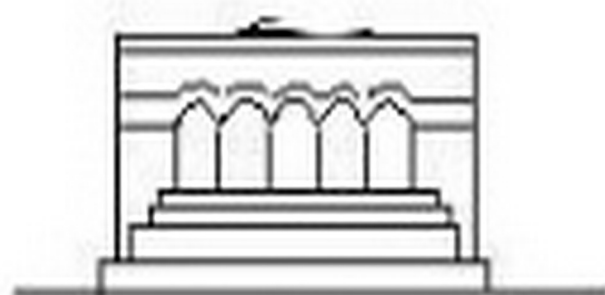


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1988

УДК 539.3:532.59

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

БАГДОВЕ А. Г., МОВСЕСЯН Л. А.

Как известно, дисперсионное уравнение для линейной среды одинаково как для бегущих, так и для стоячих волн. В случае нелинейных волн в зависимости от подхода задачи получаются различные зависимости. В настоящей заметке приводятся нелинейные уравнения для пластины и оболочки при больших перемещениях. Оказывается, сохранение или пренебрежение продольного инерционного члена в системе уравнений движения существенно меняет картину поведения волн модуляции при анализе на устойчивость. Для простоты это показано на примере одномерных задач.

1. Уравнения движения пластинки имеют вид [1]

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \epsilon_1, \quad M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa, \quad \epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Как принято в теории нелинейных изгибных колебаний, обычно инерционным членом первого уравнения (1.1) пренебрегают [1] и для основной частоты шарнирно закрепленной ($u=w=M=0$) пластинки получено выражение

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{9}{4} \frac{a^2}{h^2} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{E\pi^4}{12\rho(1-\nu^2)} \frac{h^3}{l^4} \quad (1.2)$$

Этот же результат можно получить отличным от [1] путем, если представить решение (1.1) в виде $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \right)$

$$u = \varphi(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad w = f(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1.3)$$

Для бегущих волн (бесконечная среда) решение (1.1) также можно брать в форме (1.3), то есть

$$u = b \sin 2\tau, \quad w = a \sin \tau, \quad \tau = kx - \omega t \quad (1.4)$$

где a, b, k — постоянные.

Тогда получится следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3a^2}{h^2} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{Eh^2k^4}{12(1-\nu^2)}$$

при этом $T_1 = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} a^2 k^2$.

Систему (1.1) можно решать методом медленно меняющихся амплитуд [2] без дополнительного предположения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Если искать решение в виде

$$u = u_0 + u_2 e^{2i\omega t} + \bar{u}_2 e^{-2i\omega t}, \quad \omega = \omega_1 e^{i\omega t} + \bar{\omega}_1 e^{-i\omega t}$$

где амплитуды — медленно меняющиеся функции от x и t , и приравняв члены при одинаковых гармониках, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \approx -k^2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1 \left(1 + \frac{1}{3} k^2 h^2 \right), \quad u_1 = -\frac{i k}{4} \bar{\omega}_1^2 \left(1 + \frac{1}{12} k^2 h^2 \right)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} k^4 h^2 \left(-\frac{1}{3} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1 + \frac{1}{24} \bar{\omega}_1^2 e^{2i\omega t} \right)$$

При получении (1.7) учитывалось, что, так как основной является изгибная волна, для которой отгибаящая имеет скорость $c = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ (групповая скорость), то в уравнении для u_1 можно полагать $\frac{\partial}{\partial t} \approx c \frac{\partial}{\partial x}$ и, кроме того, принималось, что γ_{am} , где $\omega = 0$, равно нулю и $\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$.

Теперь дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{2} a^2 k^2 \right), \quad a^2 = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1$$

Следует отметить, что если в (1.6) добавить члены ω_0 и $\bar{\omega}_0$ (и соответствующие сопряженные), то в порядке a^2 дисперсионное соотношение (1.8) не меняется.

Сравнивая (1.5) и (1.8), можно заметить отличие не только величины, но и знака нелинейного члена. Как известно [2, 3], при выполнении (1.8) волновые пакеты неустойчивы $\left(\frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial a^2} < 0 \right)$ и распадаются на солитоны, в то время, как при выполнении (1.5) они устойчивы.

Такое отличие связано с удержанием в (1.1) инерционного члена $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. При решении (1.4) на линиях $\omega = 0$ равны нулю ω_0 и $\bar{\omega}_0$, а при (1.6) на этих линиях вместо $u=0$, по-видимому, выполняется $T_1 \approx 0$ (оно, вообще, малое). И это приводит к тому, что для

ных волн в (1.8) нелинейное и линейное дисперсионные соотношения совпадают.

2. Этот же метод [2] можно применить при изучении одномерных осесимметричных волн в цилиндрической оболочке при геометрической нелинейности. Тогда в левой части второго уравнения необходимо добавить член T_1/R , где уже

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = -\frac{w}{R} \quad (2.1)$$

Решение системы (2.1) ищется в виде

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m e^{im\theta} + \text{к. с.}, \quad w = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m e^{im\theta} + \text{к. с.} \quad (2.2)$$

и для дисперсионного уравнения имеем

$$\omega = \omega_0(1 - Aa^2), \quad \omega_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} X, \quad X = \frac{h^2 k^4}{12} + \frac{1-\nu^2}{R^2} \quad (2.3)$$

$$A = \frac{E k^2}{4\rho(1-\nu^2)\omega_0^2} \frac{18X^2 + k^2 h^4}{18X}$$

Приведенная в [3] формула (2.10) для $\omega = \omega_0^2$ не верна и часть, касающаяся геометрической нелинейности, должна быть заменена на (2.3).

ON DISPERSION EQUATIONS FOR FLEXIBLE PLATE AND CYLINDRICAL SHELL

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ՀԱՌԻՆ ՍԱՐԻ ԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԻՍԿԵՐՍԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սարի և գլանային թաղանթի համար ստացված են միաչափ դիսպերսիոն հավասարումները՝ մեծ հնչվածքների դեպքում հոսք է տրված, որ էրկայնական անդափոխությունից առաջացած իններցիոն անդամի արհամարումը բերում է արիթային փաթկերի կայունության, իսկ այն հաշվի առնելը՝ անկայունության:

ЛИТЕРАТУРА

1. Волочин Л. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Уилем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Квазипериодические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинках. Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 169-176.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3-11.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI 1987

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УСИЛЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ В ЗОНЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

ԳՆՆԻ Վ ՈՍՏԱՅԵՐՈՅԻՆ Վ Վ

Очевидно, что вдали от торцов замкнутой цилиндрической оболочки, работающей под действием внутреннего всестороннего давления, напряженно-деформированное состояние практически не меняется по длине и толщине. Естественно проекту оболочки постоянной толщины, при ограничениях на прочность, противопоставить более выгодный проект оболочки, усиленной у торцов накладками.

В работах [1, 2] на основе методов сплайн-функций разработан алгоритм нахождения равнопрочной изотропной и анизотропной оболочки переменной толщины. С учетом возможностей технологической реализации и эксплуатационных ограничений целесообразен проект оболочки кусочно-постоянной толщины, наименьшего веса. Дополнительный краевой эффект от накладки сглаживается плавным сопряжением, представляющим собой кубический рациональный сплайн [3].

Пусть замкнутая цилиндрическая оболочка радиуса R , длины l , переменной толщины

$$h(x) = \begin{cases} h_1, & 0 \leq x \leq l_1 \\ h_1(1-t) + h_1 t - \frac{h_1 - h_2}{2(2+p)} \left[\frac{(1-t)^3}{1+pt} - (1-t) \right], & l_1 \leq x \leq \xi \\ h_1(1-t') + h_2 t' - \frac{h_1 - h_2}{2(2+p)} \left[\frac{t'^3}{1+t'(1-t')} - t' \right], & \xi \leq x \leq l_2 \\ h_2, & l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1)$$

$$\xi = (l_1 + l_2)/2, \quad \bar{h} = (h_1 + h_2)/2, \quad t = (x - l_1)/\lambda, \quad t' = (x - \xi)/\lambda, \quad \lambda = (l_2 - l_1)/2$$

заделана по торцам $x=0$, $x=l$ и находится под действием внутреннего всестороннего давления q . Здесь $p \geq 0$ —свободный параметр кубического рационального сплайна.

Условие прочности для изотропной оболочки берется в виде

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{\varphi\varphi} \leq [\sigma] \quad (2)$$

где σ_{xx} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ —напряжения в продольном и кольцевом направлениях, $[\sigma]$ —допускаемое напряжение.

Уравнение равновесия оболочки относительно прогиба $w(x)$ имеет вид

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{Rq}{2} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh(x)}{R^2} w = -(1-0.5\nu)q \quad (3)$$

при граничных условиях

$$w=0, \quad \frac{dw}{dx}=0 \quad \text{при } x=0 \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dx}=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2}=0 \quad \text{при } x=l/2$$

Напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{Rq}{2h} - \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{Rq}{2h} - \frac{E}{R} w - \frac{\nu Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5)$$

$z \in [-h/2, h/2]$ — координата по толщине оболочки.

Ставится задача нахождения функции $h(x)$, минимизирующей функционал при ограничениях (1) — (4).

$$J = \int_0^{l/2} h(x) dx \quad (6)$$

Сформулированную задачу можно представить в виде следующей задачи нелинейного программирования:

найти вектор

$$\bar{X} = \{h_1, h_2, l_1, l_2, p\} \quad (7)$$

минимизирующий функцию $J = J(\bar{X})$ при ограничениях

$$0 < h_2 < h_1, \quad 0 < l_1 < l_2 < l/2, \quad p \geq 0 \quad (8)$$

и ограничения (2), имеющем неявный характер.

Проверка допустимости произвольного вектора $\bar{X}$ состоит, последовательно, в проверке линейных неравенств (8), построении кривой $h(x)$ согласно (1), решении краевой задачи (3), (4), подстановке пары функций $h(x)$, $w(x)$ в (5) и, наконец, проверке нелинейного неравенства (2) для всех $x \in [0, l/2]$.

Для иллюстрации вышесказанного рассматривается пример расчета оболочки со следующими характеристиками:

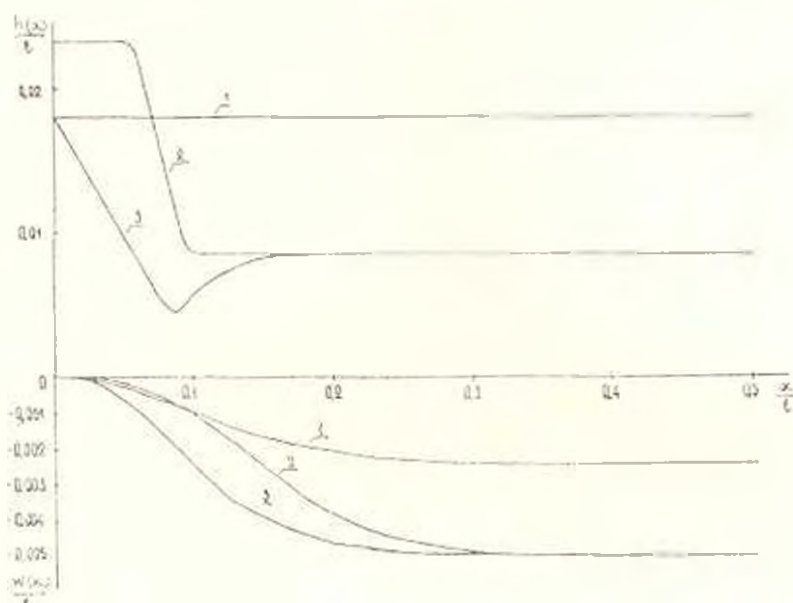
$$|\sigma|/E = 0,005, \quad \nu = 0,3, \quad q = 10^7 \text{ Па}$$

Краевая задача (3), (4) при (1), решалась, как и в [1], методом сплайн-коллокации. Прогнозы оболочки $w(x)$ аппроксимировались B -сплайнами пятой степени в 200 равноотстоящих по длине оболочки узлах коллокации. Результаты расчета искомой толщины $h(x)$ приведены на фиг. 1 (кривая 2). Для сравнения приведены также расчетные толщины $h(x)$ для равнопрочной оболочки [1] (кривая 3) и толщина h оболочки наименьшей постоянной толщины (прямая 1). На фиг. 1 приведены также соответствующие прогибы для рассмотренных трех вариантов проекта оболочки.

В случае оболочки $l=R$ для коэффициента весового совершенства $r_i=Q_i/Q_1$ получается

$$r_1=1, \quad r_2=0,60, \quad r_3=0,48$$

Полученные результаты показывают значительный выигрыш в весе для проектов 2 и 3. Причем разница в весе проектов 2 и 3 незначительна. С увеличением длины оболочки выигрыш в весе будет возрастать.



Фиг. 1.

Для приложений представляет интерес также проект оболочки, когда зона усиления краев l_1 определяется из условия затухания простого краевого эффекта. Соответствующая толщина h_1 определяется из соотношений (2)–(4), записанных для оболочки постоянной толщины. Толщина h_2 средней части оболочки определяется из условия

$$\varepsilon_{xx}^I + \varepsilon_{yy}^I - \varepsilon_{xx}^{II} \varepsilon_{yy}^{II} = |\varepsilon|$$

при $\varepsilon_{xx}^I = Rg/h_1$, $\varepsilon_{yy}^I = Rg/h_2$, найденных по безмоментной теории. Однако при сопряжении накладки толщиной $h_1 - h_2$ с оболочкой толщиной h_2 возникает дополнительный краевой эффект с зоной распространения l_2 . Возникший краевой эффект сглаживается плавным сопряжением (до второй производной $l(x)$ включительно) накладки с оболочкой, что достигается, например, простым кубическим сплайном, получаемым из (1) подстановкой $p=0$.

Для рассмотренного выше примера оболочки получается

$$h_1=0,0183 l, \quad h_2=0,00866 l$$

$$l_1=0,257 l, \quad l_2=0,177 l$$

Найденные h_1 , l_1 однозначно задают сплайн

$$h(x) = \begin{cases} h_2(1-t) + \bar{h}t - \frac{h_1-h_2}{4}(1-t)[(1-t)^2-1], & l_1 \leq x \leq \xi \\ \bar{h}(1-t') + h_2t' + \frac{h_1-h_2}{4}t'[(t')^2-1], & \xi \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

Коэффициент весового совершенства этого проекта $r_3=0.72$, что значительно уступает проектам 2 и 3. Очевидно, что и в этом случае с увеличением длины оболочки выигрыш в весе будет увеличиваться.

CYLINDRICAL SHELL'S OPTIMAL REINFORCEMENT IN

THE ZONE OF THE EDGE EFFECT

V. TS. GNUNI, V. V. STAMBOLETIAN

ԿԱՆԱՅԻՆ ԹԱԿԱՆՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՈՒՃԵՎԱՅՈՒՄԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԷՖԵԿՏԻ ՏԵՐՈՒՅԹՈՒՄԸ

Վ. Յ. ԴՆՈՒՆԻ, Վ. Վ. ՍՏԱՄԲՈԼԵՅԱՆ

Ո Ս Փ Ո Փ Ո Ս

Դիտարկվում է ուժառնային պայմանին բաժարարող առաձգական շրջանակն պլանային թաղանթի սպարմալ նախադժման խնդիրը՝ փորրապուշն բաշի ապահովմամբ: Ընթացվում է, որ թաղանթը եզրերում ուժեղացված է հաստատուն հաստոթյան վերադիրներով՝ լծորդված միջին մասի հետ: Որպես լծորդ հանդիսանում է խորանարդ առցիտնալ սպլայնը: Ցույց է տրված, որ ըստ բաշի աղյուցի թաղանթը մոտ է համաստրասմունքին:

ЛИТЕРАТУРА

1. Стамболиян В. В. Применение сплайн-функций для расчета равнопрочных цилиндрических оболочек. Докл. АН Арм.ССР, 1985, т. 80, № 2.
2. Стамболиян В. В. Проектирование равнопрочной цилиндрической оболочки из композиционного материала. Материалы II Всесоюзной научно-технической конференции «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов», т. 3, Ереван, 1981.
3. Завьялов Ю. С., Кислов В. Н., Мирошников В. Т. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
21 XII.1987

УДК 539.3

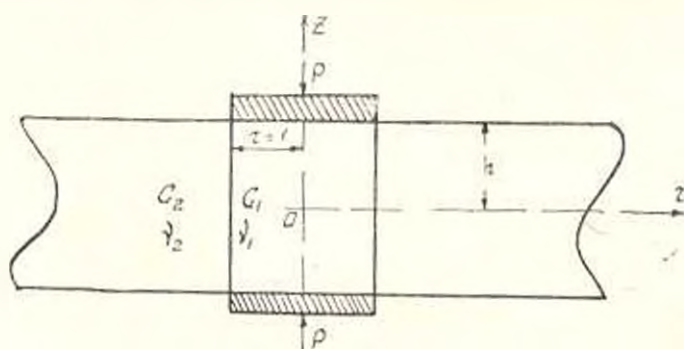
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

ՄԿՐՏԻՅԱՆ Ա. Մ., ԴԱՅԿՅԱՆ Ս. Օ.

Контактные задачи для цилиндра и слоя рассмотрены в многих работах. Контактная задача для составного слоя, когда плоский жесткий гладкий штамп перекрывает граничную линию цилиндрической поверхности контакта между слоем с отверстием и цилиндра, вложенного в это отверстие, рассмотрена в работе [1].

Из решения, приведенного в [1], трудно получить решение задачи в случае, когда штамп имеет радиус вложенного цилиндра.

Рассмотрим задачу для составного упругого слоя, состоящего из однородного слоя со сквозным цилиндрическим отверстием и вложенного в это отверстие цилиндра, имеющего размеры отверстия, и находящегося в условиях осесимметричной деформации (фиг. 1).



Фиг. 1.

На граничной поверхности слоя с цилиндрическим отверстием заданы нормальные нагрузки, а к торцам цилиндра приложены гладкие жесткие, симметрично расположенные штампы. Между составными частями слоя имеет место полное сцепление. Принято, что на всей плоскости $z=h$ касательные напряжения отсутствуют. Материал цилиндра характеризуется упругими постоянными G_1 и ν_1 , а материал слоя — G_2 , ν_2 . В силу симметрии рассмотрим часть слоя, занимающую область $(0 < z < h; r > 0)$.

Для этой области граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\varphi_{rz}^{(1)}(1, z) = \varphi_{rz}^{(2)}(1, z); \quad \varphi_r^{(1)}(1, z) = \varphi_r^{(2)}(1, z), \quad (0 < z < h) \quad (1.1)$$

$$U_z^{(1)}(1, z) = U_z^{(2)}(1, z); \quad U_r^{(1)}(1, z) = U_r^{(2)}(1, z)$$

$$\varphi_{rz}^{(2)}(r, h) = 0; \quad \varphi_r^{(2)}(r, h) = \varphi_r(r); \quad (1 < r < \infty) \quad (1.2)$$

$$\varphi_{rz}^{(1)}(r, h) = 0; \quad U_z^{(1)}(r, h) = c; \quad (0 < r < 1) \quad (1.3)$$

$$\varphi_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; \quad U_z^{(1)}(r, h) = 0; \quad (0 < r < 1) \quad (1.4)$$

$$\varphi_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0; \quad U_z^{(2)}(r, 0) = 0; \quad (1 < r < \infty)$$

2. Бигармонические функции напряжений Лява для цилиндра и слоя представляем, соответственно, в виде [1, 2].

$$\Phi_1(r, z) = z(E_0 z^2 + F_0 r^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^{(1)} J_0(\mu_k r) + D_k^{(1)} \mu_k r J_1(\mu_k r)] \sin \mu_k z \\ (0 \leq r \leq 1), \quad (0 \leq z \leq h) \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(r, z) = H_0 z \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^{(2)} K_0(\mu_k r) + D_k^{(2)} \mu_k r K_1(\mu_k r)] \sin \mu_k z + \\ + \int_0^z [A(\mu) \operatorname{sh} \mu z + B(\mu) \mu z \operatorname{ch} \mu z] W_0(\mu r) d\mu, \quad (1 \leq r < \infty); \quad (0 \leq z \leq h) \quad (2.2)$$

где $\mu_k = k/h$, $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя [3], а $W_n(\mu r)$ есть функции Вебера, которые определяются по формулам

$$W_n(\mu r) = I_n(\mu r) Y_1(\mu) - Y_n(\mu r) I_1(\mu) \quad (2.3)$$

Функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$, а также коэффициенты $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$), входящие в (2.1) и (2.2), подлежат определению из условий (1.1) — (1.4).

