

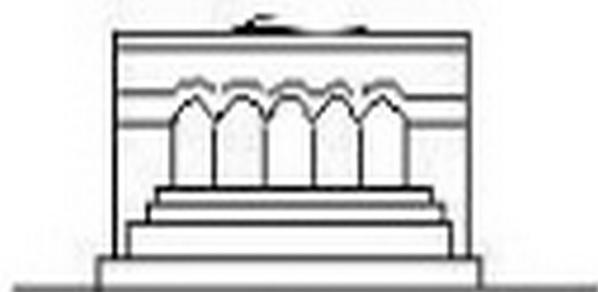
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1988

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
 ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА
 ПРОЧНОСТЬ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

ГЛУШНИ В. И., КАЗАРЯН Р. С.

Пусть замкнутая цилиндрическая оболочка размерами l , R , h изготовлена из многослой ортотропного композиционного материала (КМ), уложенных под углами $\pm\varphi$ к оси оболочки. Погруженная в жидкость оболочка подвергается всестороннему давлению жидкости q .

Ставится задача проектирования оболочки минимального веса при заданных уровнях внешнего давления q , первой частоты собственных колебаний Ω и ограничении на прочность.

1. В работе [1] для определения толщины оболочки из КМ, погруженной в жидкость, при заданных значениях частоты собственных колебаний

$$\Omega = \Omega_{mn}(m, n, q) \tag{1.1}$$

и внешнего всестороннего давления жидкости q , получается уравнение

$$h_{mn}^3 - B_{mn} h_{mn} - C_{mn} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_{mn} = \frac{\Omega_{mn}^2 - \frac{B_{11}^0 m^4}{12 \rho R^2} [a_{11} m^4 + (\bar{a}_{22} - 2\bar{a}_{23}) m^2 \bar{n}^2 + a_{22} \bar{n}^4]^{-1}}{\frac{B_{11}^0 \chi^4}{12 \rho R^2} [D_{11} m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{23}) m^2 \bar{n}^2 + \bar{D}_{33} \bar{n}^4]} \tag{1.3}$$

$$C_{mn} = \frac{\frac{\rho_0 R}{\rho \chi} \Omega_{mn}^2 K_{mn} - (0,5 m^2 + \bar{n}^2) \frac{q \chi^2}{\rho R}}{\frac{B_{11}^0 \chi^4}{12 \rho R^2} [D_{11} m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{23}) m^2 \bar{n}^2 + \bar{D}_{33} \bar{n}^4]}$$

$$\bar{a}_{22} = B_{22}^0 \cos^2 \varphi, \quad \bar{D}_{12} = \frac{12}{B_{11}^0 h^2} D_{12}^0 \chi, \quad \bar{n} = \frac{l}{\pi R} n$$

$$K_{mn} = \frac{K_0(\chi^2 m^2 + n^2)}{1 + m^2 + n^2 \cdot K_1(\chi^2 m^2 + n^2)}$$

K_0 , K_1 — модифицированные функции Бесселя, m — число полуволи по образующей, n — число волн по окружности, ρ — плотность материала оболочки, ρ_0 — плотность жидкости.

Уравнение (1.2), как и в [1], получено для цилиндрического отсека, шарнирно опирающегося по торцам на жесткие шпангоуты.

Из (1.1), (1.2) следует, что расчетная толщина, обеспечивающая заданное значение первой частоты собственных колебаний Ω при фиксированном уровне внешнего всестороннего давления жидкости q , определяется из условия

$$h_1 = \max_{m,n} h_{mn}(m, n, q, \bar{\Omega}) \quad (1.4)$$

где h_{mn} — единственный действительный положительный корень уравнения (1.2).

Очевидно, что для обеспечения работоспособности конструкции необходимо также удовлетворение ограничения на прочность.

Пусть под действием внешнего всестороннего давления в оболочке реализуется (приближенно) безмоментное напряженное состояние с утонениями

$$T_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} Rq, \quad T_{yy} = C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} = Rq, \quad T_{xy} = C_{66}\varepsilon_{xy} = 0 \quad (1.5)$$

где $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 2\pi R]$.

Отсюда, для деформаций в главных геометрических направлениях, получается

$$\varepsilon_{xx} = \frac{0.5B_{11} - B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{Rq}{h}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{B_{11} - 0.5B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{Rq}{h}, \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad (1.6)$$

Напряжения в главных геометрических направлениях определяются формулами

$$\sigma_{xx} = B_{11}\varepsilon_{xx} + B_{12}\varepsilon_{yy} = \frac{Rq}{2h}, \quad \sigma_{yy} = B_{12}\varepsilon_{xx} + B_{22}\varepsilon_{yy} = \frac{Rq}{h} \\ \sigma_{xy} = B_{16}\varepsilon_{xx} + B_{26}\varepsilon_{yy} = l \frac{Rq}{h} \quad (1.7)$$

где

$$l = \frac{B_{16}(0.5B_{22} - B_{12}) + B_{26}(B_{11} - 0.5B_{12})}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}$$

Здесь необходимо указать, что несмотря на ортотропность пакета оболочки по толщине в целом, монослой в главных геометрических направлениях анизотропен

$$B_{ik}(\varphi) = -B_{ik}(-\varphi)$$

Коэффициенты $B_{ik}(\varphi)$ определяются через коэффициенты упругости монослоя формулами поворота [2].

Напряжения в монослоях оболочки в направлении их укладки (в главных физических направлениях) определяются формулами:

$$\sigma_{11} = (0.5\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + L\sin 2\varphi) \frac{Rq}{h}, \quad \sigma_{22} = (0.5\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - L\sin 2\varphi) \frac{Rq}{h} \quad (1.8)$$

$$\sigma_{12} = (0,25\sin 2\varphi + L\cos 2\varphi) \frac{Rq}{h}$$

Формулы (1.5)–(1.8) получены при граничных условиях

$$v = 0, \quad T_{11} = \frac{Rq}{2} \quad (x=0, x=l)$$

где v — тангенциальное перемещение в кольцевом направлении.

Из условия прочности монослоя [3, 4]

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{B0}^2} = 1 \quad (1.9)$$

для расчетной толщины h_2 получается

$$h_2 = RqV\sqrt{F(\varphi)} \quad (1.10)$$

где

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sigma_{B1}^2} (0,5\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + L\sin 2\varphi)(2L\sin 2\varphi - 0,5\cos 2\varphi) + \\ + \frac{1}{\sigma_{B2}^2} (0,5\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - L\sin 2\varphi)^2 + \frac{1}{\sigma_{B0}^2} (0,25\sin 2\varphi + L\cos 2\varphi)^2 \quad (1.11)$$

2. Прежде, чем перейти к задаче проектирования оболочки, необходимо сделать следующее пояснение.

В реальных конструкциях отсек оболочки, вообще говоря, закреплен жестко с торцевыми шпангоутами и расчетными толщинами должны быть

$$h_1^* = \alpha h_1, \quad (x < 1); \quad h_2^* = \beta h_2, \quad (x > 1) \quad (2.1)$$

Коэффициент $\alpha < 1$ учитывает отклонение граничных условий, при которых получена формула (1.4), от идеальных, а коэффициент $\beta > 1$ дает поправку на учет краевого эффекта. Но, ввиду того, что определение и выбор коэффициентов α и β не являются проблемными для данной статьи и не влияют на алгоритм решения задачи, численная реализация проведена при $\alpha = \beta = 1$.

Ставится следующая задача проектирования оптимальной оболочки из композиционного материала.

При заданных q и Ω найти угол укладки монослоев φ так, что

$$\max\{h_1(q, \Omega, \varphi); h_2(q, \varphi)\} \longrightarrow \min \quad (2.2)$$

где $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$.

В качестве примера рассматривается пример проектирования замкнутой круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала с характеристиками

$$B_{11}^0 = 0.1, \quad B_{12}^0 = 0.030, \quad B_{65}^0 = 0.033, \quad \tau_{d1} = (1.8)7.$$

$$\tau_{H2} = 0.0004, \quad \tau_{T0} = 0.0005, \quad \tau_{T5} = 1.99$$

при следующих геометрических параметрах $k l = 2, R = 150$ см.

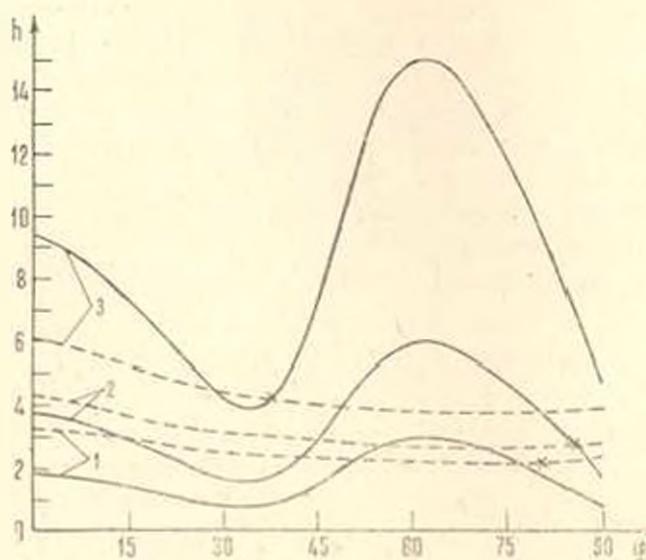
Таблица 1

| q | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|--------|------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 МПа | $h = 2.64$ $\varphi = 60$ | 2.55 58 | 3.13 45 | 3.74 40 | 4.41 35 |
| 2 МПа | 2.80 66 | 3.10 81 | 3.56 45 | 4.27 35 | 4.73 35 |
| 3 МПа | 4.20 37 | 4.6 33 | 4.65 39 | 4.95 40 | 5.49 35 |
| 10 МПа | 7.99 35 | 7.99 35 | 7.99 35 | 7.99 35 | 7.99 35 |

При этих данных в табл. 1 для заданных наименьших по m, n, Ω и уровня нагружения q приведены значения наименьшей расчетной толщины h в см и соответствующих оптимальных углов φ .

Следует отметить, что при $q = 10$ МПа и выше активным является ограничение на прочность, а ограничение на первые частоты собственных колебаний до $\Omega = 500$ Гц приводят к более низким значениям толщины. В этом случае оптимальным является угол $\varphi = 35^\circ$ и расчетная толщина

$$h = \min h(\varphi)$$



Фиг. 1

При $\bar{\Omega} = 500$ Гц оптимальный угол $\varphi = 35^\circ$ обеспечивает наименьшую толщину как по прочностному, так и по динамическому критериям.

На фиг. 1 приведены графики $h_1(\varphi) = \max_{m, k} h_{m, k}(\varphi, q, \bar{\Omega})$ и $h_2(\varphi) = Rq\sqrt{F(\varphi)}$ в зависимости от угла укладки монослоя композиционного материала φ при $\bar{\Omega} = 100$ Гц для различных q . Сплошные линии соответствуют $h_1(\varphi)$, а пунктирные — $h_2(\varphi)$ для значений интенсивности внешнего равномерного давления $q_1 = 1$ МПа, $q_2 = 2$ МПа, $q_3 = 5$ МПа. Крестиками обозначены соответствующие оптимальные точки. Как видно из фигуры, $h_1(\varphi)$ меняются в достаточно широком диапазоне и необходимость оптимального выбора угла φ и выигрыш от оптимизации очевидны.

DESIGN OF THE CYLINDRICAL SHELL UNDER RESTRICTIONS OF STRENGTH AND VIBRATION OWN FREQUENCY

V. Ts. GNUNY, R. S. KAZARIAN

ՇԵՂՈՒԿՈՒՄ ԸՆԿՎՈՒՄ ԳԼԱՆՅԻՆ ԹՈՂԱԿԹԻ ՆՍԵԱԿՑՈՒՄԸ՝
ԱՐՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒԴԵՆՐԻ ՇԱՃԱՆՈՒՈՒՆՈՒԹՅԱՆ
ՍԱՇՄԱՆՔՈՒՄԻՆԵՐԻ ԿԵՊՔՈՒՄ

Վ. Ս. ԳՆՈՆԻ, Ի. Ս. ԿԱԶԱՐԻԱՆ

Ա Մ Ք Ր Ո Ւ Մ Ե Մ

Շտապորում է ամրության և դինամիկ նայտանդներով գլանային թաղանթի օպտիմալ նախադրյալն որոշման հարցը: Ցույց է տրված, որ թաղանթի նախադրյալներ՝ կախված կամպոզիցիոն նյութից, մագալների փախվածան անկյունից, փոփոխվում է բախանալի լայն սահմաններում, և օպտիմալ նախադրյալներ բերում է թաղանթի կշիռը զգալի փոքրացման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Գնուի Վ. Ս., Կազարյան Բ. Ս. Расчет оптимальных цилиндрических оболочек из композиционных материалов, погруженных в жидкость.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1988, т. 41, № 1, с. 3—8.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.—М.: Наука, 1974. 446 с.
3. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов.—Изд. 2-ое, Рига, 1972.
4. Бажанов З. Л., Гольдберг И. И. и др. Сопротивление стеклопластиков М.: Машигиз, 1968.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8.II.1988

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИИ В МАГНИТОМЯГКОМ ТЕЛЕ
 С ТРЕЩИНОЙ, ВЫЗВАННОЙ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

АСАВЯН Д. Д., АСЛАНЯН А. А., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругого магнитомягкого ферромагнитного пространства с прямолинейной туннельной трещиной под действием постоянного магнитного поля. Магнитное поле является единственным источником внешних воздействии и находится в плоскости, перпендикулярной к трещине. Аналогичная задача, в случае, когда вектор магнитного поля перпендикулярен к трещине, рассмотрена в [4]. В отличие от работы [4], здесь показано, что наклонное магнитное поле приводит к возникновению концентрации сдвиговых напряжений.

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}$$

где \vec{H}_0 , \vec{B}_0 и \vec{M}_0 , соответственно, векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; \vec{h} , \vec{b} и \vec{m} — возмущения к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы \vec{B} и \vec{H} связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где μ_0 — магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м, а в магнитомягком материале — соотношением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ — относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитоэстатики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_0 &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{n} \times |\vec{H}_0 - \vec{H}_0^*| &= 0, \quad \vec{n} \cdot |\vec{B}_0 - \vec{B}_0^*| = 0, \quad \text{при } (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \quad (1.1) \\ \vec{H}_0^* &= \vec{H}_0 \quad \text{при } |\vec{r}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

где \bar{n} — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Γ тела, \bar{r} — радиус-вектор, x_i — декартовы координаты рассматриваемой точки, H^0 — напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс «0» означает принадлежность к внешней (окружающей тело) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Напряженно-деформированное состояние среды и индуцированное в ней магнитное поле определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате, получаются следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работах [2, 3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости деформированного состояния имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{S} = 0, \operatorname{rot} \bar{h} = 0, \operatorname{div} \bar{b} = 0 \quad (1.2)$$

где $\bar{S} = \bar{t} - \bar{T}$; \bar{t} и \bar{T} — тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла, соответственно, причем

$$t_{ij} = \nu_{ij} + \nu_0 \alpha_{ij} H_0 H_{0j} + \nu_0 \alpha_{ij} (H_0 h_j + h_0 H_j)$$

$$T_{ij} = \nu_0 [\nu_{ij} H_0 H_{0j} - 0,5 \delta_{ij} H_{0k} H_{0k}] + \nu_0 [\nu_{ij} (H_0 h_j + H_0 h_j) - \lambda_{ij} H_{0k} h_k] \quad (1.3)$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование), δ_{ij} — символ Кронекера, α_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений

$$\alpha_{ij} = i \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

λ и μ — постоянные Ляме, u_i — компоненты вектора упругих перемещений.

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред запишутся в виде

$$n_i [S_{ij} - S_{ij}^{(0)}] = 0, \quad \epsilon_{ijk} [n_j (h_k - h_k^{(0)}) - \sigma_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} (H_{0m} - H_{0m}^{(0)})] = 0 \quad (1.5)$$

$$n_i [b_i - b_i^{(0)}] = \sigma_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} [B_{0m} - B_{0m}^{(0)}]$$

где ϵ_{ijk} — символ Леви-Чивиты.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим задачу о концентрации упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленной внешним постоянным магнитным полем.

