ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, №6, 1988 Механика

УДК 531.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОГО ЗВЕНА МАНИПУЛЯТОРА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Работа является продолжением [1] и посвящена динамике и оптимизации управляемых плоских движений нагруженного упругого звена манипулятора на подвижном основании. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости.

1. Механическая модель и уравнения движения. Рассматривается механическая модель упругого манипулятора, кинематическая схема которого приведена на фигуре. Для описания уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальную $O'X'Y'Z'$ системы координат. Управление вращательным движением стрелы $O'P$ в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$ осуществляется при помощи сосредоточенного момента сил $M(t)$, приложенного относительно оси $O'Z'$. Для описания упругих смещений стрелы вводится вращающаяся относительно $O'X'Y'Z'$ система координат $O'xyz$. Введем обозначения: L — длина стержня (стрелы); $x(0\leqslant x\leqslant L)$ — координата точки нейтральной линии стрелы; φ — угол поворота стрелы относительно $O'X'$; $\vec{R}_0(t)=(x_0(t), y_0(t))^T$ — радиус-вектор основания упругого стержня (символ T означает транспонирование); $\vec{R}(t, x)$ — радиус-вектор точки нейтральной линии стержня с координатой x в момент времени t относительно точки O'; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения стержня; $w(t, x)$ упругие деформации стрелы; $\rho(x)$ — линейная плотность стрелы; $EJ(x)$ жесткость стрелы на изгиб (E — модуль Юнга материала, $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения стержня в точке x); $s(x)$ — площадь поперечного сечения стрелы. Функции $\rho(x)$, $J(x)$, $s(x)$ $(0\leqslant x\leqslant L)$ предполагаются достаточно гладкими. Груз в схвате манипулятора считается материальной точкой массой m_1. Ускорение силы тяжести $\vec{G}$ считается направленным вдоль оси OY.

В соответствии с линейной теорией упругости считаем, что упругие смещения стрелы малы (большая изгибная жесткость $EJ(x)$) по сравнению с ее длиной $w/L=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\ll 1$, а максимальный период собственных упругих колебаний стрелы T_0 мал по сравнению с характерным временем процесса управления T $(T_0/T=O(\varepsilon^{1/2}))$ [2]. Начальные распределения $w(t_0, x)$, $w_t(t_0, x)$ при этом считаются малыми, а $\varphi \sim 1$, $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$.

Используя принцип Гамильтона—Остроградского [3], получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения стрелы манипулятора, в виде

$$\int_0^L \rho(x)s(x)x[x\ddot{\varphi} + (\ddot{y}_0 + g)\cos\varphi - \ddot{x}_0\sin\varphi + \ddot{w}(t, x)]dx + I_1\ddot{\varphi} +$$

$$+ I_2[\ddot{w}(t, L) + (\ddot{y}_0 + g)\cos\varphi - \ddot{x}_0\sin\varphi] = M; \quad I_1 = L^2m_1, \quad I_2 = Lm_1 \tag{1.1}$$

с начальными условиями $\varphi(t_0) = \varphi^0$, $\dot{\varphi}(t_0) = \omega^0$, $w(t_0, x) = f_1(x)$, $\dot{w}(t_0, x) = f_2(x)$.

Из (1.1) следует, что управляющий момент $M(t)$ имеет порядок ε.

Уравнение колебаний упругой стрелы манипулятора имеет вид:

$$\rho(x)s(x)\ddot{w}(t, x) + [EJ(x)w''(t, x)]'' = -\rho(x)s(x)[x\ddot{\varphi} - \ddot{x}_0\sin\varphi + (\ddot{y}_0 + g)\cos\varphi] \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$w(t, 0) = w'(t, 0) = w''(t, L) = 0$$

$$[EJ(x)w''(t, L)]' = m_1[L\ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, L) + (\ddot{y}_0 + g)\cos\varphi - \ddot{x}_0\sin\varphi] \tag{1.3}$$

где штрих означает производную по x.

2. *Задача кинематического управления.* Ниже для определенности исследуется задача поворота однородной (ρ, J, $s = \mathrm{const}$) нагруженной упругой стрелы манипулятора при $g = 0$, x_0, $y_0 = \mathrm{const}$.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом.

Пусть в произвольный начальный момент времени $t = t_0$ состояние системы определяется величинами

$$\varphi(t_0) = \varphi^0, \ \dot{\varphi}(t_0) = \omega^0, \ w(t_0, x) = f_1(x), w_t(t_0, x) = f_2(x) \tag{2.1}$$

Требуется за заданное время T привести груз из начального состояния (2.1) в заданное конечное состояние с гашением упругих колебаний в конце процесса управления.

$$\varphi(T) = \varphi^* \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \ w(T, x) = w_t(T, x) = 0 \tag{2.2}$$

и минимизировать функционал $\Phi[u]$, характеризующий качество управления.

Управление системой (1.1)—(1.3), (2.1), (2.2) осуществляется изменением углового ускорения вращения упругого звена манипулятора. В качестве критерия оптимальности возьмем квадратичный функционал.

$$\Phi[u]=\int_{t_0}^{T}[u(t)]^2dt\to\min_u,\quad u\in U,\ (u(t)=\ddot\varphi(t)) \tag{2.3}$$

физический смысл которого составляют энергетические затраты привода. В уравнениях (1.1), (1.2) и в условиях (1.3) перейдем к новым безразмерным переменным

$$x_1=x/L,\quad w_1(t,x)=w(t,x)/L,\quad x_{01}=x_0/L,\quad y_{01}=y_0/L$$
$$t_1=t/(\rho L^4 s/EJ)^{1/2},\quad M_1=ML/EJ \tag{2.4}$$

Уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.3) для переменных (2.4) с последующим опусканием индексов «1» принимают вид

$$\int_0^1 x[x\ddot\varphi+y_0\cos\varphi-x_0\sin\varphi+\ddot w(t,x)]dx+\gamma[\ddot\varphi+y_0\cos\varphi- \tag{2.5}$$
$$-\ddot x_0\sin\varphi+\ddot w(t,1)]=M$$

$$\ddot w(t,x)+w^{IV}(t,x)=-(x\ddot\varphi+\ddot y_0\cos\varphi-\ddot x_0\sin\varphi) \tag{2.6}$$

$$w(t,0)=w'(t,0)=w''(t,1)=0$$

$$w'''(t,1)=\gamma[\ddot\varphi+\ddot w(t,1)+\ddot y_0\cos\varphi-\ddot x_0\sin\varphi],\quad \gamma=m_1/m \tag{2.7}$$

Собственные функции задачи (2.6), (2.7) с точностью до постоянных c_n определяются следующим образом:

$$X_n(x)=c_n[\mathrm{ch}\lambda_n x-\cos\lambda_n x+\beta_n(\sin\lambda_n x-\mathrm{sh}\lambda_n x)] \tag{2.8}$$

где $\beta_n=(\mathrm{ch}\lambda_n+\cos\lambda_n)/(\mathrm{sh}\lambda_n+\sin\lambda_n),\quad n=1,2,3,\ldots$

c_n — определяются из условий ортогональности собственных функций. Собственные значения λ_n задачи (2.6), (2.7) определяются из уравнений

$$1+\mathrm{ch}\lambda_n\cos\lambda_n+\gamma\lambda_n(\mathrm{sh}\lambda_n\cos\lambda_n-\mathrm{ch}\lambda_n\sin\lambda_n)=0,\quad n=1,2,3\ldots \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.6) при (2.7) ищем в виде

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)X_n(x) \tag{2.10}$$

Из (2.6), (2.7), (2.10) следует, что $C_n(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot C_n(t)+\lambda_n^4C_n(t)=f_n[\varphi(t),\ddot\varphi(t),\ddot{\vec R}_0(t)],\quad n\geq 1$$

где $$f_n[\varphi(t),\ddot\varphi(t),\ddot R_0(t)]=\Big\{-\ddot\varphi\Big[\int_0^1 xX_n(x)dx+\gamma X_n(1)\Big]+ \tag{2.11}$$
$$+[\ddot x_0\sin\varphi-\ddot y_0\cos\varphi]\Big[\int_0^1 X_n(x)dx+\gamma X_n(1)\Big]\Big\}/\alpha_n^2$$

Так как соотношения (2.1)—(2.3) и уравнения (2.5)—(2.7), (2.11) автономны (стационарны), то в задаче оптимального управления зависимость управления от времени будет входить в виде разностей $t-t_0$, $T-t_0$. Поэтому ее можно рассматривать при $t_0=0$, а затем произвести замену $t \to t-t_0$, $T \to T-t_0$ [4].

3. Приближенное решение задачи оптимального управления. После решения уравнения (2.6) при (2.7), задачу оптимального управления (2.1)—(2.3) можно записать в виде

$$\ddot{C}_n(t)+\lambda_n^2 C_n(t)=-a_n u(t)+b_n(\ddot{x}_0\sin\varphi-\ddot{y}_0\cos\varphi), \quad n\geqslant 1 \tag{3.1}$$

$$\ddot{\varphi}(t)=u(t),\ \omega(t)=\omega^0+\int_0^t u(\tau)d\tau,\ \varphi(t)=\varphi^0+\omega^0 t+\int_0^t u(\tau)(t-\tau)d\tau$$

$$\varphi(0)=\varphi^0,\ \dot{\varphi}(0)=\omega^0,\ \varphi(T)=\varphi^*,\ \dot{\varphi}(T)=0,\ C_n(T)=\dot{C}_n(T)=0$$

$$\Phi[u]=\int_0^T [u(t)]^2 dt \to \min_u, \quad n\geqslant 1$$

где

$$\alpha_n^2 a_n=\int_0^1 xX_n(x)dx+\alpha_n^2\gamma X_n(1), \quad \alpha_n^2 b_n=\int_0^1 X_n(x)dx+\alpha_n^2\gamma X_n(1)$$

Предполагаем, что ускорение основания мало и функции $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$ можно представить следующим образом:

$$\ddot{x}_0=\varepsilon^2 b_x, \quad \ddot{y}_0=\varepsilon^2 b_y, \quad \text{где} \quad b_x,\ b_y\sim 1,\ \varepsilon\ll 1 \tag{3.2}$$

Подставив (3.2) в уравнение (3.1), получим

$$\ddot{C}_n(t)+\lambda_n^2 C_n(t)=-a_n u(t)+\varepsilon^2 b_n(b_x\sin\varphi-b_y\cos\varphi) \tag{3.3}$$

Применением принципа максимума к счетной системе уравнений для $C_n(t)$ при $\varepsilon=0$, задача оптимального управления (2.1)—(2.3) приводится к решению следующей проблемы моментов [5].

$$C_n(t)=A\cos\lambda_n t+B\sin\lambda_n t-\frac{a_n}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

$$\omega(t)=\omega^0+\int_0^t u(\tau)d\tau, \quad \varphi(t)=\varphi^0+\omega^0 t+\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

$$\varphi(T)=\varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T)=\omega^*=0, \quad C_n(T)=\dot{C}_n(T)=0 \tag{3.6}$$

$$\Phi[u]=\int_0^T [u(t)]^2 dt \to \min_u, \quad n\geqslant 1 \tag{3.7}$$

Решение задачи (3.4)—(3.7) ищем в виде [1]

$$u_0(t)=A_\varphi t+B_\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\lambda_n^2 t+B_n\cos\lambda_n^2 t) \tag{3.8}$$

В нулевом приближении для оптимального поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора имеем

$$u_0^{(0)}(t)=A_\varphi^{(0)}t+B_\varphi^{(0)},\quad A_n^{(0)}=B_n^{(0)}=0 \tag{3.9}$$

Удовлетворяя соотношениям (3.5), (3.6), получим для коэффициентов $A_\varphi^{(0)}$, $B_\varphi^{(0)}$ следующие выражения:

$$A_\varphi^{(0)}=-12(\varphi^*-\varphi^0-\omega^0T/2)/T^3,\quad B_\varphi^{(0)}=6(\varphi^*-\varphi^0-2\omega^0T/3)/T^2 \tag{3.10}$$

Следовательно оптимальное управление $u_0(t)$ при $\varepsilon=0$, обеспечивающее поворот абсолютно жесткой модели звена манипулятора, определяется в виде

$$u_0^{(0)}(t)=-6(2t/T-1)(\varphi^*-\varphi^0)/T^2+2(3t/T-2)\omega^0/T \tag{3.11}$$

Определим первое приближение для A_n и B_n. После подстановки $A_\varphi^{(0)}$, $B_\varphi^{(0)}$ в (3.8), учитывая соотношение $C_n(T)=C_n(T)=0$, получим

$$\int_0^T {\sin \atop \cos}[\lambda_n^2(T-\tau)]\sum_{m=1}^{\infty}(A_m^{(1)}\sin\lambda_m^2\tau+B_m^{(1)}\cos\lambda_m^2\tau)d\tau= \tag{3.12}$$

$$=-\frac{a_n}{\lambda_n^2}\int_0^T u_0^{(0)}(\tau){\sin \atop \cos}[\lambda_n^2(T-\tau)]d\tau+A{\cos \atop -\sin}(\lambda_n^2T)+B{\sin \atop \cos}(\lambda_n^2T)$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

Решая счетную систему уравнений (3.12) при $n=m$, получим искомые коэффициенты $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ $(n\geqslant1)$ в виде

$$A_n^{(1)}=-2\lambda_n^2A/Ta_n-D_n^s,\quad B_n^{(1)}=2\lambda_n^2B/Ta_n-D_n^c \tag{3.13}$$

где $D_n^{s,c}=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T\left[-\frac{6}{T^2}\left(2\frac{t}{T}-1\right)(\varphi^*-\varphi^0)+\frac{2}{T}\left(\frac{3t}{T}-2\right)\omega^0\right]{\sin \atop \cos}(\lambda_n^2\tau)\,d\tau$

В следующем приближении A_φ, B_φ определяются согласно (3.5) после подстановки (3.13) в (3.8).

$$A_\varphi^{(1)}=A_\varphi^{(0)}+12\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n^{(1)}\left[C_n^s-\frac{1}{2\lambda_n^2}(1-\cos\lambda_n^2T)\right]+B_n^{(1)}\left[C_n^c-\frac{1}{2\lambda_n^2}\sin\lambda_n^2T\right]\right\}/T^2$$

$$B_\varphi^{(1)}=B_\varphi^{(0)}+6\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n^{(1)}\left[\frac{1}{2\lambda_n^2}(1-\cos\lambda_n^2T)-C_n^s\right]+B_n^{(1)}\left[\frac{1}{2\lambda_n^2}\sin\lambda_n^2T-C_n^c\right]\right\}/T$$

где (3.14)

$$C_n^{s,c}=\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right){\sin \atop \cos}(\lambda_n^2\tau)d\tau$$

Аналогично строятся последующие приближения для A_*, B_* и A_n, B_n. Доказательство сходимости рядов (3.8), (3.12), (3.14) можно получить стандартным образом на основе теоремы о неподвижной точке [6].

Итак, оптимальное, в смысле критерия качества $\Phi[u]$ (3.7) управление $u_0(t)$ с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ обеспечивает приведение упругой стрелы манипулятора в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса. Более точные вычисления в рамках поставленной задачи неоправданы, так как уравнения (2.5)—(2.6) являются приближенными: в них отброшены члены $O(\varepsilon^2)$.

$$u_0^{(1)}(t)=A_*^{(1)}t+B_*^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^{(1)}\sin\lambda_n^2 t+B_n^{(1)}\cos\lambda_n^2 t\right) \tag{3.15}$$

Оптимальный закон изменения угла поворота $\varphi(t)$ при $\varepsilon=0$ после приближенного определения управляющей функции $u_0(t)$ можно записать следующим образом:

$$\varphi_0(t)=\varphi^0+\omega^0 t+\int_0^t (t-\tau)u_0^{(1)}(\tau)d\tau \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления движением упругой стрелы манипулятора с учетом движения основания. После сделанных предположений (3.2) задача приводится к решению следующей проблемы моментов [5]:

$$C_n(t)=A\cos\lambda_n^2 t+B\sin\lambda_n^2 t-\frac{a_n}{\lambda_n^2}\int_0^t u(\tau)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau+$$

$$+\varepsilon^2 b_n\left[\int_0^t (b_x\sin\varphi_0-b_y\cos\varphi_0)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau\right]/\lambda_n^2 \tag{3.17}$$

$$u(t)=\ddot\varphi(t),\quad \omega(t)=\omega^0+\int_0^t u(\tau)d\tau,\quad \varphi(t)=\varphi^0+\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.18}$$

$$\varphi(T)=\varphi^*,\quad \dot\varphi(T)=\omega^*=0,\quad \dot C_n(T)=C_n(T)=0 \tag{3.19}$$

$$\Phi[u]=\int_0^T |u(\tau)|^2 d\tau\to\min_u,\quad n\geq 1 \tag{3.20}$$

где $\varphi_0(t)$ определяется из (3.16).

Решение задачи оптимального управления (3.17)—(3.20) ищем аналогично (3.8)

$$u(t)=A_* t+B_*+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\lambda_n^2 t+B_n\cos\lambda_n^2 t\right) \tag{3.21}$$

где коэффициенты A_*, B_*, A_{n*}, B_{n*} также можно определить методом последовательного приближения. В нулевом приближении для поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора ($A_{n*}=B_{n*}=0$) коэффициенты $A_*^{(0)}$, $B_*^{(0)}$ управления $u_*(t)$ совпадают с коэффициентами $A_*^{(0)}$, $B_*^{(0)}$ (3.10).

