ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 538.4:538.114

ДВИЖЕНИЕ АЭРИРОВАННОЙ НАМАГНИЧЕННОЙ НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПОДЛОЖКЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДОЕВ А. Г., БЕЗИРГЕНЯН Г. С.

Рассматривается движение тонкого слоя непроводящей двухфазной смеси несжимаемой магнитной жидкости (дисперсная, несущая фаза) с газовыми пузырями (диспергированная, несомая фаза) по наклонной плоской твердой подложке при наличии неоднородного магнитного поля. Считается, что газ, заключенный в пузырях,—совершенный, его движение изотермическое, а магнитная проницаемость смеси μ зависит только от плотности смеси ρ.

1. Направим ось Ox по оси симметрии подложки, ось Oy—перпендикулярно к ней в плоскости подложки, а ось Oz—перпендикулярно к подложке (фиг. 1). Полная система дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающая движение двухфазной смеси в односкоростном приближении (гомогенная смесь), записывается в форме [1—3]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right) - \vec{T}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (\beta-1)\nabla\cdot\vec{V} = 0, \quad \rho = \rho_g\beta + (1-\beta)\rho_l \qquad (1.2)$$

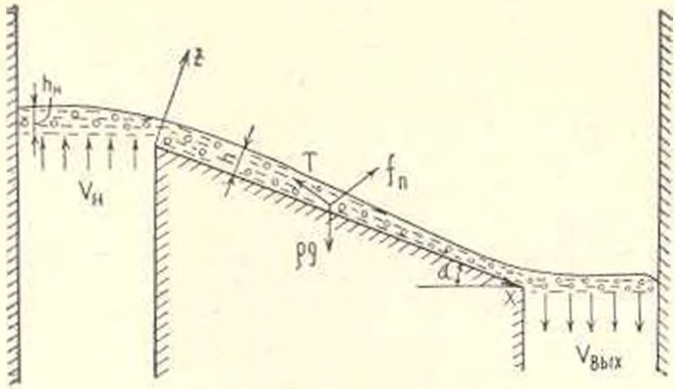
$$R^3\cdot\rho = \mathrm{const}, \quad \frac{p_g}{\rho_g} = \mathrm{const} \qquad (1.3)$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{H} = 0, \quad \vec{B} = \mu(\rho)\vec{H} \qquad (1.4)$$

где $\vec{F} = \{g\rho\sin\alpha, 0, -g\rho\cos\alpha\}$—сила тяжести, p—давление в смеси, p_g—давление газа, заключенного в пузырях, $\vec{V}$—скорость потока, ρ_g, ρ_l—плотности, соответственно, газа и жидкости, β—объемная концентрация, $\vec{T} = \lambda|\vec{V}|\vec{V}/h$—сила трения, λ—коэффициент гидравлического сопротивления, h—глубина потока, R—радиус пузыря, $\vec{H}$, $\vec{B}$—напряженность и индукция магнитного поля.

Уравнения (1.4) после введения потенциала напряжений $\vec{H} = \nabla\Phi$ можно записать в форме

$$\nabla(\mu\nabla\Phi) = 0 \qquad (1.\ )$$



Фиг. 1

Система уравнений (1.1)—(1.3), (1.5) не замкнута. Чтобы ее замкнуть, необходимо кинематическое условие на свободной поверхности и получить связь между p и p_c.

Расчетная модель

а) Следуя многочисленным работам [2,4—7], считается, что соотношение между p и p_c в смеси такое же, как соотношение между давлением в изолированном пузыре p_*, пульсирующем в безграничной жидкости, и давлением вдали от него p_∞;

б) пузырь при деформации слабо деформируется (Задача о значительной деформации формы пузыря рассмотрена в [8], то есть в [8] изучено явление схлопывания кавитационного пузыря в намагниченной жидкости);

в) при переходе от рассмотрения одиночного пузыря к рассмотрению смеси в соотношении p_*-p_∞ заменяются: p_∞ на p, H_∞ на H, а $\rho_f d\mu_f/d\rho_f$ на $\rho d\mu/d\rho$, так как вокруг каждого пузыря имеется смесь.

Рассмотрим движение одиночного сферического пузыря в безграничной массе намагниченной жидкости с магнитной проницаемостью $\mu_f=\mu_f(\rho_f)=\mathrm{const}$ и в однородном вдали от пузыря внешнем магнитном поле. Поместим начало координат в центре пузыря, оси Ox_1 и Ox_2 выберем в экваториальной плоскости, а ось Ox_3 направим по $\vec{H}_\infty$. Обозначим через ψ географическую широту, а через θ — географическую долготу. Тогда

$$x_1=r\cos\psi\cos\theta, \quad x_2=r\cos\psi\sin\theta, \quad x_3=r\sin\psi$$

Считая намагниченную жидкость идеальной, а движение безвихревым, из уравнения движения и неразрывности (1.1) получается, соответственно, интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\frac{p'_f}{\rho_f}-\frac{d\mu_f}{d\rho_f}\frac{H^2}{8\pi}=\frac{p_\infty}{\rho_\infty}-\left(\frac{d\mu_f}{d\rho_f}\frac{H^2}{8\pi}\right)_\infty \tag{1.6}$$

где $\vec{v}=\nabla\varphi$, $p'=p+\rho g(x_1\sin\alpha-x_3\cos\alpha)$, а $\nabla^2\varphi=0$

Записывая уравнение $\nabla^2\varphi=0$ в сферических координатах и считая, что возмущенное движение происходит радиально симметрично ($\varphi(r)$), с учетом граничного условия $v_r|_{r=R}=dR/dt$ получаем, что $\varphi=-1/r\,R^2dR/dt$. Уравнение (1.6) на границе раздела $r=R(t)$ после подстановки в него выражений $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=2\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2\dfrac{R}{r}-R^2\dfrac{1}{r}$ и $v^2=(dR/dt)^2R^4/r^4$ примет вид

$$p_{fn}-\rho_f\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mu_f}{d\rho_f}\frac{H^2}{8\pi}\right)_n\right]=p_\infty-\rho_f\left(\frac{d\mu_f H^2}{d\rho_f 8\pi}\right)_\infty \tag{1.7}$$

Но на границе раздела пузырь-жидкости для компонентов магнитного поля выполняются граничные условия

$$\mu_f H^e_n=H^i_n,\quad H^e_\tau=H^i_\tau,\quad |\Pi_n|=0 \tag{1.8}$$

где H^e_n, H^i_n, H^e_τ, H^i_τ — проекции напряженностей внешних и внутренних магнитных полей, соответственно, на нормаль и касательную к поверхности раздела $r=R(t)$, $\Pi_n=\{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3\}$, $\Pi_i=\Pi_{ik}n_k$, n_k — направляющие косинусы единичного вектора нормали $\vec{n}^0$ к поверхности $r=R(t)$, относительно координатных осей x_1, x_2, x_3:
$\Pi^e_{ik}=\dfrac{\mu_f}{4\pi}\left[H^e_iH^e_k-\dfrac{(H^e)^2}{2}\left(1-\rho_f\dfrac{d\mu_f}{d\rho_f}\right)\delta_{ik}\right]-\left(p_f-\dfrac{4\rho_f\nu_f}{R}\dfrac{dR}{dt}\right)\delta_{ik}$ — суммарный внешний тензор напряжений, δ_{ik} — символ Кронекера, $-4\rho_f\nu_fR^{-1}dR/dt\,\delta_{ik}$ — вязкий тензор напряжений ($\tau_n=-2\rho_f\nu_f dv_n/dn|_{r=R}=-4\rho_f\nu_fR^{-1}dR/dt$), $\Pi^i_{ik}=\dfrac{1}{4\pi}[H^i_iH^i_k-H^2/2\,\delta_{ik}]-p_g\delta_{ik}$ — суммарный внутренний тензор напряжений. Из условий (1.8) и равенства (1.7) следует, что

$$p_\infty-p_g=\frac{d\mu}{d\beta}\frac{H^2}{8\pi}+\rho\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}-\rho\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\frac{4\nu}{R}\frac{dR}{dt}\right] \tag{1.9}$$

Таким образом, чтобы получить окончательную связь между давлением одиночного пузыря p_g и давлением намагниченной жидкости вдали от него p_∞, необходимо определить внешнее магнитное поле. Решение уравнения $\nabla\cdot\vec{B}=0$ с учетом первых двух граничных условий (1.8) и условий на бесконечности $H_{x_1}=H_\infty$, H_{x_2}, $H_{x_3}\to0$ при $r\to\infty$ записывается в форме

$$\Phi^e=H_\infty\left(r+\frac{\mu_f-1}{1+2\mu_f}\frac{R^3}{r^2}\right)\sin\vartheta,\qquad \Phi^i=H_\infty\frac{3\mu_f}{1+2\mu_f}r\sin\vartheta$$

Осреднив слагаемое $1/8\pi(\mu_f-1)[\mu_f(H^e_n)^2+(H^e_\tau)^2]$ по поверхности сферы [6], с учетом формулы, приведенной в [1] (см. с. 69)

$$\mu=\mu_f+3\beta\mu_f\frac{1-\mu_f}{1+2\mu_f} \tag{1.10}$$

(которая имеет место для мелкодисперсной суспензии и малых концентраций ($\beta\ll1$)), и принятой модели расчета давления p в смеси из (1.9) находим искомое соотношение между p и p_g

$$p-p_к=\left(\frac{d\mu}{d\beta}+\rho\frac{d\mu}{d\rho}\right)\frac{H^2}{8\pi}-\rho\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\frac{4\nu}{R}\frac{dR}{dt}\right]$$

Последнюю формулу с учетом соотношения $\rho_г\beta/\rho_l(1-\beta)=\mathrm{const}$, которое следует из (1.2), можно переписать в форме

$$p-p_к=\beta\frac{d\mu}{d\beta}\frac{H^2}{8\pi}-\rho\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\frac{4\nu}{R}\frac{dR}{dt}\right] \qquad (1.11)$$

Из полученной формулы следует, что чем меньше количество пузырьков в магнитной жидкости (МЖ), тем меньше их влияние на давление в смеси.

Связь между p и $p_к$ без учета деформации пузырьков в однородном на бесконечности магнитном или электрическом поле получена в работах [2,5], которая без учета вязкости на границе раздела для магнитной жидкости имеет вид

$$p-p_к=\frac{d\mu}{d\beta}\frac{H^2}{8\pi} \qquad (1.12)$$

2. Введем условия совместности (без учета дисперсии и диссипации), имеющие место на фронте волны, из которых получим формулу для нормальной скорости распространения волны.

Используя выведенное замыкающее уравнение (1.11), преобразуем уравнение движения (1.1)

$$\rho\frac{d\vec V}{dt}=\vec F-\nabla p_к-\nabla\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{H^2}{8\pi}\nabla\beta \qquad (2.1)$$

Перейдем в уравнениях (2.1), (1.2)—(1.4) от декартовых координат x, y, z и времени t к координатам x_1, x_2, x_3, ζ, где ζ направлена по нормали к фронту волны: $S(t, x, y, z)=0$, а x_k, $k=1, 2, 3$ находятся в касательной плоскости к S. Поскольку волна является характеристической поверхностью (поверхностью слабого разрыва), то на ней терпят разрыв только производные по ζ. Следовательно, для скачков производных ($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial t} \qquad (2.2)$$

Вводя единичный вектор n_0 к фронту волны: $n_0=\nabla S/|\nabla S|$ и нормальную скорость волны $N=-(\partial S/\partial t)/|\nabla S|$, можно показать, что для получения условия совместности на слабом разрыве следует в уравнениях (2.1), (1.2)—(1.5) [10] заменить

$$\nabla\to\vec n_0\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial t}\to-N\lambda, \quad где \quad \lambda=\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] \qquad (2.3)$$

Обозначим через $v_n=v\cdot n$ нормальную скорость частиц, через c_n— нормальную скорость волны относительно частиц (скорость распространения) $c_n=N-v_n$. Тогда

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla=-c_n\delta \tag{2.4}$$

Используя формулы (2.2)—(2.4) и систему уравнений (2.1), (1.2)—(1.5), легко вывести условия совместности, имеющие место на фронте волны (поверхности слабых возмущений)

$$\rho c_n\delta v_n=\delta p_g+(1-\beta)\frac{d^2\mu}{d\beta^2}\frac{H^2}{8\pi}\delta\rho+2\frac{d\mu}{d\beta}H_n\delta H_n+\frac{d\mu}{d\beta}\frac{H^2}{8\pi}\delta\beta$$

$$-c_n\delta\rho+\rho\delta v_n=0,\quad c_n\delta\beta+(\beta-1)\delta v_n=0$$

$$\delta\beta=-\frac{1-\beta}{\rho}\delta\rho,\quad \delta H_\tau=0,\quad (\vec{H}\times\vec{n}_0=\vec{H}_\tau^0\times\vec{n}_0),\quad \frac{d\mu}{d\rho}H_n\delta\rho+\mu\delta H_n=0$$

Определитель полученной системы однородных линейных алгебраических уравнений на фронте обращается в нуль. Из отмеченного уравнения определяется скорость распространения фронта волны (слабых возмущений) в намагниченной несжимаемой непроводящей жидкости с пузырьками газа

$$c_n^2=a^2-\frac{1-\beta}{\rho}\left[\frac{d^2\mu}{d\beta^2}+\left(1-\frac{2H_n^2}{\mu H^2}\frac{d\mu}{d\beta}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\right] \tag{2.5}$$

где $a=\sqrt{dp_g/d\rho}=\sqrt{p_g/\rho[\beta\rho_g+(1-\beta)\rho_f]}$—скорость звука в ненамагниченной (обычной) жидкости с пузырьками газа.

Если брать распределение давления в смеси по формуле (1.12) и повторить предыдущие выкладки, то получится

$$c_n^2=a^2-\frac{2-\beta}{\rho}\left[\frac{d^2\mu}{d\beta^2}-\frac{2H_n^2}{\mu H^2}\left(\frac{d\mu}{d\beta}\right)^2\right]\frac{H^2}{8\pi} \tag{2.6}$$

Если обозначать через γ угол между $\vec{H}$ и $\vec{n}$ ($H_n=H\cos\gamma$), то при зависимости (1.10) для μ формулы (2.5) и (2.6) примут вид

$$\lambda_n^2(\gamma)=1+\frac{3(1-\beta)\mu_f^2(\mu_f-1)}{\mu(1+2\mu_f)^3}[(2+6\cos^2\gamma-3\beta)\mu_f+3\beta+1-6\cos^2\gamma]\xi^2\cos^2\gamma \tag{2.7}$$

$$\lambda_n^2(\gamma)=1+\frac{18(2-\beta)\mu_f^2(\mu_f-1)^2}{\mu(1+2\mu_f)^2}\xi^2\cos^2\gamma \tag{2.8}$$

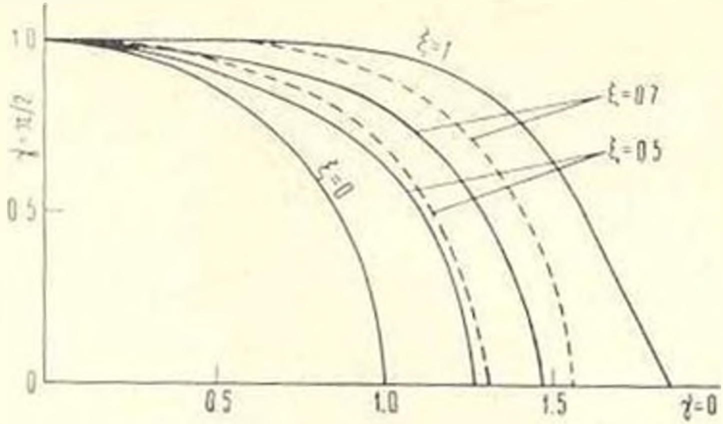
где $\lambda_n=c_n/a$, $\xi=H/\sqrt{8\pi\rho}\,a$—безразмерные параметры.

Кривые $\lambda_n(\gamma)$, описываемые зависимостями (2.7), (2.8) при разных значениях безразмерных параметров β, μ_f и ξ, изображены на фиг. 2, где пунктир соответствует (2.8).

Отношение вторых слагаемых в формулах (2.7) и (2.8), которые характеризуются магнитной проницаемостью смеси, объемной концентрацией пузырьков и магнитным полем, при $\gamma=0$ равно

$$\frac{6(2-\beta)(\mu_f-1)}{(1-\beta)[(8-3\beta)\mu_f+3\beta-5]}\geq\frac{12(\mu_f-1)}{8\mu_f-5} \tag{2.9}$$

Дробь (2.9) больше единицы и является монотонно возрастающей функцией от μ_f ($\mu_f\geq2$).



Фиг. 2

Таким образом, расчетная формула (2.8) для c_n по сравнению с формулой (2.7) дает заниженные значения скорости звука и расхождение между ними становится тем больше, чем сильнее магнитные свойства жидкости. Для проверки достоверности полученных расчетных формул (2.5), (2.6) следует провести эксперименты, аналогичные экспериментам, проведенным в [11, 12] для измерения скорости распространения ультразвука в магнитной жидкости, содержащей агрегаты.

Отметим, что относительное приращение скорости звука $\Delta c_n / c_n$ в аэрированной, намагниченной жидкости значительно увеличивается за счет пузырьков по сравнению с приращением $\Delta c_n / c_n$ в намагниченной жидкости.

3. При выводе плановых уравнений рассмотрим случай установившегося движения и равномерного распределения концентрации β по глубине потока, то есть $\beta = \beta(x, y)$. Относительно МГД-течения со свободной поверхностью по наклонной плоской подложке сделаем те же допущения, которые делаются в плановой теории непроводящих потоков относительно малой толщины со свободной поверхностью

$$V_x(x, y, z) \approx V_x(x, y, \xi) = u(x, y), \quad V_y(x, y, z) \approx V_y(x, y, \xi) = v(x, y)$$

$$V_z(x, y, z) \approx 0 \tag{3.1}$$

где ξ — параметр, причем $0 \leqslant \xi \leqslant h$, а u, v — компоненты плановой скорости. С учетом, что $\beta = \beta(x, y)$ и сделанных допущений (3.1) ($\rho = \rho_g \beta + (1-\beta)\rho_f \approx (1-\beta)\rho_f$, следовательно, $\rho = \rho(x, y)$), уравнения движения в проекциях на координатные оси после их осреднения по глубине примут вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\sin\alpha-\frac{1}{\rho h}\int_0^h\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)\right]dz-T_x \tag{3.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho h}\int_0^h\left[\frac{\partial p}{\partial y}-\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{H}{8\pi}\right)\right]dz-T_y \tag{3.3}$$

$$p(x,y,z)=p_0^e-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\left(\frac{\bar H^2}{8\pi}-\frac{H^2}{8\pi}\right)+g\rho(h-z)\cos\alpha \tag{3.4}$$

где p_0^e и $\bar H$—значения давления и H на свободной поверхности.