Пусть в бесконечном упругом ферромагнитном пространстве имеется прямолинейная туннельная трещина шириной $2a$, берега которой свободны от внешних механических нагрузок. Прямоугольная система декартовых координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости $x_1 O x_2$ и занимает область $(-a, a)$ на координатной оси Ox_1 . Пространство, материал которого является изотропным, однородным и магнитомягким, помещено в постоянное магнитное поле $\vec{B}_0(0, B_{02}, B_{03})$. Указанное магнитное поле является единственным источником внешних воздействий.

Для рассматриваемого случая задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)} = B_{02} i_2 + B_{03} i_3, \quad \vec{B}_e = B_{02} i_2 + \nu B_{03} i_3, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \nu_2^{-1} \vec{B}_0^{(e)}, \quad \vec{H}_0 = (\nu_0 \nu_2)^{-1} \vec{B}_0 \quad (2.1)$$

где индекс «е» означает принадлежность к области трещины, а i_k — единичные векторы координатных осей.

Принимая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3 из (1.2)–(1.4), в силу (2.1), получим следующие уравнения магнитоупругости деформированного состояния:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-\nu} \theta_{,i} + F_i = 0, \quad (i=1, 2), \quad \Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Phi^{(e)} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta u_3 = 0 \quad (2.3)$$

где $\Phi^{(e)}$ и Φ — потенциалы индуцированного магнитного поля в области трещины и в среде, соответственно, Δ — двумерный оператор Лапласа,

$$\theta = u_{1,1} + u_{2,2}, \quad F_i = \frac{2\chi B_{02}}{\nu_0 \nu_2} h_{i,2}, \quad h_k = \Phi_{,k}, \quad h_k^{(e)} = \Phi_{,k}^{(e)}, \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (2.4)$$

Аналогичным образом из (1.3)–(1.5) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2 = 0$:

$$u_2 = 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } |x_2| > 0$$

$$t_{12} + \frac{\chi B_{02}}{\nu_0 \nu_2} u_{2,1} = 0 \quad \text{при } |x_2| < \infty$$

$$t_{22} = \frac{\chi^2}{\nu_0} \left(\frac{B_{02}}{2\nu_0 \nu_2} + B_{02} \Phi_{,2} \right) \quad \text{при } |x_1| < a \quad (2.5)$$

$$\Phi_{,1} - \Phi_{,1}^{(e)} = \frac{\chi B_{02}}{\nu_0 \nu_2} u_{2,1} \quad \text{при } |x_1| < a$$

$$\Phi^{(e)} = 0, \quad \Phi_{,2}^{(e)} = \nu_2 \Phi_{,2} \quad \text{при } |x_1| < a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2,1} = 0, \\ u_{2,2} = -\frac{\chi B_{02}}{\nu_0} \left(\frac{B_{02}}{\nu_0 \nu_2} + h_2 \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{при } |x_1| > a \\ \text{при } |x_1| < a \end{array} \quad (2.6)$$

Кроме условия (2.5), (2.6) должны удовлетворяться также условия на бесконечности, согласно которым все искомые величины, обусловленные деформацией среды, должны стремиться к нулю при $r/\rho \rightarrow \infty$.

Из (2.2) — (2.6), в силу (1.3), видно, что: а) задача (2.2), (2.5) (плоская задача для определения u_1 и u_2) отделена от задачи (2.3), (2.6) (антиплоская задача для определения u_3), б) для решения антиплоской задачи необходимо иметь граничное значение компоненты \dot{h}_2 индуцированного в среде магнитного поля, возникающего вследствие плоской деформации, в) антиплоская задача сформулирована только компонентом H_{0z} невозмущенного магнитного поля.

3. Плоская задача (2.2), (2.5) решена в работе [1] и для интересующей нас величины h_2 на берегах трещины получено следующее значение при $|x_1| < a$:

$$h_2(x_1, 0) = \Delta_2^0 u_2 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu)\delta_0^2}{2\mu_0(1+\nu_0^2)[1-2\nu \cdot 8(1-\nu)(1-2\nu)x_1 - 2(1-\nu)x_1^2]} \frac{B_{0z}}{\rho_0 a^2} \quad (3.1)$$

где $\delta_0^2 = \frac{B_{0z}^2}{\rho_0 g^2}$

Решение уравнения (2.3) с учетом условия на бесконечности, представим в виде ($x_2 > 0$)

$$u_3(x_1, x_2) = \int A(x) \exp(-|x_1| x_2) \exp(-t x_1) dt \quad (3.2)$$

Неизвестную функцию $A(x)$, входящую в (3.2), определяем, удовлетворяя граничным условиям (2.6). Для этой цели вводим новую неизвестную функцию $\varphi(x_1)$ следующим образом:

$$\varphi(x_1) = u_{3,x_1}(x_1, 0) \quad \text{при } |x_1| < a \quad (3.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6), можно показать, что $\varphi(x_1)$ является решением следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{x-s} = \lambda \quad (3.4)$$

удовлетворяющего условию

$$\int_{-a}^a \varphi(s) ds = 0 \quad (3.5)$$

где

$$\lambda = -\frac{x}{\rho_0 \mu} B_{0z} \frac{B_{0z}^2}{\rho_0} - B_{0z}^2 \frac{x}{\rho_0} \Delta_2^0$$

Интегральное уравнение (3.4) в классе неограниченных функций имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (3.5) [5]

$$\varphi(x_2) = -\lambda \frac{x_2}{\sqrt{a^2 - x_2^2}} \quad (3.6)$$

На основе (3.6) из (3.3) определим перемещение u_3 . Подставляя найденное выражение для u_3 в (1.3), определяем магнитоупругие напряжения S_{23} в среде. В частности, для S_{23} при $x_2=0$ получаем выражения

$$\begin{aligned} S_{23}(x_1, 0)_{\mu} &= \frac{2\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{B_{02} B_{03}^{(0)}}{a_0} + \lambda + \frac{2\nu_r - 1}{\mu} B_{03}^{(c)} h_2^{(0)} \quad \text{при } |x_1| < a \\ S_{23}(x_1, 0)_{\mu} &= \frac{2\nu_r - 1}{\mu_r} \frac{B_{02} B_{03}^{(c)}}{a_0} - \lambda + \frac{2\nu_r - 1}{\mu} B_{03}^{(c)} h_2^{(0)} - \\ &- \left| \lambda + \frac{2\nu_r - 1}{\mu} B_{03}^{(c)} h_2^{(0)} \right| \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{при } |x_1| > a \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таблица 1

| x | Сплав алфер | Феррит Ф-107 | Железо технич. |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1.1 | $0.2667 \cdot 10^{-3}$ | $0.2479 \cdot 10^{-3}$ | $0.1516 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.2 | $0.2208 \cdot 10^{-3}$ | $0.2061 \cdot 10^{-3}$ | $0.1260 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.3 | $0.2019 \cdot 10^{-3}$ | $0.1889 \cdot 10^{-3}$ | $0.1154 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.4 | $0.1913 \cdot 10^{-3}$ | $0.1792 \cdot 10^{-3}$ | $0.1095 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.5 | $0.1845 \cdot 10^{-3}$ | $0.1731 \cdot 10^{-3}$ | $0.1057 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.6 | $0.1798 \cdot 10^{-3}$ | $0.1688 \cdot 10^{-3}$ | $0.1030 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.7 | $0.1763 \cdot 10^{-3}$ | $0.1657 \cdot 10^{-3}$ | $0.1011 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.8 | $0.1737 \cdot 10^{-3}$ | $0.1633 \cdot 10^{-3}$ | $0.9968 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.9 | $0.1716 \cdot 10^{-3}$ | $0.1614 \cdot 10^{-3}$ | $0.9853 \cdot 10^{-4}$ |
| ∞ | $0.1580 \cdot 10^{-3}$ | $0.1489 \cdot 10^{-3}$ | $0.9089 \cdot 10^{-4}$ |

Таблица 2

| x | $B_0 = 0.2$ Тл | $B_0 = 0.4$ Тл | $B_0 = 0.8$ Тл |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1.1 | $0.6175 \cdot 10^{-5}$ | $0.2465 \cdot 10^{-4}$ | $0.9775 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.2 | $0.5103 \cdot 10^{-5}$ | $0.2038 \cdot 10^{-4}$ | $0.8103 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.3 | $0.4660 \cdot 10^{-5}$ | $0.1862 \cdot 10^{-4}$ | $0.7414 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.4 | $0.4113 \cdot 10^{-5}$ | $0.1763 \cdot 10^{-4}$ | $0.7029 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.5 | $0.4255 \cdot 10^{-5}$ | $0.1701 \cdot 10^{-4}$ | $0.6782 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.6 | $0.4145 \cdot 10^{-5}$ | $0.1657 \cdot 10^{-4}$ | $0.6611 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.7 | $0.4061 \cdot 10^{-5}$ | $0.1625 \cdot 10^{-4}$ | $0.6485 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.8 | $0.4003 \cdot 10^{-5}$ | $0.1601 \cdot 10^{-4}$ | $0.6389 \cdot 10^{-4}$ |
| 1.9 | $0.3954 \cdot 10^{-5}$ | $0.1581 \cdot 10^{-4}$ | $0.6314 \cdot 10^{-4}$ |
| ∞ | $0.3635 \cdot 10^{-5}$ | $0.1454 \cdot 10^{-4}$ | $0.5817 \cdot 10^{-4}$ |

На основе формул (3.7) произведены численные расчеты, результаты которых приведены в табл. 1 и 2. В табл. 1 приведены значения $S_{23}(\mu)$ в различных точках $x_1 > a$ при $B_{02} = B_{03} = 1$ Тл для следующих ферромагнитных материалов: сплав алфер ($\nu = 0,3$; $\mu = 6,3 \cdot 10^4$ МПа; $\mu_r = 30$), феррит Ф-107 ($\nu = 0,3$; $\mu = 6,8 \cdot 10^4$ МПа; $\mu_r = 110$) и техниче-

кое железо ($\nu=0,28$; $\mu=1,1 \cdot 10^3$ МПа; $\mu_r=2,5 \cdot 10^3$). Зависимость $S_{23}(x_2)$ от напряженности внешнего магнитного поля в случае технического железа при $B_{02}=B_{0*}$ приведена в табл. 2.

Формулы (3.7) и приведенные расчеты показывают, что: а) задача о трещине продольного сдвига возникает вследствие того, что $B_{02} \neq 0$; б) существует такое значение B_{0*} величины B_{02}

$$\frac{B_{0*}^2}{\mu_0^2} = \frac{2\nu^2}{\alpha} \frac{1}{\mu_r(\alpha-2)(1-\nu) + 2(1-\nu)\alpha^2 - 1 + 2\nu - 8(1-\nu)(1-2\nu)\nu}$$

для которого коэффициент интенсивности сдвиговых напряжений при $B_{02}=B_{0*}$ обращается в нуль; в) с увеличением напряженности внешнего магнитного поля напряжение S_{23} монотонно возрастает; г) влияние магнитного поля наиболее сильно около угла $\alpha = \pi/4$ (α — угол наклона H_0 относительно плоскости $x_2=0$).

STRESS CONCENTRATION IN MAGNETOSOFT BODY WITH CRACK CAUSED BY EXTERNAL MAGNETIC FIELD

D. D. ASANYAN, A. A. ASLANYAN, G. E. BAGDASARIAN

ՀԱՔ ՈՒՆՆՅՈՂ ՄԱԳՆԵՍՈՒՓՈՒՐԻ ՄԱՐԻՄՈՒՄ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ
ԳԱՇՏՈՎ ԳԱՅՄԱՆԱՎՈՐՈՎԱՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ

Գ. Զ. ՇԱՍՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկվում է թունելային ճարտվ մագնիսափափուկ ֆերոմագնիսական տարածույթյան լարվածային դեֆորմացված փիճակի մասին խնդիր. ճարածույթյունը գտնվում է ճաքին ուղղահայաց հաստատուն մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ: Ցույց է տրված, որ թեք մագնիսական դաշտը ստացաչնում է սահքային լարումների կոնցենտրացիա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown W. F. Jr. Electric and Magnetic Forces.— American Journal of Physics, 1951, v. 19, pp. 290—304, 333—350.
2. Tiersten H. F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators.—J. of Mech. Physics, 1964, v. 5, No. 9, pp. 1298—1318.
3. Pao Y.-H. and Yeh C.-S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids — Int. Journal of Eng. Science, 1973, v. 11, pp. 415—436.
4. Shtudo J. The Linear Magnetoelastic Problem for a Soft Ferromagnetic Elastic Solid With a Unit Crack.—J. of App. Mechanics, ASME, 47, 1977.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15.II.1988

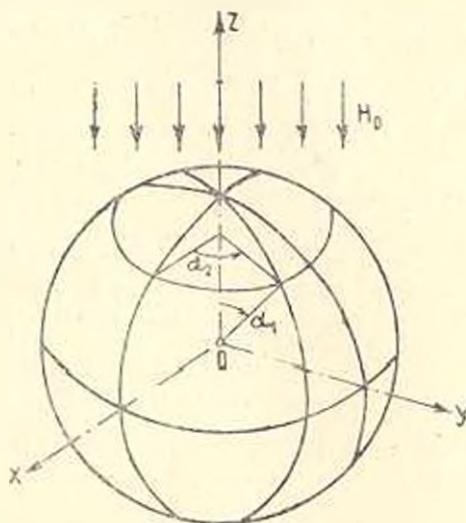
УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТОМЯГКОЙ
 СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРՏԻԱՆ Ու Ա.

В работе на основе линеаризованных уравнений и граничных условий возмущенного состояния исследуется поведение магнитомягкой сферической оболочки в переменном во времени однородном магнитном поле. Установлена возможность потери динамической устойчивости невозмущенного состояния. Получены формулы для определения критических частот, определяющие границы параметрического резонанса. Исследована зависимость ширины областей неустойчивости от напряженности магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса средней поверхности R , изготовленная из магнитомягкого материала, находится в нестационарном однородном магнитном поле $H_0(t)$. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Ортогональная система координат (a_1, a_2, a_3) выбирается так, что средняя поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам a_1, a_2 (a_1 — полярный угол, a_2 — азимутальный), а ось a_3 направлена по нормали к средней поверхности (фиг. 1).



Фиг. 1

Принимаются следующие предположения: а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях; б) для среды, окружающей оболочку, считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума; в) подемоторная сила Ампера пренебрежимо мала по сравнению с силой, обусловленной намагниченностью материала оболочки [1, 2]; г) для напряженности магнитного поля $\vec{H}_0(t)$ выполняется условие квазистационарности.

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле, имеет место намагничивание материала, приводящее к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве. Это изменение приводит к наложению на начальное поле H_0

$$\vec{H}_0 = H_0(t)(\sin z_1 \vec{e}_1 - \cos z_1 \vec{e}_3) \quad (1.1)$$

магнитного поля H^0 , которое создается намагничиванием тела и определяется из решения задачи магнитостатики. В результате, для невозмущенного магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_0 + H^0$ в области, занимаемой оболочкой, получается выражение

$$\vec{H} = \frac{3H_0(1+2\mu_r)}{\Delta_0} \left\{ \left[1 + \frac{2(1-\mu_r)}{1+2\mu_r} \left(\frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \cos z_1 \vec{e}_3 - \left[1 - \frac{\mu_r-1}{1+\mu_r} \left(\frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \sin z_1 \vec{e}_1 \right\} \quad (1.2)$$

где

$$\Delta_0 = 2(\mu_r - 1)^2 r^3 - (2\mu_r + 1)(\mu_r - 2), \quad z_1 = (R-h)(R+h)^{-1/2}, \quad r = R + z_2$$

В (1.1), (1.2) \vec{e}_1 и \vec{e}_3 — единичные векторы по направлениям соответствующих координатных линий, μ_r — относительная магнитная проницаемость материала оболочки.

Вследствие того, что магнитная проницаемость μ_r отлична от единицы ($\mu_r \gg 1$), на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления P , определяемого формулой

$$P = \frac{\mu_r - 1}{8\pi} (H_1^2 + \mu_r H_3^2) n_0 \quad \text{при} \quad z_2 = \pm h \quad (1.3)$$

где n_0 — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности оболочки.