При помощи известных соотношений компоненты напряжений и перемещений выражаются при помощи бигармонических функций Лява [2].

Из (2.1) и (2.2) следует, что условия (1.4) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям (1.1) — (1.3), получим

$$\{3(1-2\nu_1)E_0 + 4(1-\nu_1)F_0\} \frac{h}{\epsilon_1^2} = C, \quad 6\nu_1 E_0 - 2(1-2\nu_1)F_0 = H_0 \\ |A(\mu) + 2\nu_2 B(\mu)| \operatorname{sh} \mu h + \mu h B(\mu) \operatorname{ch} \mu h = 0; \quad 2F_0 = GH_0 \\ \bar{C}_k^{(1)} = \bar{D}_k^{(1)} \left[\frac{2(1-\nu_1)G}{1-G} - \nu_k \chi_{k2} \right] - \bar{D}_k^{(2)} \frac{2(1-\nu_1)^2}{1-G}; \quad G = \frac{G_1}{G_2} \\ \bar{C}_k^{(2)} = \bar{D}_k^{(2)} \left[\frac{2(1-\nu_1)}{1-G} - \nu_k \chi_{k2} \right] - \bar{D}_k^{(1)} \frac{2(1-\nu_1)}{1-G} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
B^*(\mu)T(\mu) &= \bar{\varphi}_2(\mu) + \frac{W_0(\mu)}{\Delta(\mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu^2 + \mu_k^2} \times \\
&\times \left\{ \tilde{D}_k^{(2)} \left[\frac{2(1-\nu_2)G}{G-1} + \frac{2\mu^2}{\mu^2 + \mu_k^2} \right] - \frac{2(1-\nu_2)}{G-1} \tilde{D}_k^{(1)} \right\} \\
\tilde{D}_k^{(1)} S_1(\mu_k) - G \tilde{D}_k^{(2)} S_2(\mu_k) &= \frac{8G}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\mu B^*(\mu)}{\mu^2 + \mu_k^2} \left[\frac{\mu_k^2}{\mu^2 + \mu_k^2} - (1-\nu_2) \right] d\mu \\
\tilde{D}_k^{(1)} S_1(\mu_k) - \tilde{D}_k^{(2)} S_2(\mu_k) &= \frac{8\mu_k^2}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\mu B^*(\mu)}{(\mu^2 + \mu_k^2)^2} d\mu
\end{aligned} \quad (2.5)$$

В (2.4) и (2.5) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_k^{(1)} &= (-1)^k \mu_k^3 C_k^{(1)} I_1(\mu_k); \quad \tilde{D}_k^{(1)} = (-1)^k \mu_k^3 D_k^{(1)} I_1(\mu_k) \\
\tilde{C}_k^{(2)} &= (-1)^k \mu_k^3 C_k^{(2)} K_1(\mu_k); \quad \tilde{D}_k^{(2)} = (-1)^k \mu_k^3 D_k^{(2)} K_1(\mu_k)
\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
S_1(\mu_k) &= \Lambda_k^{(2)} + \frac{2(1-\nu_1)G}{1-G} Q_k; \quad S_2(\mu_k) = V_k^{(2)} + \frac{2(1-\nu_2)}{1-G} Q_k \\
S_3(\mu_k) &= N_k + \frac{2(1-\nu_1)}{1-G} Q_k; \quad S_4(\mu_k) = L_k + \frac{2(1-\nu_2)G}{1-G} Q_k \\
I_{k1} &= \frac{I_0(\mu_k)}{I_1(\mu_k)}; \quad I_{k2} = \frac{K_0(\mu_k)}{K_1(\mu_k)}; \quad Q_k = I_{k1} + I_{k2} \\
N_k &= \mu_k [1 - \gamma_{k1}^2] + \frac{2(1-\nu_1)}{\mu_k}; \quad L_k = \mu_k [1 - \gamma_{k2}^2] + \frac{2(1-\nu_2)}{\mu_k} \\
\Lambda_k^{(2)} &= \mu_k [1 - \gamma_{k1}^2] + 4(1-\nu_1) I_{k1}; \quad V_k^{(2)} = \mu_k [1 - \gamma_{k2}^2] - 4(1-\nu_2) I_{k2}
\end{aligned} \quad (2.7)$$

$$B^*(\mu) = \mu^2 B(\mu) \operatorname{sh} \mu h; \quad \bar{\varphi}_2(\mu) = \frac{1}{\Delta(\mu)} \int_1^{\infty} r \varphi_2(r) W_0(\mu r) dr; \quad G = \frac{G_1}{G_2}$$

Установим асимптотическое поведение неизвестных систем (2.5) для больших значений μ и μ_k . Для этого предположим [4], что имеют место следующие порядки убывания:

$$B^*(\mu) \sim \frac{B_0}{\mu^1}; \quad \tilde{D}_k^{(1)} \sim \frac{D_k^{(1)}}{\mu_k^2}; \quad \tilde{D}_k^{(2)} \sim \frac{D_k^{(2)}}{\mu_k^2} \quad (2.8)$$

При больших значениях μ и μ_k с учетом асимптотических поведения функций Бесселя и Вебера [5], а также (2.8) уравнения (2.5) можно записать в виде

$$\frac{D_0^{(1)}}{\mu_k^2} \bar{\varphi}_1 + \frac{D_0^{(2)}}{\mu_k^2} \bar{\varphi}_2 = \frac{8GB_0}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{1-\gamma}}{\mu_k^2 + \mu^2} \left[(1-\nu_2) - \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \mu^2} \right] d\mu$$

$$\frac{D_0^{(1)}}{p_k^2} z_1 + \frac{D_0^{(2)}}{p_k^2} z_2 = - \frac{8\alpha^2 B_0}{\pi h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^{1-\alpha}}{(p_k^2 + p^2)^2} dp \quad (2.9)$$

$$\frac{B_0}{p^2} = \frac{2(1-\gamma_1)}{G-1} D_0^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{1-\alpha}}{p_k^2 + p^2} - D_0^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{1-\alpha}}{p_k^2 + p^2} \left| \frac{2(1-\gamma_2)G}{G-1} G + \frac{2\alpha^2}{p_k^2 + p^2} \right|$$

где

$$z_1 = 1 + \frac{4(1-\gamma_1)}{G-1}; \quad z_2 = 1 - \frac{4(1-\gamma_2)G}{G-1} \quad (2.10)$$

Используя оценку [6]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{k}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad (2.11)$$

с учетом значений интегралов

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^{1-\alpha} dp}{p^2 + p_k^2} = \frac{\pi}{2p_k^2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^{1-\alpha}}{(p^2 + p_k^2)^2} dp = \frac{\pi\alpha}{4p_k^{2+\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \quad (2.12)$$

и асимптотических значений сумм для больших

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{1-\alpha}}{p_k^2 + p^2} \sim \frac{h}{2p^2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{1-\alpha}}{(p_k^2 + p^2)^2} \sim \frac{\alpha h}{4p^{2+\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \quad (2.13)$$

получим, что $\alpha = \beta = \gamma$ и

$$N[D_0^{(1)} z_1 + D_0^{(2)} G z_2] = 4GB_0^{(1)}[(1-\gamma_1)-\beta]; \quad N[D_0^{(1)} z_1 + D_0^{(2)} z_2] = -4B_0^{(1)\beta} \quad (2.14)$$

$$NB_0^{(1)} = \frac{1-\gamma_2}{G-1} D_0^{(1)} - D_0^{(2)} \left| 1 + \frac{(1-\gamma_2)G}{G-1} \right|$$

где

$$N = \sin \frac{\pi\alpha}{2} = \sin \pi\beta; \quad \beta = \frac{\alpha}{2}; \quad B_0^{(1)} = \frac{B_0}{h} \quad (2.15)$$

Система (2.14) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Это приводит к следующему трансцендентному уравнению для определения α .

$$4\beta_1 \beta_2 \sin^2 \frac{\pi\alpha}{2} + (1-\beta_1)(\beta_1 - \beta_2) - 4\alpha^2 \beta_1 = 0 \quad (2.16)$$

Для выяснения поведения напряжений на концах поверхности контакта подставим (2.8) в выражения контактных напряжений $\sigma_r(r, z)$ и $\tau_{rz}(r, z)$. Выделяя главные части при $r \rightarrow 1$ и $z \rightarrow h$ с учетом асимптотических значений интегралов и рядов [4-6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos p_k z}{p_k^2} = -\frac{h}{4\Gamma(z)\cos \frac{\pi z}{2}} \frac{1}{(h-z)^{1-\alpha}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin p_k z}{p_k^2} = -\frac{h}{4\Gamma(z)\sin \frac{\pi z}{2}} \frac{1}{(h-z)^{1-\alpha}} \quad (2.17)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu W(\mu r)}{\mu^2} d\mu = -\frac{2}{\pi^2 r} \frac{\Gamma(1-\alpha)\cos \frac{\pi}{2}(1-\alpha)}{(r-1)^{1-\alpha}}$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{(1)}(r, z) &\sim \frac{\tau_0}{(h-z)^{1-\alpha}}; \quad \varphi_{12}^{(1)}(r, z) \sim \frac{\tau_0}{(h-z)^{1-\alpha}} \\ \varphi_0^{(1)}(r, z) &\sim \frac{\tau_0^{(1)}}{(h-z)^{1-\alpha}}; \quad \varphi_1^{(1)}(r, z) \sim \frac{\tau_0^{(1)}}{(h-z)^{1-\alpha}} + \frac{\tau_1^{(1)}}{(r-1)^{1-\alpha}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0^{(1)} &= \frac{h}{4\pi} \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi \alpha}{2} [D_0^{(1)}(\xi_1+1) + D_0^{(1)}(\xi_2-1)] \\ \tau_0^{(2)} &= -\frac{h}{4\pi} \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi \alpha}{2} [D_0^{(1)}(\xi_1-1) + D_0^{(2)}(\xi_2+1)] \\ \tau_0 &= \frac{h}{4\pi} \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi \alpha}{2} [D_0^{(1)}(\xi_1-1) + D_0^{(2)}(\xi_2-1)] \\ \tau_1^{(1)} &= -\frac{2hR_0^{(1)}}{\pi} \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi \alpha}{2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из (2.14) и (2.18) следует, что мы должны ограничиться корнями (2.16), расположенными в интервале $(0 < \alpha < 1)$, которые зависят только от двух комбинаций ξ_1 и ξ_2 четырех упругих постоянных $\nu_1, \nu_2; G_1, G_2$. Решая (2.16) для одного случая ξ_1, ξ_2 , будем иметь решение для нескольких значений $\nu_1, \nu_2; G_1/G_2$.

Легко видеть, что $\alpha=0$ не является корнем уравнения (2.16). Следовательно, при $k \rightarrow \infty; \mu \rightarrow \infty; B^*(u); \bar{D}_k^{(1)}; \bar{D}_l^{(2)}$ (2.3) убывают со скоростью $k^{-\alpha}$ и $\mu^{-\alpha}$. В частном случае, когда материалы составляющих частей одинаковы $G_1=G_2; \nu_1=\nu_2$, получаем уравнение $\sin^2 \pi \alpha = 1/2$, корень которого $(0 < \alpha < 1)$ определяется непосредственно $\theta = 1/4; \alpha = 1/2$.

Из (2.18) следует, что особенность у конца игла, действующего на однородный слой, имеет известный порядок $\alpha = 1/2$. В общем случае трансцендентное уравнение совпадает с уравнением, полученным в [7] для плоской задачи, когда трещина, находящаяся в одном теле, упирается в полуплоскость из другого материала под прямым углом.

В таблице приведены значения корней $0 < \alpha < 1$ уравнения (2.16) при различных соотношениях ν_1, ν_2 ; $G = G_1/G_2$ и соответствующие им порядки особенностей $\gamma = 1 - \alpha$.

Таблица

$G = \frac{G_2}{G_1}$	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3, \nu_2 = 0,35$	
	α	γ	α	γ
100	0,7061	0,2939	0,6754	0,3246
10	0,6672	0,3328	0,6417	0,3583
1,02	0,5020	0,4980	0,2906	0,5094
1,0	0,5600	0,5000	0,4886	0,5114
0,1	0,2464	0,7536	0,2392	0,7608
0,01	0,0852	0,9148	0,0822	0,9178
0,001	0,0272	0,9728	0,0262	0,9738

При получении уравнений (2.5) контактное условие равенства нормальных перемещений использовано в дифференцированном виде.

Если использовать это условие в первоначальном виде, то второе уравнение (2.5) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{D}_k^{(1)} S_1(p_k) - G \bar{D}_k^{(2)} S_2(p_k) = & 4[3(1-2\nu_1)E_0 + 4(1-\nu_1)F_0] + \\ & + \frac{8G\mu_k^2}{\pi h} \int_0^\infty \frac{B^*(\mu) \operatorname{sh} \mu h}{\mu(\mu^2 + \mu_k^2)^2} [(1-\nu_2)(\mu^2 + \mu_k^2) + \mu^2] d\mu \end{aligned} \quad (2.20)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu_1)G}{\pi} \int_0^\infty \frac{B^*(\mu)}{\mu} d\mu = & -h[3(1-2\nu_1)E_0 + 4(1-\nu_1)F_0] = \\ = & \frac{CG_1[(1-G) - 2(1-\nu_1)]}{G + (1-2\nu_1)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.5), (2.20) и (2.21) следует, что все неизвестные $\bar{D}_k^{(1)}$, $\bar{D}_k^{(2)}$ и $B^*(\mu)$ прямо пропорциональны осадку штампа C .

Выражения нормального напряжения под штампом через $\bar{D}_k^{(1)}$, $\bar{D}_k^{(2)}$ и $B^*(\mu)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, h) = & \frac{CG_1[2(1-\nu_1) + 2(1+\nu_1)G]}{h[(1-2\nu_1) + G]} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{D}_k^{(1)} \left[\left(\frac{2(1-\nu_1)}{1-G} + 2 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \nu_k \lambda_{k1} \right) I_0(p_k r) + \nu_k r I_1(p_k r) - \bar{D}_k^{(2)} \frac{2(1-\nu_2)G}{1-G} I_2(p_k r) \right] \right\} \frac{1}{I_2(p_k)} \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл напряжений, действующих под штампом, также будет прямо пропорционален осадку штампа.

CONTACT PROBLEM FOR A COMPOSITE LAYER WITH THE CYLINDRICAL SURFACE OF MATERIAL SEPARATION

A. M. MKRTCHIAN, S. O. PAPOYAN

ՆՅՈՒՌԵՐԻ ԲԱԺԱՆԴԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄՈԴԵՐՆԻԶԱԿԱՆ ՈՐԵՆՑՈՂ
ԲՈՎԱԿՐՅԱԿ ՇԵՐՏԻ ՇՈՒՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՆՈՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Մ. ՄԵՐՏՉԻԱՆ, Ս. Շ. ՊԱՊՈՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Դիտարկված է բազադրչալ շերտի կոնտակտային խնդիր, երբ շարժ կոշտ զրոշմը կիրառված է շերտի մեկ դրված զլանի ճակատներին:

Խնդիրը բերված է անվերջ զծային հանրաժայթական և երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի:

Պարզված է անհայտների ստիպատորիկ վարքը: Որոշված է կոնտակտային լարումների Լգակիրությունների կարգը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Папоян С. О. Осесимметричная контактная задача для составного упругого слоя.— В сб. Исследования по механике твердого деформируемого тела, вып. 2.— Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1983, с. 120—125.
2. Арутюнян Н. Х., Айримян Б. Т. Некоторые осесимметричные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 2, с. 3—13.
3. Бентмен Г., Эрдеди А. Высшие трансцендентные функции, т. 2 М. Наука, 1977, 295 с.
4. Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф. Анализ напряженного состояния жестко-зашемленной пластины на основе решения пространственной задачи теории упругости.— Тр. VII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин.— М., 1970, с. 205—211.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Наука, 1971. 1108 с.
6. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К. Наукова думка, 1978. 264 с.
7. Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations.— Noord—hoff Intern. Publ. Leyden, 1973, p. 368—425.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
5.VIII. 1983

УДК 539.3.17.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАКОНОВ УПРОЧНЕНИЯ

ШОПХЕТ Б. А

Рассматривается трехмерная задача деформационной теории пластичности при малых деформациях.

При некоторых ограничениях на законы упрочнения доказаны теоремы 1,2 существования и единственности решения. Теорема 1 была сформулирована без доказательства в [1]. Условием теоремы 1 удовлетворяет часто применяемый [2,3] степенной закон упрочнения

$$\sigma_0 = A\varepsilon_0, \quad \psi_s = B(\varphi_s)^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad A, B = \text{const} \quad (1)$$

Теорема 2 относится к случаю несжимаемого материала; ее ограничениям удовлетворяет, например, закон $\varphi_s = B(\varphi_s)^\gamma$.

1. *Постановка задачи для сжимаемого тела.* Пусть Ω — трехмерная связная область переменных $\vec{x} = \{x_i\}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$

Пусть $\vec{a}(\vec{x})$ — тензорное поле второго ранга, заданное в Ω , его декартовы компоненты обозначим через a_{ij} и положим

$$a_0 = (a_{ii})/3, \quad \vec{a}' = \{a'_{ij}\}, \quad a'_{ij} = a_{ij} - \delta_{ij}a_0, \quad \varphi_a = (2^{-1}a'_{ij}a'_{ij})^{1/2} \quad (2)$$

Рассмотрим закон связи напряжений и деформаций вида [4]

$$\vec{\sigma}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{\varepsilon}(\vec{x}), \vec{x}) = \{P_{ij}(\vec{\varepsilon}(\vec{x}), \vec{x})\} = \left\{ \delta_{ij}P_1(\varepsilon_0(\vec{x}), \vec{x}) + P_2(\varphi_s(\vec{x}), \vec{x}) \frac{\varepsilon'_{ij}(\vec{x})}{\varphi_s(\vec{x})} \right\} \quad (3)$$

Предположим, что $P_1(\tau, \vec{x})$, $P_2(\tau, \vec{x})$ кусочно-непрерывны по $\vec{x}$, непрерывны по τ и строго монотонно возрастают по τ . Пусть существует $\tau_0 \geq 0$ и положительные константы $a_1, b_1, \gamma, a_2, b_2, \mu$, такие, что

$$a_1|\tau|^\gamma \leq |P_1(\tau, \vec{x})| \leq b_1|\tau|^\gamma \quad \text{при} \quad |\tau| \geq \tau_0, \quad \vec{x} \in \Omega \quad (4)$$

$$a_2\tau^\mu \leq P_2(\tau, \vec{x}) \leq b_2\tau^\mu \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_0, \quad \vec{x} \in \Omega \quad (5)$$

Соотношения (3) задают физически нелинейный закон упругости, соответствующий удельной энергии деформации $A(\vec{\varepsilon}, \vec{x})$

$$A(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) = A_1(\varepsilon_0, \vec{x}) + A_2(\varphi_s, \vec{x}) \quad (6)$$

$$A_1(\vec{z}, \vec{x}) = 3 \int_{\Omega} P_1(\vec{z}, \vec{x}) d\vec{z}, \quad A_2(\vec{z}, \vec{x}) = 2 \int_{\Omega} P_2(\vec{z}, \vec{x}) d\vec{z}$$

Обозначим через $E(\Omega)$ множество полей деформаций, имеющих конечную энергию деформации. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из двух участков S_1 и S_2 , на S_1 тело жестко зашпемлено, на S_2 заданы напряжения.