Условия, выполняющиеся на свободной поверхности МГD-течения, такие же, как на границе раздела МЖ и пузыря, то есть при $z=h$

$\mu\bar H_n^i=H_n^e$ (3.5а), $\bar H_\tau^i=H_\tau^e$ (3.5б), $\Pi^i=\Pi^e$ (3.5в)

Из (3.5в), с учетом (3.4а) и (3.4б), следует, что

$$\rho\frac{d\mu}{d\rho}\frac{\bar H^2}{8\pi}-p_0^e=\frac{\mu-1}{8\pi}(\mu\bar H_n^2+\bar H_\tau^2) \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в (3.4) дает

$$p(x,y,z)=p_0+\rho g(h-z)\cos\alpha-\frac{\mu-1}{8\pi}(\mu\bar H_n^2+\bar H_\tau^2)+\rho\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi} \tag{3.7}$$

Преобразуем уравнения (3.2), (3.3), используя найденное распределение (3.7) давления в смеси

$$\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(p-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)+\frac{d\mu}{dx}\frac{H^2}{8\pi}=g\left[\frac{\partial(\rho h)}{\partial x}-z\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]\cos\alpha-\frac{\mu-1}{8\pi}\left(\mu\frac{\partial\bar H_n^2}{\partial x}+\frac{\partial\bar H_\tau^2}{\partial x}\right)-\frac{\mu-1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\bar H_n^2-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}(\mu\bar H_n^2+\bar H_\tau^2)+$$

$$+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}(H_n^2+H_\tau^2),\quad \frac{1}{h}\int_0^h\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)\right]dz=g\cos\alpha\left[\frac{\partial(\rho h)}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{h}{2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]-\frac{\mu-1}{8\pi}\left(\mu\frac{\partial\bar H_n^2}{\partial x}+\frac{\partial\bar H_\tau^2}{\partial x}\right)-\frac{\mu-1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\bar H_n^2-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}(\mu\bar H_n^2+\bar H_\tau^2)+$$

$$+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{1}{h}\int_0^h(H_n^2+H_\tau^2)dz \tag{3.8}$$

Так как относительная толщина аэрированного потока намагниченной жидкости, движущейся по наклонной подложке, достаточно мала, то

$$\frac{1}{h}\int_0^h(H_n^2+H_\tau^2)dz=\bar H_n^2+\bar H_\tau^2 \tag{3.9}$$

Равенство (3.8) с учетом соотношений $\partial(\rho h)/\partial x - h/2\,\partial\rho/\partial x = 1/2h\,\partial/\partial x(\rho h^2)$ $\partial\mu/\partial x\, H_*^2 + \mu/2\,\partial H_*^2/\partial x = 1/\mu\,\bar B_*\partial\bar B_*/\partial x$ и осредненного значения интеграла (3.9) можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho h}\int_0^h\left[\frac{\partial p}{\partial x} - \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)\right]dz = g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\alpha - \frac{gh\cos\alpha}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu\rho}\left(\bar B_n\frac{\partial\bar B_n}{\partial x} + \bar B_\tau\frac{\partial\bar H_\tau}{\partial x}\right) \tag{3.10}$$

Аналогичное имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{\rho h}\int_0^h\left[\frac{\partial p}{\partial y} - \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\frac{H^2}{8\pi}\right)\right]dz = g\frac{\partial h}{\partial y}\cos\alpha - \frac{gh\cos\alpha}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} - \frac{\mu-1}{4\pi\rho}\left(\bar B_n\frac{\partial\bar B_n}{\partial y} + \bar B_\tau\frac{\partial\bar H_\tau}{\partial y}\right) \tag{3.11}$$

Заменяя в уравнениях (3.2) и (3.3) интегралы правыми частями равенств (3.10), (3.11) с учетом соотношения $(1/\rho)d\rho = \beta/\bar p_g\,d\bar p_g$, которое следует из равенств $\rho=\beta\rho_g+(1-\beta)\rho_f$, $\beta\rho_g/(1-\beta)\rho_f=\text{const}=A_1$, получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\sin\alpha - g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\alpha - \beta\frac{gh\cos\alpha}{2\bar p_g}\frac{\partial\bar p_g}{\partial x} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu\rho}\left(\bar B_n\frac{\partial\bar B_n}{\partial x} + \bar B_\tau\frac{\partial\bar B_\tau}{\partial x}\right) \tag{3.12}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y}\cos\alpha - \beta\frac{gh\cos\alpha}{2\bar p_g}\frac{\partial\bar p_g}{\partial y} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu\rho}\left(\bar B_n\frac{\partial\bar B_n}{\partial y} + \bar B_\tau\frac{\partial\bar B_\tau}{\partial y}\right) \tag{3.13}$$

$$\beta=[1+\bar p_g/A_1A_2\rho_f]^{-1} \tag{3.14}$$

После осреднения равенства (3.7) по глубине потока, с учетом соотношения (1.11) между p и p_g, в котором отброшены слагаемые, описывающие диссипацию и деформацию пузыря, получается распределение осредненного давления $\bar p_g$ в пузырях газа

$$\bar p_g = p_0 + (1+A_1)\frac{(1-\beta)\rho_f}{2}gh\cos\alpha \tag{3.15}$$

Подставляя выражение β (3.14) в (3.15), получим распределение $\bar p_g$ в аэрированной ненамагниченной жидкости как функцию от h, μ, H_n и H_τ, то есть

$$\bar p_g = \bar p_g(h, \mu, H_n, H_\tau)$$

Из уравнений неразрывности (1.1) и кинематического условия на свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

при допущениях (3.1), которые делаются в теории открытых потоков непроводящей жидкости относительно малой глубины [13, 14], легко получить

$$\frac{\partial((1-\beta)hu)}{\partial x}+\frac{\partial((1-\beta)hv)}{\partial y}=0 \qquad (3.16)$$

Таким образом, в приближении теории «мелкой воды» решение исходной системы уравнений (кроме уравнений, описывающих магнитное поле) трехмерной задачи свелось к разрешению плановых (двухмерных) уравнений (3.12) — (3.16) при заданном магнитном поле (безиндукционное приближение, искажения приложенного внешнего поля слоем магнитной жидкости не учитываются).

В общем случае, чтобы получить полную замкнутую систему плановых уравнений для области, занятой магнитной жидкостью, необходимо решить связанную внешнюю и внутреннюю задачи для напряженности магнитного поля.

Такая задача изучена в работе [17] для проводящей ненамагниченной жидкости, где получена замкнутая система двухмерных (плановых) интегро-дифференциальных уравнений при замене подложки бесконечной полосой.

Отметим, что плановые уравнения для ФМ ($\mu=\mu(H)$) в приближении теории «мелкой воды» выведены в [15], где исходные уравнения взяты в форме [16].

THE MOTION OF AERARIED MAGNETIZED NONCONDUCTING FLUID ON INCLINED PLANE BOTTOM IN MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGENIAN

ՕԴԱՀԱԳԵՑՎԱԾ, ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆԱՑՎԱԾ ԱՆՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԹԵՔ ՀԱՐԹԱԿՈՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Գ. Ս. ԲԵՋԻՐԳԵՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է երկֆազ խառնուրդի (անսեղմելի մագնիսական հեղուկի և գազային պղպջակների) բարակ շերտի շարժումը թեք հարթակով՝ անհամասեռ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։

Գազային պղպջակներով մագնիսական հեղուկի ճնշման և այդ հեղուկում ձայնի տարածման արագության համար ստացված են բանաձևեր։

«Մանծաղ ջրի» տեսության մոտավորությամբ, երբ $Re_m \ll 1$, *ստացված են երկչափ հավասարումներ։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, т. 8, 1982, 620 с.
2. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. М.: ВИНИТИ, т. 16, 1981, 208 с.
3. *Тарапов И. Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.— МГ, 1972, 1, с. 3—11.
4. *Ван Вейнгарден.* Одномерные течения жидкости с пузырьками газа. В сб. Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
5. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Диффузная и многоскоростная модели двухфазных сред в электрическом поле.—ПММ, 1980, 44, с. 290—300.
6. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости, содержащей пузырьки газа.—Докл. АН СССР, 1975, т. 22, №1, с. 1331—1333.
7. *Иорданский С. В.* Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.—ПМТФ, 1960, №3, с. 102—110.
8. *Попова Л. Н., Тарапов И. Е.* Действие магнитного поля на форму кавитационного пузырька в намагничивающейся жидкости.—МГ, 1976, 1, с. 33—37.
9. Эмульсии. Под ред. Абрамзона. Лен-ое отд., 1972, 447 с.
10. *Jeffery A., Taniuti T.* Nonlinear wave propagation with application to physics and magnetohydrodynamics. New York—London: Academic Press, 1964, 369 p.
11. *Chang D. Y., Isler W. E.* Ultrasonic velocity anisotropy in ferrofluids under the influence of a magnetic field.—J. Appl. Phys., 1978, vol. 49, p. 1809—1811.
12. *Игнатенко Н. И.* и др. Влияние внешнего магнитного поля на скорость распространения ультразвуковых волн в магнитной жидкости.—Изв. вузов, физика, 1983, №4, с. 65—69.
13. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки. М.: Энергия, 1967, 212 с.
14. *Баграев А. Г., Безирганян Г. С.* Решение прямой задачи о движении несжимаемой жидкости на быстротоке с переменным продольным уклоном.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, №2, с. 11—19.
15. *Гогосов В. В., Налетова В. А. и др.* Теория «мелкой воды» для магнитной жидкости. В кн.: Одиннадцатое рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. 3. Магнитные жидкости, Саласпилс, 1984, с. 79—82.
16. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics.—Phys. Fluids, 1964, vol. 7, № 12, p. 1927—1932.
17. *Безирганян Г. С.* Безнапорное движение жидкого металла по наклонному лотку во внешнем магнитном поле. XII Рижское совещание по МГ, 1987, 1, с. 143—146.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 539.3.539.55

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛОК В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

АРТЕМЯН Э. Г.

В данной работе решены задачи колебаний (и параметрических колебаний) упругой и вязкоупругой балок в неоднородном температурном поле, когда механические свойства материала зависят от температуры. Определены собственные частоты колебаний балок и области динамической неустойчивости упругой балки в зависимости от изменения температур. Температурное поле берется стационарным и неоднородным.

1. Рассмотрим колебания упругой балки в стационарном температурном поле. Уравнение колебания балки принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t) \tag{1.1}$$

где $F(x,t)$—внешняя возмущающая сила. Решение этого уравнения ищем в виде ряда синусов, удовлетворяющего граничным условиям шарнирного опирания

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\sin\lambda_k x \tag{1.2}$$

где $\lambda_k=\pi k/l$.

В виде ряда представим также жесткость балки и возмущающую силу

$$EJ=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos\lambda_k x \tag{1.3}$$

$$F(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\lambda_k x \tag{1.4}$$

Подставляя (1.2)—(1.4) в уравнение (1.1) и сделав ряд преобразований относительно неизвестных функций $w_k(t)$, получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразования с $w_k(t)$ аналогичны тем же, что и в [6]

$$\frac{d^2w_k(t)}{dt^2}+p^2\left[(2a_0-a_{2k})\lambda_k^4w_k+\sum_{p=1}^{k-1}(a_{k-p}-a_{k+p})\lambda_p^2\lambda_k^2w_p+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=k+1}^{\infty}(a_{p+k}-a_{p-k})\lambda_p^2\lambda_k^2w_p\right]=2f_k(t)p^2,\qquad p=\frac{1}{\sqrt{\rho h}} \tag{1.5}$$

В конкретном случае можно предположить, что модуль Юнга зависит от температуры линейным образом

$$E=E_0(1-\mu\alpha_0 T) \tag{1.6}$$

где α_0—коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, а μ—некоторый безразмерный коэффициент.

Предполагается, что температура изменяется по координате также линейным образом

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{x}{l} \tag{1.7}$$

Коэффициенты разбиения в ряд Фурье примут следующий вид:

$$a_0=E_0 l[2-\mu\alpha_0(T_2-T_1)] \tag{1.8}$$

$$a_k=-E_0 l\mu\alpha_0(T_2-T_1)\frac{\cos\pi k-1}{\pi^2k^2} \tag{1.9}$$

Если довольствоваться вторым приближением, то для определения собственной частоты колебания балки из (1.5) получим

$$\frac{d^2w_k}{dt^2}+p^2[(2a_0-a_{2k})\lambda_k^4]w_k+p^2\lambda_k^2\lambda_{k+1}^2(a_{2k+1}-a_0)w_{k+1}=0 \tag{1.10}$$

$$\frac{d^2w_{k+1}}{dt^2}+p^2[(2a_0-a_{2k+1})\lambda_{k+1}^4]w_{k+1}+p^2\lambda_k^2\lambda_{k+1}^2(a_{2k+1}-a_0)w_k=0$$

Из первого уравнения системы (1.10) имеем

$$w_{k+1}=\frac{-\frac{d^2w_k}{dt^2}-p^2[(2a_0-a_{2k})\lambda_k^4]w_k}{p^2\lambda_k^2\lambda_{k+1}^2(a_{2k+1}-a_0)} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) во второе уравнение системы (1.10) и сделав ряд преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4w_k}{dt^4}+p^2[(2a_0-a_{2k})\lambda_k^4+(2a_0-a_{2k+1})\lambda_{k+1}^4]\frac{d^2w_k}{dt^2}-$$

$$-p^4\lambda_k^4\lambda_{k+1}^4[(a_{2k+1}-a_1)(a_{2k+1}-a_0)-(2a_0-a_{2k+1})(2a_0-a_{2k})]w_k=0$$

Характеристическое уравнение будет

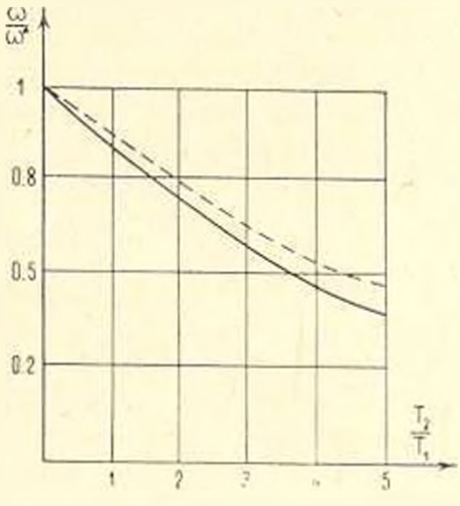
$$\lambda^4+A\lambda^2+B=0$$

где $A=p^2[(2a_0-a_{2k})\lambda_k^4+(2a_0-a_{2k+1})\lambda_{k+1}^4]$

$$B=-p^4\lambda_k^4\lambda_{k+1}^4[(a_{2k+1}-a_1)(a_{2k+1}-a_0)-(2a_0-a_{2k})(2a_0-a_{2k+1})]$$

На фиг. 1 показана зависимость отношений ω/ω^* и T_2/T_1, где ω^*—частота собственных колебаний упругой балки без воздействия температурного поля.

Как видно из фиг. 1, частота собственных колебаний значительно зависит от температуры: с ростом температуры частота резко уменьшается и при $T_2/T_1=5$ практически в два раза меньше частоты собственных колебаний без учета температуры. Пунктиром показана зависимость частоты балки от температуры при решении в первом приближении. Как видно из сравнения результатов приближений, второе приближение значительно уточняет значение собственной частоты колебания балки. При этом, значения, получаемые в первом приближении, значительно выше более точных, которые получены из второго (на фиг. 1 второе приближение указано сплошной чертой).



Фиг. 1

При проведении вычислений начальная температура бралась равной $T_1=200^\circ$ C, а параметры относительно температуры брались равными параметрам стали ($\mu\alpha_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$).

2. Рассмотрим параметрические колебания упругой балки в том же температурном поле под действием периодической продольной силы

$$P(t)=P_0+P_t\cos\theta t \tag{2.1}$$

Уравнение колебания балки под действием силы (2.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+(P_0+P_t\cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.2}$$

Так же, как и в первой задаче, представим в виде ряда (1.3) функцию EJ и ищем в виде ряда (1.2) функцию w. После подстановки (1.2) и (1.3) в уравнение (2.2) и проведения некоторых преобразований, относительно неизвестных w_k получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2w_k}{dt^2}+p^2\Bigg[(2a_0-a_{2k})\gamma_k^4 w_k+\sum_{p=1}^{k-1}(a_{k-p}-a_{k+p})\gamma_p^2\gamma_k^2 w_p+$$
$$+\sum_{p=k+1}^{\infty}(a_{p-k}-a_{p+k})\gamma_p^2\gamma_k^2 w_p\Bigg]-\gamma_k^2(P_0+P_t\cos\theta t)w_k=0 \tag{2.3}$$

Выпишем систему (2.3) для второго приближения

$$\frac{d^2w_k}{dt^2}+\Omega_k^2(1-2\mu\cos\theta t)w_k+\gamma_1^2 w_{k+1}=0 \tag{2.4}$$

$$\Omega_k=\omega_k\sqrt{1-\frac{P_0}{P_*}},\quad \omega_k=p\frac{\pi^2k^2}{l^2}\sqrt{2a_0-a_{2k}}$$

$$\mu=\frac{P_t}{2(P_*-P_0)},\quad P_*=\frac{p^2(2a_0-a_{2k})\pi^2k^2}{l^2} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2 w_{k+1}}{dt^2}+\Omega_{1k}^2(1-2\mu_1\cos\theta t)+\gamma_1^2 w_k=0 \tag{2.6}$$

где $\Omega_{1k}=\omega_k\sqrt{1-\frac{P_0}{P_*}}$, $\omega_{1k}=p\,\frac{\pi^2(k+1)^2}{l^2}\sqrt{2a_0-a_{2k+1}}$

$$\mu_1=\frac{P_t}{2(P_*-P_0)},\quad P_*=\frac{p^2(2a_0-a_{2k+1})\pi^2(k+1)^2}{l^2} \tag{2.7}$$

$$\gamma^2=\frac{\lambda_k^4(P_0-P_t\cos\theta t)^2(2a_0-a_{2k})}{4p^2(2a_0-a_{2k+1})(P_*-P_0)},\quad \gamma_1^2=\frac{\lambda_k^4(P_0+P_t\cos\theta t)(2a_0-a_{2k+1})}{4p^2(2a_0-a_{2k})\cdot(P_*-P_0)}$$

Определим главные области динамической неустойчивости. Для этого пользуемся методом, изложенным в [1]

Периодические решения с периодом $2T$ $(T=2\pi/\theta)$ ищем в виде:

$$w_k=a_1\sin\frac{\theta t}{2}+b_1\cos\frac{\theta t}{2} \tag{2.8}$$

$$w_{k+1}=a_2\sin\frac{\theta t}{2}+b_2\cos\frac{\theta t}{2} \tag{2.9}$$

Подставляя поочередно (2.8) в уравнение (2.4) и (2.9) в уравнение (2.6) и приравнивая коэффиценты при одинаковых $\sin\theta t/2$ и $\cos\theta t/2$, получим две системы, каждая из которых представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными. Условиями существования периодических решений уравнения (2.3) являются условия равенства нулю определителей указанных систем. Запишем эти определители, соединяя соответственно первое уравнение системы с третьим, а второе уравнение с четвертым:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2}+1-\mu & \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \\ \frac{\gamma_1^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2}+1-\mu_1 \end{vmatrix}=0 \tag{2.10}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2}+1+\mu & \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \\ \frac{\gamma_1^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2}+1+\mu_1 \end{vmatrix}=0 \tag{2.11}$$

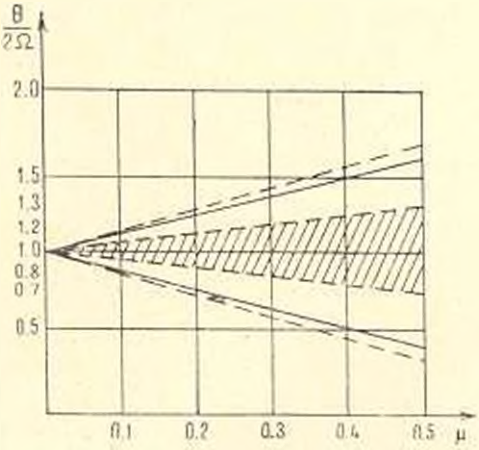
Для определения главной области динамической неустойчивости следует удержать в (2.10) и (2.11) верхние диагональные элементы и приравнивать их нулю. Как и в [1] получаем приближенную формулу для оценки границ главной области динамической неустойчивости

$$\theta_*=2\Omega\sqrt{1\pm\mu} \tag{2.12}$$

В силу наличия $k+1$-го члена, можно уточнить границы главной области, решения определителя (2.10) и (2.11) относительно θ. На фиг. 2 показаны главные области динамической неустойчивости, при этом заштрихованная область соответствует главной области упругой задачи без учета влияния температурного поля, сплошные линии ограничивают область, получаемую из соотношения (2.12), а внешние пунктирные линии обозначают область, получаемую из решений (2.10) и (2.11). Иначе говоря, внешние пунктирные линии являются уточнением границ главной области динамической неустойчивости при учете в (2.3) $k+1$-ого члена. Как видно из фиг. 2, при увеличении температуры границы главной области динамической неустойчивости значительно расширяются. Учет же $k-1$-ого члена позволяет еще более уточнить границы главной области. Это уточнение можно проводить и далее, если учесть в (2.3) $k-2$, $k+3$ и последующие члены. Однако, рассмотрение этих членов с математической точки зрения не является целесообразным, поскольку их влияние на границы главной области практически не сказывается.

