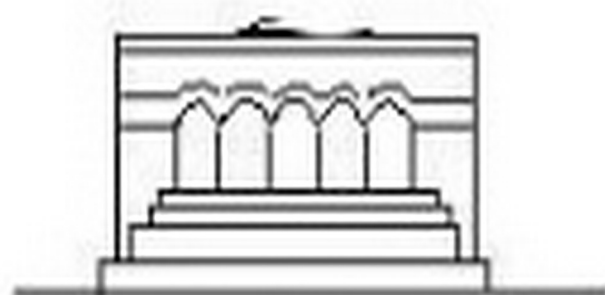


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1988

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

ГЛУНИ В. Ц., КАЗАРЯН Р. С.

Вопрос проектирования цилиндрических оболочек, работающих в жидкости, предполагает совместное решение уравнений теории оболочек и гидромеханики. Требование создания конструкций минимального веса при заданных ограничениях, вытекающих из условий эксплуатации и возможностей технологической реализации, приводит к необходимости решения оптимизационных задач теории гидроупругости тонких тел. Изготовление тонкостенных конструкций из новых композиционных материалов дает возможность свободного выбора параметров проектирования с целью создания конструкций минимального веса.

1. Пусть замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R , общей длины L , толщины h погружена в жидкость на достаточно большую глубину. Оболочка состоит из отсеков длины l , шарнирно опирающихся по торцам на жесткие шпандары. Ниже рассматривается задача проектирования отсека минимального веса из композиционного материала, обладающего заданной первой частотой собственных колебаний.

Система уравнений возмущенного состояния оболочки и жидкости, соответствующие граничные условия представляются в виде [1,2]

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{11}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ + \frac{1}{2} R q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$v=0, \quad T_{11}=0, \quad w=0, \quad M_{11}=0 \quad \text{при } x=0, \quad x=l \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=l \quad (1.4)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — прогиб, $\Phi(x, y, t)$ — функция усилий, $\varphi(r, x, y, t)$ — потенциальная функция возмущенного движения жидкости, r, x, y — соответственно, координаты по нормали, образующей и в окружном направлении, t — время, T_{ik} — усилия, причем

$$T_{21} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

M_{ik} — моменты, причем

$$M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{22} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{12} = -2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ρ — плотность материала оболочки, ρ_0 — плотность жидкости,

q — интенсивность жидкости, зависящая от глубины погружения оболочки.

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{C_{33}}$$

C_{ik} , D_{ik} — жесткости пакета оболочки из композиционного материала. Предполагается, что пакет оболочки по толщине составлен из чередующихся монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных под углами $\pm \pi$ к оси оболочки. Тогда

$$C_{ik} = B_{ik}h, \quad D_{ik} = B_{ik}h^3/12$$

Предположим

$$\Phi = \Phi_{mn}(t) \sin i_m x \cos i_n y, \quad w = w_{mn}(t) \sin i_m x \cos i_n y, \quad \varphi = \varphi_{mn}(r, t) \sin i_m x \cos i_n y \quad (1.5)$$

тождественно удовлетворяются граничные условия (1.2), (1.4) и условие замкнутости.

Здесь $i_m = m\pi/l$, $i_n = n/R$, m — число полуволн по образующей, n — число волн в окружном направлении.

В силу (1.5), из третьего уравнения (1.1) и условий (1.3), для определения $\varphi_{mn}(r, t)$ получается

$$\frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial r} - \alpha_{mn}^2 \varphi_{mn} = 0 \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_{mn} = 0 \quad (1.7)$$

где $\alpha_{mn}^2 = i_m^2 + i_n^2$.

Решением задачи (1.6), (1.7) является

$$\varphi_{mn} = -\frac{K_0(x_{mn}r)}{x_{mn}K_1(x_{mn}R)} \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} \quad (1.8)$$

где K_0 , K_1 — модифицированные функции Бесселя второго рода.

Из первого уравнения (1.1), для определения $\Phi_{mn}(t)$ получается

$$\Phi_{mn} = \frac{1}{R} \left[a_{11} i_m^4 + (a_{00} - 2a_{12}) i_m^2 n^2 + a_{22} n^4 \right]^{-1} \quad (1.9)$$

Наконец, из второго уравнения системы (1.1), в силу (1.5), (1.8), (1.9), получается уравнение поперечных колебаний отсека оболочки относительно $w_{mn}(t)$

$$(1 + M_{mn}) \frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 w_{mn} = 0 \quad (1.10)$$

Здесь Ω_{mn} — частота собственных колебаний оболочки, нагруженной внешним всесторонним давлением интенсивности q

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} (1 - q/q_{mn}^*)^{1/2} \quad (1.11)$$

$$\text{где } \omega_{mn} = (K_{mn}/\rho h)^{1/2}, \quad q_{mn}^* = K_{mn}/R(0,5i_m^2 + n^2) \quad (1.12)$$

соответственно, частота собственных колебаний незагруженной оболочки и собственные значения задачи устойчивости оболочки, находящейся под действием всестороннего давления,

$$K_{mn} = D_{11} i_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) i_m^2 n^2 + D_{22} n^4 + \\ + \frac{1}{R^2} [a_{11} i_m^4 + (a_{00} - 2a_{12}) i_m^2 n^2 + a_{22} n^4]^{-1} \quad (1.13)$$

$$M_{mn} = \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{K_0(z_{mn} R)}{a_{mn} K_1(z_{mn} R)} \quad (1.14)$$

—присоединенная масса жидкости.

Из (1.10) для частот собственных колебаний оболочки, погруженной в жидкость, получается

$$\bar{\Omega}_{mn} = \Omega_{mn} (1 + M_{mn})^{1/2} \quad (1.15)$$

2. Представляет интерес определение толщины оболочки, обеспечивающей заданную частоту колебаний при определенной глубине погружения.

Из уравнения (1.15), в силу (1.11) — (1.14), для определения h при заданных $\bar{\Omega}_{mn}$ и q получается следующее уравнение для определения $h = h(m, n, q, \bar{\Omega}_{mn})$:

$$h^2 - B_{mn} h - C_{mn} = 0 \quad (2.1)$$

$$B_{mn} = \frac{\bar{\Omega}_{mn}^2 - \frac{B_{11}^0}{2R^2} [a_{11} m^4 + (\bar{a}_{00} - 2\bar{a}_{12}) m^2 n^2 + a_{22} n^4]^{-1} m^4}{\frac{B_{11}^0}{12\rho R^2} [\bar{D}_{11} m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) m^2 n^2 + \bar{D}_{22} n^4]} \\ C_{mn} = \frac{\frac{\rho_0 R}{\rho h} \bar{\Omega}_{mn}^2 k_{mn} + (0,5m^2 + n^2) \frac{qL^2}{\rho R}}{\frac{B_{11}^0}{12\rho R^2} [\bar{D}_{11} m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) m^2 n^2 + \bar{D}_{22} n^4]} \quad (2.2)$$

где введены обозначения

$$\chi = \frac{R}{l}, \quad \bar{a} = \frac{l}{\pi R} n, \quad \bar{D}_{ik} = \frac{12}{B_{11}^0 \bar{a}^2} D_{ik}, \quad \bar{a}_{ik} = B_{11}^0 h a_{ik}$$

$$h_{m,n} = \frac{K_0(\chi \sqrt{m^2 + n^2})}{\sqrt{m^2 + n^2} K_1(\chi \sqrt{m^2 + n^2})}$$

Для практических целей представляет интерес нахождение толщины h , обеспечивающей при заданном q значение первой частоты $\bar{\Omega}$. Очевидно, что искомую толщину и соответствующие m_0 , n_0 необходимо определить из условий

$$h_0 = \max_{m, n} h(m, n, q, \bar{\Omega}) \quad (2.3)$$

Таблица 1

φ	1 МПа	2 МПа	5 МПа	10 МПа	20 МПа
0 Гц	$h^* = 3.31$ $n_0 = 5 \quad \varphi^* = 90^\circ$	4,38 5 90	6,25 4 65	8,29 4 65	10,78 4 65
	$h^* = 3.59$ $n_0 = 5 \quad \varphi^* = 0^\circ$	4,78 5 0	6,80 4 0	9,10 4 0	11,90 4 0
100 Гц	3,54 5 90	4,40 4 80	6,43 4 65	8,42 4 65	10,87 4 65
	3,85 5 0	4,95 4 0	7,01 4 0	9,25 4 0	12,00 4 0
200 Гц	4,31 4 65	5,22 4 65	6,95 4 65	8,77 4 65	11,11 4 65
	4,66 4 0	5,68 4 0	7,61 4 0	9,66 4 0	12,29 4 0
300 Гц	5,71 4 65	6,34 4 65	7,73 4 65	9,34 4 65	11,54 4 65
	6,25 4 0	6,95 4 0	8,51 4 0	10,32 4 0	13,01 3 0
400 Гц	7,15 4 55	7,60 4 55	8,72 4 55	10,17 4 50	12,29 3 45
	8,64 3 0	9,00 3 0	10,32 3 0	11,94 3 0	14,37 3 0
500 Гц	9,27 3 40	9,56 3 40	10,47 3 40	11,71 3 40	13,68 3 40
	11,38 3 0	11,71 3 0	12,61 3 0	13,89 3 0	15,83 3 0

В случае оболочки из композиционного материала становится возможным постановка оптимизационной задачи. При заданных q , $\bar{\Omega}$ найти такой угол φ^* , чтобы h_0 принимало наименьшее значение, то есть найти

$$h^* = \min_{\varphi} h_0 = \min_{\varphi} \max_{m, n} h(m, n, \varphi) \quad (2.4)$$

при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

В качестве примера рассматривается отсек оболочки, изготовленный из материала СВМ 5:1. Пусть $\pi R/l = 0,5$, $R = 1,5$ м и окружающая оболочку среда-вода. В этом случае $\rho/\rho_0 = 1,89$.

С целью определения эффекта оптимизации вычислены также

$$h_* = \max_{\varphi} h_0 = \max_{\varphi} \max_{m, n} h(m, n, \varphi, \Omega, \pi)$$

и параметр h^*/h_* , показывающий степень физического совершенства рассматриваемого варианта конструкции.

В табл. 1 для различных уровней погружения оболочки и заданных частот собственных колебаний приведены значения h^* и h_* , а также значения n_0 , φ^* и φ_* , при которых они достигаются. Следует отметить, что при заданных геометрических параметрах $m_0 = 1$ для всех рассмотренных случаев. В табл. 2 при тех же данных приведены значения h^* и h_* без учета влияния присоединенной массы.

Результаты вычислений показывают:

а) оптимальным выбором угла укладки монослоев φ^* можно заметно (до 20%) уменьшить толщину оболочки, обеспечивающую дан-

Таблица 1

φ	1 МПа	2 МПа	5 МПа	10 МПа	20 МПа
100 Гц	$h^* = 3,36$ $n_0 = 5$ $\varphi^* = 90^\circ$	4,37 5 90	6,30 4 65	8,34 4 65	10,32 4 65
	$h_* = 3,65$ $n_0 = 5$ $\varphi_* = 0^\circ$	4,82 5 0	6,86 4 0	9,16 4 0	11,94 4 0
200 Гц	3,50 5 90	4,31 5 70	6,46 4 65	8,46 4 65	10,92 4 65
	3,82 5 0	4,97 5 0	7,97 4 0	9,31 4 0	12,17 4 0
300 Гц	3,73 5 90	4,72 4 70	6,72 4 65	8,68 4 65	11,09 4 65
	4,12 5 0	5,21 5 0	7,39 4 0	9,58 4 0	12,28 4 0
400 Гц	4,12 5 65	5,19 4 65	7,10 4 65	8,98 4 65	11,33 4 65
	4,54 5 0	5,72 4 0	7,85 4 0	9,95 4 0	12,57 4 0
500 Гц	4,89 5 65	5,85 4 65	7,59 4 65	9,36 4 65	11,67 4 60
	5,48 4 0	6,59 4 0	8,45 4 0	10,42 4 0	13,26 3 0

ный уровень частот собственных колебаний, при заданном уровне погружения;

б) с увеличением значения Ω влияние присоединенной массы существенно увеличивается, а при увеличении уровня погружения это влияние менее заметно;

в) наилучшие варианты укладки монослоев достигаются при $\varphi_* = 0^\circ$;

г) с увеличением Ω , q оптимальные значения углов укладки монослоев уменьшаются, уменьшается также число волн n_0 , при котором достигается низшая (первая) частота собственных колебаний.

Отметим, что в табл. 1, 2 при заданных Ω в верхних строчках приведены значения h^* в см, n_0 и наилучшего угла φ^* в градусах, а в нижних — значения h_* , n_0 и наилучшего угла φ_* .

В заключение укажем, что в настоящей работе определена та минимальная толщина и соответствующая оптимальная структура отсека оболочки, которая обеспечивает данную частоту собственных колебаний при определенном значении глубины погружения. Вопросы прочности оболочки здесь не затрагивались. При больших уровнях погружения ограничения на прочность могут быть активными и следует провести перерасчет конструкции. Однако это тема отдельной статьи.

CALCULATION OF OPTIMAL CYLINDRICAL SHELLS FROM COMPOSITION MATERIAL IMMersed IN LIQUID

V. Ts. GNUNY, R. S. KAZARIAN

ՀԵՂՈՒՆԻՐՈՒՄ ԸՆԿՎՈՒԿԱԾ ԿՈՄՊՈԶԻԶԻՈՆ ՆՏՈՒԹՅՈՒ ՓՈՏՈՒՄԸ ՊԼԱՆԱՅԻՆ ԹՈՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐՈՒՄ

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆԻ, Բ. Ս. ԿԱԶԱՐԻԱՆ

Ա ճ փ ո թ ո ռ լ ը

Դիտարկված է հեղուկի մեջ ընկղմված կոմպոզիցիոն նյութից զրանտիկն թաղանթի օպտիմալ նախագծման խնդիրը: Հիդրոստատիկական կոնտակտային խնդրի լուծման հիման վրա որոշված է համակողմանի արտարին ճնշմամբ բևեռավորված թաղանթի սեփական սիստեմային հաճախականությունը: Տրված առաջին հաճախականության և ընկղմման խորության համար գտնված է փոքրագույն քաշի թաղանթը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахбаризумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек, М.: Наука, 1971. 116 с.
2. Бедубекян Э. В., Гунни В. П. Оптимальные значения колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек, Механика полимеров, 1976, № 5, с. 871—874.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.XII.1987

УДК 539.3.534.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГНИЕ ВОЛНЫ В КЕРАМИКЕ

АВЕТИСЯН А. С., БЕЛУБЕКЯН М. В.

В последние годы существенно расширилась область исследования, учитывающая взаимосвязь механических и электромагнитных полей. Естественно, пользоваться линейной теорией для описания взаимодействия этих полей в реальных средах можно не во всех случаях.

Важное место в нелинейной электроупругости занимают вопросы распространения волн в твердых нелинейных средах. Основы нелинейной теории электроупругости изложены в работах [1—3]. Нелинейные эффекты в твердых телах более многообразны, поскольку в них могут существовать несколько типов волн. Качественно новые нелинейные эффекты можно наблюдать, если от изотропных диэлектриков перейти к случаю анизотропных кристаллов, обладающих пьезоэффектом или электрострикцией.

Нелинейные поверхностные волны в упругих средах мало изучены. Распространение нелинейных волн Рэлея в изотропной среде изучено в [4, 5]. Для анизотропных сред аналогичное исследование проведено в [5, 6].

1. В настоящей работе ограничимся изучением влияния на поверхностные волны конечной амплитуды, распространяющиеся в поляризованной керамике, электрострикционного эффекта (квадратичная нелинейность). Керамика обладает более высокой симметрией по сравнению с симметрией отдельных кристаллов в силу неупорядоченного распределения кристаллических осей в пространстве. В связи с этим, керамика уже не имеет пьезоэлектрического эффекта и все типы колебаний в ней связаны с электрострикционным эффектом.

Следуя [7], из выражения свободной энергии получены материальные соотношения для механических напряжений σ_{ij} и электрической индукции D_i в зависимости от деформации u_{ij} и напряженности электрического поля E_i :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{11} + c_{12}(u_{22} + u_{33}) - f_{11}E_1^2 - f_{12}(E_2^2 + E_3^2), \quad \sigma_{22} = c_{12}(u_{11} + u_{33}) + \\ &+ c_{11}u_{22} - f_{12}E_1^2 - f_{11}(E_2^2 + E_3^2), \quad \sigma_{33} = c_{12}(u_{11} + u_{22}) + c_{11}u_{33} - f_{12}E_1^2 - f_{11}(E_2^2 + E_3^2) \\ \sigma_{23} &= 2c_{44}u_{23} - (f_{11} - f_{12})E_1E_3, \\ \sigma_{31} &= 2c_{44}u_{31} - (f_{11} - f_{12})E_1E_2, \quad \sigma_{12} = 2c_{44}u_{12} - (f_{11} - f_{12})E_2E_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + 0,5 r_{11} E_1^2 + 2 \{ f_{11} (E_1 u_{11} + E_2 u_{12} + E_3 u_{13}) + \\
&\quad + f_{12} [E_2 (u_{22} + u_{33}) - (E_2 u_{12} + E_3 u_{13})] \} \\
D_2 &= \varepsilon_{21} E_2 + 0,5 r_{21} E_2^2 + 2 \{ f_{21} (E_2 u_{22} + E_1 u_{21} + E_3 u_{23}) + \\
&\quad + f_{22} [E_1 (u_{11} + u_{33}) - (E_1 u_{21} + E_3 u_{23})] \} \\
D_3 &= \varepsilon_{31} E_3 + 0,5 r_{31} E_3^2 + 2 \{ f_{31} (E_3 u_{33} + E_2 u_{32} + E_1 u_{31}) + \\
&\quad + f_{32} [E_3 (u_{11} + u_{22}) - (E_1 u_{31} + E_2 u_{32})] \}
\end{aligned} \quad (1.2)$$

где c_{ik} — модули упругости второго порядка, f_{ij} — коэффициенты электрострикции, ε_{11} и r_{11} — линейная и нелинейная диэлектрические проницаемости. Компоненты деформации u_{ik} в тензорной форме определяются обычным соотношением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

При поляризации керамики по напряжению $o x_3$ напряженность электрического поля E_3 будет суммой из E_0 , связанной с остаточной поляризацией, и переменной части E_J . Тогда

$$E_J = \delta_2 F_0 + E_J \quad (1.4)$$

что приводит к приобретению керамикой пьезоэлектрического эффекта с модулями

$$e_{13} = (f_{11} - f_{12}) E_0, \quad e_{31} = 2 f_{12} E_0, \quad e_{33} = 2 f_{31} E_0 \quad (1.5)$$

Материальные соотношения (1.1), (1.2) преобразуются к

$$\begin{aligned}
D_{11} &= c_{11} u_{11} + c_{12} (u_{22} + u_{33}) - e_{31} E_3 - N_1(E_J), \quad D_{22} = c_{12} (u_{11} + u_{33}) + c_{13} u_{22} - \\
&\quad - e_{31} E_3 - N_2(E_J), \quad D_{33} = c_{12} (u_{11} + u_{22}) + c_{13} u_{33} + e_{33} E_3 - N_3(E_J) \\
D_{21} &= 2 c_{41} u_{21} - e_{15} E_1 - N_4(E_J), \quad D_{12} = 2 c_{41} u_{12} - N_5(E_J) \\
D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + 2 e_{15} u_{31} + N_4(u_{ij}, E_J), \quad D_2 = \varepsilon_{11} E_2 + 2 e_{15} u_{32} + N_5(u_{ij}, E_J) \\
D_3 &= \varepsilon_{31}^* E_3 + e_{31} (u_{11} + u_{22}) + e_{33} u_{33} + N_6(u_{ij}, E_J),
\end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + r_{11} E_0$, $N_k(\dots)$ — соответствующие нелинейные слагаемые в соотношениях (1.1) и (1.2).

