растворов различных составов, в которых концентрация магнитоактивных ионов, концентрация электронов проводимости и параметр решетки — заранее заданные величины:

$$A_{x_0} B_{(1-x_0)y_0 t + (1-x_0)z_0(1-t)} C_{(1-x_0)(1-y_0)t} D_{(1-x_0)(1-z_0)(1-t)}. \quad (3)$$

В случае составов, выражаемых формулами (1) и (2), имеем сплавы, в которых концентрации магнитоактивных ионов и электронов проводимости постоянны, а параметр решетки может меняться от a_1 до a_2 или от a_1 до a_3 с изменением y и z от 0 до 1. Для составов, выражаемых формулой (3), при различных x будем иметь образцы, в которых постоянны параметр решетки и концентрация электронов проводимости при переменной концентрации магнитоактивных ионов.

И наконец, если в случае составов, выражаемых формулой (3), вещества A и B (или A , B и C) отдают в кристаллическую решетку иное число свободных электронов, чем вещества C и D (или D), то, как показывают несложные расчеты, мы получаем сплавы, в которых при постоянных концентрациях магнитоактивных ионов и постоянном параметре решетки меняется только концентрация электронов проводимости.

Предложенная методика успешно проверяется на системах твердых растворов $(R, La, Yb, Y)Zn$, имеющих структуру типа $CsCl$, где

R^{3+} — парамагнитный редкоземельный ион, а La^{3+} , Lu^{3+} , Y^{3+} и Zn^{2+} — диамагнитные ионы.

Ереванский государственный университет

Վ. Ե. ԱԴԱՄՅԱՆ

**Ղեկավարվող պարամետրերով բազմակոմպոնենտ համաձուլվածքների
բաղադրությունների հաշվման մեթոդ**

Բերված է բազմակոմպոնենտ համաձուլվածքների բաղադրության հաշվարկի մեթոդ, որոնցում, անկախ իրարից, կարելի է ցանկացած ձևով փոփոխել ինչպես խորանարդային բյուրեղային ցանցի հաստատունը, այնպես էլ մագնիսական իոնների և ազատ էլեկտրոնների խտությունը որոշակի սահմաններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. П. Белов, М. А. Белянчикова, Р. З. Левитин и др., Редкоземельные ферро- и антиферромагнетики, Наука, М., 1965. ² В. Е. Адамян, А. А. Давтян, Г. Г. Закарян и др., ФТТ, т. 20, № 2 (1978).

УДК 621.375

ФИЗИКА

Т. И. Бутаева, А. В. Геворкян, А. С. Кузаян, А. Г. Петросян.

Форма поверхности раздела фаз при кристаллизации алюминиевых гранатов из расплава

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/IX 1986)

Форма границы раздела кристалл—расплав создается совокупным действием ряда факторов и, прежде всего, теплопереносом от растущей поверхности кристалла. Большая кривизна поверхности раздела фаз может приводить к появлению в кристаллах сложных оксидов структурных неоднородностей, например, гранных форм роста. При кристаллизации оксидов условия теплообмена в системе определяются в основном теплопереносом излучением через растущий кристалл, и формируемый профиль границы раздела имеет обычно выпуклую в сторону расплава форму. При совпадении полос поглощения кристалла с положением максимума спектральной плотности теплового излучения расплава форма границы раздела может измениться. Такая ситуация имеет место, например, при выращивании методом Чохральского кристаллов $Dy_3Al_5O_{12}$, обладающих (в отличие от остальных членов кристаллохимического ряда алюминиевых гранатов) большой поглощательной способностью в инфракрасной области спектра ⁽¹⁾.

В настоящей работе изучена форма поверхности раздела фаз в алюминиевых гранатах при кристаллизации вертикальным методом Бриджмена. Рассчитана разница поглощательной способности кристаллов (номинально чистых и содержащих в качестве примеси ионы Zr^{3+} ⁽²⁾), которая согласуется с экспериментально наблюдаемыми количественными изменениями эффекта.

Выращивание кристаллов проводили методом Бриджмена. Концентрация ZrO_2 в расплавах составляла 0,1—1 вес.%. Образцы для исследований формы границы раздела ($d=0,2$ см) изготавливали из продольных диаметральных срезов кристаллов. Для фотографирования полос роста и измерений использовали микроскопы МПС-2, МБИ-15. Для количественного сравнения поглощательной способности кристаллов $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$, $Dy_3Al_5O_{12}$, $Dy_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ и кристалла $Y_3Al_5O_{12}$ вычисляли долю излучения, поглощаемую кристаллом (ΔA), по отношению к суммарному излучению, проходящему через $Y_3Al_5O_{12}$ (T) по формуле ⁽¹⁾

$$\Delta A/T = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\lambda} d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\lambda} e^{-\alpha_{\lambda}(Zr^{3+}, Dy^{3+})} d\lambda \right) / \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\lambda} d\lambda,$$

где I_{λ} —спектральная интенсивность излучения черного тела при тем-

пературе 1970°C , α_{λ} — коэффициент поглощения на длине волны λ . Для определения коэффициентов поглощения снимали спектры поглощения кристаллов ($d=1\text{ см}$) в области от 1 до 6 мкм (спектрофотометры СФ-8 и ИКС-22). Расчеты проводили с использованием микро-ЭВМ ДЗ-28.

Полученные результаты приведены в таблице и на рис. 1 и 2.

