ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 532.58:620.22

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИКАНИЯ ТОНКОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А.

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела в первоначально упругую анизотропную среду, в которой вблизи тела образуется область пластичности (фиг. 1). Подобные вопросы были решены в работе [1], где принималась, как и для изотропной среды, [2] гипотеза плоских сечений, согласно которой изменения по радиальной координате r намного превосходят изменения по осевой координате x и считается, что компонента тензора скорости деформации $\varepsilon_x \ll \varepsilon_r$. При этом для среды, в которой пределы текучести по осям r, x связаны равенством $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$, напряжение на теле было равно бесконечности.

В настоящей работе дается анализ соотношений пластичности и дано приближенное решение без гипотезы плоских сечений.

Рассматривается трансверсально изотропная среда. В области пластического течения тензор скоростей деформации и тензор девиатора напряжений связаны зависимостями [3]

$$\frac{\varepsilon_r}{a} = H(\sigma_r' - \sigma_\theta') + G(\sigma_r' - \sigma_x'), \quad \frac{\varepsilon_\theta}{a} = H(\sigma_\theta' - \sigma_r') + F(\sigma_\theta' - \sigma_x')$$

$$\frac{\varepsilon_x}{a} = G(\sigma_x' - \sigma_r') + H(\sigma_x' - \sigma_r'), \quad \sigma_x' + \sigma_\theta' + \sigma_r' = 0 \tag{1}$$

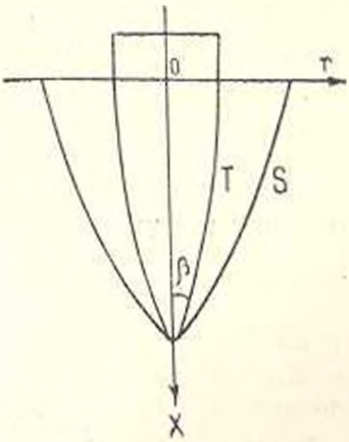
где a — параметр пластичности,

$$2F = \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} + \frac{1}{\tau_{sx}^2} - \frac{1}{\tau_{sr}^2}, \quad 2G = \frac{1}{\tau_{sx}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{s\theta}^2}, \quad 2H = \frac{1}{\tau_{sr}^2} + \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} - \frac{1}{\tau_{sx}^2} \tag{2}$$

τ_s — пределы текучести по соответствующим направлениям. Уравнения (1) описывают осесимметричное течение среды в предположении идеальной пластичности. Из второго, третьего и четвертого уравнений (1) получится

$$\sigma_r' = -\frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(2F+G) + \frac{\varepsilon_r}{a}(2F+H)}{\alpha}, \quad \sigma_\theta' = \frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(2G+F) + \frac{\varepsilon_x}{a}(F-H)}{\alpha}$$

$$\sigma_x' = \frac{\frac{\varepsilon_\theta}{a}(F-G) + \frac{\varepsilon_r}{a}(F+2H)}{\alpha}, \quad \alpha = 3(FG+FH+GH) \tag{3}$$



Фиг. 1

Уравнение текучести в основных порядках $(\tau_{rx} \ll \sigma_r)$ имеет вид

$$H(\sigma_r'-\sigma_\theta')^2+G(\sigma_r'-\sigma_x')^2+F(\sigma_\theta'-\sigma_x')^2=1 \qquad (4)$$

Для трансвенсально изотропной среды

$$G=F=\frac{1}{2\tau_{sx}^2}, \quad H=\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{2\tau_{sx}^2}$$

$$\alpha=\frac{3}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \qquad (5)$$

Подставляя (3) и (5) в (4), получим

$$\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{\varepsilon_\theta}{a}\right)^2+\frac{1}{\tau_{sr}^2}\left(\frac{\varepsilon_x}{a}\right)^2+\frac{1}{\tau_{sx}^2}\frac{\varepsilon_\theta}{a}\frac{\varepsilon_x}{a}=$$

$$=\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \qquad (6)$$

Откуда следует

$$\frac{\varepsilon_x}{a}=\frac{\tau_{sr}^2}{\tau_{sx}^2}\left(-\frac{\varepsilon_\theta}{2a}\pm\left[\left(\frac{\varepsilon_\theta}{2a}\right)^2-\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right)+\left(\frac{\varepsilon_\theta}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right) \qquad (7)$$

Из (3) можно получить

$$\sigma_r'-\sigma_\theta'=\frac{3}{a\alpha\tau_{sx}^2}\left(\varepsilon_\theta+\frac{\varepsilon_x}{2}\right) \qquad (8)$$

Как и в случае гипотезы плоских сечений [2], можно считать

а) $\varepsilon_x=0 \quad \varepsilon_\theta\neq 0$

тогда $\sigma_r'-\sigma_\theta'=\infty$ при $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$

в) Поскольку при проникании возможны различные виды касания тела и среды, можно изучить случай

$$\frac{\varepsilon_\theta}{a}=-\frac{\varepsilon_x}{2a} \qquad \text{при} \qquad \tau_{sr}=2\tau_{sx}$$

тогда $\sigma_r'-\sigma_\theta'$ получается конечным, как это видно из (8).

Для нахождения решения задачи о проникании тонкого тела в среду следует применять численные методы. Однако, можно для качественного вида решения принять

$$\varepsilon_x=n\varepsilon_\theta, \qquad n=\frac{-4\sin^2\beta\tau_{sx}}{2\tau_{sx}-\tau_{sr}\cos^2\beta} \qquad (9)$$

при этом для $\tau_{sr}\neq 2\tau_{sx}$ $n\sim\beta^2$, то есть имеет место допущение [1]. Для $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ $n=-2$. Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\varepsilon_x=0$$

следует

$$v_r = \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+1}} \frac{\partial r_k}{\partial t}$$

где v_r—радиальная скорость частиц, $r = r_k(x, t)$ есть уравнение меридиана тела. Тогда получится

$$\varepsilon_\theta = \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+2}} \frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad \varepsilon_r = -(n+1) \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+2}} \frac{\partial r_k}{\partial t}$$

Подставляя полученные значения ε_r, ε_θ, ε_x в (6), можно получить

$$\frac{\varepsilon_\theta}{a} = \sqrt{\frac{a}{3}} \left[\frac{n^2}{\tau_{sr}^2} + \frac{n+1}{\tau_{sx}^2} \right]^{-1/2}, \quad \sigma_r' - \sigma_\theta' = -\sqrt{\frac{3}{a}} \left[\frac{n+1}{\tau_{sx}^2} + \frac{n^2}{\tau_{sr}^2} \right]^{-1/2} \frac{n+2}{\tau_{sx}^2} \tag{10}$$

Полученная формула дает в пределах выбранной гипотезы решение задачи проникания. При этом для $\lambda \ll 1$ имеем по (9) при малых β $\tau_{sr} = \tau_{sx}(2-\lambda)$ и $-n = 2\sin^2\beta/(\sin^2\beta + \lambda/2\cos^2\beta)$. Для $\lambda \gg \beta^2$ $n \sim 0$, $\alpha \gg \beta^2$, $\sigma_r' - \sigma_\theta' = \sqrt{\frac{3}{\alpha}\frac{2}{\tau_{sx}}}$. Вместе с тем, полагая $\lambda \ll \beta^2$, получим $n = -2(1 - \lambda/2\,\mathrm{ctg}^2\beta)$, $\sigma_r' - \sigma_\theta' = 2\tau_{sx}\mathrm{ctg}\beta$.

Таким образом, не исключено, что при точном решении задачи проникания тела в трансверсально-изотропную среду при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ давление на теле будет конечное в то время, как согласно решению [1], полученному по пункту а), на теле $\sigma_r = \infty$ при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$. Разумеется, зная $\sigma_r' - \sigma_\theta'$ из (10), следует решать уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\theta'}{r} = 0$$

где, как и в [1], берется одномерная по r квазистационарная задача и затем решение в области пластичности соединяется с решением в упругой области σ^e.

При этом получится после интеграции

$$\sigma_r = -(\sigma_r' - \sigma_\theta') \ln \frac{r}{r_k \xi_0} + \sigma^e \tag{11}$$

где $r = r_k\xi_0$ есть граница пластической области, постоянная ξ_0 находится подстановкой упругого решения в (4). Таким образом, приближенное решение, найденное согласно (9), устраняет бесконечность в σ_r, полученную по теории [1], где $\varepsilon_x \approx 0$. Однако, для малых β по-прежнему остается в силе вывод о больших значениях при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ напряжения.

Для проверки полученного эффекта были проделаны совместно с М. С. Григоряном эксперименты по прониканию со скоростью 800 м/сек стальных инденторов массой $\sim 10^{-2}$ кг в композиты, состоящие из ~ 50 слоев чередующихся металлов (алюминий, свинец, дюраль). Толщина пластинок от 10^{-3} м до $6 \cdot 10^{-3}$ м. В силу большого количества слоев и периодичности можно считать, что образец однородный и трансверсально изотропный. Слои металлов соединены клеем ГИПК-113. Результаты эксперимента показали хорошее соответствие с теорией. Основной эффект значительного уменьшения глубины проникания в композит по сравнению с цельными образцами из составляющих металлов наблюдался в пределах $1{,}6 < \tau_{sr}/\tau_{sx} < 3{,}6$. Значение τ_{sr} находилось по Фойхту $\tau_{sr} = \frac{h_1\tau_{s1} + h_2\tau_{s2}}{h_1 + h_2}$, где индексы 1, 2 относятся к металлам, $h_{1,2}$—толщины пластин, τ_{sx} измерялось для образца опытами на сжатие. При проникании в композит, состоящий из алюминия ($h_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м) и свинца ($h_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м) получились глубины проникания, соответственно, в алюминий 10^{-1} м, в свинец более $12 \cdot 10^{-2}$ м, в композит $6 \cdot 10^{-2}$ м, $\tau_{sr}/2\tau_{sx} = 2{,}3$.

THE INVESTIGATION OF PENETRATION OF THIN RIGID BODY IN TRANSVERSAL ISOTROPIC MEDIUM

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTCIAN

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ԿՈՇՏ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ միջավայրում, որտեղ մարմնի մոտերքում տեղի է ունենում պլաստիկ հոսունություն, բարակ պինդ մարմնի ներթափանցման խնդիրը: Տրվում է պլաստիկության հարաբերությունների վերլուծությունը գլանային կոորդինատներով և ցույց է տրվում, որ այն միջավայրերի համար, որտեղ հոսունության սահմանը շառավղային ուղղությամբ երկու անգամ մեծ է տանգենցիալից, դեֆորմացիաների արագությունները ըստ առանցքի և անկյան՝ հավասար են, որը հակասում է նախապես ընդունված հարթ կտրվածքների վարկածին: Ներթափանցման վարքի պարզաբանման համար վերը նշված մեծությունների միջև ընդունված է առնչություն, որից ստացվում են սահմանային դեպքերը: Գտնված է նորմալ լարումը մարմնի վրա, որը նշված միջավայրի համար բարակ մարմինների դեպքում տալիս է մեծ լարումներ, դա ցույց է տալիս, որ նախկինում կատարած ընդհանուր ենթադրությունները ճիշտ էին:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. *36*, №6, с. 23—30.
2. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. *34*, №3, с. 25—38.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.II.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

БЕЛУБЕКЯН Э. В., ДАРБИНЯН А. З.

На основе уточненной теории изгиба пластин [1] решается задача оптимизации длинной прямоугольной пластинки, изготовленной из композиционного материала, усиленной ребрами жесткости, под действием поперечной нагрузки. Принимая в качестве критерия оптимальности максимум несущей способности при неизменном весе, определяются оптимальные геометрические параметры конструкции при ограничении на ее прочность.

Рассматриваемая задача для изотропного и ортотропного материалов на основе классической теории решалась в работах [2, 3].

1. Пусть шарнирно опертая вдоль продольных кромок ($y=0$ и $y=b$) длинная пластинка ширины b подкреплена равноудаленными ребрами жесткости и подвергается действию поперечной нагрузки $q(y)$. Предполагается, что конструкция изготовлена из монослоев композиционного материала, в общем случае, имеющих различные упругие характеристики в ортогональных направлениях, что позволяет считать материал ортотропным.

Ставится задача определения значений: высоты ребра h_1, отношения ширины ребра к его высоте 2α, толщины пластинки h_2, расстояния между ребрами a, обеспечивающих наибольшую несущую способность пластинки при сохранении ее веса и ограничении на прочность.

Ввиду равноудаленности ребер решается задача прочности ортотропной пластинки размерами $a\times b$, шарнирно опертой вдоль кромок $y=0$ и $y=b$ и опертой вдоль кромок $x=\pm a/2$ на упругие балки.

Согласно уточненной теории изгиба пластин [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, задача сводится к определению потенциальной функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\Phi-\frac{12}{h_2}\frac{h^2}{10}\left\{a_{44}D_{11}D_{66}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\right.$$

$$+\left[a_{44}(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2)+a_{55}D_{11}D_{66}\right]\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+\left[a_{55}(D_{11}D_{22}-\right.$$

$$\left.\left.-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2)+a_{44}D_{22}D_{66}\right]\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}+a_{55}D_{22}D_{66}\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right\}\Phi=\frac{144}{h_2^6}q \qquad (1.1)$$

и граничным условиям:

—шарнирного опирания:

$$w=0,\ M_y=0,\ \varphi=0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=b \tag{1.2}$$

—симметрии:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad N_x=0,\quad H=0 \quad \text{при } x=0 \tag{1.3}$$

—упругого опирания на ребра жесткости:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad E_1 J\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-\left(N_x+\frac{\partial H}{\partial y}\right)+ah_1 q$$

$$\frac{h^2}{12}\psi=-\frac{1}{A}\left(E_1 J\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+H\right) \quad \text{при} \quad x=\frac{a}{2} \tag{1.4}$$

Здесь $D_{ik}=\frac{B_{ik}h_2^3}{12}$, $J=\frac{ah_1^3}{12}$, $A=ah_1$, $a_{44}=\frac{1}{G_{23}}$, $a_{55}=\frac{1}{G_{13}}$, B_{ik}—упругие характеристики монослоя композита по осям x и y пластинки, E_1—модуль упругости композита по направлению ребра, G_{13}, G_{23}—модули сдвига по направлениям yz и xz.

Внутренние усилия M_x, M_y, H, N_x, N_y по известным формулам [1] выражаются через функции прогибов w и поперечного сдвига φ и ψ, которые в свою очередь выражаются через функцию $\Phi(x, y)$ по формулам:

$$w=\left\{\frac{h_2^4}{100}a_{44}a_{55}\left[D_{11}D_{66}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+D_{22}D_{66}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]-\frac{h_2^2}{120}\left[(a_{55}D_{11}+a_{44}D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(a_{44}D_{22}+a_{55}D_{66})\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\frac{h_2^6}{144}\right\}\Phi$$

$$\varphi=\left\{\frac{h_2^2}{10}a_{44}\left[D_{11}D_{66}\frac{\partial^5}{\partial x^5}+(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2)\frac{\partial^5}{\partial x^3\partial y^2}+\right.\right. \tag{1.5}$$
$$\left.\left.+D_{22}D_{66}\frac{\partial^5}{\partial x\partial y^4}\right]-\frac{h_2^3}{12}\left[D_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right]\right\}\Phi$$

$$\psi=\left\{\frac{h_2^2}{10}a_{55}\left[D_{22}D_{66}\frac{\partial^5}{\partial y^5}+(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2)\frac{\partial^5}{\partial y^3\partial x^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+D_{11}D_{66}\frac{\partial^5}{\partial y\partial x^4}\right]-\frac{h_2^3}{12}\left[D_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\right]\right\}\Phi$$

Третье из граничных условий (1.4) выражает равенство деформаций поперечного сдвига e_{yz} пластинки и балки на линии $x=a/2$, $z=0$ с учетом того, что для пластинки $e_{yz}|_{z=0}=a_{44}\frac{h_2^2}{8}\psi$, а для балки

$$e_{yz}|_{z=0}=-\frac{3}{2}\frac{a_{44}}{A}\left(EJ\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+H\right)$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд Фурье

$$q=\sum_{1}^{\infty} q_k \sin\lambda_k y, \quad \lambda_k=\pi k/b$$

решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), представляется в виде

$$\Phi=\sum_{1}^{\infty}\Phi_k(x)\sin\lambda_k y+\sum_{1}^{\infty}\frac{144 q_k \sin\lambda_k y}{h_2^3\lambda_k^2\left(D_{22}\lambda_k^2+\frac{6}{5h_2}a_{55}D_{22}D_{66}\right)} \tag{1.6}$$

Подстановкой (1.6) в уравнение (1.1) для определения функции $\Phi_k(x)$ получается однородное дифференциальное уравнение

$$\Phi_k^{(VI)}(x)+C_1\Phi_k^{(IV)}(x)+C_2\Phi_k''(x)+C_3\Phi_k(x)=0 \tag{1.7}$$

где

$$C_1=-\frac{D_{11}+\frac{6}{5h_2}(a_{44}D_4+a_{55}D_{11}D_{66})\lambda_k^2}{\frac{6}{5h_2}a_{44}D_{11}D_{66}}$$

$$C_2=\frac{D_3\lambda_k^2+\frac{6}{5h_2}(a_{55}D_4+a_{44}D_{22}D_{66})\lambda_k^4}{\frac{6}{5h_2}a_{44}D_{11}D_{66}}$$

$$C_3=-\frac{D_{22}\lambda_k^4+\frac{6}{5h_2}a_{55}D_{22}D_{66}\lambda_k^6}{\frac{6}{5h_2}a_{44}D_{11}D_{66}}$$

$$D_3=2(D_{12}+2D_{66}), \quad D_4=D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (1.7) получаются 8 вариантов представления функции $\Phi_k(x)$, постоянные интегрирования в которых определяются удовлетворением условий (1.3) и (1.4).

