

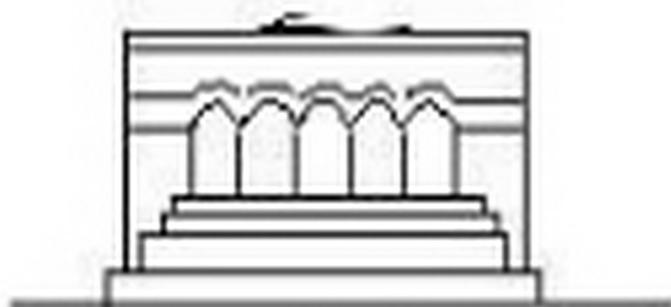
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1987

УДК 536.212

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В НАГРЕВАЕМЫХ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА РАЗНОРОДНЫХ ПЛАСТИНКАХ ПРИ РАЗРЫВНЫХ ТЕПЛОВЫХ УСЛОВИЯХ МЕЖДУ НИМИ

ՏԱՐԳՅԱՆ Ա. Մ., ԽԱՇԻԿՅԱՆ Ա. Տ.

В работе [1] было получено решение задачи теплопроводности о распределении квазистационарного температурного поля в двух разнородных полубесконечных пластинках, возникающее в процессе их соединения линейным источником тепла постоянной мощности. Предполагалось, что источник тепла движется вдоль линии раздела двух разнородных сред. Поэтому решение, приведенное в работе [1], недостаточно для рассмотрения таких практических задач как сварка-пайка разнородных пластин, сварка с интенсивным охлаждением или с предварительным нагревом, сварка с сопутствующим нагревом и охлаждением и т. д. [3, 4]. Все эти задачи можно рассматривать как частные случаи более общей задачи о двух разнородных полубесконечных пластинках, подвергнутых воздействию источников и стоков тепла, движущимися параллельно их линии раздела. Ниже будет приведено решение этой общей задачи в случае действия двух источников тепла, движущихся параллельно линии раздела на некотором расстоянии от нее (фиг. 1). Решение задачи в случае движения любого конечного числа источников и стоков тепла получается методом обычной суперпозиции.

Предполагается, что на одной части линии раздела ( $x < 0$ ) тепловой контакт между пластинками является идеальным, а на другой части ( $x > 0$ ) теплообмен между пластинками отсутствует.

Решение этой задачи, когда тепловой контакт между разнородными пластинками по всей длине линии раздела является неидеальным, приведено в работе [2].

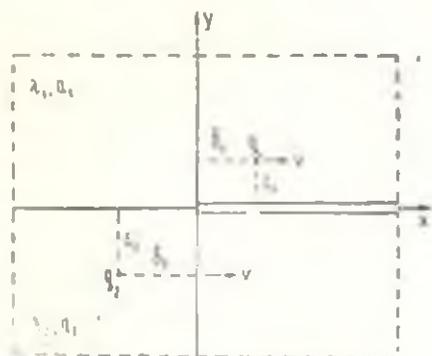
Дифференциальное уравнение теплопроводности в подвижной системе координат  $xoy$  имеет вид [3, 5]

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} - \frac{v}{a_j} \frac{\partial T_j}{\partial x} = -\frac{q_l}{\lambda_j b} \delta(x + \varepsilon_j) \delta(y - \varepsilon_j) \quad (1)$$

$$j=1, y > 0, \varepsilon_1 > 0; \quad j=2, y < 0, \varepsilon_2 < 0$$

$$|x| < \infty$$

Контактные условия на линии раздела  $y=0$  запишутся в форме



Фиг. 1

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}, \quad y=0, \quad |x| < \infty \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} = 0, \quad y=0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$T_1 = T_2, \quad y=0, \quad x < 0 \quad (4)$$

Здесь  $T_j$  — приращение температуры пластинки по сравнению с равномерной начальной,  $\lambda_j$ ,  $a_j$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материалов пластинок,  $h$  — толщина пластинок,  $v$  — скорость движения источника тепла,  $q_j$  — мощность источников тепла,  $\delta(x)$  — функция Дирака. Предполагается, что  $T_j(x, y)$ ,  $\partial T_j / \partial x$  и  $\partial T_j / \partial y$  исчезают на бесконечности.

Как и в работе [1], сначала решается краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} + (\rho_j - \varepsilon) \frac{\partial T_j}{\partial x} - \rho_j \varepsilon T_j = - \frac{q_j}{\lambda_j h} \delta(x + \varepsilon_j) \delta(y - \varepsilon_j) \quad (5)$$

где  $\rho_j = v/a_j$ ,  $\varepsilon > 0$ . Решение задачи (1) — (4) получается предельным переходом  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для решения краевой задачи (5) и (2) — (4) используется интегральное преобразование Фурье с комплексным параметром преобразования  $\xi = \alpha + i\tau$  [6]

$$\overline{T}_j(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x, y) \exp(i\xi x) dx, \quad T_j(x, y) = \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} \overline{T}_j(\xi, y) \exp(-i\xi x) d\xi \quad (6)$$

$$\overline{T}_{j+}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} T_j(x, y) \exp(i\xi x) dx, \quad \overline{T}_{j-}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 T_j(x, y) \exp(i\xi x) dx \quad (7)$$

$$\overline{T}'_{j+}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial T_j(x, y)}{\partial y} \exp(i\xi x) dx, \quad \overline{T}'_{j-}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial T_j(x, y)}{\partial y} \exp(i\xi x) dx$$

Так как функции  $T_j(x, y)$  и  $\partial T_j(x, y) / \partial y$  стремятся к нулю на бесконечности, то  $\overline{T}_{j+}(\xi, y)$  и  $\overline{T}'_{j+}(\xi, y) = \partial \overline{T}_{j+}(\xi, y) / \partial y$  являются аналитическими функциями комплексной переменной  $\xi$  в некоторой верхней полуплоскости  $\text{Im} \xi = \tau > \tau_+$ , содержащей действительную ось. Функции  $\overline{T}_{j-}(\xi, y)$  и  $\overline{T}'_{j-}(\xi, y) = \partial \overline{T}_{j-}(\xi, y) / \partial y$  аналитичны в некоторой нижней полуплоскости  $\text{Im} \xi = \tau < \tau_-$ , также содержащей действительную ось. Функция  $\overline{T}_j(\xi, y)$  является аналитической функцией в полосе  $\tau_- < \text{Im} \xi < \tau_+$ , поэтому в формуле обращения (6) интегрирование можно проводить вдоль действительной оси [6].

Применяя преобразование (6) к уравнению (5), будем иметь

$$\frac{d^2 \bar{T}_j(\xi, y)}{dy^2} - k_j^2(\xi) \bar{T}_j(\xi, y) = -\frac{A_j}{i_j} \exp(-i\delta_j \xi) \cdot \delta(y - \varepsilon_j) \quad (8)$$

где

$$k_j(\xi) = \sqrt{(\xi - i\varepsilon)(\xi + i\rho_j)}, \quad A_j = q_j / 2\pi h$$

Решение (8) примет вид

$$\bar{T}_1(\xi, y) = C_1(\xi) \exp(-y k_1(\xi)) + \frac{A_1}{2i_1 k_1(\xi)} \exp(-i\delta_1 \xi - |y - \varepsilon_1| k_1(\xi)) \quad (9)$$

$$\bar{T}_2(\xi, y) = C_2(\xi) \exp(y k_2(\xi)) + \frac{A_2}{2i_2 k_2(\xi)} \exp(-i\delta_2 \xi - |y - \varepsilon_2| k_2(\xi))$$

$$\operatorname{Re} k_1(\xi) > 0, \quad \operatorname{Re} k_2(\xi) > 0$$

Преобразовывая граничные условия (2)–(4) с учетом (9), получим

$$i_1 k_1(\xi) C_1(\xi) + i_2 k_2(\xi) C_2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-i\delta_n \xi - |\varepsilon_n| k_n(\xi))$$

$$i_2 \bar{T}_2(\xi, 0) = i_2 k_2(\xi) C_2(\xi) - \frac{1}{2} A_2 \exp(-i\delta_2 \xi - |\varepsilon_2| k_2(\xi)) \quad (10)$$

$$\bar{T}_1(\xi, 0) - T_2(\xi, 0) = C_1(\xi) - C_2(\xi) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \exp(-i\delta_n \xi - |\varepsilon_n| k_n(\xi))$$

Определяя из двух последних условий (10)  $C_1(\xi)$  и  $C_2(\xi)$  и подставляя в первое условие, приходим к функциональному уравнению типа Винера-Хопфа [6]

$$i_1 i_2 k_1(\xi) k_2(\xi) [\bar{T}_{1+}(\xi, 0) - \bar{T}_{2+}(\xi, 0)] + i_2 \bar{T}_{2-}(\xi, 0) [i_1 k_1(\xi) + i_2 k_2(\xi)] = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n i_{3-n} k_{3-n}(\xi) \exp(-i\delta_n \xi - |\varepsilon_n| k_n(\xi)) \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) разложим аналитическую в полосе  $-\rho_j < \operatorname{Im} \xi < \varepsilon$  функцию  $k_j(\xi)$  в виде

$$k_j(\xi) = k_{j+}(\xi) k_{j-}(\xi) \quad (12)$$

где  $k_{j+}(\xi) = \sqrt{\xi + i\rho_j}$  — функция, аналитическая в области  $\operatorname{Im} \xi > -\rho_j$ ,  $k_{j-}(\xi) = \sqrt{\xi - i\varepsilon}$  аналитична в области  $\operatorname{Im} \xi < \varepsilon$ , причем  $\operatorname{Re} k_j(\xi) > 0$ . Очевидно, что полосы  $-\rho_j < \operatorname{Im} \xi < \varepsilon$  и  $-\rho_j < \operatorname{Im} \xi < \varepsilon$  имеют общую часть.

С помощью разложения (12) уравнение (11) можно переписать в виде

$$\frac{i_1 i_2 k_{1+}(\xi) k_{2+}(\xi)}{i_1 k_{1+}(\xi) + i_2 k_{2-}(\xi)} [\bar{T}_{1+}(\xi, 0) - \bar{T}_{2+}(\xi, 0)] + \frac{i_2}{k_{2-}(\xi)} \bar{T}_{2-}(\xi, 0) = G(\xi) \quad (13)$$

где

$$G(\xi) = \frac{- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n i_{3-n} k_{3-n}(\xi) \exp[-i\delta_n \xi - |\varepsilon_n| k_n(\xi)]}{i_1 k_{1+}(\xi) + i_2 k_{2-}(\xi)} \quad (14)$$

Представим аналитическую в полосе  $-\text{mln}(p_1, p_2) < \text{Im}z < \varepsilon$  функцию  $G(z)$  в виде [6]

$$G(z) = G_+(z) + G_-(z)$$

где функция

$$G_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{\infty + ic} \frac{G(z')}{z' - z} dz', \quad c < 0 \quad (15)$$

является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Im}z = c > -\text{mln}(p_1, p_2)$ , а функция

$$G_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + id}^{\infty - id} \frac{G(z')}{z' - z} dz', \quad d > 0 \quad (16)$$

аналитична в области  $\text{Im}z = d < \varepsilon$ . Причем полосы  $z_- < \text{Im}z < z_+$ ,  $-\text{mln}(p_1, p_2) < \text{Im}z < \varepsilon$  и  $c < \text{Im}z < d$  имеют общую часть-полосу  $z_- < \text{Im}z < z_+$ , и в этой полосе уравнение (13) записывается в виде

$$\frac{\lambda_2 \lambda_1 k_{1-}(z) k_{2-}(z)}{\lambda_1 k_{1+}(z) + \lambda_2 k_{2+}(z)} [\bar{T}_{1+}(z, 0) - \bar{T}_{2+}(z, 0)] - G_-(z) = -\frac{\lambda_2}{k_{2-}(z)} \bar{T}_{2-}(z, 0) + G_-(z) \quad (17)$$

Левая часть уравнения (17) представляет собою функцию, аналитическую в верхней полуплоскости  $\text{Im}z > z_+$ , а правая часть — в нижней полуплоскости  $\text{Im}z < z_-$ . Так как области их аналитичности имеют общую часть-полосу  $z_- < \text{Im}z < z_+$ , из равенства этих функций в данной полосе следует, что существует единственная целая функция, совпадающая с левой и правой частями (17), стремящимися к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . В силу теоремы Лиувилля эта функция тождественно равна нулю, то есть

$$\frac{\lambda_2 \lambda_1 k_{1-}(z) k_{2-}(z)}{\lambda_1 k_{1+}(z) + \lambda_2 k_{2+}(z)} [\bar{T}_{1+}(z, 0) - \bar{T}_{2+}(z, 0)] = G_-(z), \quad \frac{\lambda_2}{k_{2-}(z)} \bar{T}_{2-}(z, 0) = G_-(z) \quad (18)$$