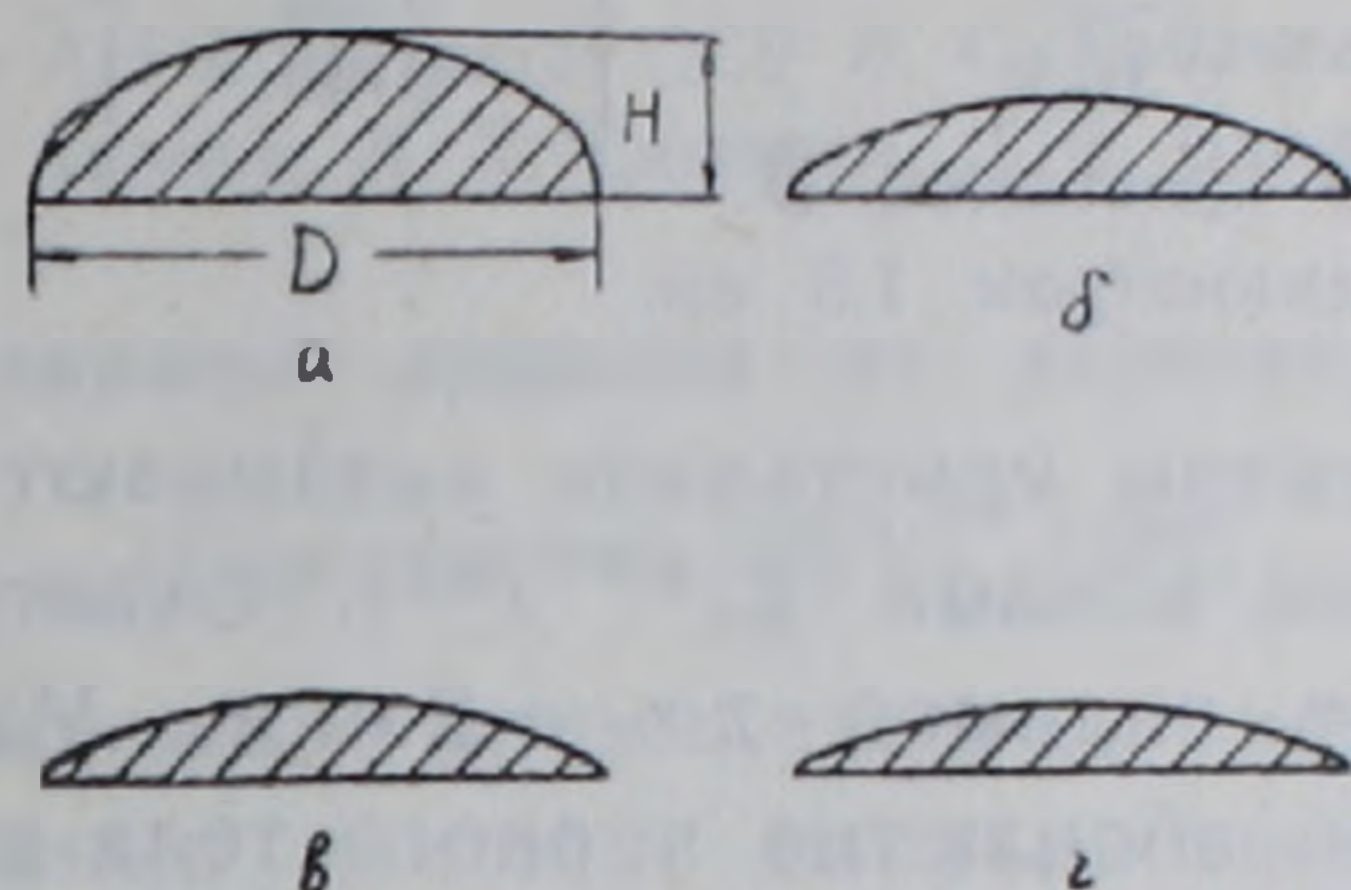


Рис. 1. Форма поверхности раздела фаз кристаллов: $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ (a), $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$ (0,5 ат. %) (б), $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ (в) и $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$ (0,5 ат. %) (г). Диаметр кристаллов = 15 мм

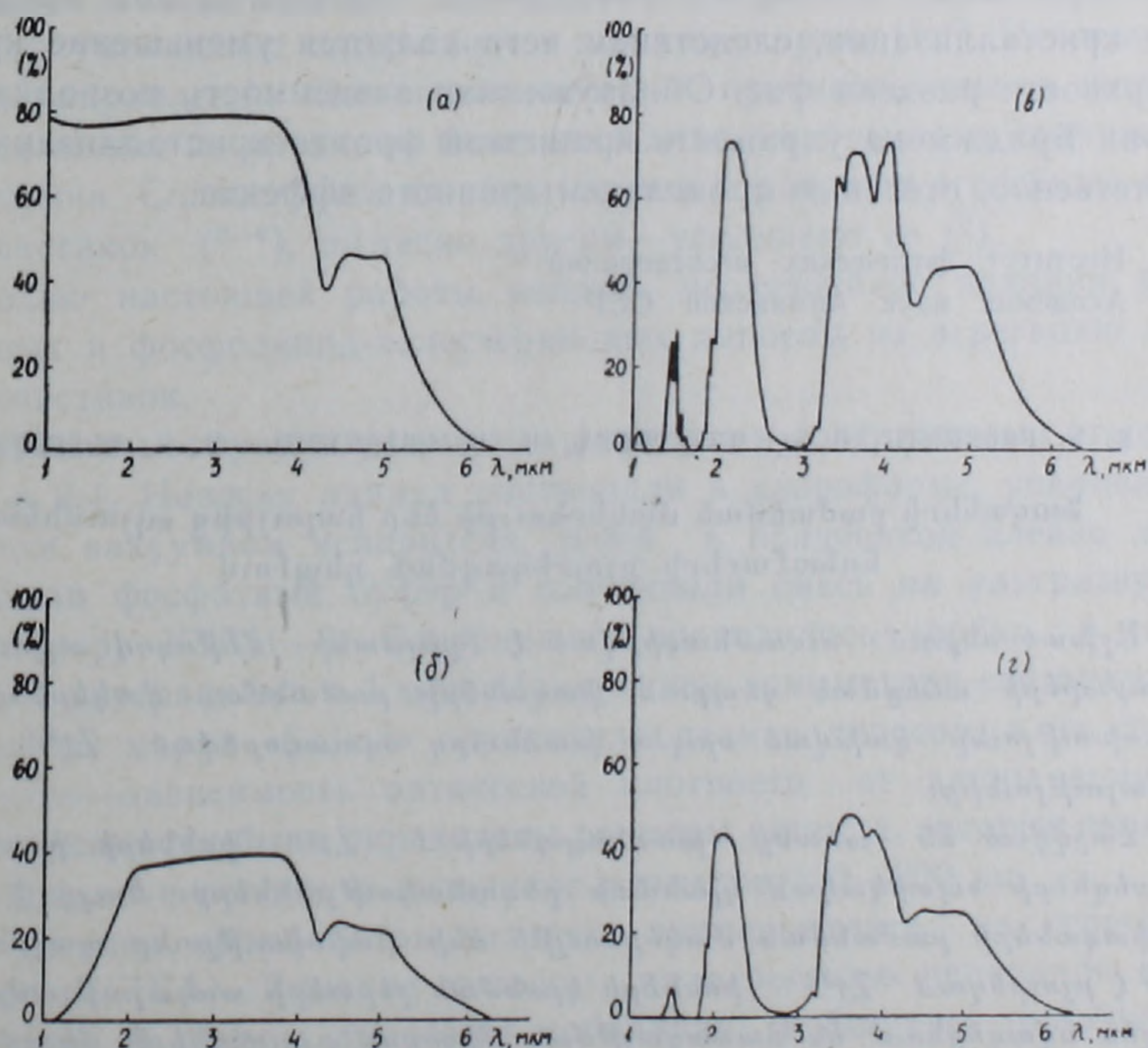


Рис. 2. Спектры пропускания кристаллов: $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ (a), $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$ (0,5 ат. %) (б), $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ (в) и $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$ (0,5 ат. %) (г) при 300 К

Они показывают, что форма поверхности раздела фаз в кристаллах $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$ по сравнению с $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ приближается к плоской; еще больший эффект имеет место в кристаллах $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ и $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}-\text{Zr}^{3+}$.