Первое приближение для коэффициента A_{n*}, B_{n*} определяется из (3.17), (3.19) после подстановки $A_*^{(0)}$, $B_*^{(0)}$ в (3.21):

$$A_{n*}^{(1)}=-2\lambda_n^2 A_* / T a_n - D_{n*}^c, \quad B_{n*}^{(1)}=2\lambda_n^2 B_* T a_n - D_{n*}^s$$

где

$$D_{n*}^{s,c}=D_n^{s,c}+\varepsilon^2 b_n \int_0^t (b_* \sin\varphi_* - b_* \cos\varphi_*) \frac{\sin}{\cos}(\lambda_n^2\tau)d\tau \tag{3.22}$$

Следующее приближение для коэффициентов A_*, B_* определяется из (3.18), (3.19) после подстановки $A_{n*}^{(1)}$, $B_{n*}^{(1)}$ в (3.21)

$$A_*^{(1)}=A_*^{(0)}+12\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{n*}^{(1)}\left[C_n^s-\frac{1}{2\lambda_n^2}(1-\cos\lambda_n^2 T)\right]+B_{n*}^{(1)}\left[C_n^c-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\lambda_n^2}\sin\lambda_n^2 T\right]\right\} / T^3 \tag{3.23}$$

$$B_*^{(1)}=B_*^{(0)}+6\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{n*}^{(1)}\left[\frac{1}{2\lambda_n^2}(1-\cos\lambda_n^2 T)-C_n^s\right]+B_{n*}^{(1)}\left[\frac{1}{2\lambda_n^2}\sin\lambda_n^2 T-C_n^s\right]\right\} / T$$

где $C_n^{s,c}$ — определяются так, как в (3.14).

Следовательно, управление $u(t)$, $t\in[0, T]$, которое обеспечивает оптимальное по критерию качество $\Phi[u]$ приведение упругой стрелы манипулятора на подвижном основании в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса, определяется приближенно и имеет вид

$$u_*^{(1)}(t)=A_*^{(1)}t+B_*^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n*}^{(1)}\sin\lambda_n^2 t+B_{n*}^{(1)}\cos\lambda_n^2 t)$$

$$t\in[0, T], \quad u_*^{(1)}(t)\equiv 0, \quad t>T \tag{3.24}$$

Согласно (3.18), (3.24) $\varphi(t)$ определяется интегрированием $u_*^{(1)}(t)$ по t.

$$\varphi_*(t)=\varphi^0+\omega^0 t+\int_0^t (t-\tau)u_*^{(1)}(\tau)d\tau \tag{3.25}$$

После того, как приближенное выражение $w(t, x)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $0\leqslant x\leqslant 1$ найдено в виде (2.10), требуемое значение управляющего момента сил $M(t)$ вычисляется из (2.5) квадратурой по x.

$$M(t)=-\int_0^1 x w^{(IV)}(t, x)dx+w'''(t, 1)=-w''(t, 0) \tag{3.26}$$

Согласно (3.26) ряд для $w''(t, 0)$ абсолютно и равномерно сходится для всех $t \in [0, T]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $-M$.

4. Исследование задачи динамического управления. Вводя новую переменную $z(t, x)$

$$z(t, x) = w(t, x) + x\varphi + \int_0^t (t-\tau)(\ddot{y}_0 \cos\varphi - \ddot{x}_0 \sin\varphi)\, d\tau \qquad (4.1)$$

уравнения (2.5), (2.6) и условия (2.7) запишем в виде

$$\ddot{z}(t, x) + z^{IV}(t, x) = 0, \quad z(0, 0) = 0, \quad z'(t, 0) = \varphi, \quad z''(t, 1) = 0$$

$$z''(t, 0) = -M(t), \quad z'''(t, 1) = \gamma \ddot{z}(t, 1) \qquad (4.2)$$

$$w(t, x) = z(t, x) - xz'(t, 0) - \int_0^t (t-\tau)(\ddot{y}_0 \cos\varphi - \ddot{x}_0 \sin\varphi)\, d\tau$$

Из $w(0, x) = f_1(x)$, $\dot{w}(0, x) = f_2(x)$, $\varphi(0) = \varphi^0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega^0$

следует, что начальные условия для $z(t, x)$ имеют вид

$$z(0, x) = f_1(x) + x\varphi^0, \quad \dot{z}(0, x) = f_2(x) + x\omega^0 \qquad (4.3)$$

Конечные условия могут быть выписаны после построения функции $z(t, x)$, как решения краевой задачи (4.2):

$$z(T, x) - z'(T, 0)x - \int_0^T (T-\tau)(\ddot{y}_0 \cos\varphi - \ddot{x}_0 \sin\varphi)\, d\tau = 0$$

$$\dot{z}(T, x) - x\dot{z}'(T, 0) - \int_0^T (\ddot{y}_0 \cos\varphi - \ddot{x}_0 \sin\varphi)\, d\tau = 0 \qquad (4.4)$$

$$\varphi(T) = z'(T, 0) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{z}'(T, 0) = 0$$

Решение краевой задачи (4.2) ищем в виде бесконечной суммы.

$$z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) X_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (4.5)$$

где собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n определяются соотношениями

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh}\lambda_n x}{\operatorname{sh}\lambda_n} + \frac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n}, \quad \operatorname{tg}\lambda_n - \operatorname{th}\lambda_n = 2\gamma\lambda_n \operatorname{tg}\lambda_n \operatorname{th}\lambda_n \qquad (4.6)$$

$$\{\lambda_n\}, \quad \lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

Коэффициенты Фурье $\theta_n(t)$ разложения (4.5) находятся из уравнений

$$\ddot{\theta}_n(t) + \lambda_n^4 \theta_n(t) = X_n'(0) M(t) / \alpha_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4.7)$$

с начальными условиями

$$\theta_n(0)=\frac{1}{\alpha_n^2}\int_0^1 [f_1(x)+xz'(0,0)][1+\gamma\delta(x-1)]X_n(x)dx$$

$$\dot{\theta}_n(0)=\frac{1}{\alpha_n^2}\int_0^1 [f_2(x)+x\dot{z}'(0,0)][1+\gamma\delta(x-1)]X_n(x)dx \tag{4.8}$$

Решение счетной системы (4.7) при (4.8) строится аналогично (2.11).

В случае управляющего момента $M(t)$ задача оптимального управления (2.1), (2.2) с функционалом

$$\Phi[M]=\int_0^T [M(t)]^2dt\to\min_M, \quad M(t)\in\{M\} \tag{4.9}$$

также приводится к решению проблемы моментов. При этом надо иметь в виду, что ряды z, φ, $\dot{z}$, $\dot{\varphi}$ будут сходиться лишь для достаточно гладкой функции $M(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. После определения конечных условий $\theta_n(T)=\theta_n^*$, $\dot{\theta}_n(T)=\dot{\theta}_n^*$, $n=0, 1, 2, \ldots$ из (4.4), проблемы моментов приходят к виду [5]

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt=c_0^*, \quad \int_0^T M(t)dt=\dot{c}_0^* \tag{4.10}$$

$$\int_0^T \sin\lambda_n^2(T-t)M(t)dt=c_n^*, \quad \int_0^T \cos\lambda_n^2(T-t)M(t)dt=\dot{c}_n^*$$

$$n=1, 2, 3, \ldots$$

где

$$c_0^*=[\theta_0^*-\theta_0(0)-\dot{\theta}_0(0)T]\alpha_0^2 / X_0(0), \quad \dot{c}_0^*=[\dot{\theta}_0^*-\dot{\theta}_0(0)]\alpha_0^2 / X_0(0)$$

$$c_n^*=[\theta_n^*-\theta_n(0)\cos\lambda_n^2T-\dot{\theta}_n(0)\lambda_n^{-2}\sin\lambda_n^2T]\alpha_n^2 / X_n(0)$$

$$\dot{c}_n^*=[\dot{\theta}_n^*+\theta_n(0)\lambda_n^2\sin\lambda_n^2T-\dot{\theta}_n(0)\cos\lambda_n^2T]\alpha_n^2 / X_n(0)$$

$$n=1, 2, 3, \ldots$$

Решение задачи оптимального управления (4.9), (4.10) имеет вид [5]

$$M(t)=d_0^1(T-t)+d_0^2+\sum_{m=1}^{\infty}[d_m^1\sin\lambda_m^2(T-t)+d_m^2\cos\lambda_m^2(T-t)] \tag{4.11}$$

где коэффициенты d_0^1, d_0^2, d_m^1, d_m^2 $(m=1, 2, 3, \ldots)$ определяются из (4.10)

$$d_0^1=6T^{-2}(2c_0^*T^{-1}-\dot{c}_0^*), \quad d_0^2=-2T^{-1}(3c_0^*T^{-1}-2\dot{c}_0^*) \tag{4.12}$$

$$d_m^1 = (c_m^* G_m - c_m^{**} F_m) / (E_m G_m - F_m^2)$$

$$d_m^2 = (c_m^* F_m - c_m^{**} E_m) / (F_m^2 - G_m E_m), \quad E_m = \int_0^T [\sin \lambda_m^2 (T-t)]^2 dt$$

$$F_m = \frac{1}{2} \int_0^T \sin 2\lambda_m^2 (T-t) dt, \quad G_m = \int_0^T [\cos \lambda_m^2 (T-t)]^2 dt, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

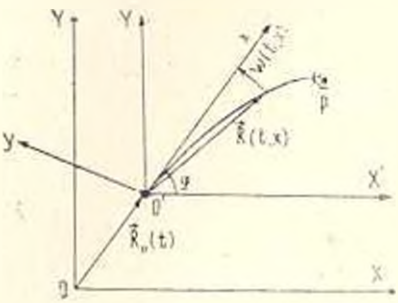
Оптимальное изменение угла поворота $\varphi(t)$ можно определить из $z'(t, 0) = \varphi(t)$.

Как указывалось в п. 2, оптимально управляющие функции $u(t)$, $M(t)$ из (3.8), (3.21), (4.11) построены для произвольного начального состояния φ^0, ω^0, $f_1(x)$, $f_2(x)$ в произвольный начальный момент времени t_0. В результате замены $t \to (t - t_0)$, $T \to (T - t_0)$, управления $u(t)$, $M(t)$ могут быть определены как функции этих аргументов и линейные операторы от φ^0, ω^0, $f_1(x)$, $f_2(x)$.

$$u = u(t - t_0, T - t_0, \varphi^0, \omega^0 [f_1(x)], [f_2(x)])$$

$$M = M(t - t_0, T - t_0, \varphi^0, \omega^0, [f_1(x)], [f_2(x)]) \tag{4.13}$$

Заменив в (4.13) начальные величины текущими $t_0 \to t$, $\varphi^0 \to \varphi$, $\omega^0 \to \omega$, $f_1(x) \to w(t, x)$, $f_2(x) \to w_t(t, x)$, получим оптимальное в смысле (2.3), (4.9) управление в форме „синтеза".



Фиг. 1

Итак, методом последовательного приближения получены оптимальные управляющие функции и оптимальное изменение угла поворота упругой стрелы манипулятора. Решения задач представлены в виде синтеза.

ABOUT A PROBLEM OF OPTIMAL OPERATION MOVEMENT OF THE ELASTIC SECTION OF A MANIPULATOR ON THE MOBILE BASE

A. A. GHUKASYAN

ՇԱՐԺԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՕՂԱԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ամփոփում

Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում, մեխանիկայի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ, ստացված են շարժական հիմքի վրա գտնվող մանիպուլյատորի առաձգական օղակի շարժման և առաձգական տատանումների հավասարումները։

Ուսումնասիրված են մանիպուլյատորի, առաձգական օղակի օպտիմալ շարժման և վերջնական պրոցեսում առաձգական տատանումների կասեցման կինեմատիկական և դինամիկական խնդիրները։ Որպես օպտիմալության չափանիշ է վերցված քառակուսային ֆունկցիոնալը։ Խնդիրները բերված են մոմենտների պրոբլեմի լուծմանը։ Հաջորդական մոտարկումների մեթոդով ստացված են օպտիմալ ղեկավարող ֆունկցիաները և մանիպուլյատորի առաձգական օղակի անկյունային շարժման օպտիմալ օրենքը։ Խնդիրների լուծումները ներկայացված են սխեմի տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, №5, с. 38—41.
2. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №3, с. 118—124.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.—Изв. АН СССР. ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1045—1103.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
27.V.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, УСИЛЕННОЙ ПО ДВУМ КРАЯМ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

БЕЛУБЕКЯН Э. В., ПОГОСЯН А. Г.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки размерами $a\times b\times h_2$, шарнирно опертой по краям $y=0$ и $y=b$, загруженной равномерно распределенным давлением σ и усиленной ребрами жесткости размерами αh_1, h_1, b по свободным кромкам $x=\pm a/2$. Предполагается, что пластинка составлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси x, а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси y.

Ставится задача определения оптимальных параметров α, h_1, h_2, φ конструкции заданного веса, обеспечивающих наибольшее значение критической нагрузки $\sigma_{кр}$.

Аналогичная задача для случая изотропного материала рассмотрена в [1].

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение устойчивости записывается в виде

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\sigma h_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

где D_{ik}—жесткости пластинки, определяемые по формуле

$$D_{ik}=\frac{B_{ik}h_2^3}{12}, \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 6)$$

B_{ik}—упругие характеристики ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через характеристики ВКМ в его главных физических направлениях по известным формулам поворота [2].

Граничные условия запишутся в виде:

—шарнирного опирания

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b \qquad (2)$$

—симметрии (в случае симметричной формы потери устойчивости)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \qquad (3)$$

—антисимметрии (в случае антисимметричной формы потери устойчивости)

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \tag{4}$$

—упругого опирания на ребро жесткости [3]

$$E_1 J\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\sigma A\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-Q_x, \quad C\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=-M_x \quad \text{при} \quad x=a/2 \tag{5}$$

где M_x и Q_x, соответственно, изгибающий момент и поперечная сила в пластинке, определяемые по формулам

$$M_x=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad Q_x=-D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-(D_{12}+4D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}$$

C—жесткость прямоугольного ребра на кручение [3]

$$C=G_{23}\alpha h_1^4\beta, \quad \beta=d^2\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}d\sum_{1,3,\ldots}\frac{1}{n^5}\operatorname{th}\frac{n\pi}{2d}\right], \quad d=\alpha\sqrt{G_{23}/G_{13}} \tag{6}$$

$A=\alpha h_1^2$—площадь поперечного сечения ребра, G_{13}, G_{23}—модули сдвига материала ребра в плоскостях xoz и yoz.

Решение уравнения (1) в случае симметричной формы потери устойчивости с удовлетворением условий (2) и (3) записывается в виде

$$w=(C_1\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x+C_2\cos\mu_2\lambda_m x)\sin\lambda_m y \tag{7}$$

а для антисимметричной формы с удовлетворением условий (2) и (4)

$$w=(C_1\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x+C_2\sin\mu_2\lambda_m x)\sin\lambda_m y \tag{8}$$

где

$$\mu_{1,2}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2+D_{11}D_{22}(k_m^2-1)}\mp D_3}{D_{11}}}$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{b}, \quad D_3=D_{12}+2D_{66}, \quad k_m^2=\frac{\sigma h_2}{D_{22}\lambda_m^2} \tag{9}$$

Здесь принято $k_m>1$, так как в случае наличия ребер $\sigma_{кр}$ будет больше соответствующего критического напряжения гладкой пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m=1$.

Удовлетворение граничных условий (5) приводит к однородной системе уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2. Из условия существования нетривиального решения этой системы получается трансцендентное уравнение относительно коэффициента k_m:

—для симметричной формы потери устойчивости

$$\frac{B_{11}}{B_{12}}(\mu_1^2+\mu_2^2)f_1\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x+\mu_2(f_2f_3-f_3)\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x+ \tag{10}$$

$$+\mu_1(f_1f_2-f_4)\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x-\mu_1\mu_2(\mu_1^2+\mu_2^2)f_2\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x=0$$

где

$$f_1=\frac{\pi m}{b}\,\frac{\delta h_1}{h_2}\left(\frac{E_1}{B_{22}}\,\frac{h_1^2}{h_2^2}-k_m^2\right),\quad f_2=12\,\frac{\pi m}{b}\,\frac{G_{12}}{B_{22}}\,\frac{\delta h_1^3}{h_2^3}$$

$$f_3=\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_1^2-\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2,\quad f_4=\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_2^2+\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2$$

—для антисимметричной формы потери устойчивости уравнение относительно k_m получится из (10) заменой

$$\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x \ \text{на}\ \operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x;\ \operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x \ \text{на}\ \operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x;\ \sin\mu_2\lambda_m x \ \text{на}\ -\cos\mu_2\lambda_m x$$

$$\cos\mu_2\lambda_m x \ \text{на}\ \sin\mu_2\lambda_m x$$

Определив k_m из (10), значение критического напряжения можно вычислить, согласно (9), по формуле

$$\sigma_{кр}=\min_m k_m^2\,\frac{D_{22}\lambda_m^2}{h_2} \tag{11}$$

Определение оптимальных параметров α, h_1, h_2, φ конструкции заданного веса, обеспечивающих максимальное значение критического напряжения, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_{\bar{x}} \sigma_{кр},\quad \bar{x}=\{\alpha,\ h_1,\ \varphi\} \tag{12}$$

при ограничениях

$$h_0\leqslant h_1<0.2b,\quad \delta\leqslant h_2<h_0,\quad 0{,}2\leqslant\alpha\leqslant 5,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ \tag{13}$$

Ограничения (13) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается

$$\delta=0{,}01b\ \text{ при }\ a\geqslant b,\quad \delta=0{,}01a\ \text{ при }\ a<b$$

Параметр h_2 определяется из условия постоянства веса конструкции

$$h_2=h_0-\frac{2\alpha h_1(h_1-h_0)}{\xi b-2\alpha h_1} \tag{14}$$

где h_0—толщина гладкой пластинки заданного веса, а $\xi=(a+2\alpha h_1)/b$.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [4]. Численная реализация проведена при $\xi=1$ для различных значений $\bar{h}_0=h_0/b=0{,}015$; $0{,}02$; $0{,}03$. В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$\bar{B}_{11}^0=1;\quad \bar{B}_{22}^0=B_{22}^0/B_{11}^0=0{,}0818;\quad \bar{B}_{12}^0=B_{12}^0/B_{11}^0=0{,}0196$$

$$\bar{B}_{66}^0=B_{66}^0/B_{11}^0=0{,}04297;\quad G_{21}/G_{12}=1,\quad \bar{E}_1/B_{11}^0=0{,}995$$

$$\bar{G}_{12}=G_{12}/B_{11}^0=0{,}0497$$

Полученные значения оптимальных параметров конструкции α, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, φ и соответствующие значения приведенной критической нагрузки $\bar{\sigma}_{кр} = \sigma_{кр}/B^0_{11}$ даны в табл. 1. Там же приведены наибольшие значения параметра критической нагрузки $\sigma^0_{кр}$ для гладкой пластинки заданного веса, которые получаются при $\varphi = 90°$.