Для неизвестных коэффициентов  $C_1(z)$  и  $C_2(z)$  из (10) и (18) получим следующие выражения:

$$C_2(z) = \frac{k_-(z)}{\lambda_2 k_2(z)} G_-(z) - \frac{A_2}{2\lambda_2 k_2(z)} \exp(-i\hat{\lambda}_2 z - |\varepsilon_2| k_2(z))$$

$$C_1(z) = \frac{G_-(z)}{\lambda_2 k_2(z)} + \frac{\lambda_1 k_{2-}(z) + \lambda_2 k_{2+}(z)}{\lambda_2 \lambda_1 k_{1+}(z) k_{2+}(z)} G_-(z) -$$

$$- \frac{A_1}{2\lambda_1 k_1(z)} \exp(-i\hat{\lambda}_1 z - \varepsilon_1 k_1(z)) + \frac{A_2}{\lambda_2 k_2(z)} \exp(-i\hat{\lambda}_2 z - |\varepsilon_2| k_2(z))$$

Выбирая в (15) и (16) в качестве пути интегрирования вещественную ось и используя формулы Сохоцкого-Племеля, окончательно имеем

$$C_j(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-i\delta_n z - |z_n| k_n(z)]}{2[\lambda_1 k_1(z) + \lambda_2 k_2(z)]} \frac{(-1)^j (2\pi i)^{-1}}{\lambda_j k_j(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\eta)}{\eta - z} d\eta \quad (19)$$

Возвращаясь к оригиналу, получим

$$T_j(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C_j(z) \exp(-|y| k_j(z)) + \frac{A_j}{2\lambda_j k_j(z)} \exp(-i\delta_j z - |y - \varepsilon_j| k_j(z)) \right] \times \\ \times \exp(-i\sigma x) d\sigma \quad (20)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1.  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$ . В этом случае

$$C_j(z) = \frac{0,5(A_1 + A_2)}{\lambda_1 k_1(z) + \lambda_2 k_2(z)} - \frac{A_j}{\lambda_j k_j(z)} - \frac{A(2\pi i)^{-1}}{\lambda_j k_{j+}(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_j k_{j+}(\eta)}{\lambda_1 k_1(\eta) + \lambda_2 k_2(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - z}$$

и после предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  температурное поле определяется формулой ( $A = A_1 + A_2$ )

$$T_j(x, y) = A \int_0^{\infty} \frac{\exp[-|y| n_j(\eta) \sqrt{\eta}]}{\sqrt{\eta}} [E(\eta) \cos U_j(\eta) - F(\eta) \sin U_j(\eta)] d\eta - \quad (21)$$

$$- \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ n_j(\eta) E(\eta) + \frac{\rho_j F(\eta)}{2n_j(\eta)} \right] \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \left[ |b_j(z) \cos V_j(z) + a_j(z) \sin V_j(z)| \times \right.$$

$$\times \frac{\exp(-|y| m_j(z))}{z - \eta} dz + \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\rho_j E(\eta)}{2n_j(\eta)} - n_j(\eta) F(\eta) \right] \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} [a_j(\sigma) \cos V_j(\sigma) -$$

$$- b_j(\sigma) \sin V_j(\sigma)] \frac{\exp(-|y| m_j(\sigma))}{z - \eta} d\sigma - \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\rho_j E(\eta)}{2n_j(\eta)} - n_j(\eta) F(\eta) \right] \times$$

$$\times \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \left[ |b_j(z) \cos V_j(z) + a_j(z) \sin V_j(z)| \frac{\exp(-|y| m_j(z))}{z + \eta} dz + \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} [n_j(\eta) E(\eta) +$$

$$+ \frac{\rho_j F(\eta)}{2n_j(\eta)}] \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \left[ |a_j(z) \cos V_j(z) - b_j(z) \sin V_j(z)| \frac{\exp(-|y| m_j(z))}{z + \eta} dz \right.$$

где

$$n_j(z) = \sqrt{0,5(\sqrt{z^2 + \rho_j^2} + z)}, \quad (z = \sigma, \eta); \quad m_j(z) = \sqrt{0,5(\sqrt{z^2 + \sigma^2 \rho_j^2} + z^2)}$$

$$E(\eta) = \frac{\lambda_1 n_1(\eta) + \lambda_2 n_2(\eta)}{[\lambda_1 n_1(\eta) + \lambda_2 n_2(\eta)]^2 + [\lambda_1 \rho_1 / 2n_1(\eta) + \lambda_2 \rho_2 / 2n_2(\eta)]^2}$$

$$F(\eta) = \frac{\lambda_1 \rho_1 / 2n_1(\eta) + \lambda_2 \rho_2 / 2n_2(\eta)}{[\lambda_1 n_1(\eta) + \lambda_2 n_2(\eta)]^2 + [\lambda_1 \rho_1 / 2n_1(\eta) + \lambda_2 \rho_2 / 2n_2(\eta)]^2}$$

$$U_j(\eta) = \eta x + \frac{|y| \rho_j \sqrt{\eta}}{2n_j(\eta)}, \quad V_j(\eta) = \varepsilon x + \frac{|y| \rho_j \varepsilon}{2m_j(\varepsilon)}$$

$$a_j(\varepsilon) = \frac{4a_j^*(\varepsilon)}{4a_j^*(\varepsilon) + \rho_j}, \quad b_j(\varepsilon) = \frac{2\rho_j a_j(\varepsilon)}{4a_j^*(\varepsilon) + \rho_j}$$

которая совпадает с приведенным в работе [1] решением, где при оформлении статьи были опущены два последних слагаемых в правой части (21) и множитель 1/2 при коэффициентах у повторных интегралов.

II.  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$ ,  $q_2 = -q_1$ , где  $q_1$  — мощность линейного стока тепла. Тогда, как следует из (19),

$$C_j(\varepsilon) = \frac{-(-1)^j A_1}{2\lambda_j k_{j+}(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\delta_1 \eta)}{(\eta - \varepsilon) k_{-}(\eta)} d\eta \quad (22)$$

Учитывая, что при  $\delta_1 > 0$  (источник и сток тепла действуют в одной точке на линии раздела, где имеет место идеальный тепловой контакт)

$$\frac{1}{\varepsilon i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\delta_1 \eta)}{k_{-}(\eta)(\eta - \varepsilon)} d\eta = \frac{\exp(-i\delta_1 \varepsilon)}{k_{-}(\varepsilon)}$$

с помощью (22) и (9) получим  $\bar{T}_1(\bar{x}, y) = \bar{T}_2(\bar{x}, y) = 0$ , как и следовало ожидать.

Когда  $\delta_1 < 0$  (источник и сток тепла действуют впереди начала координат, где контакт между пластинками отсутствует), температурное поле определяется формулой (9), где  $C_j(\varepsilon)$  имеет вид (22).

III.  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $|\varepsilon_2| = \varepsilon_1$ ,  $a_2 = a_1$ ,  $q_2 = q_1$ . Из (19) следует, что

$$C_j(\varepsilon) = \frac{A}{2(\lambda_1 + \lambda_2) k_1(\varepsilon)} \exp(-i\delta_1 \varepsilon - \varepsilon_2 k_1(\varepsilon))$$

$$\bar{T}_j(\varepsilon, y) = \frac{A \exp(-i\delta_1 \varepsilon)}{2(\lambda_1 + \lambda_2) k_1(\varepsilon)} [\exp(-(|y| + \varepsilon_1) k_1(\varepsilon)) + \exp(-| |y| - \varepsilon_1 | k_1(\varepsilon))] \quad (23)$$

Температурное поле становится симметричным относительно линии раздела двух разнородных сред независимо от того, действуют ли источники тепла впереди или за началом координат.

$$T_j(x, y) = \frac{A}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ K_0\left(\frac{\rho_1}{2} r_{\pm}\right) + K_2\left(\frac{\rho_1}{2} r_{\pm}\right) \right] \exp(-\rho_1(x + \delta_1)^2/2) \quad (24)$$

где

$$r_{\pm} = \sqrt{(|y| + \varepsilon_1)^2 + (x + \delta_1)^2}$$

При переходе к безразмерным параметрам

$$\bar{x} = \rho_1 x, \quad \bar{y} = \rho_1 |y|, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \rho_1 \varepsilon_1, \quad \bar{\delta}_1 = \rho_1 \delta_1, \quad \bar{q}_j = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{A} T_j$$

температурное поле (24) запишется в виде

$$\theta_j(\bar{x}, \bar{y}) = \left[ K_0\left(\frac{1}{2}\bar{r}_+\right) + K_0\left(\frac{1}{2}\bar{r}_-\right) \right] \exp\left(-(\bar{x} + \bar{y}_1)/2\right) \quad (25)$$

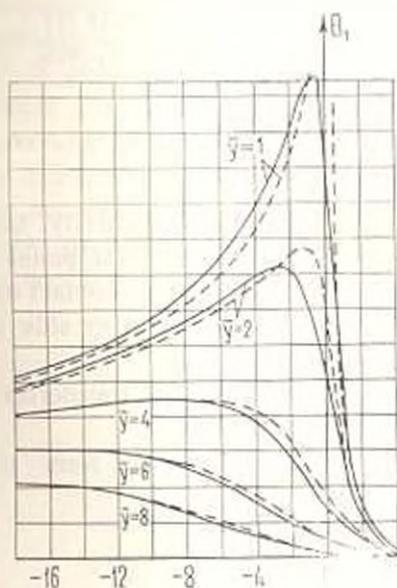
где

$$\bar{r}_\pm = \sqrt{(\bar{y} \pm \bar{y}_1)^2 + (\bar{x} + \bar{y}_1)^2}$$

$K_0(z)$ —функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода нулевого порядка.

По формуле (25) выполнены расчеты циклов безразмерной температуры, когда а) в точках  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  действуют два источника тепла с мощностями  $q_1$  и  $q_2$ , удовлетворяющими условию  $q_1^2 + q_2^2 = q^2$  (сплошные линии на фиг. 2, б) в начале подвижной системы координат действует источник тепла мощности  $q = q_1 + q_2$  (пунктирные линии на фиг. 2).

Из приведенных кривых видно влияние смещенности источников тепла на температурное поле, являющееся с значительным лишь в некоторой окрестности источников тепла.



Фиг. 2



Фиг. 3

Формула (25) дает возможность также определить влияние стоков тепла на распределение температур и на размеры зоны термического влияния при соединении пластины с интенсивным охлаждением [4].

На фиг. 3 построены изотермы температурного поля для двух случаев: а) при действии источника тепла в начале подвижной системы координат (сплошные линии), б) при совместном действии одного источника тепла в начале координат и двух стоков тепла соответственно в точках  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ , (пунктирные линии), суммарная положительная мощность которых равна мощности источника тепла, действующего в начале подвижной системы координат, в случае а). В последнем случае изотермы расширены более значительно сзади источни-

ка тепла, чем впереди. Сужение изотерм наблюдается вблизи линии, соединяющей точки приложения источника со стоками в некоторой окрестности стоков.

ՇԱՐՔՎՈՂ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂՔՅՈՒՐՆԵՐՈՎ ՏԱՔԱՅՎՈՂ ՏԱՐԱՍԵՐ ԹԻՔԵՂՆԵՐԻ  
ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԳԱՇՏԸ՝ ՆՐԱՆՑ ՄԻՋԵՎ ԵՉՎՈՂ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ  
ԴԵՊՐՈՒՄ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գծային ջերմահաղորդականության տեսության սահմաններում որոշված է շարժվող ջերմային աղբյուրների մաքայգող երկու տարասեռ կիսամեծերը թիթեղների կվապիտացիոնար ջերմային դաշտը, երբ թիթեղների բաժանման պի մի մասում ( $x < 0$ ) ջերմային կոնտակտը իզակալական է, մյուս մասում ( $x > 0$ ) այն բացակայում է:

Խնդիրը լուծված է ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ Վիներ-Հոպֆի մեթոդի ներառյալ կիրառումով:

Թվային հաշվումների արդյունքները բերված են գրաֆիկների տեսքով:

TEMPERATURE FIELD IN DISSIMILAR PLATES HEATED BY  
MOVING SOURCES AT RUPTURED THERMAL CONDITIONS  
BETWEEN THEM

A. M. SARGSIAN, A. S. KHACHIKIAN

S u m m a r y

Within the bounds of linear theory of thermal conductivity, the quasi-stationary temperature field in two semi-infinite dissimilar plates heated by two heat sources has been defined, when the thermal contact on one side of the boundary of division is ideal while on the other side a thermal contact between the plates is absent.

The problem has been determined by Fourier integral transformation with the following application of Wiener-Hopf technique.

The solution of the problem has been obtained in the form of defined integrals.