Доля излучения, поглощаемая кристаллами, и параметры, характеризующие форму и кривизну поверхности раздела фаз

Кристалл	Концентрация, ат. % в расплаве	$\Delta A/T$	H/D*	Радиус кривизны**
$Y_3Al_5O_{12}$	—	0	0,294	0,9
$Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$	0,1	0,3	—	—
	0,5	0,35	0,156	1,35
$Dy_3Al_5O_{12}$	—	0,55	0,147	1,45
$Dy_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$	0,5	0,65	0,108	1,75

* Высота, H/диаметр кристалла, D.

** Для кристаллов диаметром 1,5 см.

Оптические спектры кристаллов указывают (рис. 2), что поглощение, обусловленное ионами Zr^{3+} (^{2,3}), охватывает широкую спектральную область от видимой до ~ 2 мкм. Максимум спектральной плотности излучения абсолютно черного тела при температурах порядка $2000^\circ C$ лежит в области $\sim 1,3$ мкм, поэтому поглощение кристаллов, содержащих ионы Zr^{3+} , так же как и в случае ионов Dy^{3+} (¹), приводит к существенному уменьшению теплопереноса излучением через растущий кристалл.

Это приводит к изменению распределения температуры в системе расплав—кристалл в сторону уменьшения температурного градиента в зоне кристаллизации, следствием чего является уменьшение кривизны поверхности раздела фаз. Обнаруженная зависимость позволяет в геометрии Бриджмена управлять кривизной фронта кристаллизации и, соответственно, степенью проявления гранного эффекта.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Տ. Ի. ԲՈՒՏԱՆՎԱՆ, Ա. Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ա. Ս. ԿՈՒԶՆԵՅԱՆ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ֆազաների բաժանման մակերևույթի ձևի հալույթից ալյումինային
նոնաֆազերի բյուրեղացման դեպքում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Բրիջմանի մեթոդով ալյումինային նոնաֆազերի աճեցման դեպքում ֆազաների բաժանման մակերևույթի ձևի փոփոխությունը՝ կախված որպես խառնուրդ օդտազործված Zr^{3+} իոնների առկայությունից:

Հաշվված են առանց խառնուրդների և Zr^{3+} իոնների խառնուրդով բյուրեղների օպտիկական կլանման ընդունակությունները: Ցույց է տրված, որ ֆազաների բաժանման մակերևույթի ձևի փոփոխությունը պայմանավորված է բյուրեղում Zr^{3+} իոնների կլանման շերտերի առկայությամբ, որոնք էապես նվազեցնում են ճառագայթման միջոցով բյուրեղների միջով ջերմափոխանցումը: Արդյունքում ֆազաների բաժանման սահմանի տեսքը դառնում է մոտավորապես հարթ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ B. Cockayne, M. Chesswas, D. B. Gasson, J. Material Sci., v. 4, 450 (1969).
- ² Г. Р. Асатрян, А. С. Кузанын, А. Г. Петросян и др., ФТТ, т. 27, 3441 (1985).
- ³ H. R. Asatryan, A. S. Kuzanyan, A. G. Petrosyan et al., Phys. stat. sol. (b), v. 135, 343 (1986).

УДК 576.314

БИОФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Э. С. Табриелян, А. О. Генджян,
С. Э. Акопов, Л. Х. Симонян, С. А. Баджиян

Исследование влияния липосом на агрегацию тромбоцитов

(Представлено 20/VI 1986)

Липосомы в настоящее время активно исследуются в качестве одного из перспективных методов направленного транспорта лекарственных средств (¹). Это требует тщательного изучения влияния самих липосом на организм, и в особенности на кровь, с элементами которой липосомы прежде всего вступают в контакт при внутривенной инфузии. Известно, что липосомы с высоким содержанием холестерина могут увеличить его уровень в мембранах эритроцитов, микросомах, саркоплазматическом ретикулуме и т. д., а чисто фосфолипидные липосомы, наоборот, уменьшают содержание в них холестерина (²⁻⁴). Исследования в этом направлении немногочисленны и противоречивы, в частности неясно влияние на кровяные пластинки липосом с высоким содержанием холестерина. Согласно одним данным они подавляют агрегацию кровяных пластинок (⁵⁻⁶), согласно другим—усиливают ее (⁷).