Под действием нагрузки P в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся усилиями T_1^0 и T_2^0 . Эти усилия определяются из уравнений безмоментной теории оболочек при поверхностных условиях (1.3) и выражаются формулами:

$$T_1^0 = \frac{P_0(t) \mu_r R}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{3A_2^2}{A_1^2} \right\}$$

$$T_2^0 = -\frac{\rho_0(t) \nu R}{4} \left| 1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{3 \beta A_2^2}{A_1^2} \right| \quad (1.4)$$

где

$$A_1 = R, \quad A_2 = R \sin \alpha_1, \quad \mu = \nu_r (\nu_1^2 - 9), \quad \beta = (\nu_2^2 - 9 \nu_1^2) \nu^{-2} \\ \nu_1 = 1 + 2\nu_r + 2(1 - \nu_r)^{-1}, \quad \nu_2 = 1 + 2\nu_r + (\nu_r - 1)\nu^2, \quad \rho_0 = \frac{9(\nu_r - 1)H_0^2}{8\tau - \Delta_0^2}$$

2. Характеристики возмущенного состояния должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работе [3], линеаризуются. Не используя известные соотношения гипотезы Кирхгофа-Лява, приходим к следующим линейным уравнениям и граничным условиям возмущенного состояния [4, 5]:

а) система дифференциальных уравнений устойчивости оболочки

$$\frac{1}{A_1} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) \right| + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{\nu}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \right) + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} (\tau_{23} - \tau_{32}) = 0 \\ \frac{1}{A_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) \right| + \frac{1 - \nu}{R} \left(\frac{\nu}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \nu}{\partial x_2} \right) + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} (\tau_{33} - \tau_{33}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 - \nu}{R} \right) \psi - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2) \nu - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \\ + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \left\{ \tau_{33} - \tau_{33} + \frac{h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (\tau_{13} + \tau_{31})] + \frac{h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (\tau_{23} + \tau_{32})] + \right. \\ \left. + \frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2^2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) \right\} = 0$$

где индексами \pm , \pm отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки $x_3 = \pm h$; $u(x_1, x_2, t)$, $v(x_1, x_2, t)$, $\omega(x_1, x_2, t)$ — искомые тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности оболочки; τ_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) — компоненты тензора улоугих напряжений возмущенного состояния

$$\psi = \frac{1}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 v) \right| + \frac{2\omega}{R} \\ \Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right| \quad (2.2)$$

б) уравнения для индуцированного во всем пространстве магнитного поля h , обусловленного деформацией оболочки

$$\Delta_1 \Phi^{(i)} = 0, \quad \Delta_1 \Phi^{(e)} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{h}^{(i)} = \text{grad} \Phi^{(i)}, \quad \vec{h}^{(e)} = \text{grad} \Phi^{(e)} \quad (2.4)$$

где Δ_1 — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат,

в) граничные условия на поверхностях $x_1 = \pm h$

$$\tau_{jk} \cdot n_k^e - |T_{jk}^{(i)} - T_{jk}^{(e)}| n_k^0 \quad (2.5)$$

$$T_{jk} = \frac{1}{4\pi} (h_1 B_k + h_2 B_j - h \cdot B \delta_{jk}), \quad \vec{B}^{(e)} = \vec{H}^{(e)}, \quad \vec{B}^{(i)} = \mu_r \vec{H}^{(i)} \quad (2.6)$$

$$\Phi^{(i)} = \Phi^{(e)} + \frac{3H_0(\mu_r - 1)}{\Delta_0} \left[1 + 2x_1 + 2(1 - \mu_r) \left(\frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \cos \alpha \cos x_1$$

$$\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} - \frac{3H_0(\mu_r - 1)}{\Delta_0 \mu_r A_1^2 A_2} \left[1 + 2\mu_r + (\mu_r - 1) \left(\frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2^2 w) \right| \quad (2.7)$$

где \vec{B} — вектор магнитной индукции, T_{jk} — компоненты тензора напряжений Максвелла возмущенного состояния, δ_{ik} — символ Кронекера, индекс «i» обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое оболочкой), а индекс «e» — к внешней области.

Кроме условий (2.5) и (2.7) должны удовлетворяться условия затухания возмущений на бесконечности и условия конечности $\vec{h}^{(i)}$ при $r \rightarrow 0$.

Решая задачи (2.3), (2.7), найдем выражения $\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(e)}$ в зависимости от w . Используя найденные выражения $\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(e)}$ из поверхностных условий (2.1), в силу (2.4) и (2.6) определяем величины τ_{jk}^e , входящие в уравнения (2.1). Подставляя указанные величины τ_{jk}^e в систему (2.1) и исключая неизвестные u и v , после некоторых преобразований, приходим к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения w :

$$\begin{aligned} & \left[\Delta^2(\Delta+1)^2 + 1 \right] (\Delta+2)w + \frac{3R^2}{E} (\Delta+1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho_0(t) \nu R}{Eh} \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 \Delta w - \frac{3A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left[1 - \frac{3}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] w - 3 \left[\frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{5A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 4 \left(1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \right) w \right] \right] + \frac{\rho_0(t) R (\nu_r - 1)}{E h \nu_r} (\Delta+1-\nu) \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \right. \\ & \left. - \frac{\Phi}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\nu_1 \mu_r}{\mu_r - 1} \left[1 + \frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] w \right] - \frac{\rho_0(t) R \nu_1}{4Eh} (\Delta+1-\nu) \times \\ & \times \left[\Delta w + (1-\nu) \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \Delta w \right) \right] = 0 \quad (2.8) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$F = \sum_{\epsilon=1}^{\infty} \sum_{\psi=0}^{\epsilon} F_{\epsilon\psi} P_{\epsilon}(\cos \gamma_1) \cos \gamma_2, \quad \epsilon^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2}$$

$$\Phi = \sum_{\epsilon=1}^{\infty} \sum_{\psi=0}^{\epsilon} \Phi_{\epsilon\psi} P_{\epsilon}(\cos \gamma_1) \cos \gamma_2, \quad \lambda = \nu_r (\theta \mu_r - \nu_1 \mu_2)$$

$$P_{11} = [\mu_1(\xi+1)\mu_r + 3\xi\mu_2 - \beta_1] \left| \frac{\xi}{\lambda} \right| + [3\mu_r\mu_2 - \mu_2\mu_1] \left| \frac{\xi}{\lambda} \right|$$

$$\Phi_{11} = [(\xi+1)(\mu_2 + \mu_1\mu_r)\mu_1 + 3\xi\mu_1 + 9\mu_r] \left| \frac{\xi}{\lambda} \right| + (\mu_1\mu_1 - \mu_2\mu_1) \left| \frac{\xi}{\lambda} \right|$$

$$I_{11}^{(0)} = \frac{1}{\|Y_{\xi_1}\|^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{A_1^{\xi_1 \nu}}{A_1^{\xi_1}} \right) P_{11}(\cos \tau_1) \cos \tau_1 d\tau_1 d\tau_2$$

$$I_{11}^{(2)} = \frac{1}{\|Y_{\xi_1}\|^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial A_2}{A_1 \partial \tau_1} P_{11}(\cos \tau_1, \cos \tau_2, \sin \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{R\Delta_{11}} \left[\left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) + \frac{\xi(1-\mu_r)}{\mu_r \lambda^{\xi+1}} \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right]$$

$$\mu_{21} = \frac{1}{R\Delta_{11}} \left[\frac{(\xi+1)(\mu_r-1)^{\xi}}{\mu_r} \left(3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) - \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left(\mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right]$$

$$\mu_{31} = \frac{1}{R\Delta_{11}} \left\{ \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] + \frac{3(\mu_r-1)\lambda^{\xi+1}}{\mu_r} \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] \right\}$$

$$\mu_{41} = \frac{1}{R\Delta_{11}} \left\{ \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left[\mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)}{\mu_r \lambda^{\xi}} \left[3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] \right\}$$

$$\Delta_{11} = \frac{\lambda^{-\xi}}{R-h} \left(\xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left(\xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{\xi(\xi+1)^{\xi}}{R+h} \left(\frac{\mu_r-1}{\mu_r} \right)^2$$

$$\|Y_{\xi_1}\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_{\gamma} (\xi+\gamma)!}{2\xi+1 (\xi-\gamma)!}, \quad \varepsilon_{\gamma} = \begin{cases} 2 & \text{при } \gamma = 0, \\ 1 & \text{при } \gamma > 0. \end{cases}$$

где $P_{nl}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Решение уравнения (2.8) должно удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

3. Решение уравнения (2.8) представим в виде разложения

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n w_{nk}(t) P_{nk}(\cos \tau_1) \cos k \tau_2, \quad (k \leq n, l = 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.8) и используя обычный процесс ортогонализации, для определения $w_{nk}(t)$ получим бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Из указанной системы в первом приближении ($n=l$) приходим к исследованию следующего уравнения:

$$\frac{d^2 w_{nn}}{dt^2} + \Omega_n^2 \left[1 - \frac{H_0^2(t)}{H_{0n}^2} \right] w_{nn} = 0 \quad (3.2)$$

где Ω_n^2 — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме в отсутствии магнитного поля, H_{0n} — критическое значение напряженности магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость

$$\Omega_n^2 = \frac{E(\nu_n - 2) |1 - \nu^2(\nu_n - 1)|}{\rho R^2(\nu_n - 1 + \nu)}, \quad H_{\nu_n}^2 = \frac{8Eh(\nu_n - 2) |1 - \nu^2(\nu_n - 1)|^2}{9A_{22}R(\nu_n - 1)(\nu_n - 1 + \nu)}$$

$$A_{11} = \frac{\nu}{4\Delta_0^2(4\nu_n - 3)} \left\{ (1 - \nu)(5\nu_n - 6) - 3\nu_n(\nu_n - 1) - 3k_n^2 + \frac{8(1 + \nu)}{\nu_n - 1 + \nu} [\nu_n(1 - \nu)(2\nu_n - k^2) + (6 + 3)\nu_n - 1.5(5 + \nu)k^2] - \frac{8\beta_1}{\nu} (3\nu_n^2 - k^2 - 2) \right\} + B_{kn}, \quad \nu_n = n(n + 1)$$

$$B_{kn} = \frac{1}{(2n + 1)\Delta_0^2} \left[\frac{n^2 - k^2}{2n - 1} [(n - 1)a_n - c_n] + \frac{(n - k + 1)(n + k - 1)}{2n - 3} \times \right. \\ \left. \times [(n + 2)b_n + d_n] \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ [n\nu_2 + (n - 1)\nu_2] \left[\frac{(n - 1)(\nu_r - 1)}{\nu_r \lambda^n} \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^n} \right) - \left(n - \frac{n - 1}{\nu_r} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n-1}} \right) \right] - 3(n - 1)(\nu_r - 1) \left[\frac{n(\nu_r - 1)}{\nu_r} \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n-1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(n - 1 + \frac{n}{\nu_r} \right) \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^n} \right) \right] \right\} + \frac{\beta_1(\nu_r - 1)}{\nu_r}$$

$$b_n = \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (\nu_1 - \nu_2) \left[\left(n + 2 - \frac{n + 1}{\nu_r} \right) \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \frac{(n + 1)(\nu_r - 1)}{\nu_r \lambda^{n+2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + 3[n + 1 + (n + 2)\nu_r] \left[\frac{(n + 2)(\nu_r - 1)}{\nu_r} \left(3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(n + 1 + \frac{n + 2}{\nu_r} \right) \left(\nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \right\} + \frac{\beta_1(1 - \nu_r)}{\nu_r}$$

$$c_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ (n - 1)(\nu_r - 3) \left[\left(n - 1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1 - \frac{3n - 3}{\lambda^n} \right) + \frac{n(\nu_r - 1)}{\nu_r \lambda^{n-1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(3n - 3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) \right] - [(n - 1)\nu_2 + n\nu_1] \left[\left(n - \frac{n - 1}{\nu_r} \right) \left(3n - 3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n - 1)(\nu_r - 1)\lambda^n}{\nu_r} \left(n\nu_1 - \frac{3n - 3}{\lambda^n} \right) \right] \right\} + (\nu_r - 1)(n\nu_1^2 + 9) \quad (3.3)$$

$$d_n = \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (n + 2)(\nu_1 - \nu_2) \left[\left(n + 2 - \frac{n + 1}{\nu_r} \right) \left(3n + 3 + \frac{n\nu_1 + 2\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n + 1)(\nu_r - 1)}{\nu_r} \left(n\nu_1 + 2\nu_2 - \frac{3n + 3}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + [(n + 2)\nu_r + 3(n + 1)] \left[\left(n + 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n + 2}{\nu_r} \right) \left(n\nu_1 + 2\nu_2 - \frac{3n + 3}{\lambda^{n+1}} \right) + \frac{(n - 2)(\nu_r - 1)}{\nu_r \lambda^{n+1}} \left(3n + 3 + \frac{n\nu_1 + 2\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \right\} + \\ + (1 - \nu_r)[(n + 2)\nu_1^2 + 9]$$

$$\Delta_{2n} = \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)^{n-1}} \left(n-1 + \frac{n}{\nu_r} \right) \left(n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) + \frac{n(n-1)(1-\nu_r)^{n-1}}{\nu_r}$$

$$\Delta_{2n+1} = \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)^{n+1}} \left(n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left(n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) + \frac{(n+1)(n+2)(1-\nu_r)^{n+1}}{\nu_r}$$

В качестве примера рассмотрим задачу динамической устойчивости сферической оболочки, когда $H_0(t) = H_0 + H_1 \cos \omega t$. В этом случае уравнение (3.2) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 w_{nk}}{dt^2} + \Omega_n^2 \left[1 - 2\beta_{nk}^{(1)} \cos \omega t - 2\beta_{nk}^{(2)} \cos 2\omega t \right] w_{nk} = 0 \quad (3.4)$$

Здесь приняты обозначения

$$\Omega_n^2 = \Omega_n^{02} \left(1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{2H_{0*}^2} \right)$$

$$\beta_{nk}^{(1)} = \frac{H_0 H_1}{H_{0*}^2} \left(1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{H_{0*}^2} \right)^{-1}, \quad \beta_{nk}^{(2)} = \frac{H_1^2}{4H_{0*}^2} \left(1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{2H_{0*}^2} \right)^{-1}$$

Уравнение (3.4) имеет периодические коэффициенты и, как известно [6], при некоторых соотношениях между коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения. Границы областей главного параметрического резонанса, согласно [6], определяются следующими приближенными формулами:

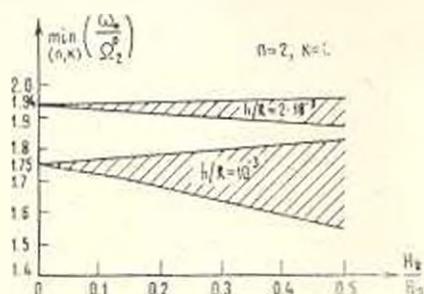
для областей, расположенных вблизи частоты $2\Omega_n$

$$\Omega_n^* = 2 \left[1 - \left(\frac{H_0}{H_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 - \frac{H_0 H_1}{H_{0*}^2} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

для областей, расположенных вблизи частоты Ω_n

$$\Omega_n^* = \left[1 - \left(\frac{H_0}{H_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 \pm \frac{1}{4} \left(\frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

На основе (3.5) произведены вычисления минимальных критических значений частот ω_* по числам волн n и k , определяющие границы области динамической неустойчивости, в зависимости от напряженности магнитного поля H_1 при $H_0 = 50$ кА/М. Для расчета принято, что оболочка изготовлена из материала НУ-ГЕРМ 49, для которой $\nu_r =$



Фиг. 2

≈ 60800 . С помощью результатов подсчета минимальных значений ω_* на фиг. 2 показаны области динамической неустойчивости оболочки. Из фиг. 2 видно, что ширина области неустойчивости увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля. Кроме того критические значения частоты являются монотонно возрастающими функциями относительной толщины h/R .

DYNAMIC STABILITY OF A SOFT-FERROMAGNETIC SPHERICAL SHELL IN A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

ՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ՓԱՓՈՒԿ ՍՆՆԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԻՆԱՍԻՐԻ ԿՕՅՈՐՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ԳՈՇՏՈՒՄ

Պ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում հետազոտված է մագնիսապիս փափուկ զնդային թաղանթի վարքը՝ րստ ժամանակի փոփոխական, համասեռ մագնիսական դաշտում: Ցույց է տրված թաղանթի շրջողված զիճակի դինամիկ կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը: Գլխավոր պարամետրական անդրանակի կրիտիկական հաճախականությունների որոշման համար ստացված են բանաձևեր: Աստիճանաբար է մագնիսական դաշտի շարժանքի արդյունքից կայունության արդյունքների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мун, Пао И-синь. Магнитоупругое взаимодействие тонкой пластинки.—Прикл. механика, 1968, № 1.
2. Мун, Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле.—Прикл. механика, 1969, № 1.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Мкртчян П. А. Об уравнениях электромагнитоупругости сверхпроводящих сферических оболочек. III Вессою-нийн Եմբոճնոսոմ Գեորեմեքսեքե թոթրեքե մոթրեքե մոթրեքե մոթրեքե. Իզդ. ԵրԳՄ, 1984. 116 с.
5. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, 38, № 5, с. 22—32.
6. Билогин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956, с. 586—593.