Таблица 1

$\bar{h}_0$	α	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{\sigma}_{кр} \cdot 10^3$	$\sigma^0_{кр} \cdot 10^3$
0.015	1.994	0.0424	0.00969	45°	0,376	0.185
0.020	3,574	0.0415	0.0110	45°	0,588	0.320
0.030	4,278	0.0516	0,0129	45°	1.420	0.740

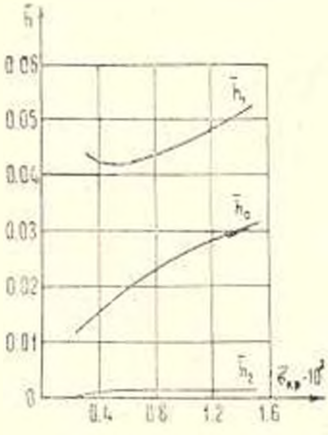
Для всех значений приведенной толщины пластинки $\bar{h}_0$ получается симметричная форма потери устойчивости оптимальной пластинки при $m=1$.

Как видно из табл. 1, изготовление оптимальной ребристой пластинки позволяет увеличивать критическую нагрузку, по сравнению со сплошной пластинкой того же веса, почти в 2 раза.

Для выявления преимущества изготовления ребристой пластинки из ВКМ дается сравнение полученных результатов для пластинки с приведенной толщиной $\bar{h}_0 = 0{,}02$ со значением критической нагрузки, полученной для оптимальной конструкции того же веса, изготовленной из изотропного материала—дюралюминия. Соответствующий параметр толщины изотропной пластинки при отношении удельных весов дюралюминия и рассматриваемого композита 1,8 будет $\bar{h}_0 = 0{,}0111$. При этом оптимальные параметры ребристой изотропной пластинки получаются: $\alpha = 0{,}455$, $\bar{h}_1 = 0{,}0648$, $\bar{h}_2 = 0{,}0077$, а $\sigma_{кр}/E = 0{,}410 \cdot 10^{-3}$. Для конструкции из ВКМ для $\bar{h}_0 = 0{,}02$, согласно табл. 1, $\sigma_{кр}/B^0_{11} = 0{,}588 \cdot 10^{-3}$.

Учитывая, что для дюралюминия $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ МПа, получается $\sigma_{кр} = 28{,}7$ МПа. Для конструкции из рассматриваемого ВКМ ($B^0_{11} = 1{,}3 \cdot 10^5$ МПа) $\sigma_{кр} = 78$ МПа. Таким образом, изготовление ребристой пластинки из ВКМ в 2,7 раза увеличивает критическую нагрузку по сравнению с дуралюминиевой конструкцией.

По полученным результатам можно решить обратную задачу определения конструкции минимального веса по заданному значению параметра критической нагрузки. Для этого на фиг. 1 приведены зависимости па-



Фиг. 1

раметров $\bar{h}_0$, $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ от параметра $\bar{\sigma}_{кр}$. Пользуясь [illegible] заданному значению $\bar{\sigma}_{кр}$ можно определить соответствующие значения приведенной толщины гладкой пластинки $\bar{h}_0$ и соответствующие оптимальные параметры $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$. Угол укладки монослоев ВКМ, как видно из табл. 1, при [illegible]$=1$ получается равным 45°, а [illegible]араметр α определяется из условия (14).

THE OPTIMAL DESIGN RESPECT TO STABILITY OF COMPOSITE RESTANGULAR PLATE REINFORSED WITH TWO STIFFNESS EDGE RIBS

E. V. BELUBEKIAN, A. G. POGOSIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԸՍՏ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ, ԵՐԲ ՍԱԼԸ ԵՐԿՈՒ ԵԶՐԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ Է ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂԵՐՈՎ

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ա. Գ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը, երբ սալը երկու կողմերով ազատ հենված է, իսկ մյուս երկու եզրերով ուժեղացված է կոշտության կողերով։ Անփոփոխ թողնելով կոնստրուկցիայի կշիռը, որոշվում են նրա երկրաչափական և ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են սալի ամենամեծ կրիտիկական բեռը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян Э. В., Погосян А. Г.* Проектирование прямоугольной пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при ограничении на устойчивость.— Изв. ВУЗов. Машиностроение, № 10, 1986, с. 18—20.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967, 534 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971, 240 с.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975, 532 с.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
24.XII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988 Механика

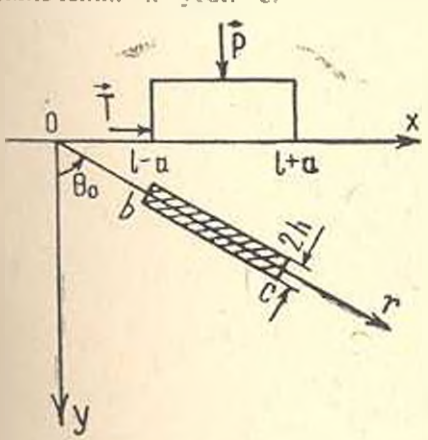
УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИЛИЦКИЙ Д. В., ЕВТУШЕНКО А. А., ПАУК В. И.

В литературе широко представлены задачи теории упругости о давлении штампа на однородное основание. Взаимодействие штампа с различного рода неоднородностями тела (вырезами, трещинами, включениями), расположенными вблизи области контакта, изучено недостаточно. В предлагаемой работе поставлена и решена задача о давлении штампа на полуплоскость с произвольно расположенным тонким упругим включением.

Пусть к краю однородной изотропной полуплоскости $y\geqslant 0$ прижимается силой $\vec{P}$ и сдвигается силой $\vec{T}$ (фиг. 1) жесткий штамп, основание которого описывается гладкой функцией $y=f(x)$. Внутри полуплоскости вблизи области контакта расположено произвольно ориентированное упругое включение малой толщины $2h$. Предполагается, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. Силы трения, возникающие под штампом, удовлетворяют закону Кулона. Механический контакт включения с матрицей принимается идеальным. Под действием штампа включение как жесткое целое поворачивается по часовой стрелке на неизвестный угол ε. В условиях плоской деформации требуется определить контактные напряжения под штампом, коэффициенты интенсивности напряжений у вершин включения и угол ε.



Фиг. 1

Граничные условия задачи:

а) на границе полуплоскости $y=0$

$$\tau_{xy}(x)=\sigma_y(x)=0 \quad \text{при} \quad |x-l|>a$$

$$\tau_{xy}(x)=k\sigma_y(x) \quad \text{при} \quad |x-l|<a \tag{1}$$

$$v'(x)=f'(x) \quad \text{при} \quad |x-l|<a$$

k — коэффициент трения

б) на срединной линии включения $\theta=\theta_0$

$$[\tau_{r\theta}(r,\theta_0+)+i\sigma_\theta(r,\theta_0+)]-[\tau_{r\theta}(r,\theta_0-)+i\sigma_\theta(r,\theta_0-)]=f_1(r)+if_2(r)$$

$$[u_r'(r,\theta_0+)+iu_\theta'(r,\theta_0+)]-[u_r'(r,\theta_0-)+iu_\theta'(r,\theta_0-)]=f_3(r)+if_4(r) \qquad (2)$$

$$f_k(r)=0, \quad (k=\overline{1,4}), \; r\in[b,c], \; u_r'=\partial u_r/\partial r, \; u_\theta'=\partial u_\theta/\partial r$$

Индексами „+" и „−" отмечены верхняя и нижняя кромки включения, соответственно. Для определения $f_k(r)$, $(k=\overline{1,4})$ служат условия взаимодействия тонкого упругого включения с матрицей [1]:

$$u_r'(r,\theta_0+)+u_r'(r,\theta_0-)=2k_0N(r)-k_1[\sigma_\theta(r,\theta_0+)+\sigma_\theta(r,\theta_0-)]$$

$$[u_r(r,\theta_0+)-u_r(r,\theta_0-)]/h=-[\tau_{r\theta}(r,\theta_0+)+\tau_{r\theta}(r,\theta_0-)]/\mu_0+$$

$$+u_\theta'(r,\theta_0+)+u_\theta'(r,\theta_0-) \qquad (3)$$

$$[u_\theta(r,\theta_0+)-u_\theta(r,\theta_0-)]/h=2k_1N(r)-k_0[\sigma_\theta(r,\theta_0+)+\sigma_\theta(r,\theta_0-)]$$

$$u_r'(r,\theta_0+)-u_r'(r,\theta_0-)=-k_2[\sigma_\theta(r,\theta_0+)-\sigma_\theta(r,\theta_0-)]$$

Здесь $N(r)=N_b+\dfrac{1}{2k}\displaystyle\int_b^r[\tau_{r\theta}(t,\theta_0+)-\tau_{r\theta}(t,\theta_0-)]dt$

$$N_b=[\sigma_r(b,\theta_0+)+\sigma_r(b,\theta_0-)]/2, \quad k_0=(1+\varkappa_0)/(8\mu_0)$$

$$k_1=(3-\varkappa_0)/(8\mu_0), \quad k_2=(k_0^2-k_1^2)/k_1, \quad \varkappa_0=3-4\nu_0$$

$\mu(\mu_0)$ — модуль сдвига, $\nu(\nu_0)$ — коэффициент Пуассона материала полуплоскости (включения), $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$ — напряжения, $u_r(r,\theta)$, $u_\theta(r,\theta)$ — смещения в полярной системе координат (r,θ) с полюсом в точке O.

В силу линейности поставленную задачу представим как сумму двух задач: о давлении штампа на полуплоскость без включения (задача 1) и об равновесии полуплоскости с тонким упругим включением (задача 2) при условии:

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(r,\theta_0\pm)=\tau_{r\theta}(r,\theta_0\pm)-\tau_{r\theta}^{(1)}(r), \quad \sigma_\theta^{(2)}(r,\theta_0\pm)=\sigma_\theta(r,\theta_0\pm)-\sigma_\theta^{(1)}(r)$$

$$u_r'^{(2)}(r,\theta_0\pm)=u_r'(r,\theta_0\pm)-u_r'^{(1)}(r), \quad u_\theta'^{(2)}(r,\theta_0\pm)=u_\theta'(r,\theta_0\pm)-u_\theta'^{(1)}(r)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0)=0, \quad -\infty<x<+\infty$$

Решение задачи 1 при $\theta=\theta_0$ имеет вид [2, 3]

$$\{\sigma_r^{(1)}(r),\ \sigma_\theta^{(1)}(r),\ \tau_{r\theta}^{(1)}(r),\ u_r'^{(1)}(r),\ u_\theta'^{(1)}(r)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\{K_i(r,t)\}\sigma_y(t)dt,\ (i=\overline{0,4}) \quad (4)$$

$$K_0(r,t)=R_1(r,t)\alpha_1^2+R_2(r,t)\beta_1^2+2R_3(r,t)\alpha_1\beta_1$$

$$K_1(r,t)=R_2(r,t)\alpha_1^2+R_1(r,t)\beta_1^2-2R_3(r,t)\alpha_1\beta_1$$

$$K_2(r,t)=(R_1(r,t)-R_2(r,t))\alpha_1\beta_1-R_3(r,t)(\alpha_1^2-\beta_1^2)$$

$$K_3(r,t)=(R_6(r,t)+R_7(r,t))\alpha_1\beta_1+R_4(r,t)\alpha_1^2+R_5(r,t)\beta_1^2$$

$$K_4(r,t)=(R_4(r,t)-R_5(r,t))\alpha_1\beta_1+R_6(r,t)\beta_1^2-R_7(r,t)\alpha_1^2$$

$$R_1(r,t)=2(r\beta_1-kr_0)r_0^2K(r,t),\quad R_2(r,t)=2(r\beta_1-kr_0)r^2\beta_1^2K(r,t)$$

$$R_3(r,t)=2(r\beta_1-kr_0)r_0r\beta_1K(r,t),\quad R_4(r,t)=[(1-\nu)R_1(r,t)-\nu R_2(r,t)]/2\mu$$

$$R_5(r,t)=[-\nu R_1(r,t)+(1-\nu)R_2(r,t)]/2\mu$$

$$R_6(r,t)=[-r_0^3+k((1-\nu)r^3\beta_1^3+(2+\nu)r\beta_1r_0^2)]K(r,t)/\mu$$

$$R_7(r,t)=[-\nu r_0^2(r\beta_1+kr_0)-(1-\nu)r^3\beta_1^3-kr_0r^2\beta_1^2]K(r,t)/\mu$$

$$K(r,t)=[r^2\beta_1^2+r_0^2]^{-2},\quad r_0=r\alpha_1-l-t,\quad \alpha_1=\sin\theta_0,\quad \beta_1=\cos\theta_0$$

Кроме того, согласно работы [4]

$$v'^{(1)}(x,0)=\frac{k(1-\varkappa)}{4\mu}\sigma_y(x)+\frac{1+\varkappa}{4\mu\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma_y(t)}{t-x}dt,\quad |x-l|<a \tag{5}$$

Используя результаты работы [5] для случая задачи 2, получаем
а) на линии $\theta=\pi/2$

$$v'^{(2)}(x,0)=u_\theta'^{(2)}(r,\pi/2)=\frac{1}{\pi}\int_0^a\sum_{i=1}^4 Q_i(r,t)f_i(t)dt-a_4\frac{A_2}{r} \tag{6}$$

$$Q_1(r,t)=[(1-\varkappa)\alpha_1I_1(r,t)+2\beta_1I_3(r,t)-(1-\varkappa)\beta_1I_2(r,t)]/(4\mu r)$$

$$Q_2(r,t)=[(1-\varkappa)\beta_1I_1(r,t)+(1+\varkappa)\alpha_1I_2(r,t)+2\beta_1I_4(r,t)]/(4\mu r)$$

$$Q_3(r,t)=-\beta_1[I_1(r,t)+I_4(r,t)]/r,\quad Q_4(r,t)=\beta_1I_3(r,t)/r$$

$$I_1(r,t)=rt\beta_1/T(r,t),\quad I_2(r,t)=\frac{1}{2}(t^2-r^2)/T(r,t)$$

$$I_3(r,t)=rt(2rt+(t^2+r^2)\alpha_1)/T^2(r,t)$$

$$I_4(r,t)=rt(t^2-r^2)\beta_1/T^2(r,t),\quad T(r,t)=t^2+r^2-2rt\alpha_1$$

б) на линии $\theta=\theta_0$

$$\sigma_\theta^{(2)}(r,\theta_0+)=\frac{1}{2}f_1(r)+a_1t_2(r)-a_2t_3(r)+a_3h_1(r)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(r,\theta_0+)=\frac{1}{2}f_2(r)-a_1t_1(r)+a_2t_4(r)+a_3h_2(r)$$

$$u_r'^{(2)}(r,\theta_0+)=\frac{1}{2}f_3(r)+a_1t_1(r)-a_1t_4(r)+2\mu a_2h_3(r)+\frac{a_4}{r}A_1$$

$$u_\theta'^{(2)}(r,\theta_0+)=\frac{1}{2}f_4(r)+a_1t_2(r)-a_1t_3(r)+2\mu a_2h_4(r)+\frac{a_4}{r}A_2 \tag{7}$$

$$a_1=(1-\varkappa)/(2\mu(1+\varkappa)),\quad a_2=2\mu/(1+\varkappa),\quad a_3=\varkappa/(2\mu(1+\varkappa))$$

$$a_4=(1+\varkappa)/(4\mu),\quad f(r)=\frac{1}{\pi}\int_b^c \frac{f_i(t)}{t-r}\,dt,\quad A_i=\frac{1}{\pi}\int_b^c f_i(t)\,dt$$

$$h_i(r)=\frac{1}{\pi}\int_b^c \sum_{j=1}^{4} k_{ij}(r,t)f_j(t)\,dt,\quad (i=\overline{1,4})$$

$k_{ij}(r,t)$—регулярные ядра.