The results of numerical calculations are shown graphically.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С., Саргсян А. М., Хачикян А. С. Температурное поле в свариваемых встык разнородных пластинках при отсутствии теплового контакта впереди источника тепла.—Физика и химия обработки материалов, 1981, № 5, с. 28—33.
2. Саргсян А. М. Нагрев составной пластинки источниками тепла, движущимися параллельно прямолинейному контакту.—Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, 1980, № 3, с. 52—59.
3. Колыко Ю. М., Кушн А. Н. Температурные напряжения от объемных источников тепла. Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
4. Рабкин Д. М., Рябов В. Р., Гуревич С. М. Сварка разнородных металлов.—Киев: Техника, 1975. 208 с.
5. Паркус Г. Неуставившиеся температурные напряжения. М.: ЦИФМЛ, 1961. 251 с.
6. Нобл Г. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 279 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
28.VI.1983

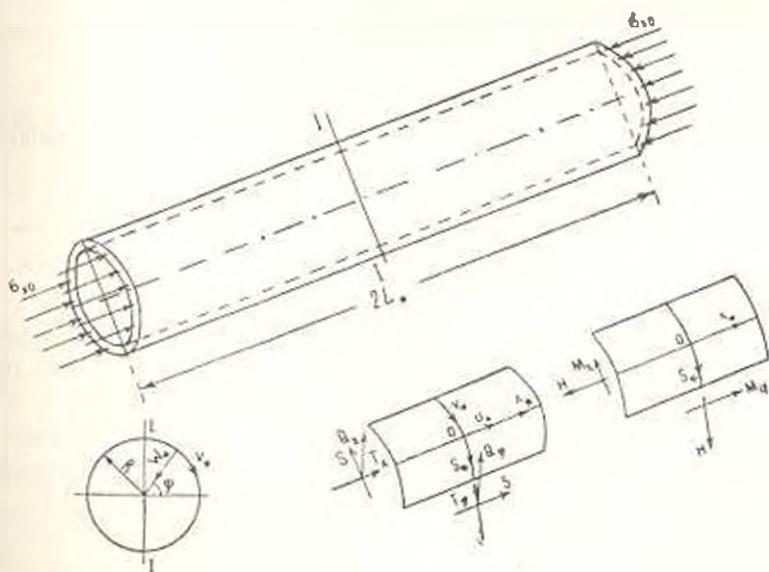
УДК 539.6

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНО СЖАТОЙ В ОСЕВОМ  
 НАПРАВЛЕНИИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
 ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

БЕЗИРГЕНЯН С. С.

В настоящее время имеется большое количество работ по проблеме устойчивости оболочек [1, 11]. В этих работах, а также в [5, 7, 9—11] отмечается существенное влияние граничных условий на величину верхней критической нагрузки. В [5, 9, 10] показано, что для тонких цилиндрических оболочек кругового очертания из однородного изотропного материала при граничных условиях  $w = M_x = \tau_x = \tau_{x\varphi} = 0$  величина  $\alpha_{кр}$  уменьшается в два раза.

В настоящей работе решается задача устойчивости равномерно сжатой в осевом направлении (усилием  $\sigma_{x0}$ ) тонкой круговой цилиндрической оболочки (фиг. 1) из однородного изотропного материала при смешанных граничных условиях. Проведенные расчеты показали, что значения относительного критического усилия ( $\rho = \sigma_{x0} / \sigma_{кр}$ ) быстро растут от 0,5 до 1 в зависимости от значений угла  $\beta$ . Значения  $\rho = 0,5$  и 1 соответствуют предельным значениям угла  $\beta = 0,2 \pi$ .



Фиг. 1

1. Уравнения устойчивости для цилиндрической оболочки в безразмерных координатах записываются в форме, приведенной в [2, 4]. Граничные условия запишутся в виде

$$\text{при } x = \pm \frac{L_0}{R} \quad w = M_1 = \tau_1 = 0 \quad \text{для } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.1)$$

$$\text{и } w = 0 \quad \text{для } 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \tau_1 = 0 \quad \text{для } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.2)$$

Начало координат помещено в центре пролета срединной поверхности (фиг. 1).

2. Решение уравнения устойчивости в общем случае можно представить в форме

$$w = \frac{w_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(k_m x) (C_m^{(n)} \cos n\varphi + C_m^{*(n)} \sin n\varphi) \quad (2.1)$$

где  $k_m$  — корни уравнения  $k_m^4 + 2\rho(k_m^2 + n^2)k_m^2 + \lambda^2(k_m^2 + n^2)^2 = 0$ , ( $k_m = k^2 + n^2$ ), которые записываются [9–10] в форме

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{r}}(a_1 + ib_1), \quad k_2 = \frac{1}{2\sqrt{r}}(a_1 - ib_1), \quad a_1 = \sqrt{r(1-\rho)} + c_1, \quad b_1 = \sqrt{r(1+\rho)} + c_2 \quad (2.2)$$

$$k_3 = -k_1, \quad k_4 = -k_2, \quad k_5 = -k_3, \quad k_6 = -k_4, \quad k_7 = \bar{k}_2, \quad k_8 = -\bar{k}_1 \quad (2.3)$$

$$c_1 = \sqrt{r-\rho-4n^2}, \quad c_2 = \sqrt{r+\rho-4n^2}, \quad r = \sqrt{16n^4 - 8\rho n^2 + \lambda^2}, \quad \lambda = 2E_1 \nu_1 \rho \quad (2.4)$$

$C_m^{(n)}, C_m^{*(n)}$  — постоянные интегрирования, подлежащие определению.

3. Для упрощения дальнейших вычислений отдельно рассмотрим случаи симметричного (случай а) и антисимметричного (случай б) выпучивания цилиндрической оболочки относительно сечения  $x=0$ .

*Случай а).* В этом случае из выражений (2.1)–(2.4) и из условия четности  $w$  по  $x$ , после перехода к фундаментальным решениям, следует:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (B_1^{(n)} \gamma_1 + B_2^{(n)} \gamma_2 + B_3^{(n)} \gamma_3 + B_4^{(n)} \gamma_4) \cos n\varphi + (B_5^{(n)} \gamma_5 + \dots + B_8^{(n)} \gamma_8) \sin n\varphi \quad (3.1)$$

где  $\gamma_j = \text{ch } a_j x / 2\sqrt{2} \cos b_j x / 2\sqrt{2}$ ,  $\gamma_j = \text{sh } a_j x / 2\sqrt{2} \sin b_j x / 2\sqrt{2}$ ,  $j = 1, 2$ . Постоянные  $B_1^{(n)}, \dots, B_8^{(n)}$  подлежат определению из граничных условий.

Для нахождения выражений осевого напряжения  $\sigma_x$ , тангенциального перемещения  $v$  и напряжения  $\tau_{xz}$  используем соотношения, полученные в [9, 10]. Подставляя  $w$  из (3.1) в формулу  $\epsilon^2 \sigma_x = E \Omega \sigma^2 w / \partial \varphi^2$ , где  $\Omega = 2\nu_1 (\partial / \partial x)^2 \zeta^4$ , проводя соответствующие вычисления и имея в виду, что  $(\partial / \partial x)^{-2} \zeta^4 = \partial^2 \sigma x^2 + 2\partial^2 \sigma \varphi^2 + (\partial^2 \partial x)^{-2} x \partial^2 \sigma \varphi^2$ , получим выражение бесконечной суммы. Легко установить, что

\* Так как слагаемое  $w_0(x)/2$  не влияет на значение критического усилия, то в дальнейшем ради краткости запись его не приводим.

$$\frac{d^2 z_j}{dx^2} = \frac{1}{8} [(a_j^2 - b_j^2) z_j + 2a_j b_j], \quad \int dx \int z_j dx = \frac{8}{(a_j^2 + b_j^2)^2} [(a_j^2 - b_j^2) z_j + 2a_j b_j \beta_j]$$

(формулы для  $d^2 \beta_j / dx^2$  и  $\int dx \int \beta_j dx$  записываются аналогичным образом). Подставив полученные выражения  $d^2 z_j / dx^2$ ,  $\int dx \int z_j dx$ ,  $d^2 \beta_j / dx^2$  и  $\int dx \int \beta_j dx$  в формулу для осевого напряжения и проведя соответствующие вычисления, можно установить, что

$$\begin{aligned} \lambda \sigma_x = -E \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(\rho a_1 - \sqrt{1-\rho^2} \beta_1) B_1^{(n)} + (\sqrt{1-\rho^2} a_1 + \rho \beta_1) B_1^{(n)} + \right. \\ \left. + (\rho a_2 - \sqrt{1-\rho^2} \beta_2) B_2^{(n)} + (\sqrt{1-\rho^2} a_2 + \rho \beta_2) B_2^{(n)} \cos n\varphi \right] + \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(\dots) B_1^{(n)} + \dots + (\dots) B_1^{(n)}] \sin n\varphi \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

где в скобках при  $B_1^{(n)}$  те же выражения, что и в скобках при  $B_2^{(n)}$ .

С целью получения расчетных формул для тангенциальных перемещений  $v$  и напряжений  $\tau_{x\varphi}$  подставим снова выражение прогиба в  $r^2 v = -(\Psi + 2 + \nu) \Omega \partial^2 w / \partial \varphi^2$  и в  $r^2 \tau_{x\varphi} = -E \Omega \partial^2 w / dx d\varphi$ , где  $\Psi = (\partial^2 / \partial x^2) - (\partial^2 / \partial \varphi^2)$ . После проведения соответствующих вычислений, аналогичных предыдущим, можно установить, что

$$\begin{aligned} \lambda v = \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} [(\Psi_1 z_1 - \Psi_2 \beta_1) B_1^{(n)} + (\Psi_2 z_1 + \Psi_1 \beta_1) B_2^{(n)}] + \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} [\Psi_3 z_2 + \right. \\ \left. + \Psi_4 \beta_2) B_3^{(n)} + (\Psi_4 z_2 - \Psi_3 \beta_2) B_3^{(n)}] + (2 + \nu) [(\rho a_1 - \sqrt{1-\rho^2} \beta_1) B_1^{(n)} + (\sqrt{1-\rho^2} a_1 + \right. \\ \left. + \rho \beta_1) B_1^{(n)} + (\rho a_2 - \sqrt{1-\rho^2} \beta_2) B_2^{(n)} + (\sqrt{1-\rho^2} a_2 + \rho \beta_2) B_2^{(n)}] \right\} \sin n\varphi - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} [\dots] + \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} [\dots] + (2 + \nu) [\dots] \right\} \cos n\varphi \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \tau_{x\varphi} = \frac{E}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \{ [(\rho a_1 - \sqrt{1-\rho^2} b_1) \xi_1 - (\rho b_1 + \sqrt{1-\rho^2} a_1) \eta_1] B_1^{(n)} + [(\rho b_1 + \sqrt{1-\rho^2} a_1) \xi_1 + \\ + (\rho a_1 - \sqrt{1-\rho^2} b_1) \eta_1] B_2^{(n)} + [\dots] B_2^{(n)} + [\dots] B_1^{(n)} \} \sin n\varphi - \\ - \frac{E}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \{ \dots \} \cos n\varphi \quad (3.4) \end{aligned}$$

где  $\Psi_{1,2} = \rho J_1 - \sqrt{1-\rho^2} J_2$ ,  $\Psi_{2,1} = \rho J_2 - \sqrt{1-\rho^2} J_1$ ,  $J_1 = a_1 a_2 + b_1 b_2$ ,  $J_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ ,  $\xi_j = \text{sh } a_j x / 2\sqrt{2} \cosh b_j x / 2\sqrt{2}$ ,  $\eta_j = \text{ch } a_j x / 2\sqrt{2} \sin b_j x / 2\sqrt{2}$ ,  $j = 1, 2$ .

Выражения в скобках при  $B_1^{(n)}$  и  $B_2^{(n)}$  получаются из выражений в скобках при  $B_1^{(n)}$  и  $B_2^{(n)}$  заменой индекса 1 на 2, а выражения в фигурных скобках — соответственно из общих членов первых бесконечных сумм (3.3) и (3.4) заменой  $B_1^{(n)}$  на  $B_2^{(n)}$ .

Случай б). В этом случае, как и в случае а), легко установить, что

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (D_1^{(n)}z_1 + D_2^{(n)}\gamma_1 + D_3^{(n)}z_2 + D_4^{(n)}\gamma_2) \cos n\varphi + (D_1^{*(n)}z_1 + \dots + D_4^{*(n)}\gamma_2) \sin n\varphi \quad (3.5)$$

где  $D_k^{(n)}$  и  $D_k^{*(n)}$  — постоянные, которые подлежат определению на граничных условиях (1.1), (1.2).

Подставляя выражения прогиба (3.5) в формулы для  $w$ ,  $v$ ,  $\tau_{x\varphi}$  и повторяя все вычисления, которые были проделаны в случае а), получим расчетные формулы для нормальных и касательных напряжений и касательного перемещения. Нет необходимости приводить эти громоздкие формулы, так как они легко получаются соответственно из (3.2) — (3.4), если в (3.2), (3.3) соответственно заменить  $\alpha_j$  на  $z_j$ ;  $\beta_j$  — на  $\gamma_j$ , а в (3.4) — наоборот ( $j=1, 2$ ) и во всех формулах  $B_k^{(n)}$  и  $B_k^{*(n)}$  заменить на  $D_k^{(n)}$  и  $D_k^{*(n)}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ).

