

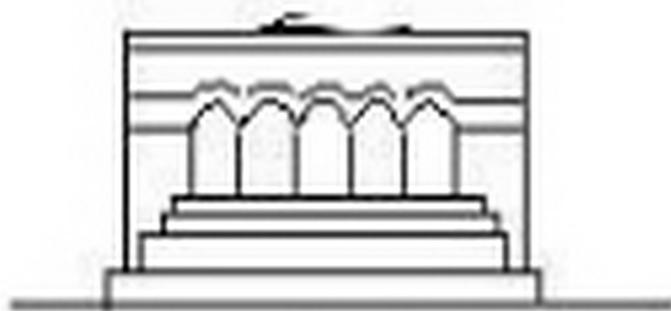
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1987

УДК 539.3

ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНАХ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

БАГДОВЕ А. Г., МОВСИЯН Л. А.

Динамические задачи о трещинах для антиплоской и плоской задач теории упругости в различных постановках рассматривались многими авторами [1—8 и др.]. Сравнительно мало исследований о трещинах в вязкоупругой среде. В работах [9—11] исследуется распространение трещины в антиплоской задаче в стационарной постановке.

Следует отметить, что задача [1] по математической формулировке совпадает с задачей дифракции плоской волны на трещине [4, 7].

В настоящей статье изучаются, в основном, коэффициенты интенсивности напряжений в антиплоской и плоской задачах для вязкоупругих нестареющих сред. Для первой задачи предполагается, что на краях трещины заданы касательные напряжения постоянной интенсивности, а для второй — помимо условия симметрии, постоянные нормальные напряжения.

Для трещины, движущейся с постоянной скоростью, в явном виде решения записываются для среды Максвелла, а для неподвижной — в общем виде.

1. Уравнение движения антиплоского движения запишется в виде

$$G(1-K^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где оператор

$$K^*(u) = \int_0^u K(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

В частности, будем иметь дело с ядрами со слабой сингулярностью

$$K(t) = A \exp(-\eta t) t^{\alpha-1} \quad (0 < \alpha \leq 1) \tag{1.3}$$

Граничные условия имеют вид

$$\tau_{yz} = G(1-K^*) \frac{\partial w}{\partial y} = TH(Ct-x)H(t) \quad \text{при } x \ll Ct \tag{1.4}$$

$$w = 0 \quad \text{при } x > Ct$$

Введем новую переменную $\xi = x - Ct$ и преобразуем (1.1), подвергая преобразованиям по Лапласу и Фурье

$$W(\lambda, y, s) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w \exp(-(\lambda \xi + \beta y + t)s) d\xi dt \quad (1.5)$$

При этом надо учесть, что поскольку K^* есть псевдодифференциальный оператор и $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - C \frac{\partial}{\partial \xi}$, K^* дает производную дробного порядка и $K^* = \bar{K}(s - \lambda C s)$, где

$$\bar{K}(s) = A \frac{\Gamma(\beta)}{[\gamma + s(1 - \lambda C)]^\beta} \quad (1.6)$$

Тогда для неизвестного β получим

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2} \frac{(1 - \lambda C)^\beta}{1 - \bar{K}} - \lambda^2, \quad b^2 = \frac{G}{\rho} \quad (1.7)$$

Удовлетворяя преобразованным условиям (1.4), получим следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$G s \beta (1 - \bar{K}) W_-(\lambda, s) = \frac{T}{s^2} - T_+(\lambda, s) \quad (1.8)$$

где W_- и T_+ — аналитические в левой и правой полуплоскостях λ преобразованные по t и ξ значения w и v_{yz} . При этом в (1.5) интегрирование по ξ ведется в пределах $-\infty < \xi \leq 0$ и $0 < \xi < \infty$.

В общем виде факторизацию (1.8) можно провести известным образом [12]

$$\beta(1 - \bar{K}) = \bar{\beta}_+ \cdot \bar{\beta}_-, \quad \bar{\beta}_\pm = \exp \left\{ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\beta(1 - \bar{K})| d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \right\} \quad (1.9)$$

Однако, полученные уравнения не только необозримые, но и не поддаются обратному обращению из-за сложной формы вхождения λ в $\bar{K}(s)$. Формулы эти проще получаются для среды типа Максвелла, то есть если в (1.3) предположить $\delta = 1$ и $A = \gamma$. Поэтому для движущейся трещины концентрацию напряжения будем изучать для среды Максвелла, а для неподвижной ($C = 0$) — в общем виде (1.3).

Итак, для среды Максвелла $\bar{K} = \frac{A}{A + s(1 - \lambda C)}$

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2} (1 - \lambda C)^2 + \frac{A}{b^2 s} (1 - \lambda C) - \lambda^2 \quad (1.10)$$

и $\beta = \beta_+ \cdot \beta_-$ будет иметь вид

$$\beta_+ \cdot \beta_- = \sqrt{\sqrt{1 - \frac{C^2}{b^2}(\lambda - \lambda_1)}} \sqrt{\sqrt{1 - \frac{C^2}{b^2}(\lambda - \lambda_2)}} \quad (1.11)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C \left(1 + \frac{A}{2s}\right) \pm b \sqrt{1 + \frac{A}{s} + \frac{C^2 A^2}{4b^2 s^2}}}{b^2 - C^2} \quad (1.12)$$

причем $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ при $s > 0$.

Тогда решение уравнения (1.8) дает

$$T_{yz} = \frac{T}{s^2 \lambda} \left[1 - \frac{\xi_+(t)}{\xi_+(0)} \right], \quad T_{yz} = -\frac{T}{i s^2} \frac{\xi_+(t)}{\xi_+(0)} \quad (1.13)$$

Для получения коэффициента интенсивности напряжения следует получить $\lambda \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow 0$) и при обращении преобразования Фурье учесть, что [13]

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\xi^{1/2} \Gamma(1/2)}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Преобразование по Лапласу от τ_{yz}

$$\bar{\tau}_{yz} = -\frac{T}{s^{3/2}} \frac{1}{\xi^{1/2} \Gamma(1/2)} \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \quad (1.15)$$

Для упрощения отдельно рассмотрим случаи малых и больших времен. В первом случае ($s \rightarrow \infty$)

$$\bar{\tau}_{yz} = -\frac{2T\sqrt{b-C}}{\pi \xi^{1/2}} t^{1/2} \left(1 - \frac{A}{6} t\right) \quad (1.16)$$

а для больших t ($s \rightarrow 0$)

$$\bar{\tau}_{yz} = -\frac{TH(t)}{\xi^{1/2}} \sqrt{\frac{b^2 - C^2}{\pi AC}} \quad (1.17)$$

Для стоящей трещины при (1.3) выражение T_{yz} можно найти на всей оси x и, в частности, при $x \rightarrow 0$

$$\bar{\tau}_{yz} = -\frac{T\sqrt{b}}{s^{3/2}} \sqrt{1 - K(s)} \frac{1}{x^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (1.18)$$

Для $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ соответственно получим

$$\tau_{yz} = -\frac{2T\sqrt{b}t^{1/2}}{\pi x^{1/2}} \left[1 - \frac{A}{8} t^2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\delta)}{\Gamma\left(\delta + \frac{3}{2}\right)} \right] \quad (1.19)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{2T\sqrt{b}t^{1/2}}{\pi x^{1/2}} \left[1 - \frac{A\Gamma(\delta)}{8} \right]^{1/2} \quad (1.20)$$

Помимо полученных формул (1.19) и (1.20) из (1.8) можно таким же образом определить w при $x < 0$. Тогда, используя принцип Гриффитса-Ирвина, можно записать условие распространения трещины. Для малых времен оно имеет вид

$$\sigma = \frac{T^2 b t}{2G\pi} \left[1 + A t^6 \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + \frac{3}{2})} \right]$$

где σ — поверхностная энергия разрушения.

Как видно из последней формулы, вязкоупругость уменьшает время возникновения трещины.

Аналогичный результат о возможности распространения движущейся трещины можно получить, используя принцип Г. Баренблатта [3].

Из (1.19) для среды Максвелла при $C=0$ получится (1.16), а (1.20) вырождается и вместо (1.20) надо пользоваться формулой

$$\tau_{yz} = - \frac{T t^{1/4}}{\Gamma(\frac{5}{4}) \Gamma(\frac{1}{2}) x^{1/4}} \sqrt{\frac{b^2}{A}} \quad (1.21)$$

Кстати, для $C=0$ для всех времен из (1.18) (или (1.15)) получается

$$\tau_{yz} = - \frac{4T\sqrt{b}}{x^{1/2} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma^2(\frac{1}{4})} \int_0^t (t-\tau)^{1/4} \frac{\exp(-A\tau)}{\tau^{3/4}} d\tau \quad (1.22)$$

2. В случае плоской задачи уравнения движения имеют вид

$$a^2(1-K^*)\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad b^2(1-K^*)\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

где a и b — скорости продольных и поперечных волн, φ и ψ — потенциалы.

Граничные условия на $y=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \sigma_{yy} &= (1-K^*) \left[(a^2 - 2b^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2b^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\ &= PH(t)H(Ct-x), \quad -\infty < x \leq Ct, \quad \tau=0, \quad x > Ct \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вводя переменное ξ , для преобразованных по (1.5) величин из (2.2) можно получить

$$\begin{aligned} T_{yy}(\xi, 0, s) &= 0, \quad V(\xi, 0, s) = \frac{1}{s^2} J(\xi) \\ \Sigma_{yy}(\xi, 0, s) &= -\frac{P}{s^2 \tau} + \frac{1}{s^2} \Sigma(\xi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя сюда Φ и Ψ , можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{b^4 J_\tau}{a(1-iC)^2} [1 - K]^* R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \Sigma_\tau \quad (2.4)$$

где функция R определяется, как

$$R(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \alpha \beta \quad (2.5)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{a^2} \frac{(1 - \lambda C)^2}{1 - K}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{b^2} \frac{(1 - \lambda C)^2}{1 - K}$$

Для упрощения факторизации, как и в п. 1, будем изучать среду Максвелла. Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{b^2 J_{\pm}}{z} \frac{s^2 R(\lambda)}{[A + s(1 - \lambda C)]^2} = \frac{1}{\lambda} - \Sigma_{\pm} \quad (2.6)$$

Факторизация $R(\lambda)$ проводится, как и в [4]

$$R(\lambda) = -S(\lambda) k (\lambda - c_1) (\lambda + c_2) \left(\lambda - \frac{1}{C} \right)^2, \quad S(\infty) = 1 \quad (2.7)$$

$$k = 4 \sqrt{\left(1 - \frac{C^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{C^2}{b^2}\right) - \left(\frac{C^2}{b^2} - 2\right)^2} \quad (2.8)$$

$\pm c_{1,2}$ — корни уравнения Релея

$$S_{\pm} \sim \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{\lambda_{\pm,1}^{(0)}}^{\lambda_{\pm,2}^{(0)}} \arctg \frac{4(\lambda')^2 \alpha \beta d\lambda'}{[\lambda^2 - (\lambda')^2] P(\lambda' - \lambda)} \right\}$$

где λ_{\pm} даются по (1.12).

Решение уравнения Винера-Хопфа имеет вид [1, 4]

$$\Sigma_{\pm}(i, 0, s) = - \frac{P}{\lambda s^2} \frac{z_{\pm}(0)}{z_{\pm}(\lambda)} \frac{\lambda + c_2}{c_2} \frac{S_{\pm}(\lambda)}{S_{\pm}(0)} \quad (2.9)$$

Для получения коэффициента интенсивности напряжения положим $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда

$$\Sigma_{\pm} = - \frac{P}{c_2 S_{\pm}(0)} \frac{z_{\pm}(0)}{s^2 \sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \frac{C^2}{a^2}}} \quad (2.10)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$\bar{z}_{\pm} = - \frac{P}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^{1/2}} \frac{\sqrt{-\lambda_0(a)}}{c_2} \frac{1}{s^{3/2} S_{\pm}(0)} \quad (2.11)$$

Для получения обратного преобразования по t , как и раньше, рассмотрим асимптотические случаи.

При $s \rightarrow \infty$

$$c_2 = -\lambda_0 + A \frac{A}{s(1 - \lambda_0 C)}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{C - c}$$

где c — скорость упругой волны Релея и постоянная $A = \Lambda_1 / \Lambda_2$.

$$\Lambda_1 = \left[(\beta_0^2 - \lambda_0^2) \frac{1}{b^2} - \lambda_0^2 \beta_0 \left(\frac{1}{a^2 \beta_0^2} + \frac{1}{\lambda_0^2 \beta_0^2} \right) \right] (1 - \lambda_0 C)^2 > 0$$

$$\Lambda_2 = (\beta_0^2 - \lambda_0^2) \left[\frac{C}{b^2} + \lambda_0 \left(2 - \frac{C^2}{b^2} \right) \right] + \lambda_0^2 \beta_0 \beta_0 \left[\frac{1}{\beta_0^2} \left[\frac{C}{a^2} + \lambda_0 \left(1 - \frac{C^2}{a^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_0^2} \left[\frac{C}{b^2} + \lambda_0 \left(1 - \frac{C^2}{b^2} \right) \right] \right] - 2\lambda_0 \beta_0 \beta_0 > 0$$

Разлагая по λ $S_+(0) = S_0^+(0) \left[1 + S_+^1(0) \frac{A}{S} \right]$, имеем

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \sqrt{\frac{r}{z}} \frac{c-C}{\sqrt{a-C}} \frac{1}{S_+^0(0)} \left\{ 1 + A \left[\frac{1}{4} - \frac{\lambda(c-C)}{1-\lambda_0 C} - S_+^1(0) \right] \frac{2r}{3} \right\} \quad (2.12)$$

где

$$S_0^+(0) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{1/a}^{1/a} \operatorname{arctg} z \frac{d^2}{(1-C_+)^2} \right]$$

$$z = \frac{4z^2 \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} - z^2\right)}}{\left(2z^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

Для оценки влияния вязкости полагаем $C=0$ и берем типичные отношения b/a , c/b . Тогда значение скобки при A приблизительно равно $-0,22$, то есть концентрация уменьшается.

Для $s \rightarrow 0$

$$\lambda_2(a) = -\frac{C}{a^2 - C^2} \frac{A}{s}, \quad c_2 = \frac{1}{s} z(\bar{\beta})$$

где z —корень уравнения

$$(-2z + \bar{\beta} C)^2 - 4z(z - \bar{\beta} C)^{1/2} \left(z - \bar{\beta} \frac{b^2}{a^2} C \right)^{1/2} = 0, \quad \bar{\beta} = \frac{A}{b^2}, \quad S_+(z) = 1$$

Тогда получится

$$\sigma_y = -\frac{P}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}} \sqrt{\frac{C}{a^2 - C^2}} \sqrt{A} \frac{H(z)}{z(\bar{\beta})} \quad (2.13)$$

Для неподвижной трещины при (1.3) функцию Релея можно записать как

$$R(\lambda) = 2S(\lambda)(\lambda^2 - c^2) \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2} \right) \quad (2.14)$$

$$S = S_+ - S_-, \quad S_{\pm} = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{1/a}^{1/a} \operatorname{arctg} \frac{4z^2 \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} - z^2\right)}}{\left(\frac{1}{b^2} - 2z^2\right)^2 [z^2 + i\sqrt{1-K}]} d^2 \right]$$

где

$$a_0 = a\sqrt{1-K}, \quad b_0 = b\sqrt{1-K}, \quad K = \text{AG}(\zeta)(s+\tau)$$

Решение уравнения Винера-Лонфа дается (2.9) ($c_2 = 1/c + \Delta A/s$) и при $x \rightarrow 0$ получится:
при $t \rightarrow 0$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{(ax)^{1/2}} \frac{c}{S_1(0)} \frac{t^{1/2}}{\pi} \left[1 + \left(\frac{1}{4} - \Lambda'c \right) \frac{\text{AG}(\zeta)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\delta + \frac{3}{2}\right)} t^\delta \right] \quad (2.15)$$

где $\Lambda' = \Lambda(C=0)$
при $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{(a_0x)^{1/2}} \frac{c(\bar{a}_0, \bar{b}_0)}{S_1(0)} \frac{t^{3/2}}{\pi} \quad (2.16)$$

где $\bar{a}_0, \bar{b}_0 = a_0(s=0), b_0(s=0)$.

В случае максвелловской среды для $t \rightarrow 0$ решение из (2.12) или (2.15) получится в одинаковом виде, а для получения решения при $t \rightarrow \infty$ надо учесть, что

$$a_0 = a\sqrt{\frac{s}{A}}, \quad c_2 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{A}{s}}, \quad \sigma_y = -\frac{P}{\Gamma(1/2)(ax)^{1/2}} \frac{c}{\Gamma AS_1(0)} \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/4)}$$

Таким образом, асимптотическое поведение решения в случае $C=0$ существенно отличается от общего, даваемого по (2.16) и от $C \neq 0$ (2.13).

Следует отметить, что переход к задачам статики ($a, b \rightarrow \infty$) согласно (1.17) и (2.13) дает конечные значения концентраций напряжений лишь в случаях движущихся трещин в среде Максвелла.