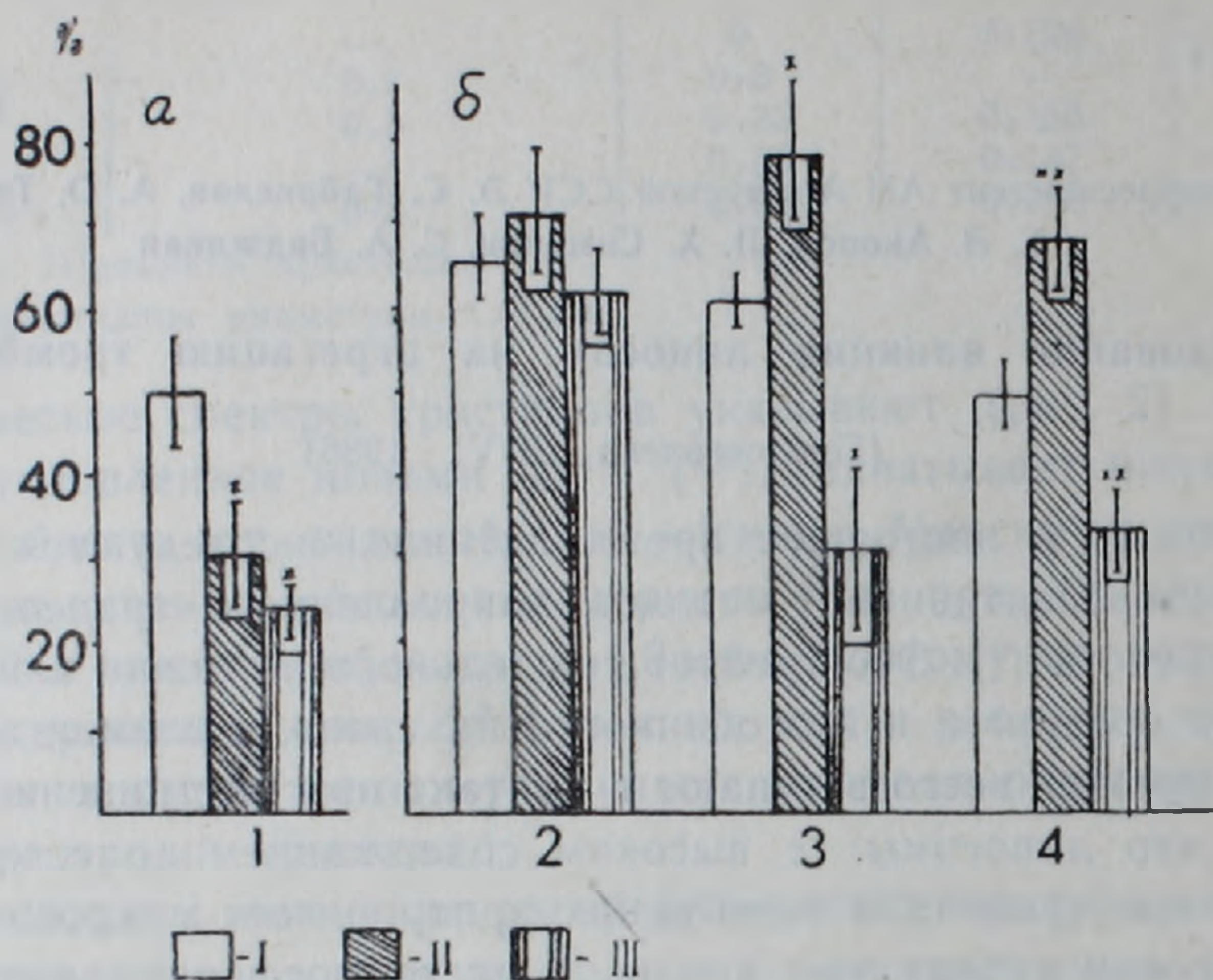
Целью настоящей работы явилось исследование влияния фосфолипидных и фосфолипид-холестериновых липосом на агрегацию кровяных пластинок.

Липосомы получили из яичного лецитина и холестерина в отношении 10:0,1 и 2:1. Навеску липида растворяли в хлороформе, упаривали на ротаторном вакуумном испарителе, затем к полученной пленке липида добавляли фосфатный буфер и озвучивали смесь на ультразвуковом диспергаторе УЗДН—1. Озвучивание проводилось дробно в течение 20 мин с интервалами в 1 мин. Измерением асимметрии светорассеяния на приборе марки «Sofica» определяли размер липосом, а на спектрофотометре—зависимость оптической плотности от длины волны; из этой зависимости были определены размеры везикул, которые оказались однородными и лежали в интервале размеров 150—200 нм.

Агрегация тромбоцитов человека исследовалась на агрегометре «Payton» (США). Влияние липосом на агрегацию проводили в двух вариантах. В первом липосомы добавляли в богатую тромбоцитами плазму (БТП) (300—350 тыс. клеток мкл⁻¹) до концентрации липида 2 мг/мл и инкубировали в течение 5 мин при 37°. Во втором варианте тромбоциты отмывали, затем проводили их инкубацию с липосомами в течение 150 мин, после чего клетки вновь отмывали и ресуспендировали в растворе Тироде с фибриногеном. Агрегацию тромбоцитов индуцировали АДФ (10⁻⁵М), коллагеном (2мкг/мл) и адреналином (5·10⁻⁶М). Данные обработаны статистически с применением непараметрического

критерия Вилконсона—Манна—Уитни и парного критерия Вилконсона.

Как видно на рисунке, липосомы из лецитина и холестерина как в отношении 10:0,1, так и 2:1 подавляют после 5-минутной инкубации АДФ-индуцированную агрегацию кровяных пластинок, ингибирующий



Влияние липосом на агрегацию тромбоцитов в БТП (а) и отмытых тромбоцитов (б): I—контроль; II—после обработки лецитин-холестериновыми липосомами 10:0,1; III—после обработки лецитин-холестериновыми липосомами 2:1. По оси ординат—агрегация тромбоцитов в % падения оптической плотности. Одна звездочка— $p < 0,05$; две— $p < 0,01$. 1,2—АДФ; 3—коллаген, 4—адреналин

эффект сохранялся и через 30 мин, хотя и был менее выраженным. В отдельных экспериментах было установлено, что и коллаген-индуцированная агрегация также подавляется липосомами в этих условиях. При этом эффект липосом с высоким содержанием холестерина был несколько более сильным (рисунок).

Иная картина наблюдалась в случае исследования влияния липосом на отмытые тромбоциты в условиях их длительной инкубации. В подобных условиях, как это было показано в многочисленных исследованиях, идет интенсивный обмен липидными компонентами между липосомами и клетками, с которыми они контактируют. При этом в случае липосом с высоким содержанием холестерина его уровень в клеточных мембранах увеличивается, а в случае липосом с низким содержанием холестерина, напротив, уменьшается, причем эти изменения могут быть весьма выраженными (^{2-5,7}). Проведенные эксперименты показали, что обогащение и обеднение тромбоцитов холестерином соответственно увеличивает и понижает агрегируемость под действием различных индукторов. Этот эффект был мало выражен для АДФ-индуцированной агрегации, но весьма значителен для агрегации, индуцированной коллагеном и адреналином (рисунок).

Таким образом, проведенное исследование показало, что при воздействии липосом с различным содержанием холестерина на тромбоциты приходится считаться с двумя факторами. С одной стороны,

может наблюдаться ингибирование агрегации, которое имеет место непосредственно в плазме. Этот эффект, по-видимому, не связан с обменом липидными компонентами между липосомами и тромбоцитами, а обусловлен каким-то другим механизмом.