2. Здесь для простоты приводится решение задачи для случая трансверсально-изотропной пластинки, то есть когда монослои, из которых составлен пакет пластинки, представляют собой композиты с хаотически армированными волокнами.

В этом случае, принимая

$$D_{11}=D_{22}=D=\frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{12}=\nu D, \quad D_{66}=\frac{1-\nu}{2}D, \; a_{44}=a_{55}=\frac{1}{G}$$

для функции w, φ, ψ получается

$$w=\frac{1}{D}\sum_{1}^{\infty}\frac{q_k}{\lambda_k^4}\sin\lambda_k y+\sum_{1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\lambda_k x+B_k x \operatorname{sh}\lambda_k x)\sin\lambda_k y$$

$$\varphi=-\frac{2E}{1-\nu^2}\sum_{1}^{\infty}B_k\lambda_k^2 \operatorname{sh}\lambda_k x\sin\lambda_k y-\frac{12}{h^3}\sum_{1}^{\infty}C_k\lambda_k \operatorname{sh}\mu_k x\sin\lambda_k y \tag{2.1}$$

$$\psi=\frac{E}{1-\nu^2}\sum_1^\infty\frac{q_k}{D\lambda_k}\cos\lambda_k y-\frac{2E}{1-\nu^2}\sum_1^\infty B_k\lambda_k^2\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x\cos\lambda_k y-\frac{12}{h^3}\sum_1^\infty C_k\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k x\cos\lambda_k y$$

Здесь приняты обозначения

$$A_k=-\frac{q_k}{D}\,\frac{\alpha h_1}{\lambda_k^3}\,\frac{a_3a_4}{a_1+a_2},\quad B_k=\frac{q_k}{D}\,\frac{\alpha h_1}{\lambda_k^2}\,\frac{a_3}{a_1+a_2},\quad C_k=q_k\frac{\alpha h_1}{\lambda_k}\left(a_5-2\,\frac{a_3a_6}{a_1+a_2}\right)$$

$$a_1=\frac{\dfrac{EJ}{D}\,\dfrac{\lambda_k}{2}(\lambda_k a+\mathrm{sh}\,\lambda_k a)+2\,\mathrm{sh}^2\dfrac{\lambda_k a}{2}\left(1-2\dfrac{\lambda_k^2}{\delta^2}\right)}{\mathrm{sh}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}}$$

$$a_2=4\,\frac{\lambda_k^2}{\delta^2}\,\mathrm{sh}\,\mu_k\frac{a}{2}\;\frac{A\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}+h_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}}{A\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k\dfrac{a}{2}+h_2\,\mathrm{sh}\,\mu_k\dfrac{a}{2}}$$

$$a_3=(1-\nu^2)\frac{h_1^3}{h_2^3}-1+(h_1-h_2)\,\frac{2\dfrac{\lambda_k^2}{\delta^2}\,\mathrm{sh}\,\mu_k\dfrac{a}{2}}{A\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k\dfrac{a}{2}+h_2\,\mathrm{sh}\,\mu_k\dfrac{a}{2}}$$

$$a_4=\frac{\mathrm{sh}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}+\lambda_k\dfrac{a}{2}\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}}{\mathrm{sh}\,\lambda_k\dfrac{a}{2}},\quad a_5=\frac{h_1-h_2}{A\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k\dfrac{a}{2}+h_2\,\mathrm{sh}\,\mu_k\dfrac{a}{2}}$$

$$a_6=\frac{\delta^2}{4\lambda_k^2}\,\frac{a_2}{\mathrm{sh}\,\mu_k\dfrac{a}{2}},\quad \delta^2=\frac{10}{h^2}\,\frac{G'}{G},\quad \mu_k=\lambda_k\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\lambda_k^2}}$$

В общем случае условие прочности для пластинки из ортотропного композиционного материала принимается в виде

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2-\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2}\leqslant 1 \qquad (2.2)$$

где σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} — компоненты напряжений в наиболее опасных точках пластинки, σ_{B1}, σ_{B2}, τ_{B0} — прочностные характеристики композита. В случае трансверсально-изотропной пластинки $\sigma_{B1}=\sigma_{B2}=\sigma_B$, а напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{11}=-zB\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{h_2^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)\frac{B}{G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{22}=-zB\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{h_2^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)\frac{B}{G'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{12}=-2zG\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{z}{2}\left(\frac{h_2^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)\frac{G}{G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

Наиболее опасными для пластинки будут точки с координатами

$$x=0,\ y=\frac{b}{2},\ z=\frac{h_2}{2}\ \text{и}\ x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2},\ z=\frac{h_2}{2}$$

Условие прочности ребра записывается в виде

$$\sigma_{y\max}\leqslant\sigma_B \tag{2.4}$$

где $\sigma_{y\max}$—наибольшее напряжение в ребре, определяемое по формуле

$$\sigma_{y\max}=-E\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\quad \text{при}\quad x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{b}{2} \tag{2.5}$$

Таким образом, вычислив напряжения в указанных наиболее опасных точках пластинки по формулам (2.3) и ребра по формуле (2.5), из условий прочности (2.2) и (2.4) получим три значения параметра нагрузки q_{01}, q_{02} и q_{03}.

Допускаемая несущая способность будет

$$q_0=\min\{q_{01},\ q_{02},\ q_{03}\}$$

Поставленная задача оптимизации сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

найти

$$Q=\max_{\bar{x}}\bar{q}_0,\quad \bar{x}=\{\bar{h}_1,\ \alpha,\ \bar{h}_2,\ \bar{a}\} \tag{2.6}$$

при ограничениях:

$$\bar{a}(\bar{h}_0-\bar{h}_2)=2\alpha\bar{h}_1(\bar{h}_1-\bar{h}_0) \tag{2.7}$$

$$\bar{h}_0\leqslant\bar{h}_1\leqslant 0,2;\ \delta\leqslant\bar{h}_2\leqslant\bar{h}_0;\ \bar{a}\geqslant 5\bar{h}_2;\ \alpha\geqslant 0,1 \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{q}_0=q_0/\sigma_B$—целевая функция, $\bar{x}$—вектор управления, $\bar{h}_1=h_1/b$, $\bar{h}_2=h_2/b$, $\bar{a}=a/b$, $\bar{h}_0=h_0/b$, h_0—толщина сплошной пластинки заданного веса.

Ограничение (2.7) соответствует условию постоянства веса конструкции. Ограничения (2.8) обусловлены пределами применимости использованной теории изгиба пластин и балок. Для δ принимается: $\delta=0,01$ при $a\geqslant b$ и $\delta=0,01\bar{a}$ при $a<b$. Задача решается при помощи комплексного метода случайного поиска [4].

Числовые результаты получены для различных случаев анизотропии материала G/G' и приведенной толщины гладкой пластинки $\bar{h}_0$. В расчетах принято $\alpha=0,1$. Значения оптимальных параметров конструкции и соответствующие значения параметра несущей способности Q приведены в табл. 1. Случай $G/G'=1$ соответствует изотропной пластинке, рассчитанной с учетом поперечных сдвигов.

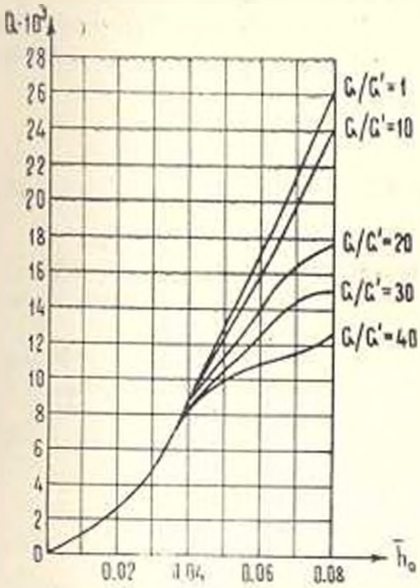
На графике (фиг. 1) приведена зависимость несущей способности оптимальной конструкции в зависимости от приведенной толщины соответствующей гладкой пластинки $\bar{h}_0$ для различных значений G/G'. Как видно из графика, для сравнительно малых толщин ($\bar{h}_0\leqslant 0,04$)

влияние анизотропии практически не сказывается на величине Q. При увеличении же $\bar{h}_0$ значения Q существенно уменьшаются с увеличением значения G/G'. Очевидно, что в этих случаях учет поперечных сдвигов при расчете пластин необходим. Результаты расчета изотропной пластинки по классической теории здесь не приведены, так как они несущественно отличаются от случая $G/G'=1$.

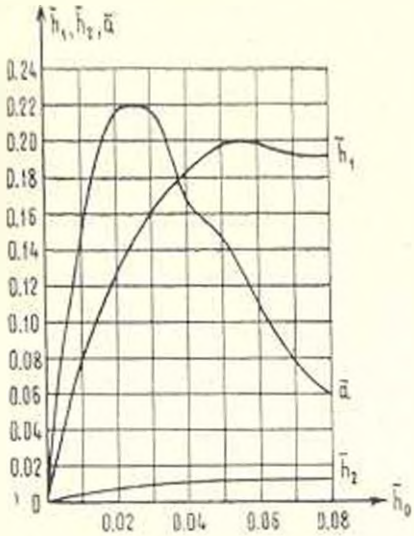
Таблица 1

G/G'	$\bar{h}_0$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\bar{a}$	Q
	0,01	0,0751	0,00381	0,1406	0,000846
	0,02	0,123	0,0071	0,2180	0,002501
	0,03	0,164	0,0100	0,2175	0,00497
1	0,04	0,181	0,00998	0,1698	0,00830
	0,05	0,190	0,00970	0,1360	0,0131
	0,06	0,200	0,0107	0,1129	0,0170
	0,07	0,200	0,0100	0,0867	0,0213
	0,08	0,200	0,0101	0,068	0,0263
	0,01	0,0750	0,00300	0,1405	0,000846
	0,02	0,1231	0,00700	0,2179	0,00250
	0,03	0,1638	0,0100	0,2174	0,00436
10	0,04	0,183	0,0105	0,1650	0,0085
	0,05	0,198	0,0107	0,1469	0,0130
	0,06	0,198	0,0109	0,1129	0,0155
	0,07	0,190	0,0110	0,076	0,0199
	0,08	0,190	0,0119	0,0597	0,0243
	0,01	0,0750	0,00305	0,1406	0,000849
	0,02	0,1250	0,00730	0,2201	0,002401
	0,03	0,1640	0,0100	0,2178	0,00494
20	0,04	0,1780	0,0101	0,1671	0,0082
	0,05	0,200	0,01080	0,151	0,0126
	0,06	0,185	0,0121	0,1301	0,0131
	0,07	0,186	0,0121	0,0683	0,0166
	0,08	0,191	0,01402	0,065	0,0176
	0,01	0,0751	0,00303	0,1406	0,000844
	0,02	0,127	0,00730	0,2200	0,00230
	0,03	0,1638	0,00990	0,2152	0,00499
40	0,04	0,1720	0,0100	0,1686	0,00800
	0,05	0,192	0,0115	0,1541	0,0101
	0,06	0,195	0,014	0,121	0,0110
	0,07	0,200	0,0180	0,0861	0,0116
	0,08	0,195	0,016	0,0596	0,0120

На графике (фиг. 2) для одного из случаев анизотропии материала $G/G'=10$ показаны зависимости оптимальных геометрических характеристик конструкции от приведенной толщины гладкой пластинки $\bar{h}_0$. Здесь характерно, что с увеличением $\bar{h}_0$ вначале увеличиваются все геометрические параметры пластинки, а затем толщины ребер $\bar{h}_1$ и пластинки $\bar{h}_2$ устанавливаются, приближаясь к значениям $\bar{h}_1=0,2$ и $\bar{h}_2=0,01$, постоянство же веса конструкции обеспечивается уменьшением межреберного расстояния $\bar{a}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что ввиду двойственности поставленной задачи оптимального проектирования, по полученным результатам можно решить обратную задачу, то есть по заданной нагрузке определить конструкцию минимального веса. Для этого из графика на фиг. 1 по заданному параметру несущей способности Q определяется соответствующая толщина гладкой пластинки $\bar{h}_0$, через которую по графику на фиг. 2 определяются оптимальные параметры конструкции $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ и $\bar{a}$.

ANALYSIS OF AN OPTIMAL RIBBED PLATE OF COMPOSITE MATERIAL WITH REGARD TO TRANSVERSE SHEARS

E. V. BELYBEKIAN, A. Z. DARBINIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿՈՂԱՎՈՐՎԱԾ ՕՊՏԻՄԱԼ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ, ՈՐՏԵՂ ՀԱՇՎԻ Է ԱՌՆՎԱԾ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԸ

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ա. Զ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Սալերի ծռման ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և կոշտության կողերով ուժեղացված նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող երկար ուղղանկյուն սալի նախագծման խնդիրը։

Հաշվի առնելով կողերի և նրանց միջև գտնվող սալերի ամրության վրա դրված սահմանափակումները, որոշվում են կոնստրուկցիայի երկրաչափական պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա մաքսիմալ կրողունակությունը անփոփոխ կշռի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 534 с.
2. *Белубекян Э. В., Дарбинян А. З.* Проектирование оптимальной длинной ребристой пластинки. В межвузовском сб.: Инженерные проблемы строительной механики. Ереван: 1985, с. 77—81.
3. *Белубекян Э. В., Дарбинян А. З.* Оптимальное оребрирование длинной пластинки, изготовленной из композиционного материала.—Докл. АН Арм. ССР, 1986, т. 82, № 5, с. 214—217.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 266 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.I.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 531+539.3

О ВЗАИМОСВЯЗИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И О СМЫСЛЕ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ*

ПОБЕДРЯ Б. Е.

Классическая теория упругости (геометрически и физически линейная) в последнее время приобрела «второе дыхание». Появились новые ее разделы, которые нашли широкое применение на практике.

На основе математической теории угловых особенностей [1—4] сделаны работы, в которых анализируются такие особенности при решении краевых задач линейной теории упругости [5—7], а также математической теории трещин [8, 9]. Широкое распространение получили контактные задачи [10—12], а также краевые задачи теории упругости с односторонними ограничениями [13—15]. При изучении всех вышеупомянутых вопросов деформации считаются малыми (геометрически линейная теория упругости), однако вектору перемещения придается смысл, который он имеет при рассмотрении больших (или конечных) деформаций. В ряде случаев это приводит к некоторым парадоксам, которые легко объяснимы и хорошо известны механикам. Однако, автор по опыту преподавания на факультете повышения квалификации механико-математического факультета Московского университета знает, что у некоторых механиков наличие этих парадоксов вызывает удивление. Учитывая, что практически ни в одном учебнике теории упругости эти вопросы в должной мере не освещены, автор отважился еще раз предостеречь механиков от возможных ошибок, связанных с неправильной трактовкой вектора перемещений в случае малых деформаций.

Далее, в последнее время появилось много работ, посвященных нелинейной теории упругости (см., например, монографии [16—19]). В силу того, что теория упругости как угодно больших деформаций достаточно сложна и в рамках этой теории в настоящее время решены лишь самые простые задачи (как правило с известной кинематикой), ряд авторов рассматривает различные виды линеаризации общих соотношений. К сожалению, имеются работы, в которых результаты решения линеаризованных уравнений применяются к задачам, где такая линеаризация незаконна. Особенно часты недоразумения, вызванные рассмотрением физически линейной теории упругости при учете геометрической нелинейности. Иногда критикуется применимость физи-

* Доклад на Всесоюзной конференции по теории упругости. Тбилиси, 10 декабря 1984 г.

чески нелинейной, но геометрически линейной теории [19], с. 249. Ниже будет изложена точка зрения автора на вопрос о взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в механике деформируемого твердого тела, с которой, впрочем, некоторые читатели могут и не согласиться.

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве некоторая материальная точка в недеформированном состоянии описывается радиусом-вектором $\vec{r}$ с прямоугольными декартовыми координатами x_i ($i=1, 2, 3$) [20]. В результате деформации эта же материальная точка займет положение, описываемое радиусом-вектором $\vec{R}$ с координатами y_i (фиг. 1). Вектор перемещений $\vec{u}$ определяется соотношениями [21]

$$\vec{R}=\vec{r}+\vec{u} \qquad (y_i=x_i+u_i) \tag{1.1}$$

Обозначая запятой частную производную по соответствующей координате $\left(y_{i,j}\equiv\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, получим из (1.1)

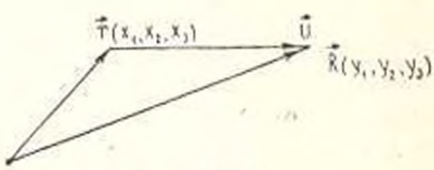
$$y_{i,j}=x_{i,j}+u_{i,j}=\delta_{ij}+u_{i,j} \tag{1.2}$$

где δ_{ij}—символы Кронекера [20]. Тензор, имеющий компоненты $y_{i,j}$, называется тензором градиента места [19] и обозначается через $\overset{0}{\nabla}\vec{R}$. На его основе может быть введена мера деформации Коши-Грина $\underline{G}$:

$$G_{ij}=y_{k,i}\,y_{k,j} \quad (\underline{G}=\overset{0}{\nabla}\vec{R}\cdot\overset{0}{\nabla}\vec{R}') \tag{1.3}$$

и тензор деформации Коши-Грина

$$C_{ij}=\frac{1}{2}\,(G_{ij}-\delta_{ij})=\frac{1}{2}\,(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\,u_{k,j}) \tag{1.4}$$



Фиг. 1

В механике сплошной среды предполагается, что соотношения, согласно которым каждому вектору $\vec{r}$ ставится в соответствие вектор $\vec{R}$

$$y_i=y_i(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{1.5}$$

должны быть разрешимы относительно координат

$$x_i=x_i(y_1,\ y_2,\ y_3) \tag{1.6}$$

что соответствует тому факту, что две различные материальные частицы в результате деформирования не могут слиться. Это требование локально записывается в виде

$$\det|y_{i,j}|\neq 0 \tag{1.7}$$

Тензор, имеющий компоненты $x_{i|j}\equiv\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$, также образует тензор градиента места $\nabla\vec{r}$ [19], причем тензоры $\overset{0}{\nabla}\vec{R}$ и $\nabla\vec{r}$ взаимно обратны.