4. Как в случае а), так и в случае б) можем ограничиться рассмотрением только одной половины цилиндрической оболочки. Рассмотрим ту половину оболочки, для которой  $0 \leq x \leq L_x$  (фиг. 1). В обоих случаях, подставляя выражения  $w$ ,  $v$  и  $\tau_{x\varphi}$  в несмешанные граничные условия (1.4а), получим для каждой четверки постоянных  $B_1^{(n)}$ ,  $B_2^{(n)}$ ,  $D_1^{(n)}$  и  $D_2^{(n)}$  систему трех алгебраических уравнений. Разрешая каждую систему относительно первых трех постоянных, найдем

$$\begin{aligned} B_1^{(n)} &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \frac{J_3 \beta_1 + 2J_4 \alpha_1}{J_3 \alpha_1 - 2J_4 \beta_1} B_2^{(n)}, & B_2^{(n)} &= - \frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \frac{J_4 \alpha_2 - 2J_3 \beta_2}{J_3 \alpha_2 - 2J_4 \beta_2} B_1^{(n)} \\ B_3^{(n)} &= \frac{J_2 \beta_1 - 2J_4 \alpha_2}{J_3 \alpha_2 - 2J_4 \beta_2} B_1^{(n)}, & D_1^{(n)} &= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \frac{J_3 \alpha_1 + 2J_4 \beta_1}{J_3 \alpha_2 - 2J_4 \beta_2} D_2^{(n)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $J_3 = a_1^2 - b_1^2 - a_2^2 + b_2^2$ ,  $J_4 = a_1 b_1 - a_2 b_2$ .

Формулы для  $D_1^{(n)}$  и  $D_2^{(n)}$  очевидны. Выражения постоянных  $B_1^{(n)}$  и  $D_2^{(n)}$  в точности совпадают с  $B_k^{(n)}$  и  $D_k^{(n)}$ .

Удовлетворим смешанным граничным условиям (1.2). После проведения необходимых вычислений можно установить, что

$$\tau_{x\varphi}|_{\varphi=0, \pi} = \sqrt{2} E \sum_{n=1}^{\infty} n \Phi (B_1^{(n)} \sin n\varphi - B_2^{(n)} \cos n\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \left( L = \frac{L_x}{R} \right) \quad (4.2)$$

где  $\Phi = 8\sqrt{i} \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{J_3 \alpha_2 - 2J_4 \beta_2} [(q_1 - q_2)\gamma_1 - (p_1 + p_2)\gamma_1 - (q_1 + q_2)\gamma_2 + (p_1 - p_2)\gamma_2]$

$$q_1 = \sqrt{i} (\rho c_1 - \sqrt{1 - \rho^2} c_1), \quad q_2 = (1 - 2\rho) \sqrt{1 - \rho^2} r_1, \quad p_1 = \sqrt{i} (\rho c_1 - \sqrt{1 - \rho^2} c_2)$$

$$p_2 = (1 - 2\rho) \sqrt{1 - \rho^2} r, \quad \gamma_i = \left[ \operatorname{ch} \frac{a_i L}{\sqrt{2}} + \cos \frac{b_i L}{\sqrt{2}} \right]^{-1} \sin \frac{b_i L}{\sqrt{2}}$$

$$z_i = \gamma_i \operatorname{sh} \frac{a_i L}{\sqrt{2}} \left( \sin \frac{b_i L}{\sqrt{2}} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2$$

Подставляя выражения  $V_2$  и постоянных в формулу (3.3) и удовлетворяя первому из смешанных граничных условий (1.2), получаем

$$v|_{x=L} = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r\sqrt{1-\rho^2}}{n} \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{J_2^2 \xi_2 - 2J_2 \eta_2} (B_1^{(n)} \sin n\varphi - B_1^{*(n)} \cos n\varphi) \quad (4.3)$$

В случае б), повторяя те же процедуры, что и в случае а), приходим к аналогичным (4.2), (4.3) парным рядам-уравнениям, в которых в выражении  $\Phi$   $\xi_2, \eta_2$  заменены на  $\xi_2, \eta_2$ , знаки „-“ на „+“, и, наоборот, а  $B_1^{(n)}$  и  $B_1^{*(n)}$  — на  $D_1^{(n)}$  и  $D_1^{*(n)}$ .

5. Вследствие неопределенности в литературе парных рядов-уравнений типа (4.2), (4.3) сделаем дополнительное предположение, что оболочка по тангенциальному направлению выпучивается симметрично или антисимметрично.

Применяя методику, предложенную в [1], парные ряды-уравнения можно свести к бесконечным системам линейных однородных уравнений вида

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m \quad (5.1)$$

где в случае симметричного выпучивания оболочки относительно сечений  $x=0, \varphi=0$  (случай а-а)

$$X_n = n(\xi_2^2 + \eta_2^2)(J_1 \xi_2 - 2J_2 \eta_2)^{-1} \Gamma_1 R_1^{(n)}, \quad \Gamma_1 = (q_1 - q_2)\gamma_1 - (p_1 + p_2)\gamma_1 - (q_1 - q_2)\gamma_2 + \\ + (p_1 - p_2)\gamma_2, \quad a_{nm} = \frac{\pi N_m}{2} I_{nm}, \quad I_{nm} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_m y_n \lg \frac{y}{2} d\eta = \frac{1}{n^2 - m^2} (n z_n y_m - \\ - m z_m y_n) \quad \text{при } n \neq m$$

$$n I_n = 1 - P_{n-1} P_n + \frac{1}{2} (P_{n-1}^2 - P_n^2) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} P_k (\cos \beta P_k - P_{k+1}), \quad y_k = P_{k+1} + P_k$$

$$P_k - \text{полиномы Лежандра, } N_m = 1 - (r\sqrt{1-\rho^2}/m)\Gamma^{-1}.$$

В случае симметричного и антисимметричного выпучивания соответственно относительно сечений  $x=0, z=0$  (случай а-б) в  $X_n$

$$B_1^{(n)} \text{ заменяется на } B_1^{*(n)}, \text{ а в } a_{nm} I_{nm} \text{ — на } I_{nm}^*, \text{ где } I_{nm}^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_n z_m \lg \frac{y}{2} d\eta,$$

в случае (б-а)

$$X_n = n(\xi_2^2 + \eta_2^2)(J_1 \xi_2 - 2J_2 \eta_2)^{-1} \Gamma_2 D_1^{(n)}, \quad a_{nm} = \frac{\pi N_m}{2} I_{nm}, \quad \Gamma_2 = (p_1 + p_2)\omega_1 +$$

$$+ (q_1 - q_2)\gamma_1 - (p_1 - p_2)\gamma_2 - (q_1 + q_2)\gamma_2, \quad N_m = 1 - (r\sqrt{1-\rho^2}/m)\Gamma_2^{-1}$$

и в случае (б-б) в последнем выражении  $X_n$   $D_1^{(n)}$  заменяется на  $D_1^{*(n)}$ , а в  $a_{nm} I_{nm}$  — на  $I_{nm}^*$ .

Таким образом, задача нахождения критических значений осевых сжимающих усилий в рассматриваемом случае при сделанных до-

пущениях свелась к нахождению минимальных собственных чисел определителя

$$\Delta(\rho, \beta, l_g/R, h/R) = \det \|e_{nm}\| \quad (5.2)$$

где  $e_{nm} = a_{nm}$  при  $n \neq m$  и  $e_{nn} = a_{nn} - 1$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$

Введем обозначения:  $\Lambda = L_g \sqrt{1-\rho} / R$ ,  $\tau = 2m / \sqrt{1-\rho}$ , которые весьма удобны для численного расчета. (Отметим, что для значений  $\nu = 0,25 \div 0,33$   $\lambda = 3,312 R/h$ ,  $\tau = 1,1m \sqrt{h/R}$ ,  $\Lambda = 1,82 L_g \sqrt{R/h}$ ). Тогда с учетом того, что  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  с возрастанием аргумента быстро растут, при  $|\Lambda \bar{a}_j / \sqrt{2}| \geq 6$  (случай относительно длинных оболочек) можно положить:  $\gamma_j \approx 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\bar{c}_1 \approx 1$ , ( $\alpha_1 > 0$ ),  $\bar{c}_2 \approx -1$ , ( $\alpha_2 < 0$ ) и выражение  $N_m$  упрощается

$$N_m \approx 1 + \frac{\sqrt{2} r_1 (r_1 - \rho + \tau^2)^{1/2}}{\tau^2 - r_1 - \tau^2}$$

где  $r_1 = (\tau^4 - 2\rho\tau^2 + 1)^{1/2}$ ,  $\bar{a}_j = (1-\rho)^{1/2} \pm (r_1 - \rho + \tau^2)^{1/2}$ ,  $j = 1, 2$

Легко показать, что  $N_m$  равномерно ограничено сверху и для больших  $m$  имеет порядок  $O(m^{-2})$ , то есть  $N_m \approx M/m^2$ , где  $M = 3\rho R/4h$ . Из полученной оценки порядка  $N_m$  следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m |N_m| |V_{nm}| < \frac{M}{2} \left( \frac{1}{n} I_{nn} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} |V_{nm}| \right) < \frac{M}{n^2} + \frac{2M}{Vn} \times \\ &\times \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{Vm} \frac{1}{n-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{Vm} \frac{1}{m-n} \right) < 1 \text{ при } n > n_0, \text{ где} \\ &n_0 = F(\rho, R/2h)^{1/2} \end{aligned}$$

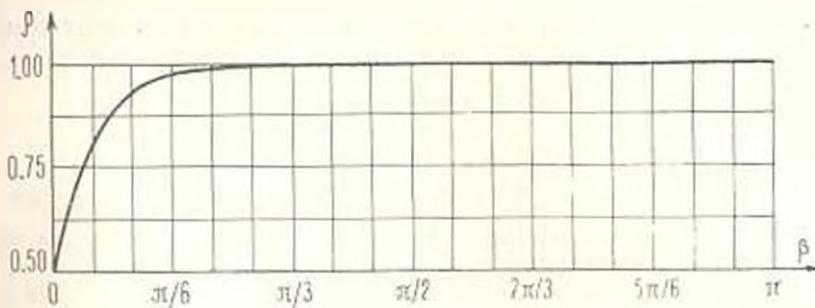
6. Для определения собственных чисел определителя (5.2) были проведены расчеты как для относительно длинных оболочек (упрощенный вариант), так и для оболочек средней длины ( $l_g/R = 0,5; 1; 2; 5$ ). В обоих случаях рассматривался диапазон  $1/60 \div 1/400$  изменений относительной толщины  $h/R$ . Проведенный анализ расчетов показал, что при подсчете собственных чисел задачи вполне можно ограничиться определителями двадцатого порядка.

Следует отметить, что в случае  $\beta = 1$  определитель (5.2) равен единице и бесконечная система (5.1) вырождается. Она имеет только тривиальное решение  $X_n = 0$  и для определения  $\rho$  при длинных и тонких оболочках получается такое же уравнение, как и в [9, 10], то есть

$$2\rho - r_1 - \tau^2 = 0 \text{ или } \rho = \frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\tau^4}{4}}$$

## Выводы

1. При смешанных граничных условиях (1.1) и (1.2) достаточно цилиндрическую оболочку по тангенциальному направлению закрепить примерно на  $30^\circ$  и ее потеря устойчивости произойдет при тех же значениях сжимающего усилия, что и в классическом случае (фиг. 2).



Փոք. 2

2. Критическая величина относительного сжимающего усилия очень слабо зависит от относительной толщины  $h/R$  и относительной длины  $L_0/R$  цилиндрической оболочки, что согласуется с результатами работы [5].

**ԱՌԱՆՅՔԻ ՈՒՂՈՒԹՅԱՄԲ ՀԱՎԱՍՏԱՐԱԶԱՓ ՍԵՂՄՎԱՅ ԿԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԽԱՌԸ ԵՋՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԳԵՊՔՈՒՄ**

Գ. Ս. ԵՍԻՐՔԵՆԻԱՆ

Ս. Մ Փ Ո Փ Ո Ա Մ

Դիտարկված է համասեռ, իզոտրոպ շրջանաձև դլանային թաղանթի առաձգական կայունության խնդիրը, երբ ճակատները շրջանագծային ուղղությամբ մասնակիորեն ամրակցված են և մասնակիորեն ազատ են:

Ցույց է արված, որ խնդրի լուծումը բերվում է զույգ շարք հաճախորումների լուծմանը, որոնք ձևափոխող օպերատորների մեթոդով բերվում են գծային համասեռ հավաստրումների քվադրատիկայար անփերջ համակարգի:

Հաշվարկները ցույց են տալիս, որ բավական է պլանային թաղանթը շրջանագծային ուղղությամբ ամրակցել  $30^\circ$ -ով, և նրա կայունության կորուստը տեղի կունենա դասական դեպքին համապատասխանող սեղմող ճիգերի դեպքում:

**ON STABILITY OF UNIFORMLY COMPRESSED IN AXIAL DIRECTION CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL FOR MIXED BOUNDARY CONDITIONS**

G. S. BESIRGENIAN

S u m m a r y

It is assumed that the initial state is without moment and the initial imperfections are absent.