Однако если условия воздействия липосом на тромбоциты допускают интенсивный обмен между ними липидных компонентов, то здесь начинают проявляться мембранные эффекты холестерина, которые приводят к иным изменениям агрегируемости тромбоцитов. Ее увеличение в случае воздействия липосом с высоким содержанием холестерина может быть связано с подавлением активности Na K-АТФазы, характерным для повышенного содержания холестерина в мембранах (^{3,4}), поскольку известно, что ингибирование активности этого фермента приводит к повышению способности тромбоцитов к агрегации (⁵). Можно заключить, что при исследовании возможностей использования липосом в качестве носителей лекарственных средств необходимо учитывать характер их воздействия, его длительность и т. д. и соответственно подбирать их липидный состав. По-видимому, липосомы с низким содержанием холестерина вообще могут использоваться в качестве средства для коррекции повышенной агрегируемости кровяных пластинок, которое может быть усилено включением в липосомы соответствующих лекарственных средств.

НИИ медицинской радиологии Министерства Здравоохранения
Армянской ССР
Ереванский государственный
медицинский институт
Ереванский государственный
университет

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղաքից անդամ է. Ս. ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, Հ. Օ. ԳՅՈՆՋՅԱՆ,
Ս. Է. ԱԿՈՊՈՎ, Լ. Խ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ս. Ա. ԲԱԶԻՆՅԱՆ

Թրոմբոցիտների ագրեգացիայի վրա լիպոսոմների ազդեցության ուսումնասիրությունը

Ուսումնասիրվել է ֆոսֆոլիպիդների և ֆոսֆոլիպիդ-խոլեստերինային
լիպոսոմների ազդեցությունը թրոմբոցիտների ագրեգացիայի վրա:

Հայտնաբերվել է, որ խոլեստերին պարունակող լիպոսոմները մեծացնում
են թրոմբոցիտների զգայնությունը ագրեգացիայի մակաժիչների նկատմամբ,
իսկ ֆոսֆոլիպիդային լիպոսոմները ցածրացնում են այն: Ենթադրվում է,
որ այն կապված է լիպոսոմների հետ լիպիդային բաղադրամասերի ինտեն-
սիվ փոխանակության ընթացքում թրոմբոցիտների ճարպային կազմի փո-
փոխության հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ G. Maierhofer, Ant Lab., v. 15, 5 (19). ² Е. А. Бородин, В. И. Сергиенко, Э. М. Халилов и др., Вопросы мед. химии, № 2, 1981. ³ А. Д. Таганович, Э. И. Олецкий, В. К. Кухта, Вопр. мед. химии, № 5, 1985. ⁴ Ю. М. Лопухин, А. И. Арчаков, Ю. А. Владимиров и др., Холестериноз, Наука, М., 1983. ⁵ Э. С. Габриелян, С. Э. Акопов, Клетки крови и кровообращение, Айастан, Ереван, 1985. ⁶ В. Р. Бедичевский, Р. А. Маркосян, Е. Я. Позин и др., Бюл. exper. биол. и мед., № 8, 1979. ⁷ P. A. Niergenberg, P. A. Sysel, Y. Turulull e. a., Biochemistry, v. 17 (1978).

УДК 612.821.6+014.462

ФИЗИОЛОГИЯ

Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг

Действие осмотического стресса, вызванного
маннитом, на обучение и память крыс

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 12/VIII 1986)

Достижения молекулярно-клеточной биологии могут быть использованы для выяснения механизмов действия различных факторов внешней среды на целостный организм. Однако прямая имитация эффекта, полученного на уровне клетки, может быть затруднена на уровне организма вовлечением в реакцию целого ряда дополнительных органов и систем. Поэтому использование данных молекулярно-клеточного анализа вызывает необходимость поиска адекватных, функционально подобранных тестов, отвечающих сложности реагирования целостного организма на применяемое воздействие.

Исследования С. Н. Айрапетяна и сотр. (¹⁻³) показали, что инкубирование нейрона центральной нервной системы виноградной улитки в гипертоническом и гипотоническом растворе приводит соответственно к уменьшению и увеличению объема нервной клетки, а также к понижению и повышению проницаемости, возбудимости и хемочувствительности мембраны нейрона. В этой связи в данной работе была предпринята попытка воспроизвести тормозной эффект гипертонического раствора на процессы научения и памяти у млекопитающих животных.

Опыты проведены на беспородных белых крысах-самцах (n=15) массой 200—300 г. Использовалась условнорефлекторная методика, дающая животным возможность свободного передвижения и выбора, сводя к минимуму контакт с экспериментатором. Методика позволяет также тестировать состояние не только долговременной, но и кратковременной рабочей памяти крысы. Она представляет собой лабиринтную установку, состоящую из стартовой камеры (СК), распределителя, ведущего к коридорам в двух направлениях, и собственно коридоров, отделенных от распределителя шторками со зрительными изображениями. Из двух направлений одно подкреплялось («крест») пищей, а другое служило в качестве дифференцировки («квадрат»). Таким образом, место подкрепления определялось не местонахождением коридоров, а знаком на шторке, которая висит у входа в коридор. Выработка дифференцировки достигалась постоянными (через каждые 2—3 пробы) перестановками коридоров местами. В случае правильного выбора коридора крысы получали в его конце подкрепление (творожный шарик весом 0,5—0,6 г). Затем верхнюю крышку коридора открывали, и крыса по лабиринту уже эстакадного типа возвращалась в СК для

повторения цикла пищедобывательного акта—побежки к кормушке. Эксперименты проводились раз в 2—3 дня и состояли из 10 последовательных проб. Крыс брали на опыт после суточной пищевой депривации. Уровень их пищевой возбудимости определяли путем кормления крыс творожными шариками, давая один за другим, сразу после поедания очередного. Регистрировали скорость поедания шариков и уровень насыщения. Измеряли также временные параметры реакции побежки к кормушке, задержки у кормушки после подкрепления, возвращения в СК, умывательной реакции. Подсчитали количество акта уринации в лабиринте по ходу опыта.

Для создания в организме гипертонической внутренней среды использовали 2 М водный раствор маннита ($C_6H_{14}O_6$, мол. вес 182,18). Как агент, вызывающий осмотический стресс в организме подобно другим осмоактивным веществам (⁴⁻⁶), маннит выгодно отличается тем, что не проникает внутрь клетки, не утилизируется организмом. Это позволяет связывать эффекты маннита с изменениями во внутренней осмотической среде организма.