THE PROBLEMS ON CRACKS IN THE VISCOELASTIC MEDIA A. G. BAGDOEV, I. A. MOVSISIAN

ԱՌՅՁԳԱՄԱՍԻՅԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԼԱՔԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Ի. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ռ. մ.

Գիտարկված են առաձգամածուցիկ միջավայրում ճաքի վերարկրյալ շահարթի և ճաքի դինամիկական խնդիրները: Հաստատուն արագությամբ շարժվող ճաքի շամար լուծված են խառը եզրային խնդիրների Մաքսվելի օրենքի դեպքում: Անշարժ ճաքի դեպքում լուծումները գտնված են թույլ սինգուլյարությամբ ունեցող կորիզի շամար:

Հարումների ինտենսիվության գործակիցների շամար դուրս են բերված ասիմպտոտական բանաձևերը: Յուրյց են արված ճաքի արագության և մածուցիկության ազդեցությունները ստացված արժեքների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Baker B. R.* Dynamic stresses created by a moving crack.—*Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1962, v. 29, № 3, pp. 3—12.
2. *Freund L. B.* Crack propagation in elastic solids subjected to general loading. III stress wave loading.—*J. Mech. and Phys. Solids*, 1973, v. 21, № 2, p. 47—61.
3. *Когрэн Б. В.* Неустойчившееся распространение трещины продольного сдвига.—*ПММ*, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042—1050.
4. *Freund L. B.* Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. I. Constant rate of extension. *J. Mech. and Phys. Solids*, 1972, vol. 20, p. 129—141.
5. *Сарайкин В. А., Сленин Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 54—73.
6. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. М.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальные и касательные импульсы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 100—111.
7. *Norris A. N. and Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. *The Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1984, v. 37, p. 565—581.
8. *Поршнев В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
9. *Walton J. R.* On the steady-state propagation of an antiplane shear crack in the infinite linear viscous elastic space.—*Quart. Appl. Math.*, 1982, № 1, p. 37—52.
10. *Wills J. R.* Crack propagation in viscoelastic media.—*J. Mech. Phys. Solids*, 1967, v. 15, pp. 229—240.
11. *Walton J. R.* The Dynamic Steady-State propagation of an Antiplane Shear Crack in a General Linearly Viscoelastic Layer.—*Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1985, v. 52, № 4, pp. 853—856.
12. *Нобя Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во инж-р лит, 1962. 279 с.
13. *Бейтмен Г. и Эрдеди Н.* Таблицы интегральных преобразований Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
4.VII.1986

УДК 539.3:537.86

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ
 В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АКОПЯН Н. Э., БАГДАСАРЯН Г. Г.

В работе [1], исходя из основных положений работы [2], предложен асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин в стационарном магнитном поле.

Указанный метод в данной работе распространяется на случай конечно проводящего материала и на его основе решаются задачи магнитоупругих колебаний конечно проводящих прямоугольных пластин в стационарном продольном магнитном поле при различных граничных условиях. Получено асимптотическое уравнение для определения частот магнитоупругих колебаний. Проведен численный анализ зависимости комплексной частоты поперечных колебаний от величины напряженности внешнего магнитного поля и от физико-механических и геометрических параметров пластинки. Проведен сравнительный анализ точности асимптотического метода.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ с конечной электропроводностью σ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2 . Рассмотрим колебания пластинки в вакууме при наличии постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности $H(H_1, 0, 0)$.

Задача решается при тех же предположениях, которые сделаны в работе [1]. В указанной работе получено следующее уравнение, описывающее магнитоупругие колебания пластинки:

$$\left[1 + \frac{h}{k(1+kh)} \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(D\Delta^2 w + 2\sigma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{2\sigma h H_1^2}{c^2 k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial t} = 0 \quad (1.1)$$

где $w(x_1, x_2, t)$ — прогиб пластинки, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, Δ — двумерный оператор Лапласа, t — время, c — скорость света в вакууме, $k^2 = \bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2$, $\bar{k}_1 = \text{Re}k_1$, $\bar{k}_2 = \text{Re}k_2$, k_1 и k_2 — неизвестные волновые числа.

В случае идеально проводящей пластинки ($\sigma \rightarrow \infty$) уравнение (1.1) принимает вид

$$D\Delta^2 w + 2\sigma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{(1+kh)H_1^2}{2\pi k} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.2)$$

где k_1 и k_2 вследствие отсутствия диссипации являются действительными.

2. В уравнения (1.1) и (1.2) входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2 . Найдем эти величины и частоту магнитоупругих колебаний пластинки путем применения асимптотического метода [1—5].

Рассмотрим магнитоупругие колебания прямоугольной и плоской проводящей пластинки со сторонами a_1 и a_2 . Условия на контуре пластинки будем пока считать произвольными. Подстановкой $w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \exp(i\omega t)$, где ω — частота магнитоупругих колебаний, (1.1) или (1.2) приводится к виду

$$\Delta^2 W - \gamma H_1^2 \frac{d^2 W}{dx_1^2} - \frac{2\phi h}{D} \omega^2 W = 0 \quad (2.1)$$

Коэффициент γ в случае конечно проводящей пластинки определяется по формуле

$$\gamma = \frac{h}{2\pi D} \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(k^2 + \frac{kh}{1+kh} \frac{4\pi \omega i \omega}{c^2} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

а в случае идеально проводящей пластинки

$$\gamma = (1 - kh) / (2\pi l) k \quad (2.3)$$

Запишем «внутреннее» решение уравнения (2.1) в виде

$$W = A \sin k_1 (x_1 - \xi_1) \sin k_2 (x_2 - \xi_2) \quad (2.4)$$

где константы k_1 , k_2 , ξ_1 и ξ_2 определяются из граничных условий, а постоянная A — из начальных. Подставляя (2.4) в (2.1), получим следующее уравнение относительно неизвестных комплексных величин ω , k_1 и k_2 :

$$\left[1 + \frac{k}{h(1+kh)} \frac{4\pi i \omega}{c^2} \right] (Dk^4 - 2\phi k \omega^2) + \frac{2\phi k^2 H_1^2 i \omega}{c^2 k^2} = 0 \quad (2.5)$$

для конечно проводящей пластинки и

$$\omega^2 = \frac{D}{2\phi h} \left[k^4 + \frac{H_1^2 k_1^2}{2\pi D} \left(h + \frac{1}{k} \right) \right] \quad (2.6)$$

для идеально проводящей пластинки.

Решение (2.4), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям и поэтому должно быть скорректировано решениями типа динамического краевого эффекта [2]. Приближенное решение задачи будет найдено, если окажется возможным построение четырех решений уравнения (2.1), каждое из которых будет удовлетворять двум граничным условиям на одном из краев пластинки и будет приближаться к «внутреннему» решению (2.4) по мере удаления от границы. В случае конечно проводящей пластинки, как видно из (2.2), γ является комплексной величиной и вследствие этого построение таких решений в рассматриваемом случае весьма затруднительно. Поэтому принимается, что при определении ω из уравнения (2.5) в нем в качестве полных

чисел k_1 и k_2 можно использовать их значения, найденные из соответствующей задачи для идеально проводящей пластинки (γ определяется по формуле (2.3)). Как показывают численные расчеты, приведенные в конце работы, погрешность, обусловленная этим допущением, не превышает трех процентов по сравнению с точным решением. Таким образом, применяя асимптотический метод относительно уравнения (2.1), предполагаем, что γ определяется по формуле (2.3).

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям на краю $x_1 = 0$, ищется в виде

$$W_{11} = X_{11}(x_1) \sin k_2(x_2 - \xi_{21}) \quad (2.7)$$

Подстановка (2.7) в (2.1) с учетом (2.5) приводит к уравнению

$$\frac{d^4 X_{11}}{dx_1^4} - (2k_2^2 + \gamma H_1^2) \frac{d^2 X_{11}}{dx_1^2} - k_1^2(k_2^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2) X_{11} = 0$$

общее решение которого имеет вид

$$X_{11} = c_{11} \exp\{-x_1(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2)^{1/2}\} + c_{21} \sin k_1(x_1 - \xi_{11}) + c_{31} \exp\{x_1(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2)^{1/2}\} \quad (2.8)$$

Потребуем, чтобы решение (2.8) при $x_1 \rightarrow \infty$ стремилось к «внутреннему» решению (2.4). Это требование удовлетворяется, если в (2.8) положить $c_{21} = A$ и $c_{31} = 0$. Тогда решение (2.7) примет вид

$$W_{11} = \{c_{11} \exp[-x_1(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2)^{1/2}] + A \sin k_1(x_1 - \xi_{11})\} \sin k_2(x_2 - \xi_{21}) \quad (2.9)$$

С возрастанием x_1 решение (2.9) приближается к «внутреннему» решению (2.4), а входящие в него две константы c_{11} и ξ_{11} позволяют удовлетворить двум условиям на краю $x_1 = 0$. Аналогично можно получить следующее решение:

$$W_{12} = \{c_{12} \exp[-(a - x_1)(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2)^{1/2}] + A \sin k_1(a - x_1 - \xi_{12})\} \sin k_2(x_2 - \xi_{21}) \quad (2.10)$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x_1 = a$ и стремящееся к «внутреннему» решению (2.4) по мере удаления от этой границы.

Аналогично записываются решения W_{21} и W_{22} , удовлетворяющие граничным условиям на остальных сторонах контура и приближающиеся к решению (2.4) во внутренней области пластинки.

Неизвестные волновые числа k_1 и k_2 можно найти, «склеивая» решения, удовлетворяющие граничным условиям на противоположных сторонах контура пластинки. С точностью до затухающего экспоненциального члена условия «склеивания» решений (2.9) и (2.10), а также W_{21} и W_{22} запишутся в виде

$$k_1 a_1 = k_1(\xi_{11} + \xi_{12}) + m\pi, \quad k_2 a_2 = k_2(\xi_{21} + \xi_{22}) + n\pi \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

Величины ξ_{ik} , входящие в уравнения (2.11), определяются из граничных условий на контуре пластинки. Имея эти величины, волновые числа k_1 и k_2 находим из решения системы уравнений (2.11). Под-

ставляя полученные таким путем значения волновых чисел в уравнение (2.5) или (2.6), вычисляем соответствующие частоты магнитоупругих колебаний.

Рассмотрим различные варианты закрепления краев пластинки.

1) Пластика жестко зашкреплена по контуре.

Формы магнитоупругих колебаний пластинки распадаются на четыре группы по типам симметрии. Удовлетворяя условиям жесткого зашкрепления, определяем постоянные k_{ik} , а из (2.11) получаются следующие уравнения относительно k_1 и k_2 :

$$\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = -(1 + 2\beta_1^2 + \alpha)^{-1/2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{a_2 k_2}{2} = -(1 - 2\beta_2^2)^{-1/2} \quad (2.12)$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний, и

$$\operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} = (1 - 2\beta_1^2 + \alpha)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} = (1 + 2\beta_2^2)^{-1/2} \quad (2.13)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Здесь принято:

$$\alpha = \frac{H_0^2}{2\pi D} \frac{1 + k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \beta_1 = k_2 k_1^{-1}, \quad \beta_2 = \beta_1^{-1} \quad (2.14)$$

Две остальные смешанные формы колебаний получаются, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (2.12) с другим из (2.13).

2) Пластика шарнирно зашкреплена по контуре.

Аналогичным образом, удовлетворяя условиям шарнирного оппирования, из (2.11) получим

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

3) Пластика упруго зашкреплена по контуре.

В этом случае волновые числа k_1 и k_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = - \left| \sqrt{1 + 2\beta_1^2 + \alpha} + \frac{2Dk_1}{\lambda} \left(1 + \beta_1^2 + \frac{\alpha}{2}\right) \right|^{-1} \quad (2.16)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{a_2 k_2}{2} = - \left| \sqrt{1 + 2\beta_2^2} + \frac{2Dk_2}{\lambda} (1 + \beta_2^2) \right|^{-1}$$

для симметричных форм колебаний и

$$\operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} = \left| \sqrt{1 + 2\beta_1^2 + \alpha} + \frac{2Dk_1}{\lambda} \left(1 + \beta_1^2 + \frac{\alpha}{2}\right) \right|^{-1} \quad (2.17)$$

$$\operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} = \left| \sqrt{1 + 2\beta_2^2} + \frac{2Dk_2}{\lambda} (1 + \beta_2^2) \right|^{-1}$$

для антисимметричных форм колебаний.

В уравнениях (2.16) и (2.17) δ —коэффициент жесткости упругого заземления. При $\delta \rightarrow \infty$ эти уравнения совпадают с уравнениями (2.12) и (2.13) для заземленной пластинки, а при $\delta \rightarrow 0$ из них получаются решения (2.15) для шарнирно опертой пластинки.

Соответствующим образом комбинируя приведенные уравнения, можно получить соответствующие уравнения для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1=0$ и $x_1=a$ жестко заземлены, а стороны $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (2.12) и (2.15) имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = -(1 + 2\beta_1^2 + \gamma)^{-1/2}, \quad k_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

Из (2.12) — (2.18) видно, что величины волновых чисел k_1 и k_2 зависят от напряженности внешнего магнитного поля. Как показано в работе [1], указанная зависимость является существенной в случае тонких пластинок и имеет более ошутимое влияние на частоты низших форм колебаний.

9. На основе уравнений (2.5), (2.6), (2.12) — (2.18) проведен численный анализ. В расчетах принято: $a_1=10$ см, $a_2=20$ см, $E=10^{10}$ дин/см², $\nu=0,36$, $\rho=8,93$ г/см³, $\alpha=5,3 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹, $c=3 \cdot 10^{10}$ см/сек. В табл. 1—3, где m и n характеризуют формы колебаний, $a=0,025 \cdot H_0/\pi$ в/м, $\beta = \omega_{mn}/\omega_{mn}^0$, ω_{mn} —частота магнитоупругих колебаний, ω_{mn}^0 —частота собственных колебаний при отсутствии магнитного поля, приведены значения относительной частоты $\operatorname{Im} \beta$ и относительного затухания $\operatorname{Re} \beta$ для первых четырех форм колебаний упруго-заземленной по всему контуру прямоугольной пластинки соответственно при $\delta=0$ (шарнирное опирание контура), $\delta=2D$ и $\delta \rightarrow \infty$ (жесткое опирание контура).

Таблица 1

m, n	Re β						Im β					
	h=0,01 см			h=0,04 см			h=0,01 см			h=0,04 см		
	0,3	0,5	1	0,5	1	3	0,3	0,5	1	0,5	1	3
1.1	0,51	0	7,90	1,09	1,48	3,65	0,45	3,23	4,82	0,11	0,26	0,31
1.2	0,80	0,57	4,14	1,05	1,21	2,62	0,21	0,62	4,79	0,05	0,16	0,29
2.1	0,83	0,54	4,23	1,04	1,17	2,23	0,21	0,66	3,25	0,03	0,08	0,19
2.2	0,88	0,75	3,27	1,03	1,13	1,99	0,16	0,47	3,17	0,02	0,06	0,16

Численный анализ показывает, что зависимость частоты магнитоупругих колебаний конечно проводящей прямоугольной пластинки от напряженности магнитного поля качественно имеет аналогичный

Таблица 2

		Re δ						Im δ					
		h=0,01 см			h=0,04 см			h=0,01 см			h=0,04 см		
m, n	α	0.5	1	2	0.5	1	3	0.5	1	2	0.5	1	3
		1.1		2.70	16.5	36.1	1.41	2.48	7.10	8.78	8.86	8.88	0.29
1.2		0	7.67	19.6	1.13	1.56	4.02	1.46	6.97	7.62	0.10	0.27	0.42
2.1		0.36	6.54	15.5	1.10	1.39	3.21	1.08	4.76	4.82	0.05	0.15	0.28
2.2		0.82	4.91	12.5	1.07	1.27	2.68	0.72	4.36	4.43	0.03	0.11	0.24

Таблица 3

		Re γ						Im γ					
		h=0,01 см			h=0,04 см			h=0,01 см			h=0,04 см		
m, n	α	0.3	0.5	1	0.5	1	3	0.3	0.5	1	0.5	1	3
		1.1		0.48	0	9.20	1.12	1.00	4.13	0.51	4.12	5.12	0.11
1.2		0.82	0.53	4.77	1.06	1.26	2.86	0.21	0.70	5.21	0.06	0.18	0.31
2.1		0.84	0.45	4.86	1.05	1.21	2.47	0.24	0.78	3.62	0.03	0.10	0.21
2.2		0.89	0.71	3.75	1.04	1.16	2.17	0.18	0.51	3.49	0.02	0.08	0.20

Таблица 4

		h=0,02 см			h=0,05 см		
		1	2	3	1	2	3
$4 \cdot 10^{-2} \cdot H_1$ (а/м)							
m	точное решение	3.98	8.09	16.23	1.42	2.27	4.26
	асимптотическое решение	3.87	7.95	16.03	1.39	2.24	4.23
	асимп. реш. (k_1 не зависит от H_1)	4.56	9.15	19.04	1.54	2.61	4.96
	расхождение, %	2.76	1.73	0.86	2.11	1.32	0.70
расхождение, %		14.57	16.81	17.31	8.45	14.98	16.13
n=2	точное решение	2.05	4.08	8.13	1.11	1.42	2.28
	асимптотическое решение	2.01	4.03	8.07	1.09	1.41	2.27
	асимп. реш. (k_1 не зависит от H_1)	2.16	4.14	8.90	1.14	1.50	2.48
	расхождение, %	1.95	1.22	0.74	1.80	0.70	0.44
	расхождение, %	5.37	8.82	9.47	2.70	5.63	8.06

характер, что и в работах [6, 7]. а) для сравнительно толстых пластин частота колебаний с увеличением величины напряженности магнитного поля увеличивается; б) для очень тонких пластин частота колебаний с увеличением H_1 уменьшается, достигая нулевого значения, которое сохраняется в определенном интервале изменения H_1 . Даль-

нейшее увеличение H_1 приводит к резкому увеличению частоты колебаний пластинки; б) для пластинок «средней» толщины зависимость частоты колебаний от H_1 имеет экстремальный характер (существует точка минимума).