Подстановка соотношений (5), (6) в граничное условие (1), а выражений (4), (7) в условия взаимодействия (3) с учетом обозначений (2) приводит к системе пяти сингулярных интегральных уравнений относительно искомых нормального давления под штампом $\sigma_y(t)$ и функций скачков $f_i(t)$, $(i=\overline{1,4})$

$$\gamma_0 q(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)d\tau}{\tau-\xi}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_{1j}(\xi)+Q_j(\xi,\eta)\right]\varphi_j(\eta)d\eta=\psi'(\xi),\ |\xi|<1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}R_{k0}(\tau,\zeta)q(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{z_{kj}}{\eta-\zeta}+\lambda_{kj}(\zeta)+b_{kj}S(\zeta-\eta)+\right.$$

$$\left.+R_{kj}(\eta,\zeta)\right]\varphi_j(\eta)d\eta+\gamma_k\xi=0,\quad (k=\overline{2,4}) \tag{8}$$

$$\varphi_1(\zeta)=\gamma_1\varphi_2(\zeta),\quad |\zeta|<1$$

Здесь $q(\tau)=\sigma_y(t/a)$, $\psi(\xi)=f'(l+a\xi)$

$$\varphi_i(\eta)=f_i(a_0+b_0\eta),\quad (i=1,2),\quad \varphi_i(\eta)=\frac{4\mu}{1+\varkappa}f_i(a_0+b_0\eta),\quad (i=3,4)$$

$$a\zeta=r-l,\quad b_0\zeta=r-a_0,\quad a_0=(c+b)/2,\quad b_0=(c-b)/2$$

$$\gamma_0=k\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa},\quad \gamma_1=-4\delta\frac{1-\varkappa_0}{(3-\varkappa_0)(1+\varkappa_0)},\quad S(\zeta-\eta)=\mathrm{sign}(\zeta-\eta)$$

$\lambda_1=\lambda_3=0,\ \lambda_2=(1+\varkappa)/(2\delta+1-\varkappa),\ \lambda_{1k}=0,\ (k=1,3,4),\ \lambda_{2k}=0,\ (k=\overline{2,4})$

$\lambda_{12}(\xi)=1/(\xi+d_3),\ \lambda_{21}(\zeta)=2/(\zeta+d_2/d_1)+(1+\varkappa_0)d_0\delta/(8(1+\varkappa))$

$\lambda_{32}(\zeta)=1/(\zeta+d_2/d_1),\ \lambda_{33}=d_0/4,\ \lambda_{31}=\lambda_{34}=0$

$\lambda_{41}=(3-\varkappa_0)d_0\delta/(8(1+\varkappa)),\ \lambda_{44}=d_0/4,\ \lambda_{42}=\lambda_{43}=0$

$z_{24}=[8\varkappa-(1+\varkappa_0)(1-\varkappa)\delta]/(4(1+\varkappa)),\ z_{22}=z_{23}=0$

$z_{21}=[-2(1-\varkappa)+(1+\varkappa)\delta]/(4(1+\varkappa)),\ z_{31}=z_{34}=0$

$z_{32}=2[\varkappa-(1-\varkappa)\delta]/(1+\varkappa)^2,\ z_{33}=(1-\varkappa+2\delta)/(2(1+\varkappa))$

$z_{41}=(1-\varkappa)(1+\varkappa_0)\delta/(2(1+\varkappa))^2,\ z_{44}=(1-\varkappa+2\delta)/(4(1+\varkappa)),\ z_{42}=z_{43}=0$

$b_{21}=\pi d_0(1+\varkappa_0)/(8(1+\varkappa)),\ b_{2k}=0,\ (k=\overline{2,4}),\ b_{33}=\pi d_0/4$

$b_{3k}=0,\ (k=1,2,4),\ b_{44}=(3-\varkappa_0)d_0\delta/8,\ b_{41}=(\varkappa_0-1)/(4(1+\varkappa))$

$$b_{42} = b_{43} = 0, \quad d_0 = b_0 / h, \quad d_1 = b_1 / a, \quad d_2 = a_0 / a, \quad d_3 = l / a, \quad \delta = \mu / \mu_0$$

$$R_{2k}(\eta, \zeta) = [(3 - \varkappa_0)\delta k_{2k}(\eta, \zeta) + 4k_{3k}(\eta, \zeta)] / (1 + \varkappa)^2$$

$$R_{3k}(\eta, \zeta) = [4k_{1k}(\eta, \zeta)\, 8\delta k_{1k}(\eta, \zeta)] / (1 + \varkappa)^2$$

$$R_{4k}(\eta, \zeta) = -(1 + \varkappa_0)\delta k_{2k}(\eta, \zeta) / (1 + \varkappa)^2, \quad (k = 1, 2)$$

$$R_{(i+1)k}(\eta, \zeta) = \frac{1+\varkappa}{4} R_{ik}(\eta, \zeta), \quad (i = \overline{2,4}, \quad k = 1, 2)$$

$$R_{20}(\zeta, \tau) = K_3(\zeta, \tau) + \frac{3-\varkappa_0}{8}\delta K_1(\zeta, \tau) - \frac{1+\varkappa_0}{8}\sqrt{\min(1, \delta)}K_0(-1, \tau)$$

$$R_{30}(\zeta, \tau) = K_4(\zeta, \tau) - \delta K_3(\zeta, \tau) - K_4(-1, \tau) + \min(1, \delta)K_2(-1, \tau)$$

$$R_{40}(\zeta, \tau) = -\frac{1+\varkappa_0}{8}\delta K_2(\zeta, \tau) - \frac{3-\varkappa_0}{8}\sqrt{\min(1, \delta)}K_0(-1, \tau) + [(1+\varkappa)K_1(-1, \tau) -$$

$$- (3-\varkappa)K_0(-1, \tau)]\min(1, \delta) / 8$$

Использование дополнительной неизвестной ε, характеризующей жесткий поворот включения, вынуждает принять во внимание дополнительное условие, требующее равенства нулю главного момента M сил, действующих на включение со стороны матрицы

$$M = \int_a^c r(\sigma_\theta(r, \theta_0 +) - \sigma_\theta(r, \theta_0 -))dr = 0 \qquad (9)$$

Система уравнений (8) получена для произвольных механических и геометрических параметров задачи. Так, полагая $\delta = 1$, получаем систему уравнений, описывающую вдавливание штампа в однородную полуплоскость. Устремив $\delta \to \infty (0)$, найдем систему уравнений задачи о давлении штампа на полуплоскость с трещиной (абсолютно жестким включением).

Для случая штампа с прямолинейным горизонтальным основанием $\varphi'(\xi) = 0$ построим решение системы сингулярных интегральных уравнений (8), (9) методом механических квадратур [6]. Пусть

$$q(\xi) = \varphi_n(\xi)(1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta, \quad \alpha + \beta = -1, \quad 0 < |\alpha|, \quad |\beta| < 1$$

$$\varphi_i(\xi) = \varphi_i^{(0)}(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}, \quad (i = \overline{1,4}), \quad \gamma_i = -\mathrm{ctg}\,\pi\alpha$$

$\varphi_n(\xi)$, $\varphi_i^{(0)}(\xi)$, $(i = \overline{1,4})$ – ограниченные функции. С помощью квадратурных формул Гаусса-Якоби и Гаусса-Чебышева [6] приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_n(\tau_k)}{\tau_k - \xi_m} A_k + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{4} \left[\sum_{k=1}^{n} Q_j(\xi_m, \eta_k)B_k\varphi_j^{(0)}(\eta_k) + \lambda_{1j}C_j\right] = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} R_{i0}(\tau_k, \zeta_m)\varphi_n(\tau_k)A_k + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{4}\left[\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_{ij}}{\eta_k - \zeta_m} + b_{ij}S(\zeta_m - \eta_k) + \right.\right.$$

(10)

$$+R_{ij}(\zeta_m,\tau_k)\Big]\varphi_j^{(0)}(\tau_k)B_k+\lambda_{ij}(\zeta_m)C_j\Big\}+\lambda_i\varepsilon=0,\quad (i=\overline{2,4})$$

$$\varphi_1(\zeta_m)=\gamma_1\varphi_2(\zeta_m),\quad (m=\overline{1,n-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}\tau_k\varphi_2^{(0)}(\tau_k)B_k=0$$

Здесь

$$A_k=-\frac{\pi 2^{-k}}{\sin\pi\alpha}\frac{P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\tau_k)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau_k)},\ (k=\overline{1,n}),\quad B_k=\begin{cases}1/n, & (k=\overline{2,n-1})\\ 1/2n, & (k=1,n)\end{cases}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau_k)=0,\quad \tau_k=\cos\frac{\pi(k-1)}{n-1},\quad (k=\overline{1,n})$$

$$P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_m)=0,\quad \zeta_m=\cos\frac{\pi(2m-1)}{2(n-1)},\quad (m=\overline{1,n-1})$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot)$—полиномы Якоби. К системе уравнений (10) следует прибавить дискретизированный аналог условий равновесия штампа и включения, имеющий вид

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(\tau_k)A_k=-1,\quad \sum_{k=1}^{n}\varphi_i^{(0)}(\tau_k)B_k=C_i,\quad (i=\overline{1,4})\qquad (11)$$

Значения постоянных C_i ($i=\overline{1,4}$) приведены в [7].

Система уравнений (10), (11) решалась численно с помощью ЭВМ ЕС—1045 при следующих значениях параметров задачи: $\nu_0=\nu=0{,}3$, $d_0=10$, $d_1=1$.

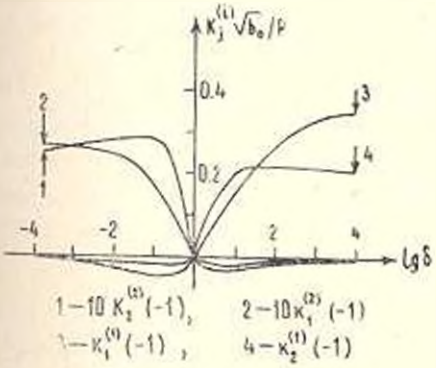
В табл. 1 приведена зависимость контактного давления под штампом от коэффициента трения k и от относительной жесткости включения δ. Результаты получены при значениях $d_2=d_3=2$, $\theta_0=\pi/3$. Видно, что параметры k и δ незначительно влияют на характер изменения $q(\tau)$. Увеличение k приводит к уменьшению $q(\tau)$ в центральных

Таблица 1

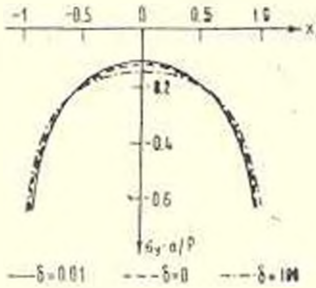
τ_k	$q(\tau_k)$					
1.0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.89	−0.1989	−0.1821	−0.2005	−0.1934	−0.2093	−0.2176
0.71	−0.1368	−0.1304	−0.1432	−0.1322	−0.1482	−0.1369
0.45	−0.1094	−0.1087	−0.1124	−0.1109	−0.1120	−0.1104
0.16	−0.0975	−0.0984	−0.0957	−0.0971	−0.0941	−0.0964
−0.16	−0.0970	−0.0981	−0.0952	−0.0960	−0.0933	−0.0956
−0.45	−0.1093	−0.1003	−0.1097	−0.1029	−0.1092	−0.1019
−0.71	−0.1392	−0.1222	−0.1465	−0.1378	−0.1476	−0.1404
−0.89	−0.2010	−0.1931	−0.2240	−0.2113	−0.2419	−0.2337
−1.0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\delta=0.01$	$\delta=100$	$\delta=0.01$	$\delta=100$	$\delta=0.01$	$\delta=100$
	$k=0$		$k=0.3$		$k=0.6$	

точках области контакта и к его увеличению у краев штампа. Аналогичная картина наблюдается при увеличении жесткости включения, то есть уменьшении параметра δ.

Кроме контактного давления в задаче определялись значения коэффициентов интенсивности напряжений на торцах включения по формулам, приведенным в [5]. На фиг. 2 показана зависимость этих коэффициентов от параметра δ, $(10^{-4}<\delta<10^{4})$. Видно, что для мягких $(\delta\gg 1)$ включений коэффициенты $k_1^{(2)}(-1)$ и $k_2^{(2)}(-1)$ значительно меньше $k_1^{(1)}(-1)$ и $k_2^{(1)}(-1)$. Для жестких $(\delta\ll 1)$ включений, наоборот, определяющую роль играют $k_1^{(2)}(-1)$ и $k_2^{(2)}(-1)$. При отсутствии включения $(\delta=1)$ коэффициенты $k_i^{(1)}(-1)$, $k_i^{(2)}(-1)$, $(i=1, 2)$ незначительно отличаются от нуля. Фиг. 2 построена при значениях $d_2=d_3=2$, $\theta_0=\pi/3$.



Фиг. 2.



Фиг. 3

При решении также находилась величина угла жесткого поворота включения ε. В табл. 2 приведены значения $\varepsilon\mu_0 b_0/P$ в зависимости от коэффициента трения k и угла θ_0. Табл. 2 построена при $d_2=d_3=2$, $\delta=0.01$.

С помощью численного анализа показано, что если один из параметров d_2 или d_3 при втором фиксированном и равном 2 достигает значений 5—6, то есть штамп и включение расположены достаточно далеко друг от друга, то коэффициенты $k_i^{(1)}(-1)$, $k_i^{(2)}(-1)$, $(i=1, 2)$ станут пренебрежимо малыми.

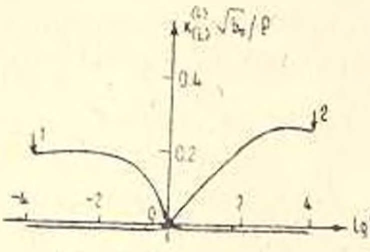
Таблица 2

	$k=0$	$k=0.15$	$k=0.3$	$k=0.45$	$k=0.6$
$\theta_0=0°$	0.1797	0.2058	0.2327	0.2606	0.2893
$\theta_0=15°$	0.1578	0.1837	0.2106	0.2387	0.2679
$\theta_0=30°$	0.1157	0.1448	0.1741	0.1986	0.2274
$\theta_0=45°$	0.0818	0.1056	0.1305	0.1567	0.1840
$\theta_0=60°$	0.0459	0.0755	0.0960	0.1221	0.1541
$\theta_0=75°$	0.0027	0.0269	0.0174	0.0736	0.1055

Отметим случай геометрической и силовой симметрии задачи, который получается при $\theta_0=0$, $k=0$, $d_3=0$. Наличие включения приводит лишь к двум скачкам: $f_1(r)$ касательных напряжений $\tau_{r\theta}(r)$ и $f_4(r)$—производной от нормального смешения $u_\theta(r)$.

На фиг. 3 показано распределение контактного давления под штампом в зависимости от параметра δ.

Фиг. 3 построена при $\nu_0=\nu=0{,}3$, $d_0=10$, $d_1=1$, $d_2=2$.



1—10 $k_2^{(1)}(-1)$, 2—$k_1^{(1)}(-1)$

Фиг. 4

Фиг. 4 дает зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $k_1^{(1)}(-1)$ и $k_2^{(1)}(-1)$ от параметра δ. Она построена при тех же геометрических и механических параметрах задачи, что и фиг. 3.

Численный анализ показал, что если $d_2>5$, то есть включение расположено „далеко" от края полуплоскости, оно не влияет на распределение контактных напряжений под штампом.

PRESSURE OF A PUNCH ON THE HALF-PLANE WITH A LINEAR ELASTIC INCLUSION

D. V. GRILITSKY, A. A. YEVTUSHENKO, V. I. PAOUK

ԴՐՈՇՄԻ ՃՆՇՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՈՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Ա. Ա. ԵՎՏՈՒՇԵՆԿՈ, Վ. Ի. ՊԱՈՒԿ

Ամփոփում

Աշխատանքում լուծված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր կամայական ձևով դասավորված բարակ առաձգական ներդրակ պարունակող կիսահարթության վրա դրոշմի ճնշման մասին։ Կիսահարթության եզրը դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին ճիգերից։ Դրոշմի տակ շփման ուժերը բավարարում են Կուլոնի օրենքին։ Ներդրակը մոդելավորվում է լարումների և ներդրակի միջին գծի վրա տեղափոխումների ածանցյալների թռիչքներով։

Խնդիրը բերված է հինգ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի։ Թվային վերլուծությամբ գտնված է դրոշմի տակ կոնտակտային ճնշման բաշխումը, ներդրակի ծայրերում լարումների ինտենսիվության գործակիցների արժեքները, ինչպես նաև, ներդրակի կոշտ պտույտի մեծությունը խնդրի մեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сулим Г. Т.* Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов: 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, №4487—85 Деп. 34.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: Наука, 1967. 402 с.
3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 468 с.
4. *Грилицький Д. В., Попович Б. И.* Плоскi контактнi задачi термопружностi. (Навч. посiбник, Львiв: ЛДУ, 1973. 114 с. На укр. яз.).
5. *Евтушенко А. А.* Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным упругим включением.—Прикл. матем. и механика, 1980, *44*, №5, с. 875—881.
6. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости и электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
7. *Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями.—Прикл. матем. и механика. 1975, *39*, №3, с. 520—529.

Львовский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.VII.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988 Механика

УДК 539.6

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ ОБРАЗЦОВ НА ПРОНИКАНИЕ

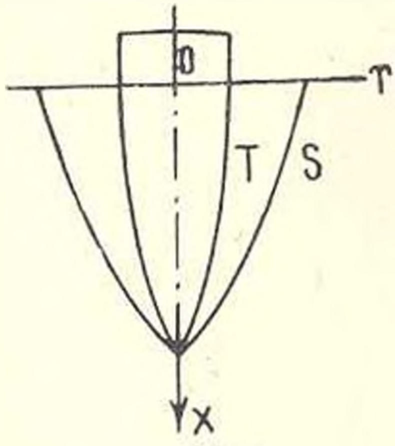
БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А., ГРИГОРЯН М. С.

Вопросы проникания тонких твердых тел в металлы в пределах применимости гипотезы плоских сечений изучены в [1—3]. Учет действия импульсных токов, уменьшающих глубину проникания в пределах 40—60% опытным и теоретическим путем произведен в [4—8].

Другой причиной уменьшения глубины проникания, как показано теоретически в [12], является анизотропность пластических свойств среды.

§ 1. Теоретическая модель проникания

Слоистый образец, состоящий из большого количества чередующихся тонких пластин различных металлов, моделируется трансверсально изотропной однородной средой [9].



Фиг. 1

Метод, развитый в настоящей статье, состоит в изучении фронта разрушения S, который исходит из вершины тела, упругой области вне S и области разрушения позади S (фиг. 1). Предполагается, что разрушение позади S происходит вдоль площадок скольжения.

Рассматриваются случаи, когда среда является трансверсально изотропной. Для тонких тел вращения задачу можно считать квазистатической [3], осесимметричной. В начале для простоты задачу будем считать одномерной, а именно: имеет место гипотеза плоских сечений [1, 2].

Ось X направим по нормали к свободной поверхности среды, занимающей нижнее полупространство, а через r обозначим радиальную координату. Уравнение поверхности проникающего тела берется в виде $r=r_k(x, t)$, где r_k мало, t есть время с начала проникания, причем при $t=0$ $r_k=0$. Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r=r_k\xi_0$, где $\xi_0\gg 1$, но $\xi_0 r_k$ мало. Тогда можно для решения вблизи S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям r/r_k, что соответствует случаю линейной асимптотики.

С учетом тонкости проникающего тела можно записать $|\varepsilon_{xx}|\ll\ll|\varepsilon_{xr}|\ll|\varepsilon_{rr}|$. Уравнение несжимаемости в основном порядке запишется в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}=0$$

где v_r есть скорость частиц.