Инъекцию маннита и физиологического раствора осуществляли внутрибрюшинно (2—3 мл) за 10 мин до начала эксперимента. Было проведено 36 инъекций маннита и 5 физиологического раствора. Обнаружено, что введение маннита приводит к нарушению пищедобывательного поведения в отличие от инъекции физиологического раствора. Во всех опытах после введения маннита (2 мл) нарушалось поведение возвращения в СК. В 83% случаев нарушение возвращения носило переменный характер, т. е. крыса то переставала возвращаться в СК после подкрепления, то вновь возобновляла поведение возвращения. При этом крысы в случае задержки у кормушки проявляли не умывательное или ориентировочно-исследовательское поведение, как в контрольных опытах, а сидели или лежали неподвижно с закрытыми глазами. Создавалось впечатление, что крысы дремали.

В 56% опытов крысы после инъекции маннита (3—3,5 мл) прекращали на определенное время и побежки к пище из СК. Прекращение побежки к пище сопровождалось полным угнетением общей двигательной активности, закрыванием глаз, повышением порога реакции на внешние звуковые раздражители.

Для опытов с введением маннита (2 мл) характерно замедление ($P < 0,001$) выполнения всех элементов пищедобывательного поведения (рис. 1). В то же время никаких нарушений памяти у крыс не обнаружено. При выборе не было совершено ни одной ошибки. Крысы, у которых не сформировался латерализованный стереотип направления побежки до коридоров, сохранили в памяти место предшествующего подкрепления. Таким образом, ни долговременная, ни оперативная память не пострадала.

Спустя 10—15 мин после инфузии маннита наблюдалось учащение акта уринации. Если за время контрольного опыта (20—30 мин) у крыс практически уринация отсутствовала или же отмечалась не более одного раза, то на фоне маннита она заметно возросла, в отдельных случаях до 14 раз. Причем первые порции мочи имели желтый цвет, а в дальнейшем моча стала практически бесцветной. Любопытно,

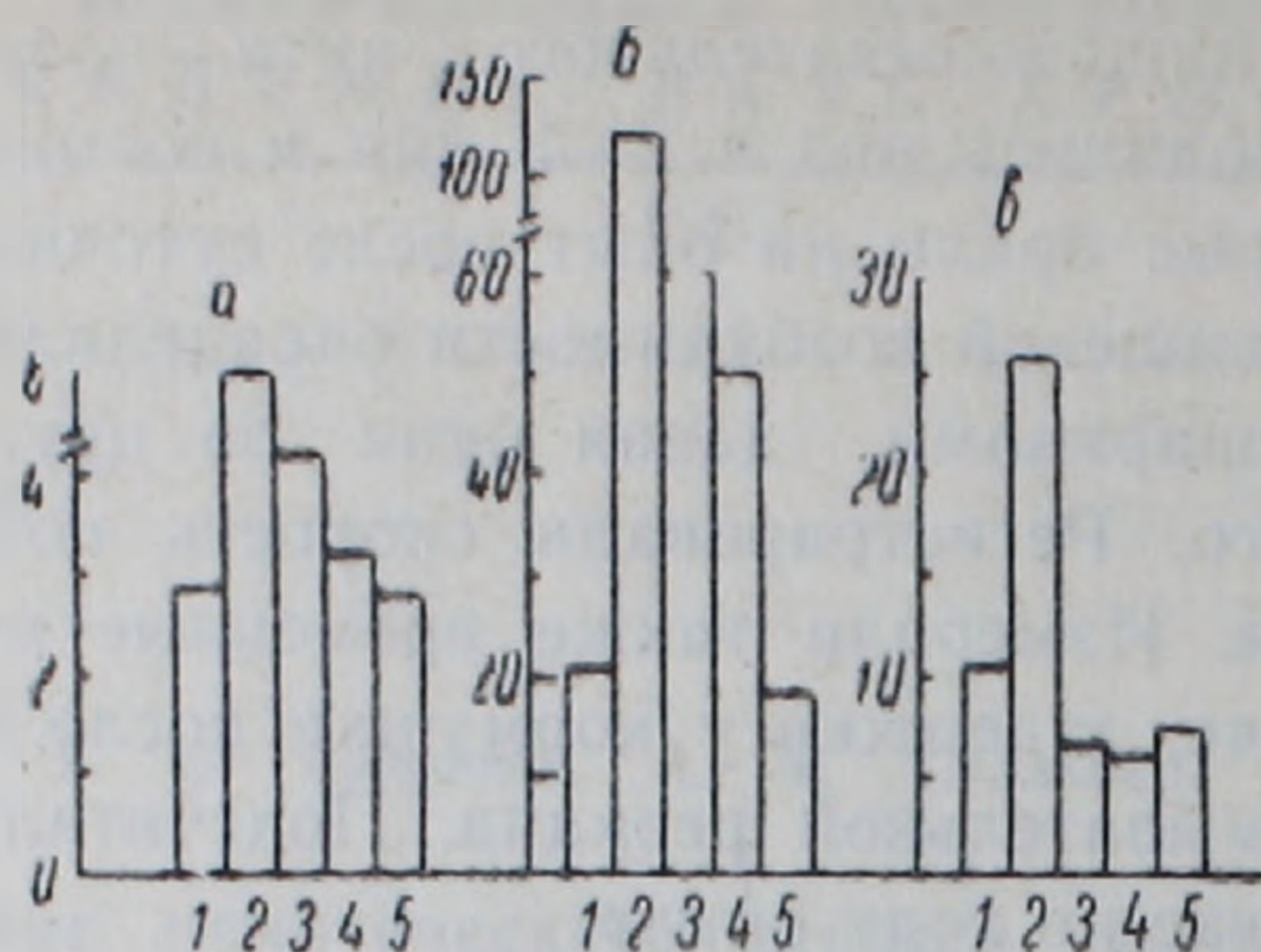


Рис. 1. Изменение элементов двигательного-пищевого поведения крыс в лабиринте при гиперосмотическом стрессе, вызванном маннитом. *а*—побежка к кормушке; *б*—задержка у кормушки; *в*—возвращение в СК. На оси абсцисс средние данные 15 крыс. 1—контроль; 2—после инъекции маннита (2 мл); 3—через 3, 4—через 5, 5—через 9 дней после введения. На оси ординат— время в с

что крысы охотно лизали собственную мочу, чего не наблюдалось в контрольных опытах.