Для сравнения в табл. 4 приведены значения частот магнитоупругих колебаний жестко заземленной пластинки-полосы ($a_2 \rightarrow \infty$, $k_2 = 0$) при $m=1$ и $m=2$, найденные на основе точного решения [7], на основе вышесказанного асимптотического решения и на основе уравнения (2.5) в случае, когда не учитывается зависимость k_1 от H_1 (для k_1 берутся его значения в случае диэлектрической пластинки [2]). В строках 6, 7, 11, 12 табл. 4 приведены расхождения в процентах этих приближенных решений от точного.

Табл. 4 свидетельствует, во-первых, о необходимости учета зависимости волнового числа от напряженности магнитного поля и, во-вторых, о достаточной точности асимптотического метода для расчета частот магнитоупругих колебаний.

VIBRATIONS OF A CONDUCTIVE RECTANGULAR PLATE IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

P. X. HAKOPIAN, G. E. BAGDASARIAN

ՀԱՂՈՒՄԻՉ ՈՒՂԱԿԱՎՅՈՒՄ ԻՍԿՐ ՏԱՏԱԿՈՒՄԻՆԵՐԸ ԸՆԳՆԵՐԱՅՆԱԿԱՆ ԽՈՒՐՆՈՒԿԱՆ ԿՈՆՏՈՒՄ

Պ. Ք. ՀԱԿՈՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱԳԾԱՍԱՐԻԱՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Աշխատանքում առաջարկվում է փերջավոր հաղորդիչ ուղղանկյուն սալի առտանումների հաճախականությունների սպեկտրի ուսումնասիրման ափսոսալի մեթոդ, որը հանդիսանում է Վ. Վ. Բոլոտնիկի ափսոսալի մեթոդի ընդհանուրացումը, և դրա հիման վրա, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում են առաջիտնար ընդերկայնական մագնիսական դաշտում փերջավոր հաղորդիչ ուղղանկյուն սալերի մագնիսաառաձգական առտանումների խնդիրները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдасарян Г. Е. Применение асимптотического метода В. В. Болотникова для исследования магнитоупругих колебаний идеальной проводящих прямоугольных пластин. — Проблемы машиностроения. 1986, вып. 25, с. 63—68.
2. Бюотик В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинки. — Инженерный сборник, 1961, т. 31, с. 3—14.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука, 1977. 272 с.

4. Багдасарян Г. Е. Асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин.—Математические и физико-механические поля, 1986, вып. 24, с. 57—63.
5. Аветян П. З. Исследование магнитоупругих колебаний плоскопроводящих прямоугольных пластин асимптотическим методом П. кн. Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1986, с. 137—141.
6. Амбарцумян Г. А. Некоторые особенности колебаний пластин в магнитном поле.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 21—31.
7. Алоян П. З., Багдасарян Г. Е. Магнитоупругие колебания проводящей пластинки в постоянном магнитном поле. Проблемы динамики взаимодействия деформед, Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984, с. 17—22.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18 VIII 1986

УДК 534.1.141

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
 ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

АРУТЮНЯН Э. П., ГРИГОРЯН Н. Б.

Рассмотрим свободные поперечные колебания трехслойного стержня длиной L , который растягивается сосредоточенной следящей силой P , приложенной на одном конце стержня. Сила приложена так, что исходное напряженное состояние стержня безмоментное. Исследуем колебания двух типов стержней: консольного стержня и свободного стержня, совершающего полет с постоянным ускорением под действием следящей растягивающей силы.

Колебания однородных стержней при действии растягивающих следящих сил рассмотрены в [1—4].

Различные вопросы свободных колебаний трехслойных стержней обсуждены в [5—7] и в др.

В работах [8—10] исследована колебательная форма потери устойчивости трехслойных стержней, нагруженных следящими сжимающими силами.

1. Рассмотрим малые поперечные колебания трехслойного стержня, жестко заземленного на одном конце ($x=0$) и нагруженного на другом конце ($x=L$) растягивающей следящей силой P .

Уравнение малых поперечных колебаний такого трехслойного стержня можно вывести из уравнения (6) работы [8], если в нем x^2 заменить на $-x^2$, то есть если сжимающую следящую силу заменить на растягивающую силу. Тогда получим

$$X^{IV} - \left(\frac{x^2}{\theta} + \frac{1}{\theta k} \right) X^{IV} + \frac{x^2}{\theta k} X'' - \frac{\omega^2}{\theta} X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (1.1)$$

Здесь X —безразмерная функция перемещения, которая вводится согласно теории трехслойных стержней Григолюка-Чулкова [5], x^2 и ω_0 —соответственно, безразмерная растягивающая сила и безразмерная частота поперечных колебаний, θ и k —безразмерные параметры, характеризующие изгибную жесткость несущих слоев и сдвиговую жесткость заполнителя трехслойного стержня.

Рассмотрим следующие два варианта условий на концах стержня.

1. Один конец стержня жестко зашпечлен, а на другом конце имеется бесконечно жесткая диафрагма, которая предотвращает поперечный сдвиг. Согласно [6] имеем:

$$\begin{aligned} X' &= X''' - X - kX'' = 0 & \text{при } x=0 \\ X'' &= X^{IV} = X'' - \theta k X^{IV} = 0 & \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

II. Один конец стержня жестко зашпелен, а другой конец свободен от поперечного сдвига

$$\begin{aligned} X' &= X'' - X - kX'' = 0 & \text{при } x=0 \\ X'' &= X^{IV} = X''' - \theta kX^V = 0 & \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, задача сводится к краевой задаче на собственные значения (1.1) с граничными условиями (1.2) или (1.3).

Решение дифференциального уравнения (1.1) можно представить в виде

$$X = \exp(\sqrt{S}x) \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в уравнение (1.1), приходим к кубическому характеристическому уравнению

$$S^3 + \left(-\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{\theta k}\right)S^2 + \left(\frac{x^2}{\theta k} - \frac{\omega^2}{\theta}\right)S + \frac{\omega^2}{\theta k} = 0 \quad (1.5)$$

Это уравнение имеет один действительный отрицательный корень, так как свободный член этого уравнения — положительная величина. Пусть этот корень будет S_1 . Проведенный машинный анализ в широком диапазоне изменения параметров, входящих в уравнение (1.5), показал, что два остальных корня S_2 и S_3 — действительные положительные величины. Общее решение уравнения (1.1) можно записать в следующем виде:

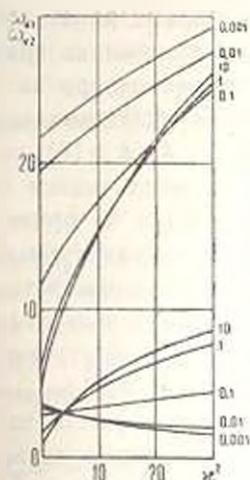
$$X = A_1 \sin \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_1 x + A_3 \operatorname{sh} \alpha_2 x + A_4 \operatorname{ch} \alpha_2 x + A_5 \operatorname{sh} \alpha_3 x + A_6 \operatorname{ch} \alpha_3 x \quad (1.6)$$

где $\alpha_i = |S_i|$; A_i ($i=1, 2, \dots, 6$) — произвольные постоянные. Подставляя выражение (1.6) в граничные условия (1.2) или (1.3), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_i . Для нахождения нетривиального решения этой системы приравняем нулю ее определитель и получим частотное уравнение

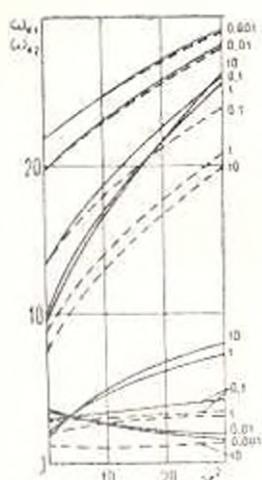
$$\Delta(x^2, \omega_*) = 0 \quad (1.7)$$

Это уравнение трансцендентное и очень громоздкое. Оно не подлежит аналитическому исследованию. На основе алгоритма и вычислительной программы, предложенной в [11], проведены расчеты и определены частоты первого и второго тонов колебаний при различных значениях растягивающей следящей силы и жесткостных параметров трехслойного стержня θ и k для обоих граничных условий. Некоторые результаты этих расчетов представлены на графиках (фиг. 1—3).

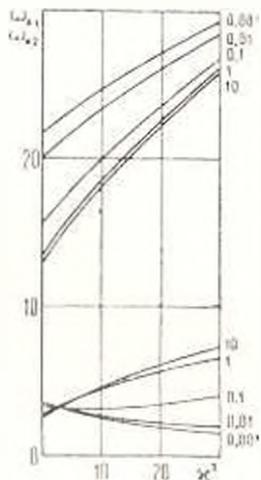
Известно, что когда однородный стержень находится под действием растягивающей следящей силы, то с увеличением растяжения частота первого тона колебаний уменьшается, а частота второго тона колебаний возрастает. Расчеты показывают, что у трехслойных стержней тоже с увеличением величины растягивающей силы частота второго тона колебаний монотонно возрастает при любых значениях параметров θ и k в обоих случаях граничных условий. А частоты первого тона колебаний с увеличением растяжения изменяются по-разному в зави-



Фиг. 1. $\theta = 0,01$. Граничные условия I. Цифры у кривых — значения k



Фиг. 2. $\theta = 0,1$ — Граничные условия I. — — — Граничные условия II. Цифры у кривых — значения k



Фиг. 3. $\theta = 0,25$. Граничные условия I. Цифры у кривых — значения k

симости от значений параметров θ и k и граничных условий. Если стержень обладает достаточно большой жесткостью, например, при $\theta = 0,1$ и $k \leq 0,01$, то частоты первого тона колебаний с увеличением растяжения уменьшаются. Если же жесткость стержня мала, например, при $\theta = 0,1$ и $k \geq 0,1$, с увеличением растяжения частоты первого тона колебаний увеличиваются. Причем при граничных условиях I, то есть при наличии бесконечно жесткой на сдвиг диафрагмы на конце стержня, возрастание частот колебаний происходит гораздо быстрее, чем при граничных условиях II. При граничных условиях II и некоторых комбинациях значений параметров θ и k в достаточно широком диапазоне увеличения растягивающей силы изменение частот первого тона колебаний незначительно. Как видно из приведенных графиков, бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма на конце стержня значительно влияет на величину частот колебаний лишь при малых значениях сдвиговой жесткости заполнителя — $k \geq 0,1$. Бесконечно жесткая диафрагма при любых значениях θ и k повышает частоту обоих тонов колебаний.

2. Если в уравнение (1.1) подставить $x^2 = 0$, то получим уравнение свободных малых поперечных колебаний ненагруженного трехслойного консольного стержня

$$X^{VI} - \frac{1}{\theta k} X^{IV} - \frac{\omega^2}{b} X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (2.1)$$

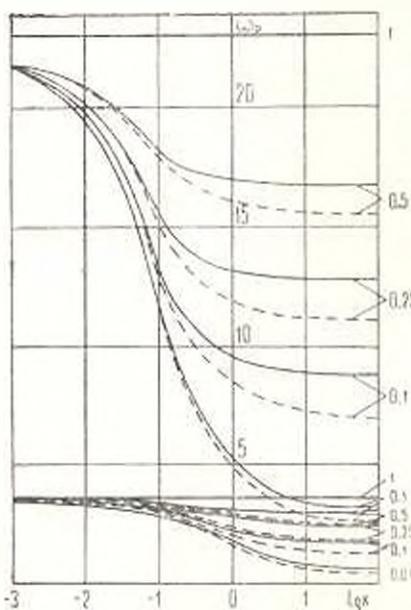
Уравнение (1.7) получит вид

$$\Delta(\omega_*) = 0 \quad (2.2)$$

С помощью этого уравнения можно определить частоты свободных колебаний консольного трехслойного стержня. Исследовано из-

менение первого и второго тонов колебаний в зависимости от сдвиговой жесткости заполнителя k при различных значениях параметра θ для граничных условий I и II. Результаты расчетов представлены на графиках (фиг. 4). С увеличением сдвиговой жесткости заполнителя частоты колебаний увеличиваются и стремятся к частотам свободных колебаний однородного стержня. При достаточно больших k ($k > 10$), то есть при малых сдвиговых жесткостях заполнителя, с увеличением k частоты колебаний практически не изменяются. Как видно из приведенных графиков, при изменении величин жесткостных параметров θ и k более сильно изменение претерпевает величина частот второго тона колебаний. Отметим также, что бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма на незакрепленном конце трехслойного стержня существенно повышает величину частот колебаний лишь при больших k ($k > 1$).

3. Рассмотрим колебания трехслойного свободного стержня, совершающего поперечный изгиб под действием растягивающей следящей силы. Уравнение малых поперечных колебаний такого стержня получим, если в уравнение (1.11) статьи [10] вместо x^2 подставим $-x^2$, то есть сжимающую следящую силу заменим на растягивающую силу. Тогда будем иметь



Фиг. 4. — Граничные условия I
 — — — Граничные условия II.
 Цифры у кривых — значение k

$$X^{VI} - \left[\frac{x^2(1-x)}{\theta} + \frac{1}{\theta k} \right] X^{IV} + \frac{x^2}{\theta} X''' + \left[\frac{x^2(1-x)}{\theta k} - \frac{x^2}{\theta} \right] X'' - \frac{x^2}{\theta k} X' + \frac{x^2}{\theta k} X = 0 \quad (3.1)$$

Рассмотрим следующие три варианта граничных условий.

I. Оба конца трехслойного стержня свободны.

$$X'' = X^{IV} = X''' - \theta k X^V = 0 \quad \text{при} \\ x=0 \quad \text{и} \quad x=1 \quad (3.2)$$

II. Один конец трехслойного стержня свободен, а на другом конце есть бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма

$$X'' = X^{IV} = X''' - \theta k X^V = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \\ X''' = X^V = X'' - \theta k X^{IV} = 0 \quad \text{при} \quad x=1 \quad (3.3)$$

III. На обоих концах трехслойного стержня имеются бесконечно жесткие на сдвиг диафрагмы

$$X'' = X^V = X''' - \theta k X^V = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=1 \quad (3.4)$$

Для определения зависимости частот колебаний трехслойного стержня пришли к краевой задаче на собственные значения (3.1) с граничными условиями (3.2—3.4).

Решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (3.1) представим в виде степенного ряда

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \quad (3.5)$$

где A_n — неизвестные постоянные. На основе (3.1) и выражения X (3.5) число неизвестных постоянных, входящих в (3.5), можно сократить до шести. Подставляя выражения X и его производных в уравнение (3.1), получим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов A_n .

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \partial k} \{ (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) A_{n-2} + (n-3)(n-4)(n-5)^2 k x^2 A_{n-1} + (n-4)(n-5) \omega^2 k A_{n-1} - (n-5)^2 x^2 A_{n-3} - \omega^2 A_{n-6} \} \quad (3.6)$$

С помощью этой формулы все неизвестные постоянные A_n , начиная с A_6 , можно выразить через предыдущие. Тогда в ряде (3.5) останутся только шесть коэффициентов $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

Если подставить выражение X (3.5) в граничные условия (3.2—3.4), использовать формулу (3.6), то получим три системы из шести линейных алгебраических однородных уравнений относительно $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Нетривиальное решение этих систем существует, если их определители равны нулю. Отсюда получим частотное уравнение в виде

$$\Delta(x^2, \omega_*) = 0 \quad (3.7)$$

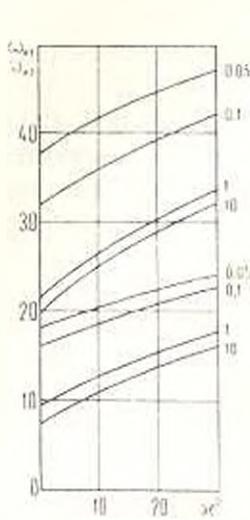
Исходя из уравнения (3.7), с помощью ЭВМ проведены расчеты и построены кривые зависимости частот колебаний трехслойного стержня от величины растягивающей силы. Некоторые результаты этих расчетов представлены на графиках (фиг. 5, 6). С увеличением растяжения частоты обоих тонов колебаний увеличиваются. Бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма заметно влияет на частоты колебаний лишь при больших k ($k \gg 1$).