На основе тензора $\nabla\vec{r}$ можно ввести меру деформации Альманзи

$$g_{ij}=x_{k,i}x_{k,j} \quad (\underset{\sim}{g}=\nabla\vec{r}\cdot\nabla\vec{r}^{T}) \tag{1.8}$$

и тензор деформации Альманзи $\underset{\sim}{A}$

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-g_{ij})=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j}) \tag{1.9}$$

Иногда «на жаргоне» тензоры $\underset{\sim}{G}$ и $\underset{\sim}{g}$ называют метрическими, хотя в рассматриваемом евклидовом трехмерном пространстве R_3 «настоящий» метрический тензор будет единичным [20].

Кроме введенных мер деформации $\underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{A}$ можно ввести много других [18, 19, 21]. Представим тензор $u_{i,j}$ (тензор дисторсии) в виде суммы симметричного ε_{ij} и антисимметричного ω_{ij} тензоров [20]

$$u_{i,j}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad \omega_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}) \tag{1.10}$$

Тогда тензор $\underset{\sim}{C}$ (1.4) можно представить в виде

$$C_{ij}=\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}(\varepsilon_{ki}+\omega_{ki})(\varepsilon_{kj}+\omega_{kj}) \tag{1.11}$$

Тензор $\underset{\sim}{\varepsilon}$ с шестью независимыми компонентами ε_{ij} называют тензором малых деформаций, а тензор $\underset{\sim}{\omega}$ с тремя независимыми компонентами—тензором поворотов.

Деформации называются малыми [16, 21], если максимальное значение $|u_{i,j}|$ во всех точках среды и в любой момент времени намного меньше единицы

$$|u_{i,j}|\sim\delta\ll 1 \tag{1.12}$$

Как следует из (1.2), (1.7) и (1.12) в случае малых деформаций

$$\det|y_{i,j}|\sim 1+\delta \tag{1.13}$$

2. Пусть соотношения (1.5) описывают конечный поворот всех точек среды на угол φ вокруг оси x_3 (фиг. 2). Тогда

$$y_1=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi$$

$$y_2=x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi, \qquad y_3=x_3 \tag{2.1}$$

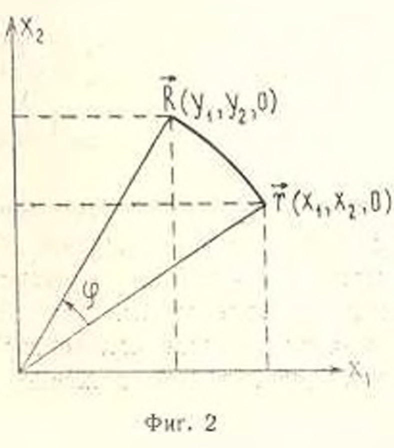
$$u_1=x_1(\cos\varphi-1)-x_2\sin\varphi$$

$$u_2=x_1\sin\varphi+x_2(\cos\varphi-1), \quad u_3=0 \tag{2.2}$$

Подсчитывая по формулам (1.10), имеем для этого случая отличными от нуля компоненты тензоров $\underset{\sim}{\varepsilon}$ и $\underset{\sim}{\omega}$:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\cos\varphi-1 \tag{2.3}$$

$$\omega_{12}=\sin\varphi \tag{2.4}$$



Фиг. 2

Таким образом, несмотря на то, что при преобразовании (2.1) расстояния между любыми двумя частицами сохраняются (удлинения всех волокон равны нулю), компоненты ε_{11} и ε_{22} тензора малых деформаций (которые имеют физический смысл удлинений координатных волокон [21]) отличны от нуля (2.3).

Если же рассматриваются настолько малые повороты, что можно принять

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1 \tag{2.5}$$

вместо (2.1) получим

$$y_1 = x_1 - \varphi x_2, \quad y_2 = \varphi x_1 + x_2, \quad y_3 = x_3 \tag{2.6}$$

$$u_1 = -\varphi x_2, \quad u_2 = \varphi x_1, \quad u_3 = 0 \tag{2.7}$$

и все компоненты тензора малых деформаций будут тождественно равны нулю, а компонента тензора поворота $\omega_{12} = -\varphi$. Однако, при этом волокно, выходящее из начала координат и имеющее до деформации длину l, после деформации будет иметь длину $l\sqrt{1+\varphi^2}$.

Иногда для случая малых удлинений и больших поворотов (чаще всего при рассмотрении тонкостенных конструкций) в формуле (1.11) пренебрегают произведением компонент тензора ε, то есть полагают

$$C_{ij} \approx \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\omega_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\omega_{kj}) \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что компоненты тензора деформаций C, подсчитанные по формулам (1.4), (2.2) тождественно равны нулю. Если же воспользоваться формулой (2.8), то они будут тождественно равны нулю, если в (2.2) положить

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin\varphi \approx \varphi \tag{2.9}$$

Следовательно, формулами (2.8) можно пользоваться, когда компоненты малой деформации подсчитываются с точностью $o(\delta)$, а компоненты тензора поворотов—с точностью до $o(\delta^2)$, причем должны выполняться условия (1.12), то есть если поворот φ достаточно велик, формулы (2.8) не приемлемы.

3. Геометрически линейной теорией называется теория, использующая допущение (1.12), в результате которого можно положить в (1.11)

$$C_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.1}$$

Именно такие соотношения принимаются в классической линейной теории упругости (соотношения Коши). При этом эйлеровы координаты считаются с точностью бесконечно малых высшего порядка совпадающими с лагранжевыми [21]. Вектор перемещений можно рассматривать в этом случае как вектор, с помощью которого определяется деформированное и напряженное состояния (что чаще всего и требуется в инженерных задачах). Придавать вектору перемещений $\vec{u}$ при малых деформациях смысл, указанный на фиг. 1, можно не всегда. В частности, нужно следить за выполнением условий (1.12), (1.13). Если условие (1.12) не выполняется, то вектор перемещения теряет свой физический смысл.

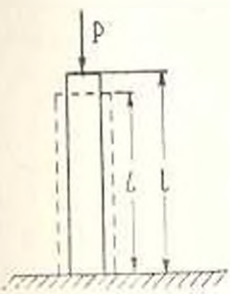
Рассмотрим некоторые примеры.

А. Пусть стержень первоначальной длины l (достаточно большой) и поперечного сечения F сжимается силой P (фиг. 3). Очевидно, его деформация будет

$$\varepsilon=-\frac{P}{EF} \tag{3.2}$$

где E—модуль Юнга. Если, оставаясь в рамках линейной теории упругости, придать физический смысл вектору перемещений согласно фиг. 1, то длину стержня после деформации можно записать в виде

$$L=l\left(1-\frac{P}{EF}\right) \tag{3.3}$$



Фиг. 3

Фиг. 4

Отсюда видно, что при $P>EF$ стержень после сжатия силой P будет иметь отрицательную длину $L<0$. (Разумеется, при такой силе стержень нельзя считать линейно упругим). Более того, при достижении эйлеровой нагрузки стержень потеряет устойчивость [22].

Б. Пусть стержень (фиг. 4) подвергается равномерно распределенной нагрузке p. Тогда для изотропной линейно упругой среды можно записать

$$\sigma_{11}=p=a(1+m^2), \quad \sigma_{22}=0 \tag{3.4}$$

где

$$a=\frac{1}{\nu-m^2+\nu m^2} \tag{3.5}$$

ν—коэффициент Пуассона, а m—некоторое число. Придавая физический смысл вектору перемещения, мы получим координаты точек стержня после деформации

$$y_1=a(x_1-mx_2), \quad y_2=am(x_1-mx_2), \quad y_3=x_3 \tag{3.6}$$

В результате такой деформации материальные волокна, образующие до деформации прямые

$$x_1 - m x_2 = c, \quad c = \text{const} \tag{3.7}$$

превратятся после деформации в точки, имеющие координаты

$$y_1 = ac, \quad y_2 = amc \tag{3.8}$$

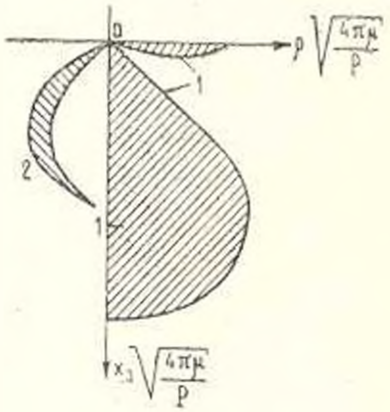
B. Решение задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы P на границу упругого полупространства $x_3 \geqslant 0$ имеет вид [23]

$$u_i = \frac{P}{4\pi\mu}\left[\frac{x_i x_3}{r^3} + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{i3}}{r} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{x_i - x_3\delta_{i3}}{r(x_3+r)}\right] \tag{3.9}$$

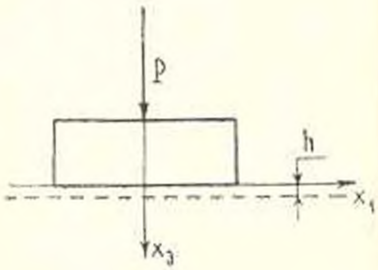
где λ, μ — постоянные Ламе, $r = \sqrt{x_i x_i}$. Если ввести цилиндрическую систему координат $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, φ, x_3, то решение (3.9) можно записать в виде

$$u_1 = \frac{P\rho}{4\pi\mu}\left[\frac{2x_3}{r^3} - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)(r+x_3)}\right]$$

$$u_3 = \frac{P}{4\pi\mu}\left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda+2\mu}{(\lambda+\mu)r}\right], \quad r = \sqrt{\rho^2 + x_3^2} \tag{3.10}$$



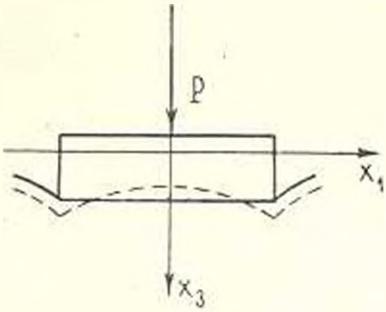
Фиг. 5.



Фиг. 6

На фиг. 5 изображена «зона фиктивных деформаций» [10], представляющая собой тело вращения, которое образуется вращением плоской фиг. 1 вокруг оси Ox_3, если $P > 0$, и фиг. 2, если $P < 0$. При этом $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = 0{,}3$. «Зоной фиктивных деформаций» называется область, в которой нарушается условие (1.7). Если некоторые точки A и B принадлежат этой зоне, причем $OA > OB$, то придавая физический смысл вектору перемещений, посчитанному по формулам (3.9) или (3.10), и вычислив в соответствии с этим смыслом положение материальных точек A и B после деформации (обозначим это положение, соответственно A_1, B_1), мы получим после деформации $OA_1 < OB_1$.

Г. В работе [10] приводятся еще некоторые примеры появления «зон фиктивных деформаций». Например, на фиг. 6 изображено положение до внедрения кругового штампа с плоской подошвой в упругое полупространство $x_3 \geqslant 0$ силой P. Пунктиром изображена некоторая плоскость $x_3 = h$, достаточно близкая к плоскости $x_3 = 0$. На фиг. 7 показано как изменяется взаимное расположение плоскостей $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ после внедрения штампа в поверхность. Из фиг. 7 видно, что почти вся плоскость контакта пронизывается поверхностью, в которую переходит плоскость $x_3 = h$.



Фиг. 7

Можно привести еще много примеров подобного рода из теории трещин, теории угловых особенностей в упругих телах и теории контактных задач. В частности, в работе [10] разъясняется парадокс, обнаруженный в [24] для плоской задачи о штампе, сцепленном с упругой полуплоскостью. При приближении к краям площадки контакта нормальное и тангенциальное напряжения бесконечное число раз меняют знак (осциллируют).

Разобранные выше примеры говорят лишь о том, что иногда существуют области, в которых вектор перемещений линейной теории упругости теряет физический смысл собственно «перемещения», но ни в коем случае не отрицают целесообразности рассмотрения таких задач.

4. Как уже было упомянуто, в случае конечных (больших) деформаций можно вводить бесчисленное число характеризующих их мер и тензоров, в то время как в случае малых деформаций рассматривается только один тензор (3.1). Аналогично, в случае малых деформаций рассматривается единственный тензор второго ранга σ, характеризующий напряженное состояние среды. В случае конечных деформаций можно вводить бесчисленное множество тензоров напряжений. Например, тензор

$$\tilde{T} = t^{ij} \vec{R}_i \otimes \vec{R}_j \tag{4.1}$$

где $\vec{R}_i$—векторы базиса в деформированном состоянии, которые в недеформированном состоянии были $\vec{r}_i$

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i}, \quad \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \tag{4.2}$$

Тензор $\tilde{T}$ является симметричным и называется в [19] тензором Коши, в [16]—истинным тензором напряжений, а в [25]—тензором Лагранжа. Несимметричный тензор

$$\underset{\sim}{P}=p^{ij}\vec{r}_i\otimes\vec{R}_j=\sqrt{\frac{G}{g}}\,\nabla\vec{r}^{\,i}\cdot\underset{\sim}{T} \tag{4.3}$$

где

$$G=\det\left|\frac{\partial\vec{R}}{\partial x^i}\,\frac{\partial\vec{R}}{\partial x^j}\right|,\qquad g=\det\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^j}\right| \tag{4.4}$$

в [19] называется тензором Пиолы, в [16]—тензором обобщенных напряжений, а в [25]—тензором Лагранжа. Симметричный тензор

$$\underset{\sim}{K}=\sqrt{\frac{G}{g}}\,t^{ij}\vec{r}_i\otimes\vec{r}_j=\sqrt{\frac{G}{g}}\,\nabla\vec{r}^{\,i}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\nabla\vec{r}=\underset{\sim}{P}\cdot\nabla\vec{r} \tag{4.5}$$

называется тензором Кирхгоффа.

При написании выражения элементарной работы необходимо каждой мере деформации, рассматриваемой как обобщенное перемещение, поставить в соответствие некоторый тензор напряжений, рассматриваемый в качестве обобщенной силы. Например,

$$\delta A=\underset{\sim}{P}:\delta\overset{0}{\nabla}\vec{R}^{T} \tag{4.6}$$

$$\delta a=\frac{1}{2}\underset{\sim}{K}:\delta G=\underset{\sim}{K}:\delta\underset{\sim}{C} \tag{4.7}$$

или для мощности

$$\frac{\delta A^{(i)}}{dt}=\underset{\sim}{T}:\underset{\sim}{D},\qquad D_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i) \tag{4.8}$$

где v_i—компоненты вектора скорости $\vec{v}$.

Когда говорят о геометрически нелинейных и физически линейных соотношениях, то имеют в виду, что линейно связаны между собой соответствующие обобщенные силы и обобщенные перемещения. Даже из формул (4.6)—(4.8) видно, что, если эти соотношения будут линейными между одними обобщенными силами и перемещениями, то они будут, вообще говоря, нелинейными между другими обобщенными силами и перемещениями. Более того, наличие упомянутой линейной связи в «упругом» теле вовсе не означает, что существует не только квадратичный, но и вообще какой-либо упругий потенциал [19]. (Упругие тела, для которых существует такой потенциал, называются гиперупругими [18, 19, 25]).

Таким образом, в иерархии нелинейностей геометрическая нелинейность занимает более высокую ступень и уж если известно, что имеет место геометрическая нелинейность, то с необходимостью следует и наличие физической нелинейности. Пожалуй, единственным логически оправданным случаем использования понятия физической линейности при геометрической нелинейности является рассмотрение тонкостенных конструкций, в которых тензор малых деформаций связан линейно с тензором напряжений, но учитываются дополнительные слагаемые в связи с учетом квадратичных членов, характеризующих повороты ω (1.10).

Очень странными выглядят попытки некоторых авторов обобщить нелинейную теорию упругости на вязкоупругий случай путем введения линейных интегральных операторов Вольтерры по времени. Оправдать такое введение можно, если бы этим авторам удалось описать хотя бы «наивную» модель, использующую «пружинки» и «поршеньки» [26] или дополнительные параметры, характеризующие реальное поведение материала [27].

5. Существуют материалы, в которых при малых деформациях проявляется нелинейная зависимость тензора напряжений от тензора деформаций. Такая нелинейность называется физической. Характерными представителями физически нелинейных материалов являются многие металлы, которые описываются теорией малых упругопластических деформаций при простом активном нагружении [28]. Эта теория нашла широкое применение на практике и дает вполне удовлетворительное согласие с результатами многих экспериментов. Геометрическая линейность такой теории позволяет пользоваться тензором малых деформаций, дать корректную постановку краевых задач (с доказательством существования и единственности решения), а также предложить эффективные методы для решения этих задач [28, 23].