3. Уравнение колебания вязкоупругой балки в том же температурном поле принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau,T)\times\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau\right)\right\}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t) \qquad (3.1)$$



Фиг. 2

Как и в [6], рассматриваются простые экспоненциальные ядра

$$\Gamma(t-\tau,T)=A(T)\exp\{-\alpha(T)(t-\tau)\} \qquad (3.2)$$

Воспользуемся температурно-временной аналогией [4, 5, 7] и заменим фактическое время приведенным:

$$t'=t/a_T=f(x)t \qquad (3.3)$$

где a_T—функция температурного сдвига. Чтобы избежать лишних обозначений, вместо t' используем t, с учетом (3.3). Уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-A(T)f(x)\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-\tau)\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau\right)\right\}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t) \qquad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) ищем в следующем виде:

$$w=\bar{w}(x)\exp\{i(\omega t+\varphi)\} \qquad (3.5)$$

Внешнее возмущение задается в виде:

$$F(x,t)=A_k(x)\exp(i\omega t) \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в уравнение (3.1), получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{EJ\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}(1-A\cdot f\cdot\Gamma_c-iA\cdot f\cdot\Gamma_s)\right\}+\rho h\bar{w}(i\omega)^2=A_k(x)\exp(i\varphi) \qquad (3.7)$$

Здесь, как и в [2,3]

$$\Gamma_c=\int_0^\infty\Gamma(z)\cos\omega z\,dz, \qquad \Gamma_s=\int_0^\infty\Gamma(z)\sin\omega z\,dz \qquad (3.8)$$

Отделяя мнимую и действительную части уравнения (3.7) и учитывая, согласно [2], что $E=\mathrm{Inv}(T)$, получим следующую систему:

$$EJ\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}(1-A\cdot f\cdot\Gamma_c)\right\}-\rho h\bar{w}\omega^2=A_k(x)\cos\varphi$$

$$EJ\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}A\cdot f\cdot\Gamma_s\right\}=A_k(x)\sin\varphi \qquad (3.9)$$

Для определения собственных частот колебаний балки, рассматриваем первое уравнение системы (3.9). Второе уравнение не рассматривается, так как нас интересует только частота, а не фаза. Для данного случая оно примет вид

$$EJ\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}(1-A\cdot f\cdot\Gamma_c)\right\}-\rho h\bar{w}\omega^2=0 \qquad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) ищем в виде ряда синусов:

$$\bar{w}=\sum_{k=1}^{\infty}w_k\sin\frac{\pi k}{l}x \qquad (3.11)$$

В виде ряда представим следующую функцию:

$$A[T(x)]\cdot f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{l}x \qquad (3.12)$$

Подставляя (3.11) и (3.12) в уравнение (3.10) и сделав ряд несложных преобразований относительно неизвестных функций w_k, получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\left[2EJ\frac{\pi^4k^4}{l^4}-2\rho h\omega^2\right]w_k-EJ\Gamma_c\frac{\pi^2k^2}{l^2}\left[(2a_0-a_{2k})w_k+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{k-1}(a_{k-p}-a_{k+p})w_p+\sum_{p=k+1}^{\infty}(a_{k+p}-a_{k-p})w_p\right]=0 \qquad (3.13)$$

Определим коэффициенты ряда Фурье. Для этого предполагаем, что элементы ядра вязкости изменяются в зависимости от температуры линейным образом

$$A=\bar{A}(1-\mu\alpha_0 T) \tag{3.14}$$

$$\alpha=\bar{\alpha}(1-\mu\alpha_0 T) \tag{3.15}$$

где α_0—коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, μ—некоторый безразмерный коэффициент.

Температурное поле задано в виде (1.7). Кроме того, следуя [9], предположим, что

$$\ln a_T(T)=c(T-T_1) \tag{3.16}$$

где c—некоторое постоянное число. В частности, можем рассмотреть случай, когда $c=1$. Учитывая (3.14) и (3.15), можем записать выражения для Γ_c и Γ_s:

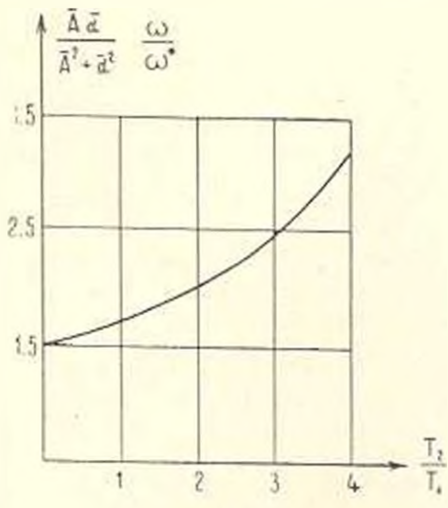
$$\Gamma_c=\frac{\bar{A}\bar{\alpha}}{\alpha^2+\omega^2},\qquad \Gamma_s=\frac{\bar{A}\omega^2}{\alpha^2+\omega^2} \tag{3.17}$$

Коэффициенты разбиения примут следующий вид:

$$a_0=2\bar{A}\left[\left(\frac{1}{T_2-T_1}-\frac{\mu\alpha_0 T_1}{T_2-T_1}\right)\left(1-\frac{1}{\exp(T_2-T_1)}\right)-\frac{\mu\alpha_0}{T_2-T_1}\left(\frac{T_2-T_1-1}{\exp(T_2-T_1)}-1\right)\right] \tag{3.18}$$

$$a_k=\frac{\bar{A}(T_2-T_1)}{(T_2-T_1)^2+\pi^2k^2}\left\{(1-\mu\alpha_0 T_1)\left(\frac{\cos\pi k}{\exp(T_2-T_1)}-1\right)-\mu\alpha_0\left(\left(1-\frac{\cos\pi k}{\exp(T_2-T_1)}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\pi^2k^2-(T_2-T_1)^2}{(T_2-T_1)^2+\pi^2k^2}-\frac{(T_2-T_1)\cos\pi k}{\exp(T_2-T_1)}\right)\right\} \tag{3.19}$$

Проведены числовые вычисления, характеризующие зависимость частоты собственных колебаний вязкоупругой балки от изменения температур. На фиг. 3 показан график зависимости отношения $\frac{\bar{A}\bar{\alpha}}{A^2+\alpha^2}\cdot\frac{\omega}{\omega^*}$ от отношения температур $\frac{T_2}{T_1}$, где ω^*—как и в первой задаче, частота собственных колебаний упругой балки без учета температур. $\frac{\bar{A}\bar{\alpha}}{A^2+\alpha^2}$,



Фиг. 3

согласно [5], есть некоторая постоянная величина. Как видно из фиг. 3, закономерность изменения частоты колебаний от изменения температур, как и в упругой задаче, сохранялась. Однако, увеличение температуры в вязкоупругой задаче влияло на рост частоты собственных колебаний балки более интенсивно, чем в упругом случае.

Как и в упругой задаче, вычисления проводились для второго приближения и при тех же значениях параметров

ELASTIC AND VISCO-ELASTIC BEAMES VIBRATION IN THE NONHOMEGENEOUS TEMPERATURE FIELD

E. G. ARTEMIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Է. Գ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված է առաձգական և առաձգամածուցիկ հեծանների տատանման սեփական հաճախականությունների կախվածությունը ջերմային դաշտի փոփոխություններից (երբ ջերմային դաշտը ստացիոնար է և ոչ ստացիոնար)։ Առաձգական հեծանի համար կատարված է առաջին և երկրորդ մոտավորությամբ ստացված սեփական հաճախականությունների համեմատություն։

Բացի այդ, առաձգական հեծանի համար գտնված է դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթը և ստացված է այդ տիրույթի սահմանների փոփոխման օրինաչափությունը՝ կախված ջերմային դաշտի փոփոխություններից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 595 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 382 с.
3. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Знание, 1980. 561 с.
4. *Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение. 1983. 239 с.
5. *Бугаков И. И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука. 1973. 272 с.
6. *Мовсисян Л. А.* К устойчивости упругих и вязкоупругих термочувствительных пластин и оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986. т. 39, №4, с. 35—41.
7. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 277 с.
8. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 343 с.
9. *Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука. 1985. 300 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
12. X. 1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 539.376

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО КЛИНА, УСИЛЕННОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НАКЛАДКОЙ

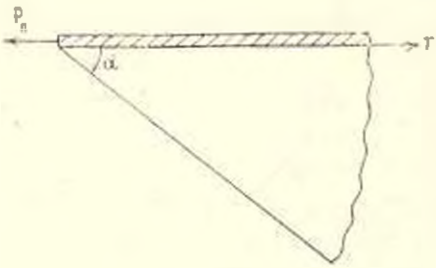
АКОПЯН В. Н.

Вопросы контактного взаимодействия упругих массивных тел с тонкостенными элементами представляют интерес и в постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред. При этом, в частности, по аналогии с известными работами [1—3], представляют интерес задачи контактного взаимодействия полубесконечной накладки с клиновидным телом, которые изготовлены из неоднородно наследственно-стареющих материалов. Эти задачи были обсуждены в работах [4, 5] в одном частном случае, когда между модулями упругомгновенных деформаций и функциями старения существует зависимость $E_1\varphi_1(t)=E_2\varphi_2(t)$. Вследствие того, что в этом случае операторы по временной и пространственной координатам в определяющем интегро-дифференциальном уравнении разделяются друг от друга, получены их замкнутые решения.

В настоящей работе рассматривается задача контактного взаимодействия клина произвольного угла раствора с полубесконечной накладкой, изготовленных из неоднородно наследственно-стареющих материалов, когда, в общем случае, накладка и клин имеют разные возрасты. Решение задачи сначала сводится к решению интегрально-разностного уравнения, а затем, используя решение соответствующей упругомгновенной задачи, к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, допускающему применение метода последовательных приближений.

Отметим, что подобные задачи о контактном взаимодействии стрингера конечной длины с полосой и тонкой цилиндрической оболочки конечной длины с бесконечным цилиндром в постановке теории ползучести ранее рассматривались в [6, 7]. Основная трудность, встречающаяся при решении таких задач, заключается в том, что к ним неприменим принцип соответствия и в их определяющих интегро-дифференциальных уравнениях операторы по временной и пространственной координатам не отделяются друг от друга, что значительно усложняет вопрос построения их эффективных решений. В работах [6, 7] эта трудность преодолевается при помощи метода разделения переменных на основании аппарата полиномов Чебышева, сводящего исходные уравнения к бесконечным системам вольтерровских интегральных уравнений. В настоящей работе указанная трудность преодолевается развитием методики работы [1], основанной на интегральном преобразовании Меллина.

1. Пусть полубесконечная накладка малой толщины h прикреплена к одной грани клиновидной пластинки с углом раствора α, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния; другая грань свободна от напряжений (фиг. 1). Будем считать, что материалы накладки и клина обладают свойствами ползучести, которые характеризуются неоднородностью старения [8]. Обозначим меру ползучести накладки через $C_1(t, \tau)$, постоянный по его длине возраст τ_1, модуль упругомгновенной деформации — $E_1=\mathrm{const}$. Соответствующие характеристики для клина обозначим через $C_2(t, \tau)$, τ_2 и $E_2=\mathrm{const}$ соответственно. Будем также предполагать, что для материала клина коэффициенты поперечного сжатия для упругой деформации $\nu_1(t)$ и деформации ползучести одинаковы и постоянны, то есть $\nu_1(t)=\nu_2(t, \tau)=\mathrm{const}$ [8].



Фиг. 1

Пусть, далее, в момент времени τ_1 к концу накладки приложена горизонтальная сосредоточенная сила P_0. Требуется определить закон распределения контактных напряжений $\tau(x, t)$ под накладкой и коэффициент интенсивности этих напряжений в конце накладки. При этом, как обычно [1, 9], накладка будет рассматриваться как одномерный континуум и в зоне контакта нормальные напряжения пренебрегаются.

Перейдем к выводу определяющего уравнения поставленной задачи. С этой целью определим деформации по направлению r накладки и точек грани $\varphi=0$ вязкоупругого клина. При сделанных предположениях, используя выражения деформации соответствующих упругих задач [2], на основании [8] можем записать:

$$\varepsilon_r^{(1)}(r, t)=\frac{1}{E_1 A_1}(1-L_1)\left[h\int_0^r \tau(r_0, t)\,dr_0-P_0\right] \quad (0<r<\infty) \qquad (1.1)$$

$$\varepsilon_r^{(2)}(r, t)=-\frac{1}{E_2}(1-L_2)\frac{d}{dr}\int_0^\infty K(r, r_0)\,\tau(r_0, t)\,dr_0 \quad (0<r<\infty) \qquad (1.2)$$

Здесь

$$K(r, r_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^p \frac{L(p, \alpha)}{p}\,dp \qquad (0<c<1)$$

где

$$L(p,\alpha)=\frac{\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha}{\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha}$$

Временные же операторы L_i $(i=1,\ 2)$ на произвольную функцию действуют следующим образом:

$$(1-L_i)\varphi(t)=\varphi(t)-\int_{\tau_0}^{t}K_i(t+\rho_i,\ \tau+\rho_i)\varphi(\tau)d\tau$$

$$K_i(t,\ \tau)=E_i\frac{\partial C_i(t,\ \tau)}{\partial\tau};\qquad C_i(t,\ \tau)=\varphi_i(\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))$$

$$\rho_i=\tau_i-\tau_0\quad (i=1,2)$$

Не нарушая общности, можно принять $\rho_1=0$ и $\rho_2=\rho$. Теперь, подставляя выражения деформаций в радиальном направлении из (1.1) и (1.2) в усл вие контакта

$$\mathscr{E}_r^{(1)}(r,\ t)=\mathscr{E}_r^{(2)}(r,\ t)\quad (0\leqslant r<\infty)\tag{1.3}$$

получим сл. ющее интегральное уравнение:

$$-\frac{1}{E_2}(1-L_2)\frac{d}{dr}\int_0^{\infty}K(r,\ r_0)\tau(r_0,\ t)\,dr_0=\frac{1}{E_1A_1}(1-L_1)\left|h\int_0^{r}\tau(r_0,\ t)dr_0-P_0\right|$$

$$(0<r<\infty)\tag{1.4}$$

При этом контактные напряжения должны удовлетворять также условию

$$h\int_0^{\infty}\tau(r_0,\ t)dr_0=P_0\tag{1.5}$$

Теперь введем безразмерные величины [1]

$$r=\frac{E_1A_1}{E_2h}x;\quad r_0=\frac{E_1A_1}{E_2h}s;\quad \tau\left(\frac{E_1A_1}{E_2h}x,\ t\right)=\frac{P_0E_2}{E_1A_1}\tau_0(x,\ t)$$

Тогда (1.4) и (1.5) примут вид

$$(1-L_2)\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}K(x,\ s)\tau_0(s,\ t)ds+(1-L_1)\left|\int_0^{x}\tau_0(s,\ t)\,ds-1\right|=0\tag{1.6}$$

$$\int_0^{\infty}\tau_0(s,\ t)ds=1\tag{1.7}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегро-дифференциального уравнения (1.6) при условии (1.7).

2. Приступим к решению интегро-дифференциального уравнения (1.6) при условии (1.7). С этой целью введем в рассмотрение трансформанту Меллина неизвестных контактных напряжений:

$$T_0(p, t)=\int_0^\infty \tau_0(s, t)s^{p-1}ds \tag{2.1}$$

Далее, умножим обе части (1.6) на x^p и проинтегрируем в интервале $0<x<\infty$. В результате получим разностное функциональное уравнение

$$(1-L_1)T_0(p+2, t)+(p+1)L(p, \alpha)(1-L_2)T_0(p+1, t)=0 \tag{2.2}$$

а условие (1.7) примет вид

$$T_0(1, t)=1 \tag{2.3}$$

Очевидно, что при $t=\tau_0$ из (2.2) получим уравнение, которое описывает упругомгновенную задачу. Решение этого уравнения построено в [2] и имеет вид

$$T_0^*(p, \tau_0)=H(p-3/2)U(p-3/2), \quad H(p)=|M(0, \alpha)|^{p-1/2}\frac{\pi(p+1/2)}{\cos p\pi} \tag{2.4}$$

$$U(p)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2+p+p_k)\Gamma(1/2-p+t_k)}{\Gamma(1/2-p+p_k)\Gamma(1/2+p+t_k)}\left(\frac{t_k}{p_k}\right)^{2p}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1/2+p+\bar{p}_k)\Gamma(1/2-p+\bar{t}_k)}{\Gamma(1/2+p+\bar{t}_k)\Gamma(1/2-p+\bar{p}_k)}\left(\frac{\bar{t}_k}{\bar{p}_k}\right)^{2p}, \qquad M(p, \alpha)=pL(p, \alpha)$$

Здесь p_k — нули функции $\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha$, а t_k — нули функции $\sin^2 p\alpha - p^2\sin^2\alpha$.

Исходя из (2.4), можем функцию $(p+1)L(p, \alpha)$ представить в следующем виде:

$$(p+1)L(p, \alpha)=\frac{T_0^*(p+2, \tau_0)}{T_0^*(p+1, \tau_0)} \tag{2.5}$$

Подставляя выражение $(p+1)L(p, \alpha)$ в (2.2) и вводя обозначение

$$X(p+1, t)=\frac{T_0(p+1, t)}{T_0^*(p+1, \tau_0)}$$

заменим в полученном уравнении $(p+1)$ на p. В результате придем к уравнению

$$(1-L_1)X(p+1, t)-(1-L_2)X(p, t)=0 \tag{2.6}$$

при условиях

$$X(1, t)=1; \quad X(p, \tau_0)=1 \tag{2.7}$$

Отметим, что уравнение (2.6) имеет место в полосе регулярности $a<\mathrm{Re}\,p<1$ и функция $X(p, t)$ при $\mathrm{Im}\,p\to\infty$ не стремится к нулю. Чтобы решить уравнение (2.6) при помощи двустороннего преобразования Лапласа, как в [1], введем в рассмотрение функцию

$$Y(p, t)=X(p, t)\cos p\pi$$

Очевидно, что эта функция стремится к нулю при $\mathrm{Im}\,p\to\infty$. Кроме того, она регулярна в полосе $1/2<\mathrm{Re}\,p<2$, кроме точки $p=3/2$, где она имеет простой полюс.

Деля обе части (2.6) на $\cos p\pi$, получим уравнение

$$(1-L_1)Y(p+1, t)+(1-L_2)Y(p, t)=0 \tag{2.8}$$

а условия (2.7) примут соответственно вид

$$Y(1, t)=-1; \qquad Y(p, \tau_0)=1/\cos p\pi \tag{2.9}$$

Теперь умножим обе части (2.8) на $\exp(pw)$ и проинтегрируем по линии $(c-i\infty, c+i\infty)(1/2<c<1)$. После некоторых элементарных выкладок получим

$$(1+e^{-w})\bar{Y}(w, t)-\int_{\tau_0}^{t}[e^{-w}K_1(t,\tau)+K_2(t+\rho,\tau+\rho)]\bar{Y}(w,\tau)d\tau=-2i\exp(w/2)f(t) \tag{2.10}$$

$$\bar{Y}(w, t)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(p, t)\exp(pw)dp, \quad f(t)=X(3/2, t)-\int_{\tau_0}^{t} K_1(t, \tau)Y(3/2, \tau)d\tau$$

$$K_i(t, \tau)=E_i[\varphi_i(\tau)-(\varphi_i(\tau)-\gamma\varphi_i(\tau))\exp(-\gamma(t-\tau))] \quad (i=1, 2)$$

Легко показать [8], что интегральное уравнение (2.10) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{\bar{Y}}(w, t)+\gamma\left[1+\frac{\varphi_1(t)\exp(-w)+\varphi_2(t+\rho)}{1+\exp(-w)}\right]\bar{Y}(w, t)=-2i\frac{\exp(w/2)}{1+\exp(-w)}F(t) \tag{2.11}$$

с начальными условиями

$$\bar{Y}(w, \tau_0)=-2i\frac{e^{3w/2}}{1+e^{w}}, \quad \dot{\bar{Y}}(w,\tau_0)=-\gamma i[\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)]\frac{\exp(3w/2)(\exp(w)-1)}{(1-\exp(w))^2} \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.11), которое удовлетворяет начальным условиям (2.12), имеет вид [8]

$$\bar{Y}(w, t)=-2i\frac{\exp(3w/2)}{1+\exp(w)}\left\{1+\int_{\tau_0}^{t}dt\int_{\tau_0}^{t}\exp[-\gamma\psi(t, \tau, w)]F(\tau)d\tau\right\}- \tag{2.13}$$

$$-\gamma i[\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)]\frac{\exp(3w/2)(\exp(w)-1)}{(1+e^{w})^2}\int_{\tau_0}^{t}\exp[-\gamma\psi(\tau, \tau_0, w)]d\tau$$

$$F(t)=F_1(t)=\dot{f}(t)+\gamma f(t)$$

$$\psi(t, \tau, w)=\int_{\tau}^{t}\left[1+\frac{\varphi_1(\xi)+\exp(w)\varphi_2(\xi+\rho)}{1+\exp(w)}\right]d\xi$$

Далее, при помощи обратного преобразования находим

$$Y(p,t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\tau_0}^{t}dt\int\limits_{\tau_0}^{t}Q_1(t,\tau,p)F_1(\tau)d\tau+1/\cos(p\pi)-$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi}[\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)]\int\limits_{\tau_0}^{t}Q_2(\tau,p)d\tau \qquad (2.14)$$

Здесь введены обозначения

$$Q_1(t,\tau,p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3w/2}}{1+e^{w}}\exp[-\gamma\varphi(t,\tau,w)]\exp(-pw)dw=$$

$$=-\frac{\pi}{\cos p\pi}\exp\left[-\gamma(t-\tau_0)-\gamma\int\limits_{\tau}^{t}\varphi_1(\xi)\,d\xi\right]\cdot{}_1F_1(3/2-p,1,\gamma\varphi(t,\tau))$$

$$Q_2(t,p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(3w/2)(\exp(w)-1)}{(1+\exp(w))^2}\exp[-\gamma\varphi(t,\tau_0,w)]\exp(-pw)dw=$$

$$(2.15)$$

$$=-\frac{\pi}{\cos\pi p}\exp\left[-\gamma(t-\tau_0)-\gamma\int\limits_{\tau_0}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi\right][{}_1F_1(3/2-p,1,\gamma\varphi(t,\tau_0))-$$

$$-2(p-1/2){}_1F_1(3/2+p,2,\gamma\varphi(t,\tau_0))]$$

$$\varphi(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}[\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi+\rho)]d\xi$$

а ${}_1F_1(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [10]. Отметим, что при получении (2.14) и (2.15) была использована формула [10]

$$\int\limits_{0}^{u}x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}e^{\beta x}dx=B(\mu,\nu)u^{\mu+\nu-1}{}_1F_1(\nu,\mu+\nu,\beta u) \qquad (\mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>0)$$

Перейдем теперь к определению пока еще неизвестной функции $F_1(t)$. С этой целью используем первое условие (2.9), которое дает

$$\int\limits_{\tau_0}^{t}Q_1(t,\tau,1)dF_1(\tau)+\frac{\gamma}{2}[\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)]Q_2(t,1)=0 \qquad (2.16)$$

После интегрирования в (2.16) по частям получим

$$F_1(t)-\int\limits_{\tau_0}^{t}R(t,\tau)F_1(\tau)d\tau=a(t) \qquad (2.17)$$

$$R(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial Q_1(t,\tau,1)}{\partial\tau}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\exp\left[-\gamma(t-\tau)-\gamma\int_{\tau}^{t}\frac{\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\xi+\rho)}{2}d\xi\right]I_0(-\gamma\psi(t,\tau)/2)\right\}$$

$$a(t)=\frac{\gamma}{\pi}\left[\left(1+\frac{\varphi_1(\tau_0)+\varphi_2(\tau_0+\rho)}{2}\right)Q_1(t,\tau_0,1)-\frac{\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)}{2}Q_2(t,1)\right]$$

Следовательно, для определения функции $F_1(t)$ получено обычное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (2.17), к которому применим метод последовательных приближений.