It has been shown that the finding of constants, in solution  $w$  after satisfaction of mixed boundary conditions, is reduced to the solution of

double series equations and by method of transformed operators is turned into a quasi-regular infinite system of linear homogenous equation. The calculation has shown that values of relative critical stress ( $\rho = \sigma_{cr} / \sigma_{cr0}$ ) increase rapidly from 0,5 to 1 depending on the mixed ( $\beta$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баблюя А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.—ПММ, 1967, 31, 4, с. 678—689.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 870 с.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. М.: Наука, 1971. 1106 с.
4. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
5. Кожевников В. И. О величине критической силы при осевом сжатии цилиндрической оболочки.—Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, 3, с. 137—141.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
7. Мовсисян Л. А. Об устойчивости цилиндрических оболочек со смешанными граничными условиями.—ПМ, 1978, т. 14, № 10, с. 52—56.
8. Измбар. Корни характеристического полинома для уравнения Доннелли в случае предварительного равномерного осевого напряжения оболочки.—Тр. Амер. о-ва инж.-мех. ПМ, № 2, 1962, с. 235—236.
9. Хофф Н. Новые критические напряжения для круговой цилиндрической оболочки конечной длины, находящейся под действием осевого сжатия.—Тр. Амер. о-ва инж.-мех. ПМ, 1965, № 3, с. 60—69.
10. Хофф Н., Рефилд Л. Потеря устойчивости сжатых в осевом направлении круговых цилиндрических оболочек при напряжениях, меньших классического критического значения.—Тр. Амер. о-ва инж.-мех. ПМ, 1965, № 3, с. 70—75.
11. Hoff N. J. The perplexing behavior of thin cylindrical shells in axial compression.—Eighth Israel annual conference on aviation and astronautics, Technion-Israel Institute of technology, 1966, p. 2—28.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
26.1.1986

УДК 539.3.01

## О ПОГРАНЧНОМ СЛОЕ СЛОИСТЫХ БАЛОК

ХАЧАТՐՅԱՆ Ա. Մ.

Напряженно-деформированное состояние слоистых тонких тел, как и в случае однородных, состоит из внутреннего и типа пограничного слоя состояний. Решение типа пограничного слоя экспоненциально затухает при удалении от края, а показатель экспоненты определяется из характеристического трансцендентного уравнения.

В работе [1] асимптотическим методом построено решение внутренней задачи слоистых балок. Там же приведен обзор работ по методам расчета многослойных конструкций.

В статье [2] асимптотическим методом построен пограничный слой вблизи свободного края слоистой пластинки, составленной из чередующихся несущих и слабых слоев. Выявлена зависимость скорости затухания напряженного состояния пограничного слоя от относительной жесткости слоев. В работе [3] исследовано поведение первых корней характеристических уравнений потенциального и вихревого решений задач изгиба и растяжения трехслойной плиты.

В настоящей работе строится решение типа пограничного слоя для слоистых анизотропных балок. Исследуется поведение первого корня характеристического уравнения в зависимости от геометрических и физических параметров. С этим корнем, в основном, связана скорость затухания пограничного слоя.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя в плоской задаче для анизотропной слоистой полосы — прямоугольника длиной  $a$ , общей толщиной  $2h$  ( $2h \ll a$ ). Слои имеют различные толщины  $h_i$  и коэффициенты упругости  $a_{ij}$ . Полоса состоит из  $N-M$  слоев,  $N$  и  $M$  — число слоев, расположенных над координатной линией и под этой линией, соответственно. Предполагается, что на продольных сторонах балки отсутствуют напряжения, а на торцах могут быть заданы различные условия.

Для построения пограничного слоя вблизи торца  $x=0$  в уравнениях теории упругости сделаем замену переменных

$$t = x/h, \quad \zeta = y/h \quad (1.1)$$

Решение вновь полученных уравнений ищется в виде функций типа пограничного слоя [4]

$$R_p^{(k)} = \sum_{s=1}^S e^{\lambda_s \zeta} R_p^{(k,s)}(\zeta) \exp(-i t) \quad (1.2)$$

где  $R_p^{(k)}$ —любое из напряжений и перемещений,  $z = h/a$ —малый параметр,  $\chi_p^{(s)}$ —показатель интенсивности,  $\lambda = \text{const}$ —характеризует изменчивость напряженно-деформированного состояния,  $k$ —номер слоя. Непротиворечивые значения  $\chi_p^{(k)}$  задаются следующим образом [1]:

$$\chi_{\sigma_i}^{(k)} = \chi, \quad \chi_{u_i}^{(k)} = \chi - 1 \quad (1.3)$$

здесь  $\sigma_i$ —любое из напряжений,  $u_i$ —любое из безразмерных перемещений. Подставив (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3) получим систему, интегрируя которую по  $z$  будем иметь

$$\begin{aligned} z_{xx}^{(k)} &= \lambda_n^{-2} F_{xx}'' A_n^{(k)}, \quad z_{yy}^{(k)} = \lambda_n^{-2} F_{yy}'' A_n^{(k)}, \quad z_{zz}^{(k)} = F_{zz}'' A_n^{(k)} \\ u_p^{(k)} &= -(a_{11}^{(k)} \lambda_n^{-2} F_{xx}'' + a_{12}^{(k)} \lambda_n^{-2} F_{yy}'' + a_{13}^{(k)} \lambda_n^{-2} F_{zz}'') A_n^{(k)} \\ \varphi^{(k)} &= -[a_{11}^{(k)} \lambda_n^{-4} F_{xx}'' + 2a_{12}^{(k)} \lambda_n^{-3} F_{yy}'' + (a_{12}^{(k)} + a_{26}^{(k)}) \lambda_n^{-2} F_{zz}' + a_{26}^{(k)} \lambda_n^{-1} F_{kn}] A_n^{(k)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функции  $F_{kn}(z)$  удовлетворяют уравнению

$$a_{11}^{(k)} F_{kn}^{(4)} + 2a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} F_{kn}''' + \lambda_n^2 (a_{11}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)}) F_{kn}'' + 2a_{13}^{(k)} a_{26}^{(k)} F_{kn}' + a_{26}^{(k)} F_{kn} = 0 \quad (1.5)$$

и условиям

$$F_{Nn}(\zeta, N) = F_{Nn}'(\zeta, N) = 0; \quad F_{-Mn}(\zeta, -M) = F_{-Mn}'(\zeta, -M) = 0 \quad (1.6)$$

являющимся следствием условий  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$  при  $\zeta = \zeta_N, \zeta = -M$ . При этом удовлетворяются условия упругого контакта при  $\zeta = \zeta_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1, -1, -2, \dots, -M+1$ ). Здесь принято

$$\zeta_{\pm k} = \pm \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_{\pm i}$$

В зависимости от вида корней соответствующего (1.5) характеристического уравнения [5]

$$a) \alpha_k + i\beta_k, \quad \alpha_k - i\beta_k, \quad б) \alpha_{1k} - i\beta_{1k}, \quad \alpha_{2k} + i\beta_{2k} \quad (1.7)$$

возможны различные решения задачи (1.5)—(1.6).

Исследование напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя слоистых балок и его затухания в общем случае сложно и связано с большими трудоемкими выкладками. Здесь мы ограничимся рассмотрением двухслойной балки из изотропных слоев, что даст качественную картину исследуемой проблемы. Аналогичное исследование можно провести и для других случаев.

2. Пусть имеем двухслойную балку из изотропных слоев, верхний слой которой характеризуется упругими коэффициентами  $E_1, \nu_1$ , а нижний слой—коэффициентами  $E_2, \nu_2$  и соответственно, имеют толщины, равные  $h_1$  и  $h_2$ . Ось  $Ox$  направим по линии раздела этих слоев. Характеристическое уравнение (1.5) имеет двукратные мнимые корни [5]. Удовлетворив граничным условиям (1.6), а также условиям контакта, получим

$$F_{1k} = \frac{1}{D_{11}} (D_{11} \cos \lambda_{1k} z + D_{12} \cos \lambda_{2k} z + D_{13} \sin \lambda_{1k} z + D_{14} \sin \lambda_{2k} z)$$

$$F_{2n} = \frac{1}{D_{11}} \sum_{i=1}^4 (D_{1i} \Delta_{1i} \cos i \lambda_n \bar{\zeta}_1 + D_{2i} \Delta_{2i} \cos i \lambda_n \bar{\zeta}_2 + D_{3i} \Delta_{3i} \sin i \lambda_n \bar{\zeta}_1 + D_{4i} \Delta_{4i} \sin i \lambda_n \bar{\zeta}_2) \quad (2.1)$$

где  $D_{ij}$  — алгебраические дополнения первой строки матрицы  $D = [d_{ij}]$  четвертого порядка с элементами

$$\begin{aligned} d_{11} &= \cos^2 \lambda_n \bar{\zeta}_1, & d_{12} &= \bar{\zeta}_1 \cos^2 \lambda_n \bar{\zeta}_1, & d_{13} &= \sin^2 \lambda_n \bar{\zeta}_1, & d_{14} &= -\bar{\zeta}_1 \sin^2 \lambda_n \bar{\zeta}_1 \\ d_{21} &= -\lambda_n \sin \lambda_n \bar{\zeta}_1, & d_{22} &= \cos^2 \lambda_n \bar{\zeta}_1 - i \lambda_n \bar{\zeta}_1 \sin \lambda_n \bar{\zeta}_1 \\ d_{31} &= \lambda_n \cos \lambda_n \bar{\zeta}_1, & d_{34} &= \sin \lambda_n \bar{\zeta}_1 + i \lambda_n \bar{\zeta}_1 \cos \lambda_n \bar{\zeta}_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} d_{3i} &= \Delta_{1i} \cos \lambda_n \bar{\zeta}_2 + \Delta_{12} \bar{\zeta}_2 \cos^2 \lambda_n \bar{\zeta}_2 + \Delta_{13} \sin \lambda_n \bar{\zeta}_2 + \Delta_{14} \bar{\zeta}_2 \sin \lambda_n \bar{\zeta}_2 \\ d_{4i} &= -\Delta_{1i} \lambda_n \sin \lambda_n \bar{\zeta}_2 + \Delta_{12} (\cos^2 \lambda_n \bar{\zeta}_2 - \lambda_n \bar{\zeta}_2 \sin \lambda_n \bar{\zeta}_2) + \Delta_{13} \lambda_n \cos \lambda_n \bar{\zeta}_2 + \\ &+ \Delta_{14} (\sin \lambda_n \bar{\zeta}_2 + i \lambda_n \bar{\zeta}_2 \cos \lambda_n \bar{\zeta}_2), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1, & \Delta_{22} &= 0, \bar{\zeta}_1 \alpha_1, & \Delta_{33} &= \Delta_{44} = 0, \bar{\zeta}_1 \alpha_2 \\ \Delta_{23} &= 0, \bar{\zeta}_1 \alpha_1, & \Delta_{32} &= 0, \bar{\zeta}_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3, & \Delta_{44} &= E_0 = E_2/E_1 \end{aligned}$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{14} = \Delta_{21} = \Delta_{24} = \Delta_{31} = \Delta_{34} = \Delta_{41} = \Delta_{42} = \Delta_{43} = 0$$

$$\alpha_1 = 1 + \nu_2 + E_0(1 - \nu_1), \quad \alpha_2 = 1 + \nu_2 - E_0(1 + \nu_1)$$

$$\alpha_3 = 1 - \nu_2 - E_0(1 - \nu_1), \quad \alpha_4 = 1 - \nu_2 + E_0(1 + \nu_1)$$

Собственные числа  $\lambda_n$  определяются из трансцендентного уравнения  $D(z) = \det \|d_{ij}\| = 0$ , которое имеет вид

$$\begin{aligned} D(z) &= a_1 \sin z \sin mz + a_2 \cos z \cos mz + (a_3 + a_4 z^2) \cos z + \\ &+ (a_5 + a_6 z^2) \cos mz + a_7 z^4 + a_8 z^2 + a_9 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} z &= 2i \lambda_n \bar{\zeta}_1, & m &= -\bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_1^{-1} = h_2/h_1, & \bar{\zeta}_1 &= h_1/h, & \bar{\zeta}_2 &= -h_2/h, & a_1 &= 32 E_0 \bar{\zeta}_1^4 \\ a_2 &= -4 \bar{\zeta}_1^4 (\alpha_0 \alpha_3 + 2\alpha_1 + 2E_0 \alpha_4), & a_3 &= -4 \bar{\zeta}_1^4 (\alpha_2 \alpha_5 + 2\alpha_1 - 2E_0 \alpha_4) + 16 E_0 \alpha_2 \bar{\zeta}_1^2 \bar{\zeta}_2^2 \\ a_4 &= -2\alpha_2 (\alpha_6 + 2) \bar{\zeta}_1^2, & a_5 &= -4 \bar{\zeta}_1^4 (\alpha_0 \alpha_3 - 2\alpha_1 + 2E_0 \alpha_4) - 16 \alpha_3 \bar{\zeta}_1^6, & a_6 &= 2\alpha_2 (\alpha_1 + 2E_0) \bar{\zeta}_1^2, \\ a_7 &= \alpha_2^2, & a_8 &= 4 \bar{\zeta}_1^2 (\alpha_2^2 - 2E_0 \alpha_1 \bar{\zeta}_2^2 - 2\alpha_4 \bar{\zeta}_1^2 + 8E_0 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2) \\ a_9 &= 4 \bar{\zeta}_1^4 (-\alpha_2 \alpha_3 + 2\alpha_1 + 2E_0 \alpha_4) + 16 \alpha_2 (E_0 \bar{\zeta}_2^2 - \bar{\zeta}_1^2) \bar{\zeta}_1^4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если слои имеют одинаковые свойства, то есть  $E_0 = 1$ ,  $\bar{\zeta}_2 = -\bar{\zeta}_1 = 1$ , то  $\alpha_1 = \alpha_4 = 2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  и уравнение (2.3) превращается в известные уравнения

$$\sin 2i - 2i = 0 \quad (2.5)$$

$$\sin 2i - 2i = 0 \quad (2.6)$$

которые соответствуют симметричному и кососимметричному задачам однослойных изотропных полос и пластин [4].