Решение этого уравнения в области $r\leq r_k\xi_0$ согласно граничному условию $r=r_k$, $v_r=\partial r_k/\partial t$ имеет вид [3]

$$v_r=\frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t}$$

В области пластического течения, образующейся при внедрении с большой скоростью, можно записать связь тензора скоростей деформации и тензора напряжений [10] в виде

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{a}=H(\sigma'_r-\sigma'_\theta)+G(\sigma'_r-\sigma'_x),\quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}=H(\sigma'_\theta-\sigma'_r)+F(\sigma'_\theta-\sigma'_x) \qquad (1.1)$$

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{a}=G(\sigma'_x-\sigma'_r)+F(\sigma'_r-\sigma_\theta)$$

где a—параметр пластичности, τ_s—пределы текучести по соответствующим направлениям

$$2F=\frac{1}{\tau^2_{s\theta}}+\frac{1}{\tau^2_{sx}}-\frac{1}{\tau^2_{sr}};\ 2G=\frac{1}{\tau^2_{sx}}+\frac{1}{\tau^2_{sr}}-\frac{1}{\tau^2_{s\theta}};\ 2H=\frac{1}{\tau^2_{sr}}+\frac{1}{\tau^2_{s\theta}}-\frac{1}{\tau^2_{sx}} \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.1) описывает осесимметричное течение среды в предположении об идеальной пластичности вблизи тела. Условие Мизеса в основных порядках с учетом малости сдвиговых деформаций, из-за тонкости проникающего тела, имеет вид

$$H(\sigma'_r-\sigma'_\theta)^2+G(\sigma'_r-\sigma'_x)^2+F(\sigma'_\theta-\sigma'_x)^2=1 \qquad (1.3)$$

В частности, для трансверсально-изотропной среды

$$G=F=\frac{1}{2\tau^2_{sx}},\quad H=\frac{1}{\tau^2_{sr}}-\frac{1}{2\tau^2_{sx}}\quad \alpha=\frac{3}{\tau^2_{sx}}\left(\frac{1}{\tau^2_{sr}}-\frac{1}{4\tau^2_{sx}}\right)$$

С учетом (1.1), (1.2), (1.3) имеем

$$\sigma'_r=-\frac{\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}(2F+G)+\frac{\varepsilon_{xx}}{a}(2F+H)}{\alpha},\quad \sigma'_\theta=\frac{\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}(2G+H)+\frac{\varepsilon_{xx}}{a}(F-H)}{\alpha} \qquad (1.4)$$

$$\sigma'_x=\frac{\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}(F-G)+\frac{\varepsilon_{xx}}{a}(F+2H)}{\alpha},\quad \alpha=3(HG+FH+GF)$$

и

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{a}-\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\right)^2+\frac{\varepsilon_{xx}}{a}\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\left(4-\frac{\tau_{sr}^2}{\tau_{sx}^2}\right)=\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(1-\frac{\tau_{sr}^2}{4\tau_{sx}^2}\right) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) в переменных ε_{xx}/a, $\varepsilon_{\theta\theta}/a$ дает в случае $\tau_{sr}<2\tau_{sx}$ замкнутую кривую, а в случае $\tau_{sr}>2\tau_{sx}$—одну ветвь гиперболы.

В [12] решена данная задача по гипотезе плоских сечений, для которой $\varepsilon_x=0$. Использование уравнений в упругой области для трансверсально-изотропной среды, а также условия непрерывности v_r, σ_{rr} на фронте $r=r_k\xi_0$, полученное в [12], дает значение σ_{rr} на теле в виде

$$\sigma_{rr}=-\frac{1}{2}\frac{\tau_{sx}\tau_{sr}}{\sqrt{4\tau_{sx}^2-\tau_{sr}^2}}\ln\left[\mu^2\left(\frac{4}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{\tau_{sx}^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{\tau_{sr}^2}-\dfrac{1}{\tau_{sx}^2}}}\right] \tag{1.6}$$

где μ—модуль сдвига.

При $\tau_{sr}\approx 2\tau_{sx}$ следует учесть, что $\mu/\tau_{sr}\gg 1$ и предполагать $\mu^2\left(\frac{4}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{\tau_{sx}^2}\right)\gg 1$. Поскольку для металлов μ является большой величиной, последнее ограничение на малость $\frac{4}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{\tau_{sx}^2}$ допустимо. При этом аргумент логарифма больше 1 и $\sigma_{rr}\approx-\infty$ при $\tau_{sr}\approx 2\tau_{sx}$. Таким образом, гипотеза плоских сечений дает эффект значительного увеличения силы сопротивления и уменьшения глубины проникания.

Для устранения особенности при $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ в (1.6) и выяснения характера σ_{rr} для $\tau_{sr}\approx 2\tau_{sx}$ необходимо отказаться от предположения $\varepsilon_x=0$ и провести более подробный анализ.

Из (1.4) можно получить

$$\sigma_r'-\sigma_\theta'=-2\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\tau_{sx}^2+2\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\tau_{sx}^2\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{2\tau_{sx}^2}\right)\tau_{sr}^2\mp \tag{1.7}$$
$$\mp\frac{\tau_{sx}^2\tau_{sr}}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{2\tau_{sx}^2}\right)\left[4\tau_{sr}^2\lambda\left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\right)^2-4\left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\right)^2\tau_{sr}^2+\frac{\tau_{sr}^2}{\tau_{sx}^2}\right]^{1/2}$$

где введено обозначение $\lambda=1-\tau_{sr}^2/4\tau_{sx}^2$.

Из (1.7) следует, что $\sigma_r'-\sigma_\theta'\to\infty$, при условиях $\varepsilon_{\theta\theta}/a\neq 1/2\tau_{sx}$, $\lambda=0$.

В случае тонких тел [3] можно рассматривать варианты:

а) $\dfrac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\neq\dfrac{1}{2\tau_{sx}}$ при $\tau_{sr}\to 2\tau_{sx}$, $\sigma_r'-\sigma_\theta'\to\infty$

б) $\dfrac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\approx\dfrac{1}{2\tau_{sx}}$ при $\tau_{sr}\to 2\tau_{sx}$, где $\sigma_r'-\sigma_\theta'$

получается конечным.

Для точного решения задачи следует применять численные методы. Однако для качественного анализа можно сделать упрощающие предположения

$$\varepsilon_{xx} = n\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad n = \frac{2\tau_{sx}\sin^2\beta}{2\tau_{sx} - \tau_{sr}\cos^2\beta} \tag{1.8}$$

при этом для $\tau_{sr} \neq 2\tau_{sx}$, $n \sim \beta^2$, имеет место допущение гипотезы плоских сечений [3]. При $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ $n=1$, что соответствует (1.5).

Записав уравнение неразрывности $\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ и интегрируя, с учетом граничных условий на теле $r = r_k$, $v_r = \partial r_k/\partial t$ [3] можно получить

$$v_r = \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+1}}\frac{\partial r_k}{\partial t}; \quad \sigma_r' - \sigma_\varphi' = -\sqrt{\frac{3}{2}}\left|\frac{(n+1)^2}{\tau_{sr}^2} - \frac{n}{\tau_{sx}^2}\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n+1}{\tau_{sr}^2} - \frac{n}{2\tau_{sx}^2}\right) \tag{1.9}$$

Как и в [3], с учетом одномерности по r уравнение равновесия записывается в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} = 0$$

После интегрирования получим

$$\sigma_{rr} = -(\sigma_r' - \sigma_\varphi')\ln\frac{r}{r_k\xi_0} + \sigma^e \tag{1.10}$$

где σ^e—напряжение из упругой области, $r = r_k\xi_0$—граница пластической области, постоянная ξ_0 находится подстановкой упругого решения в (1.3). Как видно из (1.10), σ_{rr} определяется разностью $\sigma_r' - \sigma_\varphi'$. В отличие от [12] σ_{rr} при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ конечное, хотя следует выяснить порядки. Обозначая $\tau_{sr} = \tau_{sx}(2-\lambda)$ и считая а) $\lambda \gg \sin^2\beta$, б) $\lambda \ll \sin^2\beta$, в) $\lambda \sim \sin^2\beta$, можно получить в случаях

а) $n \approx 0$; $\sigma_r' - \sigma_\varphi' = -\tau_{sx}/\sqrt{\lambda}$

б) $n = 1 - \lambda/2\sin^2\beta$; $\sigma_r' - \sigma_\varphi' \approx -\tau_{sr}/8\sin^2\beta$

в) $\lambda = 2\sin^2\beta$; $\sigma_r' - \sigma_\varphi'$ дается (1.9)

Таким образом, приближенное решение (1.10), найденное согласно (1.8), устраняет особенность σ_{rr}, полученную по теории [3], где было принято, что $\varepsilon_{xx} \approx 0$.

Однако, во всех случаях а) б), в) для малых β по-прежнему остается в силе вывод о больших значениях напряжения.

§ 2. *Экспериментальное изучение проникания*

Для выяснения достоверности полученных теоретических выводов об уменьшении глубины проникания в трансверсально-изотропную среду при $\tau_{sr} \approx 2\tau_{sx}$ были сделаны композиты путем склеивания с помощью клея ГИПК-113 тонких слоев различных металлов, составленных чередованием около 50 пластинок.

В качестве металлов брались алюминий-свинец, дюраль-свинец, дюраль-алюминий с различными комбинациями толщин пластин. При этом получились прочные соединения. В процессе экспериментов образцы оставались цельными.

Среднее значение радиального предела текучести составного материала берется по формуле Фойхта

$$\tau_{sr} = \frac{\tau_{s1} h_1 + \tau_{s2} h_2}{h_1 + h_2} \tag{2.1}$$

где $h_{1,2}$—толщины слоев, τ_{s1} и τ_{s2}—пределы текучести составляющих металлов.

Как показали опыты, для тех образцов, для которых $1{,}6\,\tau_{sx} \leqslant \tau_{sr} \leqslant 2{,}8\,\tau_{sx}$, имеет место весьма значительное уменьшение глубины проникания в композит по сравнению с прониканием в изотропные образцы с пределами текучести τ_{s1} и τ_{s2}, соответственно. Например, для образца, составленного из пластинок алюминия и свинца толщиной $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м и $2 \cdot 10^{-3}$ м, получаются глубины проникания в композит $\sim 68 \cdot 10^{-3}$ м, а в алюминий— $\sim 0{,}1$ м, в свинец более 0,12 м. При этом $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2{,}3$, где значение τ_{sx} в опытах измерялось сжатием образца.

Результаты экспериментов приведены в таблице

Таблица

Материал	τ_{s1} $\times 10^5$ Pa	τ_{s2} $\times 10^5$ Pa	τ_{sr} $\times 10^5$ Pa	τ_{sx} $\times 10^5$ Pa	τ_{sr}/τ_{sx}	f [illegible] $\times 10^{-2}$ м	f [illegible] $\times 10^{-2}$ м
Pb 1.6—Al 2	250	840	578	250	2.3	18	6.9
Pb 1.6—Al 4	250	1200	883	250	3.5	10	6.4
Al 1.6—Al 4	1600	840	1178	1200	1	7.2	7.8
Pb 2—Al 6	250	840	693	250	2.8	13	6.7
Pb 6—Al 2	250	840	395	250	1.6	20	5.8
Pb 0.8—Al 4	250	1200	1000	975	1	4.5	6.2
Pb 1.6—Al 6	250	840	666	250	2.6	12	6.8
Pb 6—Al 10	250	3000	1968	250	8	4.5	4.3
Pb 2—Al 10	250	3000	2500	300	8.3	4.0	3.8
Pb 0.8—Al 0.8	250	1600	925	765	1.2	8	6.9

В первом столбце указаны сочетания металлов, после названия металла указана толщина слоя в мм. Во втором и третьем столбцах указаны пределы текучести указанных металлов. В четвертом столбце приведены значения τ_{sr} композита, вычисленные согласно модели Фойхта.

В образцах, в которых толщина свинца и другого металла одного порядка, величина τ_{sx} почти совпадает с τ_s свинца, а в случае весьма тонких свинцовых пластинок τ приближается к τ_{sr} и, согласно опытам, разрушение цилиндрического образца происходит аналогично изотропному случаю. Шестой столбец показывает отношение τ_{sr}/τ_{sx}, являющееся основным параметром исследуемого эффекта. В седьмом и восьмом столбцах приводятся глубины проникания в изотропный образец с приведенными пределами текучести [1.1] и в композит, соответственно.

Как видно из таблицы, в диапазоне $1{,}6<\tau_{sr}/\tau_{sx}<3{,}5$ имеет место существенное уменьшение глубины проникания. Значения τ_{sr}/τ_{sx}, примерно равные единице или восьми, дают пределы наличия эффекта. На фиг. 2 приведен кратер и индентор в случае образца четвертого композита таблицы. Глубина проникания в композит с $\tau_{sr}/\tau_{sx}=2{,}8$ равна $\sim 0{,}067$ м. Алюминиевый образец толщиной 0,12 м пробит насквозь. На фиг. 3 приведен кратер и индентор в случае первого образца таблицы, более близкий к теоретическому. Во всех случаях наличия эффекта уменьшения глубины имеет место сильное затупление стального индентора, подобное [4.11].

Фиг. 2

Фиг. 3

Таким образом, за счет оптимального выбора отношения τ_{sr}/τ_{sx} можно добиться значительного уменьшения глубины проникания твердых инденторов в металлические среды.

Область пластичности композита заметно шире области пластичности изотропного материала, откуда можно сделать вывод о большом рассеянии энергии по радиусу в образец.

THE INFLUENCE OF ANISOTROPIC PROPERTIES OF THE METALIC LAMINETED SPECIMENTS ON THE PENETRATION

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTCJAN, M. S. GRIGORJAN

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ՆՄՈՒՇՆԵՐԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ՎՐԱ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ, Մ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Տրված է բարակ մարմնի շերտավոր միջավայրերի մեջ ներթափանցման խնդրի տեսական և փորձնական հետազոտությունը։ Փորձնականորեն հաստատված է շառավղային և տանգենցիալ ուղղությամբ հոսունության սահմանների օպտիմալ ընտրության շնորհիվ անիզոտրոպ շերտավոր կոմպոզիտ միջավայրում խորության զգալի փոքրացման տեսական հետևությունները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Backman M. E. and Goldsmit W.* The mechanics of penetration of projectiles into targets.—International Journal of Engineering Science, 197·, v. 16, № 1, pp. 2–99.
2. *Сагомонян А. Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом.– Вест. Моск. ун-та, матем., мех., 1975, №5, с. 104—111.
3. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. *34*, №3, с. 25—38.
4. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Влияние разрядных токов на динамические процессы в металлических образцах. В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: 1984. 349 с.
5. *Багдоев А. Г., Гургенян А. А.* Проникание тонких тел вращения в магнитоупругую среду. В сб.: II Всесоюзный симпозиум по теории магнитоупругости. Цахкадзор: 1978.
6. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонких тел в металлы.—МТТ, 1982, №2, с. 191.
7. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Влияние разрядных токов конденсаторов на механические явления в образцах. В сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: ЕрГУ, 1984. 178 с.
8. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А., Пахалов В. Б.* Определение распределения токов и упругих полей при импульсном разряде в металлах.– Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. *39*, №1, с. 3—11.
9. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 231 с.
10. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. *Forrestal M. J., Lee L. M., Jenrette B. D.* Laboratory-Scal Penetration Experiments into Geological Targets to Impact velocities of 2,1 km s.—Journal of Applied Mechanics, 1986, vol. 53, pp. 317—320.
12. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. *36*, №6, с. 23—30.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.IX.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988 Механика

УДК 624.075

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

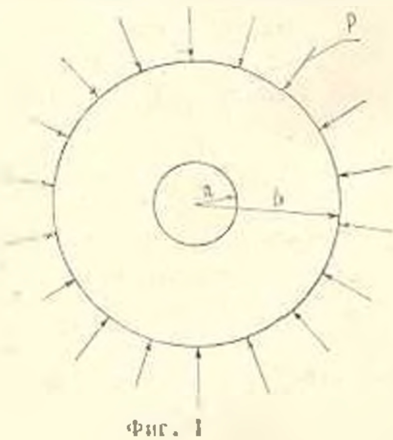
ЧЕРЕНКОВА М. В.

Устойчивости упругих кольцевых пластин посвящены работы [1—6]. Обзор некоторых из них можно найти в статье [7].

В указанных работах авторы использовали классическую теорию изгиба пластин, в которой деформации поперечного сдвига γ_{iz} $(i=r, \theta)$ считаются пренебрежимо малыми (r, θ, z—цилиндрические координаты с началом отсчета в точке пересечения срединной плоскости с осью пластины). С применением новых конструкционных материалов, в частности, стеклопластиков, имеющих модули сдвига G_{iz} $(i=r, \theta)$ значительно меньшие, чем модули упругости E_i $(i=r, \theta, z)$, возникла необходимость оценить влияние деформаций, пренебрегаемых в классической теории. Известны решения, относящиеся к поперечному изгибу и устойчивости анизотропных пластин [8—9], но до конца рассмотрен лишь случай трансверсальной анизотропии материала пластины, когда можно записать следующие соотношения для модулей упругости $E_r=E_\theta\neq E_z$ и коэффициентов Пуассона $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta r}$; $\nu_{rz}=\nu_{\theta z}=\nu_{zr}=\nu_{z\theta}$ [9—10].

Однако еще больший практический интерес представляет случай цилиндрической анизотропии, когда $E_r=E_z\neq E_\theta$; $\nu_{rz}=\nu_{zr}$; $\nu_{r\theta}=\nu_{z\theta}$; $\nu_{\theta r}=\nu_{\theta z}$. Ниже исследован именно этот случай для задачи об осесимметричной форме потери устойчивости кольцевой пластины.

Рассмотрим кольцевую пластину, которая на внешнем контуре $r=b$ упруго защемлена и нагружена равномерно распределенными сжимающими усилиями p [Н/М] (фиг. 1); предполагается, что внутренний контур $r=a$ не закреплен и свободен от нагрузки. В нашем решении, учитывающем сдвиги, используется теория С. А. Амбарцумяна [8] и, в частности, принято, что касательные напряжения в сечениях $r=\mathrm{const}$ меняются по параболическому закону: $\tau_{rz}=1/2\times(h^2/4-z^2)\varphi$, где h—толщина пластины, $\varphi(r, \theta)$—искомая функция координат r, θ.