Երևանский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
25.V.1987

УДК 539.3:534.1

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОПРУГОСТИ
 ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

Достигнутый в последние годы значительный прогресс в изучении магнитоупругих колебаний тонких пластин и оболочек связан, в первую очередь, с использованием уравнений [1, 2], полученных С. А. Амбарцумяном, Г. Е. Багдасаряном, М. В. Белубекином путем совместного интегрирования трехмерных уравнений Максвелла и уравнений теории упругости в тонкой области, занятой материалом оболочки. Однако, применение этих уравнений в расчетной практике существенно ограничивается тем, что в общем случае при их решении требуется учет электромагнитных параметров, получаемых решением трехмерной задачи электродинамики в окружающей оболочку среде. В монографии [1], работах С. О. Саркисяна ([3] и других, ссылки на которые содержатся в указанной статье) это затруднение снимается путем введения в двумерные уравнения интегральных членов, что в некоторых случаях позволяет эффективно решать конкретные задачи.

В представленной здесь работе, используя асимптотические свойства уравнений [1, 2], показано, что в низкочастотном диапазоне уравнения с некоторой степенью точности можно разбить на две подсистемы, решение первой из которых (система дифференциальных уравнений в частных производных) определяет собственные числа, формы колебаний и вихревые токи в оболочке, а вторая состоит в решении задачи Дирихле для внешней области и служит для нахождения в ней магнитного поля вихревых токов оболочки.

1. Будем исходить из следующих уравнений:

$$\vec{L}^2 \vec{u} - \epsilon^2 \vec{u} = -3(\text{grad } F \times \vec{i}_3) \times \vec{B}; \quad j_1 \gamma \Delta_1 F + j_2 \mu f = \text{rot}_3(\vec{u} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

$$\Delta \Phi = 0, \quad F = \Phi_+ - \Phi_-, \quad f = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_+ = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_-$$

$$\gamma = (2\epsilon r_0 \epsilon)^{-1} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \beta = (2F h r_0)^{-1}, \quad \epsilon^2 = \frac{v_0^2}{E}, \quad \epsilon = \sqrt{\epsilon^2}$$

Здесь x_j ($j = 1, 2, 3$) — триортогональная система координат, введенная в окружающую оболочку пространстве V так, что средняя поверхность оболочки S совпадает с координатной поверхностью

$\alpha_j = 0$, i_j — соответствующие орты, B — значение на S вектора магнитной индукции поля сторонних источников, u — перемещения оболочки, Φ — магнитный потенциал (в V магнитная индукция поля вихревых токов $b = \text{grad } \Phi$), λ — частотный параметр, ω — круговая частота (множитель $\exp(i\omega t)$ отброшен), γ , E , h , σ — плотность, модуль Юнга, полутолщина и проводимость оболочки, μ_0 — магнитная постоянная, L^* — оператор уравнений линейной теории оболочек [4], $(\)_j^{\pm} = (\)_{\alpha_j \pm 0}$, $\Delta(\Delta_j)$ — оператор Лапласа в V (на S), j_1, j_2 — условные множители, введенные для удобства последующего изложения (пока их надо считать равными единице).

Уравнения (1.1) получены в [5] путем линеаризации нелинейных уравнений электромеханики тонких упругих оболочек с точностью $O(\gamma^{1-p})$ ($\gamma = h/R$ — относительная полутолщина, R — характерный размер S , p — показатель изменяемости искомого состояния [4]). Уравнения (1.1) также могут быть получены из [3] введением магнитного потенциала и отбрасыванием слагаемых $O(\gamma^{1-p})$.

Для решения конкретных задач к уравнениям (1.1) надо добавить условие ограниченности решения Φ на бесконечности и некоторые условия на краю оболочки Γ , о которых будет сказано ниже.

2. Анализ свойств решений уравнений (1.1) будем вести асимптотическим методом, основанным на использовании малого параметра η . Данный метод был разработан А. Л. Гольденвейзером для исследования колебаний тонких упругих оболочек в вакууме [4], а затем обобщен автором на задачи гидроупругости оболочек [6] и магнитоупругости пластины [7]. Не останавливаясь на вопросах обоснования метода исследования (их можно найти в перечисленных работах), введем замены коэффициентов, независимых переменных и искомого величин согласно равенствам

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0^{-1} \eta, & \alpha_j &= \alpha_j^0 R \eta, & \lambda &= \lambda_0 R^{-1} \eta, \\ \Phi &= \eta^a \Phi_0, & F &= \eta^r F_0, & f &= \eta^{1-p} R^{-1} f_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Числа a, r, p подберем так, чтобы для рассматриваемого состояния величины γ_0, λ_0 были $O(\eta^0)$, а дифференцирование по ξ_j не приводило бы к асимптотическому увеличению искомого величин. Тогда параметры p и r совпадут по смыслу с показателями изменяемости и частоты [7], а величины Φ_0, F_0, f_0 будут иметь одинаковый асимптотический порядок. Подставив (2.1) в левую часть второго уравнения (1.1), получим

$$j_1 \gamma_0 R^{-2} \Delta_j \Phi_0 + j_2 R^{-2} \lambda_0 f_0 = \text{div} \sigma_{ij} (\bar{R} \times B) \quad (2.2)$$

где множители $j_1 = \eta^{1-a-1-2p}$ и $j_2 = \eta^{1-r-p}$ определяют асимптотический порядок соответствующих слагаемых Δ_j , получен из Δ формальной заменой α_j на ξ_j . Примем порядок величины в правой части (2.2) за единицу и выберем число t так, чтобы асимптотически главное

слагаемое в левой части (2.2) было $O(\gamma^0)$. Тогда отвечающий ему множитель j_n в (1.1) можно положить равным единице, а множитель при второстепенном слагаемом — с точностью $O(\gamma^1)$ ($\gamma > 0$) — равным нулю.

В зависимости от соотношения параметров (p, r, a) возможны два случая ($\alpha = p + r + 1 - a$):

$$\begin{aligned} \text{случай 1: } & \alpha > 0, \quad t = 1 - a + 2p, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 0, \quad \gamma = \alpha \\ \text{случай 2: } & \alpha < 0, \quad t = p - r, \quad j_1 = 0, \quad j_2 = 1, \quad \gamma = -\alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. Случаю 1 отвечают следующие приближенные уравнения:

$$L^2 \vec{u} - \gamma^2 \vec{u} = -2(\operatorname{grad}_s F - \vec{i}_3) \cdot \vec{B}, \quad \gamma \Delta_s F = i_3 \operatorname{rot}_s (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_+ = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_-, \quad \Phi_+ - \Phi_- = F \quad (3.2)$$

В этом случае задача магнитоупругости оболочки может быть решена интегрированием на поверхности S уравнений (3.1), образующих замкнутую систему относительно \vec{u} и F . При этом, в каждой точке края оболочки может быть использовано по пять краевых условий. Четыре из этих условий носят механический характер. Это — условия закрепления края оболочки [4]. Пятое условие — электромагнитное. Выбор этого условия обсуждается ниже в п. 4. Для определения индуцированного магнитного поля в среде надо решить задачу (3.2), состоящую в интегрировании уравнения Лапласа в V при заданной величине F и перепада значений функции Φ и при условии непрерывности нормальной производной от Φ на S , а также при условии ограниченности на бесконечности.

Случаю 2 отвечают уравнения (1.1), в которых, согласно (2.3), надо положить $j_1 = 0, j_2 = 1$. Получаемые при этом уравнения относительно \vec{u}, Φ, F, f надо решать совместно в трехмерной постановке. В случае, если $\alpha = 0$, надо положить $j_1 = j_2 = 1$ и никаких упрощений исходных уравнений (1.1) не производится.

Отметим, что возможность применения того или иного из сформулированных приближенных методов не зависит от уровня напряженности стационарного магнитного поля, π определяется только электромеханическими характеристиками и размерами оболочки (они определяют величину параметра α), частотой и формой колебаний (параметры r и p).

Замечание. Рассматриваемая задача (1.1) неконсервативна, а ее собственные значения, вообще говоря, комплексны. Причем $\operatorname{Re} \omega$ определяет колебательные свойства решения, а $\operatorname{Im} \omega$ — затухание. В тех задачах, где представляет интерес определение $\operatorname{Im} \omega$, надо иметь в виду следующее. В случае 1 в головной (решаемой в первую очередь) подсистеме (3.1) содержится в качестве множителя мнимая единица i , а, следовательно, уже в исходном приближении могут быть определены значения $\operatorname{Im} \omega$. Поэтому, случай 1 можно назвать случаем отно-

сильного демпфирования. В случае 2, положив $J_1=0$, получим головные уравнения с действительными коэффициентами, решить которые, как показал анализ, можно определить только $\text{Re} \omega$, в то время как для определения $\text{Im} \omega$ надо будет рассматривать последующие приближения. Это связано с тем, что при $\kappa < 0$ собственные значения задачи обладают свойством $\text{Im} \omega \ll \text{Re} \omega$. Поэтому случай 2 можно назвать случаем относительно слабого демпфирования. Для того, чтобы в случае 2 можно было бы определить $\text{Im} \omega$ в исходном приближении, достаточно положить $\nu_1 = 1$, сохранив тем самым малый член, обуславливающий диссипативные свойства задачи.

4. Выбор электромагнитного крепящего условия для произвольных условий закрепления оболочки представляет собой отдельную, весьма сложную задачу. Однако, для двух предельных случаев это условие можно сформулировать довольно просто. Это — случаи, в которых тела, находящиеся в контакте с краем оболочки, обладают характерными электромагнитными свойствами. К ним относятся диэлектрики (в том числе и воздух), не пропускающие электрического тока, и идеальный проводник, в котором магнитное поле равно нулю.

Учтем, что согласно [5] линейная плотность I вихревых токов и электрическое поле e в оболочке выражаются по формулам

$$\vec{I} = \mu_0^{-1} \text{grad} F \times \vec{i}_2, \quad \vec{e} = (2hz)^{-1} \vec{I} - i\omega \vec{z} \times \vec{B}$$

Совместим край оболочки Γ с z_1 линией. Условия на границе с диэлектриком и с идеальным неподвижным проводником будут соответственно иметь вид

$$(\vec{I} \cdot \vec{i}_1)_\Gamma = 0 \quad \text{и} \quad (\vec{e} \cdot \vec{i}_1)_\Gamma = 0 \quad (1.1)$$

Первое условие (1.1) (на границе с диэлектриком) выражается в форме равенства $(F)_{,\Gamma} = 0$. Второе условие с учетом того, что на границе с идеальным проводником нормальная компонента стационарного магнитного поля $B_z = 0$, выдвигается, в частности, если $(u_1)_\Gamma = 0$ и $(\partial F / \partial z_1)_\Gamma = 0$. Первое из этих равенств входит в число четырех условий механического закрепления оболочки в неподвижной опоре. Из

второго же следует, что $(\vec{I} \times \vec{i}_1)_\Gamma = 0$, то есть что на границе отсутствуют касательные компоненты электрического тока, что соответствует известным физическим представлениям [8].

5. Рассмотрим в качестве примера задачу расчета осесимметричных колебаний бесконечной цилиндрической оболочки радиуса R в осевом магнитном поле с индукцией $\vec{b} = B \vec{i}_1$. Уравнения примем в форме [1]

Считая, что имеет место случай 1, запишем соответствующую головную систему уравнений

$$\left| 1 + \frac{h^2}{3R^2} \frac{d^4}{dz_1^4} - \nu_1 R^2 (1 - \nu_1^2) \right| u_1 = 3hR(1 - \nu_1^2) \frac{dF}{dz_1} \quad (5.1)$$

$$\gamma \frac{d^2 F}{dz^2} = \bar{\nu} RB \frac{du_1}{dz_1}$$

Решение будем искать в виде $u_1 = u_1^0 e^{i\omega t}$, $F = F^0 e^{i\omega t}$ (k — волновое число, u_1^0 , F^0 — амплитудные значения соответствующих величин). Получаемое из (5.1) частотное уравнение имеет вид

$$\Omega^2 - i\gamma\Omega - 1 = 0 \quad (5.2)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \gamma = \frac{\nu B^2}{\rho \omega_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{(1 - \nu^2) E}{\rho R^2} \left(1 + \frac{h^2 k^4}{2R^2} \right)$$

где ω_1 — частота собственных осесимметричных колебаний оболочки в отсутствие магнитного поля.

В [1] подобная задача была дважды решена в трехмерной постановке: один раз в рамках гипотез магнитоупругости, другой — на основе трехмерных уравнений магнитоупругости. В обоих случаях были получены частотные уравнения, которые в пределах применимости двумерной теории оболочек [4] для состояний с большой изменчивостью ($k \gg 1$) могут быть приведены к виду

$$\Omega^2 - i\gamma \left(1 + i \frac{\Omega}{\alpha} \right)^{-1} \Omega - 1 = 0, \quad \gamma = \frac{kR^{-1}}{\rho_0 \gamma h \omega_1} \quad (5.3)$$

Учитывая формулы (1.1), (2.1) для λ и γ , несложно проверить, что $\Omega/\alpha \sim \eta^2$. Тогда в области определения случая 1, то есть при $\alpha \gg \alpha_0$, вторым слагаемым в круглой скобке (5.3) можно пренебречь в уравнении с единицей и полученное приближенное частотное уравнение совпадает с (5.2). Определяемые им собственные значения

$$\Omega = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2}$$

вообще говоря, комплексны. При $\gamma < 2$ уравнение (5.2) имеет два кратных мнимых корня. При $\gamma > 2$ колебания становятся апериодическими ($\text{Re } \Omega = 0$).

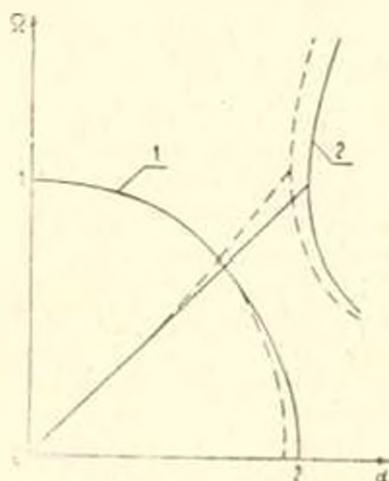


Рис. 1

На фиг. 1 приведена зависимость $Re\Omega$ (кривая 1) и $Im\Omega$ (кривая 2) от α , вычисленная по формуле (5.2). Здесь же пунктиром изображены соответствующие кривые, вычисленные по формуле (5.3) при $\delta = 20$.

В заключение автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи, а также С. А. Амбарцумяна и участников семинара Института механики АН Арм. ССР за ценные замечания, сделанные при ознакомлении с изложенными в статье результатами.

ON REDUCING OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF MAGNETOELASTICITY OF THIN SHELLS TO TWO-DIMENSIONAL ONE

A. I. RADOVINSKY

ՄԱԳՆԵՏՈՒԵԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴՆՆՈՎԱՓ ԽՆՏԻՐԻ ՍԵՐՈՒՄԸ ԵՐԿՉԱՓԻ

Ա. Ի. ՐԱԾՈՎԻՆՍԿԻ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկված էն ստացիոնար էլեկտրական դաշտի առկայությանը տեղափարածությունում բարակ էլեկտրաաղորդիչ թաղանթների և սալերի տատանումների խնդրի ասիմպտոտիկական հատկությունները:

Ճույց է արված, որ սպեկտրի ցածր հաճախականության մասում խնդիրը կարող է բերվել երկչափի, որն էնտազայում լուծվում է մասնակի ածանցյալներով հավասարումների խնտեղրման միջոցով:

Բոլոր տեսական դրույթները լուսարանվում են օրինակներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Бедубетун М. М. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 273 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Бедубетун М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, с. 114—130.
3. Саркисян С. О. К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, № 5, с. 21—34.
4. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. Радовинский А. Л. Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях.—ПММ, 1986, т. 50, вып. 5, с. 796—803.
6. Радовинский А. Л. Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 124—135.
7. Радовинский А. Л. О структуре спектра задачи магнитоупругости тонких пластин.—Изв. АН СССР. МТТ, 1987, № 1, с. 164—171.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила в редакцию
3 VI 1987

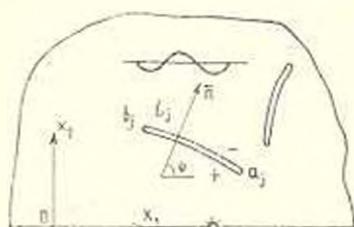
УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН МЕХАНИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИИ С
 ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В
 ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ М. Л.