В работе [19] дается критика физически нелинейной теории упругости на примере гиперупругого тела с потенциальной энергией Мурнагана. Рассмотрим этот пример для одномерного случая. И хотя в одномерном случае линейная мера деформации ε

$$\varepsilon=\frac{du}{dx} \tag{5.1}$$

описывает произвольно большие деформации (в одномерном случае отсутствуют повороты и требуется описать только удлинение волокна), мы будем исходить из трехмерной теории, полагая, что имеется только одна компонента u вектора перемещения, зависящая от одной координаты x.

Тогда единственная компонента тензора деформации Коши-Грина C (1.11) имеет вид:

$$C=\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2 \tag{5.2}$$

Для одномерного деформированного состояния упругий потенциал тела Мурнагана можно записать следующим образом:

$$W=\frac{a}{2}C^2+\frac{b}{3}C^3 \tag{5.3}$$

где a, b—некоторые материальные постоянные.

Подсчитывая напряжение K, имеем

$$K=\frac{\partial W}{\partial C}=aC+bC^2 \tag{5.4}$$

Учитывая выражение (5.2) и сохраняя члены не более второго порядка относительно ε, получим

$$K \approx a\varepsilon + \left(\frac{a}{2} + b\right)\varepsilon^2 \tag{5.5}$$

В работе [19] предлагается для малых деформаций положить в (5.3) $C \approx \varepsilon$:

$$W \approx \frac{a}{2}\varepsilon^2 + \frac{b}{3}\varepsilon^3 \tag{5.6}$$

Тогда напряжение будет

$$K = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = a\varepsilon + b\varepsilon^2 \tag{5.7}$$

То есть отличается от (5.5) на слагаемое той же второй степени, что и учитываемые в (5.7).

Однако, подобное утверждение основано на недоразумении.

Прежде всего при линеаризации $C \approx \varepsilon$, следует записать из (5.3) вместо (5.6)

$$W(\varepsilon + \delta\varepsilon) = W(\varepsilon) + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \ldots \tag{5.8}$$

где $\delta\varepsilon$ согласно (5.2) равно

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \tag{5.9}$$

Далее, напряжение должно быть посчитано по формуле (5.4)

$$K = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C}\left[\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2}\delta\varepsilon + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\delta\varepsilon) + \ldots\right], \tag{5.10}$$

и, учитывая, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{1}{1+\varepsilon} \tag{5.11}$$

получим из (5.10), (5.9)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{1+\varepsilon}\left[(a\varepsilon + b\varepsilon^2) + (a + 2b\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{2} + (a\varepsilon + b\varepsilon^2)\varepsilon + \ldots\right] \approx \\ &\approx (1-\varepsilon)\left[a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \frac{a}{2}\varepsilon^2 + a\varepsilon^2 + \ldots\right] \approx a\varepsilon + \left(\frac{a}{2} + b\right)\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

что совпадает с (5.5).

Разумеется, физически нелинейная и геометрически линейная теория имеет право на существование, хотя следует проявлять необходимую осторожность при физической интерпретации вектора перемещений, что было обсуждено в первых трех пунктах.

Автор благодарен Н. Х. Арутюняну за предложение написать данную работу.

ON THE INTERRELATION BETWEEN GEOMETRICAL AND PHYSICAL NON-LINEARITY IN THE THEORY OF ELASTICITY AND ON THE SENSE OF THE DISPLACEMENT VECTOR

B. E. POBEDRIA

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԿԱՊԻ ԵՎ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵԿՏՈՐԻ ԻՄԱՍՏԻ ՄԱՍԻՆ

Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ

Ա մ փ ո փ ու մ

Քննարկվում է այն հարցը, թե կարող են գոյություն ունենալ երկրաչափորեն ոչ գծային, բայց ֆիզիկորեն գծային, ինչպես նաև ֆիզիկորեն ոչ գծային, բայց երկրաչափորեն գծային առաձգականության տեսություններ։ Ցույց է տրվում, որ առաձգականության դասական տեսության դեպքում (երկրաչափորեն և ֆիզիկորեն գծային) տեղափոխությունների վեկտորի սխալ մեկնաբանումը կհանգեցնի որոշ պարադոքսների։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.—Тр. Моск. матем. об-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи с частными производными в негладких областях.—Успехи матем. наук, 1983, т. *38*, №2, с. 3—76.
3. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений.— Докл. АН СССР, 1974, т. *219*, №2, с. 286—289.
4. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками.—Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1981, №2, с. 52—59.
5. *Арсенян В. А., Заргарян С. С.* Численное решение плоских задач теории упругости для областей с углами.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. *36*, №1, с. 47—55.
6. *Заргарян С. С.* Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура.—Докл. АН АрмССР, 1983, т. *27*, №1, с. 30—34.
7. *Беркун В. Б., Попов В. А.* Исследование решений краевых задач теории упругости в окрестности сингулярных точек границы. Деп. в ВИНИТИ 1983, №640—83.
8. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин и острых вырезов. Инст. Проблем мех. АН СССР, Препринт №193, 1982. 57 с.
9. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
10. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 236 с.
11. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: изд-во ЕГУ, 1983. 260 с.
12. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

13. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
14. *Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
15. *Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1983. 349 с.
16. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948.
17. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
18. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
19. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
20. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. 207 с.
21. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
22. *Вольмир А. С.* *Устойчивость* деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
23. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 344 с.
24. *Абрамов В. М.* Проблемы контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения.—Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4, с. 173—178.
25. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
26. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
27. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
28. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 376 с.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию
30.I.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

КАХКЦЯН В. М.

Рассматривается задача колебаний анизотропной цилиндрической оболочки, изготовленной из композиционного материала.

1. Как известно [1], в случае пластин и оболочек из композиционных материалов точность гипотезы недеформируемых нормалей определяется не только значением отношений геометрических параметров h/c, а также величинами B_{ik} a_{pq} (i, k=1, 2, 6; p, q=4, 5), где h—толщина, c—характерный размер пластинки или оболочки в плане, B_{ik}—коэффициенты упругости

$$\begin{aligned}
&B_{11}=(a_{22}a_{66}-a_{26}^2)\Omega_0^{-1}, \quad B_{22}=(a_{11}a_{66}-a_{16}^2)\Omega_0^{-1} \\
&B_{12}=(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66})\Omega_0^{-1}, \quad B_{66}=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\Omega_0^{-1} \qquad (1.1) \\
&B_{16}=(a_{12}a_{26}-a_{22}a_{16})\Omega_0^{-1}, \quad B_{26}=(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26})\Omega_0^{-1} \\
&\Omega_0=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{16}^2-a_{22}a_{16}^2
\end{aligned}$$

a_{pq} —коэффициенты деформации, причем a_{44}, a_{45}, a_{55} характеризуют деформации поперечного сдвига

$$e_{13}=a_{45}\tau_{23}+a_{55}\tau_{13}, \quad e_{23}=a_{44}\tau_{23}+a_{45}\tau_{13} \qquad (1.2)$$

e_{ik}, τ_{ik} —соответственно, деформации и напряжения. Ниже решается задача колебаний анизотропных оболочек на основе уточненной теории [1] и оценивается влияние деформаций поперечных сдвигов на первую (основную) частоту собственных колебаний.

Уравнения колебания цилиндрической оболочки радиуса R, длины l, толщины h, изготовленной из анизотропного материала, на основе уточненной теории [1, 2] получаются в виде

$$A_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+2A_{16}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^3\partial\beta}+(A_{66}-2A_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}-2A_{26}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^3}+A_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0$$

$$J_5\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+J_6\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=-q+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+3D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^3\partial\beta}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-$$

$$-J_3(B_{11}a_{55}+B_{16}a_{45})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-J_3(B_{16}a_{45}+2B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-J_3(B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-J_4(B_{11}a_{45}+B_{16}a_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-J_4(B_{12}a_{44}+$$

$$+2B_{16}a_{45}+B_{66}a_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}-J_4(B_{26}a_{44}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+J_5\varphi=0 \qquad (1.3)$$

$$D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$

$$-J_3(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-J_3(B_{12}a_{55}+2B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-J_3(B_{22}a_{45}+B_{26}a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-J_4(B_{16}a_{45}+B_{66}a_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-J_4(B_{12}a_{44}+2B_{26}a_{44}+$$

$$+B_{66}a_{45})\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}-J_4(B_{22}a_{44}+B_{26}a_{45})\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+J_6\psi=0$$

Отметим, что в (1.3) влиянием тангенциальных сил инерции и инерции вращения пренебрегается. Здесь $\Phi(\alpha, \beta, t)$—функция усилий, $w(\alpha, \beta, t)$—прогиб, $\varphi(\alpha, \beta, t)$, $\psi(\alpha, \beta, t)$—функции поперечных сдвигов, α—координата по образующей, β—по дуге поперечного сечения,

$$C_{ik}=B_{ik}h,\ D_{ik}=B_{ik}h^3/12,\quad J_3=\int_{-h/2}^{h/2}J_{01}(\gamma)\gamma d\gamma,\ J_4=\int_{-h/2}^{h/2}J_{02}(\gamma)\gamma d\gamma$$

$$J_5=\int_{-h/2}^{h/2}f_1(\gamma)d\gamma,\quad J_6=\int_{-h/2}^{h/2}f_2(\gamma)d\gamma$$

$f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ определяют закон изменения касательных напряжений σ_{13}, σ_{23} по толщине,

$$A_{11}=(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)\Omega^{-1},\quad A_{22}=(C_{22}C_{66}-C_{16}^2)\Omega^{-1}$$

$$A_{12}=(C_{12}C_{66}-C_{16}C_{26})\Omega^{-1},\quad A_{66}=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)\Omega^{-1}$$

$$A_{16}=(C_{11}C_{26}-C_{12}C_{16})\Omega^{-1},\quad A_{26}=(C_{22}C_{16}-C_{26}^2)\Omega^{-1}$$

$$\Omega=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)C_{66}+2C_{12}C_{16}C_{26}-C_{11}C_{26}^2-C_{22}C_{16}^2$$

Как показано в [1—3], без существенных погрешностей можно принять

$$f_1(\gamma)=f_2(\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)$$

тогда

$$J_{01}(\gamma)=J_{02}(\gamma)=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{\gamma^2}{3}\right),\quad J_3=J_4=\frac{h^5}{120},\quad J_5=J_6=\frac{h^3}{12}$$

пусть

$$w=w_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)),\quad \Phi=\Phi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta))$$

$$\varphi=\varphi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)),\quad \psi=\psi_{mn}(t)\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta)) \qquad (1.4)$$

$$\lambda_m=m\pi/l,\quad \mu_n=n/R$$

где m—число полуволн по образующей, n—число волн по окружности поперечного сечения. В случае оболочек из ортотропного материала функции $\exp(-i(\lambda_m\alpha+\mu_n\beta))$ являются собственными функциями задачи свободных колебаний шарнирно опертой по торцам цилиндрической оболочки. В силу (1.4), из системы (1.3) для частот собственных колебаний оболочки получается

$$\omega_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\rho h}}\left\{[D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+\right.$$

$$+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4]\frac{1+\Delta_{1mn}}{1+\Delta_{2mn}}+\frac{\lambda_m^4}{R^2}[A_{11}\lambda_m^4+2A_{16}\lambda_m^3\mu_n+ \qquad (1.5)$$

$$\left.+(A_{66}-2A_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+2A_{26}\lambda_m\mu_n^3+A_{22}\mu_n^4]^{-1}\right\}^{1/2}$$

где введены обозначения

$$\Delta_{1mn}=[h^2(b_{1mn}a_{3mn}-a_{2mn}b_{3mn})\lambda_m+(a_{1mn}b_{3mn}-b_{2mn}a_{3mn})\mu_n]\times$$

$$\times[10(D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n)+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4]^{-1}$$

$$\Delta_{2mn}=\frac{h^2}{10}(a_{1mn}+b_{1mn})+\frac{h^4}{100}(a_{1mn}b_{1mn}-a_{2mn}b_{2mn})$$

$$a_{1mn}=(B_{11}a_{55}+B_{16}a_{45})\lambda_m^2+(B_{12}a_{45}+2B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\lambda_m\mu_n+(B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\mu_n^2$$

$$a_{2mn}=(B_{11}a_{45}+B_{16}a_{44})\lambda_m^2+(B_{12}a_{44}+2B_{16}a_{45}+B_{66}a_{44})\lambda_m\mu_n+(B_{26}a_{44}+B_{66}a_{45})\mu_n^2$$

$$a_{3mn}=D_{11}\lambda_m^3+3D_{16}\lambda_m^2\mu_n+(D_{12}+2D_{66})\lambda_m\mu_n^2+D_{26}\mu_n^3$$

$$b_{1mn}=(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{44})\lambda_m^2+(B_{12}a_{45}+2B_{26}a_{44}+B_{66}a_{45})\lambda_m\mu_n+(B_{22}a_{44}+B_{26}a_{45})\mu_n^2$$

$$b_{2mn}=(B_{16}a_{55}+B_{66}a_{45})\lambda_m^2+(B_{12}a_{55}+2B_{26}a_{45}+B_{66}a_{55})\lambda_m\mu_n+(B_{22}a_{45}+B_{26}a_{55})\mu_n^2$$

$$b_{3mn}=D_{16}\lambda_m^3+3D_{26}\lambda_m\mu_n^2+(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n+D_{22}\mu_n^3$$

При $\Delta_{1mn}=\Delta_{2mn}=0$ получается значение собственной частоты оболочки, определенной на основе классической теории анизотропных оболочек [2,4]

$$\omega_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\rho h}}\left\{D_{11}\lambda_m^4+4D_{16}\lambda_m^3\mu_n+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+4D_{26}\lambda_m\mu_n^3+D_{22}\mu_n^4+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_m^4}{R^2}[A_{11}\lambda_m^4+2A_{16}\lambda_m^3\mu_n+(A_{66}-2A_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+2A_{26}\lambda_m\mu_n^3+A_{22}\mu_n^4]^{-1}\right\}^{1/2} \qquad (1.6)$$

2. Рассмотрим оболочку, изготовленную из элементарных слоев ортотропного композиционного материала типа боропластика [5]

$B^0_{12}=0{,}0178B^0_{11}$, $B^0_{22}=0{,}0635B^0_{11}$, $B^0_{66}=0{,}0223B^0_{11}$, $a^0_{11}=49{,}9/B^0_{11}$, $a^0_{55}=44{,}8/B^0_{11}$

уложенных под углом φ относительно образующей оболочки. Коэффициенты B_{ik} и a_{ik} для любого φ определяются формулами поворота [1]. Ставится следующая задача;
для заданных l/R и l/h найти

$$\omega_1^* = \max_{\varphi} \min_{(m,n)} \omega_1(m, n, \varphi) \qquad (2.1)$$

где

$$\omega_1 = l\sqrt{12\rho}\,\omega_{mn}/\pi^2\sqrt{B_{11}^0}, \quad \varphi\in[0,\ 90°],\ m, n\in N \qquad (2.2)$$

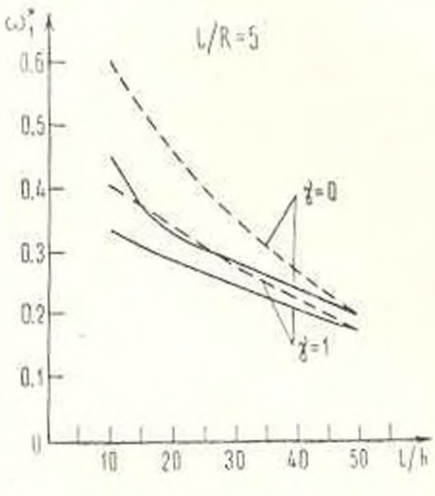
Расчеты выполнены при

$$l/R=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 6, \quad l/h=100,\ 50,\ 25,\ 20,\ 15,\ 10. \qquad (2.3)$$

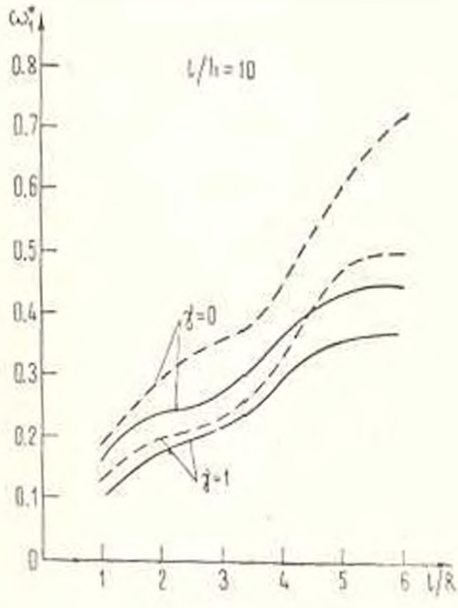
Рассматриваются два варианта организации пакета оболочки по толщине. В первом случае монослои ортотропного композиционного материала уложены под углом φ относительно образующей оболочки и пакет оболочки в целом анизотропный, а во втором случае монослои уложены поочередно под углом $\pm\varphi$ и пакет оболочки по толщине будет ортотропным. В этом случае решение (1.4) тождественно удовлетворяет граничным условиям шарнирного закрепления торцов оболочки.

Выполненные расчеты показывают:

1. Перекрестно армированная оболочка обладает большой частотой собственных колебаний по сравнению с косоармированной оболочкой (фиг. 1). Сплошные линии соответствуют данным по уточненной теории, а пунктирные—по классической. $\gamma=0$ соответствует случаю ортотропного пакета, а $\gamma=1$—анизотропного.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. С уменьшением отношения l/R при фиксированном l с увеличением R поправка от учета влияния поперечных сдвигов увеличивается (фиг. 1).

3. С увеличением отношения l/R при фиксированном l с уменьшением R частоты собственных колебаний увеличиваются, увеличивается также влияние поперечных сдвигов (фиг. 2).