Фиг. 1

Перерезывающие силы в тех же сечениях определяются интегрированием касательных напряжений по толщине пластины:

$$Q_r = \frac{h^3}{12}\varphi \tag{1}$$

Согласно общим уравнениям, данным в [8], для рассматриваемой здесь осесимметричной формы потери устойчивости дифференциальные уравнения приобретают вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\varphi) = -\frac{12}{h^3}Z \tag{2}$$

$$D_r\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2w}{d\rho^2}\right) - D_\theta\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} + \frac{h^2}{10}\frac{D_r}{G_{rz}}\left(\frac{D_\theta}{D_r}\frac{\varphi}{\rho} - \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right)\right) + \frac{h^3}{12}\rho\varphi =$$

$$= \frac{h^2}{10}\left(A_2Z - A_1\frac{d}{d\rho}(\rho Z)\right) \tag{3}$$

Здесь $\rho = r/b$, w – перемещение произвольной точки срединной поверхности в направлении оси z, D_r, D_θ – цилиндрические жесткости пластины в радиальном и окружном направлениях;

$$G_{rz} = \frac{E_r}{2(1+\nu_{rz})};\ A_1 = -\frac{E_r}{E_z}\frac{\nu_{rz}+\nu_{r\theta}\nu_{\theta z}}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}};\ A_2 = -\frac{E_\theta}{E_z}\frac{\nu_{\theta z}+\nu_{\theta r}\nu_{rz}}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}$$

Z — фиктивная поперечная нагрузка, вычисляемая для неоднородного напряженного состояния кольцевой пластины.

$$Z = N_r\frac{d^2w}{d\rho^2} + N_\theta\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} \tag{4}$$

где $N_r(\rho)$ и $N_\theta(\rho)$ нормальные усилия, действующие в плоскости пластины и вызванные нагрузкой p в докритическом состоянии.

Строго говоря, эти усилия следует определять путем развития теории Ламе на случай анизотропии. Однако, это привело бы к весьма сложным выражениям [11] и результатам, которые во многих случаях практически мало отличаются от результатов, получаемых по обычным формулам Ламе для изотропного материала (в выполненных нами пробных расчетах для $E_r = 0.14\ E_\theta$ и отношении радиусов контурных линий 0,85 различие составляет доли процента). Поэтому ниже принято, как для изотропного материала, по формулам Ламе

$$N_r = -\frac{p}{1-\eta^2}\left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) \tag{5}$$

$$N_\theta = -\frac{p}{1-\eta^2}\left(1 + \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) \tag{6}$$

Здесь $\eta = a/b$.

Выражение для Z можно записать в более компактном виде

$$Z = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw}{d\rho}N_r\right) \tag{7}$$

Подставив (7) в (2) и произведя интегрирование полученного уравнения, можно выразить функцию φ через производную $dw/d\rho$

$$\varphi = \frac{12}{h^3}\frac{p}{1-\gamma_1^2}\frac{dw}{d\rho}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\rho^2}\right)+\frac{C_0}{\rho} \tag{8}$$

где C_0 - постоянная интегрирования. На свободном внутреннем контуре пластины ($\rho=\gamma_1$) перерезывающая сила $Q_r=0$ и, согласно (1), должно быть справедливо равенство $\varphi=0$. Отсюда из (8) следует, что $C_0=0$, то есть

$$\varphi = \frac{12}{h^3}\frac{p}{1-\gamma_1^2}\frac{dw}{d\rho}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\rho^2}\right) \tag{9}$$

или, используя (5),

$$\varphi = -\frac{12}{h^3}N_r\frac{dw}{d\rho} \tag{10}$$

Подставив (10) в (3), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла поворота нормали к срединной плоскости $\theta = dw/bd\rho$:

$$L_1(\theta)+L_2(\theta)+L_3(\theta)=0;\quad L_1(\theta)=\frac{d^2\theta}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\theta}{d\rho}-\frac{D_\theta}{D_r}\frac{\theta}{\rho^2}-\frac{N_r b^2}{D_r}\theta$$

$$L_2(\theta)=\frac{6}{5}\frac{1}{h}\frac{1}{G_{rz}}\left(\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d(N_r\theta)}{d\rho}\right)-\frac{E_\theta}{E_r}\frac{N_r\theta}{\rho}\right)$$

$$L_3(\theta)=-\frac{b^2}{10}\frac{1}{D_r}\left(A_1\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\theta N_r)-A_2\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho\theta N_r)\right) \tag{11}$$

Здесь $L_1(\theta)$ соответствует левой части дифференциального уравнения классической теории пластин; $L_2(\theta)$ — члены, характеризующие поправку к классической теории, обусловленную учетом сдвигов γ_{rz}; $L_3(\theta)$ — члены, учитывающие влияние напряжений σ_z.

Для решения уравнения (11) используем метод Бубнова-Галеркина, аппроксимируя угол θ функцией

$$\theta = \frac{C_1}{\rho}+C_2\rho+C_3\rho^3 \tag{12}$$

которая уже использовалась в статье [4] для исследования устойчивости кольцевой пластины по классической теории. Там же оценена погрешность приближенного решения, составляющая не более 2%.

В рассматриваемом здесь случае упруго защемленного внешнего и свободного внутреннего контуров коэффициенты C_1, C_2, C_3 должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия $M_r=0$ при $\rho=\gamma_1$ и $M_r=-c\theta_e$ при $\rho=1$. Здесь $M_r(\rho)$ — внутренний изгибающий момент, который согласно [8] определяем следующим образом:

$$M_r = -\frac{D_r}{b}\frac{d\theta}{d\rho} - \frac{D_r}{b}\nu_{r\theta}\frac{\theta}{\rho} + \frac{1}{b}\frac{D_r}{G_{rz}}\left(\frac{d\varphi}{d\rho} + \nu_{r\theta}\frac{\varphi}{\rho}\right) - \frac{h^2}{10}\frac{1}{b}\Lambda_1 Z \tag{13}$$

c — коэффициент упругого защемления, θ_0 — угол поворота вертикальных элементов наружного контура пластины. Принимая, что поворот происходит вокруг контура $z=0$, выражение для θ_0 записываем в виде

$$\theta_0 = -\theta + \frac{1}{2G_{rz}}\frac{h^2}{4}\varphi \tag{14}$$

Подставляя (12) в граничные условия, получим систему двух алгебраических уравнений, из которой можно выразить постоянные C_1 и C_3 через C_2:

$$\theta = C_2\left(\rho + m_1\frac{1}{\rho} + m_2\rho^3\right) \tag{15}$$

где

$$m_2 = \frac{U_1 Y_2 - U_2 Y_1}{Y_3 U_1 - U_3 Y_1}; \quad m_1 = -\left(\frac{Y_2}{Y_1} + m_2\frac{Y_3}{Y_1}\right)$$

$$Y_1 = \frac{1}{\gamma_i^2}\left(K_1\frac{h^2}{5p^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2} - \nu_{r\theta} + 1\right); \quad Y_2 = K_1\frac{h^2}{5b^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2} - \nu_{r\theta} - 1$$

$$Y_3 = \gamma_i^2\left(K_1\frac{h^2}{5b^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2} - \nu_{r\theta} - 3\right)$$

$$U_1 = \frac{h^2}{5b^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2}\left(K_1\gamma_i^2 + K_2(1-\gamma_i^2)(\nu_{r\theta}-1)\right) - \nu_{r\theta} + 1 + c_0\left(K_2\frac{h^2}{4b^2}\alpha - 1\right)$$

$$U_2 = \frac{h^2}{5b^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2}\left(K_1 + K_2(1-\gamma_i^2)(\nu_{r\theta} - 1)\right) - \nu_{r\theta} - 1 + c_0\left(K_2\frac{h_2}{4b^2}\alpha - 1\right)$$

$$U_3 = \frac{h^2}{5b^2}\frac{\alpha}{1-\gamma_i^2}\left(K_1(2-\gamma_i^2) + K_2(1-\gamma_i^2)(\nu_{r\theta} - 1)\right) - \nu_{r\theta} - 3 +$$

$$+ c_0\left(K_2\frac{h^2}{4b^2}\alpha - 1\right)$$

$$K_1 = \frac{E_\theta}{E_z}\frac{2 + \nu_{rz} - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}; \quad K_2 = \frac{1 + \nu_{rz}}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}$$

здесь $\alpha = pb^2/D_r$ — безразмерный коэффициент нагрузки, $c_0 = cb/D_r$ — безразмерный коэффициент упругого защемления.

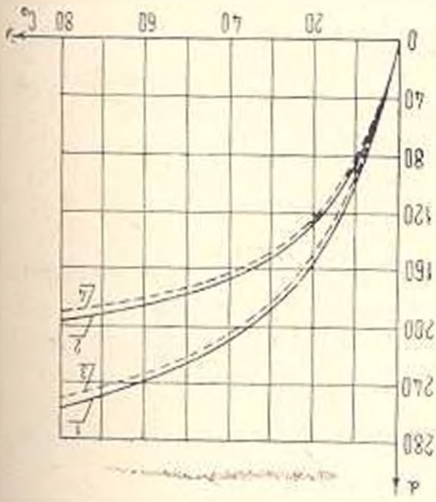
Выражение (15) удовлетворяет всем граничным условиям задачи и для завершения решения, следуя обычной процедуре метода Бубнова-Галеркина, подставим (15) в (11) и приравняем нулю интеграл:

$$\int_{\gamma_i}^{1}\left(L_1(\theta) + L_2(\theta) + L_3(\theta)\right)\theta d\rho = 0 \tag{16}$$

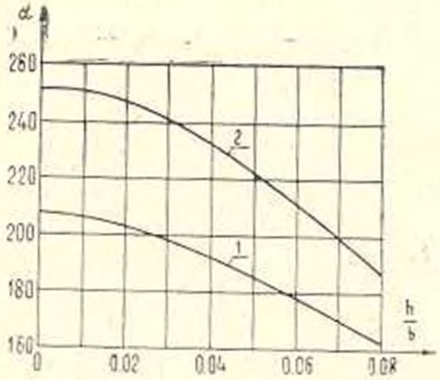
Отсюда можно найти практическое значение безразмерного коэффициента нагрузки α.

Расчеты производились при $\eta=0.85$ для двух вариантов материала пластины: изотропного материала с $E=2{,}94\cdot10^{10}$ Па, $\nu=0{,}3$ и анизотропного материала с $E_r=E_z=2{,}94\cdot10^{10}$ Па; $E_\theta/E_r=2{,}24$; $\nu_{rz}=\nu_{zr}=0{,}3$; $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta r}=0{,}33$; $\nu_{z\theta}=\nu_{\theta z}=0{,}15$.

Численные результаты представлены на фиг. 2 и фиг. 3. На фиг. 2 сплошными кривыми показаны зависимости искомого критического значения коэффициента нагрузки α от коэффициента упругого защемления c_0 для анизотропной пластины без учета сдвигов γ_{rz} (кривая 1) и с их учетом (кривая 2). Несколько ниже штриховыми кривыми 3 и 4 показаны соответствующие зависимости для изотропной пластины. (Относительная толщина пластины h/b при построении кривых 2 и 4 была принята равной 0,076). На фиг. 3 можно проследить для $c_0=40$ (кривая 1) и $c_0=80$ (кривая 2) влияние относительной толщины анизотропной пластины на критическое значение коэффициента нагрузки.



Фиг. 2



Фиг. 3

Значение α при $h/b\to0$ соответствует классической теории, не учитывающей сдвиги. При построении графиков было положено, что $\varepsilon_z=0$, так как учет нормальных напряжений осложняет вычисления, но вносит существенно меньшую поправку, чем учет сдвигов γ_{rz}.

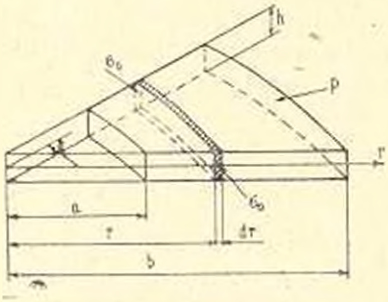
При малых значениях коэффициента упругого защемления допустимо пользоваться упрощенной моделью кольца, основанной на исходном предположении, что $E_r=E_z=G_{rz}=\infty$, то есть считать радиальные сечения недеформируемыми. Тогда при потере устойчивости по осесимметричной форме любой его радиус, оставаясь прямым, повернут на малый угол φ.

Рассмотрим секториальный элемент кольца, соответствующий центральному углу $d\theta$ (фиг. 4). В докритическом состоянии, вследствие податливости кольца в окружном направлении (E_θ — конечно), все точки элемента под действием внешней нагрузки перемещаются вдоль своих радиусов на величину Δ, так что относительная деформация в любой точке кольца в окружном направлении равна $-\Delta/r$. При этом возникает окружное напряжение $\sigma_0 = -E_\theta\Delta/r$. Величину Δ находим из уравнения равновесия элемента в докритическом состоянии:

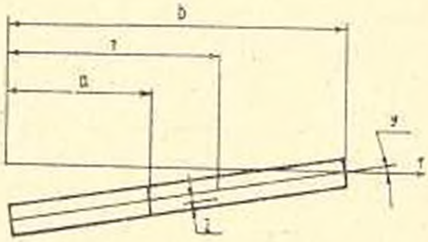
$$pbd\theta - 2h\int_a^b E_\theta \frac{\Delta}{r}\,dr\,\frac{d\theta}{2} = 0$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{pb}{hE_\theta \ln\dfrac{b}{a}} \tag{17}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, при потере устойчивости и повороте радиального сечения на угол ψ точка с координатами (r, z) перемещается по радиусу на величину $z\psi - \Delta$ (фиг. 5). Соответственно этому окружное напряжение определяется выражением

$$\sigma_\theta = E_\theta \frac{z\psi - \Delta}{r} \tag{18}$$

Момент системы этих напряжений в пределах всего сечения относительно оси r можно записать следующим образом:

$$M = \int_a^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta [(b - r)\psi + z]\,dz\,dr$$

Подставляя сюда (17) и (18), получим

$$M = \psi\left[\frac{pb^2}{\ln\dfrac{b}{a}}\left(1 - \ln\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) - \frac{E_\theta h^3}{12}\ln\frac{b}{b}\right] \tag{19}$$

При повороте радиального сечения на угол ψ на внешнем контуре кольца возникнет реактивный момент, выражение которого для секториального элемента имеет вид

$$M_2\,d\theta = -c\psi b\,d\theta \tag{20}$$

Составив уравнение равновесия моментов рассматриваемого секториального элемента кольца (фиг. 6).

$$2M\frac{d\vartheta}{2}+M_1 d\vartheta=0$$

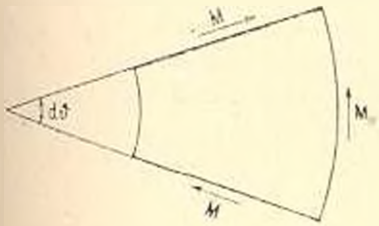
получим выражение для критической нагрузки осесимметричной формы потери устойчивости кольца

$$p=\frac{D_0}{b^2}\alpha_0$$

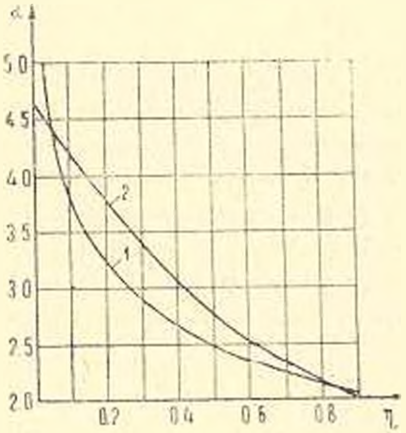
где

$$D_0=\frac{E_0h^3}{12};\quad \alpha_0=\ln\frac{b}{a}\,\frac{\ln\frac{b}{a}+c_0}{\ln\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1}$$ — безразмерный коэффициент

критической нагрузки, $c_0=\frac{cb}{D_t}$ —безразмерный коэффициент упругого защемления.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 7 кривой 1 представлена зависимость критического коэффициента нагрузки α_0 от соотношения радиусов пластины при $c_0=0$. Для сравнения приведена кривая 2, соответствующая изотропной пластине (см. решение Мейсснера [3], не содержащее учета сдвигов γ_{rz}; при свободном опирании внешнего контура пластины такой учет даст весьма малую поправку). Для сопоставимости результатов значения α, найденные в [3], разделены на разность $(1-\nu^2)$.

Как видно, уже при $\eta=0{,}6$ погрешность приближенного решения менее 4%, а при больших значениях η точность модели увеличивается. Конечно, упругое защемление внешнего контура пластины существенно уменьшает область применимости приближенного решения. Так, для $\eta=0{,}6$ уже при $c_0=1$ погрешность достигает почти 17%; в случае жесткого защемления внешнего контура упрощенная модель лишается смысла, так как поворот радиальных сечений невозможен.

Отметим, что решение, относящееся к упрощенной модели, в сущности соответствует известному решению Р. Граммеля [12], если его распространить на случай упругого защемления одного из контуров кольца.

THE INFLUENCE OF THE TRANSVERSE SHIFT ON THE STABILITY OF THE ELASTICALLY JAMMED COIL PLATE

M. V. CHERENKOVA

ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Մ. Վ. ՉԵՐԵՆԿՈՎԱ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է ներքին եզրը ազատ, իսկ արտաքին եզրը առաձգական ամրակցված օղակաձև անիզոտրոպ սալի կայունության կորստի առանցքասիմետրիկ ձևը՝ համասարաչափ արտաքին ճնշման դեպքում։ Հետազոտված է արտաքին բեռի կրիտիկական արժեքի կախվածությունը սալի հաստությունից և սալի արտաքին եզրի ամրակցման կոշտությունից՝ առանց հաշվի առնելու և հաշվի առնելով ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաները (γ_{rz}) և սալի անիզոտրոպիան։ Դիտարկված է լուծման պարզեցման հնարավորությունը արտաքին եզրով ազատ հենված սալերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dean W. R.* The elastic stability of an angular plate, Proceedings of the Royal Society, Series A, Math. and Physical Sciences, 1924, vol. 106, 737.
2. *Lokchin A. C.* Sur la stabilité d'une plaque renfermée entre deux cercles concentriques, Comptes Rendus, 1929, Tome 189, № 7, p. 316—317.
3. *Meissner E.* Über das Knicken kreisringförmiger scheiben, Schweizerishe Bauseitung, 1933, Bd. 101, s. 87—89.
4. *Григолюк Э. И.* Устойчивость круглых кольцевых пластин. Инженерный сб., 1949, т. 5, вып. 2, с. 83—95.
5. *Фельдман М. Р.* Устойчивость кольцевой пластины.—Прикладная механика, 1955, №4, с. 449—464.
6. *Лизарев А. Д., Бареева Г. Н.* Устойчивость упруго-защемленной кольцевой пластины при неоднородном поле напряжений. Инженерный журнал, 1965, т. 5, вып. 3, с. 483—491.