2. Рассмотрим распространение поверхностных электроупругих волн на границе полупространства $\{-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty\}$ из поляризованной керамики. Ось поляризации совпадает с координатной осью $o x_3$. При изучении влияния электрострикционного эффекта на распространение поверхностных волн будем исходить из линейных уравнений электроупругости

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} = 0 \quad (2.1)$$

граничных условий на свободной от механических нагрузок, металлизированной границы $x_2=0$

$$\varepsilon_{2j}=0, \quad j=1; 2; 3, \quad \Phi=0 \quad (2.2)$$

здесь Φ —электрический потенциал, введение которого позволяет последнее уравнение из (2.1) записать следующим образом:

$$E_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

Напряжениями электродинамического происхождения

$$T_{ij} = \frac{1}{2} [E_i D_j + E_j D_i - \varepsilon_{ij}(E_k D_k)]$$

в граничных условиях мы пренебрегаем.

В двумерной электроупругой задаче $\partial_i \partial_i x_j = 0$, имеем $F_3 = 0$, $u_{22} = 0$. При этом уравнения электроупругости (2.1) и граничные условия (2.2) с учетом материальных соотношений (1.6) и (1.7) принимают вид:

$$L_1(u, v) = c_{11}u_{xx} + (c_{12} + c_{13})v_{xx} + c_{14}u_{yy} - \rho u_{tt} = F_1(\Phi) \\ L_2(u, v) = c_{14}v_{xx} + (c_{12} + c_{14})u_{xx} + c_{11}v_{yy} - \rho v_{tt} = F_2(\Phi) \quad (2.4)$$

$$L_3(w, \Phi) = c_{41}(w_{xx} + w_{yy}) + e_{13}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - \rho w_{tt} = 0 \quad (2.5)$$

$$L_4(w, \Phi) = e_{13}(w_{xx} + w_{yy}) - \varepsilon_{11}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) = F_3(\Phi, u, v)$$

$$c_{44}(u_v + v_v) = (f_{11} - f_{12})\Phi_x \Phi_y, \quad c_{12}u_x + c_{11}v_y = f_{11}\Phi_y^2 + f_{12}\Phi_x^2 \quad (2.6)$$

$$c_{34}w_y + e_{13}\Phi_y = 0, \quad \Phi = 0 \quad (2.7)$$

Здесь и в дальнейшем для удобства, у искоемых величин будем употреблять нижние индексы x и y , обозначающие производные по x_1 и x_2 соответственно, а также вместо компонент перемещений u_1, u_2, u_3 будем пользоваться обозначениями u, v, w .

В уравнениях (2.4) и (2.5) введены обозначения

$$F_1(\Phi) = (f_{11}\Phi_x^2 + f_{12}\Phi_y^2)_x + (f_{11} - f_{12})(\Phi_x \Phi_y)_y$$

$$F_2(\Phi) = (f_{11} - f_{12})(\Phi_x \Phi_y)_x + (f_{11}\Phi_x^2 + f_{12}\Phi_y^2)_y \quad (2.8)$$

$$F_3(\Phi) = [2\{f_{11}(\Phi_x u_x + \Phi_y(u_y + u_x)) + f_{12}(\Phi_x v_y - \Phi_y(u_y + u_x))\} - \\ - 0,5r_{11}\Phi_x^2]_x + \{2\{f_{11}(\Phi_y v_y + \Phi_x(u_y + v_x)) + \\ + f_{12}(\Phi_y u_x + \Phi_x u_y - \Phi_x(u_y + v_x))\} - 0,5r_{11}\Phi_y^2\}_y \quad (2.9)$$

Наличие в уравнениях (2.4) и (2.5) нелинейных величин $F_{1,2}(\Phi)$, $F_3(u, v, \Phi)$ обусловлено учетом электрострикционного эффекта и нелинейной диэлектрической проницаемости.

Полученные уравнения (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.6), (2.7) и условиями излучения в бесконечности $\lim_{y \rightarrow \infty} f_i(x, y, t) = 0$ описывают распространение поверхностных электроупругих волн.

3. Если среда является слабо нелинейной, то амплитуды волн будут изменяться на малую величину при прохождении волной расстояния порядка длины волны, то есть амплитуды волн будут медленно изменяющимися функциями координат и времени. Так как волна распространяется по направлению оси ox , то амплитуды будут функциями величин $\xi = ex$ и $\tau = et$. Здесь ϵ — малый физический параметр, которым может быть мера изменения (понижения) первичного сигнала.

Упругие перемещения u , v , w и электрический потенциал Φ представим в виде рядов по малому параметру

$$f(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m f_m(x, y, t, \xi, \tau) \quad (3.1)$$

Подставляя эти представления в уравнения (2.4), (2.5) и в граничные условия (2.6), (2.7), и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , находим:

а) для ϵ^0 :

$$L_k(u_0, v_0) = 0, \quad k=1; 2 \quad (3.2)$$

$$L_j(w_0, \Phi_0) = 0, \quad j=1; 2 \quad (3.3)$$

$$u_{0,y} + v_{0,y} = 0, \quad c_{11}u_{0,y} + c_{12}v_{0,y} = 0 \quad (3.4)$$

$$c_{14}w_{0,y} + e_{13}\Phi_{0,y} = 0, \quad \Phi_0 = 0 \quad (3.5)$$

Очевидно, что соотношения (3.2) и (3.4) определяют волны Рэлея, а соотношения (3.3) и (3.5) — волны Гуляева-Блюштейна при металлизации границ полупространства. Исходя из нелинейности решаемой задачи (амплитуды — медленно меняющиеся функции от ξ и τ), решения первого приближения представим в виде

$$w_0(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m}(y) W_{1m}(\xi, \tau) \cdot \exp(im\tau) + \text{к. с.}$$

$$\Phi_0(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m}(y) W_{2m}(\xi, \tau) \cdot \exp(im\tau) + \text{к. с.} \quad (3.6)$$

$$u_0(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{3m}(y) U_{0m}(\xi, \tau) \cdot \exp(im\tau) + \text{к. с.}$$

$$v_0(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{4m}(y) U_{0m}(\xi, \tau) \cdot \exp(im\tau) + \text{к. с.} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} g_{1m}(y) &= \exp(-m\gamma_1 y), \quad g_{2m}(y) = (e_{13}/c_{11}) \exp(-m\gamma_1 y) - \\ &- \exp(-m\gamma_2 y), \quad g_{3m}(y) = \exp(-m\gamma_1 y) - (\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} \exp(-m\gamma_2 y) \\ g_{4m}(y) &= -D_1 \exp(-m\gamma_1 y) - (\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} \exp(-m\gamma_2 y) \\ \gamma_{1m} &= \sqrt{1 - V_1^2/C_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - V_2^2/C_2^2}, \quad \gamma_3 = \sqrt{1 - V_3^2/C_3^2} \\ C_1^2 &= C_{10}^2(1 - \chi^2), \quad C_2^2 = c_{14}^2, \quad C_3^2 = c_{11}^2, \quad \chi^2 = e_{13}^2/(c_{11}c_{12}) \end{aligned}$$

$z=kx-\omega t$, V_R и V_B — скорости волн Рэлея и Гуляева-Блюштейна, соответственно, $W_{0,n}(\xi, \tau)$ и $U_{0,n}(\xi, \tau)$ — комплексные амплитуды, соответствующие генерирующим гармоникам.

Для следующих приближений получаются системы рекуррентных дифференциальных неоднородных уравнений относительно искомых функций $f_m(x, y, t, \xi, \tau)$. В правые части этих уравнений входят функции $f_{m-1}(x, y, t, \xi, \tau)$, определяемые из предыдущих приближений

$$L_1(u_m, v_m) = F_1(\Phi_{m-1}) - 2e_{11}u_{m-1, \tau\tau} - (e_{12} + e_{11})v_{m-1, \tau\tau} + 2e_{11}u_{m-1, \tau\tau} \quad (3.8)$$

$$L_2(u_m, v_m) = F_2(\Phi_{m-1}) - 2e_{11}v_{m-1, \tau\tau} - (e_{12} + e_{11})u_{m-1, \tau\tau} + 2e_{11}v_{m-1, \tau\tau}$$

$$L_3(w_m, \Phi_m) = -2e_{11}w_{m-1, \tau\tau} - 2e_{11}w_{m-1, \tau\tau} + 2e_{11}w_{m-1, \tau\tau} \quad (3.9)$$

$$L_4(w_m, \Phi_m) = F_4(\Phi_{m-1}; U_{m-1}; V_{m-1}) - 2e_{11}w_{m-1, \tau\tau} - 2e_{11}\Phi_{m-1, \tau\tau}$$

с неоднородными граничными условиями на поверхности

$$c_{11}(u_{m, y} + v_{m, y}) = (f_{11} - f_{12})\Phi_{m-1, y} + \Phi_{m-1, y} - c_{11}v_{m-1, y} - c_{11}u_{m, y} - c_{11}\Phi_{m, y} = \\ = f_{11}\Phi_{m-1, y}^2 - f_{12}\Phi_{m-1, x}^2 - c_{11}u_{m-1, y} \quad (3.10)$$

$$c_{11}w_{m, y} + c_{12}\Phi_{m, y} = 0, \quad \Phi_m = 0. \quad (3.11)$$

Полученные соотношения дают возможность исследовать генерацию высших гармоник продольной и поперечной электроупругой волны, обусловленной эффектом электрострикции. Генерация высших гармоник будет зависеть от существования в первом приближении плоского деформированного или антиплоского (электроупругого) деформированного состояния.

Если в первом приближении имеется только плоское поле деформации ($u_0 \neq 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$), то из (3.8) — (3.11) очевидно, что генерация антиплоского поля деформации невозможна. В этом случае будут генерироваться только высшие гармоники рэлеевской (неэлектроактивной) волны.

Пусть в первом приближении имеется только горизонтально поляризованная (SH) электроупругая волна: $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 \neq 0$, $\Phi_0 = 0$. Такая волна в полупространстве может существовать только благодаря предварительной поляризации (благодаря введенному пьезоэффекту) керамики.

Тогда $F_3(u_0, v_0, \Phi_0)$ намного упрощается

$$F_3(0, 0, \Phi_0) = F_3(\Phi_0) = -0,5e_{11}[(\Phi_{0, y}^2)_{,y} + (\Phi_{0, x}^2)_{,x}] \quad (3.12)$$

Упрощаются также уравнения и граничные условия (3.8) — (3.11) для второго приближения

$$L_k(u_k, v_k) = F_k(\Phi_0), \quad k=1, 2 \quad (3.13)$$

$$L_2(w_1, \Phi_1) = -2e_{11}w_{0, \tau\tau} - 2e_{11}\Phi_{0, \tau\tau} + 2e_{11}w_{0, \tau\tau} \quad (3.14)$$

$$L_4(w_1, \Phi_1) = F_4(\Phi_0) - 2e_{11}w_{0, \tau\tau} + 2e_{11}\Phi_{0, \tau\tau}$$

$$c_{11}(u_{1, y} + v_{1, y}) = (f_{11} - f_{12})\Phi_{0, y} + \Phi_{0, y} - c_{11}u_{1, y} + c_{11}v_{1, y} - f_{11}\Phi_{0, y}^2 - f_{12}\Phi_{0, x}^2 \quad (3.15a)$$

$$c_{12}\Phi_{1,2} + c_{13}\Phi_{1,3} = 0; \quad \Phi_1 = 0. \quad (3.156)$$

Уравнения (3.13), (3.14) и граничные условия (3.15) относительно искомых функций u_1 ; φ_1 ; ω_1 ; Φ_1 — линейные, неоднородные. Входящие в правые части нелинейные слагаемые $F_s(\Phi_0)$, $s=1; 2; 3$ из (2.8) и (3.12) с учетом (3.6) представляются в виде

$$F_s(\Phi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{0n}^{(1)}(y) W_{0n} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n}^{(2)}(y) W_{1n}^* W_{0n-1} \exp(i\tau) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n}^{(3)}(y) W_{0n}^* W_{2n-m} + \sum_{n=1}^{m-1} G_{2n}^{(4)}(y) W_{1n}^* W_{2n-m-n} \right\} \exp(im\tau) \quad (3.16)$$

где

$$G_{0n}^{(1)}(y) = 0; \quad G_{0n}^{(2)}(y) = 4k^2 n^2 f_{11} g_{2n}(y) g_{2n}(y) + 4f_{11} g_{2n}(y) g_{2n}(y) \\ G_{0n}^{(3)}(y) = -2r_{11} g_{2n}(y) g_{2n}(y); \quad G_{mn}^{(1)}(y) = ik_1^2 2k^2 mn(n+m) f_{11} g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) + \\ + 2m f_{11} g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) \cdot (f_{11} - f_{12}) [(n-m) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) - n g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' \\ G_{mn}^{(2)}(y) = 2k^2 n(m+n) [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' + 2f_{11} [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' - \\ - mk^2 (f_{11} - f_{12}) [(n+m) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) - n g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)] \\ G_{mn}^{(3)}(y) = -\frac{r_{11}}{2} \{ 2ik^2 nm(n+m) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) + 2f_{11} g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) \}' \\ f_{mn}^{(1)}(y) = -ik_1^2 k^2 f_{11} mn(m-n) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) + m f_{11} g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) + \\ + n(f_{11} - f_{12}) [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' \\ f_{mn}^{(2)}(y) = -k^2 n(m-n) f_{11} [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' + f_{11} [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]' - \\ - k^2 nm(f_{11} - f_{12}) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) \\ f_{mn}^{(3)}(y) = \frac{r_{11}}{2} [ik^2 mn(m-n) g_{2n}(y) g_{2n-m}(y) - [g_{2n}(y) g_{2n-m}(y)]']$$

Соотношения (3.16) приводят к выводу, что в результате действия одной лишь квадратичной нелинейности, вызывающей последовательность двухфонных процессов, также вносится вклад в волну основной частоты и появляются волны с частотами $0, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ и т. д. Вклад в каждую гармонику характеризуется соответствующими коэффициентами при $\exp(im\tau)$ в уравнениях и в граничных условиях.

Исходя из сказанного, представим решения уравнений (3.13) и (3.14) в виде

$$f_i(x, y, t, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{im}(y, t, \tau) \exp(im\tau) + \text{к. с.} \quad (3.17)$$

Подставляя соотношения (3.17) в уравнения (3.13), (3.14) и в граничные условия (3.15), приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках $\exp(im\tau)$, получим системы парных, линейных, неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими гранич-

ными условиями относительно функции $f_{1m}(y, \xi, \tau)$. Изменение плоского поля деформации описываются уравнениями (3.13) и граничными условиями (3.15а). Для антиплоского электроупругого поля из (3.14) и (3.15б) будем иметь (для каждого $m \geq 1$)

$$\frac{d^2 W_{1m}}{dy^2} - m^2 k^2 W_{1m} = A_0(\xi, \tau) \exp(-mky) - \frac{c_{11}}{c_{44}c_{11}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(\xi, \tau) \exp(-nky) \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1m}}{dy^2} - m^2 k^2 \Psi_{1m} = B_0(\xi, \tau) \exp(-mky) - \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(\xi, \tau) \exp(-nky)$$

с граничными условиями на поверхности $y=0$

$$c_{44} \frac{dW_{1m}}{dy} - \frac{c_{11}}{c_{11}} \frac{d\Psi_{1m}}{dy} = 0; \quad c_{12} W_{1m} - \Psi_{1m} = 0 \quad (3.19)$$

Здесь $\Psi_{1m} = c_{12} W_{1m} - c_{11} \Phi_{1m}$; $A_0(\xi, \tau) = -2ikm \left(W_{2m,1} + \frac{V_0^2}{C_1^2} W_{2m,2} \right)$

$B_0(\xi, \tau) = -2imkc_{12} W_{2m,1}$; $A_{mn}(\xi, \tau)$ — линейные комбинации произведений комплексных амплитуд W_{0n}^* , W_{0n} и $W_{0n} W_{0n-k}$, коэффициенты затухания a_{mn} — свертки величин nk , nk , $(n+m)k$, $(m-n)k$, $(n+m)k$ и $(m-n)k$.

Решая систему уравнений (3.18) и удовлетворяя граничным условиям (3.19), получим систему алгебраических уравнений, главным детерминантом которой будет дисперсионное уравнение линейных волн Гуляева-Блюстейна. Из условия существования нетривиальных решений получим укороченные уравнения первого приближения для комплексных амплитуд $W_{0m}(\xi, \tau)$

$$W_{0m,1} + \frac{V_0^2}{V_B^2} W_{0m,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ b_{mn} W_{0n}^* W_{0n-k} + d_{mn} W_{0n} W_{0n-k} \} \quad (3.20)$$

Здесь коэффициенты b_{mn} и d_{mn} ($d_{--} \equiv 0$ при $n \geq m$) — комплексные, зависят от физических характеристик материала и от предварительной поляризации, $V_0 = \omega k$ — фазовая скорость гармоники.