Решение ряда статических и динамических задач электроупругости для тел с трещинами содержится, например, в [1—5]. Ниже рассматривается динамическая краевая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства с туннельными криволинейными трещинами — разрезами, находящегося в состоянии продольного сдвига. Краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений механических и электромагнитных величин. Представлены результаты расчетов.

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим отнесенную к кристаллофизической системе координат ox_1, x_2, x_3 полубесконечную пьезокерамическую среду $x_3 \geq 0$ (кристалл гексагональной системы *6mm*: пьезокерамика *PZT-4*, *PZT-5* и др.), ослабленную туннельными вдоль оси ox_3 криволинейными трещинами — разрезами l_j ($j = 1, 2, \dots, k$).



Фиг. 1

Пусть на берегах разрезов задана не зависящая от координаты x_3 непрерывная по Гельдеру сдвиговая нагрузка $Z_n = Z_n^+ = -Z_n^- = -\text{Re}\{Z \exp(-i\omega t)\}$, а из бесконечности излучается монохроматическая *SH*-волна смещений (фиг. 1)

$$w_0 = \text{Re}\{W_0 \exp(-i\omega t)\}, \quad W_0 = \exp[-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)] \quad (1.1)$$

$$z_1 = \gamma_0 \cos \beta_*, \quad z_2 = \gamma_0 \sin \beta_*, \quad \gamma_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$c = \sqrt{\frac{e_{44}(1+z_0^2)}{\rho}}, \quad z_0^2 = \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11} e_{44}}$$

Здесь ω — частота, β_* — угол между нормалью к фронту падающей волны и осью ox_1 ; e_{44} , e_{15} , ϵ_{11} и ρ — соответственно модуль сдвига, пьезокерамический модуль, диэлектрическая проницаемость и плотность материала.

Ниже будем предполагать, что полупространство может быть либо закреплено, либо свободно от сил вдоль границы $x_2=0$. Кроме этого, рассмотрим два типа электрических краевых условий: граница полупространства электродирована и заземлена ($E_1=0$); полупространство граничит с вакуумом ($D_2=0$)

Относительно разрезов предположим, что L_1 —простые разомкнутые непересекающиеся дуги с кривизнами, удовлетворяющими условию Гельдера.

В этих условиях в теле действуют сопряженные полевые поля механических напряжений продольного сдвига $\tau_{11}(x_1, x_2)$, $\tau_{21}(x_1, x_2)$, векторов электрической и магнитной напряженности $E_1(x_1, x_2)$, $E_2(x_1, x_2)$ и $H_1(x_1, x_2)$, $H_2(x_1, x_2)$.

Полная система уравнений поставленной задачи имеет вид уравнения состояния пьезосреды

$$\tau_{11} = c_{44} \partial_2 \varphi - e_{11} E_2, \quad D_1 = e_{11} \partial_1 \varphi + \varepsilon_{11} F_1 \quad (1.2)$$

$$\tau_{21} = c_{44} \partial_1 \varphi - e_{12} F_1, \quad D_2 = e_{11} \partial_2 \varphi + \varepsilon_{11} F_2$$

уравнение движения

$$\sigma_{11} \partial_{11} + \partial_2 \tau_{21} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

уравнения Максвелла

$$\partial_1 E_2 - \partial_1 F_1 + \mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_2 H_1 = \frac{\partial D_2}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\partial_1 H_2 = - \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0$$

Электромагнитные граничные условия на берегах разрезов возьмем в виде

$$E_2^- = E_2^+, \quad D_2^- = D_2^+, \quad H_1^- = H_1^+, \quad B_1^- = B_1^+ \quad (1.5)$$

Можно показать [4], что амплитуды механических и электромагнитных величин выражаются через две функции W и F в виде

$$T_{11} = c_{44}(1 + \nu_2^2) \partial_2 W + e_{11} \partial_1 F, \quad T_{21} = c_{44}(1 + \nu_2^2) \partial_1 W - e_{11} \partial_2 F$$

$$E_1 = \sigma_2 F - \frac{e_{12}}{\varepsilon_{11}} \partial_1 W, \quad E_2 = -\partial_1 F - \frac{e_{22}}{\varepsilon_{11}} \partial_2 W \quad (1.6)$$

$$D_1^* = \varepsilon_{11} \partial_1 F, \quad D_2^* = -\varepsilon_{11} \partial_2 F, \quad H_1^* = -i\omega \varepsilon_{11} F$$

Здесь T_{11} , . . . , H_1^* —амплитуды соответствующих механических, электрических и магнитных величин. Функции W и F удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 W + \gamma_2^2 W = 0, \quad \nabla^2 F = 0 \quad (1.7)$$

2. Интегральные представления решений динамической задачи электроупругости для трещины продольного сдвига. Волновые поля в полупространстве с дефектами складываются из прямой и отраженной от границы полупространства волн, а также рассеянного дефектами поля.

В соответствии с этим функции W и F представим в виде

$$W(x_1, x_2) = -\frac{1}{4} \int_L |W| \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G(\zeta; z) d\zeta - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} G(\bar{\zeta}; z) d\bar{\zeta} \right\} + W_0 - A W_1, \quad (2.1)$$

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \{ f(\zeta) H(\zeta; z) d\zeta - \bar{f}(\bar{\zeta}) H(\bar{\zeta}; z) d\bar{\zeta} \}$$

$$G(\zeta; z) = H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - A H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1), \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$$

$$\bar{\zeta} = \zeta_1 - i\zeta_2, \quad H(\zeta; z) = \ln(\zeta - z) - A \ln(\zeta - \bar{z})$$

$$(\zeta_1, \zeta_2) \in L = l, \quad W_1 = \exp[-i(z_1 x_1 - z_2 x_2)]$$

Здесь $|W|$ — скачок амплитуды перемещения на L , случай $A = -1$ соответствует свободному, граничащему с вакуумом, полупространству, случай $A = 1$ — закреплённому и покрытому заземленным электродом полупространству.

Представления (2.1) удовлетворяют соответственно уравнениям (1.7), механическим и электрическим краевым условиям указанных типов на границе полупространства $x_2 = 0$, а также условиям излучения [6].

3. Интегральное уравнение краевой задачи. По формулам (1.6) находим интегральные представления величин $T_n = T_{12} \cos \psi + T_{23} \sin \psi$, E_n^* и D_n^* (ψ — угол между нормалью к левому берегу разреза и осью Ox_1). Подстановка предельных значений E_n^* и D_n^* при $z = \zeta_0 \in l$ в граничные условия (1.5) приводит к зависимостям

$$f(\zeta) = \frac{\epsilon_{21}}{2\epsilon_{11}} e^{-i\psi} \left| \frac{dW}{ds} \right|, \quad \bar{f}(\bar{\zeta}) = \frac{\epsilon_{21}}{2\epsilon_{11}} e^{-i\psi} \left| \frac{dW}{ds} \right| \quad (3.1)$$

Условие непрерывной продолжимости вектора механических напряжений через L выполняется автоматически, а механическое граничное условие на одном из берегов L приводит к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\int_L p'(\zeta) g(\zeta, \zeta_0) ds + \int_L p(\zeta) g_3(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0) \quad (3.2)$$

$$g(\zeta, \zeta_0) = \ln \frac{e^{i\psi_0} (\zeta - \zeta_0)}{\zeta - \bar{\zeta}_0} + A \alpha^2 \ln \frac{e^{-i\psi_0} (\zeta - \zeta_0)}{\zeta - \bar{\zeta}_0}$$

$$g(\zeta_0) = \frac{\pi \gamma_2 \sqrt{1+x_0^2}}{4} [AH_0^{(0)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi + \psi_0) - \\ - H_0^{(0)}(\gamma_2 r_0) \cos(\psi - \psi_0) + H_2(\gamma_2 r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\gamma_0) - \\ - AH_2^{(0)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi - \psi_0 - 2\gamma_{10})]$$

$$p(\zeta) = \frac{|W|}{2}, \quad p'(\zeta) = \frac{dp(\zeta)}{ds}$$

$$N(\zeta_0) = \frac{\pi Z}{c_{44}} + \pi i \gamma_2 (1+x_0^2) \{ \exp(-i(x_1 \zeta_{10} + x_2 \zeta_{20})) \times \\ \times \cos(\psi_0 - \beta_0) - A \exp(-i(x_1 \zeta_{10} - x_2 \zeta_{20})) \cos(\psi_0 + \beta_0) \}$$

$$r_0 = |\zeta_0 - \bar{\zeta}|, \quad r_{10} = |\zeta_0 - \bar{\zeta}_{10}|, \quad x_0 = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta})$$

$$x_{10} = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta}_{10}), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \zeta_{10} + i \zeta_{20}$$

$$\zeta, \zeta_0 \in L, \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(0)}(x)$$

Интегральное уравнение (3.2) в совокупности с дополнительными условиями равенства нулю скачков перемещений на концах разрезов

$$\int_{L_j} p'(\zeta) ds = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (3.3)$$

имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах L_j [7].

4. *Динамический коэффициент интенсивности напряжений.* Введем параметризацию контура L . Положим

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 < \beta < 1, \quad p'(\zeta) = \frac{\Omega_0(\beta)}{s'(\beta) \sqrt{1-\beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta} > 0 \\ \Omega_0(\beta) \in H[-1, 1] \quad (4.1)$$

Асимптотический анализ выражений ∂W и ∂F ($i=1, 2$), полученных из (2.1), с привлечением формул (1.6), позволяет найти главную сингулярную часть механических и электрических величин на продолжении за вершины трещины

$$\sigma_{ij}^0 = -c_{44} \frac{\operatorname{Re} |e^{-i\alpha r} \Omega_0(\pm 1)|}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}}, \quad D_n^0 = \frac{c_{12} \sigma_{11}^0}{c_{11}}, \quad E_1^0 = E_2^0 = 0 \quad (4.2)$$

Здесь верхний знак относится к вершине трещины a , нижний — к b , r — расстояние от точки до вершины.

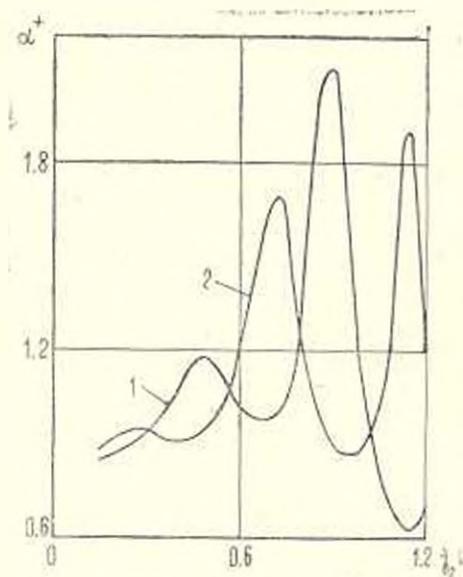
Напряженность электрического поля не имеет особенности в вершинах трещины. Это объясняется тем, что вектор E непрерывно продолжается через разрезы в силу (1.5), условия $Z_n^+ = -Z_n^-$ и соотношений (1.2).

Динамический коэффициент интенсивности напряжений определяется обычным образом: $k_3 = |\sin \sqrt{2\pi r} \tau_2|$ ($r = 0$).

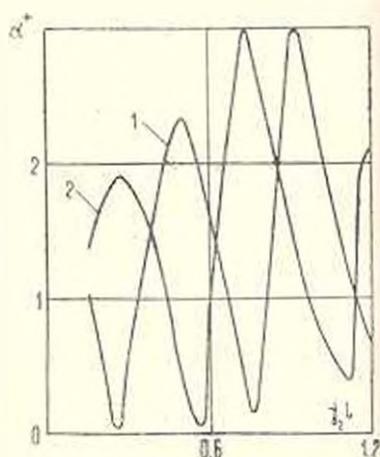
5. *Результаты расчетов.* Рассматривалась параболическая трещина в пьезоэлектрике $PZT-4$ ($c_{11} = 2,55 \cdot 10^{10}$ н/м², $e_{13} = 12,7$ кмФ/м, $\epsilon_{11} = 730 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}$ ф/м), параметрическое уравнение которой

$$\zeta_1 = \rho_1 \zeta^2, \quad \zeta_2 = \rho_2 + \rho \zeta^2, \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (5.1)$$

Интегральное уравнение (3.2) с учетом (4.1) и (5.1) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_0(\beta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [8].



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены значения $\alpha^+ = c_{11} |\Omega_0(1)| (Z \sqrt{ls'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа ζ_2^l для случая $Z = \text{const} = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2l = 3$; ($2l$ — длина разреза); кривая 1 построена для значений $A = 1$, $\rho = 0,5$; кривая 2 — для $A = -1$, $\rho = -0,5$.

Зная величины α^+ и $\delta^{\mp} = \arg \Omega_0(\pm 1)$, находим коэффициент интенсивности k_3 по формуле

$$k_3 = -\sqrt{-l} Z \alpha^+ \cos(\omega t - \delta^+)$$

На фиг. 3 приведены графики величины $\alpha^+ = c_{11} |\Omega_0(1)| (|T_{23} \sqrt{ls'(1)}|)$ в зависимости от нормализованного волнового числа ζ_2^l для случая $Z = 0$, $\tau_1 = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2l = 3$. Кривая 1 построена для значений $A = 1$, $\rho = 0,5$; кривая 2 — для $A = -1$, $\rho = -0,5$. Здесь величина T_{23} — амплитуда напряжений τ_2 в падающей волне. Зная α^+ и $\delta^{\mp} = \arg \Omega_0(\pm 1)$ находим динамический коэффициент интенсивности по формуле

$$k_3 = -\sqrt{-l} |T_{23}| \alpha^+ \cos(\omega t - \delta^{\mp})$$

INTERACTION BETWEEN THE WAVES OF MECHANICAL SHIFTS WITH TUNNEL CRACKS OF LONGITUDINAL SHEAR IN PIEZOCERAMIC HALF-SPACE

M. L. FILSHTINSKY

ՊԻԵՉՈԿԵՐԱՄԵԿԱԿԱՆ ԿԻՍՏՈՐԱՑՈՒԹՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԲԵՆԱՆԻԿԱԿԱՆ ԱՐԲՆԵՐԻ ՓՈՆԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒՂՔԻ ԹՈՒՆԵԼԱՅԻՆ ՀԱՔՆԵՐԻ ՀԵՏ

И. Л. ФИЛШТИНСКИЙ

Ա մ փ ո փ ո ս ւ

Կորագիծ թունկատից հորերով պիեզոկերամիկական կիսատարածությունում մեխանիկական տեղաշարժերի ալիքների փոխազդեցության մասին էլեկտրատաճաղականության խնդիրը անդրազգում է տեղափոխաբյունների թռչքների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ համասարման Այդ համասարմանը լուծվում է Բվալինե եղանակով՝ կիրառելով Սուրասուրի առաջին ընթացակարգը՝ ճարի գազաթում հաշվում են մեխանիկական և էլեկտրական մեծությունների ինտենսիվության գործակիցները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кудряцев Б. А., Партон В. З., Рикитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 149—159.
2. Бельжолытова Л. В., Фильштинский Л. А. Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами.—ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 138—143.
3. Иваненко О. А., Фильштинский Л. А. Взаимодействие трещины и включения в пьезокерамическом полупространстве.—Прикладн. механика, 1983, т. 19, № 12, с. 52—58.
4. Партон В. З., Кудряцев Б. А. Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды. Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1974, вып. 56, с. 3—13.
5. Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. Взаимодействие волн смещения с криволинейными трещинами продольного сдвига в пьезоэлектрической среде.—ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 822—826.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977. 736 с.
7. Мухомолович Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
8. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.—М.: Наука, 1973. 304 с.

Сумский филиал Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
16.IX 1987

УДК 539.3:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ
 МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ
 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ

АВЕТИСЯН А. С.