7. *Воробкова Н. Л., Преображенский И. Н.* Обзор исследований по устойчивости пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями. Сб.: Расчет пространственных конструкций.—М.: Стройиздат, вып. XV, 1973, с. 89—112.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1967, 268 с.
9. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости трансверсально изотропных круглых пластинок.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1966, т. XIX, № 2, с. 31—39.
10. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков.—Рига: Зинатне, 1969, 274 с.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука, 1977, 416 с.
12. *Grammel R.* Die Kipperscheinungen bei elastichen Ringen, ZAMM, 1927, Bd. 7, Heft 3, s. 198—210.

Ленинградский кораблестроительный
институт

Поступила в редакцию
3.III.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988. Механика

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СЛУЖАЩЕЙ ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

КАЗАРЯН К. Б.

В работе [1] выведено уравнение статической устойчивости цилиндрической оболочки, вдоль образующей которой протекает электрический ток. При выводе уравнения устойчивости возмущенные электромагнитные и пондеромоторные силы определялись в осесимметричной постановке. Аналогичным образом в [2] получено уравнение устойчивости для соленоидальной токонесущей оболочки.

В настоящей работе обобщены результаты работ [1, 2] на случай, когда электромагнитные возмущения и пондеромоторные силы, обусловленные изменением формы срединной поверхности оболочки, определяются без ограничения на характер возмущений срединной поверхности оболочки. Аналогичные вопросы магнитоупругой устойчивости токонесущих стержней и прямоугольных пластин обсуждены в работах [3—6].

1. Отнесем цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R, толщины $2h$ к триортогональной системе координат α, β, γ. Координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Под α и β подразумеваются размерные координаты, откладываемые, соответственно, по прямолинейной образующей и по дуге направляющей окружности срединной поверхности оболочки. Направление координатной линии γ совпадает с направлением нормали к внешней поверхности оболочки.

Рассмотрим два различных случая протекания электрического тока: 1) ток течет в оболочке по направлению образующей; 2) ток течет вдоль дуги направляющей окружности. Считается, что электрический ток равномерно распределен по толщине оболочки; плотность тока J_0 является заданной величиной. Оболочка помещена в диэлектрическую среду, отождествляемой с вакуумом. В дальнейшем индексом $(s)=1$ будем отмечать величины, относящиеся к области $h<\gamma<\infty$; индексом $(s)=2$ — к области $-R<\gamma<-h$.

Формально эти два случая можно объединить с помощью символа Кронекера δ_{in}. Введем вектор плотности электрического тока $\vec{j}_0$ следующим образом:

$$j_{0\alpha}=j_0\delta_{1n};\quad j_{0\beta}=j_0\delta_{2n};\quad j_{0\gamma}=0 \tag{1.1}$$

Индекс $n=1$ относится к первому случаю, индекс $n=2$—ко второму случаю.

Ток $\vec{j}_0$ создает магнитное поле $\vec{H}_0$, которое определяется из уравнений магнитостатики и имеет вид

$$H_{0\alpha}=\frac{4\pi j_0(\gamma-h)}{c}\delta_{2n};\quad H_{0\beta}=-\frac{4\pi j_0\delta_{1n}}{c(1+\gamma/R)}\left(\gamma+h-\frac{\gamma^2-h^2}{2R}\right);\quad |\gamma|\leqslant h$$

$$H^{(1)}_{0\alpha}=0;\quad H^{(1)}_{0\beta}=-\frac{8\pi j_0 h\delta_{1n}}{c(1+\gamma/R)};\quad h<\gamma<\infty \tag{1.2}$$

$$H^{(2)}_{0\alpha}=-\frac{8\pi j_0 h}{c}\delta_{2n};\quad H^{(2)}_{0\beta}=0;\qquad -R<\gamma\leqslant -h$$

$$H_{0\gamma}=H^{(1)}_{0\gamma}=H^{(2)}_{0\gamma}=0$$

В (1.2) c есть электродинамическая постоянная.

В результате взаимодействия тока с собственным магнитным полем в оболочке возникает начальное кольцевое усилие T_0 [1, 2]

$$T_0=\frac{8\pi j_0^2 h^2 R}{c^2}(-1)^n$$

В первом случае начальное кольцевое усилие является сжимающим, для второго случая оно является растягивающим.

В отношении упругой оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява. Считается, что материал оболочки является изотропным, проводящим с коэффициентом электропроводности σ, не обладает пьезоэлектрическими и ферромагнитными свойствами. Джоулево тепло и индуцированные электромагнитные поля, обусловленные подвижностью упругого тела [7], не учитываются.

Уравнения статической устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки средней длины в перемещениях срединной поверхности имеют вид [7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}F_\alpha d\gamma$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}F_\beta d\gamma$$

$$(1.3)$$

$$D\Delta^2 w+\frac{2Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\frac{w}{R}+\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)-T_0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}=\int_{-h}^{h}\left[F_\gamma+\gamma\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}\right)\right]d\gamma$$

В (1.3) E есть модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона материала оболочки; u, v—тангенциальные перемещения, w—нормальное перемещение срединной поверхности оболочки; F_α, F_β, F_γ—компоненты вектора возмущенной электромагнитной силы, обусловленного изменением формы срединной поверхности оболочки:

$\Delta_0 = \partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2$; $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$. Вектор $\vec{F}$ имеет вид

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}\times\vec{H} - \vec{j}_0\times\vec{H}_0\right] \tag{1.4}$$

где $\vec{j}$ есть вектор плотности электрического тока, $\vec{H}$ — вектор напряженности собственного магнитного поля деформированной оболочки.

Уравнение (1.3) удобно привести к следующему одному разрешающему уравнению относительно нормального прогиба $w(\alpha, \beta)$

$$D\Delta_0^4 w + \frac{2Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - (-1)^n \frac{8\pi j_0^2 R h^3}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\Delta_0^2 w) = Q(\alpha, \beta) \tag{1.5}$$

где

$$Q(\alpha,\beta) = \int_{-h}^{h}\left\{\Delta_0^2\left[F_\gamma + \gamma\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}\right)\right] + \frac{1}{R}\left[(2+\nu)\frac{\partial^3 F_\beta}{\partial\alpha^2\partial\beta} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial^3 F_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \nu\frac{\partial^3 F_\alpha}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial^3 F_\beta}{\partial\beta^3}\right]\right\}d\gamma$$

Ограничиваясь малыми возмущениями, представим векторы $\vec{j}$ и $\vec{H}$ в виде [1, 2, 7]

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \sigma\vec{e}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \tag{1.6}$$

В (1.6) $\vec{e}$, $\vec{h}$ есть малые возмущения электрического и магнитного полей, обусловленные деформацией оболочки. Они определяются из следующих задач электромагнитостатики [1—3]:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{e} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{e} = 0 \\ &\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{e}; \ \operatorname{div}\vec{h} = 0 \end{aligned} \qquad |\gamma| < h \tag{1.7}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{n} = 0; \quad \gamma = \pm h \tag{1.8}$$

В (1.8) $\vec{n}$ есть нормаль к срединной поверхности оболочки, которая для деформированной оболочки имеет вид [7]

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}(w-\gamma)}{|\operatorname{grad}(w-\gamma)|}$$

Линеаризованное граничное условие (1.8) имеет вид

$$e_\gamma = \frac{j_0}{\sigma}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\delta_{1n} + \frac{\partial w}{\partial\beta}\delta_{2n}\right); \quad \gamma = \pm h \tag{1.9}$$

Уравнения (1.7) должны рассматриваться совместно с уравнениями для возмущений магнитного поля во внешних областях оболочки.

$$\mathrm{rot}\,\vec{h}^{(s)} = 0; \quad \mathrm{div}\,\vec{h}^{(s)} = 0 \tag{1.10}$$

На деформируемой границе раздела материала оболочки с вакуумом $\gamma = w \pm h$ выполняется условие непрерывности компонент вектора магнитного поля [3, 6]

$$\vec{H}(w+h) = \vec{H}^{(1)}_{(w+h)}; \quad \vec{H}(w-h) = \vec{H}^{(2)}_{(w-h)}$$

Принимая во внимание, что при малых прогибах $\max\limits_{(\alpha,\beta)}|w| \ll h$, имеют место соотношения

$$\vec{H}_0(w \pm h) = \vec{H}_0(\pm h) + w \frac{d\vec{H}_0}{d\gamma}\bigg|_{\gamma=\pm h}; \quad \vec{H}_0^{(s)}(w \pm h) = \vec{H}_0^{(s)}(\pm h) + w \frac{d\vec{H}_0^{s}}{d\gamma}\bigg|_{\gamma=\pm h}$$

для компонент векторов возмущенного магнитного поля $\vec{h}$, $\vec{h}^{(s)}$ с учетом (1.2) и (1.6) получим следующие линеаризованные граничные условия при $\gamma = \pm h$

$$h_\alpha - h_\alpha^{(s)} = -\frac{4\pi j_0}{c}\delta_{2n} w; \quad h_\beta - h_\beta^{(s)} = \frac{4\pi j_0}{c}\delta_{1n} w; \quad h_\gamma - h_\gamma^{(s)} = 0 \tag{1.11}$$

Компоненты векторов $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$ должны удовлетворять также условиям ограниченности при $\gamma \to \infty$; $\gamma \to -R$, соответственно.

Компоненты вектора пондеромоторной силы $\vec{F}$ посредством компонент векторов $\vec{e}$, $\vec{h}$ для тонкой оболочки $h/R \ll 1$ записываются следующим образом:

$$F_\alpha = \frac{j_0}{c}\left[h_\gamma \delta_{2n} + \frac{4\pi\sigma}{c} e_\gamma(\gamma+h)\delta_{1n} \right]; \quad F_\beta = -\frac{j_0}{c}\left[h_\gamma \delta_{1n} - \frac{4\pi\sigma}{c} e_\gamma(\gamma-h)\delta_{2n} \right] \tag{1.12}$$

$$F_\gamma = \frac{j_0}{c}\left\{ h_\beta \delta_{1n} - h_\alpha \delta_{2n} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left[(\gamma+h) e_\alpha \delta_{1n} - (\gamma-h) e_\beta \delta_{2n} \right] \right\}$$

2. Решения уравнений (1.5), (1.7) и (1.10) представим в виде

$$w = w_0 \exp[i(k\alpha + m\beta/R)], \quad g = g_0(\gamma)\exp[i(k\alpha + m\beta/R)] \tag{2.1}$$

где под функцией g понимается любая компонента возмущенного электромагнитного поля, k—волновое число, m—целое число. При решении задачи (1.7) для возмущенного электрического поля введем скалярный потенциал Φ

$$\vec{e} = \mathrm{grad}\,\Phi; \quad \Delta\Phi = 0 \tag{2.2}$$

где $\quad \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \dfrac{1}{(R+\gamma)}\dfrac{\partial}{\partial\gamma} + \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{R^2}{(R+\gamma)^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}$

Подставляя (2.1) в (2.2), для функции $\Phi_0(\gamma)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\Phi_0}{d\gamma^2}+\frac{1}{R+\gamma}\frac{d\Phi_0}{d\gamma}-\left[k^2+\frac{m^2}{(R+\gamma)^2}\right]\Phi_0=0 \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\Phi_0(\gamma)=\bar{C}_1 I_m(z)+\bar{C}_2 K_m(z) \tag{2.4}$$

где $z=k(R+\gamma)$; $I_m(z)$, $K_m(z)$ есть модифицированные функции Бесселя, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ -постоянные интегрирования.

Граничное условие (1.9) запишем в виде

$$\Phi_0'=\frac{I_0 I w_0}{\sigma}\left(\delta_{1n}+\frac{m}{kR}\delta_{2n}\right)=A_0;\quad z=z_1=k(R+h);\quad z=z_2=k(R-h) \tag{2.5}$$

(штрих означает дифференцирование по z).

Решение (2.4), удовлетворяющее граничному условию (2.5), имеет вид

$$\Phi_0=A_0\frac{[K_m'(z_2)-K_m'(z_1)]I_m(z)+[I_m'(z_1)-I_m'(z_2)]K_m(z)}{I_m'(z_1)K_m'(z_2)-I_m'(z_2)K_m'(z_1)} \tag{2.6}$$

Компоненты вектора $\vec{e}_0$ имеют вид

$$e_{0r}=ik\Phi_0;\quad e_{0\varphi}=imk\Phi_0/z;\quad e_{0z}=k\Phi_0' \tag{2.7}$$

Уравнения (1.7) для компонент магнитного поля удобно преобразовать к виду

$$h_{z0}''+\frac{h_{z0}'}{z}-\left(1+\frac{m^2}{z^2}\right)h_{z0}=0$$

$$h_{\varphi 0}=-\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{m\Phi_0}{z}-ih_{z0}';\quad h_{r0}=-\frac{4\pi\sigma}{c}i\Phi_0'+\frac{m}{z}h_{z0} \tag{2.8}$$

Решение уравнения относительно h_{z0} имеет вид

$$h_{z0}=C_1 I_m(z)+C_2 K_m(z) \tag{2.9}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 обратимся к решению внешней задачи (1.10).

Выражая $\vec{h}^{(s)}$ через скалярный потенциал $\varphi^{(s)}$

$$\vec{h}^{(s)}=\mathrm{grad}\,\varphi^{(s)};\quad \Delta\varphi^{(s)}=0$$

для функций $\varphi_0^{(s)}$ получим следующее решение:

$$\varphi_0^{(s)}=d_1^{(s)}K_m(z)+d_2^{(s)}I_m(z)$$

Так как функция $K_m(z)$ имеет особенность в начале координат, а функция $I_m(z)$ неограниченно возрастает на бесконечности, то примем $d_1^{(2)} = d_2^{(1)} = 0$. Следовательно,

$$\psi_0^{(1)} = d_1^{(1)} K_m(z); \quad \psi_0^{(2)} = d_2^{(2)} I_m(z) \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что

$$h_{\gamma 0}^{(1)} = k d_1^{(1)} K'_m(z); \quad h_{\alpha 0}^{(1)} = ikd_1^{(1)} K_m(z), \quad h_{\beta 0}^{(1)} = d_1^{(1)} imk K_m(z)/z$$

$$h_{\gamma 0}^{(2)} = k d_2^{(2)} I'_m(z); \quad h_{\alpha 0}^{(2)} = ikd_2^{(2)} I_m(z); \quad h_{\beta 0}^{(2)} = d_2^{(2)} imk I_m(z)/z$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, $d_1^{(1)}$, $d_2^{(2)}$ определим из граничных условий (1.11). Для определения четырех постоянных мы имеем шесть граничных условий. Как показал дальнейший ход решения, для определения этих постоянных достаточно использовать условие непрерывности нормальной составляющей h_γ и одно из условий для тангенциальных составляющих h_α или h_β. При этом неиспользованное условие относительно другой тангенциальной составляющей будет удовлетворяться тождественно.

После определения постоянных C_1 и C_2 имеем следующее решение для функции:

$$h_{\gamma 0} = \frac{4\pi j_0 w_0}{c} \delta_{2n} [z_1 I_m(z) K'_m(z_1) - z_2 K_m(z) I'_m(z_2)] +$$

$$+ \frac{4\pi \sigma i m}{c} [\Phi_0(z_1) K_m(z_1) I_m(z) - \Phi_0(z_2) I_m(z_2) K_m(z)] \tag{2.11}$$

Подставляя (2.7)–(2.9) в (1.12) и производя соответствующие интегрирования с использованием разложений для функций I_m, K_m при $h/R \ll 1$:

$$I_m(z) \sim I_m(kR) + k\gamma I'_m(kR), \quad K_m(z) \simeq K_m(kR) + k\gamma K'_m(kR)$$

получим следующее выражение для функции $Q(\alpha, \beta)$ в приближении $kh \ll 1$; $h/R \ll 1$; $k^2 hR \ll 1$:

$$Q(\alpha, \beta) \sim \frac{8\pi h j_0}{c^2} \Delta_0^2 w (\delta_{1n} + \delta_{2n})$$

Учитывая, что $\delta_{1n} + \delta_{2n} = 1$, получим следующие интересующие нас уравнения устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки:

$$D\Delta_0^4 w + \frac{2Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - (-1)^n \frac{8\pi j_0^2 R h^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Delta_0^2 w = \frac{8\pi j_0^2 h}{c^2} \Delta_0^2 w \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) совпадают с уравнениями, полученными в работах [1, 2] при допущениях осесимметричного (одномерного) характера электромагнитных возмущений и пондеромоторных сил. В [1, 2] приведены также решения уравнения (2.12) для шарнирно опертой оболочки. Для оболочки, изготовленной из меди при соотношениях $R/L=0.2$; $R/h=200$; $h=10^{-3}$ м, имеем следующие критические значения плотности электрического тока, превышение которых приводит к потере упругой устойчивости:

$$j_{01}=1.4\cdot10^{8}\ \text{ка}/\text{м}^{2};\quad j_{02}=7.9\cdot10^{4}\ \text{ка}/\text{м}^{2}$$

ON EQUATION OF MAGNETOELASTIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL CARRING ELECTRICAL CURRENT

K. B. KAZARIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ՓՈԽԱԴՐՄԱՆԸ ԾԱՌԱՅՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված է հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունության հավասարումը հոսանքի անցման երկու տարբեր դեպքերի համար.

ա) հոսանքը թաղանթով անցնում է ծնիչի ուղղությամբ,

բ) հոսանքն անցնում է ծնիչի ուղղորդի աղեղի երկարությամբ.