В разложении (3.17) функции $f_1(y, \xi, \tau)$ вещественны и описывают акустическое детектирование. Из соотношений (3.13) — (3.15) находим

$$U_{10}(y, \xi, \tau) = 0; \quad V_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0; \quad W_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0; \quad \Phi_{10}(y, \xi, \tau) \neq 0$$

Полученная бесконечная система нелинейных дифференциальных уравнений (3.20) описывает характер взаимодействий гармоник при распространении поперечной электроупругой волны. Представляя комплексные амплитуды в виде

$$W_{0m}(\xi, \tau) = \rho_m(\xi, \tau) \cdot \exp[i\theta_m(\xi, \tau)]$$

и разделяя действительную и мнимую части, относительно модулей $\rho_m(\xi, \tau)$ и фаз $\theta_m(\xi, \tau)$ амплитуд взаимодействующих гармоник, полу-

чим новую бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений. В случае квази-монохроматических возбуждений все амплитуды $W_m(\xi, \tau)$ за исключением $W_{01}(\xi, \tau)$ должны удовлетворять нулевым начальным условиям при $\xi=0$. Это значит, что

$$\varphi_m(0, \tau) = \varphi_0(\tau); \quad \varphi_m(0, \tau) = 0 \text{ при } m \geq 2 \quad (3.21a)$$

Фазы изменения комплексных амплитуд в начальной точке $\xi=0$ тоже равны нулю:

$$\Theta_m(\xi, \tau) = 0 \text{ при } m \geq 1 \quad (3.21b)$$

4. Рассматриваемые электроупругие поверхностные волны не обладают дисперсией. Исходя из этого, рассмотрим задачу о взаимодействии гармоник в N -волновом приближении (N — конечное). Такое приближение применимо на не слишком большом расстоянии от источника. При $N=2$ главная часть решения (3.6) и (3.7) запишется в виде

$$f_0(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^2 g_m(y) W_{0m}(\xi, \tau) \exp(im\tau) + \text{к. с.} \quad (4.1)$$

Укороченные уравнения первого приближения относительно модулей $\varphi_m(\xi, \tau)$ и фаз $\Theta_m(\xi, \tau)$ комплексных амплитуд $W_{01}(\xi, \tau)$ и $W_{02}(\xi, \tau)$ в этом случае принимают вид:

$$\varphi_{1,\xi} + a_0 \varphi_{1,\tau} = -R_1 \varphi_2 \varphi_{2,\tau} \cos(\Theta_2 - 2\Theta_1 + \varphi_1); \quad \varphi_{2,\xi} + a_0 \varphi_{2,\tau} = R_2 \varphi_1^2 \cos(\Theta_2 - 2\Theta_1 + \varphi_2) \quad (4.2)$$

$$\varphi_{1,\xi}(\Theta_{1,\xi} + a_0 \Theta_{1,\tau}) = -R_1 \varphi_2 \varphi_{2,\tau} \sin(\Theta_2 - 2\Theta_1 + \varphi_1); \quad \varphi_{2,\xi}(\Theta_{2,\xi} + a_0 \Theta_{2,\tau}) = -R_2 \varphi_1^2 \sin(\Theta_2 - 2\Theta_1 + \varphi_2)$$

где

$$a_0 = V_A/V_B^2; \quad R_1 = |b_{11}|, \quad R_2 = |d_{21}|, \quad \varphi_1 = \arg(b_{11}), \quad \varphi_2 = \arg(d_{21})$$

Система уравнений (4.2) описывает изменения амплитуд основной и второй гармоник. Наличие в аргументах тригонометрических функций величин φ_1 и φ_2 означает, что фазы изменения этих гармоник сдвинуты относительно друг друга. Этого сдвига не будет в случае $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, но это равносильно требованию $E_3 = 0$, что означает отсутствие сигнальных антиплоских электроупругих поверхностных волн Гуляева-Блюштейна.

Если начальная поляризация такая, что $\varphi_1 = \varphi_2$, то тогда заменой переменных

$$\gamma_1 = \varphi_1, \quad \gamma_2 = \varphi_2 - \varphi_1/2$$

получим систему в следующем виде:

$$\varphi_{1,\xi} + a_0 \varphi_{1,\tau} = -R_1 \varphi_2 \varphi_{2,\tau} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1); \quad \varphi_{2,\xi} + a_0 \varphi_{2,\tau} = R_2 \varphi_1^2 \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \quad (4.3)$$

$$\varphi_{1,\xi}(\gamma_{1,\xi} + a_0 \gamma_{1,\tau}) = -R_1 \varphi_2 \varphi_{2,\tau} \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1); \quad \varphi_{2,\xi}(\gamma_{2,\xi} + a_0 \gamma_{2,\tau}) = -R_2 \varphi_1^2 \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1)$$

Построим решение полученной системы нелинейных уравнений при сигнальных условиях.

$$\rho_1(0, \tau) = \rho_0(\tau), \quad \rho_2(0, \tau) = 0, \quad \gamma_1(0, \tau) = \gamma_2(0, \tau) = 0 \quad (4.4)$$

где $\rho_0(\tau)$ — гладкая функция и равна нулю при $\tau < 0$. Используя метод характеристик [8], решения системы (4.3), соответствующие условиям (4.4), получим в виде

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi, \tau) &= \rho_0(\tau/a_0 - \xi) \operatorname{sech}[(R_1 R_2)^{1/2} \rho_0(\tau/a_0 - \xi)] \\ \rho_2(\xi, \tau) &= (R_2/R_1)^{1/2} \rho_0(\tau/a_0 - \xi) \tanh[(R_1 R_2)^{1/2} \rho_0(\tau/a_0 - \xi)] \\ \gamma_1(\xi, \tau) &= \gamma_2(\xi, \tau) = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что и в этом случае изменения фаз амплитуд первой и второй гармоник сдвиговой поверхностной волны протекают со сдвигом $\theta_1(\xi, \tau) - \theta_2(\xi, \tau) = \varphi_1/2$. Величина $\Delta = (R_2/R_1)^{1/2}$ характеризует меру перекладки энергии при генерации второй гармоники и зависит от коэффициента электромеханической связи $k^2 = e_{13}^2/(e_{11}c_{11})$. При изменении k от 0,1 до 0,5; Δ монотонно убывает от 0,85 до 0,55.

Процесс генерации и взаимодействия гармоник электроупругих поверхностных волн качественно не отличается от аналогичного процесса в случае объемных волн [1,5]. Происходит перенос энергии вверх по спектру и затухание нелинейной волны. Количественный анализ в случае взаимодействия всех гармоник необходимо проводить с помощью вычислительной техники. Тогда он сведется к интегрированию уравнений (3.20).

NONLINEAR SURFACE ELECTROELASTIC WAVES IN A CERAMIC

A. S. AVETISIAN, M. V. BELYBEKIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԼՈՒԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ՈՉ ԳՄԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԿԵՐԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿԻԱՆ

Ա ճ փ ո փ ո լ ճ

Աշխատանքում հետազոտվում է էլեկտրաստրիկցիայի աղղեցությունը բարիումի տիտանատի բեննացված կիրամիկայում տարածվող մակերևութային էլեկտրաստաձգական ալիքի վրա: Լուծման մեթոդը թույլ է տալիս ստանալ ոչ դժային դիֆերենցիալ համասարումների համակարգ՝ փոխադրող հարմոնիկների կոմպլեքս ամպլիտուդների նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
2. Maugin G. A. Nonlinear electromechanical effects and applications. World Scientific Publ., Singapore: 1985. 168 p.
3. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд. МГУ, 1963. 231 с.

4. *Kalyanasundaram A.* Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid.—*Int. Journal Eng. Sci.*, 1981, vol. 19, № 1, pp. 279—286.
5. *Резцов В. П.* Применение усредненного вариационного принципа для описания многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн.—*Изв. ВУЗ, Радиофизика*, 1973, т. 16, вып. 11, с. 1690—1702.
6. *Lurdner R. W.* Nonlinear surface waves on an elastic solid of general anisotropy.—*Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, № 1, pp. 63—75.
7. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. М.: ИЛ, 1962. 447 с.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. II. М.—Л.: ОГИЗ, 1945. 620 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.11.1987

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ВАРДАНИЯН Л. В.

Вопросы колебаний двух параллельных бесконечных пластин во внешнем продольном магнитном поле и колебаний двух бесконечных параллельных пластин обсуждены в [1—2].

В настоящей работе рассматриваются магнитоупругие колебания двух параллельных упругих прямоугольных пластин в продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности.

1. Пусть две упругие прямоугольные тонкие электропроводящие пластинки, каждая постоянной толщины $2h$, ширины b и длины a , расположены параллельно друг другу. Пластинки находятся во внешнем продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности \vec{H}_0 .

Физико-механические свойства материалов пластин предполагаются одинаковыми и характеризуются электропроводимостью σ , плотностью ρ , модулем упругости E , коэффициента Пуассона ν .

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что координатная плоскость (x, y) параллельна пластинкам и находится между ними на расстоянии l от средних плоскостей пластинок. Ось ox выбрана по направлению вектора напряженности заданного магнитного поля. Ось oz направлена в сторону первой пластинки.

В дальнейшем индексом (1) отмечаются все величины, относящиеся к пластинке, которая занимает область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z-l| \leq h$, а индексом (2)—величины, относящиеся к пластинке, занимающей область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z+l| \leq h$. Принимается, что пластинки находятся в среде, электромагнитные свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Задача рассматривается в рамках линейной теории пластин и гипотезы магнитоупругости тонких тел [3], которая при указанных предположениях аналитически записывается следующим образом:

$$u_{zs} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad u_{ys} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad u_{xs} = w_s(x, y, t) \quad (1.1)$$

$$e_{xs} = \tau_s(x, y, t), \quad e_{ys} = \gamma_s(x, y, t), \quad h_{zs} = f_s(x, y, t) \quad (s=1, 2)$$

Здесь и в дальнейшем при $s=1$ следует брать верхний знак, а при $s=2$ —нижний.

В (1.1) u_{x3}, u_{y3}, u_{z3} — компоненты вектора перемещения произвольных точек пластин, w_s — нормальные перемещения точек срединных поверхностей пластин, e_{x3}, e_{y3} — тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля, h_{z3} — нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля в областях, занимаемых пластинами.

В областях, занимаемых пластинами, имеем уравнения электродинамики, в которых ток смещения пренебрегается по сравнению с током проводимости. Во внешней области имеем уравнения электродинамики для вакуума.

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля (e_{x3}, h_{x3}, h_{y3}) выразятся через искомые функции $w_s, \varphi_s, \psi_s, f_s$ и значений компонент индуцированного магнитного поля h_{x3} и h_{y3} на поверхностях пластин [3].

Принятые предположения позволяют для поперечных колебаний пластин получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_s}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) &= \frac{h_{x3}^+ - h_{x3}^-}{2h}, \quad \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_s = \frac{h_{y3}^+ - h_{y3}^-}{2h} \quad (1.2) \\ \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w_s + 2ch \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + \frac{2zhH_0}{c} \left[\varphi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2 H_0}{3c} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial t} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} \right) \right] \quad (s=1, 2) \end{aligned}$$

где $h_{x3}^+, h_{y3}^+, h_{x3}^-, h_{y3}^-$ — значения тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях $z = l+h, z = l-h, z = -l-h, z = -l+h$, соответственно.

В рассматриваемой задаче принимаются также дополнительные предположения относительно характера изменения возмущенного электромагнитного поля во внешних областях $z \gg l+h; z \ll -l-h$ [4].

В силу этих допущений получаем следующие уравнения:

$$\square h_{x3}^\pm = \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \right), \quad \square h_{y3}^\pm = \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \right) \quad (s=1, 2) \quad (1.3)$$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

где λ — некоторый характерный для данной задачи размер (в дальнейшем за характерный размер λ принимается длина полуволны упругих колебаний пластин).

Система уравнений (1.2) — (1.3) не замкнута. Для замыкания системы уравнений (1.2) — (1.3) необходимо иметь решения уравнений электродинамики для внешней области $-l+h < z \leq l-h$ с учетом ус-

ловий непрерывности соответствующих компонентов индуцированного электромагнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ и условий затухания на бесконечности.

В этой постановке решение задачи представляет значительные трудности. В дальнейшем рассмотрим случай близко расположенных пластин.

Тогда, для тангенциальных компонентов $h_x^{(3)}$, $h_y^{(3)}$ магнитного поля во внешней области между пластинами примем следующие допущения:

$$h_x^{(3)} = h_x^{(3)}(x, y, t), \quad h_y^{(3)} = h_y^{(3)}(x, y, t) \quad \text{при} \quad -l+h \leq z \leq l-h \quad (1.4)$$

Из уравнения электродинамики для внешней области между пластинами путем интегрирования по z в пределах от $-l+h$ до $l-h$ в силу (1.1) и (1.4) с учетом непрерывности тангенциальных компонентов индуцированного магнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ получим следующие уравнения:

$$\square h_{x1} = \square h_{x2} = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] \quad (1.5)$$

$$\square h_{y1} = \square h_{y2} = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right]$$

Система уравнений (1.2) — (1.3) — (1.5) является замкнутой.

2. Рассмотрим некую задачу, в случае, когда прямоугольные пластинки шарнирно оперты по всему контуру

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=b \quad (2.1)$$

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=a \quad (s=1,2)$$

Предполагаем, что на краях пластин можно принимать приближенную модель идеального проводника. Тогда граничные условия для компонент электромагнитного поля на краях пластин [5] имеют вид

$$h_{x1} = -h_{x2} = hH_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}, \quad f_1 = H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad h_{y1} = -h_{y2} = hH_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$$

$$\varphi_s = -\frac{H_0 \partial w_s}{c \partial t}, \quad \varphi_s = 0 \quad (s=1,2) \quad (2.2)$$

Решение систем уравнений (1.2) — (1.3) — (1.5), удовлетворяющее граничным условиям (2.1) и (2.2), представим в виде

$$Q_s = Q_0 e^{-t} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y, \quad Q_0 = \text{const}$$

$$q_s = q_0 e^{-t} \cos \lambda_n x \cos \mu_m y, \quad q_0 = \text{const}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a} \quad (s=1,2) \quad (2.3)$$

где под Q_x подразумевается любая из искомых функций h_{\pm} , h_{\pm}^{-} , ψ_{\pm} , а под q_x — любая из h_{\pm} , h_{\pm}^{-} , φ_{\pm} .

Подставляя (2.3) в (1.2) — (1.3) — (1.5), после некоторых преобразований получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд принудов w_{01} и w_{02} :

$$\begin{aligned} & \left\{ DK_{mn}^2 + 2\phi h \omega^2 + \frac{2zEAH_0}{c(z^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2 v_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta_{11}}{N} + \frac{H_0 \omega (z^2-1)}{cA}\right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{M_{11}}{N} \right] \right\} w_{01} + \frac{2zhAH_0}{cN(z^2-1)} \left[M_{11} - \left(1 - \frac{h^2 v_n^2}{3}\right) \beta_{11} \right] w_{02} = 0 \\ & \frac{2zhAH_0}{cN(z^2-1)} \left[M_{11} - \left(1 - \frac{h^2 v_n^2}{3}\right) \beta_{11} \right] w_{01} + \left\{ DK_{mn}^2 + 2\phi h \omega^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2zhAH_0}{c(z^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2 v_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta_{11}}{N} + \frac{H_0 \omega (z^2-1)}{cA}\right) - \frac{M_{11}}{N} \right] \right\} w_{02} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

В (2.4)

$$K_{mn}^2 = v_m^2 + v_n^2, \quad v_n^2 = v_n^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad v_{mn}^2 = K_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad D = \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)}$$

$$\alpha = 4h(l-h)v_{mn}^2 + \frac{2(l-h)}{1}, \quad \beta = 4h(l-h)(4\pi z - \omega)v_{mn}^2 \frac{\pi}{c^2}$$

$$\gamma = \beta^2 + (z^2-1) \left[-\frac{2\omega^2 v_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(v_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]$$

$$\gamma_1 = \beta^2 - \frac{(z^2-1)\omega^2 v_{mn}^2}{c^2}, \quad A = -\frac{16\pi z \omega^2 h(l-h)v_{mn}^2 H_0}{c^2}$$

$$M = \frac{h^2 v_n^2 v_n^2 (z^2-1)}{3} + \left(1 - \frac{h^2 v_n^2}{3}\right) [(z^2-1)v_n^2 + z\beta]$$

$$N = \left\{ \beta^2 + (z+1) \left[\frac{(z+1)\omega^2 v_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(v_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \beta^2 + (z-1) \left[\frac{(z-1)\omega^2 v_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(v_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\}$$

Так как коэффициенты при w_{01} в первом и w_{02} во втором уравнении системы (2.4) и наоборот, одинаковы, то приравняв детерминант системы (2.4) нулю, получаем разделимые характеристические уравнения относительно общей частоты магнитоупругих колебаний двух пластин.

3. Примем, что расстояние между пластинами намного меньше длины волны, то есть

$$2\sqrt{h_m^2 + v_n^2} (l-h) \ll 1 \quad (3.1)$$

Принимаются также следующие допущения:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll 1, \quad 1 - \frac{h^2 v_n^2}{3} \approx 1, \quad |\alpha| \ll 4\pi$$

Тогда характеристическое уравнение системы (2.4), в силу (3.1), приводится к следующим двум раздельным уравнениям (в безразмерной форме):

$$\Omega^3 + a_1 \Omega^2 + (1 + a_2) \Omega + a_3 = 0 \quad (3.2)$$

где

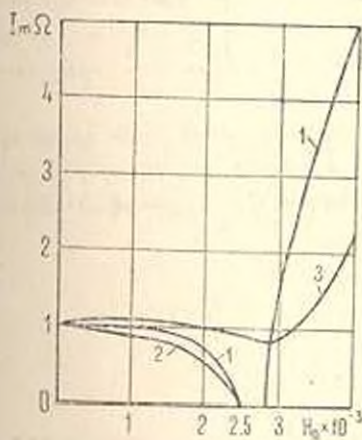
$$a_1 = \frac{c^2(K_{mn}^2 + 1/2h)}{4\pi\sigma\Omega_0}, \quad a_2 = \frac{\lambda_m^2(K_{mn}^2 + 1/2h)}{4\pi\sigma\Omega_0^2 K_{mn}^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

$$\Omega^3 + (b_1 + b_2)\Omega^2 + \left(1 + \frac{b_1 b_2}{K_{mn}^2}\right)\Omega + b_1 = 0 \quad (3.3)$$

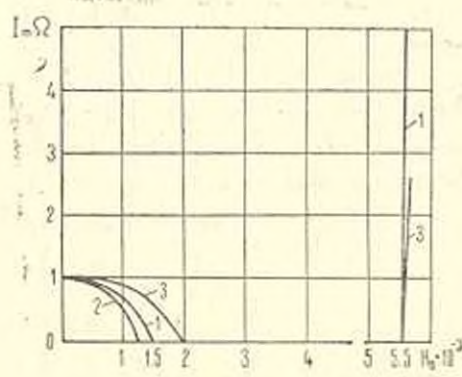
$$b_1 = \frac{8\pi\sigma h(1-h)K_{mn}^2}{\Omega_0}, \quad b_2 = \frac{\sigma H_0^2}{c^2 \rho \Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{Eh^2 K_{mn}^2}{3\rho(1-\nu^2)}$$

Приведем численный анализ минимальной частоты согласно характеристическим уравнениям (3.2) и (3.3) для пластин шириной $b=10$ см, изготовленных из меди. Приведенные на фиг. 1 и 2 кривые 3 построены на основе численных результатов работы [6] относительно минимальной частоты колебаний ($m=1$) медной пластинки, а кривые 1 и 2 построены на основе численных результатов, исходя из уравнений (3.2) и (3.3) в случае, когда колебания не зависят от координаты y ($\mu_n=0$). Следует отметить, что в случае двух взаимодействующих пластин одной и той же длины волны соответствуют две частоты колебаний.

На фиг. 1 кривые 1 и 2 характеризуют частоты колебаний двух близко расположенных пластин с общей толщиной 0,04 см, а кривая 3—частота колебаний одной пластинки толщиной $2h=0,04$ см.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кривая 3 показывает, что если в случае одной пластинки частота колебаний возрастает, то кривая 1 показывает, что в силу взаимодействия между близко расположенными пластинами частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 \approx 2,5 \cdot 10^3$ э, которое сохраняется

в определенном диапазоне изменения напряженности магнитного поля. В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 скорость возрастания частоты колебаний пластин намного больше по сравнению с частотой колебаний одной пластинки. Кривая 2 показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин уменьшается и достигает нулевого значения при $H_0 = 2,5 \cdot 10^3$ э.

Сравнение кривых 1 и 3 на фиг. 2 показывает, что если в случае одной пластинки с толщиной $2h = 0,01$ см частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 = 2 \cdot 10^3$ э (кривая 3), то для двух близко расположенных пластин частота колебаний принимает нулевое значение при $H_0 = 1,5 \cdot 10^3$ э (кривая 1). В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин возрастает более интенсивно по сравнению с частотой колебаний одной пластинки.