В связи с широким применением различных конструктивных элементов, изготовленных из композитных материалов, в современной технике, все более актуальной становится изучение вопросов распространения волн в неоднородных средах. Неоднородность среды приводит к тому, что амплитуда и фаза волны становятся функциями координат. Тем самым, усложняется решение задач о распространении волн в неоднородных средах. Особое значение имеют проблемы, касающиеся взаимодействия механической и электромагнитной полей в неоднородных средах. Учет сопряженности механических и электромагнитных полей (пьезоэлектрический эффект, электрострикция и т. д.) еще более усложняют проблему.

Проблеме распространения волн в неоднородных упругих средах посвящены немало работ [3—4] и др. В этих работах исследуется распространение волн при конкретных законах неоднородности среды.

В работе [1] исследовано распространение электроупругих поверхностных волн типа Лява в случае неоднородного тонкого пьезоэлектрического слоя.

В настоящей работе исследуется вопрос распространения электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений относительно амплитудных и фазовых функций электроупругой монохроматической волны. Исследуется распространение сдвиговой электроупругой волны в неоднородном пьезоэлектрическом слое с линейной неоднородностью по толщине.

Рассмотрим распространение монохроматических электроупругих волн в неоднородной пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класс *6mm*). Пусть координатная ось *oz* параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость *doy* есть плоскость изотропии. В этой плоскости плоское деформированное состояние не электроактивное. Исходя из этого, здесь будем исследовать распространение горизонтально поляризованных (*SH*) электроупругих монохроматических волн

$$\{\vec{n}, \Phi\} = \{0; 0; \kappa(x, y, t); \Phi(x, y, t)\}$$

Уравнения антилазоского электроупругого состояния записываются в виде

$$\operatorname{div} \vec{z} = \rho(x, y) \omega; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi \quad (1.1)$$

Механические напряжения z_{xx} , z_{yy} и компоненты вектора электрической индукции D_x , D_y для неоднородного пьезоэлектрика указанной симметрии будут

$$z_{xx} = G(x, y) \omega_{,x} + e(x, y) \Phi_{,x}, \quad z_{yy} = G(x, y) \omega_{,y} + e(x, y) \Phi_{,y}, \\ D_x = e(x, y) \omega_{,x} - \varepsilon(x, y) \Phi_{,x}, \quad D_y = e(x, y) \omega_{,y} - \varepsilon(x, y) \Phi_{,y} \quad (1.2)$$

с учетом которых уравнения (1.1) можно привести к следующему виду:

$$G(x, y) \nabla^2 \omega(x, y, t) + \operatorname{grad} G(x, y) \operatorname{grad} \omega(x, y, t) + \\ + e(x, y) \nabla^2 \Phi(x, y, t) + \operatorname{grad} e(x, y) \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = \rho(x, y) \omega(x, y, t) \quad (1.3) \\ e(x, y) \nabla^2 \omega(x, y, t) + \operatorname{grad} e(x, y) \operatorname{grad} \omega(x, y, t) - \\ - \varepsilon(x, y) \nabla^2 \Phi(x, y, t) - \operatorname{grad} \varepsilon(x, y) \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = 0$$

Очевидно, что в отличие от случая однородного пьезоэлектрика уравнения деформации и электростатики не разделяются. Но если предполагать, что диэлектрическая проницаемость и пьезоэлектрический модуль в неоднородном пьезокристалле меняются идентичным образом, то есть $e(x, y) = a_0 \varepsilon(x, y)$, то получим

$$\nabla^2 \omega(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad} f(x, y)}{f(x, y)} \omega(x, y, t) - \frac{1}{C^2(x, y)} \omega(x, y, t) \\ \nabla^2 \psi(x, y, t) + \frac{\operatorname{grad} e(x, y)}{\varepsilon(x, y)} \psi(x, y, t) = 0 \quad (1.4)$$

где

$$f(x, y) = G(x, y) + a_0 e(x, y); \quad C^2(x, y) = f(x, y) / \rho(x, y) \\ \psi(x, y, t) = \Phi(x, y, t) - a_0 \omega(x, y, t); \quad a_0 - \text{постоянная.}$$

Возьмем решение уравнений (1.4) в виде монохроматической волны

$$\begin{Bmatrix} \omega(x, y, t) \\ \psi(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{\omega}(x, y) \\ A_{\psi}(x, y) \end{Bmatrix} \exp i \left[\begin{Bmatrix} \varphi_{\omega}(x, y) \\ \varphi_{\psi}(x, y) \end{Bmatrix} - \omega t \right] \quad (1.5)$$

Здесь $A_{\omega}(x, y)$ и $A_{\psi}(x, y)$ — амплитуды, а $\varphi_{\omega}(x, y)$ и $\varphi_{\psi}(x, y)$ — укороченные фазы монохроматических волн.

Найдем условия существования монохроматических волн (1.5) для уравнений электроупругости (1.4). С учетом (1.5) из (1.4) после несложных преобразований находим системы уравнений, которым должны удовлетворять амплитуды $A_{\omega}(x, y)$; $A_{\psi}(x, y)$ и фазы $\varphi_{\omega}(x, y)$; $\varphi_{\psi}(x, y)$:

$$(\operatorname{grad} U_{\omega})^2 - (\operatorname{grad} \varphi_{\omega})^2 + \nabla^2 U_{\omega} + \frac{\operatorname{grad} f(x, y)}{f(x, y)} \operatorname{grad} U_{\omega} + \frac{\omega^2}{C^2(x, y)} = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 2\text{grad}U_w \cdot \text{grad}\varphi_w + \nabla^2\varphi_w + \frac{\text{grad}f(x, y)}{f(x, y)} \text{grad}\varphi_w &= 0 \\
 (\text{grad}U_w)^2 - (\text{grad}\varphi_w)^2 + \nabla^2 U_w + \frac{\text{grad}\epsilon(x, y)}{\epsilon(x, y)} \text{grad}U_w &= 0 \\
 2\text{grad}U_w \cdot \text{grad}\varphi_w + \nabla^2\varphi_w + \frac{\text{grad}\epsilon(x, y)}{\epsilon(x, y)} \text{grad}\varphi_w &= 0
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$U(x, y) = \ln A(x, y)$$

Точные решения полученных систем нелинейных уравнений даются решениями

$$\varphi(x, y, t) = \exp[U_w(x, y) + i\varphi_w(x, y) - i\omega t] \tag{1.12}$$

$$\Phi(x, y, t) = \exp[U_w(x, y) + i\varphi_w(x, y) - i\omega t] + a_0 w(x, y, t)$$

Если аналогично гармонической волне задать вектор $\vec{k} = \text{grad}U$, то этот вектор будет функцией координат x и y как по величине, так и по направлению.

Таким образом, задача о распространении монохроматической волны в неоднородной пьезоэлектрической среде приводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений типа (1.6) относительно амплитуд и фаз волны.

2. Пусть неоднородный по толщине пьезоэлектрический слой ориентирован к системе декартовых координат таким образом, что занимает область $\{|x| < \infty, |y| \leq h, |z| < \infty\}$. Тогда все физические характеристики материала будут функциями координаты y . Рассмотрим распространение монохроматической электроупругой SrI волны в направлении оси ox , когда поверхности $y = \pm h$ металлизированы и свободны от механических нагрузок

$$\varphi_w(x, \pm h, t) = 0, \quad \Phi(x, \pm h, t) = 0 \tag{2.1}$$

Требую, чтобы волна распространялась по оси ox , мы предопределяем функции $\varphi_w(x, y)$ и $\varphi_w(x, y)$:

$$\text{grad}\{\varphi_w(x, y), \varphi_w(x, y)\} = k \cdot i_x \tag{2.2}$$

Допущения, сделанные по отношению неоднородности пьезоэлектрика и о направлении распространения волны, дают возможность утверждать, что амплитуды волны будут изменяться только по толщине слоя. Следовательно, уравнения (1.6) и (1.7) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2 U_w}{dy^2} + \frac{f(y)}{f(y)} \frac{dU_w}{dy} + \left(\frac{dU_w}{dy}\right)^2 - k^2(1 - v^2(y)) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2 U_w}{dy^2} + \frac{\epsilon'(y)}{\epsilon(y)} \frac{dU_w}{dy} + \left(\frac{dU_w}{dy}\right)^2 - k^2 = 0 \tag{2.4}$$

где

$$V^2(y) = \omega^2 / |k^2 C^2(y)|$$

Введя обозначение $dU_x/dy = U_x'(y)$, уравнение типа (2.3) приводится к уравнению Риккати

$$U_x'(y) = U_x(y) - |f'(y)/f(y)| U_x(y) + k^2 [1 - V^2(y)]$$

которое при произвольной неоднородности среды не имеет аналитического решения. Но если функция $f'(y)/f(y)$ непрерывна в интервале $-h < y < h$, то решение уравнения Риккати приводится в отличие от нуля к решению линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами относительно амплитуды $A_x(y)$

$$\frac{d^2 A_x(y)}{dy^2} + \frac{f'(y)}{f(y)} \frac{dA_x(y)}{dy} - k^2 [1 - V^2(y)] A_x(y) = 0 \quad (2.5)$$

Аналогичным образом, решение уравнения (2.4) приводится к решению линейного уравнения относительно амплитуды электрического потенциала $A_z(y)$

$$\frac{d^2 A_z(y)}{dy^2} + \frac{\varepsilon'(y)}{\varepsilon(y)} \frac{dA_z(y)}{dy} - k^2 A_z(y) = 0 \quad (2.6)$$

Очевидно, что полученные уравнения (2.5), (2.6) соответствующие рассматриваемому частному случаю, можно сразу получить из (1.4), представляя искомые функции $\omega(x, y, t)$ и $\phi(x, y, t)$ в виде

$$\bar{f}(x, y, t) = A(y) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

Пусть неоднородность по толщине неэлектррического слоя является линейной

$$\gamma(y) = \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{2} + \frac{\gamma^+ - \gamma^-}{2h} y \quad (2.7)$$

где γ^+ и γ^- соответствуют значениям физических характеристик $G(y)$, $\rho(y)$, $\varepsilon(y)$ на границах слоя $y = \pm h$, соответственно.

С учетом закона неоднородности слоя (2.7) уравнения (2.5) и (2.6) преобразуются к виду

$$(1 + \varepsilon_0 y) \frac{d^2 A_x}{dy^2} + \varepsilon_0 \frac{dA_x}{dy} + k^2 \left[\left(\frac{\rho_0^2}{\varepsilon_0^2} - 1 \right) + \left(\rho_0 \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} - \varepsilon_0 \right) y \right] A_x = 0 \quad (2.8)$$

$$(1 + \varepsilon_0 y) \frac{d^2 A_z}{dy^2} + \varepsilon_0 \frac{dA_z}{dy} - k^2 (1 + \varepsilon_0 y) A_z = 0 \quad (2.9)$$

здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{h} \frac{\bar{G}^+ - \bar{G}^-}{\bar{G}^+ + \bar{G}^-}$, $\rho_0 = \frac{1}{h} \frac{\bar{\rho}^+ - \bar{\rho}^-}{\bar{\rho}^+ + \bar{\rho}^-}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{h} \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}$, $\varepsilon_0^2 = G_0^2 \rho_0^2$

$\bar{G}_0 = (\bar{G}^+ + \bar{G}^-)/2$, $\bar{\rho}_0 = (\bar{\rho}^+ + \bar{\rho}^-)/2$, $\bar{G}^\pm = G^\pm + a_0 e^{\pm}$, $\varepsilon_0 = \omega/k$.

Решения уравнения (2.8) и (2.9) с помощью представления искомых функций $A_x(y)$ и $A_z(y)$ в виде

$$F(y) = \exp(-ky) \cdot Z(\xi), \quad y = k\xi + a$$

приводятся к решению вырожденных гипергеометрических уравнений относительно функции $Z(\xi)$. Решения $A_\alpha(y)$ и $A_\beta(y)$ представляются вырожденными гипергеометрическими функциями $F(a; 1; \xi)$ и $M(a; 1; \xi)$:

$$A_\alpha(y) = \exp(-ky) [C_1 F(a; 1; \xi) + C_2 M(a; 1; \xi)] \quad (2.10)$$

$$A_\beta(y) = \exp(-ky) \left[C_3 F\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma\right) + C_4 M\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma\right) \right]$$

где $F(a, b, x)$ и $M(a, b, x)$ — гипергеометрические ряды

$$F(a; b; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$M(a; b; x) = F(a; b; x) \cdot \ln|x| + \sum_{m=1}^{\infty} C_{a, m-1}^m \cdot \frac{x^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{2}{1+n} \right) \quad (2.11)$$

$$\xi = (1 - \nu_1)(y - \mu_1), \quad \gamma = (1 - \nu_2)(y - \mu_2), \quad \mu_1 = -(1 - g_0)$$

$$\nu_1 = \{2k|1 - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}\}^{-1}$$

$$\mu_2 = -(1 - \varepsilon_0), \quad \nu_2 = (2k)^{-1}, \quad \gamma = |1 - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}$$

$$a = \frac{1}{2} \{1 - (1 - g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2} - (g_0 g_0)(v_\phi/c_0)^2|^{-1/2}\}$$

Для определения фазовой скорости v_ϕ получим дисперсионное уравнение в виде

$$\det|C_{ij}(v_\phi)| = 0 \quad (2.12)$$

где

$$C_{j1} = (e^{\pm i\tilde{a}}) \exp(\pm k\tilde{a}h) \cdot F(a; 1; \xi(\pm h)), \quad C_{j2} = (e^{\pm i\tilde{a}}) \exp(\pm k\tilde{a}h) \times \\ \times M(a; 1; \xi(\pm h)), \quad C_{j3} = \exp(\pm kh) \cdot F\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right)$$

$$C_{j4} = \exp(\pm kh) \cdot M\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right)$$

$$C_{11} = \left[\frac{a}{\lambda_1} F(a+1; 2; \xi(\pm h)) - k\gamma F(a; 1; \xi(\pm h)) \right] \exp(\pm k\tilde{a}h) \quad (2.13)$$

$$C_{12} = - \left[\frac{a}{\lambda_1} M(a+1; 2; \xi(\pm h)) + k\gamma M(a; 1; \xi(\pm h)) \right] \exp(\mp k\tilde{a}h)$$

$$C_{13} = (e^{\pm i\tilde{a}}) \left[\frac{1}{2\lambda_2} F\left(\frac{3}{2}; 2; \gamma(\pm h)\right) - kF\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right) \right] \exp(\pm kh)$$

$$C_{14} = - (e^{\pm i\tilde{a}}) \left[\frac{1}{2\lambda_2} M\left(\frac{3}{2}; 2; \gamma(\pm h)\right) + kM\left(\frac{1}{2}; 1; \gamma(\pm h)\right) \right] \exp(\mp kh)$$

$$j = 1; 2; \quad n = 3; 4$$

При отсутствии пьезоэлектрического эффекта элементы матрицы $C_{11}=C_{12}=C_{13}=C_{14}=0$, и дисперсионное уравнение в этом случае намного упрощается.

Дисперсионное уравнение (2.12) имеет сложный трансцендентный вид. Существование его решения означает, что в неоднородном пьезоэлектрическом слое, с линейной неоднородностью физических характеристик, возможно распространение сдвиговой электроупругой волны по направлению ox .

Рассмотрим предельные случаи. Предположим, что длина волны $l=2\pi/k$ очень мала по сравнению с толщиной неоднородного слоя $2h$. Используя асимптотики гипергеометрических функций $F(a, b, x)$ и $M(a, b, x)$ при $|x| \rightarrow \infty$

$$F(a, b, x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} x^{-a} \cdot \exp x \cdot [1 + O(x^{-1})] & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)} (-1)^a x^a \cdot [1 + O(|x|^{-1})] & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$M(a, b, x) = (1/x)^a [1 + O(|x|^{-1})] \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

получим

$$V^2 = C_{44}^0(1 - \epsilon_{\pm}^2) = (\bar{G}^+ - \bar{G}^-)(1 - \nu_{\pm}^2)/(\rho^+ - \rho^-) \quad (2.14)$$

Здесь величины ν_{\pm} и ρ_{\pm} — коэффициенты электроупругой связи пьезоэлектрика на поверхностях $y = \pm h$ неоднородного пьезослоя, соответственно.

Полученные значения для фазовой скорости v_{ϕ} напоминают характеристическое уравнение для поверхностных волн Гуляева-Блюстения. В случае неоднородного слоя поверхностные сдвиговые волны вблизи поверхностей $y = \pm h$ распространяются с разными скоростями: $v_{\phi} = V_{\pm}$, соответственно.