К уравнениям (2.3), (2.5), (2.6) можно применять теорию определения асимптотических корней уравнений типа квазиполиномов [6]. Расположение этих корней практически определяется только несколькими членами характеристического уравнения. Асимптотические корни определяются по формуле [6]

$$2i_j^{(j)} = 0.5(1+m) \operatorname{ctg} \varphi_j^{(j)} \{ (2n-0.5)\pi + \arg Z_j \} + i \ln |2\pi n Z_j^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_j^{(j)}| \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2.7)$$

Формула (2.7) достаточно точно определяет значения комплексных корней для больших  $n$ , а для меньших  $n$ , то есть для первых корней, она дает приближенные значения, которые затем уточняются известными численными методами (например, методом Ньютона или методом наискорейшего спуска).

Уравнение (2.3) в первом квадранте имеет четыре ветви асимптотических корней, соответствующие четырем значениям  $Z_j$  и  $\operatorname{ctg} \varphi_j$ . При этом асимптотика зависит от  $m$ . Характер проникновения решения типа пограничного слоя во внутрь области определяется, в основном, наименьшим по модулю корнем трансцендентного уравнения из условия  $1 + \exp(-\operatorname{Re} i_j l) \approx 1$ , где  $l$  — ширина зоны затухания. При исследовании первого корня надо следить за первым корнем каждой ветви, поскольку при разных параметрах наименьший корень принадлежит различным ветвям. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательные значения  $Z_j$  и  $\operatorname{ctg} \varphi_j$ .

$$a) \quad m < 1, \quad \operatorname{ctg} \varphi_{1,2} = 2, \quad Z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a_2}{2a_1}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi_{3,4} = \frac{2}{m}, \quad Z_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{2a_2}} \quad (2.8)$$

Из (2.4) и (2.8) видно, что корни  $Z_{1,2}$  — вещественные, а  $Z_{3,4}$  — мнимые при  $E_0 > \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$  и  $Z_{1,2}$  — мнимые, а  $Z_{3,4}$  — вещественные при  $E_0 < \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$ .

Тогда по формуле (2.7) находим:

$$\text{при } E_0 > \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} \quad \operatorname{Re}(2i_1) = \operatorname{Re}(2i_1^{(1)}) = O(1.5\pi(1+m)) \quad (2.9)$$

$$\text{а при } E_0 < \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$$

$$\operatorname{Re}(2i_1) = \begin{cases} \operatorname{Re}(2i_1^{(1)}) = O(2\pi(1+m)) & \text{при } 0 < m < 3/4 \\ \operatorname{Re}(2i_1^{(3)}) = O(1.5\pi(1+1/m)) & \text{при } 3/4 < m < 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

где через  $\operatorname{Re}(2i_1)$  обозначен  $\min \operatorname{Re}(2i_j^{(j)})$ .

б)  $m = 1$ ,  $\operatorname{ctg} \varphi_j = 2$ ,  $Z_j$  определяются из алгебраического уравнения

$$2a_2 Z^4 - 2(a_4 + a_2) Z^2 + a_2 - a_4 = 0 \quad (2.11)$$

Независимо от значения  $E_0$  уравнение (2.11) имеет два вещественных и два мнимых корня. Наименьший корень  $\lambda_1$  соответствует положительному вещественному корню  $Z_1$  уравнения (2.11), а его реальная часть, что следует из формулы (2.7), имеет порядок

$$\operatorname{Re}(2i_1) = O(3\pi) \quad (2.12)$$

$$в) \quad m > 1, \quad \operatorname{ctg} \varphi_{1,2} = \frac{2}{m}, \quad Z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a_2}{2a_1}}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_{2,1} = m, \quad Z_{1,4} = \pm \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{2a_1}} \quad (2.13)$$

При  $E_0 < (1 + \nu_2)/(1 + \nu_1)$  корни  $Z_{1,3}$  — вещественные, а  $Z_{2,4}$  — мнимые, а при  $E_0 > (1 + \nu_2)/(1 + \nu_1)$   $Z_{1,3}$  — мнимые,  $Z_{2,4}$  — вещественные. По формуле (2.7) находим

$$\text{при } E_0 < (1 + \nu_2)/(1 + \nu_1) \quad \operatorname{Re}(2i_1) = \operatorname{Re}(2i_1^{(1)}) = O(1,5\pi(1 + 1/m)) \quad (2.14)$$

$$\text{при } E_0 > (1 + \nu_2)/(1 + \nu_1)$$

$$\operatorname{Re}(2i_1) = \begin{cases} \operatorname{Re}(2i_1^{(1)}) = O\left(2\pi\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) & \text{при } m > \frac{4}{3} \\ \operatorname{Re}(2i_1^{(3)}) = O(1,5\pi(1 + m)) & \text{при } 1 < m < \frac{4}{3} \end{cases} \quad (2.15)$$

Трансцендентные уравнения (2.5) и (2.6) хорошо исследованы [7, 8]. Они имеют счетное количество комплексных корней, расположенных симметрично в четырех квадрантах. В работе [8] приведены значения первых пятидесяти корней для уравнения (2.5). Немаловажно знать также их асимптотические представления. По формуле (2.7) находим асимптотические корни

$$2i_1^* = (2n - 0,5)\pi + i \ln(4\pi n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

$$2i_1^{**} = (2n + 0,5)\pi + i \ln(4\pi n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

У первого корня уравнения (2.5)  $\operatorname{Re}(2i_1^*) = 4,21239$ , а у первого корня уравнения (2.6)  $\operatorname{Re}(2i_1^{**}) = 7,49768$ .

Сравнения, определяемые по формулам (2.9), (2.10), (2.14) — (2.17) — реальные части корней трансцендентных уравнений, соответствующих двухслойной и однослойной балкам, заметим

$$\operatorname{Re}(2i_1) > \operatorname{Re}(2i_1^*); \quad \operatorname{Re}(2i_1) \geq \operatorname{Re}(2i_1^{**}) \quad \text{при}$$

$$E_0 > \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \frac{2}{3} \ll m \ll 4, \quad \left( E_0 < \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \frac{1}{4} \ll m \ll \frac{3}{2} \right) \quad (2.18)$$

Уравнение (2.3), помимо комплексных корней, имеет также конечное число вещественных корней, так как при  $z \rightarrow \infty$   $D(z) \rightarrow +\infty$ . Эти корни могут быть определены численными методами. В табл. 1 приведены значения первого положительного вещественного корня, соответствующие различным значениям параметров.

В задаче однородной полосы-прямоугольника характеристическое уравнение имеет только комплексные корни и затухание решения типа пограничного слоя происходит гармонично. Здесь же, кроме комплексных корней, имеются также вещественные корни, вследствие чего затухание может происходить негармонично. При этом, в зависимости от физических и геометрических параметров, пограничный слой в слоистых полосах может затухать как медленнее, так и быстрее по сравнению с однородной полосой, что следует из оценки (2.18) и табл. 1.

$m$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
0.01	3.6855	3.7137	3.7991	3.9484	4.3141	9.9036
0.02	3.6851	3.7141	3.8018	3.9538	4.3185	9.9392
0.05	3.6792	3.7117	3.8083	3.9712	4.3421	10.0697
0.10	3.6446	3.6870	3.8085	4.0040	4.4047	10.3083
0.20	1.7969	1.8303	2.0159	4.0371	4.5725	9.3635
0.50	1.5007	1.5133	1.5577	1.6693	4.8621	9.1810
1.00	1.4221	1.4370	1.4927	1.6575	2.9971	8.5469
2.00	1.4184	1.4441	1.5639	1.5639	2.9129	0.6860
5.00	1.4701	1.5209	1.7902	2.2507	0.4716	0.9899
10.0	1.4940	1.5491	1.8112	2.2124	1.0981	1.0885
20.0	1.4983	1.5432	1.7832	2.1556	1.1654	1.0940
50.0	1.5190	1.5439	1.7556	2.1045	1.2042	1.1081
100	1.1836	1.1836	1.9726	2.0826	1.2174	1.1441

Найденное в работе решение типа пограничного слоя вместе с решением внутренней задачи [1], позволяют более точно удовлетворять условиям на торцах. Сопряжение этих двух типов решений можно осуществить одним из способов, изложенных в [9].

### ՇԵՐՏԻԿՈՐ շՆՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ

Ս. Ս. Փ Ո Փ Ո Ւ Ո Ւ

Աշխատանքում, ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով, շերտավոր հեղձանի համար կառուցված է սահմանային շերտի տիպի լուծում, որը միասամանակ առաձգականության տեսության հաճախորդների ճշգրիտ լուծումն է: Քննարկված է սահմանային շերտի տիպի լուծումների մարման բնույթը՝ կախված առաձգական պարամետրերի և շերտերի հաստությունների հարաբերություններից: Տույց է տրված, որ բևեռագրիչ հաճախորդումնի ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս արմատներ: Կոմպլեքս արմատների որոշման համար պատված է ասիմպտոտիկ բանաձև:

### THE BOUNDARY LAYER OF A SANDWICH-TYPE BEAM

A. M. KHACHATRIAN

S. S. P H O P H O U

By means of the asymptotic method the boundary layer type solution for a sandwich-type beam is constructed which is also exactly the solution of elasticity theory. The analysis of boundary layer solution depending upon ratio of elastic coefficients and layer thickness is examined. It has been shown that the corresponding characteristic equation has both real and complex roots. The asymptotic formula for the calculation of complex roots is obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агаляян Л. А., Хачатрян А. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т. 39, №2, с. 3—14.
2. Гусейн-Заде М. И. Напряженное состояние пограничной для слоистых пластинок. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.—М.: Наука, 1970, с. 638—643.
3. Кадомяцв Н. Г. Краевые эффекты в трехслойной плите. Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1973, №4, с. 35—37.
4. Агаляян Л. А. О пограничные ортотропных пластинок Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1973, т. 26, №2, с. 27—43.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961. 248 с.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования и задачи теории упругости. М.—Л. Изд. АН СССР, 1963. 367 с.
8. Воронич И. И., Малкина О. С. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.—М.: Наука, 1966, с. 251—254.
9. Агаляян Л. А., Хачатрян Ш. М. О некоторых плоских задачах для ортотропной полосы.—Уч. записки ИУ, 1977, №2, с. 20—26.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
5.VIII, 1985

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ  
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

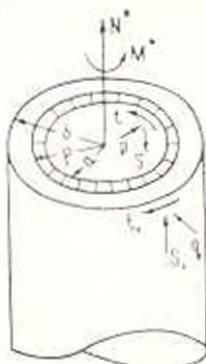
ԱՉՈՅԱՆ Ա. Ը., ԶԱԾՅԱՆ Մ. Ա.

Рассматривается упругопластическое состояние ортотропной толстостенной цилиндрической трубы под совместным воздействием равномерно распределенных нормальных и касательных сил на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, растягивающих осевых сил и крутящих моментов, приложенных к торцевым сечениям, а также упругопластическое состояние анизотропной длиной конической трубы при равномерных нормальных и касательных силах, действующих на внутренней и внешней боковых поверхностях. Главные оси анизотропии принимаются совпадающими с осями, соответственно, цилиндрической и сферической системы координат.

Предельное состояние анизотропных цилиндрических труб рассмотрено в работах [1—5]. В работе [6] изучено упругопластическое состояние анизотропной цилиндрической трубы под действием равномерного внутреннего и внешнего давления. Предельное состояние анизотропной конической трубы рассмотрено в работе [7], а в [8, 9] построены решения соответствующих упругопластических задач для изотропной цилиндрической и конической труб.

§ 1. Упругопластическое состояние ортотропной цилиндрической трубы

Материал трубы принимаем идеально-пластическим, несжимаемым, удовлетворяющим соотношениям теории упругопластических деформаций и условию текучести Мизеса-Хилла.



Фиг. 1

Ось  $z$  цилиндрической координатной системы проводим по оси трубы так, чтобы плоскость  $z=0$  прошла по срединному поперечному сечению. Положительное направление  $\theta$  считаем против вращения часовой стрелки (фиг. 1).