VIBRATION OF TWO ELECTROCONDUCTIVE PLATES IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

L. V. VARDANIAN

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱՆՈՒ ԷԼԵԿՏՐԱԿՈՐԳԻՉ ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԽՍԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆԻԱՆ

Ա. Մ. Բ. Մ. Մ. Մ. Մ.

Դիտարկվում են երկու զուգահեռ էլեկտրաաղորդիչ առաձգական ուղղանկյուն սալերի հարմոնիկ տատանումները, երբ սալերը գտնվում են իրենց միջին մակերևույթներին զուգահեռ լարվածության վեկտոր ունեցող հաստատուն մագնիսական դաշտում:

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության տեղության շրջանակներում ստացված են միմյանց մոտ գտնվող և եզրերում հոգակապերով ամրացված զուգահեռ ուղղանկյուն սալերի տատանումների հաճախականությունների որոշման բնութագրիչ չափադասարկումները:

Բերված են թվային արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных электропроводящих бесконечных пластин в продольном магнитном поле. — Тезисы докладов I Всесоюзного симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости», Ереван (Цахкадзор): 1984.
2. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных токонесущих пластин. — Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 2, с. 33—42.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Бечуевская М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272 с.

4. Белубекян М. В. К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2, с. 22—30.
5. Белубекян М. В. Приведение пространственной задачи колебаний проводящей пластинки к двумерной при наличии продольного магнитного поля.—Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Харьков: 1978. 23 с.
6. Амбарцумян С. А. Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 194—200.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна.

Поступила в редакцию
22.V. 1987

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКОНЕСУЩЕГО ЦИЛИНДРА

КАЗАРЯН К. Б., КАЗАРЯН Р. А.

Вопросы, относящиеся к определению электродинамических напряжений в токонесущих соленоидах и в проводах электрического тока, обсуждены в работах [1, 2].

В этих работах при расчете механических напряжений предполагалось равномерное распределение тока по толщине проводника.

Здесь на примере токонесущего бесконечного упругого полого цилиндра определены окружные и радиальные напряжения в случае сверхпроводящего тока, подчиняющегося известным уравнениям Лондонов [3,4].

Проведено сравнение полученных результатов со случаями постоянного однородного электрического тока. В предельном случае, когда радиус внутренней окружности цилиндра стремится к нулю, получены результаты для сплошного цилиндра.

1. По своим магнитным свойствам сверхпроводник отличается от обычного проводника тем, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника (эффект Мейсснера и Оксенфельда). При этом обычно принимается, что ток в сверхпроводнике является поверхностным и вследствие этого ponderomotorная сила Ампера, действующая на сверхпроводник, является поверхностной силой. В дальнейшем было экспериментально показано, что ток в сверхпроводнике фактически протекает в очень тонком поверхностном слое толщиной порядка $\lambda \sim 10^{-4}$ см. Распределение объемного тока и магнитного поля в сверхпроводнике определяется на основе уравнений Лондонов [3—4].

Рассмотрим бесконечный полый цилиндр с радиусами внешней окружности R и внутренней окружности r , по которому протекает сверхпроводящий электрический ток силы J_0 .

Уравнения Максвелла для стационарного поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

Связь между магнитным полем и плотностью сверхтока задается следующими уравнениями Лондонов, пришедшими на смену закону Ома для обычного проводника:

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c} \operatorname{rot} \vec{j} + \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) B есть вектор индукции магнитного поля, j — есть вектор плотности сверхтока, c — электродинамическая постоянная, λ — лондоновская глубина проникновения.

Уравнения (1.1) и (1.2) обычно решаются совместно с условием заданности полного тока

$$\oint \vec{\gamma} d\vec{s} = J_0 \quad (1.3)$$

В цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($r \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq \infty$) с учетом симметрии задачи, исходными уравнениями, определяющими распределение тока и магнитного поля, являются

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_z}{d\rho} &= 0 \quad \text{при } 0 < \rho < r \text{ и } \rho > R \\ \frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_z}{d\rho} - \frac{1}{\lambda^2} A_z &= 0 \quad \text{при } r < \rho < R \\ B_{\varphi r} &= -\frac{dA_z}{d\rho}, \quad \gamma_z = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} A_z \\ A_z - A_0 &= 0, \quad B_\varphi = B_z = 0, \quad \gamma_\varphi = \gamma_r = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Условие (1.3) имеет вид

$$2\pi \int_r^R \gamma_z(\rho) \rho d\rho = J_0 \quad (1.5)$$

Решения уравнений (1.4) с учетом (1.5) в области $r \leq \rho \leq R$ имеют вид

$$A_z(\rho) = -\frac{2J_0\lambda}{Rc} \frac{M(\rho)}{B(R)}; \quad \gamma_z(\rho) = \frac{J_0}{2\pi R\lambda} \frac{M(\rho)}{B(R)}; \quad B_{\varphi r}(\rho) = \frac{2J_0}{Rc} \frac{B(\rho)}{B(R)} \quad (1.6)$$

где $M(\rho) = K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) + I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)K_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)$; $B(\rho) = K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \times$
 $\times I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot K_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)$

В (1.6) I_0, I_1 есть модифицированные функции Бесселя, а K_0, K_1 — функции Макдональда.

На основе асимптотического анализа модифицированных функций Бесселя к Макдональда из (1.6) следует, что при $R-r \gg \lambda$

$$\gamma_z \approx \frac{J_0}{2\pi\lambda R} \exp\left(-\frac{R-\rho}{\lambda}\right); \quad B_{\varphi r} \approx \frac{2J_0}{cR} \exp\left(-\frac{R-\rho}{\lambda}\right) \quad (1.7)$$

Это означает, что магнитное поле и электрический ток распределены в слое толщины λ при внешней поверхности цилиндра.

При $\lambda \gg R$, что формально соответствует случаю обычного проводника с постоянным током, из (1.6) имеем

$$\gamma_z(\rho) \approx \frac{J_0}{\pi(R^2 - r^2)}; \quad B_{0z}(\rho) \approx \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{2J_0}{c\lambda} \quad (1.8)$$

В случае сплошного цилиндра ($r=0$, $0 < \rho < R$) решения уравнения (1.4) с учетом (1.5) имеют вид

$$A_z = -\frac{2J_0}{Rc} \frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}; \quad \gamma_z = \frac{J_0}{2\pi R\lambda} \frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}; \quad B_{0z} = \frac{2J_0}{cR} \frac{I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \quad (1.9)$$

На основе асимптотического анализа модифицированных функций Бесселя из (1.9) следует, что магнитное поле и электрический ток распределены в слое толщины λ , если $R \gg \lambda$.

При $\lambda \gg R$ имеем

$$\gamma_z \approx \frac{J_0}{\pi R^2}; \quad B_{0z} \approx \frac{2J_0}{cR^2}.$$

Эти результаты можно получить из (1.6) -- (1.8) в пределе, когда $r \rightarrow 0$.

2. Вследствие взаимодействия сверхтока с собственным магнитным полем на упругий цилиндр действует сила Ламбера

$$\vec{F} = \frac{1}{c} (\vec{\gamma} \times \vec{B}); \quad F_z = F_r = 0; \quad F_\varphi = -\frac{1}{8\pi\lambda^2} \frac{dA_z^2}{d\rho} \quad (2.1)$$

Напряжения σ_r и σ_φ , обусловленные силой F_φ , определяются из следующих уравнений [5]:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{f}{\rho^2} = -kF_\varphi \frac{dF}{d\rho}; \quad \sigma_r = \frac{f}{\rho}; \quad \sigma_\varphi = \rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \sigma_r + \rho F \quad (2.2)$$

В (2.2) принято обозначение:

$$k = \begin{cases} 2+\nu; & \text{плоское напряженное состояние} \\ \frac{2-\nu}{1-\nu} & \text{плоское деформированное состояние} \end{cases} \quad (2.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона

При отсутствии механических поверхностных нагрузок $\sigma_r(R) = 0$, $\sigma_\varphi(r) = 0$ получим следующие решения для напряжений σ_r и σ_φ

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \left\{ (k-1) \left[\int_r^R F(s) ds - \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{R^2}{\rho^2} \int_r^R F(s) ds \right] + (3-k) \left[\frac{1}{\rho^2} \int_r^R s^2 F(s) ds - \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{\rho^2} \int_r^R s^2 F(s) ds \right] \right\}$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \left\{ (k-1) \left[\int_r^R F(s) ds - \frac{\rho^2 + r^2}{R^2 - r^2} \frac{R^2}{\rho^2} \int_r^R F(s) ds \right] - (3-k) \left[\frac{1}{\rho^2} \int_r^R s^2 F(s) ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho^2 + r^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{\rho^2} \int_r^R s^2 F(s) ds \right] \right\} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1) и (2.4), получим

$$\sigma_r = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 R^2 B^2(R)} \left\{ \frac{R^2}{R^2 - r^2} \frac{\rho^2 + r^2}{\rho^2} [(k-1)(M^2(R) - M^2(r)) + (3-k)B^2(R)] - \right. \\ \left. - [(k-1)(M^2(\rho) - M^2(r)) + (3-k)B^2(\rho)] \right\} \\ \sigma_r = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 R^2 B^2(R)} \left\{ \frac{R^2}{R^2 - r^2} \frac{\rho^2 + r^2}{\rho^2} [(k-1)(M^2(R) - M^2(r)) + (3-k)B^2(R)] - \right. \\ \left. - [(k-1)(M^2(\rho) - M^2(r)) + (3-k)B^2(\rho)] \right\} \quad (2.5)$$

При $\lambda \gg R$ из асимптотического разложения функций Бесселя и Макдональда получим следующие выражения для функций σ_r и σ_z , соответствующие случаю обычного проводника,

$$\sigma_r = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 \rho^2 (R^2 - r^2)^2} \left[(R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)(k+1) - \frac{4(\rho^2 - r^2)r^2 R^2 \ln \frac{R}{r}}{R^2 - r^2} \times \right. \\ \left. \times (k-1) + 4\rho^2 r^2 \ln \frac{\rho}{r} (k-1) \right] \\ \sigma_z = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 \rho^2 (R^2 - r^2)^2} \left[(k+1)R^2(\rho^2 + r^2) - (3k-5)\rho^4 + (k-11)\rho^2 r^2 - \right. \\ \left. - \frac{4R^2 r^2 (\rho^2 + r^2)}{R^2 - r^2} \ln \frac{R}{r} (k-1) + 4\rho^2 r^2 \ln \frac{\rho}{r} (k-1) \right] \quad (2.6)$$

Из (2.5) получаем для σ_r следующие значения при $\rho = r$ и $\rho = R$:

$$\sigma_r(r) = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 B^2(R)(R^2 - r^2)} [(k-1)(M^2(R) - M^2(r)) + (3-k)B^2(R)] \\ \sigma_r(R) = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R^2 B^2(R)(R^2 - r^2)} [(k-1)r^2(M^2(R) - M^2(r)) + (3-k)R^2 B^2(R)]$$

При этом можно показать, что

$$|\sigma_r(r)| > |\sigma_r(R)|$$

В случае, когда $R - r \gg \lambda$, для напряжений σ_r и σ_z получаем следующие выражения:

$$z_{\varphi}^* = - \frac{J_0^2}{2\pi c^2 R \rho} \left(\frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{R}{\rho} - \exp\left(-\frac{2(R-\rho)}{\lambda}\right) \right)$$

$$z_{\varphi}^* = - \frac{J_0^2}{2\pi c^2 R \rho} \left(\frac{\rho^2 + r^2}{R^2 - r^2} \frac{R}{\rho} - (k-2) \exp\left(-\frac{2(R-\rho)}{\lambda}\right) \right)$$

$$z_{\varphi \max}^* = z_{\varphi}^*(r) = - \frac{J_0^2}{\pi c^2 (R^2 - r^2)}$$

Здесь и в дальнейшем индексами (*), (—) обозначены соответствующие значения для сверхтока и обычного тока, соответственно.

При $h/R \ll 1$ имеем следующие асимптотические выражения для функции z_{φ} , где $2h$ есть толщина полого цилиндра

$$z_{\varphi}^* \approx - \frac{J_0^2(5-k)}{16\pi c^2 R h} \quad \text{при } \lambda \gg R,$$

$$z_{\varphi}^* \approx - \frac{J_0^2}{4\pi c^2 R h} \quad \text{при } \lambda \ll R - r$$

Рассмотрим случай сплошного цилиндра ($r=0$). Сила Ампера, действующая на цилиндр, равна

$$\vec{F} = \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B}), \quad F_z = F_{\varphi} = 0, \quad F_r = - \frac{J_0^2}{\pi \lambda R^2 c^2} \frac{I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \cdot I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)}{I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \quad (2.7)$$

Напряжения σ_{φ} и σ_{rz} , обусловленные силой F , определяются из уравнений (2.2). При отсутствии механической поверхностной нагрузки $\sigma_{\varphi}(R) = 0$ получим следующие решения для напряжений σ_{φ} и σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left\{ (k-1) \left[\int_0^R F(s) ds - \int_0^r F(s) ds \right] + (3-k) \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R s^2 F(s) ds - \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} s^2 F(s) ds \right] \right\}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{2} \left\{ (k-1) \left[\int_0^R F(s) ds - \int_0^{\rho} F(s) ds \right] + (3-k) \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R s^2 F(s) ds + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} s^2 F(s) ds \right] \right\} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (2.8), получим

$$\sigma_{rz} = - \frac{J_0^2}{4\pi R^2 c^2 I_1^2(R)} \left\{ (k-1) \left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_0^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right] + (3-k) \left[I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_1^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right] \right\}$$

$$\sigma_{\varphi} = - \frac{J_0^2}{4\pi R^2 c^2 I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \left\{ (k-1) \left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - I_0^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right] + (3-k) \left[I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) + I_1^2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right] \right\} \quad (2.9)$$

При $\lambda \gg R$ из асимптотического разложения функций Бесселя получим следующие выражения для функций σ_r и σ_{θ} , которые совпадают с результатами работы [2], полученными для случая обычного проводника с постоянным током.

$$\sigma_r = -\frac{J_0^2(k+1)}{4\pi c^2 R^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right); \quad \sigma_{\theta} = -\frac{J_0^2(k+1)}{4\pi c^2 R^2} \left(1 - \frac{3k-5}{k+1} \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

Из (2.9) следует, что максимальные напряжения достигаются на оси цилиндра при $\rho=0$, а также, что напряжения σ_r и σ_{θ} являются напряжениями сжатия.

Из (2.9) имеем следующие выражения для максимальных значений σ_{r_0} и σ_{θ_0}

$$\sigma_r = \sigma_{\theta} = -\frac{J_0^2}{4\pi c^2 R^2 I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \left\{ (k-1) \left[I_0^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) - 1 \right] + (3-k) I_1^2\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right\}$$

При $\rho = R$ имеем

$$\sigma_{r_0} = 0, \quad \sigma_{\theta_0} = -\frac{J_0^2(3-k)}{2\pi c^2 R^2}$$

Асимптотические разложения максимальных напряжений при $R \gg \lambda$ имеют вид

$$\sigma_{r_0}^* = \sigma_{\theta_0}^* = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R^2}$$

Сравнение результатов относительно безразмерного напряжения $\frac{\max(\sigma^*)}{\max(\sigma_0)} = \frac{4}{5-k}$ для тонкого полого цилиндра показывает, что в тонкой оболочке при одинаковой силе тока механические напряжения от сверхпроводящего тока превышают напряжения постоянного тока.

В заключение приведем численные результаты для полого цилиндра относительно предельной силы сверхтока J_{0*} , соответствующей максимальному окружному напряжению $|\sigma_{\theta}^*|$, равному пределу текучести материала. Значение $|\sigma_{\theta}^*|$ принято равным $6.85 \cdot 10^7$ Па. Рассмотрено плоско-напряженное состояние ($\nu=0,358$). Радиус срединной поверхности при расчетах был принят за $R_0=0,01$ м. При $h/R_0=0,75$, $h/R_0=0,25$, $h/R_0=0,1$ имеем, соответственно, $J_{0*}=805$ кА, $J_{0*}=465$ кА, $J_{0*}=294$ кА.

Превышение силы тока $J > J_{0*}$ приводит к разрушению проводника.

STRESS STATE OF ELASTIC SUPERCONDUCTING CURRENT-CARRYING CYLINDER

K. B. KAZARIAN, R. A. KAZARIAN

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Այս աշխատանքում հոսանքաուար առաձգական անվերջ զլանի համար որոշված են շրջանային և շառավղային մեխանիկական լարումները, որոնք պայմանավորված են հոսանքի և սեփական մագնիսական դաշտի փոխազդեցությամբ: Հոսանքի և մագնիսական դաշտի բաշխումը տրված են լոն-դոնների հավասարումների հիման վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каровский Е. Я., Карцев В. П., Шахтун В. Н. Сверхпроводящие магнитные системы. М.: Наука, 1967. 323 с.
2. Кузнецов А. А. Механические напряжения в неподвижном и вращающемся цилиндре, нагруженном однородным электрическим током.—ЖГФ, 1960, т. 30, в. 5, с. 589—592.
3. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 238 с.
4. Гуров Е. А. Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 157 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

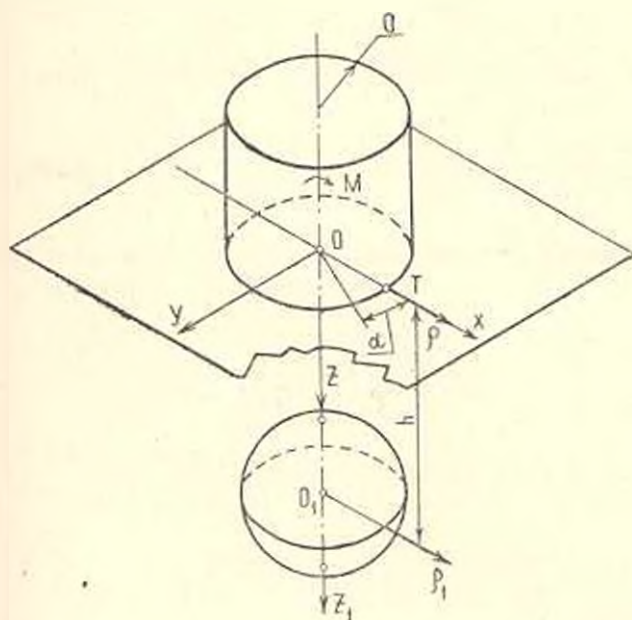
Поступила в редакцию
14.1.1988

УДК 539.3

КРУГЛЫЙ ПЛОСКИЙ ШТАМП СО СЦЕПЛЕНИЕМ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

ПРОЦЕНКО В. С.

Задача о взаимодействии круглого штампа с упругим однородным полупространством в условиях полного сцепления изучалась в [1—3]. В [4] рассматривалась аналогичная задача для линейно-деформируемого основания. Авторы работы [5] исследовали близкую задачу о контакте двух слоев из различных материалов с учетом сцепления. В настоящей работе предложен метод решения задачи для плоского круглого штампа, сцепленного с упругим полупространством с шаровой полостью. Штамп предполагается нагруженным силой T , в плоскости его основания (в направлении оси ox) и моментом M в плоскости осевого сечения штампа (фиг. 1). Поверхность шаровой полости свободна от нагрузки.