Обозначим через $U(\Omega)$ множество полей перемещений, обращающихся в ноль на S_1 и таких, что соответствующие полю $\vec{u}$ деформации $\vec{\epsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u}_{i,j} + \vec{u}_{j,i})$ принадлежат $E(\Omega)$.

$$(\vec{z}, \vec{\epsilon}(\vec{u})) = L(\vec{u}) = 0 \quad \text{для} \quad \forall \vec{u} \in U(\Omega), \quad L(\vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u}) + (\vec{F}, \vec{u})_{S_2} \quad (7)$$

Здесь $\vec{f} = \{f_i\}$ — заданные в Ω объемные силы, $\vec{F} = \{F_i\}$ — заданные на S_2 поверхностные силы, $U(\Omega)$ — множество гладких полей перемещений, удовлетворяющих условию $\vec{u} = 0$ на S_1 .

Решением задачи А назовем удовлетворяющую уравнениям (3), (7) тройку полей $(\vec{z}^0, \vec{u}^0, \vec{u}^0)$, такую что $\vec{u}^0 \in U(\Omega)$.

Теорема 1. Пусть функции P_1, P_2 удовлетворяют сформулированным выше ограничениям, нагрузки $\vec{f}, \vec{F}$ ограничены. Тогда существует единственное решение задачи А.

2. **Доказательство теоремы 1.** Пусть $q = \frac{r}{r-1}, p = \frac{r}{r+1}$ (см. (4), (5)), $l = \min\{q, p\}$. Так как q, p положительны, имеет место: $q > 1, p > 1, l > 1$.

Обозначим $L_2(\Omega)$ пространство функций, суммируемых со степенью 2 в Ω , норму в $L_2(\Omega)$ обозначим $\|\cdot\|_2$.

Введем на множествах $E(\Omega), U(\Omega)$ нормы $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_U$:

$$\|\vec{z}\|_E = \|\vec{z}_0\|_q + \|\vec{z}_1\|_p, \quad \|\vec{u}\|_U = \|\vec{\epsilon}(\vec{u})\|_E \quad (8)$$

Лемма 1. Множества $E(\Omega), U(\Omega)$ — банаховы пространства относительно норм (10), непрерывно вложенные в пространства $L_1(\Omega), W_1^1(\Omega)$ соответственно.

Если $q = p$ (и, следовательно, $l = p$), нормы в $E(\Omega), U(\Omega)$ эквивалентны нормам в $L_1(\Omega), W_1^1(\Omega)$ соответственно. Доказательство следует из (4) — (6) и неравенства Корна [5].

Введем банахово пространство $E^*(\Omega)$, сопряженное к пространству $E(\Omega)$:

$$E^*(\Omega) = \{\vec{z} | \vec{z} = \{\vec{z}_{i,j}\}, \quad \vec{z}_0 \in L_{q'}(\Omega), \quad \vec{z}_1 \in L_{p'}(\Omega)\}$$

$$\|\vec{z}\|_{E^*} = \|\vec{z}_0\|_{q'} + \|\vec{z}_1\|_{p'}, \quad (q')^{-1} + q^{-1} = 1, \quad (p')^{-1} + p^{-1} = 1$$

Лемма 2. Закон упругости (3) есть непрерывный строго монотонный оператор из $E(\Omega)$ в $E^*(\Omega)$.

Доказательство. Непрерывность следует из предположений (4), (5) и свойств оператора Немыцкого [6].

Докажем, что при $\forall \vec{x} \in \Omega_0$ и $\forall \vec{v}^1, \vec{v}^2$ справедливо неравенство

$$(P(\vec{v}^1, \vec{x}) - P(\vec{v}^2, \vec{x}))(\vec{v}^1 - \vec{v}^2) \geq 0 \quad (9)$$

причем знак равенства достигается только при $\vec{v}^1 = \vec{v}^2$. Преобразуем левую часть (9):

$$(P(\vec{v}^1, \vec{x}) - P(\vec{v}^2, \vec{x}))(\vec{v}^1 - \vec{v}^2) \geq 0$$

$$J_1 = 3(P_1(\vec{v}_0^1, \vec{x}) - P_1(\vec{v}_0^2, \vec{x}))(\vec{v}_0^1 - \vec{v}_0^2), \quad J_2 = \left(P_2(\vec{v}_1^1, \vec{x}) \frac{\vec{v}_1^1}{\vec{v}_1^1} - P_2(\vec{v}_1^2, \vec{x}) \frac{\vec{v}_1^2}{\vec{v}_1^2} \right) (\vec{v}_1^1 - \vec{v}_1^2)$$

По условию, функция P_1 строго монотонно возрастает по $\vec{v}$, поэтому $J_1 \geq 0$, причем $J_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{v}_0^1 = \vec{v}_0^2$. Преобразуем J_2 ; используя свойство $\vec{v}_1^1 \cdot \vec{v}_1^1 = 1$ и раскрывая скобки, получим

$$J_2 = 2(P_2(\vec{v}_1^1) - P_2(\vec{v}_1^2))(\vec{v}_1^1 - \vec{v}_1^2) + 2(P_2(\vec{v}_1^1)\vec{v}_1^1 - P_2(\vec{v}_1^2)\vec{v}_1^2) \left(1 - \frac{\vec{v}_1^1}{\vec{v}_1^1} \cdot \frac{\vec{v}_1^2}{\vec{v}_1^2} \right) \quad (10)$$

Оба слагаемых в (10) неотрицательны, причем $J_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{v}_1^1 = \vec{v}_1^2$, $1 = \vec{v}_1^1 \cdot \vec{v}_1^2 / (\vec{v}_1^1 \cdot \vec{v}_1^2)$, отсюда $\vec{v}_1^1 = \vec{v}_1^2$.

По условию теоремы, нагрузки $\vec{f}, \vec{F}$ ограничены, следовательно, они принадлежат пространствам $L_1(\Omega)$, $L_1(S_2)$ соответственно. Тогда, по теоремам вложения, введенный в (7) линейный функционал $L(\vec{v})$ непрерывен в пространстве $W^1(\Omega)$, и по лемме 1, он непрерывен в пространстве $U(\Omega)$, то есть $L(\cdot) \in U^*(\Omega)$ — сопряженному пространству к $U(\Omega)$. Обозначим через $\vec{\varepsilon}(u)$ напряжения, определяемые по деформациям $\vec{\varepsilon}(u)$ из закона (3). По лемме 2, оператор $\vec{\varepsilon}(u)$ есть непрерывный строго монотонный оператор из пространства $U(\Omega)$ в $U^*(\Omega)$. Тогда задачу А можно представить в виде операторного уравнения

$$(\vec{\varepsilon}(u), \vec{\varepsilon}(v))_U - L(v) = 0 \text{ для } \forall v \in U(\Omega)$$

В силу теоремы 18.2 [6] для завершения доказательства достаточно показать, что справедливо утверждение

$$(\vec{\varepsilon}(u), \vec{\varepsilon}(u))_U \cdot (\|u\|_U)^{-1} \rightarrow \infty \text{ при } \|u\|_U \rightarrow \infty$$

которое следует из (4), (5). Теорема доказана.

3. Постановка задачи для несжимаемого тела. Примем закон (3) связи девиаторов напряжений и деформаций

$$\vec{\tau}_{ij}(\vec{x}) = \frac{\psi_0(\vec{x})}{\psi_0(\vec{x})} \cdot \vec{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}), \quad \psi_0(\vec{x}) = P_2(\vec{\psi}_1(\vec{x}), \vec{x}) \quad (11)$$

Обозначим через $H(\Omega)$ множество полей перемещений, обращающих-

ся в поле на S_1 , удовлетворяющих условию несжимаемости и таких, что конечна энергия деформации:

$$H(\Omega) = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u}|_{S_1} = 0 \text{ на } S_1, \varepsilon_0 = 0, \int_{\Omega} A_2(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) d\Omega < \infty, \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right\}$$

Решением задачи B назовем удовлетворяющую уравнениям (7)–(11) тройку полей $(\vec{\sigma}^0, \vec{\varepsilon}^0, \vec{u}^0)$, такую, что $\vec{u}^0 \in H(\Omega)$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1, справедливы утверждения.

а) Если S_1 не совпадает с $\partial\Omega$ (то есть S_2 непусто), то существует единственное решение задачи B .

б) Если $S_1 = \partial\Omega$ (то есть S_2 пусто), то существует решение задачи B , причем $\vec{u}^0, \vec{\varepsilon}^0$ определяются единственным образом, а поле $\vec{\sigma}^0$ определено с точностью до слагаемого αG , где G — единичный тензор 2-го ранга, α — произвольная константа.

в) Поле $\vec{u}^0$ доставляет минимум функционалу полной энергии $I(\vec{u})$ на множестве $H(\Omega)$, где

$$I(\vec{u}) = \int_{\Omega} A_2(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) d\Omega - L(\vec{u}), \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(\vec{u})$$

г) Поле $\vec{\varepsilon}^0$ доставляет минимум функционалу дополнительно энергии $I^*(\vec{\varepsilon})$ на множестве $K(\Omega)$ статически допустимых полей напряжений:

$$I^*(\vec{\varepsilon}) = \int_{\Omega} A_2^*(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) d\Omega, \quad A_2^*(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) = \min_{\vec{\sigma}} (\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} - A_2(\vec{\sigma}, \vec{x}))$$

$$K(\Omega) = \{ \vec{\sigma} \mid \vec{\sigma} \in L_{\sigma}(\Omega), (\vec{\sigma}, \vec{\varepsilon}(\vec{v})) - L(\vec{v}) = 0 \text{ для } \forall \vec{v} \in U(\Omega) \}$$

Здесь A_2^* — сопряженная (по первому аргументу) функция к A_2 .

Доказательство. Рассмотрим задачу C — минимизировать функционал $I(\vec{u})$ на множестве $H(\Omega)$, и задачу C^* — минимизировать $I^*(\vec{\varepsilon})$ на $K(\Omega)$. Из [7] следует, что C^* — двойственная [8] к задаче C .

Из леммы 1 вытекает, что $H(\Omega)$ — подпространство пространства $W_p(\Omega)$. Из леммы 2, функция $A_2(\vec{\varepsilon}, \vec{x})$ строго выпукла по переменным ε_{ij} .

Из (4), (5) и неравенства Корна [5] выводится, что $I(\vec{u})$ обладает m -свойством, поэтому существует единственное решение $\vec{u}^*$ задачи C .

Лемма 3. Пусть $W(\Omega)$ — подпространство пространства $W_p(\Omega)$

еостоящее из полей u , обращающихся в ноль на S_1 , $W^*(\Omega)$ — сопряженное к нему пространство.

Рассмотрим линейный оператор Q , переводящий поле $\vec{\sigma} = \{\sigma_i\} \in L_{p'}(\Omega)$ в элемент $Q(\vec{\sigma}) \in W^*(\Omega)$, определяемый формулой

$$\langle Q(\vec{\sigma}), u \rangle = (\vec{\sigma}, z(u))_2 \quad (12)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ — отношение двойственности между $W^*(\Omega)$ и $W(\Omega)$.

Справедлива оценка:

$$\|\vec{\sigma}\|_{p'} \leq \left(c \|\vec{\sigma}'\|_{p'} + \|Q(\vec{\sigma})\|_{W^*} \left| \int_{\Omega} z_0 d\Omega \right| \right) \quad (13)$$

где $\|\cdot\|_{W^*}$ — норма в $W^*(\Omega)$, c — некоторая постоянная.

Если S_1 не совпадает с $\partial\Omega$, последнее слагаемое в (13) можно опустить, то есть

$$\|\vec{\sigma}\|_{p'} \leq c (\|\vec{\sigma}'\|_{p'} + \|Q(\vec{\sigma})\|_{W^*}) \quad (14)$$

Доказательство. Известно [9, 10], что если S_1 не совпадает с $\partial\Omega$, то для любой функции $\varphi \in L_p(\Omega)$ существует поле $\vec{u}^* \in W(\Omega)$ такое, что

$$u_{1,i}^* = \varphi, \quad \|\vec{u}^*\|_W \leq c \|\varphi\|_p \quad (15)$$

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\vec{\sigma}\|_{p'} &= \max_{\varphi \in L_{p'}(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} z_0 \varphi d\Omega|}{\|\varphi\|_{p'}} = \max_{\varphi \in L_{p'}(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} z_0 u_{1,i}^* d\Omega|}{\|\vec{u}^*\|_W} \leq \\ &\leq c \max_{\varphi \in L_{p'}(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} z_0 u_{1,i}^* d\Omega|}{\|\vec{u}^*\|_W} \leq c \max_{\varphi \in L_{p'}(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} z_1 u_{1,i}^* d\Omega|}{\|\vec{u}^*\|_W} = \\ &= c \max_{\vec{u} \in W(\Omega)} \frac{(\vec{\sigma}, z(u))_2 - (z', z'(u))_2}{\|\vec{u}\|_W} \leq c (\|Q(\vec{\sigma})\|_{W^*} + \|\vec{z}'\|_{p'}) \end{aligned} \quad (16)$$

Если $S_1 = \partial\Omega$, то [9, 10] для любой функции, удовлетворяющей условию

$$\varphi \in L_p(\Omega), \quad \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0$$

найдется поле $\vec{u}^* \in W(\Omega)$, такое, что имеет место (15). Положим

$$z_1(x) = z_0(x) - \bar{z}_0 \quad \text{где} \quad \bar{z}_0 = \int_{\Omega} z_0 d\Omega$$

Тогда

$$\|\vec{z}_0\|_{p'} \leq \|\vec{z}_1\|_{p'} + \text{mes}^{1/p'} \Omega |\bar{z}_0| \quad (17)$$

Поэтому вывод (13) сводится к оценке величины $\|\varphi_1\|_p$.

Из неравенства

$$|\varphi| + \|\varphi_1\|_p \leq c \|\varphi\|_p, \quad \bar{\varphi} = \int_{\Omega} \varphi d\Omega, \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - \bar{\varphi}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|_p &= \max_{\varphi \in L_p(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} \varphi_1 d\Omega|}{\|\varphi\|_p} = \max_{\varphi \in L_p(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 d\Omega|}{\|\varphi\|_p} \leq \\ &\leq \max_{\varphi \in L_p(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 d\Omega|}{\|\varphi\| + \|\varphi_1\|_p} \leq \max_{\varphi \in L_p(\Omega)} \frac{|\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 d\Omega|}{\|\varphi\|_p} \\ L_p^0(\Omega) &= \left\{ \varphi \in L_p(\Omega), \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \right\} \end{aligned}$$

Из (17), (18), (15), повторяя выкладки (16), получим (13).

Так как

$$L(\bar{\varphi}) \leq c(\|\bar{\varphi}\|_p + \|F\|_{L_p(\Omega)}) \cdot \|\bar{\varphi}\|_p$$

то для поля $\varphi \in K(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|Q(\varphi)\|_p \leq c(\|\bar{\varphi}\|_p + \|F\|_{L_p(\Omega)})$$

Если S_1 совпадает с $\partial\Omega$, то множество $K(\Omega)$ вместе с каждым элементом $\bar{\varphi}$ содержит элемент $\bar{\varphi}^1$

$$\bar{\varphi}^1 = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}^1 = \int_{\Omega} \varphi_0 d\Omega$$

Очевидно, что $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^1$, поэтому $I^*(\bar{\varphi}) = I^*(\bar{\varphi}^1)$, следовательно, решая задачу C^* можно искать на подмножестве

$$K^0(\Omega) = \left\{ \bar{\varphi} \mid \bar{\varphi} \in K(\Omega), \int_{\Omega} \varphi_0 d\Omega = 0 \right\}$$

Из (14), (14) и оценок (4), (5) следует, что выпуклая функция $I^*(\bar{\varphi})$ — строго выпуклая на K^0 и обладает m -свойством на K^0 . Отсюда [6] следует существование единственного решения задачи принадлежащего $K^0(\Omega)$, и очевидно, что любое поле напряжений отличающееся от этого решения на слагаемое $a\bar{\varphi}$, a — константа, также является решением задачи C^* . Обозначим решение задачи C^* через $\bar{\varphi}^*$. Для завершения доказательства теоремы 2 нужно показать, что поля $\bar{\varphi}(u^*)$ и $\bar{\varphi}^*$ связаны законом (11), тогда тр

$(z^*, \varepsilon^*, u^*)$, где $\varepsilon^* = \varepsilon(u^*)$ — решение задачи B . Из теоремы 3.2 [8] следует, что пара (z^*, u^*) (где $z^* = (z^*, \varepsilon^*)$, $u^* = (u^*, \varepsilon^*)$) — седловая точка функционала Лагранжа $F(z, u)$ на множестве $Z \times Y$:

$$F(z, u) = \int_{\Omega} A_2(\varepsilon, \dot{x}) d\Omega - L(u) + (z, \varepsilon(u) - \varepsilon) + \int_{\Omega} \theta_2 d\Omega$$

$$Y = \{y | y = (\varepsilon, u), \varepsilon \in L_p(\Omega), u \in W(\Omega)\}$$

$$Z = \{z | z = (z, \theta), z \in L_p(\Omega), \theta \in L_p(\Omega)\}$$

Используя необходимые условия [8], которым удовлетворяет седловая точка, получим (11). Теорема 2 доказана.

ON SOLVABILITY OF DEFORMATION PLASTICITY THEORY PROBLEM FOR ONE CLASS OF LAWS OF HARDENING

B. A. SHOKHET

ԱՄՐԱԴՐՈՒՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ՄԻ ԴՈՒՆ ԶԱՄԱՐ ՓԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ
ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՏԵՈՐԻԱՅԻՆ ԿԱԴՐԻ ԼՈՐԱՆԴՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Բ. Ա. ՇՈՔԻԵՏ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ Ո Վ

Դիտարկվում է սկալարային կապի դեֆորմացիան ածառնությունների ձևագրվում է, որ դեֆորմացիաները փոքր են:

Ամրապնդման օրենքի որոշ առհասարակումների դեպքում սեղմելի և առանցքային նյութերի համար ապացուցվում են դոյուսյան և միակուսյան թեորեմներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Шойхет Б. А. Построение асимптотически точных уравнений физически нелинейных плит с использованием чисто кинематических гипотез. — Изв. ВПИИГ, 1974, т. 104, с. 214—221.
2. Соколовский В. В. Упруго-пластический изгиб круговой и кольцевой пластинок — ПММ, 1944, т. 8, вып. 2, с. 141—166.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: изд-во «Высшая школа», 1969.
4. Коудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.