1. Из уравнения (3.1), подставив в него $x^2 = 0$, приходим к уравнению свободных колебаний свободного ненагруженного трехслойного стержня

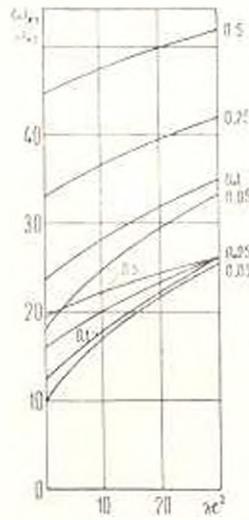
$$X^{VI} - \frac{1}{\partial k} X^{IV} - \frac{\omega^2}{\partial} X'' + \frac{\omega^2}{\partial k} X = 0 \quad (4.1)$$

Для ненагруженного трехслойного стержня рассматриваются те же три граничные условия (3.2—3.4). Решение уравнения (4.1) можно представить в виде (1.6) и далее можно определить частоты свобод-

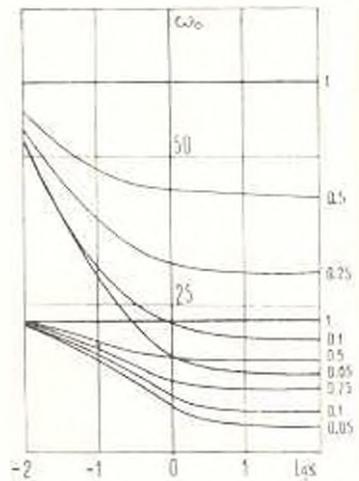
ных колебаний, исходя из этого точного решения. Но более удобным будет, если воспользоваться решением (3.5—3.7), подставив в него $\chi^2 = 0$. Результаты расчетов для граничных условий I представлены на графиках (фиг. 7).



Фиг. 5. $\delta = 0.1$. Граничные условия I. Цифры у кривых — значение λ



Фиг. 6. $\lambda = 1$ — Граничные условия II. Цифры у кривых — значение δ



Фиг. 7. Граничные условия II. Цифры у кривых — значение δ

FREE VIBRATIONS OF SANDWICH RODS UNDER THE ACTION OF FOLLOWER STRETCHING FORCE

E. P. ARUTUNIAN, N. B. GRIGORIAN

ԵՐԱՆԿԵՐՏ ԶՈՂԵՐԻ ԱԶԱՏ ՏՈՒՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԶԳՈՂ շԵՏԵՎՈՂ ՈՒՃԻ ԱԶԿԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Է. Պ. ԱՐԱՐՈՒՅՈՒՆՅԱՆ, Ն. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ն Ա Մ

Դիտարկված են երկու տիպի եռաշերտ ձողերի տատանումները.

1. Սի ծայրով կոշտ ամրակցված ձողի, սրբ մյուս ծայրում բևեռավորված է ձգող հետևող ուժով:

2. Ազատ ձողի, սրբ թռչում է հաստատուն արագացումով ձգող հետևող ուժի ազդեցության տակ:

Երկու ձողերի համար էլ որոշված են առաջին և երկրորդ տոնի տատանումների հաճախականությունները: Քննարկված են կրող շերտերի՝ ըստ ծրարման ունեցած կոշտության, և լցանի՝ ըստ ստերի ունեցած կոշտության ազդեցությունները տատանումների հաճախականության մեծության վրա:

Դիտարկված են նաև չբեռնավորված եռաշերտ ձողերի տատանումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Феодосий В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов — М.: Наука, 1973, 400 с.
2. Северов С. П. Об устойчивости стержня, растянутого следящей силой. — Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 8, с. 14—17.
3. Anderson J. M., King W. W. Vibration of a cantilever subjected to a tensile follower force. — AIAA Journal, 1969, v. 7, № 4, p. 741—742.
4. Mladenov K. A. On the vibration of a cantilevered column subjected to a stretching follower force. J. Sound and Vibration, 1978, v. 61, № 4, p. 597—601.
5. Григорюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973, 170 с.
6. Смирнов А. И. Колебания трехслойных оболочек. — Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3, с. 561—564.
7. Григорюк Э. И., Лошницкий Г. Ч. Колебания трехслойных оболочек. — Механика композитных материалов, 1979, № 5, с. 840—850.
8. Григорян Н. Б. Устойчивость трехслойного консольного стержня, нагруженного следящей силой. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 1, с. 70—72.
9. Григорян Н. Б. Устойчивость трехслойного стержня при следящей равномерно распределенной нагрузке. Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 6, с. 55—61.
10. Григорян Н. Б. Устойчивость трехслойной панели бесконечного размаха, совершающей полет под действием следящей силы. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 6, с. 65—73.
11. Григорян Н. Б. Методические рекомендации. Расчеты и испытание на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости трехслойных стержней, нагруженных следящими силами. М.: ВНИИМаш, 1982.52 с.

Ленинканакский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
8.IV.1985

УДК 539.3:534.1

СООТНОШЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ И МЕТОДЫ
 ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ПОВЕРХНОСТНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ
 В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ И ПЛАСТИНАХ

КУДРЯВЦЕВ Б. А., ПАРТОН В. З., СЕНИК Н. А.

Предлагается вариант теории тонких оболочек из пьезоэлектрических материалов, имеющих плоскость симметрии упругих свойств, параллельную срединной поверхности. В отличие от работы [1] задача приведения трехмерных уравнений электроупругости к двумерным уравнениям теории оболочек решается с привлечением гипотез классической теории оболочек [2] и использованием метода символического интегрирования А. П. Лурье, что является обобщением результатов работы [3].

1. Рассмотрим пьезокристаллическую оболочку толщиной h и свяжем триортогональную систему координат (u_1, u_2, z) с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки и нормалью к ней. Предполагается, что ось z ортогональна плоскости симметрии упругих свойств, а поверхности $z = \pm h/2$ могут быть как электродированными, так и безэлектродными, причем жесткость электродов пренебрежимо мала и не учитывается. Уравнения состояния в выбранной системе координат запишем в виде

$$\vec{\sigma} = \underline{C}\vec{\varepsilon} - \underline{e}\vec{E}, \quad \vec{D} = \underline{\varepsilon}^s \vec{E} + \underline{e}^T \vec{\varepsilon} \quad (1.1)$$

где $\vec{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T$, $\vec{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\underline{C} = \{c_{ij}, c_{ji}\}^T$, $\underline{\varepsilon}^s = \{\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{22}^s, \varepsilon_{33}^s, \varepsilon_{21}^s, \varepsilon_{13}^s, \varepsilon_{12}^s\}^T$, $\underline{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$, $\underline{e} = \{e_{in}\}$, $\underline{e}^T = \{e_{ji}^T\}$, причем c_{ij}, c_{ji} - компоненты тензоров напряжений и деформаций, D_i, E_i - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля, а индекс „т“ сверху обозначает транспонированную величину. Симметричная матрица жесткостей \underline{C} имеет компоненты c_{ij}^T ($i, j = 1, \dots, 6$), матрица пьезокоэффициентов \underline{e} размерности (6×3) имеет компоненты e_{in} ($m = 1, \dots, 6; n = 1, 2, 3$), матрица диэлектрической проницаемости $\underline{\varepsilon}^s$ размерности (3×3) имеет компоненты $\varepsilon_{\rho\sigma}^s = \varepsilon_{\sigma\rho}^s$ ($\rho = 1, 2, 3$), причем указанные выше матрицы имеют нулевые компоненты $c_{ij}^T, c_{ji}^T, c_{in}^T, c_{ni}^T$ ($i = 1, 2, 3; k = 4, 5$), $e_{13}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, \varepsilon_{21}^s, \varepsilon_{12}^s$.

При построении основных соотношений теории пьезокристаллических оболочек используются следующие гипотезы:

$$\sigma_{j3} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$U_j^{(z)}(x_1, x_2, z) = \omega(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (1.4)$$

где $\bar{U}^{(z)} = \{U_1^{(z)}, U_2^{(z)}, U_3^{(z)}\}$ — компоненты вектора смещений, $\omega = \omega(x_1, x_2)$ — прогиб.

Использование предположений (1.2) совместно с первой группой уравнений (1.1) позволяет определить деформации сдвига ϵ_{j3} в виде

$$\epsilon_{j3} = d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2 \quad (j = 1, 2) \quad (1.5)$$

где

$$d_{14} = (e_{34}c_{45}^E - e_{13}c_{41}^E)/\Delta, \quad d_{15} = (e_{24}c_{45}^E - e_{23}c_{41}^E)/\Delta, \quad d_{24} = -(e_{24}c_{45}^E - e_{15}c_{41}^E)/\Delta$$

$$d_{25} = -(e_{24}c_{55}^E - e_{23}c_{41}^E)/\Delta, \quad \Delta = (c_{45}^E)^2 - c_{33}^E c_{44}^E$$

Дальнейшее использование соотношений (1.5) совместно с выражениями Коши и предположением (1.3) позволяет установить закон распределения смещений $U_j^{(z)}(x_1, x_2, z)$ ($j = 1, 2$) по толщине оболочки

$$U_j^{(z)} = u_j + z\tau_j + \int_0^z (d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2) dz \quad (1.6)$$

Здесь $u_j = u_j(x_1, x_2)$, $\tau_j = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} + k_j w$, причем u_j — тангенциальные смещения точек срединной поверхности оболочки, A_j — коэффициенты ее первой квадратичной формы, k_j — главные кривизны.

Полагая, что $k_j z \ll 1$ (здесь и далее $j = 1, 2$), определим распределения деформаций ϵ_{jj} , ϵ_{12} по толщине оболочки

$$\begin{aligned} \epsilon_{jj} = \epsilon_j + z\tau_j + \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^z (d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2) dz - \\ - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_j}{\partial x_{3-j}} \int_0^z (d_{3-j,4}E_1 + d_{3-j,5}E_2) dz \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} = \omega + z\tau + \frac{A_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \int_0^z (d_{14}E_1 + d_{15}E_2) dz + \\ + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \int_0^z (d_{24}E_1 + d_{25}E_2) dz \end{aligned}$$

где ϵ_j , x_j , ω , τ определяются известными соотношениями [2]. Использование предположения (1.4) позволяет исключить в дальнейшем поперечную деформацию ϵ_{33} и представить выражения для напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} и компоненты вектора электрической индукции в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= c_{11}^* \varepsilon_{11} + c_{17}^* \varepsilon_{21} + c_{16}^* \varepsilon_{12} - e_{11} E_1 - e_{21} E_2 - e_{31} E_3 \\ \varepsilon_{22} &= c_{21}^* \varepsilon_{11} + c_{22}^* \varepsilon_{21} + c_{26}^* \varepsilon_{12} - e_{12} E_1 - e_{22} E_2 - e_{32} E_3 \\ \varepsilon_{33} &= c_{61}^* \varepsilon_{11} + c_{62}^* \varepsilon_{21} + c_{66}^* \varepsilon_{12} - e_{16} E_1 - e_{26} E_2 - e_{36} E_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{11} \varepsilon_{11} + e_{12} \varepsilon_{21} + e_{16} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{11}^* E_1 + \varepsilon_{12}^* E_2, \quad D_2 = e_{21} \varepsilon_{11} + e_{22} \varepsilon_{21} + e_{26} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}^* E_1 + \varepsilon_{22}^* E_2 \\ D_3 &= e_{31} \varepsilon_{11} + e_{32} \varepsilon_{21} + e_{36} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31}^* E_1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\text{где } c_{ij}^* = c_{ij}^E \left(1 - \frac{c_{j3}^E c_{13}^E}{c_{ij}^E c_{33}^E} \right), \quad c_{j6}^* = c_{j6}^E \left(1 - \frac{c_{j3}^E c_{36}^E}{c_{j6}^E c_{33}^E} \right)$$

$$c_{kk}^* = c_{kk}^E \left(1 - \frac{c_{k3}^E c_{k3}^E}{c_{kk}^E c_{33}^E} \right), \quad e_{3j}^* = e_{3j}^E \left(1 - \frac{c_{j3}^E e_{33}^E}{c_{33}^E e_{3j}^E} \right), \quad e_{36}^* = e_{36}^E \left(1 - \frac{c_{63}^E e_{33}^E}{c_{33}^E e_{36}^E} \right)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^E \left[1 - (e_{j3}^E c_{33}^E - 2e_{j1} e_{j3} c_{33}^E + e_{j2}^E c_{11}^E) (\varepsilon_{ij}^E \Delta) \right]$$

$$\varepsilon_{12}^* = \varepsilon_{21}^* = \varepsilon_{12}^E \left[1 - (e_{14} e_{24} c_{33}^E + e_{14} e_{24} c_{44}^E - e_{14} e_{25} c_{11}^E - e_{14} e_{24} c_{13}^E) (\varepsilon_{12}^E \Delta) \right]$$

$$\varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33}^E \left[1 + e_{33}^E (c_{33}^E c_{33}^E) \right], \quad k = 2, 6; \quad c_{mn}^* = c_{nm}^*$$

2. С помощью формул (1.7), (1.9) уравнение электростатики $\text{div } \vec{D} = 0$ относительно потенциала электрического поля φ может быть представлено в виде

$$L_{33}^* \varphi + \varepsilon_{33}^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = f_1 + i f_2 \quad (2.1)$$

Здесь $2k = k_1 + k_2$ — средняя кривизна

$$f_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} \varepsilon_1 + e_{15} \varepsilon_2 + e_{16} \varepsilon_3)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} \varepsilon_1 + e_{22} \varepsilon_2 + e_{26} \varepsilon_3)] \right\} +$$

$$+ (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \varepsilon_3) + 2k (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \varepsilon_3)$$

$$f_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} \varepsilon_1 + e_{12} \varepsilon_2 + e_{16} \varepsilon_3)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} \varepsilon_1 + e_{22} \varepsilon_2 + e_{26} \varepsilon_3)] \right\}$$

$$L_{33}^* = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \varepsilon_{33}^* \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\varepsilon_{12}^* \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{33}^* \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} +$$

$$+ e_{31}^* \left[\frac{d_{14}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{15}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d_{24}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{25}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + e_{32}^* \left[\frac{d_{33}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{25}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{14}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{15}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + e_{36}^* \left[\frac{d_{11}}{A_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{25}}{A_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d_{15}}{A_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d_{24}}{A_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right]$$

При выводе (2.1) предполагалось, что $\partial A_j / \partial x_i \sim A_j$, $\partial \varphi / \partial x_i \sim \varphi^{-1}$, где $l \gg h$ (l — характерный масштаб изменения φ) и величины порядка k, z

считались малыми по сравнению с единицей. Для интегрирования уравнения (2.1) применим метод А. И. Лурье аналогично тому, как это сделано в [3]. Тогда для оболочек, поверхности $z = \pm h/2$ которых электропроводны и на них задано значение потенциала электрического поля, равное $\pm V_0$, получаем следующие приближенные уравнения для величин Φ_1, Φ_2 , введенных в [3]:

$$\left(1 - \frac{\rho^2 h^2}{12}\right) \Phi_1 = -\frac{h^2 f_1}{12 \epsilon_{33}^*}, \quad \left(1 - \frac{\rho^2 h^2}{60}\right) \Phi_2 = \frac{V_0 h^2}{6} - \frac{h^2 f_2}{720 \epsilon_{33}^*}, \quad \rho^2 = \frac{L_z^2}{z_{33}^*} - k^2 \quad (2.2)$$

При этом распределение потенциала электрического поля по толщине оболочки будет

$$\varphi = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} \left(\Phi_1 + \frac{20z}{h^2} \Phi_2 \right) + \frac{z(20z^2 - 3h^2)}{h^3} V_0 \quad (2.3)$$

Наличие малого параметра h^2 при старших производных в (2.2) позволяет определить приближенные решения этих уравнений

$$\Phi_1 = -h^2 f_1 / (12 \epsilon_{33}^*), \quad \Phi_2 = V_0 h^2 / 6 - h^2 f_2 / (720 \epsilon_{33}^*)$$

и получить для потенциала электрического поля выражение

$$\varphi = \frac{2V_0 z}{h} + \frac{4z^3 - h^3}{8 \epsilon_{33}^*} (f_1 + z f_2 / 3) \quad (2.4)$$

которое точно удовлетворяет условиям при $z = \pm h/2$. Краевые условия для φ на боковой поверхности оболочки при таком подходе остались невыполненными, однако их влияние сказывается на расстояниях порядка толщины h . Вдали от краев потенциал поля достаточно точно определяется формулой (2.4).