Таблица 1

Теория	γ \ l/R	1	2	3
I	0	0,166 $m=1,\ n=4$	0,097 $m=1,\ n=4$	0,056 $m=1,\ n=4$
	1	0,188 $m=1,\ n=4$	0,069 $m=1,\ n=5$	0,046 $m=1,\ n=2$
II	0	0,153 $m=1,\ n=0$	0,086 $m=1,\ n=4$	0,054 $m=1,\ n=3$
	1	0,108 $m=1,\ n=0$	0,067 $m=1,\ n=5$	0,045 $m=1,\ n=3$

4. При фиксированном R с увеличением l частоты собственных колебаний уменьшаются. Уменьшается также поправка от учета влияния поперечных сдвигов. В табл. 1 при $R/h=10$ приведены значения $\omega_1^*=\max\min\omega_1(m, n, \varphi)$, где $\omega_1=R\sqrt{12\rho}\,\omega_{mn}/\pi^2\sqrt{B_{11}^0}$ для ортотропной ($\gamma=0$), анизотропной ($\gamma=1$) оболочек, полученных на основе классической (I) и уточненной (II) теорий, при $l/R\geq4$ учет поперечных сдвигов практически не меняет значения наибольшей первой частоты собственных колебаний оболочки.

Аналогичные расчеты, проведенные для оболочки, изготовленной из материала типа боралюминия [6], показывают, что с усилением матрицы уменьшается влияние учета поперечных сдвигов и способа армирования.

THE VIBRATION OF THE ANISOTROPIC SHELL WITH REGARD TO TRANSVERSE SHEARS

V. M. KAGHKTSIAN

ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Վ. Մ. ՔԱՂՑՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է, ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը։ Ստացված են բանաձևեր սեփական տատանումների հաճախականության համար։ Որպես օրինակ դի-

տարկված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված թաղանթ։ Կախված նյութի կառուցվածքից, թաղանթի երկրաչափությունից՝ կատարված է ընդլայնական սահքերի ազդեցության վերլուծություն. գտնված է թաղանթի նյութի օպտիմալ կառուցվածք, որի դեպքում առաջին հաճախականությունը ստանում է ամենամեծ արժեք։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
4. *Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц.* Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек.—Механика полимеров, 1976, №5, с. 871—874.
5. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
6. *Портной К. И., Салибеков С. Е., Светлов И. Л. Чубарев В. М.* Структура и свойства композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1979. 255 с.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила в редакцию
29.I.1987.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРТЧЯН П. А.

В работе выведены уравнения возмущенного движения вращающейся сверхпроводящей сферической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение вращающейся оболочки в начальном однородном магнитном поле. Установлена возможность потери устойчивости невозмущенного состояния и получена формула для определения критического значения напряженности магнитного поля, при котором оболочка теряет устойчивость. Аналогичная задача устойчивости вращающейся ферромагнитной цилиндрической оболочки в однородном магнитном поле рассмотрена в работе [1].

1. Пусть замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и находится в постоянном во времени неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0$. Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ. Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Ортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, вращающаяся вместе с оболочкой, выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2, (α_1—полярный угол, α_2—азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливой гипотеза недеформируемых нормалей. Принимается также, что угловая скорость вращения $\vec{\omega}$ такая, что выполняется условие квазистационарности $\omega R \ll c$ (c—скорость света).

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле в его тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля во внутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на поле $\vec{H}_0$ магнитного поля $\vec{H}^0$, создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}^0$ определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [2]:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=0,\quad \operatorname{div}\vec{H}=0;\quad \vec{n}_0\cdot\vec{H}|_S=0,\quad \lim_{r\to\infty}\vec{H}=\vec{H}_0 \tag{1.1}$$

где $\vec{n}_0$—единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, $\vec{r}$—радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой [2]

$$\vec{P}_0=-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\cdot\vec{n}_0 \tag{1.2}$$

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}$ и тензором упругих напряжений $\hat{\sigma}_0$. Характеристики невозмущенного состояния определяются из следующих линейных уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\operatorname{div}\hat{\sigma}_0=\vec{R}_0 \tag{1.3}$$

$$\vec{n}_0\cdot\hat{\sigma}_0=\begin{cases}\vec{P}_0 & \text{при}\quad \alpha_3=h\\ 0 & \text{при}\quad \alpha_3=-h\end{cases} \tag{1.4}$$

где $\vec{R}_0=-\rho\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$—центробежная сила невозмущенного состояния.

Характеристики возмущенного состояния $(\vec{u}_0+\vec{u},\ \hat{\sigma}_0+\hat{\sigma},\ \vec{H}+\vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работе [3, 4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}[\hat{\sigma}+\hat{\sigma}_0(\nabla\vec{u})^*]-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\vec{R} \tag{1.5}$$

в области $(\alpha_3>h)$ вне тела оболочки

$$\operatorname{rot}\vec{h}=0,\quad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{1.6}$$

где $\vec{R}=-\rho\vec{\omega}\times\{\vec{\omega}\times[\vec{r}(\nabla\vec{u})^*-\vec{u}(\nabla\vec{r})^*]\}$.

Решения уравнений (1.4) и (1.5) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхностях $\alpha_3=\pm h$ оболочки:

$$\hat{\sigma}\cdot\vec{n}_0=\begin{cases}\vec{P} & \text{при}\quad \alpha_3=h\\ 0 & \text{при}\quad \alpha_3=-h\end{cases}\tag{1.7}$$

$$\vec{n}_0[\vec{h}+\vec{H}(\nabla\vec{u})^*+\vec{u}(\nabla\vec{H})]=0\tag{1.8}$$

Здесь

$$\hat{\sigma}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\operatorname{div}\vec{u})\hat{E}+\nabla\vec{u}+(\nabla\vec{u})^*\right]\tag{1.9}$$

$$\vec{P}=\vec{n}_0\cdot\hat{T},\quad T_{ik}=\frac{1}{4\pi}(H_k h_i+h_k H_i)-\frac{\delta_{ik}}{4\pi}(\vec{h}\cdot\vec{H})\tag{1.10}$$

где $\hat{E}$—единичный тензор, ∇—оператор Гамильтона, $(\nabla\vec{u})^*$—транспонированный тензор $\nabla\vec{u}$; $\hat{T}$—тензор напряжений Максвелла возмущенного состояния, δ_{ik}—символ Кронекера.

Принимая гипотезу Кирхгофа-Лява и осредняя уравнения (1.5) по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.7)—(1.8) получим двумерную систему разрешающих дифференциальных уравнений магнитоупругости вращающейся сферической оболочки относительно перемещений срединной поверхности u, v, w. В эти уравнения входят неизвестные граничные значения компонент индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, которые определяются из уравнений (1.6) с учетом (1.8) и условия затухания возмущений на бесконечности [4]. В результате получаем замкнутую двумерную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций u, v, w. Указанная система уравнений в случае, когда оболочка вращается вокруг оси oz (фиг. 1) с постоянной угловой скоростью ω, имеет следующий вид:

$$\frac{1}{A_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}-\frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\Delta+2)w\right]+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{u}{R}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+$$
$$+\frac{1-\nu^2}{8\pi Eh}\frac{H_1^+}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_1^+w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_2^+w)\right]-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)^2\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{A_2}{A_1^2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)w\right]=0$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}-\frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\Delta+2)w\right]+\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{v}{R}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+$$

$$\tag{1.11}$$

$$+\frac{1-\nu^2}{8\pi Eh}\frac{H_2^+}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_1^+w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_2^+w)\right]-\frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta-\frac{1+\nu}{R}\right)\theta-\frac{h^2}{3R^4}(\Delta+1-\nu)(\Delta+2)w-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[\frac{T_1^0}{A_1^2}\frac{\partial^2w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{T_2^0}{A_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial^2w}{\partial\alpha_2^2}+\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+\right.$$

$$
+\frac{2S^0}{A_1A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{H_1^+}{A_1}\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}+\frac{H_2^+}{A_2}\frac{\partial F}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg]+
$$

$$
+\frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{A_2^2}{A_1^2}w\right)=0
$$

Здесь индексом «+» отмечены значения соответствующих величин на поверхности оболочки $\alpha_3=h$,

$$
F=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{r_0}-\ln\left(1+\frac{2}{r_0}\right)\right]h_3^+(\xi,\ \eta,\ t)\sin\xi d\xi d\eta
$$

$$
h_3^+=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_1^+w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_2^+w)\right]
$$

$$
\theta=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2u)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1v)\right]+\frac{2w}{R}
$$

$$
\Delta=\frac{R^2}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right],\quad A_1=R,\ A_2=R\sin\alpha_1
$$

$$
r_0^2=2(1-\cos\theta_0),\quad \cos\theta_0=\cos\xi\cos\alpha_1+\sin\xi\sin\alpha_1\cos(\eta-\alpha_2) \tag{1.12}
$$

T_1^0, T_2^0, S^0 —усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, которые определяем, решая задачу (1.3)—(1.4).

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

2. На основе полученной системы рассмотрим задачу статической устойчивости сферической оболочки, которая вращается вокруг оси oz с постоянной угловой скоростью ω и находится в однородном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0$

$$
\vec{H}_0=H_0(\sin\alpha_1\vec{n}_1-\cos\alpha_1\vec{n}_3),\quad H_0=\text{const} \tag{2.1}
$$

где $\vec{n}_i$—единичные векторы по направлениям α_i $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Невозмущенное магнитное поле определяется из решения задачи (1.1) и имеет вид

$$
\vec{H}=H_0\left\{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R+h}{R+\alpha_3}\right)^3\right]\sin\alpha_1\vec{n}_1-\left[1-\left(\frac{R+h}{R+\alpha_3}\right)^3\right]\cos\alpha_1\ \vec{n}_3\right\} \tag{2.2}
$$

В силу (1.2)—(1.4) и (2.2) для усилий начального невозмущенного безмоментного состояния имеем

$$
T_1^0=-\frac{q_0R}{4}\sin^2\alpha_1,\quad T_2^0=\left(2\rho hR^2\omega^2-\frac{3q_0R}{4}\right)\sin^2\alpha_1,\quad S^0=0 \tag{2.3}
$$

где $q_0=9H_0^2/32\pi$.

Подставляя (2.2), (2.3) в систему (1.11) и исключая неизвестные u и v, рассматриваемую задачу устойчивости сводим к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения:

$$
\begin{gathered}
[\delta^2(\Delta+1)^2+1](\Delta+2)w+\frac{q_0R}{Eh}\left\{(\Delta+1-\nu)\left[\frac{3A_2^2}{8A_1^2}\Delta w-\frac{A_2^2}{4A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}\right]+\right.\\
\left.+\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta-1+\nu\right)\left[\frac{5A_2}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{A_2^2}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+4\left(1-\frac{3A_2^2}{2A_1^2}\right)w\right]\right\}-\\
-\frac{\rho\omega^2R^2}{E}\left\{(\Delta+1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}+\frac{2A_2}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{A_2^2}{A_1^2}w\right)-\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta-1-\right.\right.\\
\left.\left.-\nu\right)\left[\Delta w-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)-\left(2-\frac{3A_2^2}{A_1^2}\right)w-\frac{2A_2}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right]\right\}=0 \qquad (2.4)
\end{gathered}
$$

где $\delta^2=h^2/3(1-\nu^2)R^2$, $F_1=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{r_0}-\ln\left(1+\frac{2}{r_0}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}[w(\xi,\eta)\sin^2\xi]\,d\xi d\eta$

Решение уравнения (2.4) представим в виде разложения

$$
w=\left(\sum_{n=i}^{\infty}w_nP_{nk}(\cos\alpha_1)\right)\cos k\alpha_2, \quad (k\leqslant n, \quad i=2,\ 3,\ \ldots) \qquad (2.5)
$$

где w_n—неизвестные коэффициенты, $P_{nk}(x)$—присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно w_n:

$$
\Omega_m^2w_m-\sum_{n=i}^{\infty}b_{mn}^{(k)}w_n=0, \quad (m=i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ k\leqslant n) \qquad (2.6)
$$

где

$$
\Omega_m^2=\frac{E}{\rho R^2}(\lambda_m-2)\frac{1+\delta^2(\lambda_m-1)^2}{\lambda_m-1+\nu}, \quad \lambda_m=m(m+1)
$$

$$
\begin{gathered}
b_{mn}^{(k)}=\frac{\lambda_n-1+\nu}{\lambda_m-1+\nu}\left\{\frac{q_0}{\rho Rh}\left[A_{kn}\delta_{m,n}+A_{kn}^{(1)}\delta_{m,n-2}+A_{kn}^{(2)}\delta_{m,n+2}\right]-\right.\\
\left.-\omega^2\left[B_{kn}\delta_{m,n}+B_{kn}^{(1)}\delta_{m,n-2}+B_{kn}^{(2)}\delta_{m,n-2}\right]\right\} \qquad (2.7)
\end{gathered}
$$

В (2.7) Ω_m—частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

$$
\begin{gathered}
A_{kn}=\frac{1}{4\lambda_n-3}\left\{\frac{1}{n(2n+1)}[2n^6-11n^5-20n^4-7n^3-8n^2+8n+k^2(10n^4+\right.\\
\left.+31n^3+n^2-30n+12)]+\frac{4(1+\nu)}{\lambda_n-1+\nu}[2\lambda_n(\lambda_n-1)-k^2(2\lambda_n-3)]\right\}
\end{gathered}
$$

$$
A_{kn}^{(1)}=-\frac{(n+k)(n+k-1)}{2(4n^2-1)}\left[n^2-9n+6+\frac{8(1+\nu)(n^2-3n-10)}{\lambda_n-1+\nu}\right]
$$

$$A_{kn}^{(2)}=-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2(2n+1)(2n+3)}\left[n^2-5n-8+\frac{8(1+\nu)(n^2+5n+6)}{\lambda_n-1+\nu}\right]$$

$$B_{kn}=\frac{1}{4\lambda_n-3}\left[4\lambda_n+(4\lambda_n-15)k^2-\frac{2\lambda_n(1+\nu)(\lambda_n-1+k^2)}{\lambda_n-1+\nu}\right]$$

$$B_{kn}^{(1)}=\frac{2n(n+k)(n+k-1)}{4n^2-1}\left[1-\frac{(1+\nu)(n-2)}{2(\lambda_n-1+\nu)}\right] \tag{2.8}$$

$$B_{kn}^{(2)}=-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n+3)}\left[2n+1+\frac{(1+\nu)(n^2+4n+3)}{\lambda_n-1+\nu}\right]$$

Условием существования нетривиального решения системы (2.6) является равенство нулю следующего бесконечного определителя

$$|\delta_{mn}+C_{mn}|=0 \tag{2.9}$$

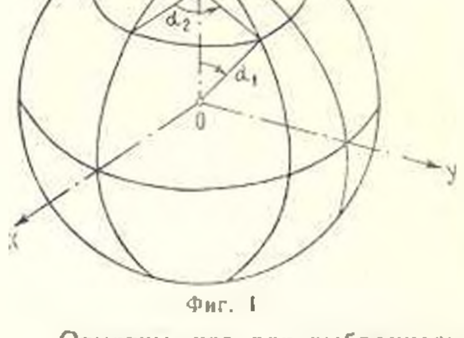
где $C_{mn}=-b_{mn}^{(k)}/\Omega_m\Omega_n$.

В силу (2.7) и (2.8) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (2.9), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (2.9) в первом приближении $(n=m=i)$ для критического значения внешнего магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость, получим следующую формулу:

$$H_{0*}=\frac{4}{3}\left[\frac{2\pi R\rho h}{A_{kn}}(\Omega_n^2+B_{kn}\omega^2)\right]^{1/2} \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что увеличение скорости вращения приводит к увеличению критического значения напряженности внешнего магнитного поля. В табл. 1 для оболочки, изготовленной из алюминия ($E=7\cdot10^{10}$ н/м; $\nu=0,3$; $\rho=2,7\cdot10^3$ кг/м^3) и покрытой тонким сверхпроводящим слоем сплава Nb_3S_n, когда $\omega=50$ с$^{-1}$, $R=0,25$ м, приведены минимальные значения H_{0*} по числам волн n и k при различных отношениях h/R.



Фиг. 1

Таблица 1

$2h/R$	k	n	$\min\limits_{(k,n)} H_{0*}$ (10^2 кА/м)
1/50	13	13	8,9946
1/100	18	18	6,3113
1/125	21	21	5,6365
1/250	29	29	3,9622
1/500	41	41	2,7924

Отметим, что для выбранного сплава критическое значение внешнего магнитного поля, превышение которого приводит к разрушению сверхпроводящего свойства материала, $H_k=1,6\cdot10^4$ кА/м.

STABILITY OF A ROTATING SUPERCONDUCTIVE SPHERICAL SHELL IN A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

ՊՏՏՎՈՂ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված են պտտվող գերհաղորդիչ թաղանթի դրգռված վիճակի շարժման հավասարումները ստացիոնար անհամասեռ մագնիսական դաշտում։ Այդ հավասարումների հիման վրա հետազոտված է պտտվող թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում։ Ցույց է տրված չգրգռված վիճակի կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը և ստացված է բանաձև մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքի որոշման համար, որի դեպքում թաղանթը կորցնում է կայունությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асанян Д. Д., Багдасарян Г. Е.* Устойчивость вращающейся магнитомягкой цилиндрической оболочки в однородном магнитном поле.—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тез. докл., Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1984. с. 31—38.
2. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 522 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. *38*, №5, с. 22—32.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
20.I.1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

СААКЯН С. Г.