- 5 Мосолов П. П., Мякиков В. П. Доказательство неравенства Корна.—Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 1, с. 36—39.
- 6 Вайсберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
- 7 Шойхет Б. А. О некоторых задачах в физически нелинейной упругости и оценки погрешности уравнений плнт.—ИММ, 1976, т. 49, № 2, с. 317—326.
- 8 Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
- 9 Ладыженская О. А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса.—В кн. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9 Зап. науч. семина ЛОМН, 1976, т. 59, с. 81—116.
- 10 Пилецкас К. П. О пространственных соленициальных векторах.—Гр. Мат. ин-та АН СССР, 1982, т. 159, с. 137—149.

ВНННН им. Г. Е. Осипенко

Поступила в редакцию
3.11.1986

УДК 532.591:534.22.2

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД

ОГАНЯН Г. Г.

Исследованию волновых течений газожидкостных смесей посвящено большое количество работ ([1—3], где наиболее полно отражена библиография по рассматриваемому вопросу). Теоретическое нахождение характеристик течения в рамках гомогенной модели [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [1, 2, 4]. Так, например, даже в слабых ударных волнах ввиду сжатия пузырьков, может происходить интенсивный теплообмен между ними и жидкой фазой [5, 6], что не отражается соответствующим образом в уравнениях, описывающих волновое движение смеси. Как отмечено в [1, 2, 5, 6], в этом случае главным диссипативным механизмом может явиться тепловая релаксация.

В настоящей работе методом коротких волн [7, 8] учитывая различие температур фаз, на основе однескоростной модели [1], выведены нелинейные уравнения, описывающие распространение волн в газожидкостных смесях при квазинизотермическом и квазиадиабатическом поведении газового пузырька.

1. Исходные уравнения. Предположим, что в монодисперсной смеси жидкая и газовая фазы движутся с одинаковой скоростью. При этом несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Ограничиваясь рассмотрением течений, где в смеси не происходит сильного пересжатия газовой фазы, будем считать, что, ввиду сильного влияния температуры на плотность пузырька, теплообмен между ним и жидкостью определяется лишь тепловым сопротивлением газа и поэтому температуру T_1 жидкой фазы примем постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$, $T_2 \neq \text{const}$). При этом учет эффекта теплопроводности газовой фазы существенен лишь при межфазном взаимодействии [1, 6]. Полагая, что дробление, столкновение, слипание пузырьков отсутствуют и не происходит образования новых пузырьков, уравнения движения рассматриваемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$p \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1 - \varepsilon_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varepsilon_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\eta}{R} \frac{dR}{dt} - \\ - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\eta}{R} \frac{dR}{dt} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{12} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$p = \rho_1 (1 - \beta) + \beta \rho_2, \quad P = P_1 (1 - \beta) + \beta P_2 \quad (1.5)$$

Здесь t — время, x — координата, u — скорость частиц смеси, P , p , ρ , T — соответственно, давление, плотность и температура, R — радиус пузырьков, β — объем газа в единице объема смеси (объемное газосодержание), γ — показатель адиабаты газа, c_{12} — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\mu = \rho_1 [1 + O(\beta)]$ — динамический коэффициент вязкости смеси, a — скорость звука. Индексы „1“, „2“ отнесены, соответственно, к параметрам жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движение всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты ε_1 , ε_2 , впервые введенные в [6], учитывают конечность величины β и неоднородность газовой фазы в безграничной жидкости. Они имеют вид [1]

$$\varepsilon_1 = \frac{1,1\beta^{1/3} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1,47\beta^{1/3} - 0,33\beta}{1 - \beta}$$

Первое соотношение из (1.1), являющееся следствием односкоростного приближения, получено из уравнений неразрывности жидкой и газовой фаз [1].

Необходимо отметить, что вместо модифицированного уравнения Херринга-Флунна (1.3) в [1] выведено и использовано обобщенное уравнение Рэлея-Ламба, учитывающее эффекты сжимаемости, вязкости жидкой фазы и неоднородности газовых пузырьков.

Для замыкания системы уравнений (1.1) — (1.5), используя гипотезу о локальном термодинамическом равновесии в пределах каждой фазы [1], обратимся к соотношению Гиббса

$$T_2 \frac{ds_2}{dt} = \frac{de_2}{dt} - \frac{P_2}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt} \quad (1.6)$$

где s_2 , $e_2 = c_{12} T_2 + e_{20}$ — удельные энтропия и внутренняя энергия газовой фазы. Комбинируя (1.6) с уравнениями (1.4), можно получить

$$\rho_2 T_2 \frac{ds_2}{dt} = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{dP_2}{dt} + \frac{3\gamma P_2}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

Здесь стоящий слева член характеризует выделение тепла от единицы объема пузырька. Тепло, выделяемое всем объемом пузырька, будет отдаваться жидкой фазе через его полную поверхность, поэтому, обозначая через q поток тепла на единицу поверхности пузырька, напишем

$$\rho_2 T_2 \frac{d\delta_2}{dt} = - \frac{3}{R} q$$

Тогда предыдущее уравнение переписывается в виде

$$\frac{dP_2}{dt} = - \frac{3\gamma P_2}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{3(\gamma - 1)}{R} q \quad (1.7)$$

при этом, согласно [1.6], можно полагать

$$q = \frac{k_2 Nu}{2R} (T_2 - T_\infty), \quad Nu = \frac{R^2}{\delta_2} \quad (1.8)$$

где k_2 — коэффициент теплопроводности газа, γ — коэффициент межфазного теплообмена, Nu — число Нуссельта.

Уравнения (1.7) и (1.8) позволяют в первом приближении учесть несоответствие температур и фазовых соотношений для замыкания системы уравнений (1.1) — (1.5). Отметим, что уравнение (1.7) другим путем получено в [1, 2].

Из условий сохранения сферической формы пузырька и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз (1.4) находим

$$\frac{1}{3(1-\gamma)} \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = - \frac{3\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.9)$$

Тогда, согласно определению плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{1-\gamma}{\rho_1} \frac{d\rho_2}{dt} - \frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.10)$$

Используя уравнения (1.9), (1.10) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) получим

$$\begin{aligned} (1-\gamma) \frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt} \left[(1-\gamma_2) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\gamma_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = (1-\gamma) \frac{d^2 \rho_2}{dt^2} + \gamma (P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.11) \end{aligned}$$

Комбинирование уравнения импульса смеси (1.2) с уравнениями пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.1) дает

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\gamma_1) \rho_1 R \frac{\partial^2 R}{dt^2} + \right. \\ \left. + (1-\gamma_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] + \frac{4}{3} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.12) \end{aligned}$$

Исключим из рассмотрения в уравнении (1.7) — (1.8) давление в пузырьке P_2 , а затем и плотность ρ_2 посредством уравнений состояния калорически совершенного газа и (1.9). Тогда имеем

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{3(\gamma - 1)T_2}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) = - \frac{3k_2 Nu}{2\gamma c_{p2} R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.13)$$

2. *Асимптотические разложения.* Известно [1.3], что в газожидкостных смесях распространение возмущений сопровождается дисперсией, при этом скорость распространения в предельных случаях совпадает либо с изотермической, либо с адиабатической скоростью звука. Первый из них реализуется, когда число Пécлельта очень велико, а второй, — когда число Пécлельта стремится к нулю.

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства значения параметров рассматриваемой газожидкостной смеси мало отклоняются от соответствующих значений невозмущенного состояния (покоя). Будем рассматривать течения типа коротких волн, то есть течения, в которых ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 относительно невозмущенной смеси [7, 8]

$$t = \frac{L}{\Delta} \frac{1}{a_0} t', \quad x = a_0 t' + Lx_1 \quad (2.1)$$

Здесь L — характерная длина в направлении оси x , Δ — безразмерный малый параметр, a_0 — скорость движения волны по покоящейся газожидкостной смеси, совпадающая либо с изотермической a_{0i} , либо с адиабатической a_{0a} скоростями звука в смеси. Их определения для каждого режима распространения возмущений будут даны ниже.

Примем, что величины возмущенных характеристик течения смеси имеют тот же порядок, что и массовая скорость частиц смеси ($i=1,2$)

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0(1 + \varepsilon P'), \quad P_1 = P_0(1 + \varepsilon P_1'), \quad p = p_0(1 - \varepsilon p') \\ \rho_1 = \rho_0(1 + \varepsilon \rho_1'), \quad R = R_0(1 + \varepsilon R), \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta', \quad a_1 = a_{10}(1 + \varepsilon a_1') \quad (2.2)$$

Здесь ε — второй безразмерный малый параметр, индекс 0 относится к невозмущенному состоянию (состоянию покоя).

При дальнейшем упрощении уравнений п. 1 будут удержаны лишь главные члены (порядка 1 и 2) и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1) — (2.2) к уравнениям (1.1) — (1.8) и (1.9) — (1.11), удержим главные члены порядка 1. Затем, имея в виду, что волна распространяется по покоящейся в системе координат (x_1, t') смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$p = u, \quad P = \frac{\rho_0 a_0^2}{P_0} u, \quad \rho_1 = \frac{1}{1 - \beta_0} (u + 3\beta_0 R), \quad p_1 = -3R, \quad \beta = \beta_0(u + 3R) \\ P_1 = P_1 = P \quad (2.3)$$

Из полученных формул следует, что в изучаемом приближении сжатие смеси происходит обратимо.

Перейдем к изучению предельных режимов распространения возмущений в смеси в зависимости от величины удельного потока тепла, характеризующей термодинамический процесс, протекающий в газовой пузырьке.

3. *Квазиизотермический процесс.* Примем за независимые термодинамические переменные плотность и температуру.

Разложим функцию $P_1 = P_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности положения локального термодинамического равновесия (покоя) и учтем, что температура жидкой фазы практически не меняется ($T_1 = T_0 = \text{const}$). Далее, подставляя полученное разложение в уравнение (1.11) и комбинируя его с уравнениями (1.4), (1.9) и (1.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)P_2}{T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left[(1-\beta_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} - (1-\beta_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_{1c}} \frac{d}{dt} \left(p_2 - \frac{\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] - \rho_1 a_{1c} \left(\frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$-\beta(P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad a_{1c}^2 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right)_{T_1}$$

Здесь a_{1c} — изотермическая скорость звука в жидкости. Известно [3, 10], что связь между невозмущенными изотермическими скоростями звука в смеси и в фазах дается формулой

$$\frac{1}{a_{co}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{1co}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} = 0 \quad (3.2)$$

Дополним теперь разложение (2.2) соотношением для температуры

$$T_2 = T_0(1 + \epsilon^2 T_2), \quad T_{20} = T_0 \quad (3.3)$$

Искомое уравнение, описывающее распространение ударной волны малой, но конечной интенсивности должно быть выведено из упрощенного в порядке ϵ варианта уравнения (3.1), в котором необходимо исключить член порядка единицы $\partial R / \partial x_1$. Вкратце опишем эту процедуру.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) и (2.3) к уравнениям (3.1) и (1.13), оставим при их упрощении главные члены порядка единицы. Интегрируя получаемые уравнения и используя определение (3.2), находим

$$R = -\frac{\rho_0 a_{co}^2}{P_0} u, \quad T_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{R \beta}{L^2 \text{Nu}} \frac{2(\beta_1 - 1)}{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \text{Pe} = \frac{L a_{co}}{\lambda_2} \quad (3.4)$$

Здесь Pe — число Пекле, λ_2 — коэффициент температуропроводности газа.

Разлагая функцию $u_1 = u_1(p_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния покоя и используя формулы (2.3), (3.2) и (3.4), возмущение скорости звука в жидкости выразим через возмущение скорости частиц смеси

$$a_{1c} = (m_c - 1) \frac{\rho_0 a_{c0}^2}{\rho_{10} a_{1c0}^2} \quad \text{и} \quad m_c = \frac{1}{a_{1c}} \left[\frac{\partial}{\partial p_1} (\rho_1 a_1) \right]_{r_1} \quad (3.5)$$

Теперь применим преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (3.1) и (1.12) и при их упрощении оставим главные члены до порядка ε включительно. Комбинирование этих упрощенных уравнений позволяет исключить член порядка единицы $\partial R / \partial x_1$, при этом в получаемом уравнении кроме членов порядка ε останется также член порядка единицы с коэффициентом, в точности совпадающим с выражением (3.2). Известно [7], что величины порядка единицы связаны с переносом массы и импульса смеси. В уравнении, описывающем распространение слабых волн, упомянутый выше член должен отсутствовать, поэтому коэффициент при члене порядка единицы необходимо приравнять нулю. Тем самым снова приходим к определению (3.2) скорости звука в смеси. Далее, в полученном и изучаемом приближении упрощенном уравнении, заменяя возмущенные характеристики течения через возмущение скорости посредством соотношений коротких волн (2.3), (3.4), (3.5) и используя определение (3.2), окончательно получим

$$\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \varepsilon_a + \frac{R_0}{L} \frac{\varepsilon_a}{a_{1c0}} \varepsilon_a + \frac{R_0^2 \text{Pe}}{L^2 \text{Nu}} \varepsilon_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} \varepsilon_r \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0, \quad u_1 = \frac{u}{\rho_0} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_a = \left| 1 - \frac{(1 - \beta_0) \rho_0 a_{c0}^2}{\rho_{10} a_{1c0}^2} \right|^2 \frac{m_c \beta_0 (1 - \beta_0) \rho_0 a_{c0}^4}{\rho_{10}^2 a_{1c0}^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 L a_{c0}}{\eta}$$

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{\rho_0 a_{c0}^2}{P_0} A_c, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} A_c, \quad \varepsilon_r = \frac{1 - \beta_0}{3\gamma} \left| 1 - \frac{(1 - \beta_0) \rho_0 a_{c0}^2}{\rho_{10} a_{1c0}^2} \right|$$

$$A_c = \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{1c0}^2} \right) \left| 1 - \frac{(1 - \beta_0) \rho_0 a_{c0}^2}{\rho_{10} a_{1c0}^2} \right|, \quad \varepsilon_r = \frac{(1 - \gamma_0) \rho_{10} a_{c0}^2}{6 P_0} A_c$$

Уравнение (3.6) описывает квазиизотермический режим распространения волн малой, но конечной интенсивности в газожидкостной смеси. Здесь ε_a и ε_r — акустическая и тепловая составляющие коэффициента диссипации. Если $\text{Nu} \rightarrow \infty$, то уравнение будет описывать чисто изотермический процесс распространения волн. Такое уравнение для случая, когда в химически активной жидкой фазе происходит одна реакция, получено в [10].

Для сохранения условия сплошности среды при рассматриваемых умеренных давлениях $P_0 \leq 0,1$ МПа в [11] приведена верхняя граница

изменения величины газосодержания: $z_0 \leq 0.1$. Вычисления, проведенные при $0.01 \leq z_0 \leq 0.1$, показывают, что для слабых ударных волн величины отношений $a_{1,0}/a_{1,00}$, $P_0/z_0 a_{1,0}^2 \approx 5\sqrt{3} z_0 a_{1,0}^2/10$ $\ll 1$. Таким образом, в уравнении (3.6) сжимаемостью жидкой фазы можно пренебречь в сравнении с эффектами вязкости и тепловой релаксации. Такой вывод находится в соответствии с критерием $z_0 \ll P_0/\rho_0 a_{1,0}^2$ пренебрежении сжимаемости жидкости [1, 11]. Тогда безразмерные коэффициенты уравнения (3.6) упрощаются и следуют к виду

$$z_r = 1, \quad z_r = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{r_0^2 \sigma_{1,0}^2}{P_0} \right), \quad \epsilon_r = \frac{1}{3z_r}, \quad \gamma_r = \frac{(1 - z_r) R_0 a_{1,0}^2}{6 P_0} \quad (3.7)$$

Отметим, что влияние тепловой релаксации на квазиизотермический процесс распространения возмущения эквивалентно влиянию второй (продольной) вязкости. Из уравнения (3.6) видно, что и рассматриваемом приближении, несмотря на постоянство температуры в газовом пузырьке, нельзя пренебрегать влиянием теплообмена между пузырьком и окружающей его жидкостью. Более того, при $Pe/Nu \sim 1$, что предполагалось при выводе (3.6), по величине тепловая составляющая коэффициента диссипации одного порядка с коэффициентом дисперсии.

В зависимости от относительной величины малых параметров λ , ϵ , $1/Re$, R_0/L можно выделить возможные течения, встречающиеся при квазиизотермическом режиме распространения возмущений. Не останавливаясь подробно на классификации, выделим лишь случай, реализующийся при $\Delta \ll \epsilon \sim 1/Re \sim R^2/L^2$. Полагая

$$\epsilon = \frac{1}{Re} z_r = \frac{R_0^2}{L^2} \frac{Pe}{Nu} z_r = \frac{R_0^2}{L^2} \gamma_r,$$

уравнение (3.6) приведет к виду

$$u_1 \frac{du_1}{dx_1} - 2 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + \frac{d^3 u_1}{dx_1^3} = 0$$

Полученное уравнение определяет поведение стационарных волн и допускает частное аналитическое решение [12]

$$u_1 = \frac{21}{25} - \frac{48}{25} \sqrt{\frac{c_1}{4}} \left[1 + \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{cn}(2\tau, k)}{1 - \operatorname{cn}(2\tau, k)} \right] \exp\left(\frac{4}{5} x_1\right) \\ + \sqrt{3} \sqrt{\frac{c_2}{4}} \left[\exp\left(\frac{2}{5} x_1\right) - c_3 \right], \quad k^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Здесь c_1 , c_2 , c_3 — произвольные постоянные, $\operatorname{cn}(2\tau, k)$ — эллиптический косинус, k — модуль эллиптического интеграла первого рода.

4. *Квазиadiaбатический процесс.* Примем за независимые термодинамические переменные плотность и энтропию.

Разложим функцию $P_1 = P_1(s_1, s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности положения термодинамического равновесия (покоя). Используя соотношения взаимности [7, 9], получим

$$\frac{dP_1}{dt} = a_{1f}^2 \frac{ds_1}{dt} + \frac{\alpha_1 T_1}{c_{p1}} \rho_1 a_{1f}^2 \frac{ds_1}{dt}, \quad a_{1f}^2 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right)_{T_1}, \quad a_{1f} = - \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial T_1} \right)_{P_1}$$

Здесь a_{1f} — адиабатическая скорость звука в жидкости, α_1 — коэффициент теплового расширения, c_{p1} — удельная теплоемкость при постоянном давлении, s_1 — удельная энтропия, определяемая из уравнения переноса тепла в жидкости, температура которой постоянна [9]

$$\rho_1 T_0 \frac{ds_1}{dt} = \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad T_1 = T_0$$

Комбинирование последних двух уравнений с уравнениями (1.4), (1.9) — (1.11) даст

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)P_2}{T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left[(1-\gamma_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\gamma_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\eta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_{1f}} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\eta}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] - \rho_1 a_{1f}^2 \left(\frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \\ - \beta(P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{4}{3} (1-\beta) \eta \frac{\alpha_1 a_{1f}^2}{c_{p1}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Искомое уравнение, описывающее волновое движение смеси, должно быть выведено из упрощенного в порядке ε варианта уравнения (4.1), в котором необходимо исключить члены порядка единицы $\partial R / \partial x_1$ и $\partial T_2 / \partial x_1$.