Окончательно имеем, что функция $Y(p,t)$ определяется формулой (2.14), где функция $F_1(t)$ — решение интегрального уравнения (2.17). Тогда для трансформанты Меллина неизвестных контактных напряжений получим следующее выражение:

$$T_0(p,t)=T_0^*(p,\tau_0)\cos(p\pi)Y(p,t)=T_0^*(p,\tau_0)\Big\{1+$$

$$+\int_{\tau_0}^{t}dt\int_{\tau_0}^{t}\exp\left[-\gamma(t-\tau)-\gamma\int_{\tau}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi\right]{}_1F_1(3/2-p,1,\gamma\varphi(t,\tau))\,dF_1(\tau)+$$

$$+\frac{\gamma}{2}[\varphi_1(\tau_0)-\varphi_2(\tau_0+\rho)]\int_{\tau_0}^{t}\exp\left[-\gamma(\tau-\tau_0)-\gamma\int_{\tau_0}^{\tau}\varphi_1(\xi)d\xi\right]\times$$

$$\times[{}_1F_1(3/2-p,1,\gamma\varphi(\tau,\tau_0))-(2p-1){}_1F_1(3/2+p,2,\gamma\varphi(\tau,\tau_0))]d\tau\Big\} \qquad (2.18)$$

Теперь легко найти контактные напряжения при помощи обратного преобразования Меллина

$$\tau_0(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}T_0(p,t)x^{-p}dp \qquad (2.19)$$

На основании полученного решения можно заключить, что фактор неоднородного старения, и вообще вязкоупругие характеристики контактирующих тел в данном случае существенно влияют на величину контактных напряжений и коэффициент их интенсивности в концевой точке накладки, что подтверждается приводимыми ниже числовыми расчетами.

5. Проведен численный анализ рассматриваемой задачи в случае, когда $\alpha=\pi$, то есть когда неоднородно-стареющая вязкоупругая полуплоскость на своей границе усилена тонкой полубесконечной накладкой другого возраста. При этом принято, что функции старения для основания и накладки одинаковы и имеют вид

$$\varphi_1(\tau)=\varphi_2(\tau)=C_0+A_0/\tau$$

а численные значения физических параметров задачи взяты следующими:

$$E_1=E_2=2\cdot10^{-4}\text{ МПа};\ C_0=9\cdot10^{-5}\text{ МПа}^{-1};\ A_0=4{,}82\cdot10^{-4}\text{ сут МПа}^{-1}$$
$$\gamma=0.026\text{ сут}^{-1}$$

Таблица 1

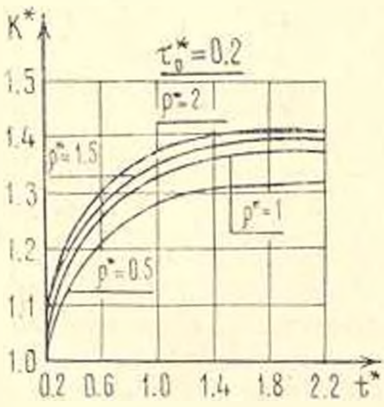
Значения функции $F_1^*(t)$, $\tau_0^*=0{,}5$

ρ^* \ t^*	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
0,5	3,175	3,295	3,295	3,295	3,295
1	3,133	3,292	3,291	3,291	3,291
1,5	3,112	3,290	3,289	3,289	3,289
2	3,10	3,289	3,288	3,288	3,288

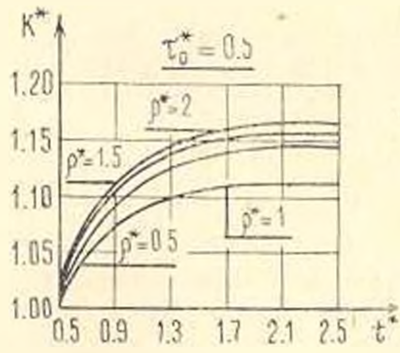
Таблица 2

$\tau_0^*=0{,}2$

ρ^* \ t^*	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,5	3,603	4,012	4,012	4,012	4,012
1	3,529	4,000	3,999	3,999	3,999
1,5	3,498	3,999	3,992	3,992	3,992
2	3,482	3,987	3,987	3,987	3,987



Фиг. 2



Фиг. 3

Полученные числовые результаты приведены в виде табл. 1, 2 и графиков (фиг. 2, 3). В табл. 1 и 2 приведены численные значения вспомогательной функции $F_1^*(t)=F_1(t)/\gamma$ в различные моменты приведенного времени $t^*=\gamma t$ в двух случаях, когда приведенный момент приложения горизонтальной силы $\tau_0^*=\gamma\tau_0$ принимает значения 0,2 и и 0,5 при различных значениях относительного возраста полуплоскости. Из этих таблиц видно, что в начальные моменты времени $F_1^*(t)$ возрастает до определенной величины и далее остается неизменной. В зависимости от относительного возраста полуплоскости в изменениях функции $F_2^*(t)$ наблюдается обратная картина, то есть с увеличением возраста функция $F_2^*(t)$ уменьшается до определенной величины и далее асимптотически приближается к некоторой прямой, параллельной горизонтальной оси. На графиках (фиг. 2, 3) приведены изменения относительного коэффициента интенсивности контактных напряжений $k^*=k/k_1$ во времени в зависимости от относительного возраста полуплоскости, когда $\tau_0^*=0{,}2$; $0{,}5$. При этом k – коэффициент интенсивности контактных напряжений с учетом неоднородной ползучести, а k_1 – этот же коэффициент в случае соответствующей упругомгновенной задачи. Из этих графиков видно, что величина k^*, возрастая во времени, стремится к некоторому асимптотическому значению, и это значение тем больше, чем больше относительный возраст полуплоскости.

Автор благодарит С. М. Мхитаряна за внимание к работе.

ON STRESS STATE OF NONHOMOGENEOUS AGING VISCO-ELASTIC WEDGE REINFORCED BY HALF-INFINITE STRINGER

V. N. HAKOBIAN

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌՈՐԵՆ ԾԵՐԱՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՍԵՊԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է անհամասեռ ժառանգականորեն ծերացող նյութից պատրաստված կամայական բացվածքով սեպի և կիսաանվերջ վերադիրի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ վերադիրը և սեպը ունեն տարբեր հասակներ: Խնդրի լուծումը սկզբում բերվում է ինտեգրալ տարբերական հավասարման լուծման, իսկ այնուհետև, օգտագործելով համապատասխան տրանսֆորմացիային խնդրի լուծումը, Վոլտերի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման, որի նկատմամբ կարելի է կիրառել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* On the diffusion of load a stiffener into a sheet.—Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., v. 8, № 2, 1955, p. 164–178.
2. *Alblas J., Kapers W.* On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate.– Appl. Scientific Research, ser. A, v. 15, № 6, 1965–1966, p. 429–439.

3. *Нуллер Б. М.* Деформация упругого клина, подкрепленного балкой.—ПММ, 1974, т. *38*, №5, с. 876—882.
4. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от полубесконечного стрингера к двум одинаковым клиновидным пластинкам с учетом фактора неоднородного старения—В сб. Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: изд-во АН Арм. ССР 1985, с. 135—145.
5. *Акопян В. Н., Гукасян Г. О., Гулян К. Г.* О напряженном состоянии вязкоупругого клина, усиленного тонкими полубесконечными стрингерами. Тезисы докладов 3-й Всес. конф. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Харьков: 1985, с. 5.
6. *Даштян З. А., Мхитарян С. М.* О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. 37, №3, с. 3—17.
7. *Мирзоян С. Е.* О передаче нагрузки от стрингера конечной длины к полосе с учетом их вязкоупругих свойств. В сб.: Исследования по механике твердого деф. тела. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1981, с. 182—187.
8. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8.X.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 534.131.2

ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДЛИННОЙ ТРУБЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

КУЛИКОВСКИЙ А. Г., ШИКИНА И. С.

Задача об изгибных колебаниях и устойчивости прямолинейной упругой трубы конечной длины с текущей в ней жидкостью при некоторых специальных граничных условиях рассматривалась рядом авторов, например, [1—3]. В [1, 2] для шарнирно закрепленной трубы найдена критическая скорость жидкости, при превышении которой возникает неустойчивость.

В данной работе рассматривается задача о развитии во времени первоначально локализованного малого прогиба бесконечно длинной трубы. Показано, что область растущего прогиба распространяется по трубе, и найдены скорости границ этой области.

Показано, что для трубы конечной, но достаточно большой длины имеет место неустойчивость при любой заданной скорости жидкости и произвольных граничных условиях на концах трубы. Природа неустойчивости может быть различной. При некоторых найденных в работе условиях рост прогиба трубы определяется свойствами уравнения, описывающего поведение прогиба, а при других условиях рост возмущений связан с фактом существования граничных условий на концах трубы, которые обеспечивают отражение упругих волн, бегущих по трубе.

При исследовании устойчивости течений или состояний, не зависящих от координат и времени, в линейной теории рассматриваются решения линеаризованных уравнений в виде бегущих волн вида $\exp(ikx-i\omega t)$. Волновое число k и частота ω в этих решениях связаны дисперсионным уравнением $D(\omega, k)=0$, которое получается из системы уравнений, описывающих поведение возмущений. Если для всех действительных значений k корни дисперсионного уравнения $\omega_j(k)$ таковы, что $\operatorname{Im}\omega_j(k)\leqslant 0$ для всех j, то течение или состояние называется устойчивым. Если найдутся действительные k, для которых $\operatorname{Im}\omega_j>0$ хотя бы для одного значения j, то говорят, что имеет место неустойчивость. Будем называть ее простой неустойчивостью.

Для системы уравнений, описывающей поведение малых возмущений, можно решить задачу Коши. Если начальные данные интегрируемы по модулю, то есть начальные возмущения в некотором смысле локализованы, то решение представляется интегралом Фурье

$$b(x,t)=\sum_j \int b_j(k)\exp[ikx-i\omega_j(k)t]\,dk \tag{0.1}$$

где $b_j(k)$—фурье-компоненты начального возмущения $b(x,0)$.

Рассмотрим асимптотику интеграла (0.1) при $t\to\infty$ вдоль всех возможных лучей $x-ut=\text{const}$, $t>0$ на плоскости x, t, то есть выясним поведение возмущений в движущихся системах координат, в которых $x'=x-ut$, $k'=k$, $\omega'(u,k)=\omega-uk$. Для этого в (0.1) заменим x на x', ω на $\omega'=\omega'(u,k)$.

Для нахождения асимптотики воспользуемся методом перевала [4], согласно которому при $t\to\infty$

$$b\sim b(k_s)t^{-\alpha}\exp[i(k_s x'-\omega_s' t)],\quad \omega_s'=\omega'(k_s)$$

здесь $\alpha>0$ и определяется порядком первой отличной от нуля в седловой точке k_s производной функции $\omega'(k)$. В седловой точке $d\omega'/dk=0$ и ее координаты задаются уравнениями

$$\operatorname{Re}\frac{d\omega}{dk}=u,\qquad \operatorname{Im}\frac{d\omega}{dk}=0 \tag{0.2}$$

При фиксированном u может существовать несколько седловых точек, определяемых (0.2), но асимптотику дает та из них, через которую проходит контур интегрирования после его деформации. Если и таких точек несколько, то главный вклад в асимптотику дает седловая точка с наибольшим значением $\operatorname{Im}\omega_s'$. Для правильного выбора перевальной точки, дающей асимптотику, необходимо знать поведение функции $\operatorname{Im}\omega'$ на комплексной плоскости k («рельеф»).

Рост или затухание возмущений (0.1) для заданного u определяется знаком $\operatorname{Im}\omega'$ в перевальной точке. Если рост возмущений происходит при $u=0$, то неустойчивость называют абсолютной. Если при $u=0$ возмущения (0.1) стремятся к нулю, но существуют u, для которых они растут, то говорят о конвективной неустойчивости. Простая неустойчивость всегда влечет за собой либо абсолютную, либо конвективную неустойчивость (см., например, обзор [5]).

При рассмотрении решения задачи не на бесконечной прямой x, а на отрезке конечной длины L с однородными граничными условиями на его концах оказывается, что асимптотическое поведение решения определяется собственной частотой. При больших значениях L собственные частоты принадлежат к одному из двух типов [6]. «Граничные» собственные частоты определяются граничными условиями на одном из концов отрезка. «Глобальные» собственные частоты в пределе при $L\to\infty$ не зависят от конкретного вида граничных условий (хотя предполагаются выполненными некоторые условия невырожденности граничных условий на обоих концах отрезка) и находятся из уравнения [6]

$$\operatorname{Im}[k_i(\omega)-k_j(\omega)]=0 \tag{0.3}$$

где

$$\operatorname{Im}k_i(\omega)=\min_i\{\operatorname{Im}k_i(\omega)\},\quad \operatorname{Im}k_j(\omega)=\max_i\{\operatorname{Im}k_i(\omega)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im}k_i(\omega)>0\\ \operatorname{Im}k_i(\omega)<0\end{array}\right\}\quad\text{при}\quad \operatorname{Im}\omega\to\infty \tag{0.4}$$

Физический смысл равенства (0.3) заключается в том, что асимптотическое поведение решения определяют две волны, распространяющиеся в противоположные стороны ($k_i(\omega)$ соответствуют волнам, распространяющимся направо, а $k_j(\omega)$ — волнам, распространяющимся налево) и превращающиеся одна в другую при отражениях от концов отрезка с коэффициентами отражения порядка единицы. На плоскости ω уравнение (0.3) задает линию. Очевидно, эта линия — самая верхняя среди всех линий L_{ij}, на которых

$$\operatorname{Im}[k_i(\omega)-k_j(\omega)]=0 \tag{0.5}$$

где $k_i(\omega)$ и $k_j(\omega)$ удовлетворяют условиям (0.4). Если какая-либо из линий (0.5) заходит в верхнюю полуплоскость ω, то среди глобальных собственных частот, удовлетворяющих уравнению (0.3), обязательно найдутся ω с $\operatorname{Im}\omega>0$. Неустойчивость, соответствующая глобальной собственной частоте с $\operatorname{Im}\omega>0$, называется глобальной.

Седловой точке k_s на плоскости k соответствует точка ветвления ω_s на плоскости ω. Если в точке ветвления $k_i(\omega_s)=k_j(\omega_s)$, то точка ω_s является концом линии L_{ij}, что следует из приближенного равенства $k_{i,j}=\pm A\sqrt{\omega-\omega_s}$. Поэтому, если $\operatorname{Im}\omega_s>0$, то есть при $L\to\infty$ имеет место абсолютная неустойчивость, то при большом, но конечном L будет иметь место глобальная неустойчивость [6].

1. Рассмотрим задачу о поведении малых изгибных колебаний упругой трубы, заполненной движущейся жидкостью. Будем считать, что поперечное сечение трубы остается неизменным, а деформация сводится к изгибу оси. Скорость жидкости v будем считать постоянной. Запишем уравнение для прогиба трубы $w(x,t)$ [1, 2]

$$\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_2\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w=-D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tag{1.1}$$

где ρ_1 и ρ_2 — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины, а D — жесткость трубы на изгиб.

Интересно отметить, что дисперсионное уравнение, соответствующее (1.1), имеет такой же вид, как дисперсионное уравнение малых модуляций нелинейных волн, полученное в [7].

Решив квадратное относительно Ω дисперсионное уравнение, найдем его корни

$$\Omega_{1,2}=-UK\pm K\sqrt{K^2-K_*^2},\quad U=-\beta_2,\quad K_*^2=\beta_1\beta_2$$

$$\Omega=\frac{\omega}{v^2}\sqrt{\frac{D}{\rho_1+\rho_2}},\quad K=\frac{k}{v}\sqrt{\frac{D}{\rho_1+\rho_2}},\quad \beta_i=\frac{\rho_i}{\rho_1+\rho_2},\quad i=1,2 \tag{1,2}$$

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать дисперсионное уравнение также относительно произвольно движущихся систем координат, то в (1.2) далее будем считать U произвольной постоянной, а $\Omega=\Omega(U,K)$. При этом величина β_2-U представляет собой безразмерную скорость упомянутой выше системы координат относительно трубы. Обозначим $\Omega(K,0)=K\sqrt{K^2-K_*^2}=\Omega_0(K)$

Заметим, что при изменении знака U дисперсионное уравнение (1.2) не изменится, если одновременно изменить знак K, что эквивалентно изменению направления оси X. Поэтому достаточно рассмотреть поведение возмущений в системах координат с $U>0$.

Из (1.2) следует, что в рассматриваемой задаче простая неустойчивость имеет место всегда.

Изучим поведение первоначально локализованного малого прогиба трубы при $t\to\infty$, то есть найдем асимптотику интеграла

$$W'(X',\tau)=\sum_{j=1}^{2}\int W_j(K)\exp\{i[KX'-\Omega_j(K,U)\tau]\}dK$$

$$X=\frac{xk}{K},\quad \tau=\frac{t\omega}{\Omega},\quad X'=X-(\beta_2+U)\tau,\quad W_j(K)=\frac{kw_j(k)}{K} \tag{1.3}$$

для различных значений $|U|$.

В плоскости K функция $\Omega(K, U)$ для фиксированного U двузначна. Проведя разрезы по действительной оси от точек ветвления $K=\pm K_0$ до $K=\infty$ и по мнимой оси K, выделим ее однозначные ветви, отличающиеся знаком. На разрезах $\mathrm{Im}\Omega_0=0$. Мнимая часть каждой из ветвей Ω_j есть нечетная, а действительная -четная функция $\mathrm{Re}K$. Отсюда следует, что асимптотическое поведение интеграла (1.3), взятого по правой и левой полуоси $\mathrm{Re}K$, будет задаваться экспонентами с одинаковыми показателями и при исследовании асимптотики (1.3) достаточно ограничиться интегрированием по K от 0 до ∞ и рассмотреть один член суммы с $j=1$. (Ветвь Ω_1 соответствует знаку „+" в (1.2)).