Используя формулы (1.6), (1.7), (2.4) и отбрасывая малые величины, окончательно находим

$$U_j^{(0)} = u_j + z v_j, \quad \epsilon_{ji} = \epsilon_i + z \epsilon_{ji}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon - 2z \quad (2.5)$$

Для электродированных оболочек усилия и моменты определяются соотношениями

$$T_j = C_{j1} \epsilon_1 + C_{j2} \epsilon_2 + C_{j3} \epsilon_3 + 2e_{j3}^* V_0, \quad M_j = D_{j1} \alpha_1 + D_{j2} \alpha_2 + D_{j3} \alpha_3 \\ S = S_{12} = S_{21} = C_{03} \epsilon_1 + C_{02} \epsilon_2 + C_{00}^{(0)} - 2e_{33}^* V_0 \quad (2.6) \\ H = M_{12} = M_{21} = D_{01} \alpha_1 + D_{02} \alpha_2 + D_{00} \alpha_3$$

Здесь $C_{mn} = h c_{mn}^*$, $D_{mn} = h^3 a_{mn} / 12$

$$a_{1j} = c_{1j}^* \left(1 + \frac{\epsilon_{2j}^* \epsilon_{33}^*}{\epsilon_{11}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad a_{j1} = c_{j1}^* \left(1 - \frac{\epsilon_{2j}^* \epsilon_{33}^*}{\epsilon_{11}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad a_{kk} = c_{kk}^* \left(1 + \frac{\epsilon_{2k}^* \epsilon_{33}^*}{\epsilon_{11}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad (k=2,6)$$

Уравнения равновесия (или движения) могут быть получены путем интегрирования трехмерных уравнений равновесия (движения). Для электродированных оболочек эти уравнения будут иметь обычный вид.

3. Для оболочки, поверхности $z = -h/2$ которой неэлектролированы и граничат с вакуумом, для Φ_1 и Φ_2 получаем следующие уравнения:

$$L_0^2 \Phi_1 = \frac{h}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} \varepsilon_1 + e_{12} \varepsilon_2 + e_{13} \omega)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} \varepsilon_1 + e_{22} \varepsilon_2 + e_{23} \omega)] \right\} + 2kh(e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{33}^* \omega) \quad (3.1)$$

$$\left(1 - \frac{h^2 L^2}{10} - \frac{h^2 L_1^2}{8 \varepsilon_{33}^*}\right) \Phi_2 = h^3 (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{33}^* \omega) / (12 \varepsilon_{33}^*) - h^3 f_2 / (120 \varepsilon_{33}^*)$$

$$L_0^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \varepsilon_{11}^* \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + 2 \varepsilon_{12}^* \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{22}^* \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right\} - \varepsilon_{33}^* k^2$$

Приближенное решение второго из этих уравнений может быть определено в форме

$$\Phi_2 = h^3 (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{33}^* \omega) / (12 \varepsilon_{33}^*) - h^3 f_2 / (120 \varepsilon_{33}^*) \quad (3.2)$$

Здесь L^2 , L_1^2 — некоторые эллиптические операторы.

Распределение потенциала электрического поля по толщине оболочки дается формулой

$$\varphi = \Phi_1 / h + (12z^2 - h^2) (24h \varepsilon_{33}^*) [L_1^2 \Phi_1 + h (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{33}^* \omega)] + z(-4z^2 - 3h^2) f_2 / (24 \varepsilon_{33}^*) + z(e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{33}^* \omega) \quad (3.3)$$

где

$$L_1^2 = L_0^2 - L_2^2 + \varepsilon_{33}^* k^2$$

В соответствии с формулами (1.6), (3.3) определим распределение тангенциальных смещений по толщине оболочки

$$U_j^{(z)} = u_j + z v_j = \frac{z}{h} \left(\frac{d_{1j}}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{d_{2j}}{A_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad (j = 1, 2) \quad (3.4)$$

Распределение деформаций определяется с учетом (3.4).

Для усилий и моментов, определяемых обычным образом через напряжения [2], после отбрасывания малых величин имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_j &= C_{11}^* \varepsilon_1 + C_{12}^* \varepsilon_2 + C_{13}^* \omega + \frac{e_{1j}}{A_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{e_{2j}}{A_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ S &= C_{61}^* \varepsilon_1 + C_{62}^* \varepsilon_2 + C_{63}^* \omega + \frac{e_{31}}{A_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{e_{32}}{A_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$M_j = D_{11} x_1 + D_{21} x_2 + D_{j3} \omega + M_j, \quad (j = 1, 2)$$

$$H = D_{61} x_1 + D_{62} x_2 + D_{63} \omega + H^*$$

Здесь

$$M_j^* = -\frac{h^2}{12} \left\{ \varepsilon_{11}^* \left[\frac{d_{1j}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{d_{1j}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(\frac{d_{1j}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_{22}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big| + c_{12}^* \left[\frac{d_{21}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{d_{22}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d_{12}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + c_{16}^* \frac{A_1}{A_2} \left[d_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + d_{15} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + \\
& \left. + c_{16}^* \frac{A_2}{A_1} \left[d_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + d_{25} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \Phi_1 \quad (3.6) \\
& C_{ij}^* = a_{ij} h
\end{aligned}$$

Для M_1^2 и H^2 имеем формулы, которые следуют из (3.6), если постоянные c_{11}^* , c_{12}^* , c_{16}^* заменить на c_{21}^* , c_{22}^* , c_{26}^* и c_{61}^* , c_{62}^* , c_{66}^* соответственно.

Уравнения движения для оболочки с неэлектропроводными поверхностями $z = \pm h/2$ выводятся обычным образом из уравнений движения сплошной среды. Поскольку распределение смещений $U_j^{(0)}$ для неэлектропроводящей оболочки отличается дополнительными слагаемыми от распределения $U_j^{(2)}$ для обычных оболочек, то это различие сохранится и в уравнениях движения.

4. В качестве примера использования полученных выше формул рассмотрена задача возбуждения поперечных колебаний круглого диска радиуса R с неэлектропроводными торцевыми поверхностями и системой $2m$ электродов на цилиндрической поверхности. Предполагалось, что по контуру диск жестко заделан. Схема подключения электродов приведена на фиг. 1. Поставленная задача сводится к решению уравнений

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \Phi_1 = 0, \quad (\nabla^2 \nabla^2 - \gamma^4) \omega = 0 \quad (4.1) \\
& \gamma^4 = \frac{12\rho\Omega^2}{c_{11}^*(1+k_{21}^2)h^2}, \quad k_{21}^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{c_{33}^*c_{22}^*}
\end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность, Ω — частота, ∇^2 — оператор Лапласа в полярных координатах. Решение уравнений (4.1) должно удовлетворять условиям при $r = R$

$$\Phi_1 = V_1 h, \quad 0 \leq \theta < \theta', \quad \partial \Phi_1 / \partial r = 0$$

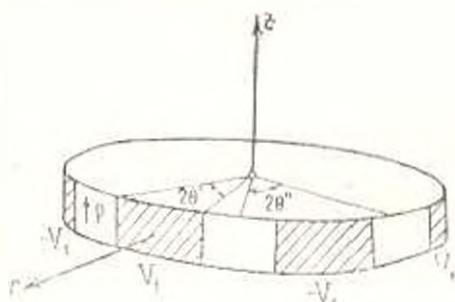
$$\theta' < \theta \leq \theta'', \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{d_{15}}{h} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta'', \quad d_{15} = e_{15} / c_{11}^* \quad (4.2)$$

Для ω получено выражение

$$\omega_{\pm}(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \frac{m V_1 d_{15}}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n \alpha_n^* \omega_{2k+1}^{(2n)} \right) \bar{r}^{2k+1} \times \quad (4.3)$$

$$\times [J_{m(2k+1)}(\bar{r}_*) J_{m(2k+1)}(\bar{r}_* \bar{\theta}) - J_{m(2k+1)}(\bar{r}_*) J_{m(2k+1)}(\bar{r}_* \bar{\theta})] \exp[i[(k+1/2)\bar{\theta} - \Omega t]]$$

где коэффициенты α_n^* определялись из решения электростатической



Фиг. 1

УДК 539.376

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЦВЕЛОДУБ И. К.

1. Рассмотрим односвязное тело объема v с поверхностью S , для которого полные деформации ϵ_{kl} складываются из упругих, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести ϵ_{kl}^p

$$\epsilon_{kl} = \sigma_{kl} a_{klmn} + \epsilon_{kl}^p \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где σ_{kl} — компоненты тензора напряжений, $a_{klmn} = a_{mnlk}$ — компоненты тензора упругих податливостей, суммирование по повторяющимся индексам производится от 1 до 3. Компоненты полной деформации предполагаются малыми и выражающимися через компоненты вектора перемещений известными соотношениями Коши,

Материал тела считаем неупрочняющимся в процессе ползучести, так что скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\gamma}_{kl}$ (точка здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по времени) являются функциями только напряжений

$$\dot{\gamma}_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}) \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Функции (1.2) предполагаются дифференцируемыми и для бесконечно малых приращений $\delta\sigma_{kl}$ и соответствующих им приращений $\delta\dot{\gamma}_{kl}$ удовлетворяющими неравенству

$$\delta\sigma_{kl} \delta\dot{\gamma}_{kl} \geq 0 \quad (1.3)$$

выражающему известный постулат устойчивости Друккера для вязких деформаций.

Сформулируем задачу о деформировании исходного тела в заданное: какие перемещения нужно мгновенно сообщить поверхности тела (считаем, что массовые силы отсутствуют) в момент времени $t=0$, чтобы, оставляя их фиксированными в течение времени t_0 , в момент $t=t_0$ после снятия внешних нагрузок и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных перемещений $u_k = u_{k,ост}$ на S ? При этом предполагаем, что при $t < 0$ тело находилось в естественном недеформированном состоянии.

Можно доказать, что если решение такой релаксационной задачи для тела, определяющие уравнения деформирования которого имеют вид (1.1), (1.2) с дополнительным ограничением (1.3), существует, то для сжимаемого при ползучести тела ($\gamma_{kk} \neq 0$) оно будет единственным по напряжениям при $0 < t < t_0$; соответствующие перемещения могут

отличаться только на величину смещения тела как жесткого целого. Для несжимаемого при ползучести тела ($\nu_{kk}=0$) два решения для поля напряжений при $0 \leq t < t_*$ могут отличаться только на величину произвольного постоянного во всем объеме и во времени гидростатического давления, причем этого произвола не будет, если на части поверхности известны внешние нагрузки или одна из диагональных компонент тензора напряжений (как, например, в случае плоского напряженного состояния).

Доказательство этого утверждения вполне аналогично представленным в [1, 2] для подобных задач, поэтому здесь не приводится.

2. Рассмотрим частный случай указанной релаксационной задачи, когда тело представляет собой изотропную толстую пластинку и можно говорить о плоском напряженном состоянии. Как отмечалось выше, решение такой задачи будет единственным. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпала с срединной плоскостью пластинки. В качестве (1.2) возьмем общепринятые однородные степени n функции [3]. Тогда для скоростей полных деформаций будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y) + B \sigma_1^{n-1} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2}; & \dot{\varepsilon}_y &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x) + B \sigma_1^{n-1} \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{xy} + B \sigma_1^{n-1} \frac{3}{2} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, B, n — константы ползучести, $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}$ — интенсивность напряжений. В дальнейшем считаем, что $n > 1$, что обеспечивает выполнимость [1, 2].

Предположим, что после деформирования в течение времени t_* и последующего снятия внешних нагрузок перемещения u_x, u_y точек границы L должны иметь вид:

$$u_x = c[x + \delta u_{x1}(x, y) + \delta^2 u_{x2}(x, y) + \dots], \quad u_y = c[y + \delta u_{y1}(x, y) + \delta^2 u_{y2}(x, y) + \dots] \quad (2.2)$$

где c, δ — константы, $0 < \delta < 1$, то есть могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра δ . Для определенности положим $c > 0$.

Для решения этой задачи может быть применен метод возмущений [4]. Так при $\delta = 0$ условия (2.2) соответствуют однородному деформированному состоянию, вызванному равномерным растяжением по осям x и y . Решение для этого нулевого приближения может быть получено в замкнутом виде.

Действительно, при $0 \leq t < t_*$ положим: $u_x = c_0 x, u_y = c_0 y$ на L , где $c_0 > 0$ — неизвестная константа. Тогда, очевидно, в пластине будем иметь однородное напряженно-деформированное состояние: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = c_0$,

$\varepsilon_{xy} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0(t)$, $\tau_{xy} = 0$ при $0 < t < t_*$, причем при $t=0$ $\sigma_0(0) = \frac{E}{1-\nu} c_0$. Функцию $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ определяем из условия: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, то есть, как следует из (2.1), $\frac{1-\nu}{E} \sigma_0 + \frac{B}{2} \sigma_0^n = 0$, откуда с учетом начального условия получим

$$\sigma_0(t) = \frac{E}{1-\nu} \left[c_0^{1-n} + \frac{B(n-1)}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^n t \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.3)$$

При $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок для остаточных деформаций будем иметь $\varepsilon_{xост} = \varepsilon_{yост} = c_0 - \frac{1-\nu}{E} \sigma_0(t_*)$. Эта величина в силу граничных условий (2.2) для нулевого приближения должна равняться c , следовательно, из (2.3) найдем

$$c_0 - \left[c_0^{1-n} + \frac{B(n-1)}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^n t_* \right]^{\frac{1}{1-n}} = c \quad (2.4)$$

Легко видеть, что уравнение (2.4) относительно c_0 имеет только один корень, причем $c < c_0 < c + \left[\frac{B(n-1)}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^n t_* \right]^{\frac{1}{1-n}}$.

Для нахождения последующих приближений все напряжения, перемещения и деформации при $0 < t < t_*$ представляем в виде рядов по степеням δ . Используя обычную методику [4], из (2.1) для скоростей полных деформаций k -ого приближения получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xk} &= \frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial x} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{xk} - \nu \dot{\sigma}_{yk}) + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(\sigma_{1k} - \nu_1 \sigma_{y1k}) + \eta_{x0k} \\ \dot{\varepsilon}_{yk} &= \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial y} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{yk} - \nu \dot{\sigma}_{xk}) + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(\sigma_{y1k} - \nu_1 \sigma_{x1k}) + \eta_{y0k} \\ \dot{\varepsilon}_{xyk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial x} \right) = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{xyk} + \frac{B\sigma_0^{n-1}}{4} (n+3)(1+\nu_1) \sigma_{xy1k} + \eta_{xy0k} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\nu_1 = \frac{3-n}{3+n} \left(-1 < \nu_1 < \frac{1}{2} \right)$, η_{x0k} , η_{y0k} , η_{xy0k} — функции координат и времени, зависящие от компонент напряжений не выше $k-1$ приближения. Так для первого приближения $\eta_{x01} = \eta_{y01} = \eta_{xy01} = 0$, для второго

$$\begin{aligned} \eta_{x02} &= \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16} (n-1) [(n+9)\sigma_{x1}^2 + (n-3)\sigma_{y1}(\sigma_{y1} + 2\sigma_{x1}) - 12\sigma_{xy1}^2] \\ \eta_{y02} &= \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16} (n-1) [(n+9)\sigma_{y1}^2 + (n-3)\sigma_{x1}(\sigma_{x1} + 2\sigma_{y1}) + 12\sigma_{xy1}^2] \\ \eta_{xy02} &= \frac{3B\sigma_0^{n-2}}{4} (n-1) \sigma_{xy1}(\sigma_{x1} - \sigma_{y1}) \end{aligned}$$

В дальнейшем индексы „ k “ в (2.5) всюду опустим, считая функции η_{10} , η_{x0} , η_{xy0} известными для каждого рассматриваемого приближения.

Получим общие выражения для напряжений и перемещений при $0 \leq t < t_*$. Для этого введем функцию напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$, так что [5]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в известное уравнение совместности скоростей деформаций и учитывая (2.3), получим

$$\Delta \Delta \Phi - (a + bt)^{-1} \Delta \Delta \Phi = F_0(x, y, t) \quad (2.7)$$

где $\Delta \Delta$ — бигармонический оператор, $a = \frac{4c_0^{1-n}(1-\nu)^{n-1}}{Bl^n(n+3)}$, $b = \frac{2(n-1)}{(1-\nu)(n+3)}$,

$$F_0 = E \left(2 \frac{\partial^2 \eta_{xy0}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta_{y0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_{x0}}{\partial y^2} \right).$$

Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (2.7) (относительно $\Delta \Delta \Phi$) по времени и учитывая, что при $t=0$ $\Delta \Delta \Phi = 0$ (что соответствует упругому распределению напряжений), найдем

$$\Delta \Delta \Phi = (a + bt)^{-1/0} \int_0^t (a + bt)^{1/0} F_0 dt \quad (2.8)$$

Предполагая, что функции η_{x0} , η_{y0} , η_{xy0} при любом $0 < t < t_*$ являются аналитическими в занятой пластиной области плоскости и переходя к комплексным переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, (2.8) можно представить в форме

$$16 \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -E(a + bt)^{-1/0} \int_0^t (a + bt)^{1/0} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 l}{\partial z \partial \bar{z}} \right) dt \quad (2.9)$$

$$\text{где } V(z, \bar{z}, t) = \Phi \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, t \right), \quad \epsilon = \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} + 2i\eta_{xy0}) dt, \quad \bar{\epsilon} =$$

$$= \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} - 2i\eta_{xy0}) dt, \quad l = \int_0^t (\eta_{x0} + \eta_{y0}) dt. \quad (\text{При указанной замене все}$$

аналитические функции переменных x и y аналитически продолжают в область комплексных значений при подстановке: $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$,

$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, при этом z и \bar{z} считаются независимыми комплексными

переменными. Законность такой замены и соответствующих операций доказана в [6]).