Фиг. 1

Приведенные ниже формулы перехода в решениях уравнения Ламе от сферических координат к цилиндрическим и им обратные позволили свести задачу к совокупности пяти бесконечных систем, допускающих применение метода редукции.

1. Введем сферические решения уравнения Ламе в виде [6]

$$\begin{aligned}\vec{U}_{l,n}^{\pm} &= \text{grad } u_{n\pm 1,l}^{\pm} \\ \vec{U}_{2,n}^{\pm} &= (z \text{grad} + r \vec{e}_z) u_{n,l}^{\pm} - \frac{R^2 \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)}{2(n+1)+1} \text{grad } u_{n\pm 1,l}^{\pm}\end{aligned}\quad (1.1)$$

$\vec{U}_{3,n}^{\pm} = \text{rot}(\vec{e}_z u_{n\pm 1,l}^{\pm})$, R — радиус шара, $\nu = 4\nu - 3$, ν — коэффициент Пуассона,

на, $u_{n,l}^{\pm} = r^{\mp n - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} P_n^{(0)}(\cos \vartheta) \cos \varphi$, $u_{n,l}^{\pm} = r^{\mp n - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} P_n^{(0)}(\cos \vartheta) \sin \varphi$.

Кроме того, нам понадобятся решения в цилиндрической системе

$$\begin{aligned}\vec{V}_{l,1}^{\pm} &= -\frac{1}{l} \text{grad } v_l^{\pm}, \quad \vec{V}_{2,1}^{\pm} = -(z \text{grad} + r \vec{e}_z) v_l^{\pm}, \quad \vec{V}_{3,1}^{\pm} = -\frac{1}{l} \text{rot}(\vec{e}_z v_l^{\pm}) \\ v_l^{\pm} &= J_l(\rho) e^{\pm i l \varphi} \cos \varphi, \quad v_l^{\pm} = J_l(\rho) e^{\pm i l \varphi} \sin \varphi\end{aligned}\quad (1.2)$$

Имеют место формулы разложения внешних решений для шара на решения (1.2)

$$\begin{aligned}\vec{U}_{l,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \int_0^{\pi} \vec{V}_{l,1}^{\pm}(\vartheta, z, \varphi; i) d\vartheta \\ \vec{U}_{2,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^{\pi} \left(\vec{V}_{2,1}^{\pm} + \frac{i^2 R^2}{2n+3} \vec{V}_{l,1}^{\pm} \right) d\vartheta \\ \vec{U}_{3,n}^{\pm} &= \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \int_0^{\pi} \vec{V}_{3,1}^{\pm}(\vartheta, z, \varphi; i) d\vartheta, \quad (z < 0)\end{aligned}\quad (1.3)$$

Они получены непосредственным вычислением с использованием формулы 6.621 из [7]. Другая группа формул (обратные разложения) имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{V}_{0,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^k}{(k+2)!} \vec{U}_{0,1}^{\pm}(r, \vartheta, \varphi) \\ \vec{V}_{2,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} \frac{i^2}{(k+1)!} \left(\vec{U}_{2,1}^{\pm} + \frac{i^2 R^2}{(k+2)(2k+3)} \vec{U}_{0,1}^{\pm} \right) \\ \vec{V}_{3,1}^{\pm} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^k}{(k+2)!} \vec{U}_{3,1}^{\pm}(r, \vartheta, \varphi)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Эти разложения получены путем применения формулы 30 стр. 178 из [8] к решениям (1.2).

2. Будем решать поставленную задачу в цилиндрической и сферической системах координат. Краевые условия имеют вид

$$\tau_{rz}(\rho, 0, \varphi) = \tau_{\varphi z}(\rho, 0, \varphi) = \tau_{rz}(\rho, 0, \varphi) = 0 \quad (\rho > a) \quad (2.1)$$

$$u(\rho, 0, \varphi) = u_0 \cos \varphi, \quad u_z(\rho, 0, \varphi) = \tau_0 \cos \varphi, \quad u_r(\rho, 0, \varphi) = -u_0 \sin \varphi \quad (\rho < a) \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_n = e_r F_r + e_\theta F_\theta + e_z F_z = 0 \quad (r_1 = R, n = e_r) \quad (2.3)$$

Здесь u_0 — жесткое смещение штампа вдоль оси ox , $\gamma = \gamma x$, z — угол поворота штампа вокруг оси oy , R — радиус шаровой полости. Параметры u_0 и γ определяются из условий равновесия штампа. Полагаем, что перемещения исчезают на бесконечности. \vec{F}_n — усилия на поверхности шара.

Решение задачи ищем в виде

$$\vec{u} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z, \varphi; \lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^3 a_n^{(m)} R^n \vec{U}_{m,n}(r_1, \theta_1, \varphi) \quad (2.4)$$

где (r_1, θ_1, φ) — локальная сферическая система координат, связанная с центром шара (фиг. 1). В окрестности границы $z=0$ решение (2.4) представим в интегральной форме с помощью формул (1.3).

Имеем

$$\vec{u} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^3 [A_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z, \varphi; \lambda) + \Psi_m(\lambda) \vec{V}_{m,1}(\rho, z_1, \varphi; \lambda)] d\lambda$$

где обозначено

$$\Psi_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda R)^n}{(n-1)!} \left[a_n^{(1)} - \frac{\lambda^2 R^2}{2n+3} a_n^{(2)} \right]$$

$$\Psi_2(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\lambda R)^n}{(n-1)!} a_n^{(2)}, \quad \Psi_3(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda R)^n}{(n-1)!} a_n^{(3)}$$

Краевые условия под штампом (2.2) приводят к равенствам ($\rho < a$)

$$\int_0^\infty [A_1 + A_3 + e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 + \Psi_3)] J_0(\lambda \rho) d\lambda = -2u_0$$

$$\int_0^\infty [A_1 - A_3 + e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 - \Psi_3)] J_2(\lambda \rho) d\lambda = 0$$

$$\int_0^\infty [A_1 - \lambda A_3 - e^{-\lambda h} (\Psi_1 + (\lambda - 1)h \Psi_2)] J_1(\lambda \rho) d\lambda = \gamma \rho$$
(2.5)

Краевые условия для напряжений (2.1) приводят к равенствам

$$\int_0^\infty H_0(\lambda) J_1(\lambda \rho) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} \tau_z(\rho, 0) = \begin{cases} p(\rho) & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

$$\int_0^a (H_1 + H_2) J_0(\lambda \varphi) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} [\tau_{\varphi 1}(\varphi, 0) + \tau_{\varphi 2}(\varphi, 0)] = \begin{cases} 2\tau^+(\varphi) & (\varphi < a) \\ 0 & (\varphi > a) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\int_0^a (H_2 - H_1) J_2(\lambda \varphi) \lambda d\lambda = (2G)^{-1} [\tau_{\varphi 2}(\varphi, 0) - \tau_{\varphi 1}(\varphi, 0)] = \begin{cases} 2\tau^-(\varphi) & (\varphi < a) \\ 0 & (\varphi > a) \end{cases}$$

G — модуль сдвига. Функции H_j ($j=0, 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 &= A_1 - 2(\sigma - 1)A_2 + e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (2\sigma - 2 - \lambda h)\Psi_2] \\ H_1 &= -A_1 + (2\sigma - 1)A_2 + e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (2\sigma - 1 - \lambda h)\Psi_2] \\ H_2(\lambda) &= -\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}\Psi_2 e^{-\lambda h} \end{aligned}$$

Переход к плоской задаче осуществляется с помощью операторов преобразования [5]. Вместо функций $p(\varphi)$, $\tau_{\pm}(\varphi)$ вводим новые функции

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{\pi} x \int_x^a \frac{p(t) dt}{t \sqrt{t^2 - x^2}}, \quad r(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{\tau^-(t) dt}{t \sqrt{t^2 - x^2}} \\ q(x) &= \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{\tau^-(t)(t^2 - 2x^2)}{t \sqrt{t^2 - x^2}} dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

которые продолжим на промежуток $(-a, 0)$ по формулам

$$S(-x) = -S(x), \quad r(-x) = r(x), \quad q(-x) = q(x).$$

Уравнения плоской задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A_1 \cos \lambda x d\lambda &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad \int_0^{\infty} A_2 \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \\ \int_0^{\infty} (A_1 - \kappa A_2) \sin \lambda x d\lambda &= f_3(x), \quad (|x| < a) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^{\infty} (\lambda h \Psi_2 - \Psi_1 - \Psi_2) e^{-\lambda h} \cos \lambda x d\lambda - 2u_0 \\ f_2(x) &= 2c_0 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} (\Psi_1 - \lambda h \Psi_2 - \Psi_2) \cos \lambda x d\lambda \\ f_3(x) &= 2\gamma x + \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} [\Psi_1 + (\kappa - \lambda h) \Psi_2] \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $A_n(\lambda)$ представим с учетом (2.7) в виде

$$A_1 = \int_{-a}^a \left[(\sigma-1)h(x)\cos ix - \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) S(x)\sin ix \right] dx - e^{-\lambda h} (\kappa \Psi_1 + m \Psi_2)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [h(x)\cos ix - S(x)\sin ix] dx - e^{-\lambda h} [2\Psi_1 + (\kappa-2\lambda h)\Psi_2] \quad (2.10)$$

$$A_3 = - \int_{-a}^a [r(x) + q(x)] \cos ix dx + \Psi_3 e^{-\lambda h}$$

$$m = 2(\sigma-1)(2\sigma-1-i\lambda h) + (2\sigma-1)(2\sigma-2-i\lambda h)$$

Из второго уравнения (2.8) находим

$$r + q = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (f_2 - f_1) + \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-i\lambda h} \cos ix d\lambda \right] \quad (2.11)$$

а первое и третье уравнения системы (2.8) приводят к сингулярному уравнению для функции $w = S + i(r-q)$

$$w(x) + i0 \int_{-a}^a \frac{w(t)}{x-t} dt = \varphi(x) \quad (|x| < a) \quad (2.12)$$

$$\varphi = \frac{1-2\sigma}{2-(1-\sigma)}, \quad \varphi(x) = \pi^{-1}(1-\sigma)^{-1} \left\{ 2\gamma x + i(u_0 - c_0) + \right.$$

$$\left. + i(1-\kappa) \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-i\lambda(h+\gamma x)} d\lambda - \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} [i(m + \lambda h)e^{i\lambda x} + \right.$$

$$\left. + (\kappa^2 + 2\kappa\lambda h + i\lambda h)\sin ix] d\lambda \right\}$$

Постоянная c_0 , возникшая в результате интегрирования, находится из равенства

$$c_0 = \pi[r(0) + q(0)] - 2 \int_0^{\infty} \Psi_3 e^{-\lambda h} d\lambda - u_0 \quad (2.13)$$

В заключение этого пункта отметим, что функции $\pm(\rho)$, $p(\rho)$ находятся в результате обращения равенств (2.7). Имеем

$$p^{\pm}(\rho) = - \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{x r(x) dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}, \quad p(\rho) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{S(x) dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \quad (2.14)$$

$$\tau^+(p) = p \frac{d}{dp} \int_0^p (x^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} d \left(x^{-1} \int_0^x q(u) du \right)$$

Формула для функции $\tau^+(p)$ получена в предположении ее интегрируемости на $(0, a)$.

3 Вектор \vec{u} в окрестности шаровой полости представим с помощью формул (1.4) в виде, удобном для удовлетворения краевых условий при $r_1=R$

$$\vec{u} = \sum_{m=1}^3 \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(m)} \vec{U}_{m,k}^-(r_1, \theta_1, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m)} R^k \vec{U}_{m,k}^+(r_1, \theta_1, \varphi) \right]$$

где обозначено

$$B_k^{(1)} = \frac{(-1)^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} e^{-ik\varphi} \left[A_1 - \frac{\lambda^2 R^2 A_2}{(k+2)(2k+3)} \right] k^k d\varphi, \quad (3.1)$$

$$B_k^{(j)} = \frac{(-1)^{k+j-1}}{(k+2)!} \int_0^{\pi} k^k e^{-ik\varphi} A_j(\varphi) d\varphi, \quad (j=2, 3)$$

Условия на поверхности шара (2.3) приводят к равенствам

$$a_k^{(m)} = \sum_{r=1}^3 B_k^{(r)} \omega_{kr}^{(m)}, \quad (m=1, 2, 3; k \geq 1), \quad \omega_{kr}^{(m)} = R^{2k+1} \omega_{kr}^{(r)}, \quad a_0^{(1)} = a_0^{(3)} \quad (3.2)$$

Формулы для величин $\omega_{kr}^{(m)}$ выписывать не будем из-за их громоздкости. Отметим лишь, что они являются рациональными функциями переменной k .

Если в (3.2) подставить величины $B_k^{(m)}$, определенные равенствами (3.1), то с учетом (2.10) найдем

$$a_k^{(m)} = \int_0^{\pi} \{ h(x) H_{k1}^{(m)}(x) + S(x) H_{k2}^{(m)}(x) + R(x) H_{k3}^{(m)}(x) \} dx + \delta_k^{(m)}, \quad (m=1, 2, 3; k \geq 1) \quad (3.3)$$

где обозначено $R=r+q$, $h=r-q$

$$H_{k1}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} (M_{k1}^{(m)} + \lambda^2 M_{k2}^{(m)}) k^k e^{-ik \cos x} dx,$$

$$H_{k2}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} \int_0^{\pi} (N_{k1}^{(m)} - \lambda^2 M_{k2}^{(m)}) k^k e^{-ik \sin x} dx,$$

$$H_{k3}^{(m)}(x) = \frac{R^k}{(k+2)!} T_k^{(m)} \int_0^x e^{-\lambda h} \lambda^k \cos \lambda x d\lambda$$

$M_k^{(m)}, \dots, T_k^{(m)}$ —двучленные линейные комбинации величин $\omega_{kp}^{(m)}$. Внеинтегральный член $\mathcal{G}_k^{(m)}$ зависит от $a_k^{(m)}$ и имеет вид

$$\mathcal{G}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^n \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} \Omega_{kn}^{(m,p)}$$

Выражений для $\Omega_{kn}^{(m,p)}$ не приводим из-за их громоздкости. Отметим лишь, что имеют место оценки

$$|\Omega_{kn}^{(m,1)}| \leq C_1 \frac{\varepsilon^{n+k+2} (n+k+2)!}{(n-1)!(k+2)!}, \quad |\Omega_{kn}^{(m,2)}| \leq C_1 \frac{\varepsilon^{k+n+1} (n+k+4)!}{n! (k+2)!}$$

$$|\Omega_{kn}^{(m,3)}| \leq C_2 \frac{\varepsilon^{k+k} (n+k)!}{(n-1)!(k+2)!}, \quad \varepsilon = \frac{R}{2h}$$

Константы C_p ($p=1, 2, 3$) не зависят от n и k .

4. Система уравнений (2.11), (2.12) и (3.3) вместе с уравнением (2.13) является разрешающей системой исходной задачи. К решению этой системы применим метод ортогональных многочленов [4]. Незвестные функции $R(x)$ и $\omega(x)$ представим рядами

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k P_k\left(\frac{x}{a}\right), \quad \omega(x) = \gamma_1(x) \sum_{k=0}^{\infty} Y_k P_k^{(-1,1)}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4.1)$$

$$x = i\mu, \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\sigma), \quad \gamma_1(x) = (a-x)^{-1} (a+x)^{-1}$$

$P_k^{(-1,1)}(t)$ и $P_k(t)$ —полиномы Якоби и Лежандра, соответственно.

Стандартная процедура метода ортогональных многочленов приводит к совокупности пяти бесконечных систем линейных уравнений для коэффициентов разложений (4.1) и (2.4), которую запишем в виде одного матричного уравнения

$$Y = AY + B \quad (4.2)$$

где Y и B —матрицы столбцы неизвестных коэффициентов и свободных членов, A —матрица системы.

Учитывая оценки для $\Omega_{kn}^{(m,p)}$, можно показать, что при $R < h$ оператор уравнения (4.2) действует вполне непрерывно из l_2^* в l_2^* , где l_2^* —гильбертово комплексное пространство числовых последовательностей. Элементы матрицы B также принадлежат этому пространству. Решение такой системы, принадлежащее l_2^* , можно найти методом редукции [9].

Отметим, что при $h \rightarrow \infty$ имеем точное решение задачи для сплошного полупространства [1, 2]. Как и в случае сплошного полупространства, напряжения под штампом имеют корневую особенность, умно-

женную ия осциллирующие множители $\cos \mu \ln(a-r)$, $\sin \mu \ln(a-r)$. При решении бесконечных систем следует учесть равенства $\operatorname{Re} Y_{2k} \parallel = \ln Y_{2k+1} = 0$, которые вытекают из (4.1), свойств полиномов Якоби и четности функций $S(x)$ и $h(x)$. Аналогично может быть решена контактная задача для упругого слоя с шаровой полостью или с упругим (жестким) шаровым ядром.

ROUND PLANE STAMP WITH ADHESION ON ELASTIC HALFSPACE WITH SPHERICAL CAVITY

V. S. PROTZENKO

ԿՆԴԱՅԻՆ ԽՈՌՈՋՈՎ ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱՇՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ
ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՀԱՐԹ ԿՈՐ ԿՐՈՇՄՐ

Վ. Ս. ՊՐՈՇԵՆԿՈ

И. м. ф. и. ф. н. и. д.

Հարթ զրոշմի համար ոչ առանցքառիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը բերված է հինգ դժարին հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի համախմբության, որոնց համար կիրառելի է ուղղակի մեթոդը: Այստեղ էական դեր են խաղում կամերի հավասարումների վեկտորական լուծումների գլանային կոորդինատական համակարգից դնդալների վերափոխումության բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Московский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела красных условий.—ПММ, 1954, т. 18, в. 2.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования и задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
3. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблин А. А. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.—ПММ, 1966, т. 30, в. 1.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Абрамян Б. Л., Макарян В. С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т. 29, №5, с. 3—14.
6. Проценко В. С., Николаев А. Г. Первая осевая осесимметричная задача теории упругости для слоя со сферической полостью. Математические методы анализа динамических систем, Харьков, 1983, в. 7.
7. Грештейн И. С., Рыжик Н. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. Вейсман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
9. Канторонич Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Харьковский авиационный институт
им. П. Е. Жуковского

Поступила в редакцию
3.IV.1986

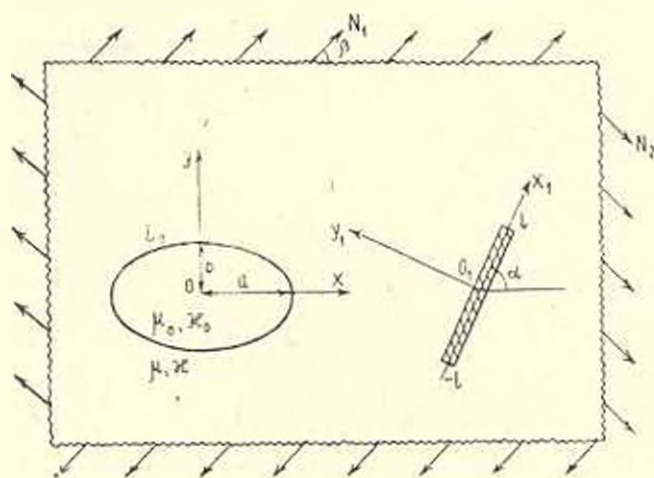
УДК 539.3.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ШАЙБОЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИЛИЦКИЙ Д. В., ОПАНАСОВИЧ В. К., ТИСОВСКИЙ Л. О.