На внутренней  $r=a$  и на внешней  $r=b$  цилиндрических поверхностях задаем соответственно значения внешних сил

$$\tau_r = -p, -q; \tau_{\theta z} = S, S_1; \tau_{\theta r} = T, T_1 \quad (1.1)$$

На торцевых сечениях  $z = \pm l$  приложены осевые растягивающие силы  $N^*$  и крутящие моменты  $M^*$ . Соответственно принимаем интегральные условия

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = N^*, \quad 2\pi \int_a^b \tau_{\theta z} r^2 dr = M^* \quad (1.2)$$

В зависимости от вклада крутящего момента в интенсивности внешних сил, пластические деформации могут впервые появляться на внутренней или на внешней поверхностях трубы. Полагая, что, начиная с некоторого уровня интенсивности внешних сил и при сравнительно небольшом крутящем моменте, с внутренней поверхности  $r = a$  трубы распространяется пластическая зона. Исходя из характера деформирования трубы, полагаем, что тензор деформации как в пластической, так и в упругой зонах не зависит от продольной координаты  $z$  и граничная поверхность между пластической и упругой зонами, на которой следует соблюдать условия сопряжения решений двух соседних зон, естественно, принимается цилиндрической (фиг. 1).

В пластической зоне  $a \leq r \leq \rho$  компоненты напряжений и перемещений представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p + B(F + G)a^2 \int_a^r \frac{\omega}{r^3} dr + A(F - G) \int_a^r \frac{\omega}{r} dr, & \tau_{r\theta} &= s \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + \omega \left[ (F - G)A + (F + G)B \frac{a^2}{r^2} \right], & \tau_{\theta z} &= L\omega C \frac{r}{\rho} \\ \sigma_z &= \sigma_r + \omega \left[ (F + 2H)A + FB \frac{a^2}{r^2} \right], & \tau_{rz} &= s \frac{a}{r} \\ u &= -Ar + B \frac{a^2}{r}, & v &= E \frac{r}{\rho} + C \frac{r}{\rho} z - \frac{r}{N} \int_a^{\rho} \frac{\tau_{\theta z}}{\omega} \frac{dr}{r} \\ \omega &= D + 2Az - \frac{1}{M} \int_a^{\rho} \frac{\tau_{rz}}{\omega} dr \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\omega = \frac{(1 - \nu_0^2) M - \tau_{r\theta}^2 / N}{\left[ (F + G + 4H)A^2 + 2(F - G)AB \frac{a^2}{r^2} + (F + G)B^2 \frac{a^4}{r^4} + LC^2 \frac{r^2}{\rho^2} \right]^{1/2}}$$

$$F = F_0 \Delta, \quad G = G_0 \Delta, \quad H = H_0 \Delta, \quad L = L_0^{-1}, \quad M = M_0^{-1}, \quad N = N_0^{-1}$$

$$\Delta = F_0 G_0 + G_0 H_0 + H_0 F_0$$

$A, B, C, D, E$  — произвольные постоянные,  $F_0, G_0, H_0, L_0, M_0, N_0$  — параметры пластической анизотропии, а  $r = \rho$  — граничная между пластической и упругой зонами цилиндрическая поверхность, положение

которой следует определять в зависимости от интенсивности внешних сил.

В упругой зоне  $\rho \leq r \leq b$  напряжения и перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q + \chi A_1 \ln \frac{r}{b} + \mu \frac{B_1}{2} \left( \nu^2 - \frac{a^2}{r^2} \right), & \nu &= \frac{a}{b} \\ \sigma_\theta &= -q + \chi A_1 \left( 1 + \ln \frac{r}{b} \right) + \mu \frac{B_1}{2} \left( \nu^2 + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= -q + \left( \lambda + \chi \ln \frac{r}{b} \right) A_1 + \left[ \frac{\mu}{2} \nu^2 + \left( \chi - \frac{\mu}{2} \right) \frac{a^2}{r^2} \right] B_1 \\ \tau_{rz} &= s_1 \frac{b}{r}, & \tau_{r\theta} &= t_1 \frac{b^2}{r^2}, & \tau_{\theta z} &= \frac{A_{34}}{2} C_1 \frac{r}{\rho} \\ u &= -A_1 r + B_1 \frac{a^2}{r}, & v &= E_1 \frac{r}{\rho} + C_1 \frac{r}{\rho} z - \frac{t_1 r}{A_{66}} \left( \frac{b^2}{r^2} - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \\ w &= D_1 + 2A_1 z + 2 \frac{s_1 b}{A_{35}} \ln \frac{r}{\rho} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где обозначены:

$$\begin{aligned} \chi &= A_{11} - A_{22} + 2A_{23} - 2A_{13}, & \mu &= A_{11} - 2A_{12} + A_{22} \\ \lambda &= A_{11} + A_{13} + 2A_{23} - A_{21} - 3A_{12}, & \chi &= A_{11} - A_{12} + A_{23} - A_{13} \end{aligned}$$

$A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  — произвольные постоянные,  $A_{ij}$  — упругие постоянные.

На поверхности  $r = \rho$  необходимо выполнить условия сопряжения решений двух зон. Из условий непрерывности перемещения следует

$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C, \quad D_1 = D, \quad E_1 = E$$

а из непрерывности нормального и касательных напряжений на поверхности  $r = \rho$  будем иметь

$$\begin{aligned} p - q &= B \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{a^2}{\rho^2} - \nu^2 \right) + (F + G) a^2 \int_a^\rho \frac{dr}{r^2} \right] + A \left[ (F - G) \int_a^\rho \frac{dr}{r} - \chi \ln \frac{\rho}{b} \right] \\ s_1 &= \nu s, & t_1 &= \nu^2 t \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наконец, из условия непрерывности интенсивности касательных напряжений находим уравнение

$$\alpha \frac{a^2}{\rho^2} B^2 + 2\beta \frac{a^2}{\rho^2} AB - \left( 1 - M_0 \nu_{r,z}^2 - N_0 \nu_{r,\theta}^2 - \gamma A^2 - I_0 \frac{A_{34}}{4} C^2 \right) = 0$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= F_0(x - \gamma)^2 + G_0 \nu^2 + H_0 \nu^2, & \beta &= F_0(x - \nu)(\mu - \gamma) + G_0 \nu \chi + H_0 \chi \mu \\ \gamma &= F_0(x - \lambda)^2 + G_0 \lambda^2 + H_0 \lambda^2 \end{aligned}$$

Отсюда, определяя  $B$  и подставляя в выражения напряжений и перемещений в пластической зоне (1.3), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -p + A \frac{F-G}{\rho^2} \int_a^r \omega_* r dr + (F+G)Q(\rho) \int_a^r \frac{\rho^2}{r} dr \\
\sigma_\theta &= \sigma_r + \omega_* \left[ (F-G)A \frac{r^2}{\rho^2} + (F-G)Q(\rho) \right], \quad \tau_{rz} = LC \frac{r^2}{\rho^3} \omega_* \\
\sigma_z &= \sigma_r + \omega_* \left[ (F+2H)A \frac{r^2}{\rho^2} + FQ(\rho) \right], \quad \tau_{\theta z} = \tau \frac{a^2}{r^2} \\
\tau_{rz} &= s \frac{a}{r}, \quad v = E \frac{r}{\rho} + C \frac{z}{\rho} - r \frac{\rho^2}{N} \int_a^r \frac{\tau_{rz}}{\omega_* r^3} dr \\
u &= -Ar + Q(\rho) \frac{\rho^2}{r}, \quad w = D + 2Az - \frac{\rho^2}{M} \int_a^r \frac{\tau_{\theta z}}{\omega_* r^2} dr
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где введены функции

$$\begin{aligned}
Q(\rho) &= \left\{ \frac{\rho^2}{\rho^3} A^2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - M_0 \tau_{rz}^2(\rho) - N_0 \tau_{\theta z}^2(\rho) - \gamma A^2 + L_0 \frac{A_{33}^2}{4} C^2 \right]^{-1/2} \right\}^{1/2} - \frac{\rho}{2} A \\
\omega_* &= \frac{1}{\left[ (F+G+4H)A^2 \frac{r^4}{\rho^4} + 2(F-G)A \frac{r^2}{\rho^2} Q(\rho) + (F+G)Q^2(\rho) + LC^2 \frac{r^2}{\rho^6} \right]^{1/2}}
\end{aligned}$$

Для упругой зоны из (1.4) следует

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -q + \nu A \ln \frac{r}{b} + \frac{\mu}{2} Q(\rho) \left( \frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right) \\
\sigma_\theta &= -q + \nu A \left( 1 + \ln \frac{r}{b} \right) + \frac{\mu}{2} Q(\rho) \left( \frac{\rho^2}{b^2} + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \\
\sigma_z &= -q + A \left( 1 + \nu \ln \frac{r}{b} \right) + \frac{2\gamma - \mu}{2} Q(\rho) \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\mu}{2} Q(\rho) \frac{\rho^2}{b^2} \\
\tau_{rz} &= C \frac{A_{33}}{2} \frac{r}{\rho}, \quad \tau_{\theta z} = \nu \frac{a}{r}, \quad \tau_{\theta r} = \tau \frac{a^2}{r^2} \\
u &= -Ar + Q(\rho) \frac{\rho^2}{r}, \quad v = E \frac{r}{\rho} + C \frac{z}{\rho} - \frac{1r}{A_{66}} \left( \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \\
w &= D + 2Az - \frac{2sa}{A_{23}} \ln \frac{r}{\rho}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

После исключения  $B$  уравнение (1.5) запишется в виде

$$p - q = A \frac{F-G}{\rho^2} \int_a^{\rho} \omega_*(r, \rho) r dr + Q(\rho)(F+G) \int_a^{\rho} \frac{\omega_*(r, \rho)}{r} dr -$$

$$-\alpha A \ln \frac{\rho}{b} + \frac{\mu}{2} Q(\rho) \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2}\right), \quad a \leq \rho \leq b \quad (1.8)$$

Из условий (1.2) следует

$$A \left[ \left( \lambda - \frac{\alpha}{2} \right) (b^2 - \rho^2) + \frac{F+G+4H}{\rho^2} \int_a^\rho \omega_2 r^3 dr \right] = \frac{N^*}{\pi} - p a^2 + q b^2 + \\ + (\mu - 2\gamma) Q(\rho) \rho^2 \ln \frac{b}{\rho} - Q(\rho) (F-G) \int_a^\rho \omega_2 r dr \quad (1.9)$$

$$C \left[ A_{44} (b^2 - \rho^2) + \frac{4t}{\rho^2} \int_a^\rho \omega_2 r^3 dr \right] = \frac{2\rho}{\pi} M_2 \quad (1.10)$$

Уравнения (1.8)–(1.10) в принципе определяют значения параметров  $A$ ,  $C$  и  $\rho$ . Перемещения определяются с точностью постоянных  $D$  и  $E$ .

## § 2. Совместное действие нормальных и окружных касательных сил

Пусть ортотропная цилиндрическая труба находится под совместным воздействием нормальных и окружных касательных распределенных сил (фиг. 2).



Фиг. 2

Примем  $s = M^* = C = D = A = 0$

$$\frac{N^*}{\pi} = p a^2 - q b^2 + \left( \frac{2\gamma - \mu}{\delta} \ln \frac{b}{\rho} + \frac{F-G}{2\sqrt{F+G}} \right) \times \\ \times \sqrt{\rho^4 - \frac{t^2}{N} a^4} - \frac{F-G}{2\sqrt{(F+G)N}} t a^2 \times \\ \times \left( \arccos \frac{t a^2}{\sqrt{N} \rho^2} - \arccos \frac{t}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{N}{t^2} - 1} \right) \\ \gamma = \sqrt{\Delta [F(\mu - \gamma)^2 + G\gamma^2 + H\mu^2]}$$

Обозначая  $\tau_{\theta z} = \tau$ , в пластической зоне будем иметь

$$\tau_r, \tau_\theta = -p + \frac{\sqrt{F+G}}{2} \left( 2 \ln \frac{r}{a} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2/N}}{1 + \sqrt{1 - t^2/N}} + \sqrt{1 - t^2/N} \mp \right. \\ \left. \mp \sqrt{1 - \tau^2/N} \right), \quad \tau_z = \tau_r + \frac{F}{\sqrt{F+G}} \sqrt{1 - \tau^2/N}, \quad a \leq r \leq \rho \quad (2.1)$$

$$\tau = t \frac{a^2}{r^2}, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0, \quad u = \frac{\rho^2}{r^2} \sqrt{1 - \tau^2(\rho)/N}$$

$$v = E \frac{r}{\rho} - \frac{\sqrt{F+G}}{b} \frac{r \rho^2}{2 t a^2} \sqrt{1 - \tau^2(\rho)/N} (\sqrt{1 - \tau^2(\rho)/N} - \sqrt{1 - \tau^2/N})$$

В упругой зоне получается

$$\begin{aligned} \sigma_r, \sigma_\theta &= -q + \frac{\mu}{2\delta} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \left( \frac{\rho^2}{b^2} \mp \frac{\rho^2}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= -q + \left[ \frac{\mu}{2\delta} \frac{\rho^2}{b^2} + \left( \frac{\chi}{\delta} - \frac{\mu}{2\delta} \right) \frac{\rho^2}{r^2} \right] \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \\ \tau &= t \frac{a^2}{r^2}, \quad \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0, \quad u = \frac{\rho^2}{r\delta} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \\ v &= E \frac{r}{\rho} + \frac{tr}{A_{\theta\theta}} \left( \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad w = 0, \quad \rho \leq r \leq b \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (1.8) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} p-q &= \frac{\mu}{2\delta} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \left( 1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right) + \frac{\sqrt{F+G}}{2} \left( 2 \ln \frac{\rho}{a} + \ln \frac{1+\sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}}{1+\sqrt{1-t^2/N}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-t^2/N} - \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

определяющему зависимость между  $p$  и внешними силами  $p-q$  и  $t$ .