Общее решение (2.9) запишем в виде

$$V = V_0(z, \bar{z}, t) + V_1(z, \bar{z}, t) + V_2(z, \bar{z}, t) \quad (2.10)$$

где $V_0 = -\frac{E}{16} (a+bt)^{-1} \int_0^t (a+bt)^{1/2} (\dot{F} + \bar{\dot{F}} + 2\dot{a}) dt$, $F = \int_0^z \left(\int_0^{\bar{z}} \varepsilon dz \right) dz$

$\bar{F} = \int_0^{\bar{z}} \left(\int_0^z \bar{\varepsilon} d\bar{z} \right) d\bar{z}$, $Q = \int_0^z \left(\int_0^{\bar{z}} I d\bar{z} \right) dz$, а функции V_1 и V_2 — бигармоничны, то есть $V_i = \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi_i(z, t) + z\bar{\varphi}_i(\bar{z}, t) + \chi_i(z, t) + \bar{\chi}_i(\bar{z}, t)]$ ($i=1, 2$)

[5], причем последние выбираются таким образом, что сумма $V_0 + V_1$ соответствует решению, дающему нулевые нагрузки на L в любой момент t : $0 < t < t_*$, а V_2 — решению задачи теории упругости с заданными граничными условиями, зависящими от времени. Введем обозначения: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$, где $\psi_i = \chi_i$ ($i=1, 2$), штрих обозначает дифференцирование по z .

Компоненты напряжений определяются из соотношений (2.6), которые в переменных z, \bar{z} можно записать как

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

Определим компоненты перемещений и их скоростей при $0 < t < t_*$, для чего из первого уравнения (2.5) вычтем второе и прибавим третье, умноженное на $2i$. Получившееся равенство с введением комплексного перемещения $\bar{w} = u_x + iu_y$ и с учетом (2.3), (2.11) можно представить в виде

$$2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{4(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{4(1-\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{2}$$

откуда

$$\bar{w} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{2(1+\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} \bar{\varepsilon} d\bar{z} + f_1(z, t) \quad (2.12)$$

Неизвестную функцию $f_1 = f_1(z, t)$, входящую в (2.12), определим из условия удовлетворения сумме первых двух уравнений (2.5), которую можно записать в форме

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{4(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4(1-\nu_1)}{E(a+bt)} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + I \quad (2.13)$$

Подставляя (2.12) и аналогичное представление для \bar{w} в (2.13) и учитывая выражение (2.10) для V , получим $f_1 = \frac{4}{E} \left(\bar{\varphi}' + \frac{\varphi'}{a+bt} \right) =$

$$= - \left[\bar{f}_1 - \frac{4}{E} \left(\bar{\psi} + \frac{\bar{\varphi}}{a+bt} \right) \right],$$
 что возможно только при $f_1 = \frac{4}{E} \left(\psi + \frac{\varphi}{a+bt} \right) = ic_1(t)$, $c_1(t)$ — действительная функция, откуда $f_1(z, t) = \frac{4}{E} \left(\psi + \frac{\varphi}{a+bt} \right) + ic_1(t)z + c_2(t)$, $c_2(t)$ — комплексная функция. Отбрасывая в выражении для f_1 члены $ic_1z + c_2$, дающие только жесткое смещение, и учитывая (2.10), (2.12), после некоторых упрощений найдем

$$\begin{aligned}
 w = & - \frac{2(\nu_1 - \nu)}{E} (a+bt)^{-1} \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} (F - x\bar{F} + 2a) + \\
 & + \frac{1+\nu}{E} (x\bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}) + \frac{1+\nu_1}{E(a+bt)} (x_1\bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}), \quad x = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad x_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегрируя (2.14) по времени от 0 до t и приводя некоторые выкладки, получим

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{\nu_1 - \nu}{8} (a+bt)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t (a+bt)^{1/2-1} (F + \bar{F} + 2a) dt + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} \times \\
 & \times (F - x\bar{F} + 2Q) + \frac{1+\nu}{E} (x\bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}) + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^t \frac{x_1\bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}}{a+bt} dt
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) учтено, что при $t=0$ $F = \bar{F} = Q = 0$.

После разгрузки при $t=t_*$ будем иметь выражения для остаточных напряжений и перемещений, получающиеся из (2.10), (2.11), (2.15) путем вычитания членов, соответствующих значениям функций $\varphi_2 = \varphi_2(z, t)$ и $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2(z, t)$ в этот момент времени. Так для остаточных перемещений найдем

$$\begin{aligned}
 w_{\text{ост}} = & g_1(z, \bar{z}) + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^{t_*} \frac{x_1\bar{\varphi}_2 - z\bar{\varphi}_2' - \bar{\varphi}_2}{a+bt} dt \\
 g_1(z, \bar{z}) = & \frac{\nu_1 - \nu}{8} (a+bt_*)^{-1/2} \int_0^{t_*} (a+bt)^{1/2-1} \frac{\partial}{\partial z} (F + \bar{F} + 2Q) dt + \frac{1+\nu}{8} \frac{\partial}{\partial z} \times \\
 & \times (F - x\bar{F} + 2Q)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu}{E} (x\bar{\varphi}_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu_1}{E} \int_0^{t_*} \frac{x_1\bar{\varphi}_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1}{a+bt} dt
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из общих соотношений (2.10), (2.14), (2.16) очевидна последовательность решения исходной релаксационной задачи для любого приближения. По известным значениям $\varepsilon = \varepsilon(z, \bar{z}, t)$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}, t)$, $\bar{l} = \bar{l}(z, \bar{z}, t)$ находятся \bar{F} , \bar{F} , Q , F , F , Q , являющиеся функциями тех

же переменных z , \bar{z} и t , а следовательно, из (2.10) и $V_0 = V_0(z, \bar{z}, t)$. Затем на L вычисляется значение $f = \frac{\partial V_0}{\partial x} + i \frac{\partial V_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial V_0}{\partial z}$, которое компенсируется выбором функций $\varphi_1 = \varphi_1(z, t)$ и $\psi_1 = \psi_1(z, t)$. Эта задача рассмотрена в [5]. После того, как найдены φ_1 и ψ_1 , для функций

$$\varphi_2(z) = \int_0^{t_*} \frac{\varphi_2(z, t)}{a+bt} dt, \quad \psi_2(z) = \int_0^{t_*} \frac{\psi_2(z, t)}{a+bt} dt \quad (2.17)$$

из (2.16) получим на L : $\frac{1+\nu_1}{E} (x_1 \varphi_2 - z \bar{\varphi}_2 - \bar{\psi}_2) = w_{0,ext} - g_1$, где правая часть этого равенства известна. Подобная задача нахождения φ_2 и ψ_2 также рассмотрена в [5].

Кроме того, поскольку при $0 \leq t < t_*$ $w = 0$ на L , из (2.14) найдем:

$$x \bar{\varphi}_2 - z \bar{\varphi}_2 - \bar{\psi}_2 + \frac{A}{a+bt} (x_1 \varphi_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\psi}_1) = g_1(z, \bar{z}, t)|_L$$

$$g_1(z, \bar{z}, t) = \frac{2(\nu_1 - \nu)}{1 + \nu} (a+bt)^{-1} \frac{\partial V_0}{\partial z} - \frac{E}{8} \frac{\partial}{\partial z} (\dot{F} - z \ddot{F} + 2Q) -$$

$$- (x \bar{\varphi}_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\psi}_1) - \frac{A}{a+bt} (x_1 \varphi_1 - z \bar{\varphi}_1 - \bar{\psi}_1), \quad A = \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu} \quad (2.18)$$

Граничное условие (2.18) с дополнительными соотношениями (2.17) служит для нахождения функций $\varphi_2 = \varphi_2(z, t)$ и $\psi_2 = \psi_2(z, t)$.

Не останавливаясь на простых, но громоздких выкладках, основанных на использовании полученных выше зависимостей и общих приемов [5], в качестве примера приведем решение задачи о круглой пластинке единичного радиуса, которая в момент $t = t_*$ после снятия внешних нагрузок должна иметь остаточные радиальное и окружное перемещения на границе L : $u_r = c + b_2 \cos 3\theta$, $u_\theta = b_3 \sin 3\theta$.

Решение для нулевого приближения дается формулами (2.3), (2.4), то есть при $0 \leq t < t_*$ следует задать на L перемещения: $u_r = c_0$, $u_\theta = 0$, при этом радиальное напряжение $\sigma_r = \sigma_0(t)$.

Для первого приближения будем иметь:

$$V_0 = \varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad \varphi_2(z, t) = \frac{E}{1 + \nu} \frac{D_1}{z} (a+bt)^{-\frac{A}{b}} z^{\frac{A}{b}}, \quad \psi_2(z, t) =$$

$$= - \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{4D_2}{z} (a+bt)^{-\frac{A}{b}} + D_3 (a+bt)^{-\frac{A}{b}} \right] z^2$$

$$D_1 = \frac{a + \frac{3}{2}}{2} \left[a^{-\frac{A}{b}} - (a+bt_*)^{-\frac{A}{b}} \right]^{-1}, \quad D_2 = \frac{3 - \frac{3}{2}}{2} \left[a^{-\frac{A}{b}} - (a+bt_*)^{-\frac{A}{b}} \right]^{-1}$$

Отсюда следует, что на границе до момента разгрузки при $t = t_*$ надо фиксировать перемещения $u_r + i u_\theta = a^{-\frac{A}{b}} \frac{E}{1 + \nu} D_1 z^{\frac{A}{b}} + a^{-\frac{A}{b}} D_2 z^2$,

при этом внешние нагрузки на L при $0 < t < t_0$ определяются следующим образом: $\sigma_r = \sigma_{r0} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{4D_1}{z} (a + bt) \frac{1}{b} \frac{1}{z} z^{-3} - 2D_2(a - bt) \frac{1}{b} z^{-3} \right]$, $\sigma_{\theta} = e^{i\theta}$.

Получение второго и последующих приближений не вызывает никаких принципиальных затруднений, однако соответствующие выражения очень громоздки, поэтому здесь не приводятся.

ON AN INVERSE PROBLEM IN THE CREEP THEORY

I. Yu. TSVELODUB

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՒ ԶԱԿԱԳՍՐՁ ԿՆՎՐԻ ՈՐԱՌԻՆ

Ի. ՅՈՒ. ԾՎԵԼՈՎՈՒԲ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ն Ա Մ

Ապացուցված է սողքի տեսության հակադարձ ռեկոնստրուկտիվ խնդրի լուծման միակնությունը: Գրգռումների մեթոդով բարակ սալի համար ստացված է այդ խնդրի բնդանուր լուծումը, երբ սալի վերջնական դիժակը քիչ է սարքերվում համասեռ զեֆոյունացվածքից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Цвелодуб И. Ю. Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела. — Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1981, вып. 66, с. 126—137.
2. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластины при ползучести. — Изв. АН СССР, МТТ, 1985, № 5, с. 126—134.
3. Работкин Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М.: Наука, 1966, 752 с.
4. Иалева Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978, 208 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
6. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л.: ГИИЗ, 1948, 296 с.

Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР

Поступила в редакцию
17.IX.1984

УДК 539.37

НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ
 УПРУГОГО ТЯЖЕЛОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

ГЕОДЖАЕВ В. О.

В работе дано замкнутое решение задачи о распределении напряжений в упругом тяжелом наклонном полупространстве с цилиндрической круговой полостью, ось которой перпендикулярна граничной плоскости полупространства. Показано, что решение задачи неоднозначно. Неоднозначность есть следствие неопределенных граничных условий на бесконечности.

§ 1. Постановка задачи и ее решение. Изотропный массив.

Рассмотрим наклонное упругое изотропное полупространство, такое, что нормаль к граничной плоскости этого полупространства направлена вовнутрь и составляет угол α с направлением силы тяжести. В полупространстве имеется глубокая цилиндрическая полость, ось которой параллельна нормали к граничной плоскости. Радиус круговой цилиндрической полости равен R . Решать рассматриваемую задачу удобно в цилиндрической системе координат $r\theta z$, причем ось z совпадает с осью полости, а начало координат расположено на пересечении оси цилиндрической полости и граничной плоскости полупространства (фиг. 1). Через ось z и направление силы тяжести проведем плоскость, ее пересечение с граничной плоскостью полупространства даст прямую. Угол ψ будем отсчитывать от этой прямой (фиг. 1).

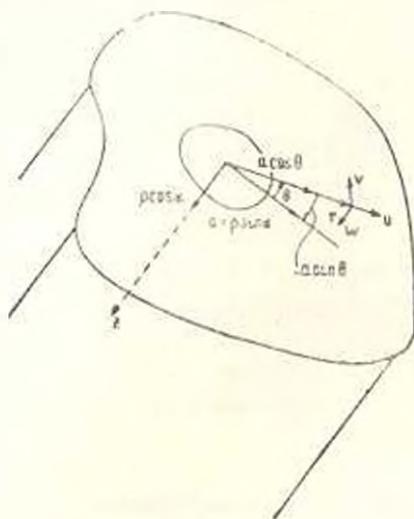
Если через ρ обозначить удельный вес породы массива, то $\rho \cos \alpha$, $\rho \sin \psi$, $-\rho \sin \psi$ будут составляющие массовой силы соответственно на оси z , r , θ , причем $\alpha = \psi \sin \alpha$. Отметим, что рассматриваемая задача является неосесимметричной задачей теории упругости. Случай, когда направление веса совпадает с осью z ($\alpha = 0$, симметричная задача) был рассмотрен С. Г. Лехницким трансверсально анизотропной среды [1].

Условия равновесия в цилиндрической системе координат записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_r - \sigma_\theta}{r} - \rho \cos \psi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \rho \sin \psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\gamma_w}{r} - \rho \cos \alpha = 0$$

где σ_{rz} , σ_θ , σ_z — нормальные напряжения, а $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ — касательные напряжения в цилиндрической системе координат.



Фиг. 1.

Если через u , v и w обозначить перемещения по осям r , θ , z , то нормальные деформации ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z и сдвиги $\gamma_{\theta r}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} имеют такой вид:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$(1.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$E\epsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z), \quad 2G\gamma_{\theta z} = \tau_{\theta z}$$

$$E\epsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z), \quad 2G\gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta} \quad (1.3)$$

$$E\epsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad 2G\gamma_{rz} = \tau_{rz}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль второго рода, $E = 2G(1 + \nu)$.

Сформулированную задачу представим как суперпозицию двух задач. Для решения первой задачи составляющие массовой силы в первом и втором уравнениях системы (1.1) положим равными 0, то есть будем считать, что действуют только массовая сила по оси z , равная $\rho \cos \alpha$. При решении второй задачи полагаем, что массовая сила имеет только составляющую, перпендикулярную оси z . В этом случае в третьем уравнении системы (1.1) составляющую массовой силы следует положить равной нулю.

Решения системы уравнений (1.1), (1.2), (1.3) должны удовлетворять граничным условиям

$$\text{при } z=0 \quad \sigma_z=0, \quad \tau_{rz}=0, \quad \tau_{\theta z}=0$$

$$\text{при } r=R \quad \sigma_r=0, \quad \tau_{rz}=0, \quad \tau_{r\theta}=0 \quad (1.4)$$

Первая задача решается в естественном предположении, что $v = 0$ и все функции зависят от r и z . Одновременно делается предположение, что $\tau_{rz} = 0$. Решение первой задачи дано С. Г. Мехиниким [1], это решение можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\nu \rho z}{1-\nu} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha, & \sigma_\theta &= -\frac{\nu \rho z}{1-\nu} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha \\ \tau_{rz} &= -\rho z \cos \alpha, & \tau_{r\alpha} &= 0, & \tau_{\theta z} &= 0, & \tau_{\theta\alpha} &= 0, & u &= -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{R^2}{Er} \rho z \cos \alpha, & v &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$w = -\frac{1-\nu-2\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{\rho z^2}{E} \cos \alpha + \frac{\nu(1-\nu)}{1-\nu} \frac{\rho R^2}{E} \cos \alpha \ln \frac{r}{R} + \text{const}$$

Для второй задачи ищем решение в следующей форме:

$$u = \bar{u} \cos \theta, \quad v = \bar{v} \sin \theta, \quad w = \bar{w} z \cos \theta, \quad \sigma_r = \bar{\sigma}_r \cos \theta, \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta \cos \theta \quad (1.6)$$

$$\tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} \cos \theta, \quad \tau_{r\theta} = \bar{\tau}_{r\theta} \sin \theta, \quad \tau_{\theta z} = \bar{\tau}_{\theta z} z \sin \theta, \quad \tau_{\theta\alpha} = \bar{\tau}_{\theta\alpha} z \cos \theta$$

Черточка над функцией означает, что она зависит только от r .