Исследуем состояние упругого равновесия в пластине, содержащей упругую эллиптическую шайбу S_0 с полуосями a , b , ограниченную контуром L_0 , и прямолинейное тонкое упругое включение длины $2l$, ширины $2h$ (фиг. 1). На линиях раздела материалов имеют место условия идеального механического контакта. Пластина находится под действием системы заданных силовых факторов.

Центр шайбы, точку O , свяжем с декартовой системой координат xOy , а в центре тонкого включения, точке O_1 , поместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, причем ось O_1x_1 совпадает со средней линией включения и образует угол α с осью x .



Фиг. 1

Величины, характеризующие шайбу, будем обозначать индексом 0, включение—индексом 1, матрицу—без индексов.

Граничные условия на линиях раздела материалов можно представить следующим образом:
 для шайбы

$$[N(t) + iT(t)] = [N(t) + iT(t)]_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [u(t) + iv(t)] = \frac{\partial}{\partial t} [u(t) + iv(t)]_0, \quad t \in I_0 \quad (1)$$

для тонкого включения

$$(z_y - iz_{xy})|_{y_1 = \pm h} = (z_y - iz_{xy})|_{x_1 = \pm h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (u + iv)|_{y_1 = \pm h} = \frac{\partial}{\partial x_1} (u + iv)|_{x_1 = \pm h} + i\gamma \quad (2)$$

Здесь $N(t)$, $T(t)$ — нормальная и касательная составные вектора напряжений на контуре шайбы; u , v и z_x , z_{xy} — соответственно компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, γ — поворот включения как жесткого целого.

Для решения задачи применим аппарат теории функций комплексного переменного [1]. Комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, и силу линейности, представим в виде

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Psi_0(z) + \Psi_1(z) \quad (3)$$

где функции $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ определяют напряженно-деформированное состояние в однородной пластине при действии заданной системы внешних силовых факторов и считаются известными; потенциалы $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ характеризуют состояние упругого равновесия в пластине с тонким включением, а $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — в пластине с шайбой S_0 .

Считая включение пластиной малой ширины [2], будем иметь

$$(z_y - iz_{xy})_1 - (z_y - iz_{xy})_1^- = 2ihK'(x), \quad |x| \leq l$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^- - \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1 = \frac{ih}{\mu_1} M'(x), \quad |x| \leq l$$

$$(z_y - iz_{xy})_1 + (z_y - iz_{xy})_1^- = \frac{2}{1 + \alpha_1} [(1 - \alpha_1)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}], \quad |x| \leq l$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1 + \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^- = \frac{1}{\mu_1(1 + \alpha_1)} [2\alpha_1 K(x) + (\alpha_1 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}], \quad |x| \leq l \quad (4)$$

Соотношения (4) представляют собой модель тонкого упругого включения. Здесь $K(x)$, $M(x)$ — подлежащие определению функции, а знаками «+» и «-» обозначены граничные значения функций соответственно при $y_1 \rightarrow +0$ и $y_1 \rightarrow -0$. Для простоты в (4) и далее индекс 1 у переменной x опускаем.

Используя известные представления напряжений и перемещений через функции комплексного переменного [1], а также зависимости (4) и соотношения (3), из граничных условий (1), (2) получим краевые задачи

$$\Phi_0^+(t_0) - \Phi_0^-(t_0) + \overline{\Phi_0^+(t_0)} - \overline{\Phi_0^-(t_0)} + \frac{dt_0}{dt_0} [R_0^+(t_0) - R_0^-(t_0)] = 0, \quad t_0 \in L_0$$

$$|\Phi_1(x) - \Omega_1(x)|^+ - |\Phi_1(x) - \Omega_1(x)|^- = 2ihK'(x), \quad |x| \leq l$$

$$[x\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ - [x\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- = 2ih \frac{\mu}{\mu_1} M'(x), \quad |x| \leq l \quad (5)$$

$$x\Phi^-(t_0) - \overline{\Phi^-(t_0)} - \frac{dt_0}{dt_0} R^-(t_0) = \frac{\mu}{\mu_0} \{x_0\Phi^-(t_0) - \overline{\Phi^-(t_0)} - \frac{dt_0}{dt_0} R^-(t_0)\}$$

$$t_0 \in L_0$$

$$|\Phi_1(x) + \Omega_1(x)|^+ + |\Phi_1(x) + \Omega_1(x)|^- = \frac{2}{1+x_1} [(1-x_1)K(x) +$$

$$+ 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - 2P(x)z_1, \quad |x| \leq l$$

$$|x\Phi_1(x) - \Omega_1(x)|^+ + |x\Phi_1(x) - \Omega_1(x)|^- = \frac{2\mu}{\mu_1(1+x_1)} [2x_1K(x) +$$

$$+ (x_1-1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] - 2T(x)z_2 + 2i \frac{\mu}{\mu_1} \gamma, \quad |x| \leq l \quad (6)$$

Здесь

$$R(z) = z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}$$

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$$

$$P(x) = \Phi_p(X) + \overline{\Phi_p(X)} + e^{-2i\alpha} R_p(X)$$

$$T(x) = (1+x)\Phi_p(X) - P(x), \quad X = xe^{i\alpha} + z_0, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

$f_p(z) = f_s(z) + f_n(z)$, x_0, y_0 - координаты центра тонкого включения в системе координат xOy , $z_1 = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_1)}{\mu}$, $z_2 = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_1)}{\mu_1}$.

Используя результаты работ [3, 4, 5, 2], представим комплексные потенциалы задачи в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(t)dt}{t-z}, \quad \Psi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \left[\frac{\overline{Q(\bar{t})}d\bar{t}}{\bar{t}-z} + \frac{\bar{t}Q(t)dt}{(t-z)^2} \right]$$

$$\Phi_1(z) = \frac{he^{i\alpha}}{\pi(1+x)} \int_{-l}^l \frac{[K'(t) + \frac{\mu}{\mu_1} M'(t)]}{T-z} dt \quad (7)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{he^{-i\alpha}}{\pi(1+x)} \int_{-l}^l \left[\frac{-x\overline{K'(t)} + \frac{\mu}{\mu_1} \overline{M'(t)}}{T-z} - \frac{Te^{2i\alpha} [K'(t) + \frac{\mu}{\mu_1} M'(t)]}{(T-z)^2} \right] dt$$

где $T = te^{i\theta}$, z_0 , $Q(t)$ — неизвестная комплекснозначная функция. Отметим при этом, что выбор комплексных потенциалов в виде (7) позволяет тождественно удовлетворить соотношения (5).

Подставляя выражения для функций $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ ($j=0, 1$) в условия (6) и используя известные результаты для граничных значений интегралов типа Коши [4], получим систему трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций скачка

$$\begin{aligned} a\overline{Q(b)} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} [L_{11}(z, \theta)Q(z) + L_{12}(z, \theta)\overline{Q(z)}] d\tau &= \frac{h}{l\pi(1+z)} \times \\ \times \int_{-1}^1 [L_{11}(\xi, \theta)M'(\xi) + L_{12}(\xi, \theta)\overline{M'(\xi)} + L_{13}(\xi, \theta)K'(\xi) + L_{14}(\xi, \theta)\overline{K'(\xi)}] d\xi = \\ &= p_1(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{1}{1+z_1} [(1-z_1)K(\tau_1) + 2M(\tau_1) + 2\overline{K(\tau_1)} + 2\overline{M(\tau_1)}] - \frac{h(1-z)}{l\pi(1+z)} \int_{-1}^1 \frac{K'(\xi)d\xi}{\xi-\tau_1} = \\ &= -\frac{h}{l} \frac{2}{z_1=(1+z_0)} \int_{-1}^1 \frac{M'(\xi)d\xi}{\xi-\tau_1} + \frac{z_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} [L_{21}(z, \tau_1)Q(z) + L_{22}(z, \tau_1) \times \\ &\times \overline{Q(z)}] d\tau = p_2(\tau_1), \quad |\tau_1| \leq 1 \\ \frac{1}{z_1(1+z)} [2z_1K(\tau_1) + (z_1-1)M(\tau_1) - 2\overline{K(\tau_1)} - 2\overline{M(\tau_1)}] - \frac{h}{l} \frac{2z}{z_1(1+z)} \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{K'(\xi)d\xi}{\xi-\tau_1} - \frac{h}{l} \frac{z-1}{z_1(1+z)} \frac{1}{z_1} \int_{-1}^1 \frac{M'(\xi)d\xi}{\xi-\tau_1} + \frac{z_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} [L_{31}(z, \tau_1) \times \\ \times Q(z) + L_{32}(z, \tau_1)\overline{Q(z)}] d\tau = p_3(\tau_1), \quad |\tau_1| \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

которая имеет единственное решение при выполнении условий равновесия точечного включения и однозначности перемещений при обходе его контура

$$\int_{-1}^1 K'(\xi)d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 M'(\xi)d\xi = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{-1}^1 K'(\xi)d\xi = 0 \quad (9)$$

В соотношениях (8), (9) введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{11}(z, \theta) &= c \left| 1 - \frac{\omega(b)}{\omega'(b)} \frac{\overline{\omega(z) - \omega(b)}}{\omega(z) - \omega(b)} \right| \frac{\omega(z)}{\omega(z) - \omega(b)} \\ L_{12}(z, \theta) &= - \left| b + c \frac{\omega'(b)}{\omega'(b)} \frac{\overline{\omega(z) - \omega(b)}}{\omega(z) - \omega(b)} \right| \frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z) - \omega(b)} \end{aligned}$$

$$L_{12}(\bar{z}, \theta) = c \frac{\mu}{\mu_1} \left[1 - \frac{\omega'(\theta)}{\omega'(\theta)} \frac{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}} \right] \frac{e^{i\alpha}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{14}(\bar{z}, \theta) = \frac{\mu}{\mu_1} \left[b + c \frac{\omega'(\theta)}{\omega'(\theta)} \frac{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}} \right] \frac{e^{-i\alpha}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{15}(\bar{z}, \theta) = c \left[1 - \frac{\omega'(\theta)}{\omega'(\theta)} \frac{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}} \right] \frac{e^{i\alpha}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{16}(\bar{z}, \theta) = \left[b - c \frac{\omega'(\theta)}{\omega'(\theta)} \frac{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}} \right] \frac{e^{-i\alpha}}{\bar{T} - \overline{\omega(\theta)}}$$

$$L_{21}(\tau, \eta) = \left[1 + e^{-2i\alpha} \frac{\omega(\tau) - X}{\omega(\tau) - X} \right] \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - X}$$

$$L_{22}(\tau, \eta) = \left[1 - e^{-2i\alpha} \frac{\omega(\tau) - X}{\omega(\tau) - X} \right] \frac{\overline{\omega'(\tau)}}{\overline{\omega(\tau) - X}}$$

$$L_{23}(\tau, \eta) = \left[-x + e^{-2i\alpha} \frac{\omega(\tau) - X}{\omega(\tau) - X} \right] \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - X}$$

$$L_{24}(\tau, \eta) = \left[-1 + e^{-2i\alpha} \frac{\omega(\tau) - X}{\omega(\tau) - X} \right] \frac{\overline{\omega'(\tau)}}{\overline{\omega(\tau) - X}}$$

$$\omega(\theta) = a(\cos\theta + i\epsilon\sin\theta), \quad \epsilon = b/a, \quad T = l\epsilon e^{i\alpha} + z_0, \quad X = l\gamma e^{i\alpha} + z_0$$

$$a = \frac{1}{2} \left[z_0 + 1 + \frac{\mu_0}{\mu} (x+1) \right], \quad b = \frac{\mu_0}{\mu} x - z_0, \quad c = 1 - \frac{\mu_0}{\mu}$$

$$\rho_1(\theta) = b\overline{\Phi_0(\theta)} + c\Phi_0(\theta) + c \frac{\omega'(\theta)}{\omega'(\theta)} \left[\overline{\omega(\theta)} \Phi_0(\theta) + \Psi_0(\theta) \right]$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1(\eta) \\ \rho_2(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \Phi_0(X) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overline{\Phi_0(X)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2i\alpha} (X\overline{\Phi_0(X)} + \Psi_0(X)) - 2i\gamma \frac{\mu}{\mu_0} \delta_{20}$$

Дискретизуя систему сингулярных интегродифференциальных уравнений (8) и условий (9) с использованием численного метода механических квадратур [4], приходим к системе линейных алгебраических уравнений. Решив ее, можно определить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке пластины.

Для случая растяжения пластины равномерно распределенными усилиями N_1, N_2 ($\Phi_0(z) \equiv \Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Psi_0(z) \equiv \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\theta}$, θ — угол между направлением усилия N_1 и осью x) был проведен численный анализ решения задачи. Для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I ($i = \overline{1, 4}$) в вершинах включения использовались формулы

$$K_1^j - iK_2^j = \frac{\mu}{\mu_0} \Sigma_1, \quad K_3^j - iK_4^j = \Sigma_2$$

$$\Sigma_k = \frac{2h}{\sqrt{l}(1+\kappa)} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^m u_{km} \left(\operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \right)^{(2j-3)}, \quad k=1,3$$

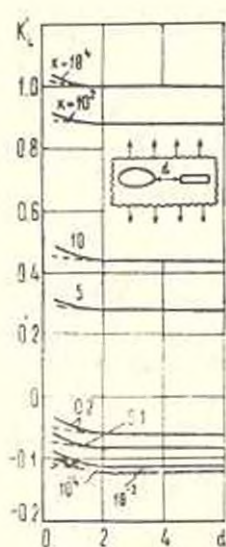
$$\begin{pmatrix} u_{1m} \\ u_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'(t_m) \\ K'(t_m) \end{pmatrix} \sqrt{1-t_m^2}, \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$$

Здесь $j=1$ для левого конца, $j=2$ для правого конца (в локальной системе координат). M —число узлов интерполяции, четное натуральное число.

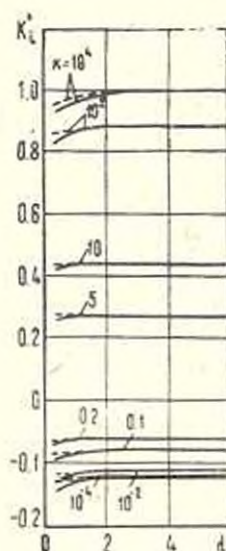
Кроме того, в случае эллиптического отверстия, напряжения на его контуре определялись на основании соотношения

$$\sigma_z = 4\operatorname{Re} \left[\Gamma - \frac{1}{2} Q(b) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Q(\tau) \omega'(\tau) d\tau}{\omega(\tau) - \omega(b)} \right]$$

Вычисления проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $y_0/l=0$; $h/l=0,1$; $a/l=1$; $\kappa_0=\kappa_1=\kappa=2$; $N_0=0$, $\alpha=0$, $\beta=\kappa/2$. При этом, как тестовая, вначале рассматривалась задача о растяжении пластины с круглой шайбой и тонким включением. Полученные результаты численного расчета сравнивались с результатами работы [6], где при решении этой же задачи использован иной подход. Установлено, что для коэффициентов интенсивности напряжений максимальная относительная ошибка не превышает 3%.



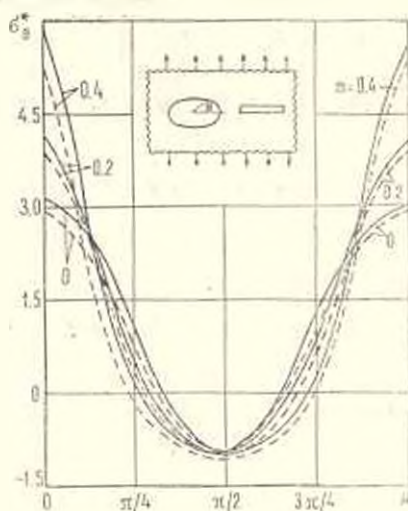
Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2, 3 представлены зависимости приведенных коэффициентов интенсивности напряжений $K_I^j = K_I / (\sqrt{l} N_1)$ в вершинах включения от расстояния d при $m = (1-b/a)/(1+b/a) = 0,5$ и различных относи-

тельных жесткостях тонкого включения. На фиг. 2 относительная жесткость шайбы μ_0/μ равна 0,2, а на фиг. 3 — $\mu_0/\mu = 5$. Сплошными линиями показаны значения коэффициентов интенсивности напряжений в ближней к шайбе вершине включения, штриховыми — в дальней. В верхней части рисунка при ординатах больше нуля приведены графики для K_1 , в нижней — для K_2 , при этом $K_2' = K_1' = 0$. Из рассмотрения приведенных численных результатов видно, что шайба незначительно влияет на концентрацию напряжений в окрестности вершин включения, так на расстоянии между ними равном 1,5 полуэллипсам прослойки взаимодействие прекращается.



Фиг. 4

Распределение напряжений $\sigma_1' = \sigma_0/N_1$ по контуру отверстия при $x_0/l=3$ и различных значениях m показано на фиг. 4. Сплошные линии построены для пластины с отверстием и трещиной, штриховые — для пластины только с отверстием. Для упругого включения исследуемые зависимости лежат между сплошной и штриховой линиями, при этом следует отметить, что в заданном случае взаимного расположения прослойки и отверстия наличие включения, материал которого жестче материала матрицы, не приводит к перераспределению концентрации напряжений на контуре последнего, то есть искомые зависимости представляются на фиг. 4 штриховыми линиями.

STRESS DISTRIBUTION IN THE PLATE WITH AN ELLIPTICAL WASHER AND STRAIGHT THIN ELASTIC INCLUSION

D. V. GIRILITSKI, V. K. OPANASOWITH, I. O. TISOWSKI

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՈՒՂԱԳԻԾ ԱՌԱՋԳԱՆԱՆ ԲԱՐՍԿԻ
ՆԵՐԴՐԱԿ ԵՎ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՏԱՓՈՂԱԿ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՍԱԼՈՒՄ

Գ. Վ. ԴՐՈՒՑԿԻ, Վ. Կ. ՕՊԱՆԱՍՈՎԻՉ, Լ. Օ. ՏԻՍՈՎՍԿԻ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկված է կամայական ձևով տեղադրված էլիպտական տափօղակ և ուղղադիրժ բարակապատ առաձգական ներգրակ պարունակող անվերջ սալում լարվածային դեֆորմացված լիճակը որոշելու խնդիրը: Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդների օգնությամբ խնդիրը բերվում է երեք սինգուլյար ինտեգրալֆերենցիալ հավասարումների հետադրումանը: Ստացված համակարգի թվային լուծումը կատարված է մեխանիկական բառակուսացման մեթոդով:

Խնդրի տարրեր պարամետրերի համար կատարված է բարակ ներգրակի դադաթնեկում լարումների ինտենսիվության պորձակիցների և էլիպտական տեսքի էկրագծով լարումների բաշխման թվային մանրամասն հետազոտում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966, 707 с.
2. Драган М. С., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным толкостенным включением.—Прикл. математика и механика, 1979, 43, № 2, с. 342—348.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. Y. The inclusion problem in plane elasticity.—Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1977, 30, № 4, p. 437—448.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наукдумка, 1981, 324 с.
5. Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами.—Докл. АН СССР, 1981, 261, № 3, с. 567—570.
6. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением.—Прикл. математика и механика, 1982, 46, № 6, с. 993—1000.