Дополним соотношения (2.2) следующим разложением для температуры

$$T_2 = T_0(1 + \varepsilon T_2), \quad T_{2c} = T_0 \quad (4.2)$$

Применяя преобразования (2.1), (2.2) и (4.2) к уравнениям (1.13) и (1.12), удержим при упрощении лишь члены порядка единицы. Интегрируя получаемые соотношения, находим

$$T_2 = -3(\gamma - 1)R, \quad R = - \frac{\rho_0 a_{1f}^2}{3\gamma P_0} u, \quad \frac{Nu}{Re} \sim \varepsilon^2 \quad (4.3)$$

В рассматриваемом процессе снова имеет место формула (3.5) с заменой a_{1f} , m_f на a_{1f} и m_f , где $m_f = \frac{1}{a_{1f}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\gamma_1 a_{1f}) \right]_{T_1}$

Теперь применим то же преобразование коротких волн к уравнениям (4.1), (1.12) и (1.13) и при их упрощении удержим главные члены до порядка ε включительно. Далее, скомбинируем полученные упрощенные уравнения и, тем самым, исключим члены порядка единицы $\partial R / \partial x_1$ и $\partial T_2 / \partial x_1$. После этих выкладок получим промежуточное уравнение, в котором сохранится член порядка единицы $\partial u / \partial x_1$ с некоторым коэффициентом. В уравнении, описывающем распространение слабых ударных волн, член порядка единицы, харак-

теризующий перенос массы и импульса смеси, должен отсутствовать [7]. Поэтому в промежуточном уравнении коэффициент при $\partial u / \partial x_1$ необходимо приравнять нулю, в результате чего найдем явную связь между невозмущенной адиабатической скоростью звука в смеси и скоростями звука в фазах

$$\frac{1}{a_{f0}^2} = \frac{(1 - \beta_0)\beta_0}{\beta_{00}a_{00}^2} + \frac{\beta_0\beta_0}{\gamma P_0} \quad (4.4)$$

В полученном промежуточном уравнении, учитывая определение (4.4), выразим возмущенные характеристики течения через возмущенную скорость посредством формул (2.3), (3.5) и (4.3). При квазиадиабатическом режиме распространения возмущений опять правомерен вывод относительно пренебрежения эффектам сжимаемости жидкости, приведенный в п. 3. Ввиду этого, окончательное уравнение, получаемое из промежуточного, запишется в виде

$$\Delta \frac{dw_1}{dt} + \varepsilon_2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\text{Re}} \beta_j \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{L^2 \text{Nu}}{R_0^2 \text{Pe}} u_1 + \frac{R_0^2}{L^2} \gamma_j \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (4.5)$$

$$\alpha_j = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad x = \frac{3(\gamma - 1)}{4}, \quad \gamma_j = \frac{(1 - \beta_0)\beta_{00}a_{00}^2}{6\gamma P_0}, \quad u_1 = \frac{w}{\beta_0}$$

Здесь безразмерный коэффициент β_j тот же, что и в (3.7), с заменой a_{00} на a_{f0} . Если $\text{Nu} \rightarrow 0$, то уравнение (4.5) будет описывать чисто адиабатический режим распространения волны малой, но конечной интенсивности [2].

Применим уравнение (4.5) к качественному анализу известных экспериментов [1, 2, 4, 13] по распространению слабых ударных волн в газожидкостных смесях.

Во всех экспериментах на начальной стадии эволюции заданных возмущений наблюдались осцилляции слабых волн. Ввиду пренебрежимо малого сжатия пузырьков интенсивность теплообмена пока еще мала. На начальной стадии такого же порядка малости является и величина нелинейного эффекта. Применительно к уравнению (4.5) пренебрежение этими эффектами соответствует положению связей на безразмерные малые параметры

$$\varepsilon \alpha_j = \frac{L^2 \text{Nu}}{R_0^2 \text{Pe}} \ll \frac{R_0^2}{L^2} \gamma_j = 1 - \frac{1}{\text{Re}},$$

то есть процесс распространения возмущений можно описать линейным уравнением Бюргерса-Кортвега-де Вриза.

Далее происходило нарастание нелинейного эффекта и на последующей стадии эволюции возмущений во фронте слабой ударной волны начинался процесс теплообмена между газом, нагретым при сжатии пузырька и жидкостью. В этом случае все члены уравнения (4.5) будут одного порядка. Принимая все безразмерные коэффициенты равными друг другу, поведение волны опишем уравнением

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + u_1 = 0$$

С увеличением характерной длины L — расстоянием, на которое может распространиться волна, теплообмен усиливается ввиду еще большего сжатия пузырька и становится главным диссипативным механизмом в процессе распространения слабой ударной волны. Полагая на этой стадии

$$\frac{1}{\text{Re}} z_f \ll \frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} x = z_f = \Delta = \frac{R_0^2}{L^2} z_f$$

приведем уравнение (1.5) к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + u_1 = 0$$

Очевидно, что волна все еще имеет осцилляционную структуру, при этом затухание осцилляций имеет экспоненциальный характер.

Наконец, когда $L > Vt_*$, где V — скорость слабой ударной волны, t_* — время тепловой релаксации [6], реализовалась ударная волна с монотонной структурой. Этот факт соответствует выполнению в (4.5) условий

$$\frac{1}{\text{Re}} z_f = \frac{R_0^2}{L^2} z_f \ll \frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} x = z_f = \Delta$$

Распространение слабой ударной волны описывается теперь уравнением

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 = 0$$

Рассмотрим в уравнении (4.5) более подробно коэффициент при члене, ответственным за тепловую релаксацию. Согласно [6], он может быть представлен в виде

$$\frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} x = \frac{L}{R_0} V \sqrt{\frac{\lambda_2}{t_* a_{fo}^2}} x \quad (4.6)$$

В вышеупомянутых экспериментах для слабых ударных волн, распространяющихся в жидкости с пузырьками гелия, наблюдался более ранний переход от осцилляционной структуры к монотонной в сравнении с жидкостью, насыщенной пузырьками воздуха или углекислого газа. Этот факт можно объяснить тем, что коэффициент температуропроводности λ_2 при переходе от воздуха и CO_2 к He возрастает на порядок, вследствие чего коэффициент (4.6) начинает играть существенную роль в уравнении (4.5) на меньших расстояниях.

Проведенный анализ распространения слабых ударных волн качественно согласуется с численными расчетами из [6, 11], где впервые верно выявлена роль тепловых процессов на эволюцию возмущений в газожидкостных средах.

В заключение отметим следующий факт. Если отказаться от гипотезы Когарко-Норданского [14, 15] о возможности замены давления в жидкости вдали от одиночного пузырька давлением и смеси, то в уравнении (1.3) необходимо заменить P на P_1 . Проведенные более сложные, по сравнению с настоящей работой, выкладки свидетельствуют о том, что снова имеют место уравнения (3.6) и (4.5), но с несколько измененными коэффициентами диссипации и дисперсии. В частном случае отсутствия теплообмена и несжимаемости жидкой фазы получаем следующие связи:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma} = 1 + \beta_0, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma} = \frac{1}{1 - \beta_0}$$

где γ_2, γ_1 — коэффициенты, вычисленные без применения гипотезы. Хотя гипотеза несколько завышает величины коэффициентов диссипации и дисперсии, их различия, по всей вероятности, лежат в пределах точности общепринятых моделей газожидкостных сред.

Автор признателен А. Г. Багдасару и М. В. Белубекиану за продолжительные дискуссии и обсуждения.

ON EQUATIONS OF NONLINEAR ACOUSTIC OF GAS-FLUID MEDIA

G. G. OHANIAN

ԳԱԶԱՆԵՂՈՒԻ ՄԵԶԱՎԱՅՐԻ ՈՉ ԴՆԱՅԻՆ ԱԿՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Գ. ՕՀԱՆԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում են գազահեղուկ խառնուրդում ձայնային ալիքների տարածման խնդիրներ, երբ գազային պղպջակի և շրջապատող հեղուկի միջև տեղի ունի ջերմափոխանակություն: Հեղուկի ջերմաստիճանը հաստատուն է, ընթացվում է, որ հեղուկի և գազային փուլերը շարժվում են միևնույն արագությամբ, ընդ որում նրանց համապատասխան ճնշումները և ջերմաստիճանները տարբեր են:

Ստացված են միաչափ ալիքների տարածումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները, երբ պղպջակի թերմոդինամիկական մարրեր մոտ է իդոթերմիկ և ադիաբատիկ պրոցեսներին:

ЛИТЕРАТУРА

1. Низматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Ачатыандже С. С., Нахоряков В. Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа — В кн.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.

- 4 Килмезов В. В., Покорный В. Е., Понцева Е. Г., Шрейбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа — Письма в Журнал экспериментальной физики в двухфазных средах (Новосибирск). Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
- 5 Чиликов Р. В., Писеев М. С. Тензорные эффекты при свободном колебании газовых пузырьков — Теор. основы прикл. расчетов, 1971, т. 93, № 3, с. 37—40.
- 6 Губийдин А. А., Покорный В. Е., Понцева Е. Г. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. — ИМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
- 7 Рыжов О. С., Шендеров Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений — ПММ, 1964, т. 23, № 6, с. 996—1007.
- 8 Рыжов О. С. Асимптотические методы в динамике жидкостей — Ж. вычисл. матем. и мат. физики, 1983, т. 23, № 5, с. 1221—1248.
- 9 Ломовый Л. Л., Ларин Г. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- 10 Оганян Г. Г. О распространении возмущений в химически активной жидкости, содержащей пузырьки газа — Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. 31, № 3, с. 49—62.
- 11 Никитилин Р. И., Шашинов В. III Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа — МЖТ, 1974, № 6, с. 30—41.
- 12 Оганян Г. Г. Об одной частной проблеме уравнения Бюргера-Кортвега-де-Вриза — Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, № 2, с. 38—42.
- 13 Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures. — J. Fluid Mech., 1974, v. 68, № 1, p. 115—143.
- 14 Норданкян С. Н. Об уравнении движения жидкости, содержащей пузырьки газа — ИМТФ, 1960, 6, с. 102—110.
- 15 Келерман Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости — Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, с. 1331—1333.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.XI.1987

УДК 617.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УЗКИХ ПУЧКОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

МАНУКЯН С. М.

Уравнения двумерных коротких волн, которые описывают область резкого изменения параметров вблизи волн, получены в работе [1]. Учет вязкости и теплопроводности для произвольной трехмерной волны в неоднородной жидкости сделан в [2]. Для произвольной среды уравнения коротких волн получены в [3], там же конкретизированы коэффициенты для магнитной газодинамики. Другим путем уравнения коротких волн в магнитной газодинамике получены в [4]. В [5, 6] получены уравнения коротких волн для произвольной среды при наличии малой диссипации и дано уточнение коэффициентов для микрополарной среды. В работах [7, 8] развита теория нелинейных модуляционных волн, а в [9] на уравнении коротких волн для смеси жидкости и газа получены уравнения модуляции и даны их решения. В [10] выведены уравнения модуляции для электропроводящей жидкости в магнитном поле с пузырьками газа и решена задача пучков.

В настоящей работе приводится численное решение задачи об узких гауссовых пучках в магнитной газодинамике с пузырьками газа. При этом взята простая модель, как и в [11, 12], а учет взаимодействия пузырьков и тепловых эффектов можно сделать, как в работе [13]. Метод решения задачи, все выкладки, а также количественные результаты не меняются. Изменяются лишь значения коэффициентов в уравнениях (1.1) — (1.4), что в принципе не влияет на расчеты.

На основании уравнений коротких волн выведены уравнения модуляций, которые дают изменения амплитуд и фаз квазимонохроматической волны. Решения полученных уравнений, в отличие от [10], имеют экспоненциальный множитель, дающий линейное затухание и содержащий в экспоненте не время, а осевую координату. Тем самым, становится более понятным рассмотрение стационарных пучков.

§ 1. Уравнения коротких волн для задачи магнитной газодинамики с пузырьками

Уравнения магнитной гидродинамики для газожидкостной смеси в отсутствии внешних сил имеют вид [10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \rho + \rho \nabla \vec{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \vec{v} - \nu_s (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = - \nabla \left(p + \frac{\nu_s H^2}{2}\right) + (\nu_s + \nu) \nabla \nabla \vec{v} + \rho \Delta \vec{v}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \vec{H} - (H \nabla) \vec{v} + H (\nabla \cdot \vec{v}) = \nu_H \nabla^2 \vec{H}$$

здесь ρ — массовая плотность, P — давление, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, ∇ — пространственный градиент, ν — динамическая ньютоновская вязкость, $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\nu_s = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$, ν_0 — объемная вязкость, μ_0 — магнитная постоянная, ϵ_0 — электропроводность среды, Δ — оператор Лапласа.

Рассматривается гомогенная односкоростная смесь, для которой имеются соотношения [11]

$$\rho = \rho_f (1 - \beta) + \rho_g \beta, \quad \frac{\rho_g R^3}{\rho_f (1 - \beta)} = \text{const}, \quad P_g R^3 = \text{const}$$

где ρ_g — плотность газа, ρ_f — плотность жидкости, β — концентрация газа, R — радиус пузырька, p_g — давление в газе. Между давлением в пузырьке и в смеси имеется связь [11]

$$p_g - p = \rho_f R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_f \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\eta}{R} \frac{dR}{dt}$$

Принято, что жидкость несжимаема, $\rho_f = \text{const}$ и ρ_g мало, поэтому $\rho \approx \rho_f (1 - \beta)$.

Для получения упрощенного уравнения вблизи волны (уравнения коротких волн) применяется метод, описанный в [10], который состоит в переходе к лучевым координатам и в удерживании членов основного порядка.

В результате получаются следующие уравнения коротких волн [5, 6, 10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(u) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi}{dt} = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right] \quad (1.1)$$

$$L = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \tau_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \tau_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right]$$

где $dx = H_1 d\tau$, τ — сопровождающая координата, $H_1 = c_n + v_n$ — нормальная скорость волны линейной задачи, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — компоненты волнового вектора в системе координат x, y, z , причем ось x направлена по нормали к волне, а y и z — по касательной к ней, начальное магнитное

поле $\vec{H}$ направлено по оси x , Φ — амплитуда лучевого решения, $u = v_x$, $\Gamma = 1/\beta$. Коэффициенты уравнения (1.1) получены в [10] и имеют вид

$$D = \frac{D'}{H_1}, \quad E = \frac{E'}{H_1^2}, \quad D' = -M \left\{ \left[\frac{4\rho}{3p_s} c a_1^2 + (\rho_0 + 2\rho) \frac{c}{\rho} \left(c^2 - \frac{\rho_c}{\rho} H_x^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_1 c (c^2 - a_1^2)}{c^2 c} H_x^2 - \rho_H c (c^2 - a_1^2) \right] \right\} \quad (1.2)$$

$$E' = M \frac{\rho_s R^2 c^2 a^2}{3 p_s} \left(c^2 - \frac{\rho_c}{\rho} H_x^2 \right) \quad (1.3)$$

$$M = \frac{1}{2c[2c^2 - (a_1^2 + a_2^2)]} \quad (1.4)$$

$$c^4 - c^2(a_1^2 + a_2^2) + a_1^2 \frac{\rho_c}{\rho_0} (H_n^2)_0 = 0 \quad (1.5)$$

здесь a_s — скорость звука в жидкости с пузырьками.

$a_1^2 = \frac{\rho_c}{\rho_0} (H_{x0}^2 + H_{y0}^2)$, $H_1 = H_{x0} + H_x$, причем H_{x0} , H_{y0} , $(H_n^2)_0$, ρ_0 , a_{s0} — значения функций в невозмущенной среде, $c = c_s$. При $H_n = H_x$, $H_{y0} = 0$, то есть на оси пучка $c = a_s$ (или a_1), $D' < 0$.

В случае подвижной системы координат, связанной с волной, $x_2 \approx 0$, $z_2 \approx 0$. Тогда скорость волны будет [5] $H_1 = \frac{1}{1 + a_1^2 + a_2^2 + z_2^2}$.

Учитывая малость x_2 , z_2 вблизи оси x_1 при $H_{y0} \approx 0$, из (1.5) можно получить

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial a_2^2} = - \frac{c^2}{2c^2 - a_{s0}^2 - a_1^2}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial z_1} = 0$$

В дальнейшем будем изучать пучки, как в плоской задаче, так и в задаче с осевой симметрией. Тогда, обозначая через y координату по нормали к оси x , можно получить

$$L = \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

причем $\bar{k} = 0$, $\bar{k} = 1$, соответственно, для первой и второй задачи.

При распространении узких пучков в электропроводящей жидкости с пузырьками газа имеются быстрые и медленные волны, и, вообще говоря, их интенсивности следует находить из граничных данных на источнике. Для волны, близкой к плоской, представляющей огибающую быстрых или медленных магнито-газодинамических волн.

можно находить вышеуказанную интенсивность волн, решая задачу о поршне (без дисперсии, диссипации и нелинейности) в поперечном магнитном поле, как это сделано в [11]. Несмотря на то, что в настоящей задаче берется гауссовское распределение по y , что меняет характер движения и вместо ударных волн будут пучки, однако перераспределение энергии по волнам может быть взято из решений для плоской волны.

§. 2. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн

Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение $\Phi = \exp i\Omega t$. Ищем решение уравнения (1.1) в виде волн

$$u = U_0 \exp \left[\frac{1}{2} (U_1 \exp(i\Omega - \nu x^2 \tau_1) + U_2 \exp(-i\Omega - \nu x^2 \tau_1)) + (U_2 \exp(2i\Omega - 2\nu x^2 \tau_1) - U_2 \exp(-2i\Omega - 2\nu x^2 \tau_1)) \right] \quad (2.1)$$

где $\tau = \tau_1 - t$, $\Omega = \omega - \omega_0$, ω_0 — невозмущенная частота, ν — коэффициент затухания. U_0 , U_1 , U_2 — медленно меняющиеся амплитуды, U_1 , U_2 — комплексно сопряженные функции.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.1), учитывая, что в дифракционной задаче U_0 можно пренебречь и приравнявая слагаемые при $e^{i\Omega}$ и $e^{-i\Omega}$, получим

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (i\omega + \nu x^2) + (i\omega - \nu x^2) \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{1}{2} L(U_1) = \\ & = - \frac{1}{H_1} \left[\frac{F}{2} (ix - 3\nu x^2)^2 U_1 U_2 \exp(-2\nu x^2 \tau_1) + 3D \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (ix - \right. \\ & \quad \left. - \nu x^2)^2 + 4E \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (ix - \nu x^2)^3 \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & U_2 (4ix\omega - 4ix^3\nu) + \frac{\partial U_2}{\partial t} (2ix - 2\nu x^2) - \frac{1}{2} L(U_2) - 2 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} (i\omega + \nu x^2) = \\ & = - \frac{1}{H_1} \left[(ix - \nu x^2) (2ix - 2\nu x^2) \frac{F}{2} + DU_2 (2ix - 2\nu x^2)^3 + EU_2 (2ix - 2\nu x^2)^4 + \right. \\ & \quad \left. + 3D (2ix - 2\nu x^2)^2 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + 4E \frac{\partial U_2}{\partial \tau} (2ix - 2\nu x^2) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приравнявая в (2.2) члены, содержащие U_1 , получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = - \frac{1}{H_1} E x^3 \quad (2.4)$$

$$\nu = - \frac{1}{H_1} D \quad (2.5)$$

Рассмотрим стационарную задачу для амплитуд

$$U_1 = U_1(x_1, y) \quad U_2 = U_2(x_1, y)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t}$, где x_k — исходная система координат, то $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} = 0$, причем $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$. Подставляя (2.4), (2.5) в (2.2), (2.3) и проделав вышеприведенную замену переменных, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \left(-3 \frac{\Gamma}{H_1} E x^2 + i x - \frac{1}{H_1} D x^2 \right) - \frac{1}{2} L(U_1) = \frac{x^2 + 6 i x x^2}{H_1} \times \\ \times \frac{\Gamma}{2} U_1 U_2 \exp(-2 x^2 x_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} U_1 \left(\frac{12}{H_1} E x^4 - \frac{4}{H_1} D x^2 \right) \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \left(2 i x - 3 \frac{\Gamma}{H_1} x^2 - 5 D \frac{x^2}{H_1} \right) - \\ - \frac{1}{2} L(U_2) = \frac{\Gamma}{H_1} x^2 U_1^2 + 2 i x^3 \Gamma H_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим

$$U_1 = a e^{i\varphi}, \quad U_2 = A e^{i\psi}, \quad \bar{U}_1 = a e^{-i\varphi}, \quad \bar{U}_2 = A e^{-i\psi} \quad (2.8)$$

где a, A — амплитуды, φ, ψ — фазы, соответственно, первой и второй гармоники.