Из (2.14) очевидно, что если неоднородный слой на поверхностях $y = \pm h$ имеет характеристики таких пьезоэлектриков, для которых

$$(\bar{G}^+ > \bar{G}^- \text{ и } \nu^+ < \nu^-) \text{ или } (\bar{G}^+ < \bar{G}^- \text{ и } \nu^+ > \nu^-) \quad (2.15)$$

то поверхностные волны по границам $y = \pm h$ не будут распространяться.

Если длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя $l = 2\pi/k \gg 2h$, то заменяя в уравнении (2.12) вырожденные гипергеометрические функции на их асимптоты при $l, \eta \rightarrow 0$

$$F(a, b, \xi) \rightarrow 1,$$

$$M(a, b, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \ln \xi + O(|\ln \xi|) & \text{при } b=1 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} (1/\xi) + O(|\ln \xi|) & \text{при } b=2 \end{cases}$$

получим, что линейная неоднородность пьезоэлектрического материала не вносит качественных поправок в общую картину длинных волн. Она только количественно изменяет скорость распространения длинных волн. При соблюдении условия (2.15) длинные волны также не могут распространяться.

Пара пьезоэлектриков — пьезокерамика ЦТС-4 ($c_{44}^0 = 2,56 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho^{\pm} = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $e_{11}^{\pm} = 12,5$ Кл/м², $\epsilon_{11}^{\pm} = 650 \cdot 10^{-11}$ Ф/м) и окись

шника ($c_{44} = 4,25 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 5,68 \cdot 10^3$ кг/м³, $e_{15} = -0,59$ Кл/м², $\epsilon_{11} = 7,38 \cdot 10^{-11}$ Ф/м) имеют характеристики, удовлетворяющие условиям $G \ll G^*$ и $\rho \gg \rho^*$. Следовательно, в этом случае распространение поверхностных сдвиговых волн в неоднородном слое невозможно.

ABOUT PROPGATION OF ELECTROELASTIC MONOCHROMATIC WAVE IN NONHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC

A. S. AVETISIAN

ԱՆՀՄԱՐԱՆԵՐ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐՈՆԻԿ ԷԼԵԿՏՐՈԼԻՉԳՐԱԿԱՆ
ԳՐԱՆՔՐՈՄԱՆԻ ԱՄԲԻ ՏՐԱՎԵՐԱՆ ԴԱՐԱՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ

Ա ռ ի ղ յ ի ղ յ

Հետադասվում է անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկում էլեկտրաստատիկական մոնոքրոմատիկ ալիքի տարածման հարցը: Ստացված է ոչ դժային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որին բավարարում են ալիքի ամպլիտուդային և ֆազային ֆունկցիաները:

Դիտարկվում է դժային անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկ շերտում սահմանափակ տարածման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аветисян А. С. Поверхностные электроупругие волны Ляна в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. 4, № 1, с. 24—29.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики т. 1. М.—Л.: ГИИЛ, 1951, 476 с.
3. Bacteria I., Maugin G. A. Ondes de surface SH pures en elasticite inhomogene.—Journ. de Mecanique theorique et appliquee, 1982, vol. 1, № 6, p. 995—1013.
4. Bhattacharya S. H. Exact solutions of SH wave equations in transversely isotropic inhomogeneous elastic media.—Pure and Appl. Geophys., 1971, vol. 97, № 1, p. 19—35.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.XII.1986

УДК 634.1.539.3

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННОГО ЭФФЕКТА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СЕГНЕТОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

БОГОМОЛЬНЫЙ В. М.

При действии сильного постоянного электрического поля на сегнетокерамику в неполярной фазе в ней индуцируется поляризация, при этом значительно меньшее дополнительное поле создает рабочие перемещения пьезоэлемента [1]. Электрострикционный эффект позволяет линейно (без гистерезиса) управлять величиной электромеханической связи, что объясняет целесообразность его применения в прецизионном приборостроении [2].

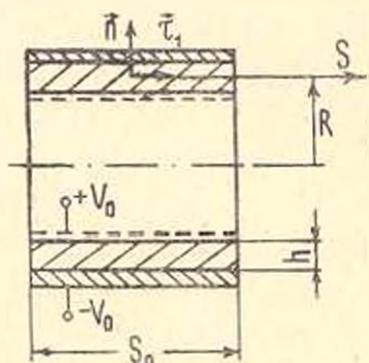
В известных работах рассматривались пьезоэлементы простейшей геометрической формы (стержни, пластины) [1, 2], цель этой работы — построение соотношений электроупругости для оболочек армированных металлическим слоем. Рассмотрим цилиндрическую оболочку из сегнетокерамики, на которой за счет разности температур закреплена металлическая оболочка.

При поляризации в направлении толщины оболочки уравнения электрострикционного эффекта относительно постоянных по времени механических напряжений и деформаций имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s_{11}^E \sigma_1 + s_{12}^E \sigma_2 + s_{13}^E \sigma_3 + Q_{11} E_1^2, & \varepsilon_2 &= s_{11}^E \sigma_2 + s_{12}^E \sigma_1 + s_{13}^E \sigma_3 + Q_{12} E_1^2 \\ \varepsilon_3 &= s_{13}^E (\sigma_1 + \sigma_2) + s_{33}^E \sigma_3 + Q_{11} E_1^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — относительные деформации в направлениях единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (фиг. 1); σ_i ($i = 1, 2, 3$) — механические напряжения; s_{ij}^E ($i, j = 1, 2, 3$) — упругие податливости сегнетокерамики; Q_{11}, Q_{12} — электрострикционные константы; E_1 — компонента вектора напряженности электрического поля в направлении толщины оболочки.

Начальные напряжения σ_2, σ_3 , возникающие вследствие контактного давления между слоями — q_n , определяются методами плоской теории упругости [3].



Фиг. 1

При этом окружные напряжения τ_2 состоят из двух компонент $\tau_2 = \bar{\tau}_2 + \tau_2'$, где $\bar{\tau}_2$ зависят от E_3 , q_n и определяются в этой работе. Касательные контактные усилия, возникающие на поверхности сегнетокерамики за счет разности температур, учтены в виде поверхностной нагрузки $q_1 = f q_n$ (f — коэффициент трения), приложенной к сегнетокерамической оболочке.

Компонента вектора электрической индукции в направлении толщины оболочки D_3 выражается через тензор механических деформаций [1, 4] с учетом соотношений между эквивалентными электромагнитическими и упругими постоянными [1, 5]

$$D_3 = \epsilon_{33}^0 E_3 + e_{31}^{00} (\tau_1 + \tau_2) + e_{32}^{00} \tau_2 = Q_{12} E_3 (\epsilon_{11}^E + \epsilon_{12}^E) + Q_{11} E_3 \epsilon_{33}^E \quad (2)$$

$$e_{31}^{00} = 2Q_{12} \epsilon_{11}^E + Q_{11} \epsilon_{33}^E, \quad \epsilon_{33}^0 = \epsilon_{33}^T - 2Q_{12} \epsilon_{11}^E - Q_{11} \epsilon_{33}^E \quad (3)$$

ϵ_{11} ($l = 1, 2, 3$) — упругие константы; ϵ_{33}^T , ϵ_{33}^E — диэлектрические проницаемости сегнетокерамики, измеренные соответственно при деформациях и механических напряжениях, равных нулю.

Подставляя выражения (3) в (2) с учетом третьего соотношения (1), имеем

$$D_3 = E_3 \epsilon_{33}^T - 2Q_{12} E_3 [Q_{12} (\epsilon_{11}^E + \epsilon_{12}^E) + Q_{11} \epsilon_{33}^E] - \\ - Q_{12} \epsilon_{33}^E (2Q_{12} \epsilon_{11}^E + Q_{11} \epsilon_{33}^E) + E_3 (\tau_1 + \tau_2) [Q_{12} (\epsilon_{11}^E + \epsilon_{12}^E) + Q_{11} \epsilon_{33}^E] + \\ + E_3 (2Q_{12} \epsilon_{11}^E + Q_{11} \epsilon_{33}^E) [s_{11}^E (\tau_1 + \tau_2) + s_{33}^E \tau_2 + Q_{11} E_3] \quad (4)$$

(здесь и в дальнейшем «волна» над τ_1 и τ_2 , зависящими от E_3 и q_n , не ставится с целью упрощения обозначений).

В рассматриваемом случае предварительные механические напряжения τ_3 (возникающие от контактного давления q_n) вычисляются по формуле [3]

$$\tau_3 = -q_n \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)$$

z — координата в направлении нормали к срединной поверхности оболочки толщиной h (фиг. 1).

Из первых двух уравнений (1) имеем

$$\tau_1 = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} (\epsilon_1 + \nu \tau_2 - \bar{E}_1), \quad \tau_2 = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} (\epsilon_2 + \nu \tau_1 - \bar{E}_2) \quad (5)$$

$$\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \quad \bar{E}_2 = (1 + \nu)(Q_{12} E_3^2 - q_n s_{12}^E / 2)$$

Распределение меридиональных и окружных деформаций по толщине оболочки определяется гипотезами Кирхгофа-Лява

$$\tau_1 = \tau_1^{(0)} + z \tau_2, \quad \tau_2 = \tau_2^{(0)} + z \tau_1 \quad (6)$$

$\tau_1^{(0)}$, $\tau_2^{(0)}$ — деформации срединной поверхности оболочки; τ_1 , τ_2 — изменения ее главных кризисы.

Для напряженности электрического поля можно использовать аналогичные (6) выражения [6]

$$E_z = E_z^{(0)} + zE_z^{(1)}, \quad E_z^{(0)} = -\frac{2V_0}{h} \quad (7)$$

где $\pm V_0$ — электрические потенциалы на электродах, расположенных на поверхностях оболочки с координатами $z = \pm h/2$.

Величина D_2 практически не изменяется по толщине оболочки [7]. Следуя [8], подставляем (5)–(7) в (4); приравняв в полученном выражении для D_2 сумму членов при z нулю, определяем $E_z^{(1)}$

$$E_z^{(1)} = \frac{E_z^{(0)} [hA(x_1, x_2) + (E_z^{(0)})^2 q_0 s_{10}^2 Q_{11} (2Q_{12} c_{10}^2 + Q_{11} c_{10}^2)]}{h [B(\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}) + (E_z^{(0)})^2 c(q_n)]} \quad (8)$$

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \left[Q_{10} (c_{11}^2 + c_{12}^2) + Q_{10} c_{10}^2 + \frac{s_{13}^2 (2Q_{12} c_{13}^2 + Q_{11} c_{10}^2)}{s_{11}^2 (1-\nu)} \right]$$

$$B(\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}) = \varepsilon_{11}^2 + (\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)}) [Q_{12} (c_{11}^2 + c_{12}^2) + Q_{11} c_{10}^2] +$$

$$+ \frac{s_{13}^2}{s_{11}^2 (1-\nu)} (2Q_{12} c_{13}^2 + Q_{11} c_{10}^2) (\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} + q_0 s_{10}^2)$$

$$c(q_n) = -6Q_{12}^2 (c_{11}^2 + c_{12}^2) - 8Q_{12} Q_{11} c_{10}^2 - 3Q_{11} c_{10}^2 -$$

$$- 4Q_{11} c_{13}^2 - \frac{6s_{13}^2 Q_{12}}{s_{11}^2 (1-\nu)} (2Q_{12} c_{11}^2 + Q_{11} c_{10}^2) +$$

$$+ 3s_{13}^2 q_0 \left(Q_{11} Q_{12} c_{10}^2 + \frac{Q_{11}^2 c_{13}^2}{2} \right)$$

Используя соотношения (6), (7) и выражая усилия T_1 , T_2 , моменты M_1 , M_2 через интегралы от напряжений, получим следующие соотношения:

$$T_1 = D_N (\varepsilon_1^{(0)} + \nu \varepsilon_2^{(0)} - E_z^{(0)}), \quad T_2 = D_N (\varepsilon_2^{(0)} + \nu \varepsilon_1^{(0)} - E_z^{(0)}) \quad (9)$$

$$M_1 = D_N (x_1 + \nu x_2 - E_z^{(0)}), \quad M_2 = D_N (x_2 + \nu x_1 - E_z^{(0)})$$

$$D_N = \frac{h}{s_{11}^2 (1-\nu^2)}, \quad \hat{E}_z^{(0)} = (1+\nu) \left[Q_{12} (E_z^{(0)})^2 - \frac{q_0 s_{13}^2}{2} \right]$$

$$D_{11} = \frac{h^3}{12s_{11}^2 (1-\nu^2)}, \quad \hat{E}_z^{(1)} = (1+\nu) \left(2Q_{12} E_z^{(0)} E_z^{(1)} - \frac{s_{13}^2 q_0}{h} \right)$$

При осесимметричных деформациях выражение (8) можно упростить, если $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$ определить по безмоментной теории из следующих уравнений равновесия, записанных в безразмерной форме [9]:

$$\frac{dT_1''}{ds} - \bar{T}_2'' \frac{dW''}{ds} - q_1 = 0, \quad \frac{dN_1''}{ds} - T_2'' - q = 0, \quad -\bar{T}_{21}'' \frac{dW''}{ds} = N_1'' \quad (10)$$

$$T_1'' = \frac{T_1}{D_N}, \quad T_2'' = \frac{T_2}{D_N}, \quad \bar{T}_{21}'' = \frac{h\bar{T}_2''}{2R}, \quad \bar{T}_2'' = \frac{\bar{T}_2}{D_N}, \quad q_1 = \frac{f q_0 R}{D_N}$$

$$q = \frac{q_0 R}{D_N}, \quad \bar{s} = \frac{s}{R}$$

s —линейная координата, направленная вдоль образующей оболочки, R —радиус ее средней поверхности, $T_2 = -q_1 R(1 + h/2R)$ —начальное окружное усилие сжатия, W'' —компонента вектора перемещений средней поверхности оболочки в направлении единичного вектора \vec{n} (фиг. 1) ($W'' = W/R$).

Деформации выразим через перемещения [3]

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{dU''}{ds}, \quad \varepsilon_2^{(0)} = W'', \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{R} \frac{d^2 W''}{ds^2}, \quad \varepsilon_4 = 0 \quad (11)$$

Используя (7) (где $E_2 = E_2^{(0)}$), из (10), (11) получим уравнение для определения $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$

$$\frac{d^2 W''}{ds^2} + r^2 W'' = f_0 \quad (12)$$

$$r^2 = \frac{1 + \mu \bar{T}_2'' - \mu^2}{\bar{T}_2''(1)}, \quad f_0 = \frac{1}{\bar{T}_2''(1)} \left[(1 - \mu) E_2^{(0)} - \int_0^{\bar{s}_0/2} q_1 d\bar{s} - q \right]$$

Из следующих краевых условий находим решение уравнения (12), а затем $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$

$$\left. \frac{dW''}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. W'' \right|_{\bar{s}=\bar{s}_0/2} = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon_2^{(0)} = (T_2'' - \mu) \left[\left(\frac{E_2^{(0)}}{1 - \mu} - \frac{q_1}{1 - \mu^2} \right) \frac{\cos r \bar{s}}{\cos(r \bar{s}_0/2)} - \frac{f_0 \cos r \bar{s}}{r^2 \cos(r \bar{s}_0/2)} \right] + E_2^{(0)} + \frac{q_1 \bar{s}_0}{2} \quad (14)$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{1}{(1 - \mu^2)} \left[(1 - \mu) E_2^{(0)} - q \right] \frac{\cos r \bar{s}}{\cos(r \bar{s}_0/2)} - \frac{f_0 \cos r \bar{s}}{r^2 \cos(r \bar{s}_0/2)} \quad (15)$$

Подставляя (15), (14) в (8), получим выражение для $E_3^{(0)}$ в зависимости только от одной функции x_1 ($x_2 = 0$), что позволяет получить решение в явном виде. Для этого используем полную систему уравнения (10), в которой третье уравнение содержит $M_1'' = M_1' R D_N$ [9]

$$\frac{dM_1}{ds} - T_2'' \frac{dW''}{ds} = N_1'' \quad (16)$$

Система уравнений (9)—(11) и (16) приводится к одному уравнению

$$\frac{d^4 W''}{ds^4} - 2r^2 \frac{d^2 W''}{ds^2} + s_1^4 W'' = f_1, \quad 2r^2 = -\frac{\bar{T}_2'' D_N R^2}{D_M} \quad (17)$$

$$s_1^4 = \frac{1 + \mu \bar{T}_2'' - \mu^2}{m}, \quad m = \frac{D_M}{D_M R^2}, \quad f_1 = -\frac{\nu}{m_0} \int_0^{\bar{s}_0/2} q_1 d\bar{s}$$

Решение уравнения (17) определяется из анализа корней его характеристического уравнения с учетом четности функции W'''' относительно начала координат $\bar{s}=0$ (расположенного в центре оболочки). При $s_1 > r$ оно имеет вид [10]

$$W'''' = C_1 \operatorname{ch} \alpha \bar{s} \cos \beta \bar{s} + C_2 \operatorname{sh} \alpha \bar{s} \sin \beta \bar{s} + f_1 / s^2 \quad (18)$$

$$\alpha = \left(\frac{s_1^2 + r^2}{2} \right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{s_1^2 - r^2}{2} \right)^{1/2}$$

где α, β — действительные положительные числа.