Львовский государственный университет
им. Ив. Франко

Поступила в редакцию
13.V. 1987

УДК 539.319

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСОВ НА ГРАНИЦАХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО РАЗРЕЗА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

БАГДЮЕВ А. Г., МАРТИРОСЯН А. И.

Плоские задачи о импульсах, приложенных к берегам трещины в анизотропной среде, решены в [1, 2, 3]. Пространственная задача о трещине в изотропной среде рассмотрена в [4]. В данной работе дается решение пространственной задачи о движущейся трещине с определением коэффициентов интенсивности напряжений. Производится оценка применимости метода [5] к пространственным задачам.

§ 1. Решение задачи о импульсе, приложенном к границам движущейся трещины

В пространственной задаче, вводя компоненты $u_{i,2}$ вектора смещения по осям x, y, z , где $x = \bar{x} - Vt$, \bar{x}, y, z — неподвижная система координат, V — скорость трещины, t — время, можно сформулировать следующую задачу о полубесконечной движущейся трещине ($y = 0$).

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad |x| < \infty, \quad |z| < \infty \\ \sigma_{yy} = \tau_0(x, z, t), \quad x < 0; \quad u_z = 0, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для простоты вначале выбирается нагрузка $\sigma_{yy}(x, z, t) = -P\delta(x-\xi)\delta(z-\eta)H(t-\tau)$, где δ — дельта-функция, H — единичная функция, P, ξ, η — постоянные, $\tau < 0$.

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае имеют вид

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + b^2 \nabla^2 u_1 &= \Delta_1 u_1, \quad (a^2 - b^2) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + b^2 \nabla^2 u_2 = \Delta_1 u_2 \\ (a^2 - b^2) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + b^2 \nabla^2 u_3 &= \Delta_1 u_3, \quad \Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2V \frac{\partial}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

и нулевых начальных данных.

Решение ищется в виде интегральных трансформант Лапласа и Фурье по x, z

$$u_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 u_{1,2} \exp(i\alpha x + i\gamma z + i\gamma \beta_n) d\alpha d\gamma \quad (1.3)$$

$$\beta_n = \sqrt{\left(\frac{\omega + V\alpha}{c_n}\right)^2 - \alpha^2 - \gamma^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad \omega = i s$$

где s — параметр преобразования Лапласа. Проведем разрезы плоскости α и выделим однозначные ветви функций β_n [4]. Вводя также функции

$$\bar{u}_\pm = U^+ + U^-, \quad \bar{z}_\pm = \Omega^- + \Omega^+, \quad \Omega^\pm = -\frac{\rho}{4\pi^2 s} \exp(-i\alpha z - i\gamma \gamma - i s), \quad U^- = 0$$

где индекс показывает, в какой полуплоскости функции аналитичны, можно из (1.3), (1.1) получить следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$4ib^4(V^2 C_0)^{-1} \beta_2^+ F^+ U^+ = (\Omega^+ + \Omega^-) \beta_2^- F^-$$

$$F^\pm(z, \gamma) = \frac{x_3^\pm - z}{\sqrt{x_1^\pm - z} \sqrt{x_2^\pm - z}} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mp}^{\pm} \ln \frac{R(\zeta, \gamma)}{R(z, \gamma)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \quad (1.4)$$

$$R(z, \gamma) = (\beta_1^2 - \alpha^2 - \gamma^2)^2 + 4(\alpha^2 + \gamma^2) \beta_1 \beta_2, \quad R(z_3^\pm, \gamma) = 0$$

$$C_0 = 4[(1 - b^{-2} V^2)(1 - a^{-2} V^2)]^{1/2} [4\sqrt{(1 - V^2 b^{-2})(1 - V^2 a^{-2})} - (V^2 b^{-2} - 2)^2] -$$

$$\alpha_n^\pm = (c_n^2 - V^2)^{-1/2} [\omega V \pm c_n \sqrt{\omega^2 - \gamma^2 (c_n^2 - V^2)}]$$

$$\beta_n^\pm = \sqrt{(V c_n \mp 1)(x_n^\mp - z)}, \quad \beta_n = \beta_n^+ \beta_n^{-1}, \quad c_3 = c_R$$

где c_R есть корень функции Релся.

Обозначим $f(z, \gamma) = -\frac{\rho \exp(-i s - \alpha z i - \gamma z i)}{4\pi^2 s \beta_2^- F^-}$ и представим функцию

$f(z, \gamma)$ в виде $f(z, \gamma) = f^+(z, \gamma) \cdot f^-(z, \gamma)$,

$$f^-(z, \gamma) = \frac{\rho}{4\pi^2 s} \int_{\alpha_1^-}^{\alpha_1^+} \frac{\sqrt{x_3 - \alpha_1^+} D_{-1}^{-1}(\gamma, \gamma) \exp(-i s - i \gamma \eta - i \xi x_1)}{(x_3 - x_1) \sqrt{1 + V c_2^{-1}(\gamma_1 - \alpha)}} d\alpha_1 \quad (1.5)$$

$$D_\pm(z, \gamma) = \frac{F^\pm(z, \gamma)}{x_1^\pm - z} \sqrt{x_1^\pm - z} \sqrt{x_2^\pm - z}, \quad D_\pm^{-1}(z, \gamma) = 1/D_\pm(z, \gamma)$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и решая уравнение Винера-Хопфа по α , можно получить, в частности,

$$\Omega^- = -f^-(\alpha, \gamma) \beta_2^-(\alpha, \gamma) F^-(z, \gamma) \quad (1.6)$$

Сделаем видоизменение аналогично [5] для функций D_\mp , D_\mp^{-1} по переменной α

$$D_{\pm}(z, \gamma) = 1 + \int_{\frac{\alpha_1^+}{2}}^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \frac{F_1(u, \gamma)}{u \pm z} du, \quad D^{-1}(z, \gamma) = 1 + \int_{\frac{\alpha_1^+}{2}}^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \frac{F_2(u, \gamma)}{u \pm z} du \quad (1.7)$$

$$F_1(u, \gamma) = \varphi(u, \gamma) \exp[z(u, \gamma)], \quad F_2(u, \gamma) = -\bar{\varphi} \exp(-z)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{4(u^2 + \gamma^2)}{\pi |R(u, \gamma)|} \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right)} \sqrt{u - \alpha_1^+} \sqrt{u - \alpha_1^-} \sqrt{(\alpha_2^+ - u)(u - \alpha_2^-)}$$

$$s(u, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1^-}^{\alpha_2^+} \ln \frac{R(\zeta, \gamma)}{R(\zeta, \gamma) - u} d\zeta$$

На плоскости x, z решение можно записать в форме Смирнова-Соболева в виде двукратных интегралов. Удобно для получения решения около края трещины ввести запись ($x > 0, y = 0$)

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x, \gamma) \exp(st + izx + i\gamma z) d\gamma \quad (1.8)$$

При $x \rightarrow +0$ имеем $a \rightarrow \infty$, что позволяет вычислить последний интеграл и после обращения преобразований [1] и некоторых несложных вычислений получить

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi^2 \sqrt{-\xi x}} \operatorname{Re} l \frac{\partial}{\partial t} H\left(t_1^2 - \frac{\gamma_1}{c_1^2 - V^2}\right) \left| \frac{2c_1 \xi}{\gamma_1 \sqrt{c_1^2 - V^2}} \right| \sqrt{t_1^2 - \frac{\gamma_1}{c_1^2 - V^2}} + \quad (1.9)$$

$$+ \int_{\frac{\alpha_1^-}{2}}^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \left(\int_L^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \frac{\sqrt{u - \alpha_1^-}}{\alpha_2^+ - u} \frac{F_2(u, \gamma)}{\sqrt{u - L}} du \right) H\left(\frac{\gamma_2}{c_2^2 - V^2} - t_2^2\right) d\gamma +$$

$$+ \int_{\frac{\alpha_1^-}{2}}^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \left(1 - \int_{\frac{\alpha_1^+}{2}}^{\frac{\alpha_2^+}{2}} \frac{F_2(u, \gamma)}{\alpha_2^+ - u} du \right) \sqrt{\frac{\alpha_2^+ - \alpha_1^+}{\alpha_2^+ - \alpha_1^- - L}} H\left(\frac{\gamma_2}{c_2^2 - V^2} - t_2^2\right) d\gamma \Big\}$$

$$t_n = \frac{t - \tau}{-\xi} - \frac{V}{c_n^2 - V^2}; \quad \gamma_n = \frac{(z - \gamma)^2}{\xi^2} + \frac{c_n^2}{c_n^2 - V^2}; \quad L = \frac{t - \tau - \gamma(z - \gamma)}{-\xi}$$

$$t_n - (z - \gamma) \gamma_n^{\pm} + \frac{c_n \xi}{c_n^2 - V^2} \sqrt{1 - (c_n^2 - V^2)(\gamma_n^{\pm})^2} = 0, \quad n = 1, 2, 3$$

где четко выделены отраженные от движущейся трещины и идущие от приложенной силы волны, имеющие скорости $\sqrt{c_n^2 - V^2}$. В случае $z \rightarrow \eta, x \rightarrow +0$ получится решение в виде (1.9), где надо подставить

$$\gamma_n^{\pm} = \pm \frac{c_n}{c_n^2 - V^2} \sqrt{\gamma_n - t_n^2 (c_n^2 - V^2)}, \quad \gamma_n = \frac{c_n^2}{c_n^2 - V^2}$$

Из (1.9), отбрасывая формально $-\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau$, полагая $\gamma=0$ и делая замену в интеграле по $u=\gamma_1(1-\gamma_1 V)^{-1}$, можно получить решение для плоской задачи, которое находится аналогично (1.9)

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi \sqrt{x}} D_- \left(\frac{1}{V} \right) \sqrt{\frac{a}{a-V}} \left\{ D_-^{-1} \left(\frac{1}{V} \right) \sqrt{\frac{a-V}{-za}} - \sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{V(t-\tau)-z}} \frac{D_-^{-1}(c_R^{-1})}{\sqrt{c_R^{-1}-T}} \right. \\ \left. \times H \left(\frac{1}{c_R} - T \right) - \frac{V^{-1}-c_R^{-1}}{V(t-\tau)-z} \int_T^{b^{-1}} \frac{F_2(u) \sqrt{u-a^{-1}} du}{(u-V^{-1})(u-c_R^{-1}) \sqrt{a-T}} H(b^{-1}-T) \right\} \quad (1.10)$$

где D_- дается (1.7), где полагается $\gamma=0$ и производится замена $u=\gamma_1(1-\gamma_1 V)^{-1}$ в интеграле. Из (1.10) можно получить коэффициент интенсивности напряжений. Полагая $\gamma=0$, $z=0$, $x \rightarrow +0$, можно решить исходную задачу методом Винера-Холфа. Тогда для коэффициента интенсивности напряжений получится, как и в [4]

$$\sigma_{y,0} = \frac{P \sqrt{2 \sqrt{a(c_R^2 - V^2)}}}{4 \pi x \sqrt{x|z|} c_R \sqrt{a^2 - V^2}} \frac{H(t-\tau)}{D_-(0, \infty)}$$

где

$$D_-(0, \infty) = 1 + \int_{d_1}^{d_2} \frac{F_2(u) du}{u}, \quad d_a = \frac{c_R}{\sqrt{c_R^2 - V^2}}$$

$$F_2(u) = -\varphi(u) \exp(-\chi(u)), \quad \chi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \ln \frac{R(\zeta)}{R(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - u}$$

$$\varphi(u) = \frac{4(u^2-1)}{\pi |R(u)|} \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right)} \sqrt{u^2 - d_1^2} \sqrt{d_2^2 - u^2}$$

$$R(u) = 4(u^2-1) \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right)} \sqrt{d_1^2 - u^2} \sqrt{d_2^2 - u^2} + \left[\left(\frac{V^2}{b^2} - 2 \right) u^2 + 2 \right]^2$$

§ 2. Случай силы, приложенной в начальном положении трещины

Вместо (1.1) согласно [6] следует записать при $y=0$ и $|z| < \infty$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad |x| < \infty \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy} = -P \lambda (x + Vt - \xi) \beta (z - \gamma) H(t - \tau), \quad x < 0, \quad u_2 = 0, \quad x > 0$$

Для задачи (2.1) получим уравнение Винера-Холфа в виде (1.4), где

$$\Omega = P [4\pi^2 (Vat - s)]^{-1} \exp[-s\tau - (\xi - V^2)at - i\gamma\tau]$$

Решая это уравнение и проводя обратное преобразование по z , γ , s на плоскости $y=0$, можно получить аналогично § 1 значение σ_{yy} при $x > 0$. При $x \rightarrow +0$ для коэффициента интенсивности напряжений получим

$$\sqrt{2\pi x_2 y} = P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} H(\zeta_0) \left\{ \left[1 + \right. \right.$$

$$+ V \int_{a_1^+}^{a_2^+} \frac{F_2(u, \gamma)}{1+uV} du \left. \right] \frac{\sqrt{1+Vx_1} H(\zeta_1)}{(1+Vx_1^+) \sqrt{t_0 \zeta_1}} - \left(1 - \int_{a_1^+}^{a_2^+} \frac{F_2(u, \gamma) du}{x_2^+ - u} \right) \frac{\sqrt{x_1^+ - x_1^+} H(\zeta_2)}{(1+Vx_1^+) \sqrt{t_0 \zeta_2}} -$$

$$- \int_{a_0^+ - \zeta_1}^{a_2^+} \frac{F_2(u, \gamma) \sqrt{u - x_1^+} du H(\zeta_3)}{(x_2^+ - u)(1+uV) \sqrt{t_0(u - x_2^+ + x_1^+)}} \Big| d\gamma \quad (2.2)$$

$$\zeta_0 = t - \tau - (z - \gamma_1) \gamma - t_0 a_1^+, \quad t_0 = V \tau - \zeta$$

$$\zeta_1 = 1 + Vx_1^+ + \frac{\zeta_0}{t_0} V, \quad \zeta_2 = x_2^+ - x_1^+ - \frac{\zeta_0}{t_0}, \quad \zeta_3 = x_2^+ - x_1^+ - \frac{\zeta_0}{t_0}$$

Полученные формулы можно сравнить с решением плоской задачи [5]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi x_2 y} = V \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - c_R^{-1} l}{\sqrt{1 - a^{-1} l}} \frac{K(l) g(t)}{\sqrt{l - \xi}} H(l - a^{-1}) \quad (2.3)$$

$$g(t) = 1 - B \sqrt{\frac{c_R^{-1} - a^{-1}}{c_R^{-1} - L}} H(c_R^{-1} - L) - \int_L^{b^{-1}} \frac{F_2(u)}{c_R^{-1} - u} \sqrt{\frac{u - a^{-1}}{u - L}} du H(b^{-1} - L)$$

$$B = 1 - \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1} - u} du, \quad F_1(u) = \gamma(u) \exp(x(u)), \quad F_2(u) = -\gamma(u) \exp(-x)$$

$$\gamma(u) = \frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{b^{-2} - u^2} \sqrt{u^2 - a^{-2}} [(b^{-2} - 2u^2)^2 + 16u^4(b^{-2} - u^2)(u^2 - a^{-2})]^{-1/2}$$

$$K(l) = 1 - l \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_2(u) du}{1 - ul}, \quad x(u) = \frac{1}{\pi} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{\varphi(z) dz}{z - u}$$

$$\varphi(z) = \arctg [4z^2 \sqrt{b^{-2} - z^2} \sqrt{z^2 - a^{-2}} (b^{-2} - 2z^2)^{-1/2}]$$

$$l = l(t), \quad \bar{l} = \bar{l}(t), \quad L = (t - \tau) / (l - \xi)$$

Из (2.2), отбрасывая формально интеграл $-\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int d\gamma$ и полагая $\gamma = 0$ и делая замену в интеграле по u , $u = \gamma_1(1 - \gamma_1 V)^{-1}$, можно получить (2.3). И обратно, заменяя в (2.3) l через $l - \gamma z$, умножая интеграл на $\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$ и интегрируя по γ , получим (2.2). Полученное соответствие пространственной и плоской задач дает основание предполагать, что и для переменной скорости указанное соответствие имеет

место. При этом коэффициент интенсивности напряжений пространственной задачи при переменной скорости дается (2.2), $V=\dot{\lambda}(t)$.

Аналогично [5] можно, зная величины σ_z^0 для частного вида нагрузки ((1.9), (2.2)), найти значение σ_z при произвольной $\sigma_z(x, z, t)$

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial \sigma_z^0(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} \sigma_z^0(t, z, x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta d\tau$$

THE SOLUTION OF PROBLEM ABOUT IMPULSES ACTING ON BOUNDARY OF SEMI-INFINITE CUT MOVING WITH CONSTANT VELOCITY

A. G. BAGDOEV, A. N. MARTIROSIAN

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՐԱԳՆԻԹՅԱՆՆԵՐ ՇԱՐՇՎՈՂ ԿՐԻՍԱՆԱԿԵՐՁ ՃԵՂԵՐ ԵՋՐԵՐԻ ՎՐԱ ԿՐԻՍԱՆԱԿՏ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՋԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՇՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎ, Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ինքիս աշխատանքում արվում է առաձգական իզոտրոպ միջավայրում հաստատուն արագությամբ շարժվող կիսահարթի մասին տեսք ունեցող ճեղքի խնդիրը, որի եզրերի վրա կիրառված են իմպուլսներ: Լուծումը պահվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, ինչպես նաև ճեղքի եզրին ուղղահայաց փոփոխականի եկամամբը վիներ-Հուգոնի մեթոդի կիրառմամբ: Լարումների ինտենսիվության գործակցի համար ստացված են պարզ արտահայտություններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 15—23.
2. Мартиросян А. Н. Решение нестационарной граничной задачи для магнитоупругой среды.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 6, с. 33—43.
3. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 3, ст. 10—20.
4. Мартиросян А. Н. О нестационарном движении упругого пространства с целью.—ПММ, 1976, т. 40, № 3, с. 544—553.
5. Сарайкин В. А., Славян Л. Н. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—МТТ, 1979, № 4, с. 54—73.
6. Freund L. B. Crack-propagation in an elastic solid subjected to general loading. I—II J.—Mech. Phys. solids, 1972 (I), p. 129, (II) p. 141, vol. 20.

Институт механики АН Армянской ССР

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
29.IX. 1987

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ
МАЛОЦИКЛОВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ

КОТИКЯН Р. А.