Соотношения (1.6) подставим в системы (1.1), (1.2), (1.3). После некоторых преобразований получим

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} + \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{r} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{r} = -a - \bar{\tau}_{rz}, \quad \frac{d\bar{\tau}_{r\theta}}{dr} - \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{r} + \frac{2\bar{\tau}_{r\theta}}{r} = a - \bar{\tau}_{\theta z}, \quad \frac{d\bar{\tau}_{\theta z}}{dr} + \frac{\bar{\tau}_{\theta z} + \bar{\tau}_{rz}}{r} = 0 \quad (1.7)$$

$$\epsilon_r = \frac{d\bar{u}}{dr} \cos \theta, \quad 2\bar{\tau}_{r\theta} = -z \frac{d\bar{v}}{dr} \sin \theta, \quad \epsilon_\theta = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{r} \cos \theta, \quad 2\bar{\tau}_{\theta z} = z \frac{d\bar{w}}{dr} \cos \theta \quad (1.8)$$

$$\epsilon_z = \bar{w} \cos \theta, \quad 2\bar{\tau}_{r\theta} = \left(\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{u} + \bar{v}}{r} \right) \sin \theta$$

$$E \frac{d\bar{u}}{dr} = \bar{\sigma}_r - \nu(\bar{\sigma}_\theta + \bar{\tau}_{rz}), \quad \bar{\tau}_{r\theta} = -G \frac{\bar{v}}{r}, \quad E(\bar{u} + \bar{v}) = r[\bar{\sigma}_\theta - \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\tau}_{rz})] \quad (1.9)$$

$$\bar{\tau}_{\theta z} = -G \frac{d\bar{w}}{dr}, \quad E\bar{w} = \bar{\tau}_{rz} - \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\tau}_{r\theta}), \quad \bar{\tau}_{\theta z} = G \left(\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{u} + \bar{v}}{r} \right)$$

Исключим из четвертого и пятого уравнений системы (1.9) \bar{w} и полученные уравнения сгруппируем в систему с третьим уравнением системы (1.7)

$$\frac{d(\bar{\tau}_{\theta z} r)}{dr} + \bar{\tau}_{\theta z} = 0, \quad \frac{d(\bar{\tau}_{r\theta} r)}{dr} + \bar{\tau}_{r\theta} = 0 \quad (1.10)$$

Система (1.10) имеет решение

$$\bar{\tau}_{r\theta} = B \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right), \quad \bar{\tau}_{\theta z} = B \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right) \quad (1.11)$$

B — произвольная постоянная.

Решение (1.11) удовлетворяет граничному условию

$$\bar{\tau}_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

Имея решение (1.11), нетрудно найти выражение для перемещения \bar{w}

$$\bar{w} = -2(1+\nu) \frac{B}{E} \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{R^2} \right) \quad (1.12)$$

Выражение для \bar{w} (1.12) и третье уравнение системы (1.9) определяют $\bar{\sigma}_r$

$$\bar{\sigma}_r = -2(1+\nu)B \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{R^2} \right) + \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) \quad (1.13)$$

Подставим выражения $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ в первые два уравнения системы (1.7), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{\sigma}_r r)}{dr} + \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta &= -ar - B \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \\ \frac{d(\bar{\sigma}_\theta r)}{dr} + \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r &= ar - B \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Разность первого и второго уравнений системы (1.14) можно проинтегрировать

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta - a \left(r - \frac{R^2}{r} \right) + B \left(\frac{r}{R^2} - \frac{1}{r} \right) \quad (1.15)$$

При получении соотношения (1.15) учитывалось, что при

$$r = R \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

Подставим $\bar{\sigma}_r$ из соотношения (1.15) в первое уравнение системы (1.14) и определим выражение для $\bar{\sigma}_\theta$

$$\bar{\sigma}_\theta = r \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} + 2\bar{\sigma}_r + a \left(2r - \frac{R^2}{r} \right) + 2B \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \quad (1.16)$$

Исключая из первого, второго и шестого уравнений системы (1.9) \bar{u} и \bar{v} , получим условие совместности. Входящее в эти уравнения $\bar{\sigma}_r$ заменим согласно соотношению (1.13), а $\bar{\sigma}_\theta$ — согласно соотношению (1.15). После некоторых преобразований условие совместности примет такой вид:

$$r \frac{d\bar{\sigma}_\theta}{dr} (1-\nu) - \nu r \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} - \bar{\sigma}_r (3-\nu) + \bar{\sigma}_\theta + 2B \left(\frac{r}{R^2} - \frac{1+2\nu}{r} \right) - 2a \left(r - \frac{R^2}{r} \right) = 0 \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16) и (1.17) образуют систему относительно $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$. Решив эту систему, найдем $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$.

$$\bar{\sigma}_r = F \left(\frac{1}{r^3} - \frac{r}{R^3} \right) + \frac{4B - aR^2(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{r}{R^2} - \frac{1}{r} \right) \quad (1.18)$$

$$\sigma_r = -F \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3r}{R^2} \right) - \frac{4B - aR^2(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{3r}{R^2} - \frac{1}{r} \right) + a \left(2r - \frac{R^2}{r} \right) + 2B \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right)$$

F — произвольная постоянная.

При получении решения (1.18) учитывалось, что при $r=R$ $\sigma_r=0$. Если подставить решения $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ (1.18) в выражение для $\bar{\sigma}_z$ (1.13), то в $\bar{\sigma}_z$ будут члены $1/r$ и r , умноженные на некоторые комбинации из постоянных B , F и a . Приравняв их нулю, то есть, потребовав, чтобы $\bar{\sigma}_z$ всюду равнялось бы нулю, получим

$$B = \frac{\nu a R^3}{4}, \quad F = -\frac{a R^4}{8} (3+2\nu) \quad (1.19)$$

После получения значений B и F (1.19) можно найти выражения для напряжений и перемещений для второй задачи

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{a}{4} \left[\frac{3+2\nu}{2} \left(\frac{R^4}{r^3} - r \right) + 3 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \right] \cos\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{a}{4} \left[\frac{3+2\nu}{4} \left(\frac{R^4}{r^3} + 3r \right) - (1+2\nu)r - (1-2\nu) \frac{R^2}{r} \right] \cos\theta, \quad \sigma_z = 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{a}{4} \left[\frac{3+2\nu}{4} \left(\frac{R^4}{r^3} - r \right) - (1-\nu) \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \right] \sin\theta \\ \tau_{rz} &= z \frac{\nu a}{4} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \cos\theta, \quad \tau_{\theta z} = z \frac{\nu a}{4} \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \sin\theta \\ u &= -\frac{a}{4E} \left[-\frac{3+2\nu}{4} (1+\nu) \frac{R^4}{r^2} + \frac{1}{4} (2+\nu)(3+2\nu)r^2 - \right. \\ &\quad \left. - (3-2\nu)(1+\nu)R^2 \ln \frac{r}{R} + \lambda \right] \cos\theta \\ v &= \frac{a}{4E} \left[\frac{3+2\nu}{4} (1+\nu) \frac{R^4}{r^2} + \frac{1}{4} (17+15\nu-2\nu^2)r^2 - \right. \\ &\quad \left. - (3-2\nu)(1+\nu)R^2 \ln \frac{r}{R} - (1+\nu)R^2 + \lambda \right] \sin\theta \\ w &= -\frac{\nu(1+\nu)}{2E} a z \left(\frac{R^2}{r} + r \right) \cos\theta, \quad \Delta = \text{const} \end{aligned} \quad (1.20)$$

§ 2. Выводы и заключение.

Полное решение задачи определения напряженного и деформированного состояний в упругом тяжелом наклонном изотропном массиве с цилиндрической круговой полостью представляет собой суперпозицию решений (1.20) и (1.5).

Предложенное выше решение можно обобщить на случай, когда материал полупространства трансверсально анизотропен с плоскостями изотропии, перпендикулярными оси z .

Если в решениях (1.5) и (1.20) положить $R=0$, получим решение для наклонного массива без полости

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\nu z^2}{1-\nu} \cos \alpha - \frac{a r}{8} (3-2\nu) \cos \theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{\nu z^2}{1-\nu} \cos \alpha + \frac{a r}{8} (7+2\nu) \cos \theta \\ \sigma_z &= -\rho z \cos \alpha, \quad \tau_{rz} = -z \frac{\nu a}{4} \cos \theta, \quad \tau_{\theta z} = z \frac{\nu a}{4} \sin \theta, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{5ar}{8} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{a}{4E} \left[\frac{1}{2} (1+\nu) (3-2\nu) r^2 + z \right] \cos \theta, \quad v = \frac{a}{4E} \left[\frac{1}{4} (17+15\nu-2\nu^2) r^2 + z \right] \sin \theta \\ w &= -\frac{1-\nu-2\nu^2}{2(1-\nu)} \frac{\rho z^2}{E} \cos \alpha - \frac{\nu(1+\nu)}{2E} a r z \cos \theta + c \end{aligned}$$

λ, c —произвольные постоянные.

Следует обратить внимание, что даже очень малый наклон полупространства (α мало) качественно меняет решение. В выражениях для напряжений появляются члены, зависящие от r , а для перемещений—члены, пропорциональные r^2 . В отличие от горизонтального полупространства в наклонном полупространстве при больших r напряжения и перемещения беспредельно увеличиваются. Такой рост напряжений и перемещений встречается и в других задачах для бесконечных весомых областей, например, в работах [2, 3].

На полученное решение задачи о распределении напряжений в тязелом наклонном полупространстве с круговым цилиндрическим вырезом можно наложить решения, которые не изменяют граничных условий (1.4). Физически эти решения отвечают отличным от полученных на бесконечности напряжениям и перемещениям. Например, на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) можно приложить равномерное по z давление, различное в двух различных взаимно перпендикулярных направлениях, можно приложить равномерное по θ давление, растущее линейно по z и т. д. Для некоторых из перечисленных случаев решение легко выписывается в замкнутом виде.

Так на суперпозицию решений (1.20) и (1.5) можно наложить решение

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\rho z - q) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = (\rho z - q) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \sigma_z = 0 \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} &= 0, \quad u = \frac{r}{E} (\rho z - q) \left[1 - \nu + (1 + \nu) \frac{R^2}{r^2} \right], \quad v = 0 \\ w &= \frac{1}{E} \left[-z^2 \nu \rho + 2\nu q z - \frac{r^2}{2} \rho (1 - \nu) - (1 + \nu) R^2 \rho \ln \frac{2}{R} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

ρ и q —произвольные постоянные.

Решение (2.2) дает на бесконечности рост перемещений такой же, как и для наклонного полупространства.

Для задач, аналогичных рассматриваемой, физически нелогично рассматривать изменение силы тяжести. Такого рода задачи ставятся для определения напряженного и деформированного состояния в каком-то определенном районе, в нашем случае, в районе выемки. Поэтому появление в «гор» и «падинах» при $r \rightarrow \infty$ не интересует исследователя как бесконечные перемещения концов данной растягиваемой веревки.

Интересно, что некоторые суперпозиции решений не меняют удельной энергии упругой деформации u_0 . Если на решение (1.5) наложить решение (2.2) и подсчитать удельную энергию упругой деформации u_0 , получим ($\alpha = 0$)

$$u_0 = \frac{U}{R_0^2 z_0^3} \Big|_{R_0 \rightarrow \infty}^{z_0 \rightarrow \infty} = \frac{\alpha \rho^2}{3E} + \frac{\alpha \gamma^2}{6E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \quad (2.3)$$

U — полная энергия. Как видно из соотношения (2.3), удельная энергия u_0 не зависит от всестороннего давления на бесконечности q .

Что на решение (1.5) и (1.20) можно наложить решение, отвечающее какой-то сжимающей на бесконечности силе, свидетельствует тот факт, что в решении (2.1) распределение напряжений и перемещений зависит от выбранного начала координат. Фактически ось цилиндрической полости в полученном решении (1.5) и (1.20) проходит через точку граничной плоскости полупространства, в которой все напряжения равны нулю, когда полость отсутствует.

Если потребовать определенный вид распределения напряжений и перемещений на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) или ограничить рост перемещений на бесконечности, то, вероятно, в некоторых случаях можно доказать единственность получающегося решения. Согласно информации, полученной от С. А. Назарова, это можно сделать для горизонтального полупространства с цилиндрическим отверстием, то есть для решения (1.5) (при $\alpha = 0$), данного С. Г. Лехницким [1].

Было бы в определенном смысле логичным потребовать, чтобы перемещения в решении для полупространства с цилиндрической полостью не меняли бы характера роста при $r \rightarrow \infty$ по сравнению с случаем, когда полость отсутствует. Этому требованию решение (1.5) и (1.20) не удовлетворяет. С появлением полости в перемещениях появляется член, пропорциональный $\ln \frac{r}{R}$.

Для горизонтального полупространства с цилиндрическим отверстием такому требованию удовлетворяют следующие напряжения и перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \sigma_z = -\rho z, \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau_{zz} = 0 \\ u = \frac{r z}{E} \frac{\rho \nu}{1-\nu}, \quad v = 0, \quad w = -\frac{z^2}{2E} \rho - \frac{r^2}{2E} \rho + \text{const} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Конечно, это решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.4), дает другие соотношения при $r \rightarrow \infty$.

Все сказанное свидетельствует о необходимости с большой осторожностью относиться к решениям, полученным для задач об упругом равновесии тяжелого полупространства.

Предположение о том, что рассматриваемую задачу можно решить как предельную в случае, когда полупространство имеет конечную полость, глубина которой увеличивается, очевидно, успеха не будет иметь. При решении таких задач рассматривается большой массив с конечной выемкой, а на границах этого массива необходимо задать какие-то условия для напряжений и перемещений.

ON THE AMBIGUITY OF SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELASTIC EQUILIBRIUM OF HIGH WEIGHT SEMISPACE WITH A CYLINDRICAL CAVITY

V. O. OBOGDGAEV

ԳՐԱՆԱՅԻՆ ԿՈՌՈՉՈՎ ԱԹԱԶԳԱԿԱՆ, ՄԱՆՐ ԿԻՍՏԱՐԱՐԱՄՈՒԹՅԱՆ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ԿՆԳՐԻ ԼՈՒՍՄԱՆ ՈՉ ՄԻԱՐԵԻԲԵՐԹՅՈՒՆՆԸ

Վ. Օ. ՕԲՈԳԴԱԵՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում բերված է շրջանաձև պլանային խոռոչով ստանդական ծանր, թեթև կիսատարածության մեջ լարումների բաշխման խնդրի փակ լուծումն այն դեպքում, երբ խոռոչի առանցքն ուղղահայաց է կիսատարածության սահմանային շարժությանը: Յույց է տրված, որ խնդրի լուծումը միարժեք չէ, որն անվերջությունում էզրային պայմանների անորոշության նշանականք է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, с. 368—385.
2. Шапиро Г. С. О равновесии конуса с конической оболочкой. Прикл. математика и механика, 1944, т. 8, в. 4.
3. Шапиро Г. С. Упругое равновесие параболоид вращения. Прикл. математика и механика, 1950, т. 14, в. 6.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
28.XI.1984

УДК 532.516

О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
 МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ
 ПЛОСКОСТЯМИ

БАБАДЖАНИАН Г. А. МНАЦАКАНИАН Р. Ж.

1. За последние годы опубликован ряд работ [1], [2], [3], в которых рассматривается взаимодействие потока жидкости или газа с подвижными поверхностями. Имеется много актуальных приложений этих исследований в современной технике.

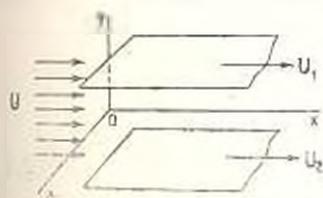
Скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных процессах, так например, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии, в химической технологии, при пленочном или завесном охлаждении и т. д.

В большинстве вышеперечисленных работ теоретические исследования закономерности движения у подвижных поверхностей проводились в приближении пограничного слоя. Эти исследования ограничивались, в основном, для стабилизированной области течения.

Изучение развития течения жидкости или газа между подвижными поверхностями имеет большое теоретическое и практическое значение.

Рассмотрим задачу о развитии течения жидкости между параллельными движущимися плоскостями, простирающимися в направлениях осей x и z до бесконечности (фиг. 1). Движение плоскостей происходит в своих плоскостях. Обе плоскости движутся или по положительному или по отрицательному направлению оси Ox с заданными постоянными скоростями U_1 и U_2 . Между плоскостями движется жидкость, для которой на входе в канал формулируется плоский однородный профиль скорости.

Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, движение ее ламинарным, стационарным, изотермическим и плоскопараллельным, то при отсутствии массовых сил приближенные уравнения с частичным учетом слагаемых от вязкости и ускорения будут иметь вид [4]



Фиг. 1

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

В этой системе уравнений U есть средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, v_x

и v_y — соответствующие скорости по осям OX и OY , p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Пусть расстояние между плоскостями будет $2h$.

Если начало оси OY возьмем на средней линии между плоскостями, то граничные условия для задачи о развитии течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x=U=\text{const}, \quad p=p_0 \\ \text{при } y=h \quad x>0 \quad v_x=U_1, \quad v_y=0 \\ \text{при } y=-h \quad x>0 \quad v_x=U_2, \quad v_y=0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где p_0 — значение давления в начале трубы.