Подставляя (2.8) в (2.6), (2.7), получим уравнения для действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} - \left(3 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1} D x^2 \frac{\partial a}{\partial x_1} = \frac{\Gamma}{2 H_1} x^2 a A \cos(\Phi - \\ - 2\varphi) \exp(-2 x^2 x_1) - \frac{3 x^2}{H_1} \Gamma a A \sin(\Phi - 2\varphi) \exp(-2 x^2 x_1) + \\ + \frac{1}{2 x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{k}{y} a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left(3 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) A \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1} D x^2 A \frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\Gamma}{2 H_1} x^2 A \sin(\Phi - 2\varphi) \exp(-2 x^2 x_1) + \\ + \frac{3 x^2}{H_1} \Gamma A \cos(\Phi - 2\varphi) \exp(-2 x^2 x_1) + \\ + \frac{1}{2 x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \left[A^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{k}{y} A^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$A \frac{12}{H_1} E x^4 = \frac{\Gamma}{H_1} x^2 a^2 \cos(\Phi - 2\varphi) + \frac{2\Gamma}{H_1} a^2 x^3 \sin(\Phi - 2\varphi) +$$

$$+\frac{1}{2z_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial z_2^2}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\frac{k}{y}\frac{\partial A}{\partial y}\right]+2A\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\left(z-\right. \\ \left.-15\frac{Fz^3}{H_1}\right)+8D\frac{z^2}{H_1}\frac{\partial A}{\partial z_1} \quad (2.11)$$

$$-A\frac{4}{H_1}Dz^3=-\frac{1}{H_1}z^3\Gamma a^2\sin(\Phi-2\varphi)+\frac{2}{H_1}\Gamma a^2\cos(\Phi- \\ -2\varphi)z^3-2\left(z-15\frac{Fz^3}{H_1}\right)\frac{\partial A}{\partial z_1}+8\frac{Dz^2}{H_1}A\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}+ \\ +\frac{1}{2z_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial z_2^2}\left[2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+A\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{k}{y}A\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] \quad (2.12)$$

§ 3 Решение задачи об узких пучках

Будем считать, что магнитное поле направлено по оси x , являющейся осью симметрии пучка.

Решение уравнения (2.9) — (2.12) ищем в виде

$$a=a_0(z_1)\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right), \quad \varphi=z_1(z_1)+k(z_1)\frac{y^2}{2} \quad (3.1)$$

$$A=A_0(z_1)\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right), \quad \Phi=z_1(z_1)+k_1(z_1)\frac{y^2}{2} \quad (3.2)$$

где y_0 — начальная ширина пучка.

Подставляя (3.1), (3.2) в уравнения (2.9) — (2.12) и приравнявая коэффициенты при y^0 и y^2 , получим систему из восьми уравнений

$$\frac{\partial a'}{\partial z'}=\frac{z_1(1+3z_1)+z_2\bar{z}_2}{(1+3z_1)^2+z_1^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial z'}=\frac{1}{a'}\frac{z_1\bar{z}_1-z_2(1+3z_1)}{(1+3z_1)^2+z_1^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial A'}{\partial z'}=\frac{1}{4}\frac{8z_1z_2+(1+15z_1)z_1}{16z_1^2+(1+15z_1)^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial z'}=\frac{1}{4A'}\frac{8z_1z_2-2(1+15z_1)z_2}{16z_1^2+(1+15z_1)^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'}=\frac{1}{2}\frac{f^2y_0^2}{f^2y_0^2}\frac{(1+3z_1)z_1+z_1z_2}{(1+3z_1)^2+z_1^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z'}=2\frac{z_1\bar{z}_1-(1+3z_1)z_1}{(1+3z_1)^2+z_1^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'}=\frac{F^2y_0^2}{4A'}\frac{4z_1z_2+(1+15z_1)z_1}{16z_1^2+(1+15z_1)^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{A'} \frac{4\gamma\tau_0 - (1+15\gamma)\varphi_1}{16\gamma^2 + (1+15\gamma)^2} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \frac{k_1' a' k_1}{2} + \frac{\Gamma_1}{2} A' a' E_1 S + 3\Gamma_1 a' A' E_1 C, \quad \varphi_2 = -1 a' f_1 k_2 + \\ &+ \frac{\Gamma_1}{2} A' a' E_1 C - 3\Gamma_1 a' A' E_1 S \\ \varphi_3 &= 12 A' + A' k_1 F_1 + \Gamma_1 a'^2 C + 2\Gamma_1 a'^2 S, \quad \varphi_4 = -4 A' \gamma_1 k_1 a' \frac{k_1}{2} - \\ &- \Gamma_1 a'^2 S + 2\Gamma_1 a'^2 C \\ \varphi_5 &= -2 i k_1' f_1 + \Gamma_1 A' E_1 C \left(\frac{k_2}{4} - 3 F_1 \right) - \frac{\Gamma_1}{2} A' E_1 S (F_1 + 3 k_2) \\ \varphi_6 &= 2 i f_1' - \frac{1}{2} \frac{k_1'}{2} - \frac{\Gamma_1}{2} A' E_1 C (F_1 + 3 k_2) - \Gamma_1 A' E_1 S \left(3 F_1 - \frac{k_2}{4} \right) \\ \varphi_7 &= 2 i A' F_1' - \frac{1}{2} \frac{k_1'^2 A'}{2} - \Gamma_1 a'^2 S \left(\frac{k_2}{2} + 2 f_2 \right) - \\ &+ \Gamma_1 a'^2 C (k_2 - f_2) \\ \varphi_8 &= -2 i A' k_1' F_1 - \Gamma_1 a'^2 C \left(\frac{k_2}{2} + 2 f_2 \right) - \Gamma_1 a'^2 S (f_2 + k_2) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = -\frac{E x^2}{H_1}, \quad \lambda = \frac{1}{x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau_1^2}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad C = \cos(\tau_1 - 2\sigma)$$

$$S = \sin(\tau_1 - 2\sigma), \quad \Gamma_1 = \frac{K}{H_1} \Gamma, \quad F_1 = \frac{1}{y_0^2 F^2}, \quad f_1 = \frac{1}{y_0^2 f^2}$$

$$k_2 = k_1 - 2k', \quad k_1 = 1 + k, \quad F_1 = \exp(-2\sigma'), \quad f_2 = \frac{1}{y_0^2} \left(\frac{2}{f^2} - \frac{1}{F^2} \right)$$

Штрихами обозначены безразмерные переменные, полученные после следующей замены переменных:

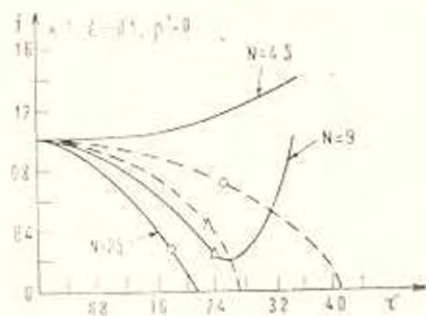
$$a' = \frac{a_0}{K}, \quad A' = \frac{A_0}{K}, \quad k_1 = \left(\frac{x}{H_1} \right)^2 k', \quad k_2 = \left(\frac{x}{H_1} \right)^2 k_1', \quad y_0 = \frac{y_0^2}{H_1}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{x} \tau', \quad x_1 = \frac{1}{H_1} x_1', \quad \tau_2 = \frac{1}{H_1} \tau_2', \quad K = u_0(0)$$

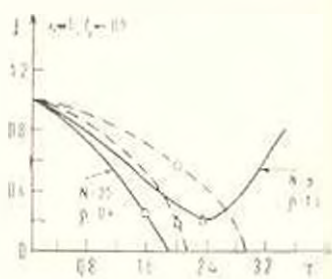
В работе [15] дается расчет звуковых пучков в газовой динамике.

При этом решается уравнение, которое получается из (1.1) при $\vec{H} = 0$, кроме того, рассматривается сжимаемая жидкость без пузырьков газа.

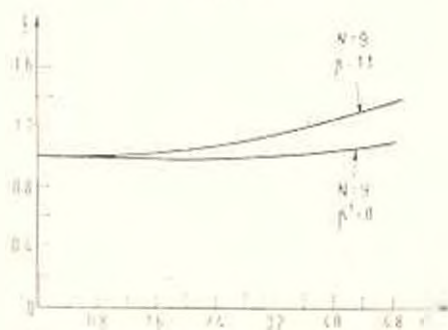
В настоящей работе для системы уравнений (3.3) — (3.10) численно решена задача Коши на ЭВМ ЕС1045. При этом проведена целая серия расчетов для различных значений параметров, характеризующих поведение узких пучков. $N = \frac{\Gamma K}{H_1} y_0^2$, дающего отношение нелинейных и дифракционных эффектов и $\tilde{\rho} = \frac{1}{|K| y_0^2}$, дающего отношение радиуса кривизны к начальной ширине пучка.



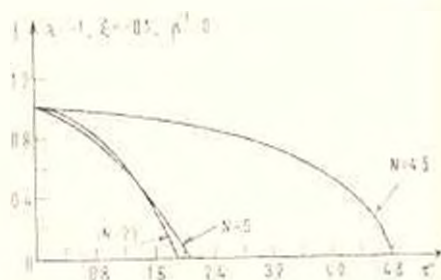
Фиг. 1



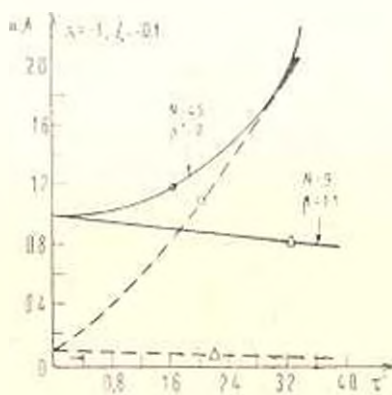
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Результаты расчетов для значений $N=4,5; 9; 25$; $\beta^{-1}=0$, $\beta=0,1$; $1,1$; дисперсии $\xi=-0,1$; -1 ; диссипации $\nu=0$, коэффициента нелинейности $K/H_1=0,1$; $0,05$ приведены на графиках. На фиг. 1—5 приводится значение ширины пучка $\bar{\xi}$. Как показывают расчеты, при $N=4,5$ происходит расширение пучка, при $N=9$ пучок сперва сужается, но, доходя до фокального пятна, затем расширяется, а для $N=25$ имеет место фокусировка пучка (фиг. 1). Там же пунктиром приводится решение по приближенным формулам, полученным в [10]:

$$\bar{\xi} = \frac{\sqrt{C^2 p^2 - 1}}{C} - \frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C}, \quad C = \left(R^2 - \frac{\nu}{12} \frac{1^2 \exp(-\nu z)}{p^2} \frac{K^2}{H_1^2} \right)^{1/2} + 1$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{6\xi} \frac{\lambda}{y_0^2} \left(\frac{K1^2}{H_1} \right)^2 \exp(-\nu z) + \frac{4\lambda^2}{y_0^4}$$

Как видно из фиг. 1, для $N=25$ фокусное расстояние по приближенному решению значительно больше, чем по уточненному, для $N=9$ приближенное решение фокусируется, в то время как точное решение дает фокальное пятно, а при $N=4,5$ в точном решении имеет место дефокусирование. Таким образом, для сильной нелинейности точное решение быстрее фокусируется, для средней нелинейности точное решение не достигает фокуса, а для малой нелинейности происходит расширение пучка.

В силу большого количества параметров, как и в нелинейной акустике [15], введены безразмерные параметры, содержащие влияние констант на решение, в частности радиус пузырька R входят в параметр ξ , характеризующий дисперсию, при помощи коэффициента E . Подобная классификация выделяет влияние дифракции β , нелинейности N , дисперсии ξ на волновое движение в пучке.

Приведенный метод является простым и эффективным при расчете пучков для различных сред.

Автор статьи выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за большую помощь в процессе работы.

THE INVESTIGATION OF NONLINEAR NARROW BUNDLES IN ELECTROCONDUCTING FLUID WITH GAS BUBBLES

S. M. MANUKYAN

ՈՉ ԴԵՄԱՅԻՆ ՆԵՂ ՓԵՋԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԴԱՋԱՅԻՆ,
ՊԵՂՋԱԿՆԵՐՈՎ ԷԼԵԿՏՐԱԶԱՂՈՒԹՅՈՒՆԻ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ

Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկված է դադալին պղպշակներով էլեկտրաաղդողիչ հեղուկում նեղ փեջերի հաշվարկի խնդիրը: Ստացված է կարճ ալիքների և հարմոնիկի

ամպլիտուդի համասարտմանը, որի լուծումը փնտրվում է գաղտնյան փնտրի տեսանկյունից: Ամպլիտուդի, փուլի, կորակայան և փնջի լայնության հաշվարկի միջոցով ստացված է լուծում կիցառանցքային տիրույթի համար: Բերված են ստացված լուծման գրաֆիկները և տրված է համեմատություն մոտավոր բաժանների լուծման հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ражов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
2. Шедтер Г. М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.—ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. Багдасарян А. Г., Давидян З. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Журнал Выч. мат. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1512—1529.
4. Минасян М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН АрмССР, 1972, т. 1 V, 3.
5. Багдасарян А. Г., Петросян А. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводной жидкости с несимметричным тензором напряжений I. ЖТФ, 1980, т. 50, № 12, с. 2501—2511.
6. Багдасарян А. Г., Петросян А. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводной жидкости с несимметричным тензором напряжений II. ЖТФ, 1980, т. 50, № 12, с. 2512—2520.
7. Уилем Д. Л. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977. 621 с.
8. Карпман В. Н. Нелинейные волны в диспергирующих средах.—Новосибирск: Наука, 1973.
9. Багдасарян А. Г., Оганян Г. Г. Эволюция квазиомономатических волн в резонансной газожидкостной смеси.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 37, № 1, с. 34—45.
10. Багдасарян А. Г., Петросян А. Г. Распространение волн в микрополяризованной проводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, № 5, с. 3—16.
11. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.—Реология суспензий (сб. статей). М.: Мир, 1975, с. 68—103.
12. Коларко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости.—Докл. АН СССР, 1961, 137, № 6, с. 1331—1333.
13. Губийдуллин А. А., Ивандасов А. И., Писемтуллин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
14. Куликовский А. Г., Любимова Г. Г. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
15. Бахвалов Н. С., Жилицкий Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982, 176 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
11.XI.1982

УДК 539.377

ДВУХСЛОЙНОЕ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, НАГРЕВАЕМОЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

ИВАННИСЯН Г. Г.

В практике применения кристаллов в различных технических и научных целях часто необходимо знание температурных напряжений в кристаллических телах. Это существенно, например, при выборе режима работы и отжиге кристаллов, при оценке термостойкости кристаллических тел и т. п. В связи с этим актуальной является проблема определения температурных напряжений в ортотропных кусочно-однородных телах, обусловленных нестационарными температурными полями.

Рассмотрим двухслойное ортотропное полупространство, состоящее из покрытия, занимающего область $0 \leq z < z_1$ и сопряженной с ним области $z_1 \leq z < \infty$. Пусть температура поверхности $z=0$ данного кусочно-однородного тела изменяется по закону

$$t_{z=0} = t_c \cos \omega_c x \exp(i\omega_c \tau) \quad (1)$$

где $t_c = \text{const}$, $\omega_c = \text{const}$, $\omega_c = \text{const}$.

Физико-механические характеристики такой системы представляются в виде

$$p_{ij}(z) = p_{ij}^{(1)} + (p_{ij}^{(2)} - p_{ij}^{(1)})S_-(z - z_1) \quad (2)$$

где индексами 1, 2, соответственно, обозначены физико-механические характеристики покрытия и сопряженной с ним области.

$S_-(z - z_1) = \begin{cases} 1, & z \geq z_1 \\ 0, & z < z_1 \end{cases}$ — асимметричная единичная функция [1].

Уравнения термоупругости в данном случае запишутся таким образом [2]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + [k_x^{(1)} + (k_x^{(2)} - k_x^{(1)})S_-(z - z_1)] \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{a_z^{(1)}} + \left(\frac{1}{a_z^{(2)}} - \frac{1}{a_z^{(1)}} \right) S_-(z - z_1) \right] t + \\ + (1 - K_x^{(2)}) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_1} \delta_-(z - z_1) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[\varepsilon_{11}^{(1)} + (\varepsilon_{11}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(1)})S_-(z - z_1) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\varepsilon_{13}^{(1)} + (\varepsilon_{13}^{(2)} - \varepsilon_{13}^{(1)})S_-(z - z_1) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} =$$

$$= \left[\frac{1}{c_{20}^{(1)2}} + \left(\frac{1}{c_{20}^{(2)2}} - \frac{1}{c_{20}^{(1)2}} \right) S_-(z-z_1) \right] \ddot{u} + [z_{11}^{(1)} + (z_{11}^{(2)} - z_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial \dot{t}}{\partial x} +$$

$$+ \left(1 - \frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + [z_{33}^{(1)} + (z_{33}^{(2)} - z_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [z_{13}^{(1)} + (z_{13}^{(2)} - z_{13}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$$

$$(4)$$

$$= \left[\frac{1}{c_{1a}^{(1)2}} + \left(\frac{1}{c_{1a}^{(2)2}} - \frac{1}{c_{1a}^{(1)2}} \right) S_-(z-z_1) \right] \ddot{w} + [z_{33}^{(1)} + (z_{33}^{(2)} - z_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial \dot{t}}{\partial z} +$$

$$+ \left[\frac{z_{33}^{(2)} - z_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} t + \frac{c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

В уравнениях (3), (4) введены обозначения

$$K_i^{(n)} = \frac{\lambda_i^{(n)}}{\lambda_i^{(1)}}, \quad \lambda_i^{(n)} = \frac{\lambda_i^{(n)}}{\lambda_i^{(1)}}, \quad z_{ij}^{(n)} = \frac{c_{ij}^{(n)}}{c_{ij}^{(1)}}, \quad z_{ij}^{(n)} = \frac{c_{ij}^{(n)} + c_{ij}^{(n)}}{c_{ij}^{(1)}}, \quad z_{13}^{(n)} = \frac{c_{11}^{(n)} + c_{33}^{(n)}}{c_{13}^{(1)}}$$

$$z_{33}^{(n)} = \frac{c_{33}^{(n)}}{c_{33}^{(1)}}, \quad z_{11}^{(n)} = \frac{z_{11}^{(n)}}{c_{11}^{(1)}}, \quad z_{33}^{(n)} = \frac{z_{33}^{(n)}}{c_{33}^{(1)}}, \quad c_{1a}^{(n)} = \frac{c_{1a}^{(n)}}{c_{1a}^{(1)}}, \quad c_{2a}^{(n)} = \frac{c_{2a}^{(n)}}{c_{2a}^{(1)}} \Big|_{j=1,2}$$

$\lambda_i^{(n)}$, $\lambda_i^{(n)}$, $\lambda_i^{(n)}$ — коэффициенты тепло- и температуропроводности, $c_{ij}^{(n)}$ — плотность, $\delta_-(z) = S_-(z)$.