В данной работе приводятся результаты исследований нелинейной ползучести бетона при малоцикловом нагружении в зависимости от возраста бетона к моменту загрузки и направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, то есть в двух взаимноперпендикулярных направлениях. Опыты проводились на призматических образцах сечением 7×7 см, высотой 28 см, изготовленных из вибрированного тяжелого бетона на базальтовом щебне, кварцевом песке и портланд-цементе активностью 50 МПа. Состав бетона 1:3,68:5,21. Всего было приготовлено четыре замеса бетона и из каждого изготовлено 90 призм, из коих: 42 бетонировались в вертикальных формах для испытаний перпендикулярно слоям бетонирования, а остальные — в горизонтальных формах для испытаний параллельно слоям бетонирования. Для краткости дальнейшего изложения первые условия обозначим образцами ПЕС, а вторые — образцами ПАС. В процессе длительных опытов в помещении лаборатории температура воздуха $T = 22 \pm 1^\circ \text{C}$, а относительная влажность $P = 72 \pm 10\%$.

Для исследования ползучести бетона при постоянных и малоцикловых нагрузках образцы ПЕС и ПАС были загружены в возрасте (t) 7,28 и 226 сут., причем, в каждом возрасте — тремя разными уровнями нагружения: 0,25; 0,50 и 0,75. Назначение режимов нагружения образцов исходило из существующих исследований линейной и нелинейной ползучести бетона. Как известно, при нагружении бетона в молодом возрасте высокими напряжениями интенсивный рост прочности бетона во времени приводит к тому, что нелинейная ползучесть носит скоропроходящий характер, а при нагружении бетона в старом возрасте степень нелинейности ползучести во времени увеличивается. Именно по этой причине для молодого бетона принят более непродолжительный интервал времени цикла. Сравнительно непродолжительные циклы были приняты и для уменьшения продолжительности опытов. При исследовании ползучести бетона при малоцикловом нагружении в каждом возрасте одинаковым уровнем напряжения загружались по 10—12 образцов ПЕС и ПАС, большая часть которых в разное время подвергалась кратковременным испытаниям. Образцы по 2 шт. из каждой разновидности испытывались после разгрузок циклических нагрузок и «отдыхов», так что в итоге после отдыхов вторых циклов длительному

загружению подвергались 2—4 образца. Эти испытания необходимы были для оценки влияния циклических нагрузок и «отдыхов» на упруго-мгновенные деформации при нагружении и разгрузке, на модуль деформации и правильность оценки деформаций ползучести. Статистическая обработка экспериментальных данных показала, что показатель точности эксперимента в большинстве случаев не превышает 7%, при коэффициенте вариации $v=8,5\%$.

Таблица 1

Ползучесть бетона при постоянных и циклических сжимающих нагрузках

t (сут.)	τ (сут.)	Деформации ползучести образцов $\epsilon_p \times 10^3$, нагруженных нагрузками: постоянными (числитель), циклическими (знаменатель)						Коэффициент анизотропии α ползучести при нагрузках: постоянными (числитель), циклическими (знаменатель) α/R_{np}			Отношение деформаций ползучести образцов, нагруженных постоянными нагрузками к деформациям ползучести образцов, нагруженных циклическими нагрузками					
		образцов ПЕС при σR_{np}			образцов ПАС при σR_{np}						образцов ПЕС при σR_{np}			образцов ПАС при σR_{np}		
		0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75
60	7	7,0	11,6	19,3	6,0	11,2	18,0	1,14	1,04	1,07	1,40	1,23	1,18	1,54	1,24	1,35
		5,0	9,4	16,3	3,9	9,0	13,3	1,28	1,04	1,23						
	28	3,7	6,8	16,0	3,2	6,4	12,0	1,16	1,06	1,31	1,23	1,17	1,19	1,03	1,02	0,94
		3,0	5,8	13,4	3,1	6,3	12,7	0,97	0,92	1,00						
	226	0,80	3,2	6,2	1,0	1,8	1,6	0,80	1,72	1,35	1,33	0,97	0,83	1,25	1,29	0,81
		0,60	3,3	7,5	0,8	1,4	5,7	0,75	2,36	1,31						
300	7	8,0	14,0	22,5	7,5	13,2	20,4	1,07	1,06	1,10	1,21	1,17	1,11	1,41	1,14	1,27
		6,6	12,0	20,2	5,3	11,6	16,0	1,24	1,03	1,26						
	28	5,2	9,6	20,8	5,0	8,8	16,0	1,04	1,09	1,30	1,06	1,28	1,17	1,08	0,90	0,93
		4,9	7,5	17,8	4,6	9,8	17,2	1,07	0,77	1,03						
	226	1,7	4,6	8,5	1,6	3,5	6,6	1,06	1,37	1,29	1,21	1,00	0,83	1,23	0,97	0,75
		1,4	4,8	10,2	1,3	3,6	8,8	1,08	1,33	1,16						

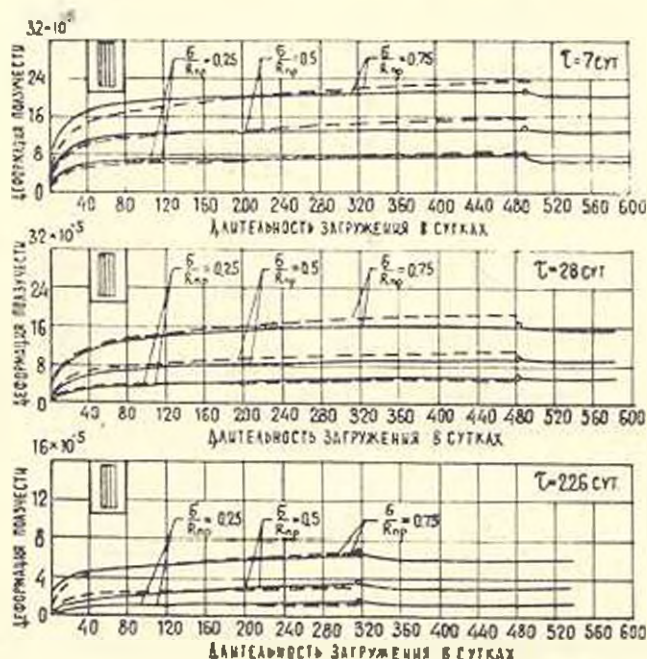
Для анализа, как качественно и количественно влияет циклическая нагрузка на ползучесть бетона и степень его анизотропии по ползучести, обратимся к табл. 1, где приведены экспериментальные значения деформаций ползучести при длительностях нагружения 60 и 300 сут. Как видим, отношение ползучести образцов, нагруженных постоянными нагрузками к ползучести образцов, нагруженных циклическими нагрузками, в большинстве случаев больше единицы. Это соотношение не зависит от длительности нагружения, уменьшается и с увеличением t и при $t=60$ сут., $\tau=226$ сут.; соотношение $\alpha/R_{np} \geq 0,5$ становится меньше единицы, то есть в этом случае ползучесть образцов, нагруженных циклическими нагрузками, уже больше ползучести образцов, нагруженных постоянными нагрузками. При $t=300$ сут. это обстоятельство имеет место и при $\tau=28$ сут. $\alpha/R_{np} \geq 0,5$. Рассмотрим

теперь, как изменяется коэффициент анизотропии бетона по деформациям ползучести (K_p), который представляет отношение деформаций ползучести образцов ПЭС к деформациям ползучести образцов ПАС. Как видим, как при постоянных, так и циклических нагрузках ползучесть образцов ПЭС больше ползучести образцов ПАС.

Одной из целей настоящей работы являлось исследование применимости теории упруго-ползучего тела [1] к описанию ползучести бетона при переменных режимах нагружения и разгрузок с учетом нелинейности деформаций и анизотропии материала. Согласно этой теории мера ползучести стареющего бетона представляется в следующем виде:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) \quad (1)$$

Формула (1) не учитывает анизотропию бетона, то есть бетон рассматривается как изотропный материал. Между тем, многочисленными исследованиями К. С. Карапетяна [2], К. С. Карапетяна и Р. А. Котикяна [3] и других установлено, что бетон в отношении прочности, модуля деформации и деформаций ползучести как при сжатии, так и при растяжении является существенно анизотропным материалом, а степень анизотропии зависит от различных факторов. Это ясно видно из данных табл. 1, а также фиг. 1 и 2, на которых сплошными линиями показаны экспериментальные кривые ползучести призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования постоянными

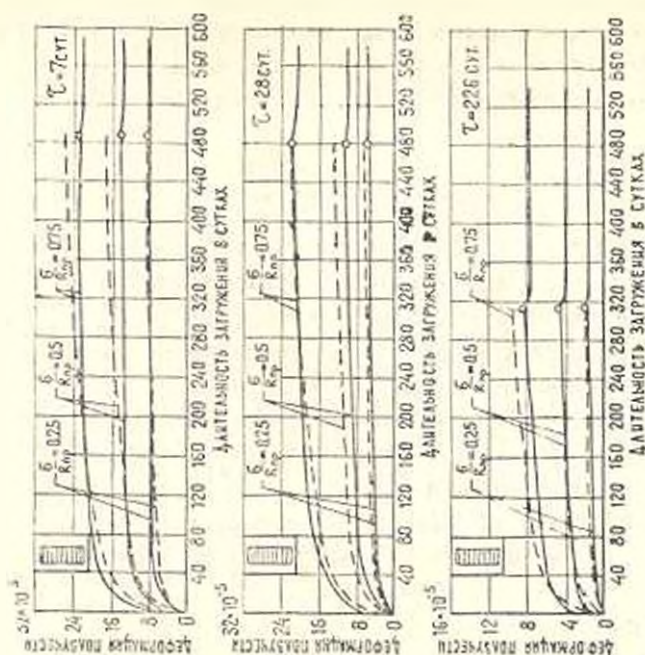


Г. И. Ф.

нагрузками. При описании этих кривых для меры ползучести была принята следующая зависимость:

$$C(t, \tau) = K^*(\tau) \cdot C'(t, \tau) \quad (2)$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести образцов ПЭС, $C'(t, \tau)$ — мера ползучести образцов ПАС, а $K^*(\tau)$ — функция анизотропии ползучести.



Фиг. 2

Для описания меры ползучести образцов ПАС получена следующая зависимость:

$$C'(t, \tau) = \left(0,45 + \frac{132}{15 + \tau}\right) [1 - 0,5(e^{-0,1t} + e^{-0,003t})] \times 10^{-6} \quad (3)$$

Как уже было показано (табл. 1), отношение ползучести образцов ПЭС и ПАС существенно зависят от возраста бетона к моменту испытания τ . Учитывая это, фигурирующая в зависимости (2) функция анизотропии ползучести $K^*(\tau)$ в пределах данных опытов представляется в следующем виде:

$$K^*(\tau) = a + b\tau \quad (4)$$

где a и b — определяемые из опыта коэффициенты и их значения соответственно составляют 1,1 и 0,00168. Таким образом, на основании зависимостей (2), (3) и (4), для описания меры ползучести образцов ПЭС получена следующая зависимость:

$$C(t, \tau) = (1,1 + 0,00168\tau) \left(0,45 + \frac{132}{15 + \tau}\right) [1 - 0,5(e^{-0,1t} + e^{-0,003t})] \times 10^{-6} \quad (5)$$

Как известно, согласно нелинейной теории ползучести [1]

$$\epsilon_0(t, \tau) = F[\sigma] = C(t, \tau) \quad (6)$$

где $F[\sigma]$ — некоторая функция напряжения, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Согласно Н. Х. Арутюняну [1]

$$F[\sigma] = \alpha\sigma + \beta\sigma^n \quad (7)$$

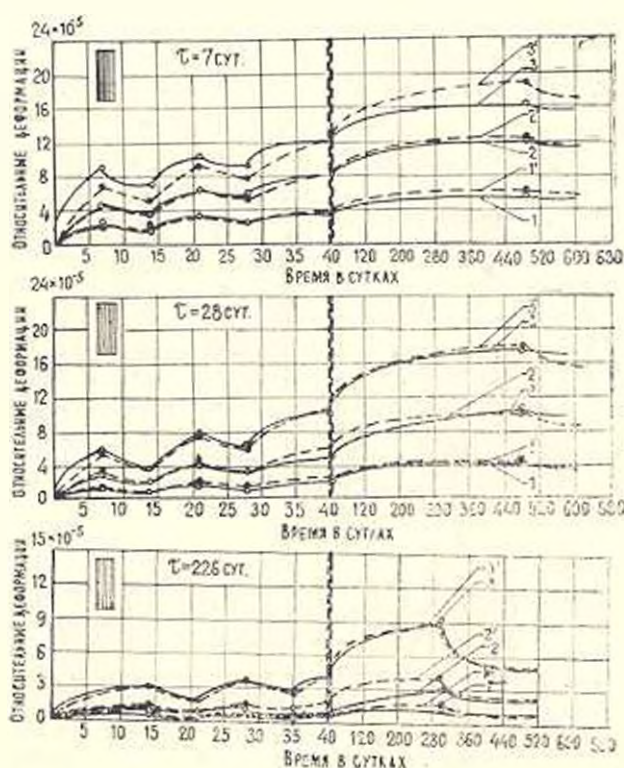
где α , β и n — определяемые из опыта коэффициенты.

Исследования показали, что при $\tau = 7$ сут. линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести практически сохраняется до уровня напряжения 0,75; то есть $F[\sigma] = \sigma$.

Для $\tau = 28$ и 226 сут. получены следующие значения коэффициентов α , β и n :

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \tau = 28 \text{ сут.} \\ \alpha = 0,99999782 \\ \beta = 0,00000218 \\ n = 4 \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \tau = 226 \text{ сут.} \\ \alpha = 0,999986 \\ \beta = 0,000011 \\ n = 4 \end{array} \right\} \quad (9)$$

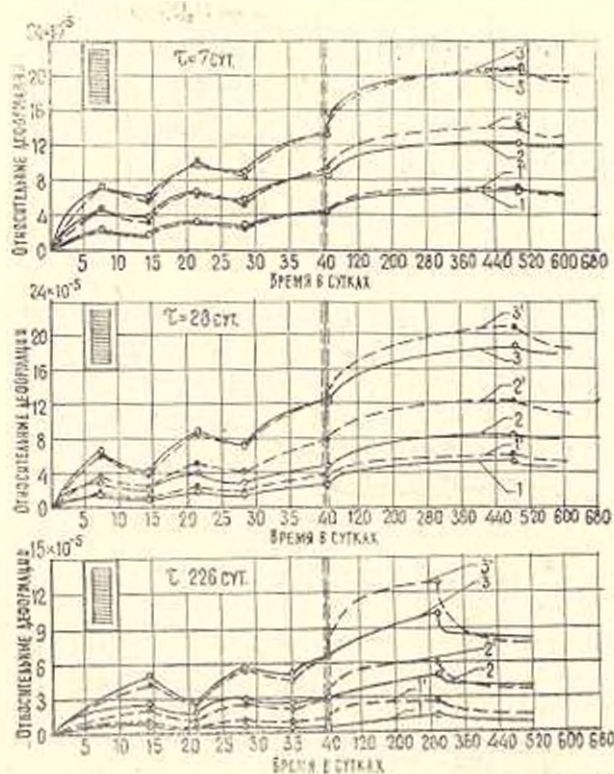


Фиг. 3

На фиг. 1 и 2 теоретические кривые деформаций ползучести образцов ПЕС и ПАС при постоянных напряжениях, показанные пунктирными линиями, рассчитаны зависимостями мер ползучести (3) и (5) и соответствующей каждому τ функцией напряжения. Как видим, сходимость экспериментальных и теоретических кривых весьма удовлетворительно. Обратимые деформации ползучести определены из зависимости [4]

$$\varepsilon_{\text{об}} = \varepsilon_{\text{н}}(t_1, \tau_1) - \varepsilon_{\text{н}}(t_1, \tau_2) \quad (10)$$

где $\varepsilon_{\text{н}}(t_1, \tau_1)$ — деформация ползучести в момент t_1 , вызванная напряжением $\sigma(\tau_1)$, приложенным в момент τ_1 , и постоянное во времени. $\varepsilon_{\text{н}}(t_1, \tau_2)$ — деформация ползучести в момент t_1 , вызванная напряжением $\sigma(\tau_2)$, приложенным в момент τ_2 , по величине и противоположным по знаку напряжению $\sigma(\tau_1)$, приложенному в момент τ_1 и постоянное во времени.



Фиг. 4

На фиг. 3 и 4 приведены экспериментальные и теоретические кривые ползучести бетона при малоцикловом нагружении. Теоретические кривые рассчитаны по формулам (3—6), а остаточные деформации ползучести определялись по формуле (10). Из этих фигур видно, что теория упругоползучего тела с уточнением (2) вполне удовлетворительно описывает экспериментальные кривые нелинейной ползучести стареющего бетона и при малоцикловой сжимающей нагрузке в двух взаимноперпендикулярных напряжениях.

Выводы

1. Малоцикловая сжимающая нагрузка приводит к уменьшению ползучести бетона, загруженного в молодом возрасте. С увеличением возраста бетона к моменту загрузки положительное влияние малоцикловой нагрузки уменьшается и уже при $\tau \geq 28$ сут. и $\sigma R_{np} \geq 0,5$, независимо от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Ползучесть образцов, загруженных малоцикловой нагрузкой, больше ползучести образцов, загруженных постоянной нагрузкой.

2. Независимо от τ , t и σR_{np} , как при постоянных, так и при циклических сжимающих нагрузках, коэффициент анизотропии бетона по деформациям ползучести больше единицы, то есть ползучесть образцов, испытанных поперек слоев бетонирования, больше, чем ползучесть образцов, испытанных вдоль слоев бетонирования.

3. Теория упруго-ползучего тела с уточнением (2) вполне применима для описания экспериментальных кривых нелинейной ползучести стареющего бетона при малоцикловых нагрузках в двух взаимноперпендикулярных направлениях.

THE INVESTIGATION OF ANISOTROPY OF CONCRETE CREEP UNDER SMALL CYCLIC COMPRESSIVE LOAD

R. A. KOTIKIAN

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂԲԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՍԱԿԱՎԱՅԻԿԱՅԻՆ, ՍԵՂՄՈՂ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՐԵՍԻԱ

Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում բերվում են բետոնի ու զծային սողքի հետազոտության արդյունքները՝ կախված բետոնի հասակից և անիզոտրոպիայից:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ սակավացիկային սեղմող լարումները բերում են երիտասարդ հասակի բետոնի դեֆորմացիաների մոդուլի մեծացման և սողքի դեֆորմացիաների փոքրացման, ընտանի առաձգականության դեֆորմացիաների մոդուլը սակավացիկային սեղմող բնոզվ բեռնավորման դեպքում մեծ է, քան բեռնաթափման դեպքում: Առաձգասողքային մարմնի սողքի տեսությունը բնորոշելի է ձերացող բետոնի ոչ զծային սողքի դեֆորմացիաների զրանցման համար, սակավացիկային բեռնավորման դեպքում, անիզոտրոպիայի հաշվառումով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян И. Х. Некоторые вопросы теории ползучести бетона. М.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
2. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на деформации ползучести бетона.—Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1957. т. 10, № 6, с. 71—90.
3. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона.—В кн: Проблемы ползучести и усадки бетона. Второе Всесоюзное совещание (Ереван, 1974). Материалы совещания, подготовленные к печати НИИЖБ Госстроя СССР, М., Стройиздат, 1974. с. 5—12.
4. Улицкий И. И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. Киев: Изд. «Будикнильня», 1967, 347 с.

Всесоюзный проектно-экспериментальный
конструкторский и технологический
институт

Поступила в редакцию
23.III. 1988