Если ввести новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad p = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

то система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{при } z=0 \quad u=0, \quad p=0$$

$$\text{при } y=1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v=0 \quad (1.4)$$

$$\text{при } y=-1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_2 - U}{U}, \quad v=0$$

В системе уравнений (1.3) $\text{Re} = Uh/\nu$ — число Рейнольдса.

2. Уравнение (1.3) при граничных условиях (1.4) решаем с помощью операционного исчисления. Если воспользоваться функциональным преобразованием Лапласа, из (1.3) и (1.4) для искомых функций v_x , v_y и p получим следующие значения:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 + U_2}{4} \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y + \\ + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos \mu_n y/h}{\cos \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) + \\ + \frac{U_2 - U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y/h}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} v_y = \frac{(U_1 + U_2 - 2U)}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) - \\ - \frac{U_1 - U_2}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p = p_0 + \delta U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left[-\frac{3x}{\text{Re}h} - \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right)\right] \quad (2.3)$$

где μ_n — простые корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

Найдем значение силы трения

$$\begin{aligned} \tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left[-\frac{3U}{h^2} y + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right. \\ \left. + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n y/h}{h \sin \mu_n} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \pi n y/h \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \mu_n^2 \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2 (U_1 - U_2)}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \end{aligned}$$

3. Проведем анализ полученных результатов.

I. Если в формулах (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) подставить $U_1 = U_2 = 0$, получим результаты работы [4].

II. На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут:

$$v_{x \rightarrow \infty} = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) - \frac{U_1 + U_2}{4} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y, \quad v_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.1)$$

$$p_x = p_H - \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left(\frac{3x}{\operatorname{Re} h} + \frac{1}{5}\right) \quad (3.2)$$

$$\tau_x = \mu \left(-\frac{3U}{h^2} y - \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h}\right) \quad (3.3)$$

III. Из формул (3.1), (3.2) и (3.3) видно, что результаты, полученные для стабилизированного участка в случае, когда исходные уравнения движения принимаются в виде (1.1), отличаются (уточняются) от результатов для этого же участка, когда за исходные уравнения движения принимались уравнения Стокса [5].

IV. Из (2.4) можно найти силы трения на стенках

$$\begin{aligned} \tau_{y=h} = \mu \left[-\frac{3U}{h} + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{y=-h} = \mu \left[\frac{3U}{h} - \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} - \right. \\ \left. - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

Для стабилизированного участка силы трения на стенках будут

$$\tau_{y=h} = \frac{\mu}{h} (2U_1 + U_2 - 3U), \quad \tau_{y=-h} = \frac{\mu}{h} (-U_1 - 2U_2 + 3U) \quad (3.6)$$

V. Из формул (3.4), (3.5) получим значение силы трения для неподвижных стенок, если подставить $U_1=U_2=0$

$$\tau_{y=h} = -\frac{\mu U}{h} \left[3 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_n^2}{\text{Re}} x\right) \right] \quad (3.7)$$

$$\tau_{y=-h} = \frac{\mu U}{h} \left[3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_n^2}{\text{Re}h} x\right) \right] \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) видно, что в случае неподвижных стенок значение силы трения в начальном участке больше значения силы трения в стабилизированном участке.

VI. При подвижных стенках значение силы трения, как в стабилизированном участке, так и в начальном участке, зависят от значений скоростей стенок. Так, например, если $2U_1 - U_2 = 3U$, то значение силы трения в стабилизированном участке на верхней стенке равно нулю, а если $U_1 + 2U_2 = 3U$, то на нижней стенке равно нулю. Полученные результаты показывают, что выбором скоростей основного потока и плоскостей, можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в потоке и на стенках.

ON THE DEVELOPMENT OF THE VISCOUS LIQUID FLOW BETWEEN PARALLEL MOVING PLANES

G. A. BABADJANYAN, R. ZH. MNATSAKANYAN

ՀԱՐՔՎՈՂ ԶՈՒԳԱԼՆԵՐ ԶԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋԵՎ ՄԱՍՈՒՅՐԿ ԸՆԿՈՒԿԻ
ՀԱՐՔՄԱՆ ԶԱՐԳԱՅՈՒՄԸ

Գ. Ա. ԲԱԲԱԶՅԱՆԱՆ, Թ. Ժ. ՄՆԱՏԱԿԱՆՅԱՆ

Ա ռ Վ Պ Ո Փ Ո Ս Տ Վ

Կտնված են արագության, ճնշման և շիման ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հատվածներում:

Ցույց է տրված, որ հիմնական հոսքի և շարժվող հարթությունների արագությունների ընտրությամբ կարելի է դեկավարել արագությունների, ճնշման և շիման ուժի բաշխումը հոսանքում և պատերի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Актышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П., Анализ течения в канале с движущейся стенкой. — ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакинов З. Б., Ярин А. Т. Струйное обтекание движущейся поверхности. — Изв СО АН СССР, сер техн наук, 1981, № 3, вып 1, с. 33—41.

3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. — В кн.: Избранные проблемы прикладной механики М.: Наука, 1974, с. 99—104.
4. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений М.: Гостехиздат, 1951, 420 с.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
8.XII 1986

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ТОНКИХ
 СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В СЛУЧАЕ РАЗМЕЩЕНИЯ
 ИХ В УЗЛАХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКИ

СТАДНИК М. М., СИЛОВАНЮК В. П.

Вопросы определения поля напряжений в телах с упругими включениями и накладками являются предметом исследований многих авторов. В частности, разработке методов приближенного решения таких задач в случае тонких включений и накладок посвящены работы [1-6].

В настоящей работе на основании подхода [5, 6] исследована задача о концентрации напряжений в пространстве с системой упругих включений, периодически размещенных в одной плоскости.

Рассматривается упругое пространство, содержащее бесконечное число одинаковых тонких сфероидальных включений с полуосями a и c ($a \gg c$). Пусть центры включений размещены в узлах прямоугольной сетки с делениями $2l$ и $2kl$ (k — действительное число). На бесконечности задано однородное поле одноосного растяжения в направлении нормальном к плоскости включений. Ставится задача определения напряженного состояния в окрестности включений.

Предложенная в работе [6] модель тонкого упругого включения позволяет свести задачу к некоторому эквиваленту теории трещины, общие уравнения которого получены в работе [7]. Для рассматриваемого случая, учитывая периодический характер поля напряжений около включений, проблема сводится к решению двумерного интегрального уравнения второго рода

$$u_z(x, y) + \frac{(1-\nu^2)\mu}{\pi} L(u_z(x, y)(h(x, y))) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{(i,j) \neq (0,0)} \sum_{x', y'} \int_S u_z(\xi_2, \eta_2) \times \\
 \times L(((x-\xi_2-2l_1)^2 - (y-\eta_2-2kl_1)^2)^{-1/2}) d\xi_2 d\eta_2 = \\
 = 4\rho(1-\nu)(1-\nu^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} / \pi E \quad (1)$$

Здесь $u_z(x, y)$ — смещения берегов математического разреза вдоль срединной области S одного из включений; ν, E — коэффициент Пуассона и модуль упругости материала матрицы; $h(x, y) = = c \sqrt{1 - (x^2 - y^2)/a^2}$; $\varepsilon = E_1/E$, E_1 — модуль упругости материала включений; интегральный оператор

$$L(\varphi(x, y)) = \int_S \int \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{1}{a^2} \int_S \int \frac{a^2 d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - a^2)[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}} \times \\ \times \int_S \int \frac{\varphi(\xi_1, \eta_1) \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2}}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} d\xi_1 d\eta_1$$

Система декартовых координат $Oxyz$ выбрана в центре одного из включений так, что ось Oz совпадает с направлением приложенной нагрузки.

Непрерывное решение интегрального уравнения (1), обращаемое в нуль на контуре области S , будем искать в виде

$$u_*(x, y) = (A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 xy + A_5 y^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (2)$$

где A_j ($j=0, \dots, 5$) — неизвестные коэффициенты.

При выборе функции перемещения $u_*(x, y)$ в таком виде с учетом разложения ядра интегрального уравнения в степенной ряд, что возможно при условии

$$\max(a/l, a/kl) < 1$$

решение получается с точностью до малых величин в пятой степени.

Подстановка выражения для функции $u_*(x, y)$ (2) в интегральное уравнение (1) дает следующие соотношения для нахождения коэффициентов:

$$A_0 = 4\rho(1-\varepsilon)(1-\nu^2)\gamma_1 \left((1+\lambda^3\gamma_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{(i-j \neq 0)}^{\infty} \left(\frac{1}{2q^3} + \frac{\gamma_1^2}{240q^5} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 25\lambda^2(1-\nu^2)\varepsilon\beta\gamma_2(9\pi + 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))/6q^3 \right) \right) / E$$

$$A_3 = \frac{180\lambda^3}{l^2 E} \rho(1-\nu^2)(1-\varepsilon)\gamma_1\gamma_2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{(i-j \neq 0)}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{12q^5} + \frac{i^2}{3q^7} \right) (45\pi + \right. \\ \left. + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - \left(-\frac{1}{12q^5} + \frac{k^2 j^2}{3q^7} \right) 8\beta\varepsilon(1-\nu^2) \right) \quad (3)$$

$$A_5 = \frac{180\lambda^3}{l^2 E} \rho(1-\nu^2)(1-\varepsilon)\gamma_1\gamma_2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{(i-j \neq 0)}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{12q^5} + \frac{k^2 j^2}{3q^7} \right) (45\pi + \right. \\ \left. + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - \left(-\frac{1}{12q^5} + \frac{i^2}{3q^7} \right) 8\beta\varepsilon(1-\nu^2) \right)$$

$$A_1 = A_2 = A_4 = 0$$

где

$$\beta = a/c > 1, \quad \lambda = a/l < 1, \quad q = (l^2 + k^2 j^2)^{1/2}, \quad \gamma_1 = (\pi + 4(1-\nu^2)\varepsilon\beta)^{-1}, \\ \gamma_2 = ((45\pi + 88(1-\nu^2)\varepsilon\beta)^2 - 64(1-\nu^2)^2 \varepsilon^2 \beta^2)^{-1/2}$$

По найденным значениям перемещений берегов математических разрезов S коэффициенты интенсивности напряжений K_i могут быть непосредственно найдены по формуле [8]

$$K_i = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

где r — радиус полярной системы координат (r, θ) с началом в центре круговой области S .

Используя соотношения (2), (3) и данные работы [7], нормальные напряжения в окрестности экваториальных сечений включений определяются по формуле

$$\sigma_{zz} = p + 4p(1-\epsilon)\beta\gamma_1 + 4p(1-\epsilon)\beta^2\gamma_1 R(a \cos \theta, a \sin \theta)$$

где

$$\begin{aligned} R(x, y) = & i^3 \sum_{\substack{l=1, 3, 5, \dots \\ (l-j \neq 0)}} \sum_{\substack{j=1, 3, 5, \dots \\ (j \neq 0)}} (\gamma_1 (1/12q^3 - 7j^2/210q^5 - \\ & - 25i^2(1-\nu^2)\epsilon\beta\gamma_2(9\pi - 16\beta\epsilon(1-\nu^2))/6q^3) + 15\gamma_2((-1/4q^3 + \\ & + i^2/q^5)(45\pi - 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) - (-1/4q^3 + k^2j^2/q^5)8\beta\epsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 + \\ & + 15\gamma_2((-1/4q^3 + k^2j^2/q^5)(45\pi - 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) - \\ & - (-1/4q^3 + i^2/q^5)8\beta\epsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(i^6) \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи.

- а) Пусть $k=1$, то есть центры включений находятся в узлах квадратной сетки с делениями $2l$. В этом случае $R(x, y)$ приобретает вид [9]

$$\begin{aligned} R(x, y) = & \gamma_1(0,7528i^3 + 0,1485i^5 - 20,92i^7\gamma_2(9\pi + 16\beta\epsilon(1-\nu^2))\beta\epsilon(1-\nu^2) + \\ & + 23,85i^9\gamma_2(9\pi + 16\beta\epsilon(1-\nu^2))(x^2 + y^2)/l^2) + O(i^6) \end{aligned}$$

- б) $k=1,5$. После вычисления бесконечных сумм для $R(x, y)$ получим выражение

$$\begin{aligned} R(x, y) = & i^3(\gamma_1(0,4436 + 0,0772i^2 - 11,02i^4(1-\nu^2)\beta\epsilon\gamma_2(9\pi + \\ & + 16\beta\epsilon(1-\nu^2))) + \gamma_2(22,82(45\pi + 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) + 24,10\beta\epsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 - \\ & + \gamma_2(-3,012(45\pi + 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) - 182,5\beta\epsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(i^6) \end{aligned}$$

- в) $k=3$. Для этого случая будем иметь

$$\begin{aligned} R(x, y) = & i^3(\gamma_1(0,2610 + 0,06153i^2 - 8,790i^4(1-\nu^2)\epsilon\beta\gamma_2(9\pi + \\ & + 16\beta\epsilon(1-\nu^2))) + \gamma_2(23,30(45\pi + 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) - 3,999\beta\epsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 - \\ & + \gamma_2(-0,4986(45\pi + 88\beta\epsilon(1-\nu^2)) - 186,4\beta\epsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(i^6) \end{aligned}$$

STRESS CONCENTRATION NEAR THIN SPHEROID INCLUSIONS IN THE CASE OF THEIR LOCATION IN THE POINTS OF RECTANGLE LATTICE

M. M. STADNIK, V. P. SILOVANYUK

ՈՐԿՐԱՆՅՈՒՆ ՅԱՆՅԻ ՉԱՆԳՈՅՑՆԵՐՈՒՄ ՏԵՂՈՒԹՆԵՎԱԾ ԲՈՐԱՆ
ԿՆՔԱԿՐՊԻ ԿՈՒՐՑԱՆԵՐԻ ՇՈՐԻՉԻ ԼՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱ

Ս. Ս. ՍՏԱԴՆԻԿ, Վ. Պ. ՍԻԼՈՎԱՆՅՈՒԿ

Ս. Տ. Փ. Ս. Փ. Ս. Փ. Ս.

Ստուգված է փնդակերպ կոմպյանսը ներգրակների երկպարբերական համակարգ պարունակող տարածության ձգման ինդիքի մասամբ լուծումը: Բերված են ներգրակներում և նրանց շրջակայքում լարումների համար բացահայտ տեսքով արտահայտություններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние деформированного тела с тонкостенным гибким включением. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, 20, № 6, с. 19—29.
3. Перлин П. И. К решению задач теории упругости для тел с тонкостенными включениями. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 5, с. 140—143.
4. Грилицкий Д. В., Сидык Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. — Мат. методы и физ. мех. поля, 1975, вып. 1, с. 41—48.
5. Соткилани О. В., Черепанов Г. П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости. — Прикл. математика и механика, 1974, 38, № 3, с. 539—550.
6. Панасюк В. В., Андрейкин А. Е., Стадник М. М. Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением. — Докл. АН УССР, 1976, А, № 7, с. 636—639.
7. Стадник М. М., Силованюк В. П. Определение концентрации напряжений в упругом теле с системой тонких включений, размещенных в одной плоскости. — Физ.-хим. механика материалов, 1977, № 6, с. 88—92.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 445 с.
9. Стадник М. М., Силованюк В. П. Одно и двоякоперпюдицеская система тонких упругих включений в трехмерном теле. — Физ.-хим. механика материалов, 1980, т. 16, № 4, с. 84—89.

Физико-механический институт
им. Г. В. Карпенко

Поступила в редакцию
21.V.1984

РЕФЕРАТЫ ДЕПОНИРОВАННЫХ НАУЧНЫХ РАБОТ

УДК 624.01

О ПРИВЕДЕНИИ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
 К «СТАНДАРТНОЙ» ФОРМЕ С ПОМОЩЬЮ
 ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л. Г. ПЕТРОСЯН

Рассматривается вопрос об эквивалентности краевых и начальных задач с неоднородностями и граничных (начальных) условиях и правой части уравнения применительно к расчету конструкций на статические и динамические нагрузки. Приводится «стандартная» форма задачи, полученная с помощью дельта-преобразования и позволяющая заменить граничные или начальные условия соответствующей нагрузкой на конструкцию в виде дельта-функции и ее производных. Построение «стандартной» формы иллюстрируется на простейших примерах краевой задачи для балки и задачи Коши для системы с одной степенью свободы. Метод дельта-преобразования позволяет достаточно просто строить «стандартную» форму краевых задач. Для задач Коши такое построение можно осуществить еще проще, вводя скачки непосредственно в выражения для искомой функции и ее производных, однако этот прием приводит к нужному результату лишь в случае, если при $t < 0$ система находится в покое. В случае краевых задач метод дельта-преобразования предоставляет, по-видимому, наиболее простой путь решения рассматриваемой проблемы.

11 с., ил. 1, библиогр. 6 назв.

Полный текст статьи депонирован в ВИНТИИ
 за № 3695—В 86 от 2 июня 1986 г.

Поступила в редакцию
 25.IX.1985