Թաղանթի միջին մակերևույթի ձևի փոփոխմամբ պայմանավորված էլեկտրամագնիսական գրգռումները և պոնդերամոտորային ուժերը որոշված են սահմանափակումներ չդնելով թաղանթի միջին մակերևույթի գրգռումների բնույթի վրա.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* Выпучивание цилиндрической оболочки, служащей для транспортировки электрического тока. Межвузовский сб.: Механика, № 2, 1982. ЕГУ, Ереван, с. 38—43.
2. *Белубекян М. В., Григорян Г. В., Казарян К. Б.* Магнитоупругая устойчивость соленоидальной токонесущей оболочки. Сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости» 1984, ЕГУ, Ереван, с. 36—40.
3. *S. Chattopadhyay, F. C. Moon.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current. Jour. Appl. Mechanics, 42, 4, 809—811, 1975.
4. *Долбин Н. И., Морозов А. И.* Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током.—ПМТФ, 1966, № 3.
5. *Белубекян М. В.* О статической устойчивости токонесущей пластинки.—Докл. АН Арм. ССР, 1982, т. 74, № 5, с. 208—212.
6. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* К задаче устойчивости токонесущей пластинки. Тр. XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Таллин, 1983, с. 25—28.
7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
8. *Лурье А. И.* «Теория упругости». М.: Наука, 1970, 939 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
2.XI.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 6, 1988 Механика

УДК 624.012.042

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФУНДАМЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

В [1] рассмотрена линейная модель неоднородного упругого основания, описываемая ядром (функцией влияния)

$$K(r)=\frac{\theta}{(2\pi\sqrt{r^2+\varepsilon^2})^{1+\nu}} \tag{1}$$

где θ—некоторая физическая постоянная, в частности, она может быть принята по аналогии с однородным основанием в виде $\theta=2E_0^{-1}(1-\sigma)$; $r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$; x, y, x_1, y_1 — координаты точки наблюдения и точки приложения единичной сосредоточенной силы; ε, ν—параметры модели; E_0, σ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Отличительной особенностью предлагаемой модели упругого основания, ядро которой объединяет свойства ядра модели неоднородного основания Г. К. Клейна и одного из рассмотренных в [2] ядер $K(r)=(r^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$, является ограниченность перемещений основания на всей его поверхности, включая точку приложения силы, возможность однозначного вычисления этих перемещений и скачков перемещений на поверхности основания. Это позволяет решать, в частности, задачи о свободно лежащих неизолированных (по терминологии Б. Г. Коренева [2]) конструкциях на упругом основании.

В настоящей статье дается вывод ядра предлагаемой модели для плоского случая и рассматривается задача о расчете двух полубесконечных неизолированных балок на упругом основании.

Как известно [2, 3], ядро произвольной линейной симметричной модели упругого основания может быть представлено в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$K(r)=\frac{\theta}{2\pi}\int_0^\infty h(t)J_0(rt)\,dt \tag{2}$$

где $J_0(rt)$ - цилиндрическая функция первого рода $h(t)$—плотность ядра. Из обращения (2) следует

$$h(t)=2\pi t\int_0^\infty rK_0(r)J_0(rt)\,dr \tag{3}$$

В случае плоской задачи ядро модели представимо через функцию $h(t)$ по формуле [3]

$$K(|x-s|) = \theta \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} \cos t(x-s)\,dt \tag{4}$$

В [1] для функции $h(t)$ получена следующая формула:

$$h(t) = \frac{t^\alpha \varepsilon^\beta}{2^{\alpha-\beta}\pi\Gamma(\alpha)} K_\beta(\varepsilon t) \tag{5}$$

где $\alpha = \dfrac{\nu+1}{2}$; $\beta = \dfrac{1-\nu}{2}$; $K_\beta(\varepsilon t)$ — функции Макдональда.

Для получения ядра $K(x-s)=K(|x-s|)=K(y)$ необходимо вычислить интеграл

$$K(y) = \frac{\theta\varepsilon^\beta}{2^{\alpha-\beta}\pi\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{-\beta} K_\beta(\varepsilon t) \cos ty\,dt \tag{6}$$

Используя формулу 6.699.12 [4], справедливую при $\mathrm{Re}\,\varepsilon>0$, $y>0$, $\mathrm{Re}\,\beta>-1/2$, находим

$$K(y) = \frac{A_\nu}{(y^2+\varepsilon^2)^{\nu/2}} \tag{7}$$

Здесь

$$A_\nu = \frac{\theta\Gamma(\nu/2)}{2^{\nu+1}\varepsilon^{\nu-1/2}\Gamma\left(\dfrac{1+\nu}{2}\right)}$$

Γ—гамма-функция. Ядро (7), как видим, имеет достаточно простой вид и при конечных ν, ε не имеет особенностей на всей полуоси $0\leqslant y<\infty$. Функция влияния, определяемая формулой (7) с механической точки зрения достаточно обоснована. Она имеет конечное значение

$$K(0) = A_\nu \varepsilon^{-\nu} \tag{8}$$

в точке приложения силы стремится к нулю на бесконечности, что вполне соответствует инженерным представлениям о работе упругого основания, в отличие, например, от модели упругой однородной полуплоскости, ядро которой имеет вид

$$K(y) = \frac{\theta}{\pi} \ln\frac{1}{|y|} + C \tag{9}$$

где C—произвольная постоянная.

Полагая $\nu\to0$, $\nu\to2$ и $\varepsilon\to0$, мы можем придти к четырем указанным выше ядрам: Г. К. Клейна ($\varepsilon\to0$), Б. Г. Коренева ($\nu\to0$), упругой изотропной полуплоскости ($\nu\to0$, $\varepsilon\to0$), винклеровского основания ($\nu\to2$, $\varepsilon\to0$). Однако осуществить непосредственный предельный переход в формуле (9) нельзя, так как при этом нарушаются условия сходимости интеграла (6). Чтобы обойти эту трудность, найдем производную ядра—угол наклона поверхности основания

$$K'(y) = -\frac{\theta\varepsilon^{\nu}}{2^{\nu-1}\pi\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{1-\nu}K_\nu(\varepsilon t)\sin ty\,dt \tag{10}$$

Этот интеграл вычисляется с помощью формулы 6.699.11 [4]

$$\int\limits_0^\infty x^{1+\nu}K_\nu(ax)\sin bx\,dx = \sqrt{\pi}(2a)^\nu\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)b(b^2+a^2)^{-\frac{3}{2}-\nu} \tag{11}$$

если учесть, что в силу определения функции Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2}\exp\left(\frac{\pi}{2}\nu i\right)H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi i}{2}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\nu i\right)H_{-\nu}^{(1)}(iz)$$

где $H_\nu^{(1)}(iz)$—функция Ханкеля первого рода, $K_\nu(z)=K_{-\nu}(z)$ и положить в (11) $\nu=-\nu$, $a=\varepsilon$, $b=y$. Получим

$$K'(y) = -\frac{\theta\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)y(y^2+\varepsilon^2)^{\nu-3/2}}{2^\nu\pi^{\nu+1/2}\Gamma(\alpha)} \tag{12}$$

Теперь можно осуществить предельные переходы; при $\nu\to0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{\theta y(y^2+\varepsilon^2)^{-1}}{\pi} \tag{13}$$

Интегрируя (13), находим плоское ядро, соответствующее ядру Б. Г. Коренева

$$K(y) = -\frac{\theta}{\pi}\ln\left(\frac{y}{y^2+\varepsilon^2}\right)+C \tag{14}$$

и при $\varepsilon\to0$ приходим к ядру (9) для упругой изотропной полуплоскости. С другой стороны, из (12) при $\varepsilon\to0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{\theta\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)y^{-1-\nu/2}}{2^\nu\pi^{\nu+1/2}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \tag{15}$$

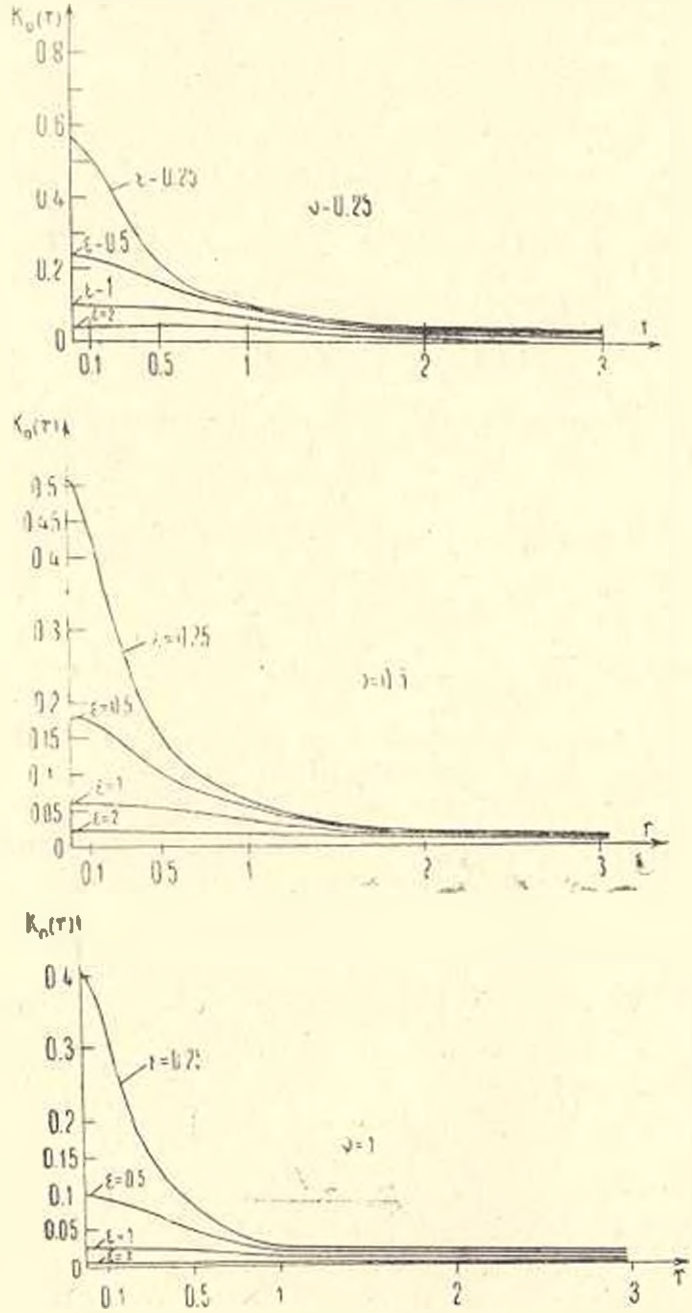
и после интегрирования

$$K(y) = \frac{\theta\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{2^\nu\pi^{\nu+1/2}\nu\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)y^\nu}+C \tag{16}$$

Из условия на бесконечности при $\nu\neq0$ получаем $C=0$. Ядро (16) соответствует упругой полуплоскости с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному закону. Предельный переход от (16) к (9) осуществляется с помощью формулы [3]:

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{|y|^{\nu}} - 1\right) = \ln \frac{1}{|y|}$$

Таким образом, из ядра (7) с помощью указанных предельных операций могут быть получены ядра (14), (16) и (9), соответствующие

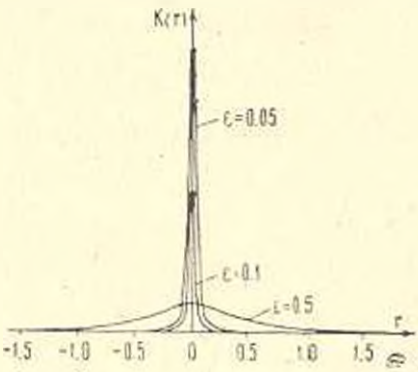


Фиг. 1 (а,б,в)

известным моделям. Отметим, что ядро (14) ранее в литературе не рассматривалось. На фиг. 1 а, б, в приведены графики функции влияния для предлагаемой модели при различных значениях ν и ε. Вопрос о выборе этих параметров должен решаться с учетом реальных свойств грунтового основания. В частности, если могут быть получены экспериментальные данные о функции влияния с помощью штамповых испытаний, то определение параметров ν, ε можно осуществить методом наименьших квадратов, используя аппроксимацию экспериментального ядра функцией (1). Важной особенностью рассматриваемой модели является возможность адэкватного описания свойств грунтов, как с хорошими распределительными свойствами, так и грунтов с быстрозатухающими вне нагруженной площади осадками, обычно описываемыми моделями винклеровского типа. Так, если положить $A\varepsilon^{-\nu}$ = const и учесть, что

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{y^2+\varepsilon^2}=\delta(x)$$

то вместо (7) мы придем к ядру, содержащему дельта-функцию, что характерно для дискретных моделей. На фиг. 2 приведены графики ядра основания при $A\varepsilon^{-\nu/2}$ = const для $\nu = 2$ и различных значений параметра ε. Объединяя в себе свойства различных моделей (однородных, неоднородных, непрерывных и дискретных), предлагаемое ядро не только позволяет в рамках одного алгоритма охватить решение задач расчета конструкций на различных по своим механическим свойствам основаниях, но и дает возможность избежать трудности математического характера, присущие, например, моделям однородной и неоднородной полуплоскости, возникающие из-за наличия неинтегрируемых особенностей и бесконечных перемещений. В частности, для таких моделей невозможно получить решение задач о неизолированных конструкциях со свободными краями. Покажем на примере плоской задачи, что рассматриваемая модель дает возможность решать такого рода задачи.



Фиг. 2

Пусть две полубесконечные балки, лежащие на основании с ядром (7), смыкаются своими свободными концами. Уравнения равновесия балок имеют вид

$$EJy^{\mathrm{IV}}(x)=q(x)-p(x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1)K(|x-x_1|)dx_1=y(x)\tag{17}$$

Здесь EJ—жесткость балки; q, p—внешняя нагрузка и контактное давление; $y(x)$—перемещение балки. Граничные условия, соответствующие свободным концам балок, имеют вид:

$$y''(\pm 0) = y'''(\pm 0) = 0 \tag{18}$$

Перейдем в (17) к преобразованиям Фурье по координате x, для чего умножим левую и правую части обоих уравнений на $(2\pi)^{-1/2}\exp(i\xi x)$ и проинтегрируем по всей оси. Интегрирование по частям с учетом (18) даст

$$EJ\xi^4 y_\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\xi^2 A - i\xi^3 B] = q_\xi - p_\xi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) K(|x - x_1|) \exp(i\xi x) dx_1 dx = y_\xi \tag{19}$$

Здесь индексом ξ обозначены преобразования Фурье соответствующих функций; $A = \Delta \left[\frac{dy}{dx}(0) \right]$; $B = \Delta[y(0)]$; Δ—скачок функции. Полагая в интегральном уравнении (19) $x - x_1 = z$, находим

$$\sqrt{2\pi}\, p_\xi K_\xi = y_\xi \tag{20}$$

Вычисление преобразования Фурье ядра основания может быть выполнено с помощью формулы (4). Так как ядро—четная функция, то

$$K_\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K(z) \cos \xi z dz$$

и сравнение с (4) дает

$$K_\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta h(\xi)}{\xi} \tag{21}$$

Как видим, K_ξ и $\xi^{-1}h(\xi)$—четные функции аргумента ξ.

Из (19) и (20) получаем

$$y_\xi = \frac{q_\xi - (2\pi)^{-1/2}[\xi^2 A - i\xi^3 B]}{EJ\xi^4 + \xi[\pi\theta h(\xi)]^{-1}} \tag{22}$$

Перемещение балки можем получить по формуле обращения преобразования Фурье, при этом учтем, что знаменатель в (22)—четная функция

$$y(x) = y_0(x) - AF_1(x) + BF_2(x) \tag{23}$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \cos \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi\theta h(\xi)]^{-1}}; \quad F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sin \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi\theta h(\xi)]^{-1}}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_\xi \exp(-i\xi x) d\xi}{EJ\xi^4 + \xi[\pi\theta h(\xi)]^{-1}}$$

Подставляя далее (23) в граничные условия (18), получаем выражение для определения неизвестных скачков A, B

$$A = -\pi EJy_q'(0)F_3^{-1}, \quad B = \pi EJy_q'''(0)F^{-1}$$

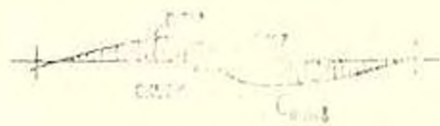
где

$$F_3 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\xi^3 + [\theta_1 h(\xi)]^{-1}}; \quad F_4 = \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{\xi^3 + [\theta_1 h(\xi)]^{-1}}; \quad \theta_1 = \pi\theta EJ$$

Следует отметить, что при использовании известных моделей, обладающих распределительными свойствами, интегралы в (24) были бы расходящимися, так что дальнейшие вычисления оказались бы невозможными. Благодаря наличию двух регуляризующих параметров эти трудности при использовании рассматриваемой модели легко обходятся.

После определения неизвестных A, B перемещения балки могут быть вычислены по формулам (23), а угол поворота и силовые факторы путем ее соответствующего дифференцирования.

Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим в качестве примера решение задачи о действии двух кососимметричных сил (фиг. 3) на неизолированные полубесконечные балки со свободными концами, лежащие на основании, характеризующемся следующими значениями параметров: $\theta = 5 \cdot 10^{-8}$ м² Н; $\theta_1 = 50$м; $\varepsilon = 0.01$ м; $\nu = 0$. При этом $h(\xi) = e^{-\xi}$. На фиг. 4 приведена эпюра безразмерных перемещений рассматриваемой балки; характерен скачок перемещений в начале координат. Вычисления проведены на ЭВМ СМ—4.

CALCULUS OF PLANE FOUNDATION CONSTRUCTIONS BY MEANS OF GENERALISED MODEL OF BASE

L. G. PETROSIAN

ՀԱՐԹ ՀԻՄՔԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ՀԻՄՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՄՈԴԵԼԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված է տարածական հիմքի ընդհանրացված մոդելի միջուկի դուրս բերումը՝ հարթ դեպքի համար. Եվ որպես օրինակ դիտարկված է տարածական հիմքի վրա դրված երկու չմեկուսացված կիսաանվերջ հեծանների հաշվարկի խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цейтлин А. И., Петросян Л. Г.* Методы граничных элементов в строительной механике.—Ереван. «Луйс», 1987.
2. *Коренев Б. Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании.—М.: Госстройиздат, 1954.
3. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания.—Киев-Одесса: Вища школа, 1982.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
30.XI.1987