Динамические температурные напряжения определим по формулам [2], которые в данном случае примут вид

$$\tau_{xz} = [c_{11}^{(1)} + (c_{11}^{(2)} - c_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial u}{\partial x} + [(c_{13}^{(2)} - c_{13}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial w}{\partial z} -$$

$$- [z_{11}^{(1)} + (z_{11}^{(2)} - z_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1)] t$$

$$\sigma_{zz} = [c_{33}^{(1)} + (c_{33}^{(2)} - c_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial u}{\partial x} + [z_{33}^{(1)} + (c_{33}^{(2)} - c_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial w}{\partial z} -$$

$$- [z_{33}^{(1)} + (z_{33}^{(2)} - z_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1)] t \quad (5)$$

$$\tau_{xz} = [c_{55}^{(1)} + (c_{55}^{(2)} - c_{55}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Решение уравнений (3), (4) ищем в виде

$$t(x, z, \tau) = \theta(z) \cos \omega_x x \exp(i\omega_\tau \tau) \quad (6)$$

$$u(x, z, \tau) = u(z) \sin \omega_x x \exp(i\omega_\tau \tau), \quad w(x, z, \tau) = w(z) \cos \omega_x x \exp(i\omega_\tau \tau) \quad (7)$$

Подставляя (6) в (3), и (7) в (4), получим

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - [k_1^2 + (k_2^2 - k_1^2) S_-(z-z_1)] \theta = (1 - K^{(2)}) \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) \quad (8)$$

$$\square_1^2(z) u + \square_1^2(z) w = \theta_1, \quad \square_2^2(z) u + \square_2^2(z) w = \theta_2 \quad (9)$$

$$\text{где } k_j^2 = \omega_j^2 k_x^{(j)} + \frac{i\omega_j}{a^{(j)2}}, \quad \square_1^n(z) = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{11}^n + (\gamma_{12}^n - \gamma_{11}^n) S_-(z-z_1)$$

$$\square_1^n(z) = [\gamma_{11}^n + (\gamma_{12}^n - \gamma_{11}^n) S_-(z-z_1)] \frac{d}{dz}, \quad \square_2^n(z) = [\gamma_{21}^n + (\gamma_{22}^n - \gamma_{21}^n) S_-(z-z_1)] \frac{d}{dz}$$

$$\square_2^n(z) = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{21}^n + (\gamma_{22}^n - \gamma_{21}^n) S_-(z-z_1), \quad \gamma_{1n}^n = \frac{\omega_j^2}{c^{(n)2}} - \omega_j^2 \varepsilon_{11}^{(n)}, \quad \gamma_{12}^n = -\omega_j \varepsilon_{12}^{(n)}$$

$$\gamma_{2n}^n = \omega_j \varepsilon_{21}^{(n)}, \quad \gamma_{21}^n = \frac{\omega_j^2}{c^{(n)2}} - \omega_j^2 \varepsilon_{22}^{(n)}, \quad |n=1, 2|$$

$$\theta_1 = \left(1 - \frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right) \left(\frac{du_w}{dz} - \omega_j w_w \right) \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) - \omega_j \{ \beta_{11}^{(2)} + (\beta_{11}^{(2)} - \beta_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1) \} \vartheta(z)$$

$$\theta_2 = \left[\frac{\beta_{33}^{(2)} - \beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} \right] + \omega_j \frac{c_{13}^{(1)} - c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}} u_w + \left(1 - \frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right) \frac{du_w}{dz} \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) +$$

$$+ \{ \beta_{33}^{(1)} + (\beta_{33}^{(2)} - \beta_{33}^{(1)}) S_-(z-z_1) \} \vartheta(z)$$

Решение уравнения (8) имеет вид [3, 4]

$$\vartheta(z) = t_c \left[\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)} S_+(z_1-z) + \vartheta_2(z) S_-(z-z_1) \right] \quad (10)$$

$$\text{где } \Delta_1(z) = k_1 \operatorname{ch} k_1(z-z_1) - K^{(2)} k_2 \operatorname{sh} k_1(z-z_1), \quad \vartheta_2(z) = \frac{k_1}{\Delta_1(0)} \exp[-k_2(z-z_1)]$$

Умножая (9) на $S_-(z-z_1)$ и производя замены

$$u_w S_-(z-z_1) = u_1, \quad w_w S_-(z-z_1) = w_1 \quad (11)$$

перепишем (9) в виде

$$\square_{12}^n u_1 + \square_{12}^w w_1 = \theta_1^*, \quad \square_{22}^n u_1 + \square_{22}^w w_1 = \theta_2^* \quad (12)$$

$$\text{где } \theta_1^* = -D_1^{(2)} \exp(-k_2(z-z_1)) S_-(z-z_1) + u_w|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) +$$

$$+ \left(\frac{du_w}{dz} + \gamma_{12}^w w_w \right) \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

$$\theta_2^* = -D_2^{(2)} \exp(-k_2(z-z_1)) S_-(z-z_1) + w_w|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) +$$

$$+ \left(\frac{dw_w}{dz} + \gamma_{22}^n u_w \right) \Big|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1)$$

$$D_1^{(j)} = \frac{\beta_{11}^{(j)} k_1 \omega_j t_c}{\Delta_1(0)}, \quad D_2^{(j)} = \frac{\beta_{33}^{(j)} k_1 k_2 t_c}{\Delta_1(0)}, \quad \square_{1n}^n = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{11}^n, \quad \square_{1n}^w = \gamma_{12}^w \frac{d}{dz}$$

$$\square_{2n}^n = \gamma_{21}^n \frac{d}{dz}, \quad \square_{2n}^w = \frac{d^2}{dz^2} + \gamma_{22}^w |n=1, 2|$$

Решение двух взаимосвязанных уравнений (12) представим в виде [5]

$$u_1 = \square_{22}^w \varphi_1 - \square_{12}^w \psi_1, \quad w_1 = \square_{11}^w \varphi_1 - \square_{12}^n \psi_1 \quad (13)$$

где φ_1, ψ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\square^{(1)}\varphi_1 = \varphi_1^*, \quad \square^{(2)}\varphi_1 = \varphi_2^* \quad (1)$$

Здесь $\square^{(j)} = \square_{11}^{(j)}\frac{\partial}{\partial z} - \gamma_{12}^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}$ ($j=1,2$).

Решение уравнений (14) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$z^4 + a_0^{(n)}z^2 + b_0^{(n)} = 0 \quad (15)$$

где $a_0^{(n)} = \gamma_{11}^n + \gamma_{22}^n - \gamma_{12}^n\gamma_{21}^n$, $b_0^{(n)} = \gamma_{11}^n\gamma_{22}^n$ ($n=1,2$) имеет вид:

1) корни уравнения (15) вещественные и различные

$$\varphi_1 = C_1^{(1)} \exp(z_1^{(1)}z) + C_2^{(1)} \exp(-z_1^{(1)}z) + C_3^{(2)} \exp(z_2^{(2)}z) + C_4^{(2)} \exp(-z_2^{(2)}z) + \varphi_1^*$$

$$\varphi_2 = C_1^{(1)} \exp(z_1^{(1)}z) + C_2^{(1)} \exp(-z_1^{(1)}z) + C_3^{(2)} \exp(z_2^{(2)}z) + C_4^{(2)} \exp(-z_2^{(2)}z) + \varphi_2^* \quad (16)$$

2) корни вещественные и попарно равные

$$\varphi_1 = (C_1^{(1)} + zC_2^{(1)}) \exp(z_1^{(1)}z) + (C_3^{(2)} + zC_4^{(2)}) \exp(-z_1^{(1)}z) + \varphi_1^*$$

$$\varphi_2 = (C_1^{(1)} + zC_2^{(1)}) \exp(z_1^{(1)}z) + (C_3^{(2)} + zC_4^{(2)}) \exp(-z_1^{(1)}z) + \varphi_2^* \quad (17)$$

3) корни комплексные. В этом случае следует положить $\sigma_1^{(j)} = \mu^{(j)} + i\nu^{(j)}$, $z_2^{(j)} = \mu^{(j)} - i\nu^{(j)}$, $\mu^{(j)} > 0$.

В (16), (17) φ_1^* , φ_2^* — частные решения неоднородных уравнений (14). Используя для их нахождения метод вариации произвольных постоянных и учитывая, что согласно (11) $(u_1, w_1)|_{z=z_1} = 0$ получим φ_1^* , φ_2^* . Подставляя их в систему (9) с учетом (11), получим следующую систему уравнений для определения u_+ , w_+ :

$$\square_{11}^{**} u_+ + \square_{11}^{**} w_+ = \vartheta_1^{**}, \quad \square_{21}^{**} u_+ + \square_{21}^{**} w_+ = \vartheta_2^{**} \quad (18)$$

$$\text{где } \vartheta_1^{**} = -\omega_z \vartheta_{11}^{(n)} t, \quad \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)} S_+(z_1 - z) - D_1^{(2)} \exp(-k_2(z - z_1)) S_-(z - z_1) -$$

$$-(\gamma_{12}^n - \gamma_{11}^n) u_1 - (\gamma_{12}^n - \gamma_{11}^n) \frac{dw_1}{dz} - (\gamma_{12}^n - \gamma_{11}^n) w_1|_{z=z_1} \delta_-(z - z_1) +$$

$$+ \left(1 - \frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right) \left(\frac{du_+}{dz} - \omega_z w_+\right) \Big|_{z=z_1} \delta_-(z - z_1)$$

$$\vartheta_2^{**} = \vartheta_{21}^{(n)} t, \quad \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)} S_+(z_1 - z) - D_2^{(2)} \exp(-k_2(z - z_1)) S_-(z - z_1) - (\gamma_{22}^n - \gamma_{21}^n) \frac{du_1}{dz} -$$

$$-(\gamma_{22}^n - \gamma_{21}^n) w_1 + (\gamma_{22}^n - \gamma_{21}^n) u_1|_{z=z_1} \delta_-(z - z_1) + \left[\frac{\beta_{31}^{(2)} - \beta_{31}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} \vartheta + \right.$$

$$\left. + \omega_z \frac{c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}} u_+ + \left(1 - \frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right) \frac{du_+}{dz} \right] \Big|_{z=z_1} \delta_-(z - z_1)$$

Решение системы (18) имеет вид:

$$u_+(z) = u_+^+(z) S_+(z_1 - z) + u_+^-(z) S_-(z - z_1) \quad (19)$$

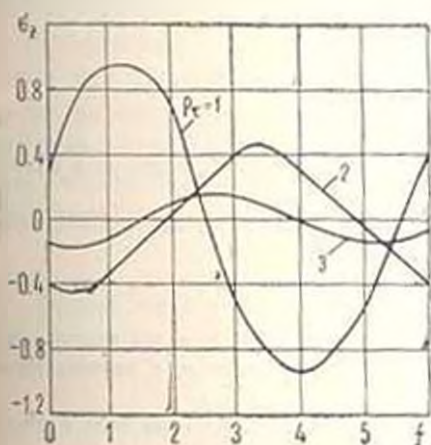
$$w_+(z) = w_+^+(z) S_+(z_1 - z) + w_+^-(z) S_-(z - z_1) \quad (20)$$

Подставив (19), (20), и (7) и с учетом (5) получим выражения компонент тензора температурных напряжений. Неизвестные постоянные интегрирования определяются из граничных условий

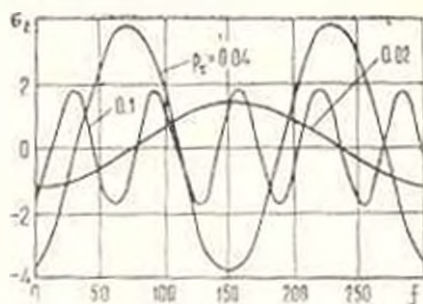
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz} = 0 \text{ при } z=0, z \rightarrow \infty \quad (21)$$

Многие материалы обладают существенной анизотропией температурных коэффициентов линейного расширения. Предположим, что рассматриваемое составное полупространство состоит из двух состыкованных тел, обладающих ортотропией только в отношении температурных коэффициентов линейного расширения: $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_{111}$, $\alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_{112}$, $\alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = \alpha_{113}$. Остальные физико-механические характеристики предполагаются изотропными. Исследуем распределение динамических температурных напряжений и предположим, что температура поверхности $z=0$ изменяется по закону

$$T|_{z=0} = T_0 \cos \omega_0 x \cos \omega_0 y$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 представлены графики изменения динамических температурных напряжений на стыке ($z=z_1$) покрытия и полупространства в зависимости от безразмерного времени $f = \frac{c_1^2 t}{a_1^2}$ различных

значениях частотных параметров $p_x = \frac{\omega_0 a_1}{c_1}$, $p_y = \frac{\omega_0 a_2}{c_1}$ и параметра K_{112} ,

характеризующего отношение температурных коэффициентов линейного расширения в направлении осей Ox и Oz . При этом принято $K_{111} = 0,1$, $p_z = 10$ (фиг. 1), $p_x = 0,2$ (фиг. 2). Численные исследования, проведенные на ЭВМ ЕС-1060, показали, что при $p_x > 1$, $p_z > 1$ амплитуда напряжений с увеличением p_x уменьшается, тогда как при $p_x < 1$, в диапазоне $0,04 \leq p_x \leq 0,4$ существует максимум амплитуды напряжений σ_2 .

TWO-LAYER ORTHOTROPIC HALF-SPACE HEATED BY THE OUTER MEDIUM

E. G. IVANIK

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԻՍԼՍԼԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ՝ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ՏՈՔՈՑՄԱՆ ԴԵՊՈՒՄ

Ե. Գ. ԻՎԱՆԻԿ

Ա ճ փ ո լ ո լ լ

Երկշերտ օրթոտրոպ կիսատարածության ջերմատրանսպիրի լարումն ու որոշելու համար առաջարկվում է քնդանդալիս Ֆուրիեի անկյունի ապարատ կիրառության վրա հիմնված եղանակի կիրառարածությունը Լենթարկվում ըստ կոորդինատի պարբերական և բոլոր ժամանակի հարմոնիկ ջերմային աղեղության: Խնդիրը բերվում է իմպուլսային ախտի գործակիցներով համապարհական համակարգի լուծման կառուցմանը՝ տեղափոխությունների վերաբերյալ բաղադրիչները որոշելու համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1975. 831 с.
2. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляко Ю. М. Термодупругость тел неоднородной структуры.—М.: Наука, 1984. 368 с.
3. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика склеенных тонкостенных систем.—М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
4. Иваник Е. Г. Одномерная динамическая задача термодупругости для кусочно-однородного полупространства.—В кн.: Математические методы в термомеханике.—Киев: Наук. думка, 1978. с. 137—144.
5. Подстригач Я. С., Коляко Ю. М. Неустойчивые температурные поля и напряжения в тонких пластинках.—Киев: Наук. думка, 1972. 308 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
14.VI.1984

УДК 639.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫЕМКИ НА НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ГЛУБИНЕ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

РАИНОБОРГ Г. М.

1. Рассматриваются решения краевых задач, которые возникают при исследовании напряженно-деформированного состояния трансверсально изотропного упругого массива с бесконечно простирающимся цилиндрическим отверстием при действии переменных по глубине объемных сил. В этом случае решение записывается в виде частного решения неоднородного уравнения и общего решения системы однородных уравнений. Частное решение — напряжения и перемещения в сплошном полупространстве при действии заданных объемных сил — обозначено через

$$u^0, \dots, z^0.$$

Общий интеграл ищется при следующих граничных условиях: при

$$\begin{aligned} z=0 \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0, \\ r=a \quad \tau_{rz} = 0, \quad z_r^0 = -z^0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

(плоскость изотропии горизонтальна, ось z вертикальна).

Предполагается, что функция σ_z^0 абсолютно интегрируема в промежутке $(0, \infty)$.

Во втором параграфе поставленная задача решается разложением по собственным функциям, а в [1] показано, что решения краевых задач, полученные таким образом, не являются единственными. В данном случае оно дополняется слагаемым, полученным на основании [2]. Выбор результата зависит от дополнительных условий.

2. Решение системы однородных уравнений строится на основании [3]. При осевой симметрии имеем:

$$u_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad 2GF - (1-\nu) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \nu_2 I^2 \Pi \quad (2.1)$$

$$w = -\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\tau}{G_1}, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial z}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial}{\partial z} D^2 \Pi \quad (2.2)$$

$$z_r = I^2 D^2 \Pi, \quad z_z = D^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \frac{2\nu_2 \sigma_z}{r} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_0 = D^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2)$$

Функция Π удовлетворяет уравнению

$$\beta_{33} \frac{\partial^4 \Pi}{\partial z^4} + \left(2\beta_{33} + \frac{1}{G_1} \right) D^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \beta_{33} D^2 D^2 \Pi = 0 \quad (4)$$

$$\text{где } E\beta_{33} = 1 - \nu^2, \quad E_1\beta_{33} = -\nu_1(1 + \nu), \quad E\beta_{33} = \left(1 - \frac{\nu_1^2 E}{E_1} \right)$$

$$2(1 + \nu)G = E, \quad \nu_2 E_1 = \nu_1 E$$

D^2 — оператор Лапласа на плоскости; E , E_1 — модули упругости плоскости и стержня в направлении оси z ; ν , ν_1 — коэффициенты Пуассона, G_1 — модуль сдвига в вертикальной плоскости.

Построение решения, удовлетворяющего (1.1), связано со значительными трудностями, которые при втором обходе удачным образом приближенных решений [1, 5].

В настоящей работе предварительно решается вспомогательная задача, причем получаемые результаты могут рассматриваться как шаги итерационного процесса точного решения исходной задачи.

При решении вспомогательной задачи второе условие (1.1) заменяется равенствами

$$\text{при } r=a: \quad \tau_{rz}=0, \quad u_r=u_0 \quad (2)$$

Из (2.4) следует, что функцию Π представим в виде

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_n(\gamma) \bar{\tau}_n(\gamma z) K_0(\gamma r) d\gamma \quad (2)$$

где $\bar{\tau}_n(\gamma z)$ — однородные решения, которые равны:

$$\bar{\tau}_1(\gamma z) = m_2 \sin m_1 \gamma z - m_1 \sin m_2 \gamma z \quad (2)$$

$$\bar{\tau}_2(\gamma z) = \cos m_1 \gamma z - \cos m_2 \gamma z \quad (2)$$

$K_0(x)$ — функции Макдональда; m_i — корни характеристического уравнения.

Функции $\bar{\tau}_i$ обладают свойствами обобщенной ортогональности, то есть справедливы равенства

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \bar{\tau}_i(\gamma z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \bar{\tau}_j(\gamma^* z)}{\partial z^2} dz - m_i^2 m_j^{*2} (\gamma^*)^2 \times \\ \times \int_0^{\infty} \bar{\tau}_i(\gamma z) \bar{\tau}_j(\gamma^* z) dz = \frac{\pi}{2} h_{ij}^{-1} (\gamma^*)^2 F^2(\gamma - \gamma^*) \quad (2)$$

где

$$b_1 = m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)(m_1 - m_2)^2, \quad b_2 = (m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_2^2) \quad (2.10)$$

γ^* — фиксированное значение γ ; $\delta(\gamma - \gamma^*)$ — дельта-функция.