После опытов определялся уровень пищевой возбудимости и насыщения. В отличие от контроля, после введения маннита скорость поедания пищи и уровень насыщения падали в два с лишним раза (рис. 2). Для того чтобы выявить связь между уровнем пищевой возбудимости и нарушениями пищедобывательного поведения, обнаруженного в экспериментах, проверялась пищевая возбудимость сразу через 10 мин после инъекции маннита. Подтверждено существенное понижение общей пищевой возбудимости после введения маннита и выявления фазности в ее развитии (рис. 3). Периоды поедания пищи сменялись периодами угнетения двигательного-пищевого активности (вплоть до полного отказа от пищи), закрыванием глаз и повышением порога реакций на экстрастимуляцию. После окончания опыта (спустя 1—1,5 ч после

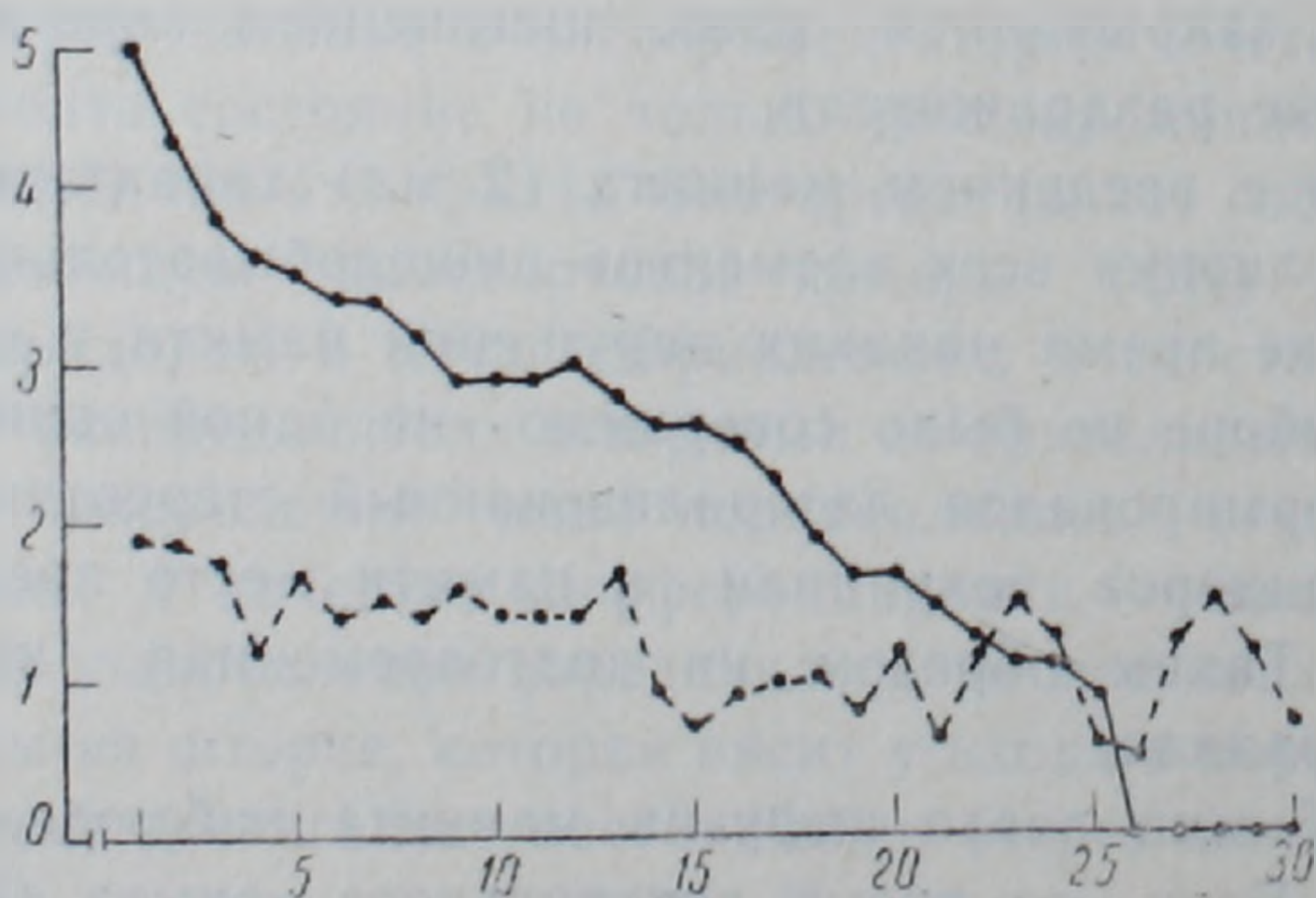


Рис. 2. Динамика изменения уровня пищевой возбудимости и скорости насыщения до (сплошная линия) и после (пунктиры) действия маннита (2 мл). На оси абсцисс—время в мин; на оси ординат—количество съеденных творожных шариков (средние данные)