Векторное волновое уравнение Ламе для однородных изотропных упругих сред в осесимметричном случае может быть разделено на два независимых скалярных волновых уравнения [1]. В настоящей работе обобщается метод разделения векторного волнового уравнения Ламе в осесимметричном случае для слоисто-неоднородных изотропных упругих сред. Показано, что в этом случае векторное волновое уравнение для некоторых классов слоисто-неоднородных упругих сред может быть разделено на три независимых скалярных линейных дифференциальных уравнения второго порядка.

Рассмотрим распространение осесимметричных волн в неоднородной изотропной упругой среде в пространстве при отсутствии внешних массовых сил. Примем, что коэффициенты Ламе λ, μ и плотность ρ упругой среды зависят только от одной декартовой координаты z. Тогда непрерывные дифференциальные решения векторного волнового уравнения в перемещениях

$$\operatorname{grad}[(\lambda+2\mu)\operatorname{div}\vec{u}]-\operatorname{rot}(\mu\operatorname{rot}\vec{u})+2\mu'\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}-\hat{i}_z\operatorname{div}\vec{u}+\hat{i}_z\times\operatorname{rot}\vec{u}\right]-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

представим в виде

$$\vec{u}=\psi_1(z)\operatorname{grad}\Phi_1(r,z,t)+\psi_2(z)\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\Phi_2(r,z,t)\hat{i}_z]+\operatorname{rot}[\Phi_3(r,z,t)\hat{i}_z] \quad (2)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3—квазипотенциалы перемещения $\vec{u}$; $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$—неизвестные функции, зависящие только от z; $\hat{i}_z$—орт по оси z.

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим

$$\varphi_1\operatorname{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\xi L_1(\Phi_1)]+\varphi_2\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\mu L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]+\rho\operatorname{rot}[\rho^{-1}\mu L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]+$$
$$+\varphi_1\hat{i}_z\left[l_{11}\Delta\Phi_1+l_{12}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+l_{13}\Phi_1+l_{14}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\right]+\hat{i}_z\times\operatorname{rot}\left\{\varphi_2^{-1}\left[l_{21}\Delta\Phi_2+l_{22}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+l_{23}\Phi_2+l_{24}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}\right]\hat{i}_z\right\}=\vec{0} \quad (3)$$

где приняты обозначения:

$$L_1(\Phi_1)=\Delta\Phi_1+\left[\frac{\lambda'+\mu'}{\xi}p_2+\frac{2\mu'}{\xi}\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\left[\frac{\mu'}{\xi}p_1+\frac{\mu}{\xi}(p_1'+p_1^2)\right]\Phi_1-\frac{\rho}{\xi}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$$

$$L_2(\Phi_2)=\Delta\Phi_2+\left[\frac{\xi+\mu}{\mu}p_2+\frac{2\mu'}{\mu}\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\left[\frac{\xi'}{\mu}p_2+\frac{\xi}{\mu}(p_2'+p_2^2)\right]\Phi_2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}$$

$$L_3(\Phi_3)=\Delta\Phi_3+\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}$$

$$p_i=\psi_i'/\psi_i;\ i=1,\ 2;\ \xi=\lambda+2\mu,\quad l_{11}=\xi\psi_1\varphi_1'-(\mu\psi_1'+2\mu'\psi_1)\varphi_1 \tag{4}$$

$$l_{12}=[(\xi+\mu)\psi_1'+2\mu'\psi_1]\varphi_1'-2(\mu\psi_1)''\varphi_1,\quad l_{13}=(\mu\psi_1')'\varphi_1'-(\mu\psi_1')''\varphi_1$$

$$l_{14}=\rho\psi_1\varphi_1'-(\rho\psi_1)'\varphi_1;\quad l_{21}=\mu\psi_2\varphi_2'-(\xi\psi_2'+2\mu'\psi_2)\varphi_2$$

$$l_{22}=[(\xi+\mu)\psi_2'+2\mu'\psi_2]\varphi_2'-2(\xi\psi_2'+\mu'\psi_2)'\varphi_2;\quad l_{23}=(\xi\psi_2')'\varphi_2-(\xi\psi_2')''\varphi_2$$

$$l_{24}=\rho\psi_2\varphi_2'-(\rho\psi_2)'\varphi_2$$

Если предположить, что механические свойства среды λ, μ, ρ и неизвестные функции $\psi_i(z)$ и $\varphi_i(z)$ $(i=1,\ 2)$ удовлетворяют условиям

$$l_{ij}=0;\quad i=1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{5}$$

уравнение (3) примет вид

$$\varphi_1\,\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)]+\varphi_2\,\mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]+\rho\,\mathrm{rot}(v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z)=\vec{0} \tag{6}$$

где

$$v_1^2=\xi/\rho;\quad v_2^2=\mu/\rho$$

В трехмерном пространстве векторы

$$\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)],\quad \mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z],\quad \mathrm{rot}[v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]$$

линейно независимы и, следовательно, из уравнения (6) получим

$$\mathrm{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\rho v_1^2L_1(\Phi_1)]=\vec{0}$$

$$\mathrm{rot\,rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\rho v_2^2L_2(\Phi_2)\hat{i}_z]=\vec{0},\quad \mathrm{rot}[v_2^2L_3(\Phi_3)\hat{i}_z]=\vec{0} \tag{7}$$

В уравнениях (7) выражения $\varphi_i^{-1}\psi_i\rho v_i^2L_i(\Phi_i)$, $(i=1,\ 2)$, $v_2^2L_3(\Phi_3)$ являются либо постоянными величинами, либо некоторыми функциями времени $f_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, которые можно принять равными нулю. В самом деле, если $f_i(t)$ не равно нулю, тогда вместо Φ_i можно рассматривать квазипотенциал

$$\overline{\Phi}_i=\Phi_i-v_i^2\int\limits_0^t(t-\tau)f_i(\tau)d\tau$$

Во всех случаях Φ_i (или $\overline{\Phi}_i$) являются общими решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$L_i(\Phi_i)=0;\quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{8}$$

Таким образом, если механические свойства среды λ, μ, ρ и функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ удовлетворяют условиям разделения (5), векторное уравнение (1) можно разделить на независимые линейные уравнения (8) для квазипотенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3. После некоторых преобразований уравнения (8) примут вид:

$$L_1(\Phi_1) \equiv \Delta\Phi_1 + \gamma^{-1}[(\gamma+1)p_1 + 2p_\mu]\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + \gamma^{-1}[p_1 p_\lambda + p_1' + p_1^2]\Phi_1 - v_1^{-2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

$$L_2(\Phi_2) \equiv \Delta\Phi_2 + [(\gamma+1)p_2 + 2p_\mu]\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - [(\gamma p_2)' + \gamma(p_2^2 + p_2 p_\mu)]\Phi_2 - v_2^{-2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

$$L_3(\Phi_3) \equiv \Delta\Phi_3 + p_\mu\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} - v_2^{-2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

где $\quad \gamma = v_1^2/v_2^2$; $\quad p_\mu = \mu'/\mu$; $\quad p_\rho = \rho'/\rho$.

Из уравнений (9)—(11) следует, что в слоисто-неоднородной среде осесимметричная упругая волна представляет собой три независимо распространяющихся волны. Причем часть перемещения $\vec{u}$, соответствующая скалярному квазипотенциалу Φ_1, переносится в пространстве с переменной скоростью v_1 и является волной сжатия или расширения. Части перемещения $\vec{u}$, соответствующие квазипотенциалам Φ_2, Φ_3, распространяются с другой переменной скоростью v_2 и являются вертикальной и горизонтальной волнами сдвига.

Преобразуя (5), получим следующие условия разделения векторного волнового уравнения (1):

$$p_1 - q_1 = p_2 - q_2; \quad p_1 - \gamma q_1 + 2p_\mu = 0; \quad p_\rho = q_1 - p_1 \tag{12}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 + (\xi q_1)' - \xi q_1^2 = 0 \tag{13}$$

$$(\mu\varphi_1')' = K_1\varphi_1; \quad \gamma p_2 - q_2 + 2p_\mu = 0; \quad (\xi\varphi_2')' = K_2\varphi_2 \tag{14}$$

$$(\xi p_2)' + \xi p_2^2 + (\mu q_2)' - \mu q_2^2 = 0 \tag{15}$$

где K_i—произвольная постоянная,

$$q_i = \varphi_i'/\varphi_i, \quad i = 1, 2$$

Система уравнений разделения (12)—(15) незамкнута и ее можно решить при некоторых дополнительных условиях. Например, предполагая, что

$$\varphi_i = \rho\psi_i, \quad \text{то есть} \quad q_i = p_\rho + p_i, \quad i = 1, 2$$

система уравнений разделения (12)—(15) примет вид

$$p_1 + p_2 - p_\rho = 0; \quad p_1 + \gamma p_2 - p_\mu = 0 \tag{16}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = K_1\rho; \quad (\xi p_2)' + \xi p_2^2 = K_2\rho \tag{17}$$

Условия разделения (16)—(17) впервые были получены Дж. Гуком [2].

Решение этой системы рассмотрено в работах [3, 4].

Предполагая далее, что в (9)—(11) и (12)—(15)

$$\varphi_1 = \rho\psi_2; \quad \varphi_2 = \rho\psi_1, \quad \text{то есть} \quad q_1 = p_\rho + p_2; \quad q_2 = p_\rho + p_1$$

получим известные результаты, описанные в работе [5].

Выделим некоторые специальные типы неоднородных упругих сред, для которых система уравнений разделения (12)—(15) имеет решение в элементарных функциях. Предполагая в системе уравнений (12)—(15), что

$$\varphi_1 = \psi_2^{-1}; \quad \varphi_2 = \psi_1^{-1}, \quad \text{то есть} \quad q_1 = -p_2; \quad q_2 = -p_1$$

получим

$$\rho = \rho_0 = \text{const}; \quad p_1 = -p_2 = 2\mu'/(\xi-\mu) \tag{18}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = K_1; \qquad (\xi p_2)' + \xi p_2^2 = K_2 \tag{19}$$

$$[(\xi+\mu)p_1]' = (\xi-\mu)p_1^2; \qquad [(\xi+\mu)p_2]' = -(\xi-\mu)p_2^2 \tag{20}$$

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = (\xi p_2)' + \xi p_2^2 \tag{21}$$

Упростим (18)—(21), тогда получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$2\mu' = (\xi-\mu)p_1 \tag{22}$$

$$(\xi p_1)' - \xi p_1^2 = -K_2 \tag{23}$$

$$2(\mu'' + K_1) = (\xi + \mu)p_1^2 \tag{24}$$

$$2\mu' p_1 = [(\xi+\mu)p_1]' \tag{25}$$

Интегрируя систему уравнений (24), (25), имеем

$$[(\xi+\mu)p_1]^2 = 4(\mu'^2 + 2C_1\mu + 2C_2) \tag{26}$$

где $K_1 = 2C_1$, C_2—произвольная постоянная интегрирования.

Исключив из (26) p_1 по формуле (22), получим

$$2\xi\mu\mu'^2(\xi-\mu)^{-2} = C_1\mu + C_2; \quad |C_1| + |C_2| \neq 0 \tag{27}$$

Из уравнения (27) определим

$$\xi = \frac{\mu}{C_1\mu + C_2}\left[\mu'^2 + C_1\mu + C_2 + \mu'\sqrt{\mu'^2 + 2C_1\mu + 2C_2}\,\right] \tag{28}$$

Подставив значения p_1 и ξ из (22) и (28) в (23), получим для μ следующее дифференциальное уравнение:

$$(\mu'' + C_1)\left(1 + \frac{\mu'}{\sqrt{\mu'^2 + 2C_1\mu + 2C_2}}\right) = C_1 + \frac{C_2}{\mu} \tag{29}$$

Уравнение (29) в случае $C_1 \neq 0$ и $C_2 = 0$ можно привести к виду

$$d(\mu' - C_1 z + \sqrt{\mu'^2 + 2C_1\mu}) = 0 \tag{30}$$

Из выражения (30) найдем первый интеграл

$$\mu' - C_1 z + \sqrt{\mu'^2 + 2C_1\mu} = G_1 \tag{31}$$

где G_1—произвольная постоянная.

Упростив (31), имеем следующее линейное уравнение:

$$\mu' + \frac{C_1\mu}{C_1 z + G_1} = \frac{1}{2}(C_1 z + G_1) \tag{32}$$

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\mu = (\mu_0 - C_0)/Z + C_0 Z^2; \quad (C_0 \leqslant \mu_0) \tag{33}$$

В (33) приняты следующие обозначения:

$$\mu(z_0) = \mu_0; \quad \mu'(z_0) = \mu_0'; \quad Z = (z + z_1)/(z_0 + z_1)$$

$$z_1 = G_1/C_1; \quad C_0 = \frac{1}{3}\left[\mu_0 + (z_0 + z_1)\mu_0'\right]$$

Из (22) и (18) определяются ξ, p_1 и p_2:

$$\xi = 3C_0 Z^2; \quad p_1 = -p_2 = \frac{2}{z + z_1}$$

При условии $\psi_1(z_0) = 1$ и $\psi_2(z_0) = 1$ из уравнений (4) получим

$$\psi_1(z) = Z^2; \quad \psi_2(z) = Z^{-2}$$

В этом случае независимые скалярные уравнения движения (9)—(11) примут вид

$$L_1(\Phi_1^*) = \Delta\Phi_1^* + \frac{2\gamma^{-1}(\gamma+3)Z^3 - 2a}{Z(Z^3 + 2a)}\,\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial Z} + \frac{6\gamma^{-1}Z^3}{Z^2(Z^3 + 2a)}\,\Phi_1^* - \frac{1}{3Z^2}\,\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2} = 0 \tag{34}$$

$$L_2(\Phi_2^*) = \Delta\Phi_2^* - \frac{2[(\gamma-1)Z^3 + 2a(\gamma+2)]}{Z(Z^3 + 2a)}\,\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial Z} + \frac{2\gamma(Z^3 + 8a)}{Z^2(Z^3 + 2a)}\,\Phi_2^* - \frac{Z}{Z^3 + a}\,\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\tau^2} = 0 \tag{35}$$

$$L_3(\Phi_3^*) = \Delta\Phi_3^* + \frac{2(Z^3 - a)}{Z(Z^3 + 2a)}\,\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial Z} - \frac{Z}{Z^3 + a}\,\frac{\partial^2\Phi_3^*}{\partial\tau^2} = 0 \tag{36}$$

где

$$\Phi_i^* = \Phi_i/(z_0 + z_1)^2; \quad i = 1,\ 2,\ 3; \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{C_0} - 1\right); \quad \tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{C_0}}\,\frac{t}{z_0 + z_1}$$

При $C_0 = \mu_0$ ($\gamma = 3$) уравнения (34)—(36) приобретают простой вид.

Аналогично в случае $C_1 = 0$ и $C_2 \neq 0$ решение уравнения (29) может быть получено в параметрическом виде.

ON THE PROPAGATION OF THE AXISYMMETRICAL WAVES IN THE STRATIFIED NONHOMOGENEOUS MEDIUM

S. G. SAHAKIAN

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում է առանցքասիմետրիկ, առաձգական ալիքների տարածումը անվերջ, անհամասեռ միջավայրում։ Օգտագործելով պոտենցիալների եղանակը՝ Լամեի վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհվում է երեք՝ իրարից անկախ սկալյար դիֆերենցիալ երկրորդ կարգի հավասարումների։ Ստացվել են ալիքների տարածման իրարից անկախ սկալյար հավասարումներ մի քանի անհամասեռ առաձգական միջավայրերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости М.: Наука, 1986. 328 с.
2. *Hook J. F.* Separation of the Vector Wave Equation of Elasticity for Inhomogeneous Media.—J. Acoust. Soc. Am., v. 33, No. 3. 1961. p. 302--313.
3. *Hook J. F.* Contributions to a Theory of Separability of the Vector Wave Equation of Elasticity for Inhomogeneous Media.—J. Acoust. Soc. Am., 1962, v. 34, No 7. pp. 946--953.
4. *Hook J. F.* Determination of Inhomogeneous Media for which the vector wave Equation of Elasticity is Seperable. Bull. Seism. Soc. Am., 1965, v. 55. No. 6, pp. 975—987.
5. *Саакян С. Г.* Разделение векторного волнового уравнения для неоднородных упругих сред. Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №3, с. 565—567.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
13.VI.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

АРАКЕЛЯН А. Е.

В настоящей статье исследуется устойчивость неоднородной балки, у которой один конец закреплен (по отношению к продольным перемещениям), а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью c, в двух случаях неоднородности: в предположении, что модуль упругости и плотность изменяются вдоль длины по произвольным законам и модуль упругости и плотность по толщине кусочно постоянны (случай слоистой балки).

1. Устойчивость неоднородной балки, у которой модуль упругости и плотность материала изменяются вдоль длины.

Продольное движение: уравнение невозмущенного движения относительно продольного перемещения u будет

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где $E(x)=E_0 f(x)$ и $\rho(x)=\rho_0\varphi(x)$ — произвольные функции.

Для определенности примем нулевые начальные условия

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях

$$u=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad u=-ct \quad \text{при} \quad x=l \tag{1.3}$$

Действующие в поперечных сечениях сжимающие напряжения определяются формулой

$$\sigma = E(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.4}$$

Обозначим

$$v = u + ct\,x/l \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1), начальные и краевые условия (1.2) и (1.3) при таких обозначениях приводятся к виду

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{ct}{l}\right) \tag{1.6}$$

$$v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = cx/l \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.7}$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad x=0 \text{ и } x=l \tag{1.8}$$

где

$$a^2=E_0/\rho_0, \quad P(x)=f(x)/\varphi(x), \quad Q(x)=f'(x)/\varphi(x) \tag{1.9}$$

Представляя коэффициенты (1.6) в виде рядов

$$P(x)=\frac{p_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos\lambda_k x, \quad Q(x)=\sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin\lambda_k x, \quad \lambda_k=\pi k/l \tag{1.10}$$

где

$$p_k=\frac{2}{l}\int_0^l P(x)\cos\lambda_k x dx, \quad q_k=\frac{2}{l}\int_0^l Q(x)\sin\lambda_k x dx$$

ищем решение (1.6) в виде

$$v(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin\lambda_k x \tag{1.11}$$

который удовлетворяет граничным условиям (1.8).