Уравнения для седловых точек имеют вид

$$\mathrm{Re}\,\frac{2K^2-K_0^2}{\sqrt{K^2-K_0^2}}=U,\qquad \mathrm{Im}\,\frac{2K^2-K_0^2}{\sqrt{K^2-K_0^2}}=0 \tag{1.4}$$

В плоскости K линию $\mathrm{Im}\,d\Omega/dK=0$, задаваемую вторым уравнением (1.4), назовем „хребтом". По нему двигается седловая точка при изменении U. В полуплоскости $\mathrm{Re}K\geqslant0$ имеются два хребта: полуинтервал действительной оси $[K_0,\infty)$ (совпадающий с разрезом) и кривая, задаваемая уравнением

$$K^2-K_0^2=\frac{K_0^2}{2}\exp(i\theta),\qquad 0\leqslant\theta<2\pi \tag{1.5}$$

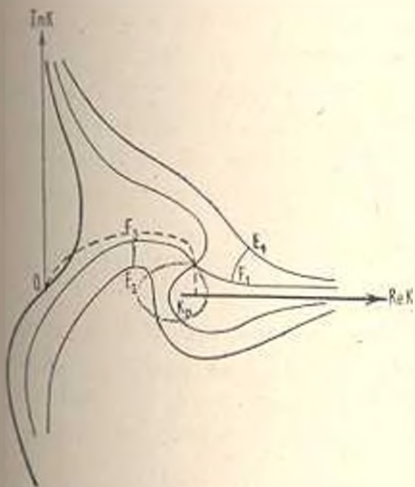
Эти хребты пересекаются в точке $K_*=\sqrt{3/2}\,K_0$, где $d^2\Omega/dK^2=0$. В верхней полуплоскости на хребтах U положительно, а в нижней— $U<0$.

На действительном хребте $[K_0,\infty)$ $\mathrm{Im}\Omega_1=\mathrm{Im}\Omega_0=0$, а величина $|U(K)|=|d\Omega_0/dK|$ согласно (1.4) принимает все значения от минимального $|U|=U_*=U(K_*)=2\sqrt{2}\,K_0$ до $|U|=\infty$ в точках $K=K_0$ и $K=\infty$. Значениям $|U|<U_*$ соответствуют точки кривой (1.5). При движении в верхней полуплоскости от точки K_* по (1.5) $U>0$ монотонно уменьшается, а $\mathrm{Im}\Omega_1>0$ монотонно увеличивается, поскольку вдоль хребта

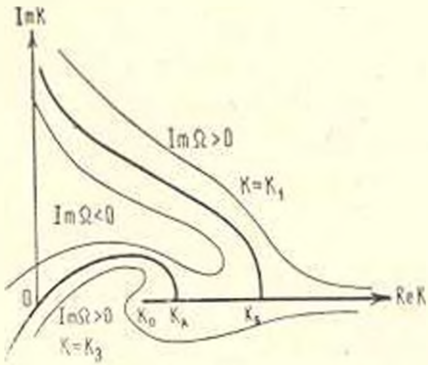
$$\frac{d\Omega}{dK}=\frac{d\Omega_0}{dK}-U-K\frac{dU}{dK}=-K\frac{dU}{dK},\quad d\operatorname{Im}\Omega=-\operatorname{Im}K\,dU$$

Значению $U=0$ соответствует действительная седловая точка $K_*=K_0\sqrt{2}$, в ней $\operatorname{Im}\Omega_{1s}$ достигает максимального значения, равного $K_0^2/2$.

Смещая контур интегрирования с действительной оси и проводя его через перевальную точку, найдем, что при $|U|<U_*$ интеграл (1.3) бесконечно растет со временем, так как $\operatorname{Im}\Omega_1(U, K_s)>0$. Линии уровня $\operatorname{Im}\Omega_1=\mathrm{const}\geqslant 0$ для $0<U<U_*$ показаны на фиг. 1. Контур интегрирования обозначен штриховой линией, пунктиром указан комплексный хребет. Жирно выделены линии $\operatorname{Im}\Omega_1=0$. (На линиях F_1E_1 и F_2E_2 $\operatorname{Re}\Omega_1=\mathrm{const}$ и эти линии потребуются в п. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

При $|U|>U_*$ существует линия уровня $\operatorname{Im}\Omega_1=0$, соединяющая точку $K=0$ с точкой действительного хребта $[K_0,\infty)$, поэтому интеграл (1.3) при $t\to\infty$ стремится к нулю. На фиг. 2 представлены линии $\operatorname{Im}\Omega_1=\mathrm{const}$ для $U>U_*$. Жирно выделены линии $\operatorname{Im}\Omega_1=0$.

В плоскости x, t растущие возмущения находятся в секторе, ограниченном лучами $x=u_+t$ и $x=u_-t$, где $u_+=(\beta_2+U_*)v$, а $u_-=(\beta_2-U_*)v$. Если $\rho_2<8\rho_1$, то $u_+>0$, $u_-<0$ и ось t проходит внутри указанного сектора, так что при $t\to\infty$ прогиб неограниченно растет в любой точке трубы. Если $\rho_2>8\rho_1$, то $u_+>0$, $u_->0$ и возмущение прогиба в любой фиксированной точке трубы асимптотически затухает, то есть имеет место конвективная неустойчивость.

Таким образом, критическое условие, разделяющее абсолютную и конвективную неустойчивости, возникающие при движении жидкости в бесконечно длинной трубе, имеет вид: $\rho_2/\rho_1=8$. В массивной трубе при $\rho_1>\rho_2/8$ неустойчивость будет абсолютной, а при течении более массивной жидкости с $\rho_2>8\rho_1$ неустойчивость трубы будет конвективной.

2. Изучим теперь устойчивость достаточно длинной, но конечной трубы.

Для выяснения вопроса о глобальной устойчивости или неустойчивости рассмотрим поведение корней $K(\Omega)$ дисперсионного уравнения (1.2) при изменении Ω и параметра U.

Для значений Ω с $\mathrm{Im}\Omega\to\infty$ четыре корня $K(\Omega)$ разделяются на K_1, K_2 с $\mathrm{Im}K>0$ (они соответствуют волнам, идущим направо, $r=1, 2$) и K_3, K_4 с $\mathrm{Im}K<0$ (волны, идущие налево, $l=3, 4$). Нумерация корней выбрана так, что $\mathrm{Re}K_1>0$; $\mathrm{Re}K_3>0$ при $\mathrm{Im}\Omega\to\infty$.

Дисперсионному уравнению наряду с корнями iK, $-i\Omega$ удовлетворяют комплексно-сопряженные корни, поэтому

$$\hat{K}_2(\hat{\Omega})=K_1(\Omega), \qquad \hat{K}_4(\hat{\Omega})=K_3(\Omega) \tag{2.1}$$

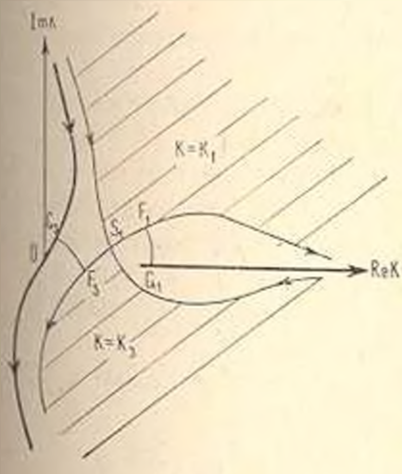
где крышкой обозначена операция изменения знака действительной части комплексной величины $\hat{a}=-\mathrm{Re}a+i\mathrm{Im}a$. Для достаточно больших значений $\mathrm{Im}\Omega>0$ корням K_1, K_3 соответствует ветвь Ω_1, а корням K_2, K_4 — ветвь Ω_2. Как было показано в п. 1, при $|U|<U_*$ в правой полуплоскости K имеется комплексная седловая точка S_1, в которой $\mathrm{Im}\Omega_1=C>0$, $C=C(U)$. В ней сливаются корни K_1 и K_3. В соответствии со свойствами (2.1) корней $K(\Omega)$ существует вторая седловая точка S_2, симметричная относительно мнимой оси (и лежащая на втором листе плоскости K), в которой сливаются корни K_2, K_4 при том же значении $\mathrm{Im}\Omega_2=C$.

Рассмотрим соответствие комплексных плоскостей Ω и K и покажем, что при всех значениях U часть, по крайней мере, одной из линий L_{rl} ($r=1, 2$; $l=3, 4$), задаваемых уравнениями (0.5), лежит в верхней полуплоскости Ω, то есть как сказано выше, имеет место глобальная неустойчивость.

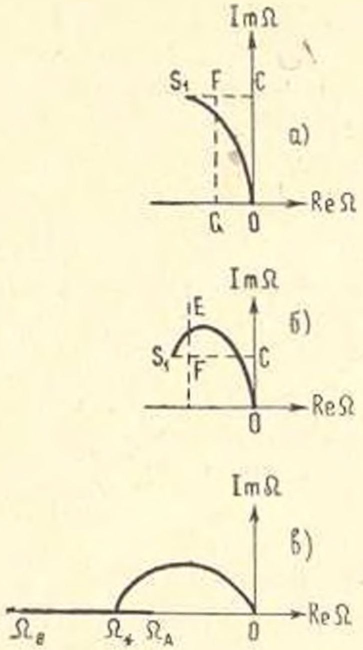
В плоскости K линии уровня $\mathrm{Im}\Omega_1=C$ для малых значений $U>0$ показаны на фиг. 3. Жирно выделены линии $\mathrm{Im}\Omega_1=0$. Линии $\mathrm{Re}\Omega_1=\mathrm{const}$ ортогональны линиям $\mathrm{Im}\Omega_1=\mathrm{const}$, направление роста $\mathrm{Re}\Omega_1$ на линиях $\mathrm{Im}\Omega_1=\mathrm{const}$ указано стрелками. Заштрихованы области значений K, для которых $\mathrm{Im}\Omega_1>C$. В седловой точке S_1 $\mathrm{Re}\Omega_1<0$.

Проследим, где в плоскости Ω выполняется равенство (0.5) для $r=1$, $l=3$. Рассмотрим в этой плоскости точку F, для которой $\mathrm{Im}\Omega_F=C$, $0\geqslant\mathrm{Re}\Omega_F>\mathrm{Re}\Omega_S$ (фиг. 4а). На фиг. 3 ей отвечают две точки F_1 и F_3, соответствующие $K_1(\Omega)$ и $K_3(\Omega)$. Не меняя значения $\mathrm{Re}\Omega=\mathrm{Re}\Omega_F$, будем уменьшать $\mathrm{Im}\Omega$ от C до нуля, тогда $K_1(\Omega)$ будет двигаться по линии F_1G_1 вниз, а $K_3(\Omega)$ — по линии F_3G_3 вверх (фиг. 3) (точки G_1, G_3 лежат на линиях $\mathrm{Im}\Omega_1=0$). Поскольку в точках F_1, F_3 $\mathrm{Im}K_1>\mathrm{Im}K_3$, а в точках G_1, G_3 $\mathrm{Im}K_1<\mathrm{Im}K_3$, то при некотором значении $0<\mathrm{Im}\Omega_1<C$ получим $\mathrm{Im}K_1=\mathrm{Im}K_3$. Рассмотрев аналогично всевозможные точки F, для которых $\mathrm{Im}\Omega_1=C$, $\mathrm{Re}\Omega_1<0$, найдем, что часть линии L_{13} лежит в верхней полуплоскости Ω (фиг. 4а). Она соединяет точку ветвления S_1 с точкой $\Omega=0$. Для значений Ω с $\mathrm{Re}\Omega>0$ $\mathrm{Im}K_1>0$, а $\mathrm{Im}K_3<0$, поэтому L_{13} из II четверти продолжается только в нижнюю полуплоскость Ω.

Изучим, как деформируется линия L_{13} при изменении $|U|$. От знака U вид линий L_{kl} не зависит в силу замечания п. 1.



Фиг. 3



Фиг. 4

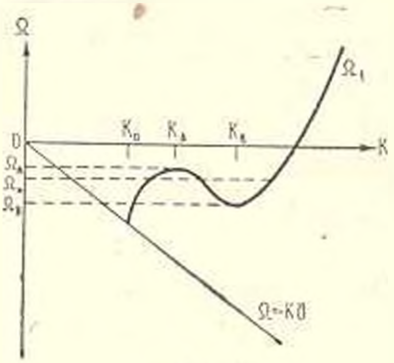
При $U=0$ седловая точка S_1 лежит на действительной оси K и в ней $\mathrm{Re}\,\Omega_1=0$, $\mathrm{Im}\,\Omega_1=K_1^2/2$. Крестовина, изображающая линии уровня в окрестности седловой точки образует с осями $\mathrm{Re}K$, $\mathrm{Im}K$ углы в 45°. В плоскости Ω линия L_{13} совпадает с отрезком оси $\mathrm{Im}\,\Omega$.

С ростом $|U|$ седловая точка движется по комплексному хребту (1.5). $|\mathrm{Re}\,\Omega_1|$ в ней увеличивается, $\mathrm{Im}\,\Omega_1>0$ уменьшается, а крестовина линий уровня в плоскости K поворачивается. При $|U|=U_0=\sqrt{3}K_0$ она становится параллельной координатным осям (U_0 находится из дополнительного условия $\mathrm{Im}\,d^2\Omega/dK^2=0$). Качественная картина линий $\mathrm{Im}\,\Omega_1=\mathrm{const}>0$ в плоскости K для $U_0<U<U_*$ представлена на фиг. 1.

При $U_0<U<U_*$ точке F, лежащей в плоскости Ω несколько правее точки S_1 на прямой $\mathrm{Im}\,\Omega=C$ (фиг. 4б), соответствуют значения K_1 и K_3 (точки F_1 и F_3 на фиг. 1) такие, что $\mathrm{Im}K_1<\mathrm{Im}K_3$. При увеличении $\mathrm{Im}\,\Omega$ вдоль линии $\mathrm{Re}\,\Omega=\mathrm{Re}\,\Omega_F$ точка K_1 движется вверх, а точка K_3 движется вниз, и при некотором значении $\mathrm{Im}\,\Omega>C$ мнимые части K_1 и K_3 совпадут, то есть выполнится равенство (0.5). Рассмотрев аналогично все возможные точки F, для которых $\mathrm{Im}\,\Omega_F=C$, $0>\mathrm{Re}\,\Omega_F$, получим, что кривая L_{13} начинается из точки S_1 и проходит через $\Omega=0$, причем часть ее лежит в области $\mathrm{Im}\,\Omega>\mathrm{Im}\,\Omega_1$ (фиг. 4б). Таким образом, для $U_0<|U|<U_*$ инкремент глобальной неустойчивости оказывается большим, чем инкремент абсолютной неустойчивости.

Рассмотрим $|U|>U_*$ и покажем, что хотя неустойчивость в бесконечно длинной трубе в этом случае конвективна, в достаточно протяженной, но конечной трубе глобальная неустойчивость имеет место для всех значений U.

Из фиг. 2 видно, что для действительных K, лежащих на верхнем береге разреза $[K_0, \infty)$, $K=K_3$ для $K\in[K_0, K_A]$ и $K=K_1$ для $K\in[K_B, \infty)$.



Фиг. 5

Рассмотрим зависимость Ω_1 от действительных K, лежащих на верхнем береге разреза, при $|U|>U_*$ (фиг. 5). Поскольку $d\Omega/dK$ на $[K_0, K_A]$ монотонно уменьшается от ∞ до 0, а на $[K_B, \infty]$ монотонно увеличивается от 0 до ∞, то существует такое действительное значение Ω_*, которому соответствуют точки $K_{1*}\in[K_0, K_A]$ и $K_{3*}\in[K_B, \infty)$ такие, что $(d\Omega/dK)_{K_{1*}}=(d\Omega/dK)_{K_{3*}}$.

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора $K_1(\Omega)$ и $K_3(\Omega)$, лежащих в малой окрестности точки Ω_*, найдем

$$\operatorname{Im}(K_1-K_3)=N\operatorname{Im}(\Omega-\Omega_*)^2,\quad N=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\Omega^2}\right)_{K_{1*}}-\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\Omega^2}\right)_{K_{3*}}\right|$$

Отсюда следует, что в малой окрестности точки Ω_* равенство (0.5) для $r=1$, $l=3$ выполняется на двух взаимноперпендикулярных линиях $\operatorname{Re}\Omega=\operatorname{Re}\Omega_*$ и $\operatorname{Im}\Omega=\operatorname{Im}\Omega_*=0$, то есть из точки Ω_* линия L_{13} с вертикальной касательной уходит в верхнюю полуплоскость (фиг. 4в). Если $U\to\infty$, то $K_A\to K_0$, $K_B\to\infty$, $\Omega_*\to -K_0U\to-\infty$, $\Omega_1-\Omega_*\to 0$, а максимум $\operatorname{Im}\Omega$ на линии L_{13}, как можно показать, остается конечным и стремится к $K_0^2/4$.

На фиг. 4а, 4б, 4в для различных значений U изображена часть линии L_{13}, лежащая в верхней полуплоскости Ω, и равенство (0.5) выполнено на ней для $\operatorname{Im}\Omega_1>0$. Нижняя часть линии L_{13} расположена симметрично относительно действительной оси Ω.

Проводя аналогичные рассуждения для корней K_2, K_4, найдем, что линия L_{24} лежит в правой полуплоскости Ω и симметрична L_{13} относительно мнимой оси Ω.

Проведенного исследования линии L_{13} достаточно для выводов о глобальной неустойчивости. Однако, приведем без доказательства результаты относительно линий L_{14} и L_{23} на плоскости Ω, соответствующих $r=1$, $l=4$ и $r=2$, $l=3$ в уравнении (0.5).

Согласно (2.1) эти линии расположены симметрично относительно мнимой оси Ω. Существует значение $0<U_1<U_*$ такое, что при $|U|>U_1$ $\max\operatorname{Im}\Omega$ на L_{14} больше $\max\operatorname{Im}\Omega$ на L_{13}. При $U\to\infty$ $\max\operatorname{Im}\Omega$ на L_{14}, так же, как и на L_{13}, стремится к $K_0^2/4$. При $|U|<U_1$ $\max\operatorname{Im}\Omega$ на линии L_{14} меньше, чем на линии L_{13}, где он достигается в седло-

вой точке. Отсюда следует, что в зависимости от соотношения масс трубы и жидкости растущая собственная функция может образовываться как на волнах, соответствующих $K_1(\Omega)$ и $K_3(\Omega)$ (или $K_2(\Omega)$ и $K_4(\Omega)$), так и на волнах, соответствующих $K_1(\Omega)$ и $K_4(\Omega)$ (или $K_2(\Omega)$ и $K_3(\Omega)$).

Таким образом, показано, что линия (0.3), определяющая глобальные собственные частоты, при всех значениях U лежит в верхней полуплоскости Ω. Следовательно, во всех системах координат, движущихся с постоянными скоростями, и, в частности, в системе, связанной с трубой, имеется глобальная неустойчивость.

ON BENDING VIBRATIONS OF A LONG TUBE WITH MOVING FLUID

A. G. KULIKOVSKY, I. S. SHIKINA

ՇԱՐԺՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՑՎԱԾ ԵՐԿԱՐ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԾՌՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԿՈՒԼԻԿՈՎՍԿԻ, Ի. Ս. ՇԻԿԻՆԱ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մեծ ժամանակահատվածների ընթացքում առաձգական խողովակի ծկվածքի փոքր, սկզբում տեղայնացված գրգռման ասիմպտոտիկ վարքը, երբ խողովակով հաստատուն արագությամբ հեղուկ է հոսում։

Ցույց է տրվում, որ գրգռված տիրույթը, որտեղ ծկվածքը աճում է, տարածվում է խողովակով և գտնված են այդ տիրույթի սահմանները։

Անվերջ երկար խողովակի համար դուրս է բերված բացարձակ և կոնվեկտիվ անկայունության հայտանիշը։

Ցույց է տրված, որ վերջավոր, բայց բավականաչափ երկար խողովակի համար միշտ տեղի ունի անկայունություն, կապված ծռման տատանումների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В. И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.—Инж. сборник, 1951, т. *10*, с. 169—170.
2. *Мовчан А. А.* Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.—ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 760—762.
3. *Paltoussis M. P.* and *Issid N. T.* Dynamic Stability of pipes conveying fluid.—J. of Sound and Vibration. 1974, vol. 33, № 3, p. 267—294.
4. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
5. *Ахиезер А. И.*, Половин Р. В. Критерии нарастания волн.—Усп. физ. наук, 1971, т. 104, вып. 2, с. 185—200.
6. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний.—ПММ, 1966, т. *30*, вып. 1, с. 148—153.
7. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981. 307 с.