Кроме того, имеем

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi_1(\gamma z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \varphi_2(\gamma^* z)}{\partial z^2} dz - m_1^2 m_2^2 \gamma^2 (\gamma^*)^2 \int_0^\infty \varphi_1(\gamma z) \varphi_2(\gamma^* z) dz = 0 \quad (2.11)$$

Равенства (2.9), (2.11) позволяют определить $A(\gamma)$ из граничных условий вспомогательной задачи. Эти условия преобразуются к виду

$$Eu_0 - \gamma_2(1 - \nu)T_0 = -\frac{\partial^3 \Pi}{\partial r \partial z^2} \quad (2.12)$$

$$T_0 = \int_0^a \gamma_2(a) dz = -\frac{\partial}{\partial r} D^2 \Pi \quad (2.13)$$

Из (2.4), (2.10) — (2.13) следует

$$\Pi \gamma^2 K_1(\gamma a) A_i(\gamma) = 2R_i(\gamma) \quad (i=1, 2) \quad (2.14)$$

$$R_i(\gamma) = \frac{2G}{1-\nu} \int_0^a u_0 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} dz \quad (2.15)$$

Функции, определяемые (2.14), (2.15), удовлетворяют комбинированным граничным условиям. Следует проверить каждое из условий в отдельности. Если $T_0 = 0$, то слагаемые, зависящие от $A_i(\gamma)$, могут отличаться только постоянными множителями. Тогда имеем

$$T_0 = c_1 T_{01} + c_2 T_{02} = 0 \quad (2.16)$$

Определив постоянные c_i , подставив Π в (2.1) — (2.3), получим искомые величины. Например, при $r=a$ имеем

$$\varphi_1^2 = \frac{2Gu_0}{a} + \sum_{i=1}^2 c_i \int_0^a \gamma^2 A_i(\gamma) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} K_0(\gamma a) d\gamma \quad (2.17)$$

Можно показать, что при известных условиях второе слагаемое в (2.17) существенно меньше первого. Если это так, то в качестве первого приближения решения исходной задачи рассматривается решение вспомогательной задачи, удовлетворяющее условиям

$$\text{при } r=a \quad \varphi_{r2}^0 = 0, \quad 2Gu_0^{(1)} = -a\varphi_r^0 \quad (2.18)$$

Погрешность расчета определяется разностью $\varphi_r^0 - \varphi_r^{(1)}$.

В частных случаях интегралы, которыми определяется функция Π , могут быть представлены аналитически.

Если

$$u_0^{**} = \frac{2Gu_0}{1-\nu} = \exp(-\nu z) \quad (2.19)$$

то

$$A_1(\gamma) = \frac{2}{\pi d K_1(\gamma a)} f_1(\gamma) \quad (2.20)$$

где

$$d_1 = \frac{b_1}{m_1 m_2} \gamma, \quad d_2 = \frac{b_2}{\gamma}, \quad v_i = \frac{1}{m_i}$$

$$f_1(\gamma) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{m_i+1}}{\alpha_i^2 + \gamma^2}, \quad c_1 = -m_1 m_2, \quad c_2 = m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2$$

Условия (2.19) могут быть использованы при решении ряда задач, возникающих на практике.

Рассмотрен пример расчета изотропного массива при условиях (2.18), (2.19) и установлено, что погрешность первого приближения решения исходной задачи, удовлетворяющего (1.1) зависит от числа λ и убывает с уменьшением λ . При $\lambda = 0.1$ погрешность не превышает 2%.

3. Второе решение вспомогательной задачи строится на основании [2] с использованием (2.2) — (2.6).

Функция W принимается в виде

$$W = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \lambda |B_i(\lambda) \exp(-m_i \lambda z)| P_0(\lambda r) d\lambda + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \left[C_i(\beta) K_0\left(\frac{\beta r}{m_i}\right) \right] \cos \beta z d\beta \quad (i=1, 2) \quad (3.1)$$

$$P_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) Y_1(\lambda a) - Y_0(\lambda r) I_1(\lambda a)$$

где $J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно, первого и второго рода.

Функции $C_i(\beta)$ определяются из граничных условий для вспомогательной задачи.

Из первого условия (1.1) устанавливается зависимость между функциями $B_i(\lambda)$. Имеем

$$m_1 B_1(\lambda) = -m_2 B_2(\lambda) = Q(\lambda) \quad (3.2)$$

Функция $Q(\lambda)$ определяется из преобразования Вебера-Орри [6]

$$Q(\lambda) [J_1^2(\lambda a) + Y_1^2(\lambda a)] = \frac{2b_1}{\pi m_1 m_2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \frac{(-1)^{m_i+1} \beta^2 \chi(\beta)}{m_i^2 \lambda^2 + \beta^2} d\beta \quad (3.3)$$

где $\chi(\beta)$ — трансформанта Фурье функции u_0^* .

Изотропный массив рассмотрен в [2]. Если $u_0^* = \exp(-\lambda z)$, то напряжения σ_z^* , σ_θ^* на границе массива определяются равенствами

$$\varphi_r = \frac{(1+\nu)u_0^{**}}{a} [-1 + \omega(r)], \quad \varphi_z = \frac{(1+\nu)u_0^{**}}{a} \left[1 + \frac{\nu}{1-\nu} \omega(r) \right] \quad (3.4)$$

где $\omega(r)$ мало по сравнению с единицей.

4. Сопоставление решений (2.6) и (3.1) обнаруживает расхождение асимптотических разложений некоторых функций, но удовлетворительное совпадение величин нормальных напряжений на пересечении границ области ($z=0$, $r=a$). Перемещения w при этом различаются.

Осесимметричная деформация многослойного полупространства рассматривалась в [7]. Авторы ошибочно полагают, что ими получено решение, удовлетворяющее (2.5). Это справедливо лишь при абсолютно жестком и гладком включении, в последнем случае такое решение вытекает из [3].

EFFECT OF A CYLINDRICAL HOLE ON STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A TRANSVERSELY-ISOTROPIC HALF-SPACE SUBJECTED TO VOLUME FORCES VARYING ALONG DEPTH

R. M. RAPPOPORT

ՏՐԱՆՍԵՐԱՍԻԿԱԼ ԵՋԱՏՐԱՊ ԿՐԱՏԱՐԱՍՏԻԹԵԶԻՆԵՐԻՆ
ՏԵՂԱՓՈՆԵՐԹԵԶԻՆՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱԳՐԻՄՆԵՐԻ ՎԵՐ ԿԱՆԱՅԻՆ ՓՈՐՈՂԱՅԵՐ
ԱՋԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՐԻԵՆՏԱԿԱՆ ԸՍՏ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՂ
ՄԵԿԱՆԻԿԱ ԻՆՏԵՐԻ ԱՋԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ԿԵԳՐՈՒՄ

Ռ. Մ. ՐԱՊՊՈՐՏ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Խնդրի լուծումը բերվում է ընդունելով շաղկապի մոդելի՝ անկերթ գլանային անդրով կիսատարածության գիտարկմանը՝ անցրի եզրագծով լաշխված նորմալ բևեռի ազդեցության դեպքում: Սկզբում գիտարկվում է օժանդակ խնդիր (անցրի եզրագծի վրա $\tau_{rz} = 0$, $u_r = u_z$), որի լուծումը օգտագործվում է իտերացիաները կառուցելու համար:

Օժանդակ խնդրի լուծումը միարժեք է և ստացվում է երկու եզանակով. 1) անխական թվերի անընդհատ աղեկարար անկցող համասեռ գումարելիների օգնությամբ, 2) Հարսիսյանի—Արրահամյանի մեթոդով:

Լուծումների համեմատությունը ի հայտ է բերում փնտրվող Գուսկյանների ասիմպտոտիկական վերլուծությունների տարբերություն, իսկ արտաքին սահմանադրում՝ արդյունքների բավարար համընկում, որով արդարացվում է շաղկապի մոդելի ընտրությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Раттпорт Р. М. Однородные решения теории деформации многослойного полупространства и некоторые их приложения. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1981, т. 37, № 1, с. 23—33.

2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. 22, № 2, с. 3—13.
3. Роппопорт Р. М. О построении общих решений уравнений теории упругости трансверсально изотропных неоднородных тел.—ГММ, 1976, т. 10, вып. 5, с. 956—958.
4. Васильев В. З. Концентрация напряжений около торца полубесконечного кругового цилиндра при осесимметричном нагружении.—Изв. вузов. Машинное строительство, 1972, № 12, с. 29—31.
5. Филин А. П., Каплун А. Ф. Осесимметричное нагружение полупространства с вертикальным цилиндрическим каналом, окаймленным оболочкой конечной жесткости.—Сб. Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 256—265.
6. Гитмарин Е. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во инстр. лит. т. I, 1960, 265 с.
7. Таммок В. Л., Приварник А. К. Осесимметричная деформация упругого многослойного основания со сквозным цилиндрическим отверстием.—Сб.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепрпетровск: Изд-во ДГУ, 1979, с. 142—149.

Ленинградская лесотехническая академия
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
10.11.1986

УДК 624.012.012

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Л. Г. ПЕТРОСЯН

В [1] предложена универсальная регулярная модель упругого основания, позволяющая рассматривать грунты с различной связностью или неоднородностью по глубине. Параметры модели могут быть установлены на основе штамповых испытаний грунтов. Особенностью модели наряду с ее универсальностью является ограниченность перемещений и напряжений в основании при сосредоточенных нагрузках и скачках перемещений, характерная для дискретных моделей винклеровского типа, конечные перемещения в случае плоской задачи и, вместе с тем, обеспечение связности при одновременном учете неоднородности.

В настоящей статье приводится численное решение контактной задачи (осесимметричной и плоской) для жесткого штампа с плоской подошвой, вдавливаемого без трения в упругое основание, описываемое обобщенной моделью. Ядро основания принимается в виде [1]

$$K(r) = \theta K_0(r) = \frac{\theta}{(2\pi)^2 R^2 - \epsilon^2)^{1/2}} \quad (1)$$

где θ — физическая константа, характеризующая обобщенную жесткость основания, по физическому смыслу близкая к коэффициенту жесткости, ϵ — регуляризующий параметр, ограничивающий перемещения и напряжения в особых точках; R — параметр однородности, регуляризующий совместно с ϵ связность основания. Значения параметров θ , ϵ , R могут быть установлены посредством аппроксимации экспериментальной лунки от штампа малого диаметра с помощью выражения (1).

Контактная задача для плоского жесткого штампа в случае осевой симметрии может быть сформулирована в виде парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h(\xi) \tilde{p}(\xi) J_0(\xi r) d\xi &= \frac{\sigma_0}{\theta} \quad (0 < r < r_0) \\ \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) J_0(\xi r) d\xi &= 0 \quad (r_0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

где $p(z)$ — преобразование Ханкеля контактного напряжения $p(r)$; w_0 — перемещение центральной точки штампа; r_0 — радиус штампа; $h(z)$ — плотность ядра упругого основания, вычисляемая по формуле

$$h(z) = 2\pi i \int_0^{\infty} r K_0(r) J_0(zr) dr$$

Для ядра (1)

$$h(z) = \frac{z^{2\alpha+1} K_\alpha(z)}{2^{2\alpha+2} \pi \Gamma(\alpha+1)}, \quad \alpha = \frac{1-\nu}{2} \quad (3)$$

где $K_\alpha(z)$ — функция Макдональда. Для решения уравнений (2) могут быть использованы различные известные методы, однако большинство из них требуют определенного поведения $h(z)$ на бесконечности: в частности, при $z \rightarrow \infty$ должно быть

$$h(z) = B z^{1-2\alpha} [1 + o(1)], \quad \frac{1}{2} \geq \alpha > 0, \quad B = \text{const} \quad (4)$$

Используя асимптотику функции Макдональда для плотности ядра рассматриваемой модели, получаем следующее представление при $z \rightarrow \infty$:

$$h(z) = B z^{2\alpha-1} [1 + o(1)] \quad (5)$$

При $0,5 \leq \alpha \leq 3,5$ условие (5) удовлетворяется, и система (2) может быть сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Однако, при других значениях параметров α, ν условие (5) не выполняется. Поэтому для получения универсального решения воспользуемся методом, предложенным Ю. Г. Плотниковым [2].

Применительно к осесимметричной задаче этот метод приводит к системе алгебраических уравнений

$$rA + R\omega_0 = 0, \quad R^*A + Q = 0 \quad (6)$$

где $r = |r_m|$; $R = |R_m|$; $Q = P/2\pi$; P — сила, действующая на штамп $A = |A_m|$; A_m — коэффициенты разложения контактного давления в ряд по координатным функциям

$$p(r) = \sum_{m=1}^N A_m p_m(r) \quad (7)$$

Коэффициенты r_{mi} определяются по формуле

$$r_{mi} = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{\infty} z^{-1} h(z) \bar{p}_m(z) \bar{p}_i(z) dz$$

где $\bar{p}(z)$ — трансформанта Фурье функций $p_m(x)$.

Аппроксимация контактного давления принята в виде

$$p(r) = \sum_{i=1}^N A_i \left\{ \frac{1}{2\pi r_i \Delta_i} \left[H\left(r - r_i + \frac{\Delta_i}{2}\right) - H\left(r - r_i - \frac{\Delta_i}{2}\right) \right] \right\} \quad (8)$$

Здесь $H(r)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда. Коэффициенты разложения A_i по физическому смыслу являются равнодействующими контактного давления на площадке Δ_i . Величины R_m есть полное контактное давление, соответствующее m члену разложения

$$R_m = \int_0^{\infty} p_m(r) r dr$$

Аналогично решается плоская задача. В этом случае в отличие от осесимметричной задачи принимается $Q=P$ и

$$r_{mi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi^{-1} h(\xi) P_m(\xi) \overline{p_i(\xi)} d\xi$$

где

$$p_m(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p_m(x) e^{i\xi x} dx, \quad \overline{p_i(\xi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p_i(x) e^{-i\xi x} dx$$

При этом

$$R_m = \int_0^{\infty} P_m(x) dx$$

Аппроксимация контактного давления в отличие от (8) принимается в виде

$$p(x) = \sum_{i=1}^N A_i \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[H(x - x_i + \frac{\Delta_i}{2}) - H(x - x_i - \frac{\Delta_i}{2}) \right] \right\} \quad (9)$$

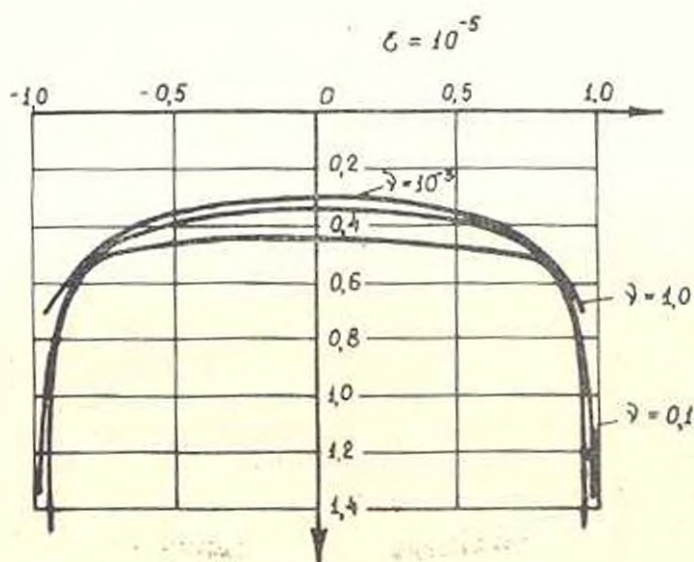
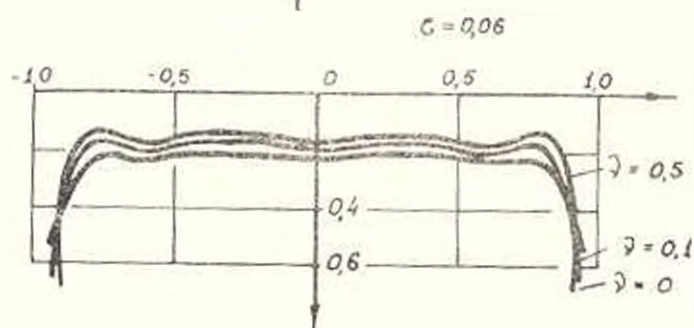
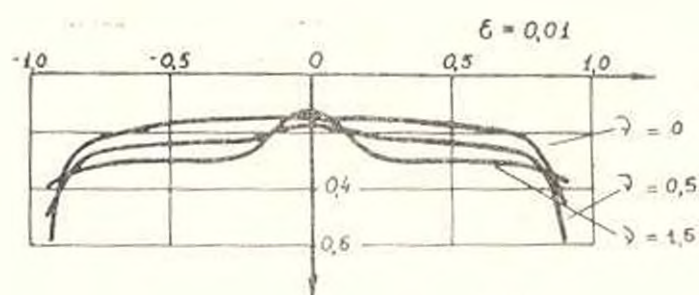
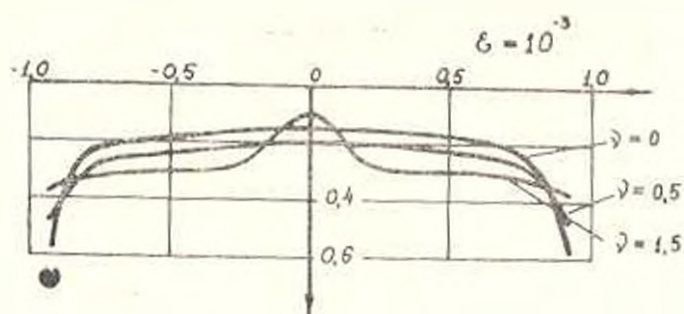
Результаты вычисления контактных напряжений, определяемых с точностью до постоянного множителя $(2\pi)^{-1/2}$, приведены на фиг. 1.

По существу, вычисления проводились для ядра $K_3(r) = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$

в осесимметричной, и для ядра $K(x) = \frac{e^{-x/2}}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$ — в плоской задаче.

Для оценки точности численного решения осесимметричной и плоской задач одновременно вычислялось среднее контактное давление под штампом, что обеспечивало проверку условия равновесия. С этой же целью при предельных значениях параметров проводились вычисления для упругого полупространства и упругой полуплоскости.

Анализ результатов вычислений показывает, что при различных параметрах ν и z , предлагаемая модель позволяет получить эпюры давления, являющиеся промежуточными между эпюрами, характерными для винклеровского основания и упругого полупространства. В пре-



Фиг. 1

дельных случаях получаются эпюры для этих двух моделей. Таким образом, рассматриваемая модель позволяет описать практически любые грунтовые основания, рассматриваемые в рамках линейной теории, и обладающие различной связностью.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID PUNCH ON ELASTIC FOUNDATION

L. G. PETROSIAN

ՍՈՒԱՋԿԱՆ ԶԻՄԻ ԴՐԱ ԴՐՈՒՄ ԿՈՇՏ ԳՐԱՇԻԲԻ ԸԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՈՒՐԴ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Բերված է զծային դեֆորմացիայի դեպքին սեղմվող կոշտ զրաշմի նամար կոնտակտային խնդրի թվային լուծումը:

Որպես նիմք մոդել է բնդունվում բնդանրացված մոդելը, որը բնութագրվում է երեք պարամետրանի կորիզ ունեցող Գրինի ֆունկցիայով: Պարամետրերի սահմանային արժեքների դեպքում հստակ կարող է ներկայացնել ստանդարտի նամանակ ու ոչ նամանակ ու փնկերային մոդելների կորիզները:

Բերված են կոնտակտային լարումների աշխատանքային արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтлин А. И., Петросян Л. Г. Методы граничных элементов в строительной механике. Ереван Лувс, 1987. 200 с.
2. Плотникова Ю. Г. Стационарные колебания плоских и осесимметричных штампов на вязкоупругом основании. Дисс... канд. техн. наук.—М.: 1979. 203с.

Երևանский политехнический институт
и К. Маркса

Поступила в редакцию
14.I.1988