Подставляя (1.11) и (1.10) в (1.6) и производя некоторые преобразования, для неизвестных $v_k(t)$ получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2 v_k}{dt^2}=\sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}v_n-q_k c/l \tag{1.12}$$

где

$$A_{kk}=\frac{\lambda_k^2}{2}(p_{2k}-p_0)+\frac{\lambda_k}{2}q_{2k} \tag{1.13}$$

$$A_{kn}=\frac{\lambda_n^2}{2}(p_{k+n}-p_{k-n})+\frac{\lambda_n}{2}(q_{n+k}+q_{k-n})$$

здесь должны иметь в виду, что $p_{-n}=p_n$ и $q_{-n}=-q_n$.

Учитывая (1.7), начальные условия для (1.12) будут

$$v_k=0, \quad \frac{dv_k}{dt}=-\frac{2c}{l}\frac{(-1)^k}{\lambda_k} \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.14}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)—(1.3) свелось к системе (1.12) с начальными условиями (1.14), то есть к задаче Коши, для которой применение метода редукции приводится, например, в [1].

Другой вид решения задачи о продольном колебании неоднородной балки приведен, например, в [2], но для наших целей удобнее вышеприведенное решение.

Разлагая $E(x)$ в ряд

$$E(x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} f_k\cos\lambda_k x \tag{1.15}$$

где

$$f_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l E(x) \cos \lambda_k x dx$$

И учитывая (1.4) и (1.15), для сжимающего напряжения получим

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cos \lambda_k x \tag{1.16}$$

где

$$\sigma_0 = 3 f_0 c_0 + \sum_{q=1}^{\infty} f_q c_q, \quad \sigma_k = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} (f_{k-q} + f_{k+q}) c_q$$

$$c_0 = -ct/l, \quad c_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

v_k определяется из (1.12)—(1.14).

Числовые результаты получены для безразмерного сжимающего напряжения $\sigma^* = \sigma(E_0 c/a)$ при неоднородностях вида:

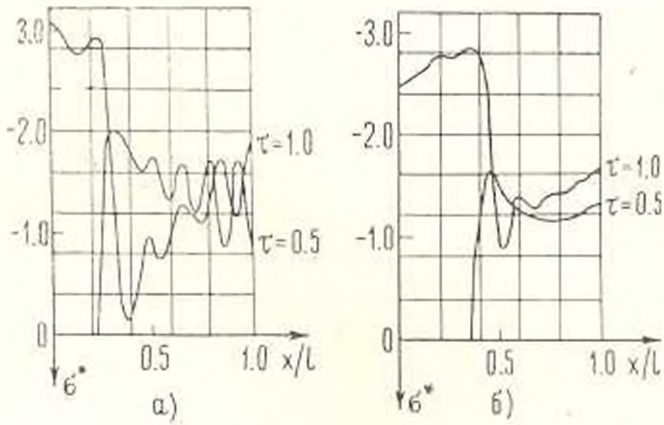
случай (а) $f(x) = 1 + 2x/l, \quad \varphi(x) = 1$

и

случай (б) $f(x) = 1 + 2(1 - x/l), \quad \varphi(x) = 1.$

На фиг. 1 (а) и (б) приведены распределения сжимающего напряжения для двух моментов времени ($\tau = at/l$), соответственно, для случаев неоднородностей а) и б).

Методом Хемминга интегрировались первые 10 и 15 уравнений из системы (1.12). Их результаты практически мало отличались друг от друга.



Фиг. 1

Возмущенное движение: уравнение устойчивости (уравнение возмущенного движения) берем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma F \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \rho(x) F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.18}$$

где $D(x)=E(x)J$—изгибная жесткость, J и F—соответственно, момент инерции и площадь поперечного сечения.

Предположим, что балка на концах шарнирно оперта

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l \tag{1.19}$$

Решение (1.18) ищем в виде ряда, удовлетворяющего условиям (1.19)

$$w(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t)\sin \lambda_m x \tag{1.20}$$

Представляем $\varphi(x)$ в виде ряда

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos \lambda_k x \tag{1.21}$$

Подставляя (1.20) в (1.18), учитывая (1.15), (1.16) и (1.21), после некоторых преобразований для неизвестных $w_m(t)$ получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{q=1}^{\infty} (\varphi_{m-q}-\varphi_{m+q})\frac{d^2 w_q}{dt^2}+\sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}(t)w_k=0, \quad m=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.22}$$

где

$$2FB_{mk}(t)=\lambda_m\lambda_k[\lambda_m\lambda_k J(f_{m-k}-f_{m+k})+F(\varphi_{m-k}+\varphi_{m+k})]$$

Если в качестве критического параметра брать критическое время, то его можно определять так, как в [3, 4], то есть это—время, при котором «мгновенная частота» системы (1.22) равна нулю.

Итак, критическое время есть наименьший корень уравнения

$$\det\|B_{mk}(t_{кр})\|=0 \tag{1.23}$$

Ниже приводится таблица для $Y_{кр}$ ($Y=Fl^2/J\pi^2$—параметр гибкости), при которых достигается заданное критическое время.

Первая строка соответствует неоднородности вида (а), вторая—неоднородности (б). Для сравнения, в третьей строке приведен случай однородной балки.

τ	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
$Y_{кр}$	1.6820 2.7679 2.1118	1.3806 1.8667 1.8915	0.9615 0.9395 1.5538	0.7294 0.6447 1.0000	0.6510 0.5765 0.6984	0.4663 0.4805 0.6622

Вычисления производились для детерминантов третьего и четвертого порядков, результаты которых практически совпадали.

Из приведенной таблицы видно, что в общем случае повышение модуля упругости не приводит к увеличению критического времени.

2. *Устойчивость слоистой балки.*

Рассмотрим теперь многослойную балку с прямоугольным поперечным сечением, общей толщиной h, составленную из нечетного числа $(2m+1)$ изотропных однородных слоев постоянной толщины, симметрично расположенных относительно срединной поверхности.

Будем исследовать устойчивость такой балки.

Для получения уравнения невозмущенного и возмущенного движения будем принимать гипотезы классической теории стержней [5] для всего пакета. При таких допущениях полученные уравнения по виду совпадают с уравнениями однородного стержня [4] с оговоркой, что под модулем упругости, плотностью и изгибной жесткостью надо понимать их приведенные значения [6]

$$E=\frac{2}{h}\left| E_{m+1}h_{m+1}+\sum_{s=1}^{m}E_s(h_s-h_{s+1})\right|$$

$$\rho=\frac{2}{h}\left| \rho_{m+1}h_{m+1}+\sum_{s=1}^{m}\rho_s(h_s-h_{s+1})\right|$$

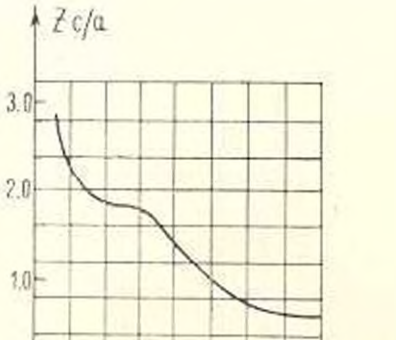
$$D=\frac{2}{3}\left| E_{m+1}h^3_{m+1}+\sum_{s=1}^{m}E_s(h^3_s-h^3_{s+1})\right|$$

где E_s, ρ_s—модуль упругости и плотность материала s-го слоя, соответственно, h_s—расстояние s-го слоя от срединной поверхности.

Согласно [4] критическое время потери устойчивости определяется из (1.23), где

$$2hB_{mk}(t)=\begin{cases} 2D\lambda_k^4-\lambda_k^2h(\sigma_0-\sigma_{2k}) & \text{при} \quad m=k \\ \lambda_m\lambda_kh(\sigma_{m-k}+\sigma_{m+k}) & \text{при} \quad m\neq k \end{cases}$$

σ_k—коэффициент разложения сжимающего напряжения в ряд (1.16).



Фиг. 2

На фиг. 2 приведена зависимость Zc/a $(Z=Ehl^2/D\pi^2)$ от $\tau_{кр}$, из которой при известной структуре пакета для заданной скорости удара c можно определить критическое время потери устойчивости. В то же время, изменяя распределение слоев при одних и тех же материалах, можно получить различные критические времена (в частности, для композитов с различными углами армирования), то есть можно ставить вопрос о наибольшем критическом времени или скорости удара. Для примера рассмотрим трехслойный стержень. Слои имеют одинаковую толщину и плотность. В случае, когда модуль упругости среднего слоя в десять раз больше, чем модуль (E_0) наружных слоев, критическое время $t_{кр}=0{,}25l/a$ получится при $c=1{,}04(h/l)^2a$, в то время как, если слои расположить в обратном порядке, для достижения того же критического времени необходимо $c=5{,}23(h/l)^2a$. В случае, когда модуль упругости всех трех слоев одинаков и равен E_0, критическая скорость равна $c=1{,}74(h/l)^2a$.

STABILITY OF ELASTIC NONHOMOGENEOUS BEAT SUBJECTED TO LONGITUDINAL IMPACT

A. E. ARAKELIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԵԾԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Ե. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անհամասեռ հեծանի կայունությունը, որի մի եզրը ամրացված է (երկայնական տեղափոխության նկատմամբ), իսկ մյուս եզրը շարժվում է հաստատուն արագությամբ։ Ընդունվում է անհամասեռության երկու դեպք. առաձգականության գործակիցը և խտությունը հեծանի երկարությամբ փոփոխվում են կամայական օրենքով և ըստ հաստության կտոր առ կտոր հաստատուն են (շերտավոր հեծան)։ Գտնված է տրված անհամասեռությանը համապատասխան սեղմող լարման բաշխումը հեծանի երկարությամբ և տրված հարվածի արագությանը համապատասխան հեծանի կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жаутыков О. А.* Метод бесконечных систем дифференциальных уравнений в задачах колебаний систем с распределенными парметрами.—Успехи механики, 1986, т. 9, вып. 1, с. 64—91.
2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 324 с.
3. *Мовсисян Л. А.* К устойчивости упруго-пластических стержней при ударных нагрузках.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1986, т. 39, №2, с. 15—23.
4. *Мовсисян Л. А.* Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.—Докл. АН АрмССР, 1969, т. 49, №3, с. 124—130.
5. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. ВИНИТИ, итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: 1973, т. 5, с. 5—270.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
9.XII.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 539. 376

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

СУМБАТЯН М. А.

Рассматривается контактная задача о вдавливании без трения жесткого прямоугольного в плане штампа в полупространство, материал которого находится в условиях установившейся ползучести со степенным законом состояния. В рамках принципа суперпозиции «обобщенных» перемещений задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения со степенным ядром. Для его решения предлагается некоторый метод последовательных приближений, эффективный для узкого штампа. В каждом приближении двумерное уравнение распадается на независимые одномерные уравнения. В качестве примера рассмотрена задача для квадратного в плане штампа.

1. С помощью принципа суперпозиции «обобщенных» перемещений [1] рассматриваемая задача может быть сведена к уравнению [2]

$$\iint_S \frac{p(u,v)\,du\,dv}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^{1-\mu/2}}=\frac{W^\mu K}{c^\mu},\quad (x,y)\in S \tag{1.1}$$

Здесь S — область контакта, K — множитель в уравнении состояния

$$\sigma_i=K\varepsilon_i^\mu\quad (0.5<\mu\leqslant 1) \tag{1.2}$$

$c=c(\mu)$ — некоторая постоянная. $W(x,y)$ — скорость осадки штампа (связана с формой поверхности его подошвы), $p(x,y)$ — неизвестное контактное напряжение.

Представим ядро уравнения в виде интеграла Фурье

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{1-\mu/2}}=\frac{1}{\pi 2^{2-\mu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i(\xi x+\eta y))}{(\xi^2+\eta^2)^{\mu/2}}\,d\xi\,d\eta \tag{1.3}$$

В итоге в случае прямоугольной области S после введения безразмерных переменных $x'=x/a$, $y'=y/b$ (в дальнейшем штрихи опускаем) уравнение (1.1) примет вид

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p(u,v)\,du\,dv\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i[\xi(x-u)+\eta(y-v)])}{(\xi^2/\lambda^2+\eta^2)^{\mu/2}}\,d\xi\,d\eta=f(x,y) \tag{1.4}$$

$$|x|<1,\quad |y|<1$$

Здесь $\lambda = b/a$ — отношение сторон штампа, функция $f(x, y)$ очевидным образом выражается через $W(x, y)$.

Решение аналогичной плоской задачи изучено подробно [1] и дает для контактного напряжения особенность на острых кромках вида

$$(1 \mp y)^{-\mu/2}, \quad y \to \pm 1 \tag{1.5}$$

Такой же особенностью обладает и решение рассматриваемой здесь задачи на гладких участках границы области контакта.

Будем искать решение уравнения (1.4) в виде разложения по многочленам Гегенбауэра, ортогональным на отрезке $(-1,1)$ с весом $(1-y^2)^{-\mu/2}$

$$p(x, y) = \frac{1}{(1-y^2)^{\mu/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(x) C_k^{\frac{1-\mu}{2}}(y) \tag{1.6}$$

Такое представление заранее содержит требуемую особенность решения на сторонах $y = \pm 1$. Подставляя ряд (1.6) в уравнение (1.4), умножая скалярно на $(1-y^2)^{-\mu/2} C_n^{(1-\mu)/2}(y)$ и пользуясь значением интеграла [3]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(\pm i\eta v) C_k^{\frac{1-\mu}{2}}(v)}{(1-v^2)^{\mu/2}} dv = \frac{\pi 2^{\frac{1+\mu}{2}} \Gamma(k+1-\mu)}{k!\, \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)} (-1)^{\pm k/2} \frac{J_{k+\frac{1-\mu}{2}}(\eta)}{\eta^{\frac{1-\mu}{2}}} \tag{1.7}$$

придем к бесконечной системе одномерных интегральных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \gamma_k(u) du \int_{-\infty}^{\infty} L_{nk}(\lambda\xi) \exp(-i\xi(x-u)) d\xi = f_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

$$|x| < 1$$

$$f_n(x) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{\pi^2 2^{1+\mu}} \int_{-1}^{1} f(x, y) \frac{C_n^{\frac{1-\mu}{2}}(y)}{(1-y^2)^{\mu/2}} dy$$

$$L_{nk}(\lambda\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{k+\frac{1-\mu}{2}}(\eta) J_{n+\frac{1-\mu}{2}}(\eta) d\eta}{\eta^{1-\mu}(\eta^2 + \lambda^2\xi^2)^{\mu/2}} \cdot (-1)^{\frac{k-n}{2}} \frac{\Gamma(k+1-\mu)\,(n+1-\mu)}{k!\,n!}$$

Легко видеть, что в системе (1.8) присутствуют лишь те члены, для которых n и k одной четности.

2. Предположим, что параметр λ мал. Исследуем поведение символов $L_{nk}(\lambda\xi)$ в нуле.

Лемма 1. При малых α имеют место асимптотические представления

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{k+\frac{1-\mu}{2}}(\eta) J_{n+\frac{1-\mu}{2}}(\eta)}{\eta^{1-\mu}(\eta^2+\alpha^2)^{\mu/2}} d\eta = \begin{cases} a_{nk}|\alpha|^{n-k}, & n \neq k, \ n \text{ и } k \text{ одной четности} \\ \dfrac{1}{2n+1-\mu} + O(\alpha^2), & n = k = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{1}{1-\mu} + O(|\alpha|^{1-\mu}), & n = k = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Для получения первой оценки надо выделить первые $(n-k)/2$ членов разложения бинома $(\eta^2+\alpha^2)^{\mu/2}$ в ряд по малым α и воспользоваться табличным интегралом [3] от произведения функций Бесселя и степенной функции. Первым ненулевым членом окажется член, содержащий $|\alpha|$ в степени $|n-k|$, а остаточный член является малой величиной более высокого порядка малости. Для доказательства второго и третьего соотношений (2.1) используем интегральное представление произведения функций Бесселя и воспользуемся значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} J_\nu(ax)}{(x^2+k^2)^{1+\lambda}}\, dx \tag{2.2}$$

выражающегося через сумму двух гипергеометрических функций [3]. Разлагая последние в ряды, получим представление исследуемых интегралов в виде суммы двух рядов по степеням $|\alpha|$, откуда и вытекают 2-я и 3-я оценки (2.1).

Из леммы следует, что при малых λ главными членами в системе (1.8) являются диагональные (при $n=k$). Поэтому перепишем ее в виде

$$\int_{-1}^{1} \gamma_n(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} L_{nn}(\lambda\xi) \exp(-i\xi(x-u))\, d\xi = f_n(x) - \tag{2.3}$$

$$-\sum_{k\neq n} \int_{-1}^{1} \gamma_k(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} L_{nk}(\lambda\xi) \exp(-i\xi(x-u))\, d\xi, \quad |x|<1, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Теперь для решения системы (2.3) естественно развить метод последовательных приближений. На первом шаге решаем ряд отдельных одномерных уравнений

$$\int_{-1}^{1} \gamma_n(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} L_{nn}(\lambda\xi) \exp(-i\xi(x-u))\, d\xi = f(x), \qquad |x|<1, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.4}$$

со свободным членом $f(x)=f_n(x)$. Для получения последующих приближений подставляем полученные на предыдущем шаге решения в правую часть системы (2.3) и опять обращаем интегральные операторы, стоящие в левой части системы. На каждом шаге необходимо решать уравнения вида (2.4). Такой подход является асимптотическим по малому параметру λ и обычной сходимостью может не обладать.