Московский Государственный
университет

Поступила в редакцию
29.V.19

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 539.375

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ (ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ)[1]

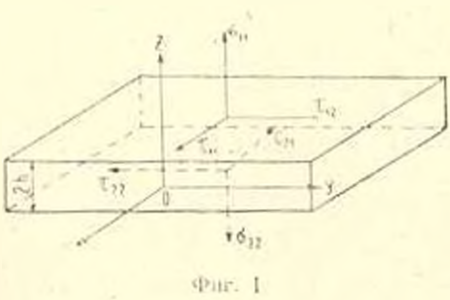
КОВАЛЕНКО Е. В.

В настоящее время исследование контактных задач для тел с покрытиями представляет собой актуальную прикладную проблему. С одной стороны, практика современного машиностроения все в большей степени подчеркивает определяющее значение поверхностной прочности в проблеме надежности работы машин и механизмов. С другой стороны, такие задачи встречаются при расчетах различных сооружений и конструкций, как например, аэродромных и дорожных покрытий, ледовых переправ, фундаментов зданий и т. д.

В работе приводятся: 1) уточненные уравнения пространственного деформирования тонких покрытий (пластин); 2) постановки и методы решения контактных задач для тел с покрытиями; 3) алгоритмы исследования контактных задач для тел с покрытиями с учетом износа последних.

Изучается влияние различных механических факторов на основные характеристики явления контактного взаимодействия тел.

1. Прежде чем перейти к постановке контактных задач, приведем уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние тонких[2] покрытий (фиг. 1), одновременно учитывающие как продольные и поперечные деформации растяжения и сдвига, так и их деформации изгиба и сжатия



Фиг. 1

$$4Gh^2\Delta^2 u = \frac{\partial}{\partial x}A_1^+(\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2^+(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_1^+(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A_2^+(\tau_2) \qquad (1.1)$$

$$4Gh^2\Delta^2 v = \frac{\partial}{\partial y}A_1^+(\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2^+(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_2^+(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A_1^+(\tau_1) \qquad (1.2)$$

---

[1] Работа докладывалась на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 1986).

[2] Пусть Ω — область активного нагружения слоя, то есть такая область, где поверхностные нагрузки составляют, например, не менее 5% от их максимальных значений. Если Ω односвязна, выпукла и ограничена, то $\lambda = hl^{-1} \ll 1$, где $l = 1/2 \max\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, $(x, y)\in\Omega$, $(\xi, \eta)\in\Omega$.

$$4Gh^3\Delta^2 w_\pm = B_1^\pm(\sigma) + \frac{\partial}{\partial x}B_2^\pm(\tau_1) + \frac{\partial}{\partial y}B_2^\pm(\tau_2) \tag{1.3}$$

Здесь обозначено (положительные направления внешних усилий указаны на фиг. 1)

$$u_\pm = u(x, y, \pm h),\quad v_\pm = v(x, y, \pm h),\quad w_\pm = w(x, y, \pm h)$$

$$A_1^\pm(f) = \mp 3(1-\nu)f^- \pm (2-3\nu)h^2\Delta f^- - h^2\Delta f^+$$

$$A_2^\pm(f) = (1-\nu)h(-f^- \mp 3f^+ + 6/5h^2\Delta f^- \pm 2h^2\Delta f^+)$$

$$A_3^\pm(f) = 2h(-f^- + 13/15\,h^2\Delta f^- \pm h^2\Delta f^+)$$

$$A_4^\pm(f) = h\left[(1+\nu)f^- \pm 3(1-\nu)f^+ - \frac{2(4+9\nu)}{15}h^2\Delta f^- \mp 2\nu h^2\Delta f^+\right]$$

$$B_1^\pm(f) = 3(1-\nu)\left(f^- - \frac{4}{3}h^2\Delta f^- + \frac{11}{15}h^4\Delta^2 f^- \pm \frac{1}{3}h^4\Delta^2 f^+\right)$$

$$B_2^\pm(f) = \pm\nu h^3\Delta f^- + 3h(1-\nu)f^+ - (2-3\nu)h^3\Delta f^+$$

$$f = \{f^-, f^+\},\quad \sigma = \{\sigma^-, \sigma^+\},\quad \sigma^\pm = \sigma_1 \pm \sigma_2,\quad \tau_j = \{\tau_j^-, \tau_j^+\},\quad \tau_j^\pm = \tau_{1j} \pm \tau_{2j} \quad (j=1, 2)$$

Такие уравнения могут быть получены путем асимптотического анализа точного решения первой основной задачи теории упругости для слоя.

Если при выводе уравнений (1.1)—(1.3), вследствие малости параметра $\varepsilon = hl^{-1}$ провести усреднение перемещений по толщине, то придем к следующим упрощенным уравнениям деформирования покрытий (пластин)

$$4Gh\Delta^2 u_* = \frac{\partial}{\partial x}A_1(\sigma^+) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2(\tau_1^-) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_3(\tau_1^-) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A_4(\tau_2^-) \tag{1.4}$$

$$4Gh\Delta^2 v_* = \frac{\partial}{\partial y}A_1(\sigma^+) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_3(\tau_2^-) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_2(\tau_2^-) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A_4(\tau_1^-) \tag{1.5}$$

$$4Gh^3\Delta^2 w_* = B_1(\sigma^-) + \frac{\partial}{\partial x}B_2(\tau_1^+) + \frac{\partial}{\partial y}B_2(\tau_2^+) \tag{1.6}$$

$$A_1(f) = -\nu h\Delta f,\quad A_2(f) = -(1-\nu)f + \frac{1-2\nu}{3}h^2\Delta f,\quad A_3(f) = -2f + \frac{1}{3}h^2\Delta f$$

$$A_4(f) = (1+\nu)f - \frac{1+2\nu}{3}h^2\Delta f,\quad B_1(f) = 3(1-\nu)f - (3-2\nu)h^2\Delta f + \frac{3-2\nu}{5}h^4\Delta^2 f$$

$$B_2(f) = 3(1-\nu)hf - (1-\nu)h^3\Delta f$$

которые в отличие от (1.1)—(1.3) не учитывают эффекта поперечного обжатия покрытия.

Соотношения (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.6) есть уточненные дифференциальные уравнения деформирования тонких пластин. Заметим, что уравнения всех классических теорий деформирования тонкостенных упругих элементов [1] получаются из (1.1)—(1.6) как частные случаи. Действительно, пренебрегая в правой части (1.3) (либо (1.6)) слагаемыми порядка λ^2 и выше, придем к модели пластинки типа Кирхгофа-Лява. Если же в (1.3) или в (1.6) отбросить лишь слагаемые $O(\lambda^4)$, то получим уравнения теории типа Рейсснера-Тимошенко. Опуская еще в левой и правой частях соотношения (1.3) слагаемые порядка λ^2 и выше (то есть изгибной жесткостью покрытия пренебрегаем), а в правой части (1.1) и (1.2) члены $O(\lambda^1)$ и преобразуя два последующих выражения при помощи первого, найдем

$$4Gh\Delta^2 u_{\pm} = -\nu h\Delta\frac{\partial\sigma^*}{\partial x} - \Delta\tau_1 - \nu\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x^2} + (1+\nu)\frac{\partial^2\tau_2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\tau_1}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

$$4Gh\Delta^2 v_{\pm} = -\nu h\Delta\frac{\partial\sigma^*}{\partial y} - \Delta\tau_2 + \nu\frac{\partial^2\tau_2}{\partial y^2} + (1+\nu)\frac{\partial^2\tau_1}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\tau_2}{\partial x^2}$$

$$\sigma^* = -h\left(\frac{\partial\tau_1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_2}{\partial y}\right)$$

Соотношения (1.7) представляют собой уравнения пространственного деформирования накладки Мелана.

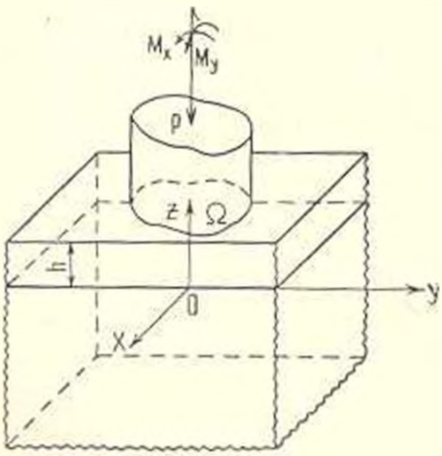
В частном случае $\tau_i = u_- = v_- = w_- = 0$ из (1.1)—(1.3) с точностью до членов $O(\lambda)$ получим уравнение основания Фусса-Винклера с одним коэффициентом постели

$$Gw_- = (1-2\nu)(1-\nu)^{-1}h\tau_1, \quad \tau_1 = \tau_2 \tag{1.8}$$

Если при выводе (1.1)—(1.3) удержать члены порядка λ^2, то вместо (1.8) можно получить уравнения основания Пастернака-Власова с двумя коэффициентами постели [2].

И еще, использование уравнений (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.6) при решении контактных задач для тонких покрытий не приводит, как при использовании уравнений классических теорий (Рейсснера-Тимошенко, Кирхгофа-Лява), к появлению на границах сопряжения участков сосредоточенных усилий или моментов.

2. Рассмотрим теперь контактную задачу о вдавливании без трения силой P и моментами M_x, M_y жесткого штампа в составное основание, представляющее собой упругое (G_2, ν_2) полупространство, армированное относительно тонким ($\lambda = hl^{-1} \ll 1$) упругим (G_1, ν_1) слоем толщины h, жестко соединенным с ним (фиг. 2). Физико-механические свойства полупространства будем описывать уравнениями теории упругости (уравнениями Ламе), а покрытия—уравнениями (1.1)—(1.3) или (1.4)—(1.6). Тогда при помощи



Фиг. 2

интегрального преобразования Фурье поставленная задача сводится к определению контактных давлений $q(x, y)$ из интегрального уравнения первого рода вида

$$\iint\limits_{\Omega} q(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{h}\right) d\xi d\eta = 2\pi\theta_2 g(x, y), \quad (x, y)\in\Omega, \quad R=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} \tag{2.1}$$

$$k\left(\frac{R}{h}\right) = \int\limits_0^{\infty} L(u)\, J_0\left(\frac{uR}{h}\right) du \tag{2.2}$$

в котором $g(x, y)$ – функция осадки линейно-деформируемого основания, определяемая формой основания штампа и его жестким смещением

$$nL(u) = \left(\sum_{j=0}^{4} a_{ij}u^j\right)\left(\sum_{j=0}^{4} b_{ij}u^j\right)^{-1} \tag{2.3}$$

$$a_{i0}=n, \quad b_{i0}=1 \quad (i=1, 2)$$

$$a_{11}=2[(1-\varepsilon_2^2)n^2-\varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)n+\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)], \quad a_{12}=32/15\, n$$

$$a_{13}=1/6\,[4(1-\varepsilon_2^2)n^2-\varepsilon_2(1-8\varepsilon_1)n+\varepsilon_1(1-4\varepsilon_1)+39/10] \tag{2.4}$$

$$a_{14}=17/60\, n, \quad b_{11}=2n, \quad b_{12}=2(\varepsilon_2 n-\varepsilon_1+16/15), \quad b_{13}=4/3\, n$$

$$b_{14}=1/3[(1-\varepsilon_2^2)n^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2 n-\varepsilon_1^2+8/5]$$

$$a_{21}=2(1-\varepsilon_2^2)n^2-\varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)n, \quad a_{22}=(1+2\varepsilon_1)n/12$$

$$a_{23}=1/6(2-\varepsilon_1)n[2n(1-\varepsilon_2^2)-\varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)], \quad a_{24}=\frac{n}{36}\left(\varepsilon_1^2-\frac{3+16\varepsilon_1}{20}\right) \tag{2.5}$$

$$b_{21}=b_{11}, \quad b_{22}=\varepsilon_2 n-1/6(5\varepsilon_1-7/2), \quad b_{23}=1/6(5-2\varepsilon_1)n$$

$$b_{24}=1/6[2(1-\varepsilon_2^2)n^2+\varepsilon_1\varepsilon_2 n]+1/6(\varepsilon_1^2-19/5\,\varepsilon_1+27/20)$$

Здесь формулы (2.4) и (2.5) соответствуют случаям, когда физико-механические свойства тонкого верхнего слоя моделируются уравнениями (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.6).

В (2.1)—(2.5) обозначено

$$\varkappa=\theta_1\theta_2^{-1}, \quad \theta_i=G_i(1-\nu_i)^{-1}, \quad \varepsilon_i=1/2(1-2\nu_i)(1-\nu_i)^{-1} \quad (i=1, 2)$$

Для замыкания постановки контактной задачи о вдавливании штампа в двухслойное основание к интегральному уравнению (2.1)—(2.3) необходимо еще добавить очевидные условия статики

$$P=\iint\limits_{\Omega} q(x, y)dxdy, \quad \{M_x, M_y\}=\iint\limits_{\Omega}\{y, x\}q(x, y)dxdy$$

Остановимся теперь на асимптотическом анализе [3] рассматриваемой контактной задачи, считая

$$n\sim\lambda^m \quad (\lambda\to 0) \tag{2.6}$$

где при $m>0$ жесткость ложемента (упругого полупространства) больше жесткости покрытия, а при $m<0$ наоборот, жесткость полупространства меньше жесткости верхнего упругого слоя.

При проведении дальнейших рассуждений будем подразумевать, что в формулах (2.2), (2.3) совершен переход к новой переменной $u=u'\lambda$ и штрих у нее опущен.

Если $m>0$, то вносся (2.6) в (2.3), (2.4) и пренебрегая в полученном выражении слагаемыми порядка λ^2 и выше, придем к соотношению

$$nL(u)=n+2\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)u \tag{2.7}$$

что соответствует трансформанте Фурье ядра интегрального уравнения (2.1), когда покрытие работает по типу основания Фусса-Винклера (1.8). Если же $m\geqslant5$, то с точностью до членов $O(\lambda^4)$ из (2.3), (2.4) получим символ ядра контактной задачи для защемленного по нижней грани слоя, лежащего на жестком основании.

Изучим далее случаи, когда жесткость покрытия больше жесткости ложемента. Пусть в (2.6) $m=-1$. Подставляя (2.6) в (2.3), (2.4) с точностью до членов $O(\lambda^3)$, получим выражения (2.3), (2.5), т. е. в этом случае в качестве модели покрытия можно выбрать уравнения (1.4) — (1.6) (показано также [3], что с точностью до членов порядка λ^3 физико-механические свойства покрытия можно описывать уравнениями типа Рейсснера-Тимошенко). Отбрасывая же члены $O(\lambda^2)$ и выше, будем иметь

$$L(u)=\frac{1+2n(1-\varepsilon^2)u}{1+2nu} \tag{2.8}$$

что указывает на то, что покрытие работает по типу накладки (1.7). При $m\leqslant-2$ из (2.3), (2.5), (2.6) с точностью до членов $O(\lambda^2)$ заключаем, что физико-механические свойства покрытия можно моделировать при помощи уравнений типа Кирхгофа-Лява.

И вообще, при $m>0$ с точностью до членов $O(\lambda^4)$, а при $m<0$ с точностью до членов порядка λ^3, как показывает асимптотический анализ, проведенный с использованием формул теории упругости [3], физико-механические свойства покрытия следует описывать уравнениями (1.1) — (1.3).

Таким образом, приведенный асимптотический анализ дает возможность выбирать приближенные модели для описания свойств покрытий в зависимости от соотношений физико-механических и геометрических характеристик относительно тонкого упругого слоя и массивного тела, что в некоторых случаях проще, чем использование уравнений теории упругости, поскольку позволяет решить ряд задач для тел с покрытиями в замкнутом виде.

3. Приведем теперь алгоритм решения интегрального уравнения (2.1) — (2.3) на примере осесимметричной задачи для кольцевого в

плане штампа ($\Omega: b\leqslant r\leqslant a$). Ограничимся ниже рассмотрением двух предельных случаев (2.7) и (2.8). Вводя безразмерные переменные $\rho'=\rho a^{-1}$, $r'=ra^{-1}$ и обозначения $c=ba^{-1}$, $\varphi(r')=q(r)\theta_2^{-1}$, $g'(r')=g(r)a^{-1}$, $\lambda=ha^{-1}$, $\Lambda=2\lambda$, $N_0=P(\theta_2 a)^{-1}$, $l=(1-\nu_2^2)^{-1}$, преобразуем (2.1)—(2.3) соответственно для вариантов (2.7) и (2.8) к виду ($K(k)$—полный эллиптический интеграл первого рода)

$$\mu\varphi(r)+\frac{2}{\pi}\int_c^1\varphi(\rho)K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)\frac{\rho\,d\rho}{\rho+r}=g(r),\quad (c\leqslant r\leqslant 1,\ \mu=2\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)\lambda a^{-1}) \tag{3.1}$$

$$\int_c^1\varphi(\rho)\rho k\left(\frac{\rho}{\Lambda},\frac{r}{\Lambda}\right)d\rho=\Lambda l g(r)\qquad (c\leqslant r\leqslant 1) \tag{3.2}$$

$$k\left(\frac{\rho}{\Lambda},\frac{r}{\Lambda}\right)=\int_0^\infty\frac{l+u}{u+1}J_0\left(\frac{u}{\Lambda}\rho\right)J_0\left(\frac{u}{\Lambda}r\right)du \tag{3.3}$$

Штрих здесь и ниже опустим. Заметим, что имеют место следующие теоремы [4, 5].

Теорема 1. *Оператор*

$$H_1\varphi=\frac{2}{\pi}\int_c^1\varphi(\rho)K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)\frac{\rho\,d\rho}{\rho+r} \tag{3.4}$$

является вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. *Оператор*

$$H_2\varphi=\int_c^1\varphi(\rho)\rho k\left(\frac{\rho}{\Lambda},\frac{r}{\Lambda}\right)d\rho \tag{3.5}$$

где $k(\rho\Lambda^{-1}, r\Lambda^{-1})$ дается формулой (3.3), *является вполне непрерывным и положительно определенным, действующим в $L_{2,1/2}(\Omega)$.*

Здесь $L_2(\Omega)$ и $L_{2,1/2}(\Omega)$ —гильбертовы пространства квадратично суммируемых соответственно с весом 1 и $[(1-r^2)(r^2-c^2)]^{-1/2}$ по области Ω функций.

Из теорем 1 и 2 следует [6]: 1) системы собственных функций $\{\varphi_n^{(j)}(r)\}$ ($n=1, 2, \ldots$) операторов $H_j\varphi$ ($j=1, 2$) ортонормированы и полны в $L_2(\Omega)$ ($j=1$) и в $L_{2,1/2}(\Omega)$ ($j=2$); 2) собственные числа $\gamma_n^{(j)}$ операторов $H_j\varphi$ вещественны, положительны и $\gamma_1^{(j)}>\gamma_2^{(j)}>\ldots>\gamma_n^{(j)}>\ldots>0$, $\gamma_n^{(j)}\to 0$ ($n\to\infty$) (как правило, в смешанных задачах механики сплошных сред [5] собственные числа интегральных операторов не бывают кратными).

Для построения собственных чисел и соответствующих им собственных функций можно воспользоваться, например, методом Ритца

[7], взяв в качестве последовательностей координатных функций в первом случае систему

$$\{P_n^*(r)\}\ (n=0,1,2,\ldots),\ P_n^*(r)=\sqrt{\frac{4n+2}{1-c^2}}\,P_n\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}-\frac{2}{1-c^2}r^2\right)$$

а во втором

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}T_{2n}\left(\sqrt{\frac{r^2-c^2}{1-c^2}}\right)\right\}\quad(n=0,1,2\ldots)$$

где $P_n(x)$ и $T_n(x)$ — полиномы Лежандра и Чебышева. Определив $\{\lambda_n^{(i)}\}$ и $\{\varphi_n^{(i)}(r)\}$ будем разыскивать решения интегральных уравнений (3.1) и (3.2) в формах

$$\varphi_1(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}\varphi_n^{(1)}(r),\quad \varphi_2(r)=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-c^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(2)}\varphi_n^{(2)}(r)\tag{3.6}$$

Разлагая еще правые части в (3.1) и (3.2) в ряды вида

$$g_i(r)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(i)}\varphi_n^{(i)}(r)$$

$$b_n^{(1)}=\int_c^1 g_1(r)\varphi_n^{(1)}(r)\,rdr,\quad b_n^{(2)}=\int_c^1\frac{g_2(r)rdr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-c^2)}}\tag{3.7}$$

подставляя (3.6), (3.7) в (3.1), (3.2) и приравнивая в полученных соотношениях коэффициенты при собственных функциях операторов $H_i\varphi$ $(i=1,2)$ одинакового номера, найдем

$$a_n^{(1)}=\frac{b_n^{(1)}}{\mu+\lambda_n^{(1)}},\quad a_n^{(2)}=M\frac{b_n^{(2)}}{\lambda_n^{(2)}}\tag{3.8}$$

и, таким образом, построим решения исходных интегральных уравнений в формах (3.6)—(3.8).