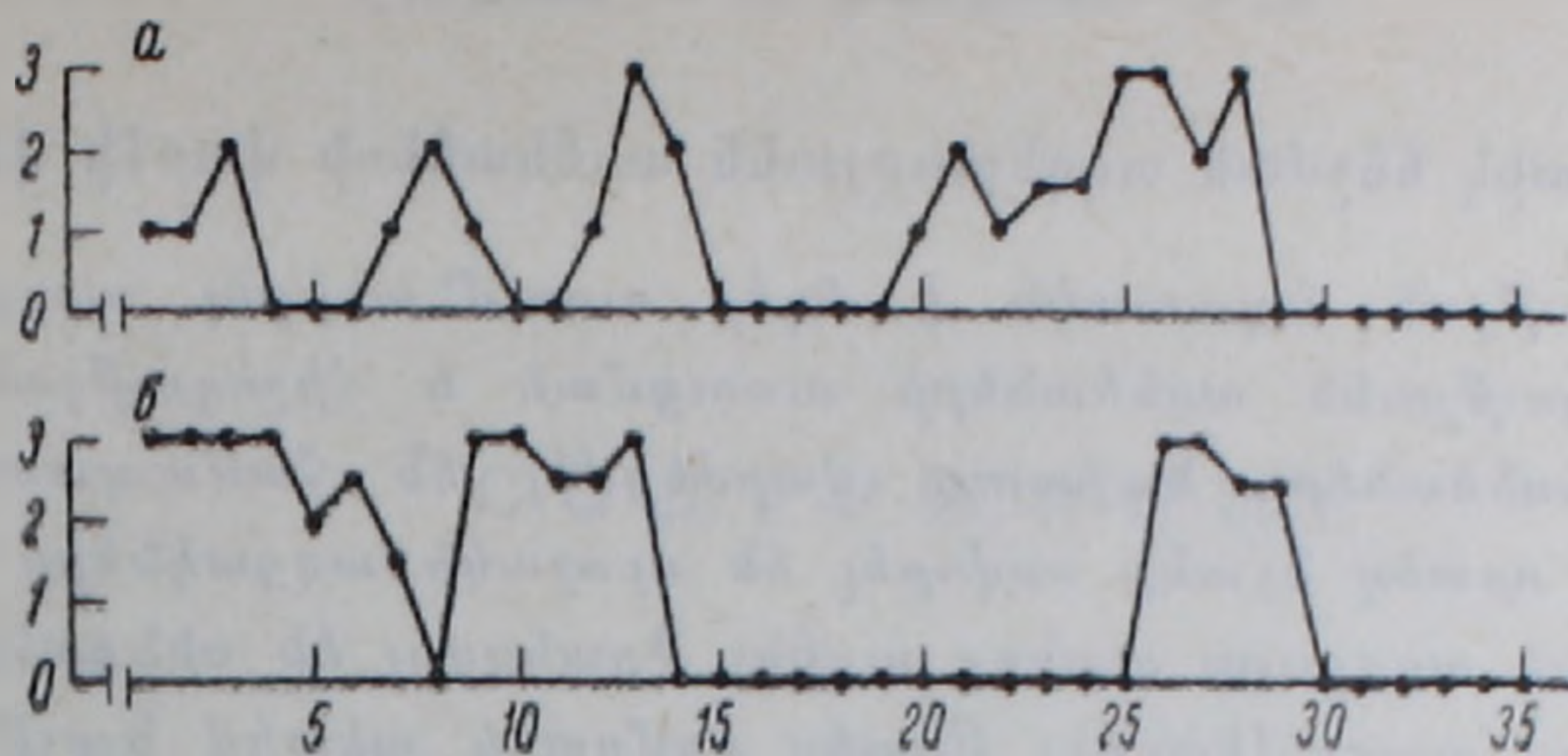


Рис. 3. Индивидуальные вариации фазности в развитии пищевой возбудимости под действием маннита (2 мл). а—крыса № 57; б—крыса № 56. Остальные обозначения те же, что на рис. 2

введения маннита) в случае дачи воды у крыс можно было наблюдать полидипсию.

Анализ полученных данных выявил корреляцию между нарушениями пищедобывательного поведения в условнорефлекторном эксперименте и колебаниями уровня пищевой возбудимости, возникшими под действием гипертонического раствора маннита. Полное сохранение памяти во время периодов пищедобывательной активности в лабиринте также указывает на мотивационный и активационный механизмы нарушений пищевого поведения. Возникает вопрос, можно ли связать общее угнетение двигательной активности и понижение пищевой возбудимости с непосредственным действием гипертонической внутренней среды на объем нервных клеток, управляющих этими функциями? Мы полагаем, что это довольно сложная проблема, и для окончательного ее решения необходимы дальнейшие многосторонние исследования. Однако данные современной клеточной биофизики (¹⁻³) дают основания предположить, что нарушения функций активационных и мотивационных систем организма в условиях гиперосмотического давления крови, вызванного маннитом, связаны, вероятно, с дегидратацией и сморщиванием нейронов соответствующих структур мозга (возможно и других внутренних органов), регулирующих пищедобывательное поведение и состояние бодрствования.

Учащение диуреза в условиях маннитного гиперосмотического стресса может служить косвенным подтверждением высказанной гипотезы. Под воздействием повышенной осмолярной концентрации крови усиливается отток воды из тканей в артериальную систему. В результате гидремии усиливается диурез. При этом активация антидиуретического рефлекса, обычно характерная для введения гипертонических растворов, в том числе и маннита, оказывается недостаточной. Повышенное потребление воды у крыс, получивших маннит, является, очевидно, компенсаторным проявлением функции осморегулирующей системы в ответ на дефицит воды в тканях. В то же время факт полидипсии является дополнительным аргументом в пользу дегидратационного механизма, тормозящего действия концентрированного раствора маннита на некоторые стороны функции центральной нервной системы крыс.

Օսմոտիկ ճնշման ազդեցությունն առնետների վարքի վրա

Հետազոտության նպատակն է եղել ուսումնասիրել արյան օսմոտիկ ճնշման ազդեցությունն առնետների ուսուցման և հիշողության վրա: Այս նպատակով, առնետները նախօրոք վարժեցվել են համապատասխան լաբիրինթներում, որտեղ նրանք սովորել են որոշակի ազդակների ներքո ընտրել դեպի սնման աղբյուրը տանող ուղին: Գրանցվել են սննդա-շարժողական վարքի մի շարք պարամետրեր: Որպես օսմոտիկ ակտիվ նյութ օգտագործվել է մանիտի 2 Մ ջրային լուծույթ:

Փորձերը ցույց տվեցին, որ մանիտի 2 մլ ներարկումից դանդաղում են առնետների շարժողական ռեակցիաների արագությունը: Ընկնում է ընդունված կերի քանակը, կարճանում է հազեցման ժամանակամիջոցը: Մանիտի ազդեցության տակ զգալի ավելանում է միզարտադրությունը: Ստացված տվյալները թույլ են տալիս ենթադրելու, որ մանիտի հիպերտոնիկ լուծույթից տեղի է ունենում ներվային բջջիջների ջրազրկում, նրանց ծավալի փոքրացում, որը և բերում է գլխուղեղի ֆունկցիաների խանգարում, միզարտադրության ավելացում և ջրի պահանջի բարձրացում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Н. Айрапетян, М. А. Сулейманян, В. Л. Арванов, в кн.: Биофизика мембран, М., Наука, 1981 ² S. N. Ayrapetjan, Adv. Physiol. Sci., v. 23 (1980). ³ S. N. Ayrapetjan, V. L. Arvanov, Comp. Biochem. Physiol., v. 64A, p. 601 (1979). ⁴ А. Г. Гинецинский, Физиологические механизмы водно-солевого равновесия, Наука, М.—Л., 1964. ⁵ А. Г. Великанова, Осморецепторы, Новосибирск, Наука, 1985. ⁶ G. Koob, R. Dantzer, F. Rodriguez e. a., Nature, v. 316, № 6022 (1985).