3. Для построения решения уравнения (2.4) исследуем еще поведение символа при больших значениях аргумента.

Лемма 2. При $\alpha\to\infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\int_0^\infty \frac{J^2_{n+\frac{1-\mu}{2}}(\eta)\, d\eta}{\eta^{1-\mu}(\eta^2+\alpha^2)^{\mu/2}} \sim \frac{2^{\mu-1}\Gamma(1-\mu)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\mu\right)} \frac{1}{|\alpha|^\mu}\left[1+O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \tag{3.1}$$

Для доказательства разложим функцию $(\eta^2+\alpha^2)^{-\mu/2}$ в ряд по $1/|\alpha|$ и проинтегрируем почленно по η. Каждый из встречающихся при этом интегралов понимаем в обобщенном смысле, как аналитическое продолжение по показателю степени из той области комплексного переменного, где рассматриваемые интегралы сходятся в обычном смысле. Правомерность такого подхода следует из [4]. После этого утверждение леммы становится очевидным, если воспользоваться табличным интегралом от произведения функций Бесселя на степенную функцию.

Кроме асимптотических оценок для $L_{nn}(\alpha)$, полученных в леммах 1 и 2, отметим еще, что она является положительной на вещественной оси. Это обеспечивает существование, единственность и устойчивость решения уравнения (2.4) к малым возмущениям символа на вещественной оси [5].

С учетом изложенного выше аппроксимируем символ ядра [6] (погрешность аппроксимации зависит от значения параметра μ, обычно не превышает 20% и ухудшается при стремлении μ к 1):

$$L_{nn}(\alpha)=\frac{1}{(a_n^2+b_n^2\alpha^2)^{\mu/2}},\quad a_n^{-\mu}=\frac{2}{2n+1-\mu}\,\frac{\Gamma^2(n+1-\mu)}{(n!)^2} \tag{3.2}$$

$$b_n^{-\mu}=\frac{2^{\mu}\Gamma(1-\mu)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma^2(n+1-\mu)}{\Gamma^2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\mu\right)(n!)^2}$$

и перепишем уравнение (2.4) в виде

$$\int\limits_{-1/\lambda}^{1/\lambda}\gamma_n(u)du\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\xi(x-u))d\xi}{(a_n^2+b_n^2\xi^2)^{\mu/2}}=f(x),\ |x|<\frac{1}{\lambda},\ n=0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Главный член асимптотики решения уравнения (3.3) при малых λ может быть записан [6] в мультипликативном виде

$$\gamma_n(x)=q_1\left(\frac{1}{\lambda}+x\right)q_2\left(\frac{1}{\lambda}-x\right)/v(x),\quad |x|<\frac{1}{\lambda} \tag{3.4}$$

При этом погранслойные функции q_1 и q_2 находятся из решения для полубесконечного штампа:

$$\int\limits_0^{\infty}q_{1,2}(u)du\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\xi(x-u))d\xi}{(a_n^2+b_n^2\xi^2)^{\mu/2}}=f\left(\pm x\mp\frac{1}{\lambda}\right)=2\pi g_{1,2}(x),\ 0<x<\infty \tag{3.5}$$

а «вырожденное» решение $v(x)$ — из задачи для бесконечного полосового штампа:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(u)\,du\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\xi(x-u))d\xi}{(a_n^2+b_n^2\xi^2)^{\mu/2}}=f(x)=2\pi g(x),\quad |x|<\infty \tag{3.6}$$

4. Здесь построим решение уравнения Винера-Хопфа (3.5) на полуоси и уравнения на оси (3.6), с произвольной правой частью $g(x)$

в специальном виде, содержащем интегралы, понимаемые в обобщенном смысле.

Введем следующие обозначения: $\varphi_+(x)$ (соответственно, $\varphi_-(x)$) — функция, равная $\varphi(x)$ при $x>0$ ($x<0$) и нулю при $x<0$ ($x>0$). $\Phi^+(x)$ (соответственно, $\Phi^-(x)$) — значение на вещественной прямой функции $\Phi(z)$, аналитической в верхней (нижней) полуплоскости комплексного переменного z. Тогда уравнение (3.5) в образах Фурье примет вид [7]

$$\frac{Q_j^+(x)}{(a_n^2+b_n^2x^2)^{\mu/2}}=G_j^+(x)+Q^-(x), \quad (j=1,\ 2) \tag{4.1}$$

Здесь $Q^+(x)$ — образ функции $q_+(x)$, $G^+(x)$ — функции $g_+(x)$, $Q^-(x)$ — некоторая функция. После факторизации

$$(a_n^2+b_n^2x^2)^{-\mu/2}=[(a_n-b_nix)^{-\mu/2}]_+[(a_n+b_nix)^{-\mu/2}]_- \tag{4.2}$$

перепишем уравнение (4.1) в виде (индекс j временно опускаем)

$$\frac{Q^+(x)}{(a_n-b_nix)^{\mu/2}}=(a_n+b_nix)^{\mu/2}G^+(x)+(a_n+b_nix)^{\mu/2}Q^-(x) \tag{4.3}$$

Далее производим разложение функции

$$(a_n+b_nix)^{\mu/2}\,G^+(x)=N^+(x)+N^-(x) \tag{4.4}$$

причем, как это следует из формул Сохоцкого [7],

$$N^+(x)=\frac{1}{2}(I+S)[(a_n+b_nix)^{\mu/2}G^+(x)] \tag{4.5}$$

Здесь I — единичный оператор, S — сингулярный оператор с ядром Коши. Перепишем теперь соотношение (4.3) в виде [7]

$$\frac{Q^+(x)}{(a_n-b_nix)^{\mu/2}}-N^+(x)=N^-(x)+(a_n+b_nix)^{\mu/2}Q^-(x)=0 \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что

$$Q^+(x)=\frac{1}{2}(a_n-b_nix)^{\mu/2}(a_n+b_nix)^{\mu/2}G^+(x)+$$
$$+\frac{1}{2}(a_n-b_nix)^{\mu/2}S[(a_n+b_nix)^{\mu/2}G^+(x)] \tag{4.7}$$

Имеют место следующие связи между образами и оригиналами:

$$(a_n-b_nix)^{\mu/2}\leftarrow\frac{b_n^{\mu/2}}{\Gamma\left(-\dfrac{\mu}{2}\right)}\left[\frac{\exp(-a_n|b_n|x|)}{|x|^{1+\mu/2}}\right]_+=h_+(x) \tag{4.8}$$

$$(a_n+b_nix)^{\mu/2}\leftarrow\frac{b_n^{\mu/2}}{\Gamma\left(-\dfrac{\mu}{2}\right)}\left[\frac{\exp(-a_n|b_n|x|)}{|x|^{1+\mu/2}}\right]_-=h_-(x)$$

поэтому переход в формуле (4.7) к оригиналам дает

$$q(x) = \frac{1}{2}\{h_+ * (h_- * g_+) + h_+ * [\operatorname{sign} x (h_- * g_+)]\} \tag{4.9}$$

Знаком * обозначена операция свертки. Здесь было учтено также операционное соотношение [7]

$$\operatorname{sign} x \varphi(x) \to S\Phi, \qquad \text{если} \quad \varphi \to \Phi \tag{4.10}$$

Равенство (4.9) можно переписать также в виде

$$q(x) = \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} h(x-y)dy \int_{0}^{\infty} h(t-y)g(t)dt + \int_{0}^{x} h(x-y)dy \times \right. \tag{4.11}$$

$$\times \int_{y}^{\infty} h(t-y)q(t)dt - \int_{-\infty}^{0} h(x-y)dy \int_{0}^{\infty} h(t-y)g(t)dt +$$

$$\left. + \int_{0}^{x} (hx-y)dy \int_{y}^{\infty} h(t-y)q(t)dt \right|$$

или окончательно

$$q_j(x) = \frac{b_n^{\mu}}{\Gamma_2\left(-\frac{\mu}{2}\right)} \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{a_n}{b_n}(x-y)\right)}{(x-y)^{1+\mu/2}} \partial y \int_y^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{a_n}{b_n}(y-t)\right) q_j(t)}{(t-y)^{1+\mu/2}} dt \tag{4.12}$$

$$(j=1,2)$$

Интегралы понимаются в обобщенном смысле [8], как аналитическое продолжение по показателю степени α в степенных членах из области $\operatorname{Re}\alpha > -1$, где сходимость обычная, до значения $\alpha = -(1+\mu/2)$.

Аналогично можно получить решение уравнения (3.6). В этом случае в формуле, аналогичной (4.9), не будет $\operatorname{sign} x$, вместо g_+ будет g, и окончательно приходим к результату

$$v(x) = \frac{b_n^{\mu}}{\Gamma^2\left(-\frac{\mu}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left(-\frac{a_n}{b_n}(x-y)\right)}{(x-y)^{1+\mu/2}} dy \int_{y}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{a_n}{b_n}(y-t)\right) g(t)}{(t-y)^{1+\mu/2}} dt \tag{4.13}$$

Т е о р е м а. *Если интеграл*

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{a_n}{b_n}t\right) q_j(t)}{t^{1+\mu/2}} dt \tag{4.14}$$

сходится в обобщенном смысле, то функция (4.12) *имеет при* $x \to 0$ *особенность вида* $x^{-\mu/2}$.

Для доказательства сделаем во внутреннем интеграле (4.12) замену переменной $t - y = t'$, а во внешнем—замену $y = xy'$. В результате получим

$$q_j(x)=\frac{b_n^{\mu}}{\Gamma^2\left(-\frac{\mu}{2}\right)x^{-\mu/2}}\int_0^1\frac{\exp\left(-\frac{a_n}{b_n}(1-y)x\right)}{(1-y)^{1+\mu/2}}dy\int_0^\infty\frac{\exp\left(-\frac{a_n}{b_n}t\right)q_j(t+xy)dt}{t^{1+\mu/2}}$$

(4.15)

$x>0$

Из этой формулы следует, что при $x\to 0$

$$q_j(x)\sim\frac{b_n^{\mu}}{\Gamma^2\left(-\frac{\mu}{2}\right)x^{-\mu/2}}\int_0^1\frac{dy}{(1-y)^{1+\mu/2}}\cdot A \tag{4.16}$$

Таким образом, теорема доказана, поскольку значение в обобщенном смысле интеграла

$$\int_0^1\frac{dy}{(1-y)^{1+\mu/2}}=\int_0^1\frac{dy}{y^{1+\mu/2}}=-\frac{2}{\mu} \tag{4.17}$$

Таким образом, для решения исходного уравнения (1.1) построен метод последовательных приближений, эффективный при малых значениях параметра λ. Каждое приближение имеет на сторонах штампа нужную особенность. Однако предлагаемый подход не позволяет в явном виде получить особенность решения в углах штампа. Для исследования этой проблемы необходимо было бы исходить из решения контактной задачи для клиновидного в плане штампа с углом раствора 90°.

Пользуясь изложенным здесь методом для частного значения $\mu=1$, можно легко получить решение задачи в линейном случае, что предпринималось—в теории крыла конечного размаха[1] и в контактных задачах теории упругости[2]. Заметим однако, что в линейном случае третья оценка (2.1) нарушается, и для получения первого приближения (при $n=0$) нужно решать уравнение с совершенно другим символом [9].

5. В качестве примера рассмотрим задачу о квадратном в плане штампе с плоским основанием.

В случае плоского основания штампа $f(x, y)=\text{const}$, $f_n(x)=0$ ($n=1, 2, \dots$), $f_0(x)=f_0$. Следовательно, при построении первого приближения (2.4) имеем $\gamma_n^1(x)=0$ ($n=1, 2, \dots$). Решение же уравнения Винера-Хопфа (3.5) при $n=0$ имеет вид

---

[1] *Грунтфест Р.* А. Асимптотическая теория колебаний деформируемого крыла. — Тез. докл. Всес. научн. конф. «Смеш. задачи механики деф. тела», ч. 2. Ростов-на-Дону, 1977, с. 77.

[2] *Сумбатян М. А.* Построение асимптотики решения контактной задачи для узкого прямоугольного в плане штампа. — Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости. Ереван, 1979, с. 322—325.

$$q(x)=g_0\frac{b_0^{\mu}}{\Gamma^2\left(-\frac{\mu}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{a_0}{b_0}t\right)dt}{t^{1+\mu/2}}\int\limits_0^{x}\frac{\exp\left(-\frac{a_0}{b_0}y\right)dy}{y^{1+\mu/2}},\quad g_0=\frac{f_0}{2\pi}\tag{5.1}$$

Вычисляя обобщенные значения интегралов, входящих в (5.1), легко получаем следующую формулу:

$$q(x)=g_0\frac{(a_0b_0)^{\mu/2}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}\left[x^{-\mu/2}\exp\left(-\frac{a_0}{b_0}x\right)+\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{\mu/2}\gamma\left(1-\frac{\mu}{2},\frac{a_0}{b_0}x\right)\right]\tag{5.2}$$

Здесь $\gamma(\alpha, x)$—неполная гамма-функция [10].

Заметим, что это же решение (5.2) уравнения (3.5) при постоянной правой части g_0 может быть получено и непосредственно, без применения обобщенных значений интегралов.

Функция $v(x)$ (4.13) вычисляется аналогично

$$v(x)=a_0^{\mu}g_0\tag{5.3}$$

Далее функция $\gamma_0^1(x)$ вычислялась по формуле (3.4), причем $q_1=q_2=q$, а значения неполной гамма-функции брались по таблицам [11]. Распределение контактного напряжения, полученное по первому приближению

$$p^1(x,y)=\frac{\gamma_0^1(x)}{(1-y^2)^{\mu/2}}\tag{5.4}$$

в случае $\mu=0.8$ отражено в таблице. Из таблицы видно, что значения напряжения симметричны относительно диагонали квадрата $x=y$ с относительной погрешностью, не превосходящей 6%.

Таблица

y \ x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
0	0.824	0.836	0.875	0.964	1.19	1.52
0.2	0.838	0.850	0.890	0.980	1.21	1.55
0.4	0.884	0.897	0.939	1.03	1.28	1.63
0.6	0.986	1.00	1.05	1.15	1.42	1.82
0.8	1.24	1.26	1.32	1.45	1.79	2.29
0.9	1.69	1.62	1.70	1.87	2.31	2.95

Автор выражает признательность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

CONTACT PROBLEM IN THE NONLINEAR CREEP THEORY FOR A RECTANGULAR CONTACT REGION

M. A. SUMBATIAN

ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՀԱՄԱՐ

Մ. Ա. ՍՈՒՄԲԱՏՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կոշտ ուղղանկյուն դրոշմի՝ հաստատված ոչ գծային սողքի պայմաններում գտնվող կիսատարածության ներճման խնդիրը։ Ընդհանրացված տեղափոխությունների վերադրման սկզբունքի օգնությամբ խնդիրը կարող է բերվել աստիճանային կորիզով երկչափ ինտեգրալ հավասարման, որի լուծման համար առաջարկվում է մի մեթոդ, որն արդյունավետ է նեղ դրոշմների համար։ Այդ մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում բավական է լուծել առանձին միաչափ ինտեգրալ հավասարումներ։

Դիտարկված է քառակուսի դրոշմի դեպքը։ Թվային արդյունքները ցույց են տալիս, որ աշխատանքում առաջարկված եղանակը կարող է կիրառվել ոչ միայն կոնտակտի նեղ տիրույթների, այլև հավասարակողմ դրոշմների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.—ПММ, 1959, т. 23, №5, с. 901—924.
2. *Кузнецов А. И.* Вдавливание жестких фундаментов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала.—ПММ, 1962, т. 26, №3, с. 481—491.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
4. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов, т. 2.—Рига: Зинатне, 1977. 463 с.
5. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.—ПММ, 1971, т. 35, №1, с. 88—99.
6. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости.—ПММ, 1968, т. 32, №4, с. 672—683.
7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
9. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Асимптотическое решение интегральных уравнений типа свертки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики.—Изв. АН СССР. МТТ, 1980, №2, с. 80—88.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
11. *Пагурова В. И.* Таблицы неполной гамма-функции. М.: Изд-во Выч. центра АН СССР, 1963. 239 с.

Ростовский инженерно-строительный
институт

18.II.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

ИНФОРМАЦИЯ

О VI конференции молодых ученых Института механики АН АрмССР

В период 4—8 мая 1987 г. в Доме симпозиумов АН АрмССР (Арзакан) была организована VI конференция молодых ученых Института механики АН АрмССР.

В работе конференции помимо молодых ученых механиков Армении приняли участие ряд молодых ученых из различных центров Москвы, Ленинграда, Киева, Львова, Ростова-на-Дону, Тбилиси.

Научная тематика конференции, в основном, относилась к проблемам механики деформируемого твердого тела. Были прочтены доклады по динамическим и статическим задачам теории упругости, по вопросам теории электромагнитоупругости, по оптимизации тонкостенных конструкций, теории оболочек и пластин.

Материалы конференции будут опубликованы в сборнике «Исследования по механике твердого деформируемого тела», Изд-во АН АрмССР, вып. 4.

Председатель Совета молодых ученых
Института механики АН Арм. ССР
к.ф.-м. н. В. С. Макарян