4. Коснемся еще контактных задач с износом. Как известно [8, 9], осесимметричная контактная задача при наличии абразивного износа о вдавливании кольцевого в плане штампа $(c\leqslant r\leqslant 1)$ в упругое полупространство, армированное тонким покрытием (фиг. 3), в безразмерных переменных и с учетом обозначений, введенных в [8], сводится к интегральному уравнению

$$\mu\varphi(r,t)+\frac{2}{\pi}\int_c^1\varphi(\rho,t)K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)\frac{\rho d\rho}{\rho+r}=$$

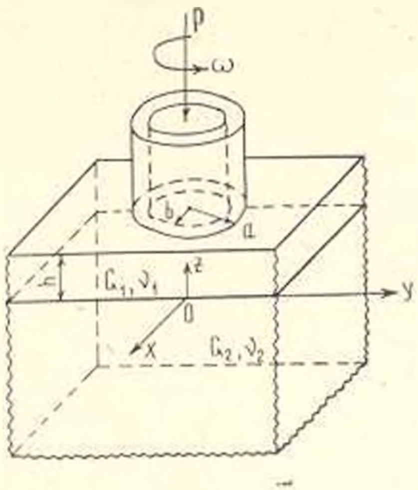
$$=\gamma(t)-f(r)-r\int_0^t\varphi(r,\tau)d\tau\quad(c\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T<\infty)\tag{4.1}$$

когда покрытие «мягче» ложемента и к уравнению

$$\frac{1}{M}\int_c^1 \varphi(\rho, t)\rho k\left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right)d\rho = \gamma(t) - f(r) - r\int_0^t \varphi(r, \tau)d\tau \tag{4.2}$$

$$(c \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

когда жесткость покрытия больше жесткости полупространства. Здесь и далее предполагаем, что величина T достаточно большая, но такая, что $\gamma(t)$ имеет порядок перемещений в линейной теории упругости. Уравнения (4.1) и (4.2) имеют место при выполнении условия



Фиг. 3

$$N_0(t) = 2\pi\int_c^1 r\varphi(r, t)dr \tag{4.3}$$

Отмечено [8], что представляют интерес два основных варианта задач (4.1)—(4.3): 1) задается функция $\gamma(t)$, характеризующая перемещение штампа как жесткого целого, находятся контактное давление $\varphi(r, t)$ и сила $N_0(t)$, прижимающая штамп к основанию; 2) задается $N_0(t)$, находятся $\varphi(r, t)$ и $\gamma(t)$. В обоих случаях по формулам (1.2), (1.3) работы [8] затем определяется скорость изнашивания покрытия.

Остановимся вначале на первом варианте системы (4.1), (4.3) и допустим, что жесткое перемещение штампа $\gamma(t)$ изменяется во времени по закону

$$\begin{gathered}\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_\infty t + \gamma_*(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T)\\ \gamma_*(t) \to 0 \quad (t \to \infty); \quad \gamma_0, \gamma_\infty = \mathrm{const}\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если еще потребовать, чтобы $\gamma(t) \in C(0, T)$, то, как показано в [8], контактное напряжение $\varphi(r, t)$ имеет следующую структуру:

$$\varphi(r, t) = r^{-1}\varphi_\infty + \varphi_*(r, t), \quad \varphi_\infty = \gamma_\infty \tag{4.5}$$

причем $\varphi_*(r, t)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$. Это обстоятельство и (4.5) позволяют упростить интегральное уравнение (4.1) следующим образом [10]:

$$\begin{gathered}\mu r\varphi(r, t) + H_1\varphi(\rho, t) = \gamma(t) - f(r) - r\int_0^t \varphi(r, \tau)d\tau - \mu\Phi(r)\\ \Phi(r) = \frac{1-r}{T}\int_0^T \varphi(r, \tau)d\tau \qquad (c \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T)\end{gathered} \tag{4.6}$$

Решение последнего, в предположении задания функции $\gamma(t)$ вида (4.4), сводится [10] к спектральной задаче для оператора H_1 (3.4). При этом, как следует из формулы (1.3), сила $N_0(t)$, прижимающая штамп к основанию, стремится к постоянному значению при $t\to\infty$.

Пусть теперь

$$N_0(t)=N_\infty+N_*(t);\quad N_\infty=\mathrm{const},\quad N_*(t)\to 0\quad (t\to\infty) \tag{4.7}$$

Тогда, на основании вышесказанного, контактное напряжение $\sigma(r,t)$ и осадка $\gamma(t)$ изменяются во времени по законам (4.1), (4.5), причем $N_\infty=2\pi(1-c)\varphi_\infty=2\pi(1-c)\gamma_\infty$, если потребовать в соответствии с условием (4.3) и представлением

$$\sigma_*(r,t)=r^{-1}[\varphi_1(t)+\varphi_2(r,t)] \tag{4.8}$$

чтобы

$$\int_c^1 \varphi_2(r,t)\,dr=0,\qquad 2\pi\int_c^1 \varphi_1(t)\,dr=2\pi(1-c)\varphi_1(t)=N_*(t) \tag{4.9}$$

Перейдем, как и ранее, от интегрального уравнения (1.1) к приближенному уравнению (4.6), которое эквивалентно следующей системе:

$$(\mu+D)[\varphi_1(t)-\varphi_1(0)]+\int_0^t \varphi_1(\tau)\,d\tau=\gamma_*(t)-\gamma_*(0)-\int_c^1[\varphi_2(\rho,t)-\varphi_2(\rho,0)]B(\rho)\,d\rho$$

$$\mu[\varphi_2(r,t)-\varphi_2(r,0)]+\frac{2}{\pi}\int_c^1[\varphi_2(\rho,t)-\varphi_2(\rho,0)]\,k^0(\rho,r)\,d\rho+ \tag{4.10}$$

$$+\int_0^t \varphi_2(r,\tau)\,d\tau=g(r,t)\quad (c\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$$

$$k^0(\rho,r)=\frac{1}{\rho+r}K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)-\frac{\pi}{2}[B(\rho)+B(r)] \tag{4.11}$$

$$g(r,t)=[\varphi_1(t)-\varphi_1(0)][D-(1-c)B(r)],\quad D=(1-c)\int_c^1 B(r)\,dr$$

$$B(\rho)=\frac{2}{\pi(1-c)}\int_c^1 K\left(\frac{2\sqrt{\rho y}}{\rho+y}\right)\frac{dy}{\rho+y}$$

Заметим, что ядро $k^0(\rho,r)$ вида (4.11) симметрично и обладает свойством

$$\int_c^1\int_c^1 \varphi_2(\rho,t)\,k^0(\rho,r)\,d\rho\,dr=0$$

На основании этого и первой формулы (4.9) введем в рассмотрение пространство $L_{c}^{0}(c, 1)$ функций, интегрируемых с квадратом, среднее значение которых на сегменте $[c, 1]$ равно нулю. Можно показать, что $L_2^0(c, 1)$ является подпространством $L_2(c, 1)$.

Теорема 3 [10]. Интегральный оператор

$$H_3\varphi = \frac{2}{\pi}\int_c^1 \varphi(\rho)\,k^0(\rho, r)\,d\rho \tag{4.12}$$

является вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим в $L_2^0(c, 1)$.

Теорема 3 указывает на то, что решение системы (4.10), (4.11) можно построить, используя собственные функции оператора $H_3\varphi$ (4.12), то есть в случае задания силы $N_0(t)$ вида (4.7) решение интегрального уравнения (4.1) сводится к спектральной задаче для оператора $H_3\varphi$ [10].

Аналогичным образом может быть исследовано [10, 11] и интегральное уравнение (4.2), (4.3)

CONTACT PROBLEMS FOR COATED BODIES (SETTING AND METHODS FOR SOLUTION)

E. V. KOVALENKO

ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

Ամփոփում

Շերտի համար առաձգականության տեսության առաջին հիմնական խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծության հիման վրա բերվում են բարակ ծածկույթի ընդհանուր տարածական դեֆորմացման ճշգրտված հավասարումները, որոնց օգնությամբ դրվում են ծածկույթով մարմինների համար կոնտակտային խնդիրներ և բերվում են դրանց լուծման ալգորիթմները: Ուսումնասիրվում են տարբեր մեխանիկական գործոնների ազդեցությունները մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության երևույթի հիմնական բնութագրերի վրա

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.—М.: Наука, 1966 636 с.
2. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании.— М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Асимптотический анализ плоской контактной за-

дачи теории упругости для двухслойного основания.—ПМТФ, 1985, №1, с. 133—138.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В., Марченко С. М.* О двух контактных задачах теории упругости для слоя с покрытием винклеровского типа.—Прикл. механ., 1983, т. *19*, №10, с. 47—54.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.—М.: Наука, 1986. 336 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977. 742 с.
7. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, №5, с. 14—26.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа.—Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №5, с. 58—66.
9. *Галин Л. А., Горячева И. Г.* Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа.—ПММ, 1977, т. *41*, вып. 5, с. 807—812.
10. *Коваленко Е. В.* Исследование осесимметричной контактной задачи об изнашивании пары кольцевой штамп-упругое шероховатое полупространство.—ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 836—843.
11. *Коваленко Е. В.* Об интегральном уравнении контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа.—ПММ, 1984, т. *48*, вып. 5, с. 868—873.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию
4.XII.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 1, 1988 Механика

УДК 539.319

ПРОНИКАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ЖЕСТКУЮ ОПОРУ

МАРТИРОСЯН А. Н.

Задача о распространении давления, заданного на границе упругого или жидкого полупространства, в глубь него изучалась в [1, 2, 3]. Решения краевых задач для анизотропной среды методом Смирнова-Соболева даны в [4], а методом интегральных преобразований — в [5, 6]. Применение методов Смирнова-Соболева и интегральных преобразований к задачам динамической упругости дано в [7, 8, 9]. В настоящей работе рассматривается задача проникания давления в упругую анизотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору. Решение плоской задачи находится методом интегрального преобразования Лапласа и Фурье и решением уравнения Винера-Хопфа, а затем приводится к форме Смирнова-Соболева [7, 8]. Решаются частные задачи об ударной волне, распространяющейся по границе полуплоскости от взрыва на опоре или вне нее.

§ 1. *Возникновение фронта давления на жесткой опоре*

Рассмотрим задачу о проникании давления, которое создается ударной волной от взрыва вне упругой анизотропной полуплоскости. Поскольку упругая среда, а тем более твердая опора намного плотнее воздуха, можно, как в [1], считать, что отражение происходит от твердой границы полуплоскости и что давление на границе среды известно. Вначале рассмотрим более простую задачу о взрыве на опоре в некоторой точке $x=-l$, $l>0$. Фронт ударной волны в момент l/V, где V есть скорость ударной волны, которая как и давление P_1 позади нее постоянны, достигает края опоры и после этого начинается проникание давления в глубь упругой анизотропной среды. Уравнения движения для анизотропной среды в плоском случае имеют вид [11]

$$\begin{gathered}
a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \left(a=\frac{C_{11}}{\rho},\quad b=\frac{C_{22}}{\rho}\right)\\
c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad \left(d=\frac{C_{66}}{\rho},\quad c=\frac{C_{66}+C_{12}}{\rho}\right)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды. Граничные условия при $y=0$ имеют вид

$$\sigma_{yy}=\rho\left[(c-d)\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}\right]=-P_1\sigma(Vt-l-x),\ x>0$$

$$v=0,\ x<0;\ \sigma_{xy}=\rho d\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\ |x|<\infty \qquad (1.2)$$

$$u,v=O(r^{1/2}),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0;\quad u=v=0 \text{ при } t=0$$

где $t=l/V$ — в момент достижения ударной волны края опоры. Опора занимает часть границы $x<0$; u, v — перемещения упругой среды по осям x, y; σ_{xy}, σ_{yy} — напряжения, $\sigma(t)$ — единичная функция.

Переходя к преобразованиям Лапласа $\bar{u}$, $\bar{v}$ от u, v по t, решение задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\bar{u},\bar{v}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}_n\bar{v}_n\exp(i\alpha x+iy\bar{\beta}_n)d\alpha$$

$$\bar{v}_n=\frac{a^2-a\alpha^2-a\bar{\beta}_n^2}{c\alpha\bar{\beta}_n}\bar{u}_n,\quad \bar{\beta}_n=\left[\frac{(b+d)\omega^2-L\alpha^2+(-1)^n\sqrt{\Delta(\alpha)}}{2bd}\right]^{1/2} \qquad (1.3)$$

$$\Delta(\alpha)=[(b+d)\omega^2-L\alpha^2]^2-4bd^2\omega^2\bar{\mu}_1^2;\quad \bar{\mu}_n^2=\frac{\omega^2}{c_n^2}-\alpha^2,\quad c_1=a,\quad c_2=d$$

$L=ab+d^2-c^2$, $a>d$, $b>d>0$, $K_1=ab-(c-d)^2>0$, $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Подставляя (1.3) в (1.2) и производя преобразование Фурье по x, можно получить уравнения Винера-Хопфа

$$\frac{i\rho\bar{\mu}_2}{aC_0}F(\alpha)V^-=\Omega^++P_1\left[2\pi\omega\left(\frac{\omega}{V}-\bar{\alpha}\right)\right]^{-1}\exp\left(-\frac{ls}{V}\right)$$

$$\bar{u}_1=\frac{\alpha\bar{\beta}_1[(c-d)\bar{\beta}_2^2+a\bar{\mu}_1^2]V^-}{a\bar{\mu}_1^2(\bar{\beta}_2^2-\bar{\beta}_1^2)},\quad \bar{u}_2=\frac{\alpha\bar{\beta}_2[(c-d)\bar{\beta}_1^2+a\bar{\mu}_1^2]V^-}{a\bar{\mu}_1^2(\bar{\beta}_1^2-\bar{\beta}_2^2)} \qquad (1.4)$$

$$F(\alpha)=\frac{C_0R(\bar{\alpha})}{(\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2},\quad C_0=\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{L}{ad}\right)^{1/2}K_1^{-1}$$

$$R(\bar{\alpha})=(b\omega^2-K_1\bar{\alpha}^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{\mu}_2+a\omega^2\bar{\mu}_1=\frac{adK_1\sqrt{\frac{a}{b}}}{4(a-d)\omega^2}\{4\bar{\alpha}^2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2+$$

$$+(\bar{\mu}_2^2-\bar{\alpha}^2)^2+P\omega^2(\bar{\alpha}^2-\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2)+Q\omega^4\}(\bar{\mu}_1+\bar{\mu}_2)$$

$$P=4K_1^{-1}(\sqrt{ab}-b),\quad Q=\frac{P}{\sqrt{ab}}+\{b(b-a)+(c+d-b)(c+b-3d)\}\frac{1}{K_1d^2}$$

$$\Omega^+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\sigma_{yy}\Big|_{y=0}\exp(-i\bar{\alpha}x)dx,\quad V^-=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}v\Big|_{y=0}\exp(-i\bar{\alpha}x)dx$$

$R(\bar{\alpha})$ есть функция Рэлея. Ω^+ и V^- аналитичны в верхней и нижней полуплоскости α. Число и положение точек разветвления функций $\bar{\beta}_n$

на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в [11]. После выбора ветвей функций $\bar{\mu}_n, \bar{\beta}_n$ легко получить

$$F(\bar{\alpha})=F^{+}(\bar{\alpha})F^{-}(\bar{\alpha}), \quad \bar{\mu}_n=\sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{c_n}}+\bar{\alpha}}\sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{c_n}}-\bar{\alpha}}=\bar{\mu}_n^{+}\cdot\bar{\mu}_n^{-} \tag{1.5}$$

$$F^{\pm}(\bar{\alpha})=\frac{\bar{\alpha}_R\pm\bar{\alpha}}{\bar{\mu}_2^{\pm}\bar{\mu}_1^{\pm}}\exp\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mp\frac{\omega}{\sqrt{a}}}^{\mp\frac{\omega}{\sqrt{a}}}\ln\frac{R(\xi)}{\overline{R(\xi)}}\,\frac{\beta_2(\xi)+\beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi)+\beta_1(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-\bar{\alpha}}\right|$$

здесь $\bar{\alpha}_R=\omega/c_R$ — корень функции Рэлея, где интегрирование проводится по нижнему берегу разреза. Очевидно, что $F^{+}(\bar{\alpha})$ и $F^{-}(\bar{\alpha})$ — аналитические и отличные от нуля функции, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Im}\bar{\alpha}>0$ и $\operatorname{Im}\bar{\alpha}<0$. В частном случае при $a=b$, $c=a-d$ выражения для $F^{\pm}(\bar{\alpha})$ совпадают с результатом Мауе [10], а в случае $b=a$ — с результатом работы [6].

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$i\rho(aC_0)^{-1}\bar{\mu}_2^{-}F^{-}(\bar{\alpha})V^{-}=\frac{\Omega^{+}}{\bar{\mu}_2^{+}F^{+}(\bar{\alpha})i}+\frac{P_1\exp\left(-\frac{ls}{V}\right)}{2\pi\omega\left(\frac{\omega}{V}-\bar{\alpha}\right)\bar{\mu}_2^{+}F^{+}(\bar{\alpha})} \tag{1.6}$$

Левая часть уравнения (1.6) аналитична в нижней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а правая часть — в верхней полуплоскости, кроме точки $\bar{\alpha}=\omega/V$, где имеется простой полюс. Решение уравнения (1.6) имеет вид

$$V^{-}=iP_1aC_0\left|2\pi\rho\omega\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{V}\right)\bar{\mu}_2^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)F^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)\bar{\mu}_2^{-}(\bar{\alpha})F^{-}(\bar{\alpha})\right|^{-1}\exp\left(-\frac{ls}{V}\right) \tag{1.7}$$

$$\Omega^{+}=\left[\frac{\bar{\mu}_2^{+}(\bar{\alpha})F^{+}(\bar{\alpha})}{\bar{\mu}_2^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)F^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)}-1\right]\frac{P_1\exp\left(-\frac{ls}{V}\right)}{2\pi\omega\left(\frac{\omega}{V}-\bar{\alpha}\right)}$$

Подставляя решение (1.7) в (1.3) и проводя обратное преобразование Лапласа по t [8], можно получить

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2}\Phi_n(\alpha_n), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2}\Psi_n(\alpha_n)$$

$$f_n(\alpha)=t-\frac{l}{V}-\alpha x-y\beta_n(\alpha), \quad f_n(\alpha_n)=0, \quad \bar{\alpha}=\omega\alpha \tag{1.8}$$

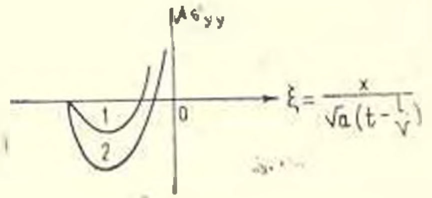
$$\Phi_n(\alpha)=\bar{u}_n\exp\left(\frac{ls}{V}\right), \quad \Psi_n(\alpha)=\bar{v}_n\exp\left(\frac{ls}{V}\right), \quad \bar{\beta}_n=\omega\beta_n$$

Из (1.8) можно получить значения напряжений на оси $y=0$, $(x<0)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yy}=-\frac{P_1}{\pi x}\,\mathrm{Re}\,i\,\frac{\mu_2^+(\alpha)F^+(\alpha)}{\left(\alpha-\frac{1}{V}\right)\mu_2^+\left(\frac{1}{V}\right)F^+\left(\frac{1}{V}\right)},\quad \alpha=\frac{t-l/V}{x} \qquad (1.9)$$

а для коэффициента интенсивности напряжений ($y=0$, $x\to-0$)

$$\sigma_{yy}=\frac{K(t)}{\sqrt{-x}},\quad K(t)=\frac{P_1}{\pi}\sqrt{t-\frac{l}{V}}\left|\mu_2^+\left(\frac{1}{V}\right)F^+\left(\frac{1}{V}\right)\right|^{-1}$$



Фиг. 1. График нормальных напряжений под опорой:

1. Распределение давления на опоре, $t>l/V$
2. Соответствует отражению плоской волны

По формуле (1.9) проведены расчеты на опоре для $b=a$, $c=a-d$, $a=2d$, $V^2=2a^2$. График $A\sigma_{yy}$, $A=-\pi/P_1$ приведен на фиг. 1, кривая 1. Как видно, на участке $-0{,}34<\xi<0$, где $\xi=x|\sqrt{a}(t-l/V)|^{-1}$, $\sigma_{yy}>0$, т.е. имеет место растяжение, при значениях $-1<\xi<-0{,}34$ $\sigma_{yy}<0$ имеет место сжатие. Кривая 2 дает значение σ_{yy} в случае нормального падения плоской волны на полуплоскость.