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из крайних условий (13), причем второе крайнее условие соответствует при $\bar{s} = \bar{s}_0/2$ следующему выражению:

$$m_1 \frac{d^4 W''''}{d\bar{s}^4} + \alpha \frac{d^2 W''''}{d\bar{s}^2} + b W'''' + C = 0$$

$$m_1 = -\frac{m}{\nu}, \quad \alpha = \frac{-\bar{T}_{22}^H}{\nu}, \quad b = \frac{\nu^2 - 1}{\nu}, \quad C = \frac{(1-\nu)E_2^0 - \varphi}{\nu}$$

Соотношения электроупругости (9) получены для тонких оболочек произвольной формы. В случае цилиндрической оболочки они могут быть упрощены, при этом решения задачи в виде (18) определяется приведенными в [10] функциями А. И. Крылова.

TO THE PROBLEM OF CALCULATING OF ELECTROSTRICTIVE EFFECT IN PRESTRESSED FERROELECTRIC SHELLS

V. M. BOGOMOLNY

ՊԼԵՆԱՐԱՆ ԸՆԴՈՒՄՈՒԹՅԱՆՈՒ ՍԵՆՏԵՏԱԿԵՐՈՒՄԻՆԿԱԿԱՆ ԹՈՒՂԱԿՆԵՐԻ ԷԼԵՏՐՈՍՏՐԻԿՏԻՎԵՆԵՐ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՆՎԱԲՈՂ

Վ. Մ. ԲՈԳՈՄՈՆԻ

Ա թ փ ո փ ո ս ւ

Որոշված են սեղենատանկերամիկայից պատրաստված պլանային էլեկտրա-ատանկական թաղանթի նաշվարկման խնդրի անալիտիկ լուծումը և էլեկտրա-ատանկականության առնչությունները: Քաղանթը ամրանալուցիված է մետաղական շերտով և դանդում է շաստատուն էլեկտրական դաշտի ազդեցության տակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. М. ИЛ, 1952. 447 с.
2. Leung K. M., Liu K. T., Kyonba J. Large electrostrictive effect in Ba:PZT and its applications.—Ferroelectrics, 1980, 27, № 1-4, p. 41-43.

3. Лли А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 671 с.
4. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // В сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», Киев, 1975, в. 15, с. 90—99.
5. Пьезокерамические преобразователи. Собр. под ред. Пугачева С. П. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
6. Drumheller D. S., Kalnins A. Dynamic shell theory for ferroelectric ceramics. JASA, 1970, 47, № 5, p. 1343—1353.
7. Ченский Г. В. О микродинамной изотропии сегнетоэлектриков с фазовым переходом первого рода // ФТТ, 1970, т. 12, № 2, с. 586—591.
8. Борштейн И. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения // Прикл. механика, 1976, т. 12, № 2, с. 26—39.
9. Арменакас А. Е. Влияние начальных напряжений на колебания свободно опертых цилиндрических оболочек // Ракетн. техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 9, с. 115—122.
10. Власов В. З., Лемтюрк Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.

Московский технологический институт

Поступила в редакцию
17 IV 1987

УДК 532.516

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

БАБАДЖАՅԱՆ Դ Ա., ՄՈՒՇԱԿԱՅԱՆ Բ. Զ.

Рассматривается развитие стационарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями, одна из которых совершает плоско-параллельное поступательное движение с заданной скоростью U_1 . Задачи о динамическом взаимодействии потока жидкости или газа с подвижными поверхностями имеют многие практические приложения в современной технике.

Теоретические исследования этих задач имеют специфические особенности [1, 2, 3].

В большинстве этих исследований, кроме того, что за основу исходных уравнений принимаются линеаризованные уравнения Навье-Стокса, принимается также, что давление в поперечном сечении канала постоянно, которое, по нашему мнению, несколько искажает истинную картину движения.

В работе делается попытка решить задачу, сохранив в правой части второго уравнения движения (уравнения Навье-Стокса) член $\rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, то есть учесть изменения давления в поперечном сечении плоского канала. Тогда, исходные уравнения движения жидкости можно взять в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

В этой системе уравнений U есть средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, v_x и v_y — соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY , p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Если начало оси OY принимать на средней линии между плоскостями, то граничные условия задачи в развитии течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x &= U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y=h \quad x>0, \quad v_x &= U_1, \quad v_y = 0 \\ \text{при } y=-h \quad x>0, \quad v_x &= 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p_H — значение давления в начале трубы, h — полурасстояние между плоскостями.

Вводя новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_1 - U}{U}, \quad v = \frac{v_2}{U}, \quad P = \frac{p - p_0}{\rho U^2} \quad (1)$$

система уравнений (1) и граничные условия (2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

при $z=0$ $u=0$, $P=0$

при $z=1$ $z > 0$, $u = \frac{U_1 - U}{U}$, $v=0$ (5)

при $z=-1$ $z > 0$, $u = -1$, $v=0$

Уравнения (4) при граничных условиях (5) решаем с помощью операционного исчисления, применяя к уравнениям (4) и граничным условиям (5) функциональное преобразование Лапласа, получим:

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} - (\lambda + 1) \bar{u} = -\lambda \bar{P}$$

$$\frac{d\bar{P}}{d\eta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{v}}{d\eta^2}, \quad \lambda \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\eta} = 0 \quad (6)$$

при $z=1$ $z > 0$ $\bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{\lambda}$, $\bar{v} = 0$

при $z=-1$ $z > 0$ $\bar{u} = -\frac{1}{\lambda}$, $\bar{v} = 0$ (7)

Здесь λ — параметр преобразования Лапласа. Из системы уравнений (6) для \bar{v} получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{d\eta^2} + (\lambda^2 - \lambda \text{Re}) \frac{d\bar{v}}{d\eta} = 0 \quad (8)$$

Решая уравнение (8) и учитывая граничные условия (7), для \bar{v} будем иметь

$$\bar{v} = \frac{a+1}{2} \frac{\sin \beta \eta - \eta \cos \beta}{\beta \cos \beta - \sin \beta} + \frac{a-1}{2} \frac{\cos \beta \eta - \cos \beta}{\beta \sin \beta} \quad (9)$$

Из системы уравнений (6) для \bar{u} и \bar{P} , соответственно, получим:

$$\bar{u} = \frac{a+1}{2} \frac{\sin \beta \eta - \beta \cos \beta \eta}{\lambda (\beta \cos \beta - \sin \beta)} + \frac{a-1}{2} \frac{\sin \beta \eta}{\lambda \sin \beta} \quad (10)$$

$$\bar{P} = \frac{a+1}{2} \frac{\beta \cos \beta \eta - \text{Re} \sin \beta \eta}{\text{Re} (\beta \cos \beta - \sin \beta)} + \frac{a-1}{2} \frac{\sin \beta \eta}{\text{Re} \sin \beta} \quad (11)$$

Здесь $a = \frac{U - U_1}{U}$, $\beta = \lambda^2 - \lambda \text{Re}$

Совершив обратные преобразования Лапласа и переходя к старым переменным, для v_y , v_x и p получим

$$v_y = (2U - U_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2i_n - \text{Re}} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \beta_n y/h}{\sin \beta_n} \right) \exp(i_n x/h) + U_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i_k - \text{Re}} [(-1)^k \cos \pi k y/h - 1] \exp(i_k x/h) \quad (12)$$

$$v_x = \frac{3}{2} \left[U - \frac{y^2}{2h^2} (U_1 - 2U) \right] + \frac{U_1}{2} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right) + (2U - U_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i_n (2i_n - \text{Re})} \times \left(\frac{\cos \beta_n y/h}{\cos \beta_n} - 1 \right) \exp(i_n x/h) + U_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin \pi k y/h}{i_k (2i_k - \text{Re})} \exp(i_k x/h) \quad (13)$$

$$p = p_0 - \frac{3\mu U}{2\text{Re}} (2U - U_1) \frac{x}{h} - \frac{\mu U}{10} (2U - U_1) - \frac{\mu U U_1}{\text{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k \sin \beta_k y/h}{2i_k - \text{Re}} \exp(i_k x/h) - \frac{(2U - U_1) \mu U}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \cos \beta_n y/h - \text{Re} \sin \beta_n}{i_n (2i_n - \text{Re}) \sin \beta_n} \exp(i_n x/h) \quad (14)$$

В формулах (12), (13) и (14) i_n и i_k — соответственно, простые отрицательные корни уравнений $\text{tg} \sqrt{i_n^2 - i_n \text{Re}} = \sqrt{i_n^2 - i_n \text{Re}}$, $i_n^2 - \text{Re} i_n - \pi^2 h^2 = 0$.

Найдем значение силы трения.

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{3\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{U_1}{2U} \right) y + \frac{\mu U_1}{2h} + \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i_n}{h(2i_n - \text{Re})} y - \frac{\sin \beta_n y/h}{\sin \beta_n} \right| \exp(i_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{i_k}{2i_k - \text{Re}} - (-1)^k \cos \pi k y/h \right| \exp(i_k x/h) \quad (15)$$

Значения трения на стенках будут

$$\tau^+ = -\frac{3\mu U}{h} + \frac{2\mu U_1}{h} + \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i_n}{2i_n - \text{Re}} - 1 \right) \exp(i_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i_k}{2i_k - \text{Re}} - 1 \right) \exp(i_k x/h) \quad (16)$$

$$\tau^- = \frac{3\mu U}{h} - \frac{\mu U_1}{h} - \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i_n}{2i_n - \text{Re}} - 1 \right) \exp(i_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i_k}{2i_k - \text{Re}} - 1 \right) \exp(i_k x/h) \quad (17)$$

На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величины будут

$$v_{y\infty} = 0, \quad v_{x\infty} = \frac{3}{2} \left[U + \frac{y^2}{2h^2} (U_1 - 2U) \right] + \frac{U_1}{2} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right)$$

$$p_{x\infty} = p_{II} - \frac{3\mu U}{2\text{Re}h} (2U - U_1)x - \frac{\rho U}{10} (2U - U_1)$$

$$z_{x\infty} = -\frac{3\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{U_1}{2U} \right) y + \frac{\mu U_1}{2h}$$
(18)

Сила трения на стенках для стабилизированного участка примет следующие значения:

$$\tau_1^* = \frac{\mu}{h} (2U_1 - 3U), \quad \tau_2^* = \frac{\mu}{h} (3U - U_1)$$
(19)

Анализ полученных результатов:

1. Формулы (12), (13), (14) и (15) дают решение поставленной задачи в уточненном виде по сравнению с работой [2], так как здесь давление принимается переменным по поперечному направлению канала (согласно второму уравнению системы (1)). Как видно из этих выражений, уточненные результаты искомых функций отличаются от результатов, полученных в работе [2].

2. Для стабилизированного участка ($x \rightarrow \infty$) результаты решений, полученных в этой работе, полностью совпадают с результатами работы [2], то есть на этом участке изменения законов скоростей, давления и силы трения не зависят от того, принимается ли давление переменным в поперечном направлении канала или нет.

3. Как показывают полученные формулы и соответствующие вычисления, сила трения в начальном участке больше, чем в стабилизированном участке.

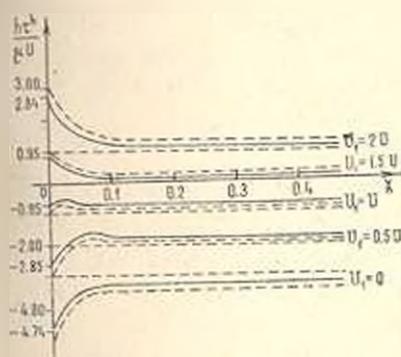
4. Из полученных формул видно, что изменения искомых величин для всего движения и особенно для стабилизированного участка существенно зависят от скоростей подвижной стенки (U_1) и основного потока (U). Эта особенность явно проявляется при вычислении трения на стенках. Как показывают полученные формулы, выбором скоростей подвижной стенки и основного потока можно управлять значением трения на стенках.

Законы изменения трения на стенках показаны на фиг. 1, 2. Графики построены при следующих данных: $\text{Re} = 10$, $U = 0,1$ м/сек, $U_1 = 0$; $U_1 = 0,5U$; $U_1 = U$; $U_1 = 1,5U$.

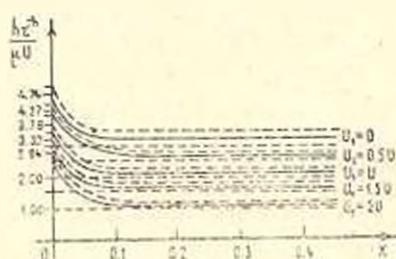
Из фигур видно, что в случае $U_1 = 0$ τ_1^* и τ_2^* равны по абсолютным значениям, противоположны по направлениям, при увеличении x уменьшаются и в пределе, когда $x \rightarrow \infty$ (в стабилизированном участке) принимают постоянные значения.

Вычисления показывают (фиг. 1, 2), что при увеличении скорости верхней стенки U_1 τ_1^* и τ_2^* уменьшаются. При этом в диапазоне $0 < U_1 < 1,5U$ τ_1^* отрицательно. При возрастании x , τ_1^* уменьшается по абсолютному значению и принимает свое минимальное значение для

определенного x , затем увеличивается и вдали от начального сечения принимает постоянные значения, различные для разных значений U_1 . Из фигур видно, что во всех случаях трение на стенках уменьшается при увеличении x , то есть трение в стабилизированном участке меньше, чем в начальном участке канала. Трение на нижней неподвижной стенке монотонно убывает как при возрастании U_1 , так и при увеличении x , оставаясь всегда положительным.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фигурах пунктирными кривыми показаны изменения τ^h и τ^h в случае, когда $dp/dy = 0$. Как видно, значения τ^h и τ^h в этом случае больше значений этих величин, когда $dp/dy \neq 0$ (то есть и в нашем случае) Все остальные вышеуказанные закономерности в обоих предположениях остаются в силе.

Следовательно, уточненное решение задачи качественно не отличается от предыдущих, имеются только количественные поправки.

Из фигур видно также, что для всех значений $U_1 \neq 0$ сила трения на нижней неподвижной стенке больше силы трения на верхней подвижной стенке.

Из полученных формул и фигур выявляются все специфические особенности данного движения.

Результаты данной работы качественно подтверждают результаты и выводы работы [1].

ABOUT ONE EXACT SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATION

G. A. BABADJANIAN, R. G. MNATSAKIAN

ՆԱԿԻՆ-ՍՏՈՔԻՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԵՐԿ ԼՇԳՐԻՏ
(ԹԻՒՐՈՅ, ՍՍՍՐԿ)

Գ. Հ. ԲԱԲԱԺՅԱՆԻԱՆ, Թ. Գ. ՄՆԱՏՅԱԿՅԱՆԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Ուսումնասիրվում է մաճուցիկ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար, իզոթերմիկ շարժման դարձացումը դուրսիկո հարթությանների միջև, որոնցից մեկը կատարում է հարթ-դուրսիկո համընթաց շարժում՝ արված արագությանը

Գանձում են արագությունները, ձնշման ու շփման ուժի փոփոխման օրենքները հարթ խողովակի երկարությամբ:

Կառուցված են հարթ խողովակի պատերի վրա շփման ուժի փոփոխման պրաֆիկները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Антешева И. А., Жубрин С. В., Мотулович В. П. Анализ течения в канале движущейся стенкой—ИФЖ, 1985, № 4, с. 592—597.
2. Бабаджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, № 3, с. 49—53.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1951, 519 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
3.11.1988