§ 2. *Взрыв на границе полуплоскости вне опоры*

В случае, когда взрыв производится при $x=l$ вне опоры, граничные условия имеют вид

$$\sigma_{yy}=-P_1\sigma(Vt-x+l)\sigma(Vt+x-l),\quad x>0 \qquad (2.1)$$

$$v=0,\quad x<0;\quad \sigma_{xy}=0\quad |x|<\infty$$

Записывая σ_{yy} в (2.1) как сумму волн, движущихся вправо и влево со скоростью V, можно получить

$$\sigma_{yy}=-\frac{P_1}{s}\left[\sigma(x-l)\exp\left(-\frac{s}{V}(x-l)\right)+\sigma(l-x)\exp\left(-\frac{s}{V}(l-x)\right)\right]$$

и преобразованием Фурье по x будет

$$\bar{\sigma}_{yy}=\Omega^++\Omega^-,\quad \Omega^-=\frac{P_1\exp(-il\bar{\alpha})}{\pi\left(\frac{\omega^2}{V^2}-\bar{\alpha}^2\right)}-\frac{P_1\exp\left(-\frac{sl}{V}\right)}{2\pi\omega\left(\bar{\alpha}+\frac{\omega}{V}\right)} \qquad (2.2)$$

Ω^+ дается формулой (1.4). Из (2.1) можно получить, как и выше, следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$\frac{i\rho}{aC_0}\bar{\mu}_2^-F^-(\bar{\alpha})V^-=\frac{\Omega^+}{\bar{\mu}_2^+F^+}+\frac{\Omega^-}{\mu_2^+F^+} \qquad (2.3)$$

Решая полученные уравнения и обращая трансформанты [4, 5], можно получить

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2}=-2\operatorname{Re} i\sum_{m,n=1}^{2}\left[\frac{A_{m,n}(\alpha_{m,n})}{f'_{m,n}(\alpha_{m,n})}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{A_{3,n}(\alpha_{3,n})\varphi(\tau)d\tau}{f_{3,n}'(\alpha_{3,n})(\tau-\alpha_{3,n})}\right]$$

$$A_{1,1}(\alpha)=P_1\alpha\beta_1M_2\left[\pi i\mu_1(\beta_2-\beta_1)\left(\alpha^2-\frac{1}{V^2}\right)R(\alpha)\right]^{-1},\quad M_n=(c-d)\beta_n^2+a\mu_1^2$$

$$A_{2,1}(\alpha)=\frac{VP_1\alpha\beta_1M_2F^-\left(-\frac{1}{V}\right)\mu_1\left(-\frac{1}{V}\right)\mu_2^-\left(-\frac{1}{V}\right)\left[\beta_1\left(-\frac{1}{V}\right)+\beta_2\left(-\frac{1}{V}\right)\right]}{2\pi\mu_1^2(\alpha)\left[\beta_2^2(\alpha)-\beta_1^2(\alpha)\right]R\left(-\frac{1}{V}\right)\left(\frac{1}{V}+\alpha\right)\mu_2^-(\alpha)F^-(\alpha)}$$

$$A_{3,1}(\alpha)=\frac{C_0\alpha\beta_1M_2}{2i\mu_1^2(\beta_1^2-\beta_2^2)\mu_2^-(\alpha)F^-(\alpha)},\quad A_{m,2}(\alpha)=-\frac{M_1}{M_2}A_{m,1}(\alpha)$$

$$\varphi(\tau)=\begin{cases}\varphi_1(\tau)=\dfrac{P_1F^-(\tau)\mu_2(\tau)\mu_2^-(\tau)[\beta_1(\tau)+\beta_2(\tau)]}{\pi^2C_0\left(\frac{1}{V^2}-\tau^2\right)R(\tau)}, & \tau<-\dfrac{1}{\sqrt{d}}\\[2ex] \varphi_2(\tau)=\dfrac{P_1F^-(\tau)\mu_2(\tau)\mu_2^-(\tau)\left[a\mu_1\beta_2+(K_1\tau^2-b^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\mu_2\beta_1\right]}{C_0\pi^2\left(\frac{1}{V^2}-\tau^2\right)|R(\tau)|^2} & \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d}}<\tau<-\dfrac{1}{\sqrt{a}} & \end{cases}\tag{2.4}$$

$$f_{m,n}(\alpha_{m,n})=0,\quad f_{1,n}(\alpha)=t-(x-l)\alpha-y\beta_n(\alpha),\quad m=1,2,3$$

$$f_{2,n}(\alpha)=t-\frac{l}{V}-\alpha x-y\beta_n(\alpha),\quad f_{3,n}(\alpha)=t+l\alpha-\alpha x-y\beta_n(\alpha),\quad n=1,2$$

и подобные значения для $\partial^2 v/dt^2$. Решение вблизи волн находится так же, как и в работе [6].

§ 3. *Учет движения опоры под действием распространяющейся волны ударного давления*

Пусть опора под действием ударного давления вертикально перемещается со скоростью V_0. Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned}&\sigma_{yy}=0,\quad x>0;\quad \frac{dv}{dt}=V_0\sigma(Vt-x-l)\sigma(Vt+x+l),\quad x<0\\ &\tau_{xy}=0,\quad |x|<\infty\end{aligned}\tag{3.1}$$

Производя выкладки, как в § 2, можно для (3.1) получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{i\rho}{aC_0}\mu_2^-F^-\left(V^-+\frac{iV_0\exp(-sl/V)}{2\pi s^2\left(\alpha+\frac{\omega}{V}\right)}\right)+f^-(\alpha)=\frac{\Omega^-}{\mu_2^+(\alpha)F^+(\alpha)}-f^+(\alpha)$$

$$f^{+}(\alpha)+f^{-}(\alpha)=f(\alpha)=\frac{iV_0\rho\mu_2^-(\alpha)F^-(\alpha)\exp(i\alpha l)}{aC_0\pi sV\left(\alpha^2-\frac{\omega^2}{V^2}\right)}$$

$$f^-(\alpha)=\frac{iV_0\rho\mu_2^-(\omega/V)F^-(\omega/V)\exp(-sl/V)}{2aC_0\pi s\omega\left(\alpha-\frac{\omega}{V}\right)}+\int\limits_{\frac{\omega}{\sqrt{a}}}^{\infty}\frac{\Psi(\tau)}{\tau-\alpha}\exp(i\tau l)d\tau \qquad (3.2)$$

$$\Psi(\tau)=\begin{cases}\Psi_1(\tau)=\dfrac{\rho V_0R(\tau)(\tau^2-\omega^2/V^2)^{-1}}{V\pi^2s(\beta_1+\beta_2)\mu_1(\tau)\mu_2^-(\tau)}, & \dfrac{\omega}{\sqrt{d}}<\tau<\infty\\[2ex] \Psi_2(\tau)=\dfrac{i\rho V_0\mathrm{Re}\left[R(\tau)(\beta_2(\tau)+\beta_1(\tau))^{-1}\right]}{2\pi^2sV\sqrt{\tau^2-\dfrac{\omega^2}{a}}\,\mu_2^-(\tau)F^-(\tau)\left(\tau^2-\dfrac{\omega^2}{V^2}\right)}, & \dfrac{\omega}{\sqrt{a}}<\tau<\dfrac{\omega}{\sqrt{d}}\end{cases}$$

Здесь V^-, Ω даются формулами (1.4) и (2.2), где интегрирование производится по верхнему берегу разреза. Учитывая условие на ребре, из (3.2) получим решение

$$V^-=\frac{V_0\exp(-sl/V)}{2\pi s^2(\alpha-\omega/V)}+\frac{i\alpha C_0f^-(\alpha)}{\rho\mu_2^-(\alpha)F^-(\alpha)} \qquad (3.3)$$

$$\Omega=\mu_2^+(\alpha)F^+(\alpha)[f(\alpha)-f^-(\alpha)] \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (1.3) и проводя обратное преобразование Лапласа по t, получим для $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_{x1}=-\frac{V_0\rho R(1/V)}{a\mu_1(1/V)(\beta_1(1/V)+\beta_2(1/V))}\left[\delta\left(t-\frac{x+l}{V}\right)+\delta\left(t+\frac{x+l}{V}\right)\right]-$$

$$-2\mathrm{Re}\,i\rho V_0R(\alpha_1)\left[V\pi a\mu_1(\alpha_1)(\beta_1(\alpha_1)+\beta_2(\alpha_1))\left(\alpha_1^2-\frac{1}{V^2}\right)(l+x)\right]^{-1}-$$

$$-2\mathrm{Re}\,i\frac{\rho V_0R(\alpha_2)\mu_2^-\left(\frac{1}{V}\right)F^-\left(\frac{1}{V}\right)\left(\frac{1}{V}-\alpha_2\right)^{-1}}{2a\pi x\mu_1(\alpha_2)(\beta_1(\alpha_2)+\beta_2(\alpha_2))\mu_2^-(\alpha_2)F^-(\alpha_2)}+$$

$$+2\mathrm{Re}\,i\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty}R(\alpha_3)C_0\Psi(\tau)\left[x\mu_1(\alpha_3)(\beta_1(\alpha_3)+\beta_2(\alpha_3))\mu_2^-(\alpha_3)F^-(\alpha_3)(\tau-\alpha_3)\right]^{-1}d\tau$$

$$\alpha_1=t/(l+x),\quad \alpha_2=(t-l/V)/x,\quad \alpha_3=(t-\tau l)/x,\quad x<0 \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=\mathrm{Re}\,i\left[\frac{V_0\mu_2^-(1/V)F^-(1/V)}{\pi x(1/V-\alpha_2)\mu_2^-(\alpha_2)F^-(\alpha_2)}-\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty}\frac{2aC_0\Psi(\tau)d\tau}{x\rho\mu_2^-(\alpha_3)F^-(\alpha_3)(\tau-\alpha_3)}\right],\quad x>0 \qquad (3.6)$$

Рассмотрим случай, когда взрыв происходит вне опоры и опора движется под действием давления, то есть имеют место следующие граничные условия:

$$\sigma_{yy}=0,\ x>0;\quad \frac{\partial v}{\partial t}=V_0\sigma(Vt-l+x),\quad x<0,\ \sigma_{xy}=0,\ -\infty<x<\infty \tag{3.7}$$

Для задачи (3.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yy}=-\frac{V_0\rho R\left(\frac{1}{V}\right)\delta\left(t-\frac{l-x}{V}\right)}{a\mu_1\left(\frac{1}{V}\right)\left(\beta_1\left(\frac{1}{V}\right)+\beta_2\left(\frac{1}{V}\right)\right)}+\mathrm{Re}\,i\frac{V_0\rho\mu_2^-\left(\frac{1}{V}\right)F^-\left(\frac{1}{V}\right)\mu_2^-(\alpha_2)F^-(\alpha_2)}{\pi xaC_0\left(\frac{1}{V}+\alpha_2\right)}$$

$$x<0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-\mathrm{Re}\,i\frac{V_0\mu_2^+\left(\frac{1}{V}\right)F^+\left(\frac{1}{V}\right)}{\pi x\left(\frac{1}{V}+\alpha_2\right)\mu_2^-(\alpha_2)F^-(\alpha_2)},\quad x>0 \tag{3.9}$$

Для решения задачи, когда взрыв производится на опоре и опора движется под действием давления P_1 со скоростью V_0, то есть для граничной задачи

$$\sigma_{yy}=-P_1\sigma(Vt-l-x),\quad x>0;\quad \sigma_{xy}=0,\quad |x|<\infty$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=V_0\sigma(Vt-l-x)\sigma(Vt+l+x),\quad x<0 \tag{3.10}$$

решение можно получить как сумму решения задач (1.2) и (3.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yy}=-\frac{V_0\rho R\left(\frac{1}{V}\right)}{a\mu_1\left(\frac{1}{V}\right)\left(\beta_1\left(\frac{1}{V}\right)+\beta_2\left(\frac{1}{V}\right)\right)}\left\{\delta\left(t-\frac{l+x}{V}\right)+\delta\left(t+\frac{l+x}{V}\right)\right\}+$$

$$+\mathrm{Re}\,i\frac{\mu_2^-(\alpha_2)F^-(\alpha_2)}{\pi x\left(\alpha_2-\frac{1}{V}\right)\mu_2^+\left(\frac{1}{V}\right)F^+\left(\frac{1}{V}\right)}\left\{\frac{V_0\rho R(1/V)}{a\left(\beta_1\left(\frac{1}{V}\right)+\beta_2\left(\frac{1}{V}\right)\right)\mu_1\left(\frac{1}{V}\right)}-P_1\right\}+$$

$$+2\mathrm{Re}\,i\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty}\frac{C_0R(\alpha_3)\Psi(\tau)d\tau}{x\mu_1(\alpha_3)(\beta_2(\alpha_3)-\beta_1(\alpha_3))\mu_2^-(\alpha_3)F^-(\alpha_3)(\tau-\alpha_3)}-$$

$$-2\mathrm{Re}\,i\rho V_0R(\alpha_1)\left\{\pi aV\mu_1(\alpha_1)(\beta_1(\alpha_1)+\beta_2(\alpha_2))\left(\alpha_1^2-\frac{1}{V^2}\right)(l+x)\right\}^{-1}$$

Аналогичная формула получится для $\partial^2 v/\partial t^2$.

Когда $V\to\infty$, решение можно записать в виде

$$\sigma_{yy}=-V_0\rho\sqrt{b}\,\sigma(t)+(V_0\rho\sqrt{b}-P_1)\mathrm{Re}\,i\int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{t/x}\frac{\mu_2^+(t/x)F^+(t/x)\sqrt{a}\,dt}{\pi tF^+(0)},\quad x<0$$

$$F'(0)=F'(0)=-\frac{1}{\sqrt{K_1}}\left(ab(L+2d\sqrt{ab})^{1/4}\right)$$

График интеграла подобен кривым фиг. 1, причем знак $\sigma_{xx}+V_0\varphi\sqrt{b}$ дается $\rho V_0\sqrt{b}-P_2$. Кроме того, определено σ_{xx} при $x=0$, $b=a$, $c=a-d$ в виде

$$\frac{\pi}{P_1\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma_{xx}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2-\eta_1)(1+\xi)\left|\sqrt{\eta_1-1}\left(1-\frac{3}{4\eta_1}\right)\left(\frac{1}{\eta_1}+3{,}62\right)\cdot 2{,}25\right|^{-1}\times$$

$$\times\Big\{\left[1{,}07(\sqrt{1+\eta_1}-\sqrt{\eta_1-1})-(\eta_1-1)\sqrt{\eta_1+1}+2{,}15(\eta_1-1)\right]\cos\varphi-$$

$$-\left[2{,}55\sqrt{\eta_1^2-1}+(\eta_1-1)\left(\sqrt{\eta_1-1}-\frac{1}{2}\right)\right]\sin\varphi\Big\}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^2\left[\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arctg}\frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2\sqrt{\theta^2-1}\sqrt{4-\theta^2}}\right]\left[\frac{\theta}{\theta^2+\eta_1-1}+\frac{2}{2\theta+1}\right]d\theta\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{\eta_1-4}\,(0{,}62+\eta_1)^{-1}}{2{,}55\sqrt{3}\left(\eta_1^{-1}-\dfrac{15}{4\eta_1^2}\right)}\Big\{\left[(5{,}07-\eta_1)\right]\sqrt{1+\sqrt{\eta_1-3}}+2{,}55\sqrt{\eta_1-4}\times$$

$$\times\sqrt{\sqrt{\eta_1-3}-1}\,\Big]\cos\varphi_1-\left[2{,}55\sqrt{\eta_1-4}\sqrt{1+\sqrt{\eta_1-3}}+(\eta_1-5{,}07)\sqrt{\sqrt{\eta_1-3}-1}\right]\times$$

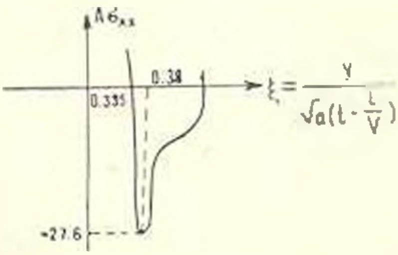
$$\times\sin\varphi_1\Big\}\cdot\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^2\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2\sqrt{\theta^2-1}\sqrt{4-\theta^2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\theta}{\theta^2+\eta_1-4}+\frac{2}{2\theta+1}\right)d\theta\right\}$$

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\int_1^2\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2\sqrt{\theta^2-1}\sqrt{4-\theta^2}}\right]\frac{\sqrt{\eta_1-1}}{\theta^2+\eta_1-1}d\theta$$

$$\varphi_1=\frac{1}{\pi}\int_1^2\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2\sqrt{\theta^2-1}\sqrt{4-\theta^2}}\right]\frac{\sqrt{\eta_1-4}}{\theta^2+\eta_1-4}d\theta$$

$$\eta_1=\xi^{-2}$$



Фиг. 2. График нормальных напряжений на оси y при заданном распределении давления на твердой опоре

По глубине для значений $0<\xi<1$, $\xi=\dfrac{y}{\sqrt{a}(t-l/V)}$, $a=4d$, V^2-4a сделаны вычисления $A\sigma_{xx}$, которые приведены на графике фиг. 2, откуда получится, что около границы $x=0$, $\sigma_{xx}>0$ и имеет место растяжение, а дальше — сжатие. Полученные графики позволяют изучить поле напряжений, которые показывают действие ударной волны от взрыва на грунт при наличии опоры.

В заключение отметим, что методом [12, 13] можно получить решение и в случае произвольного закона движения края опоры.

THE SHOCK WAVE PROPAGATION IN HALF-SPACE THE PART OF BOUNDARY OF WHICH HAS RIGID SUPPORT

A. N. MARTIROSIAN

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԵԶՐԻ ՄԻ ՄԱՍՈՒՄ ԿՈՇՏ ՀԻՄՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հարվածային ալիքի թափանցման խնդիրը առաձգական կիսահարթության, որի եզրագծի մի մասն ունի կոշտ հիմք։ Հարթ խնդրի լուծումը գտնված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով և Վիներ-Հոպֆի հավասարման լուծումով և լուծումը բերված է Սմիրնով-Սոբոլևի փակ տեսքի։ Լուծվում են մասնակի խնդիրներ միջավայրի եզրի վրա հարթ ալիքի, կենտրոնացված իմպուլսի և հիմքի վրա կամ նրանից դուրս պայթյունից կիսատարածության եզրով տարածվող հարվածային ալիքի վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я., Поручиков В. Б.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости.—Изд. Московского университета, 1970, с. 121.
2. *Огурцов К. И., Петрашень Г. И.* Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии.—Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951, №149, вып. 24, с. 3—117.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные задачи движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1961, 276 с.
4. *Свекло В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
5. *Norris A. N., Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by anisotropic material. Quarterly Journal Mech. Appl. Mathematics, 1984, № 4, p. 565—580.
6. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—МТТ, 1976, №1, с. 107—117.
7. *Freund L. B.* Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading.—J. Mech. Phys. Solids, v. 21, 1972, I, p. 129, II, p. 141.
8. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, №2, с. 13—23.

9. *Флитман Л. М.* Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошной упругой среды.—ПММ, 1963, т. *27*, вып. 4, с. 618—628.

10. *Maue A. W.* Die Entspannungswelle bei plötzlichen Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. —ZAMM, 1954, bd. 34, H. 1/2.

11. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника.—ПММ, 1969, т. *33*, вып. 3, с. 548—555.

12. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—МТТ, 1979, №4, с. 54—72.

13. *Bakez B. R.* Dynamic stresses crated by a moving crack. Trans ASME, Ser. E. J., Appl. Mech., 1962, v. 29, № 3, p. 3—12.

Горисский филиал Армпединститута им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
8.VII.1986