Из полученных формул предельным переходом можно получить решение задачи об упругопластическом состоянии вокруг круговой полости в бесконечной ортотропной среде.

Полагая  $q=0$ ,  $E = \frac{t a^2}{A_{\theta\theta} \rho}$  при  $b \rightarrow \infty$ , из (2.1-2.2) получим:

в пластической зоне  $a \leq r \leq \rho$

$$\begin{aligned} \sigma_r, \sigma_\theta &= -p + \frac{\sqrt{F+G}}{2} \left( 2 \ln \frac{r}{a} + \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2/N}}{1+\sqrt{1-t^2/N}} + \sqrt{1-t^2/N} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-\tau^2/N} \right), \quad \sigma_z = \sigma_r + \frac{F}{\sqrt{F+G}} \sqrt{1-t^2/N}, \quad \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = t \frac{a^2}{r^2} \\ \tau_{zr} &= \tau_{\theta z} = 0, \quad w = 0, \quad u = \frac{\rho^2}{2r} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \end{aligned}$$

$$v = -\frac{t a^2}{A_{\theta\theta} \rho^2} r - \frac{r \rho^2}{2t a^2} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \left( \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} - \sqrt{1-t^2/N} \right)$$

в упругой зоне  $r \geq \rho$

$$\begin{aligned} \sigma_r, \sigma_\theta &= \mp \frac{\mu}{2\delta} \frac{\rho^2}{r^2} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N}, \quad \sigma_z = \left( \frac{\chi}{\delta} - \frac{\mu}{2\delta} \right) \frac{\rho^2}{r^2} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \\ \tau &= t \frac{a^2}{r^2}, \quad \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0, \quad u = \frac{\rho^2}{\delta r} \sqrt{1-\tau^2(\rho)/N} \\ v &= -\frac{t a^2}{A_{\theta\theta} r}, \quad w = 0 \end{aligned}$$

Граница между упругой и пластической зонами определяется уравнением

$$\frac{2p}{\sqrt{F+G}} + \ln(1 + \sqrt{1 - t^2/N}) - \sqrt{1 - t^2/N} =$$

$$= \left( \frac{\mu}{2\sqrt{F+G}} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{t^2 a^4}{N \rho^4}} + \ln \left( \frac{\rho^2}{a^2} + \sqrt{\frac{\rho^4}{a^4} - \frac{t^2}{N}} \right)$$

В случае полости предельное упругое состояние описывается эллипсом

$$\frac{p^2}{\left(\frac{\mu}{2\delta}\right)^2} + \frac{t^2}{N} = 1$$

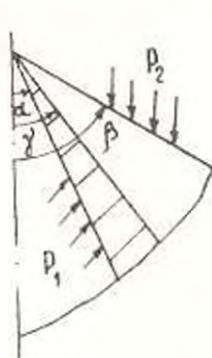
### § 3. Вывод основных уравнений, описывающих упругопластическое состояние ортотропной конической трубы

Материал трубы принимаем ортотропным, несжимаемым, идеально пластическим и удовлетворяющим уравнениям теории упругопластических деформаций. Полагаем, что при определенных комбинациях внешних сил вокруг конической поверхности  $\theta = \alpha$  образуется пластическая зона, ограниченная поверхностью  $\theta = \gamma$ , подлежащей определению в ходе решения задачи. На граничной поверхности между пластической и упругой зонами имеются условия сопряжения, а на внутренней и на внешней поверхностях задано соответственно (фиг. 3)

$$\sigma_{\theta} = -p_1, -p_2; \quad \tau_{r\theta} = m_1, m_2; \quad \tau_{\theta z} = q_1, q_2 \quad \text{при } \theta = \alpha, \beta \quad (3.1)$$

Задачу будем решать в сферической системе координат, центр которой помещен в вершине конуса.

Решение в пластической зоне  $\alpha < \theta < \beta$  предположим в виде



Фиг. 3

$$\sigma_{\theta} = -p_1 + \int_{\alpha}^{\theta} [(2G+H)f' - (2H+G)f \operatorname{ctg} \theta] \omega \operatorname{ctg} \theta d\theta -$$

$$3 \int_{\alpha}^{\theta} \tau_{\theta z} d\theta$$

$$\sigma_r = \tau_{\theta} + \omega [(2G+H)f' + (F-G)f \operatorname{ctg} \theta], \quad \tau_{\theta z} = q_1 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \alpha} \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \tau_{\theta} + \omega [(2G+H)f' - (2H+G)f \operatorname{ctg} \theta]$$

$$\tau_{r\theta} = N\omega (f' + f \operatorname{ctg} \theta)'$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad u = r(f' + f \operatorname{ctg} \theta), \quad v = -3rf$$

$$\omega = q_1 L r^2 \sin^2 \alpha \sin \theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\omega \sin^3 \theta} + Dr \sin \theta$$

где  
32

$$(1 - \tau_{\theta}^2/L)^{1/2}$$

$$[N(f' + f \operatorname{ctg} \theta)^2 + (F + H + 4G)f'^2 - 2(2G + 2H - F)f'f \operatorname{ctg} \theta + (F + G + 4H)f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta]^{1/2}$$

$D$  — произвольная постоянная, а  $f(\theta)$  — неизвестная функция, которая определяется из системы дифференциальных уравнений

$$\tau'_{\theta} = -\tau_{\theta} \operatorname{ctg} \theta - \nu [(2G + 2F - H)f' + (2F + 2H - G)f \operatorname{ctg} \theta] \quad (3.3)$$

$$f'' + f' \operatorname{ctg} \theta - \frac{f}{\sin^2 \theta} - \frac{\tau_{\theta}}{N_{\theta}} = 0$$

Если ввести обозначения

$$\varphi = \frac{f'}{f}, \quad T = (1 - \tau_{\theta}^2/L - \tau_{\theta}^2/N)^{-1/2}$$

$$\Phi = [(F + H + 4G)\varphi^2 - 2(2G + 2H - F)f'f \operatorname{ctg} \theta + (F + G + 4H)f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta]^{1/2}$$

и произвести некоторые преобразования [7], систему (3.3) можно привести к канонической форме

$$\begin{aligned} \tau'_{\theta} &= -\tau_{\theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{T\Phi} [(2G + 2F - H)\varphi + (2H + 2F - G)\operatorname{ctg} \theta] \\ \varphi' &= -\varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\tau}{N} T\Phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Граничными условиями для (3.4) будут:  $\tau_{\theta} = m_1$  при  $\theta = \alpha$  и условия сопряжения на поверхности  $\theta = \gamma$ .

Решение в упругой зоне  $\gamma < \theta < \alpha$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} &= -p_2 - \int_{\theta}^{\alpha} (\chi'' - \mu \chi' \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta d\theta - 3 \int_{\theta}^{\alpha} \tau_{\theta} d\theta \\ \tau_{\theta} &= \tau_0 + \chi \chi'' + \mu \chi' \operatorname{ctg} \theta, \quad \tau_{\theta} = q_2 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \alpha} \\ \tau_{\theta} &= \tau_0 + \chi \chi'' - \mu \chi' \operatorname{ctg} \theta, \quad \tau_{r\theta} = 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{A_{00}}{2} (\chi'' + \chi' \operatorname{ctg} \theta)', \quad u = r(\chi' + \chi' \operatorname{ctg} \theta), \quad v = -3r\chi' \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$w = \frac{r}{A_{44}} q_2 \sin^2 \theta \sin \theta \left( \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma / 2} + \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + Er \sin \theta$$

где

$$\begin{aligned} i &= A_{11} - 3A_{12} + 2A_{22} + A_{13} - A_{23}, \quad x = A_{11} - A_{22} - 2A_{13} + 2A_{23} \\ \chi &= A_{11} - A_{12} - 3A_{21} + 2A_{22} + A_{23}, \quad \mu = A_{12} - A_{13} - 3A_{23} - A_{22} - 2A_{23} \end{aligned}$$

$E$  — произвольная постоянная,  $\chi(\theta)$  — неизвестная функция, которая определяется из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} &= -\tau_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + (2\lambda - \gamma) s + 2(\chi + \mu) \Psi \operatorname{ctg} \theta \\ s' &= -s \operatorname{ctg} \theta + \frac{\Psi'}{\sin^2 \theta} + \frac{2\tau_{\theta}}{A_{\theta\theta}}, \quad \Psi' = s \end{aligned} \quad (3.6)$$

Граничными условиями для системы (3.6) будут:  $\tau_{\theta} = m_2$  при  $\theta = \beta$  и условия сопряжения на поверхности  $\theta = \gamma$ , которые дают

$$\begin{aligned} E = D, \quad q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta \\ f = \Psi', \quad \varphi = \frac{s}{\Psi}, \quad \varphi' = \left( \frac{s}{\Psi} \right)^2 + \frac{s'}{\Psi}, \quad \tau_{\theta} = m_2 \quad \text{при } \theta = \gamma \\ p_1 - p_2 = \int_{\gamma}^{\beta} \left[ \frac{3}{2} A_{\theta\theta} s' + \left( \chi + \frac{3}{2} A_{\theta\theta} \right) s \operatorname{ctg} \theta - \left( \mu \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{3A_{\theta\theta}}{2 \sin^2 \theta} \right) \Psi \right] d\theta - \\ - \int_{\gamma}^{\beta} \left[ 3N(\varphi' + \varphi^2) - (2G + H - 3N)\varphi \operatorname{ctg} \theta + (2H + G) \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{3N}{\sin^2 \theta} \right] \frac{d\theta}{T\Psi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Дифференциальные уравнения (3.4), (3.6), условия сопряжения (3.7) и граничные условия для  $\tau_{\theta}$  из (3.1) в принципе определяют функции  $\tau_{\theta}$ ,  $\varphi$ ,  $s$ ,  $\Psi$  и поверхность раздела упругой и пластической зон  $\gamma$ .

#### § 4. Уругопластическое состояние трансверсально изотропной конической трубы под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных сил

Пусть на внутренней и на внешней боковых поверхностях трансверсально изотропной конической трубы с осью симметрии механических свойств  $\theta = 0$  действуют, соответственно, нормальные давления и кольцевые касательные силы

$$\tau_{\theta} = -p_1, -p_2; \quad \tau_{\alpha} = q_1, q_2 \quad \text{при } \theta = \alpha, \beta \quad (4.1)$$

Полагая по всему объему тела равными нулю кроме  $\tau_{\theta}$ , также и  $\tau_{\alpha}$ , находим

$$f = \Psi = \frac{A}{\sin \theta}; \quad A = - \frac{\sqrt{1 - (q_1^2 \sin^4 \alpha) / (L \sin^4 \gamma)}}{\sqrt{\Delta \sqrt{F(\chi + \mu)^2 + G(\lambda - \chi - \gamma - \mu)^2} + H(\chi - \lambda)^2}} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \quad (4.2)$$

В пластической зоне  $\alpha < \theta < \beta$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{\theta} + \sqrt{\frac{G}{2}} \sqrt{1 - \tau^2/L}, \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_{\theta} + \sqrt{2G} \sqrt{1 - \tau^2/L} \\ \tau = -p_1 + \sqrt{\frac{G}{2}} \left( 2 \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2/L}}{1 + \sqrt{1 - q_1^2/L}} + \sqrt{1 - q_1^2/L} - \sqrt{1 - \tau^2/L} \right) \\ \tau = \tau_{\alpha} = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta}, \quad u = 0, \quad v = \frac{3r}{A_0} \operatorname{tg} \gamma \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^4 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\omega = \frac{3r}{A_0 L q_1} \sqrt{\frac{G}{2}} \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \gamma} \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^4 \gamma}} \left( \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^4 \gamma}} - \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^4 \theta}} \right) + Dr \sin \theta, \quad A_0 = \sqrt{\Delta} \sqrt{F(\chi + \mu)^2 + G(\chi - \alpha - \gamma - \mu)^2 + H(\chi - \alpha)^2}$$

В упругой зоне  $\gamma \leq \theta \leq \beta$  будем иметь для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 + \frac{\chi - \mu}{A_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \theta} \frac{\cos \theta}{\cos \gamma}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \\ \tau_{\theta z} &= \tau_0 + \frac{\chi + \mu}{A_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \theta} \frac{\cos \theta}{\cos \gamma}, \quad \tau = q_2 \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \theta} \\ \sigma_z &= -p_2 - \frac{\chi + \mu}{2A_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \left( \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \beta / 2} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Перемещения  $u$  и  $v$  определяются согласно (4.3), а кольцевое перемещение

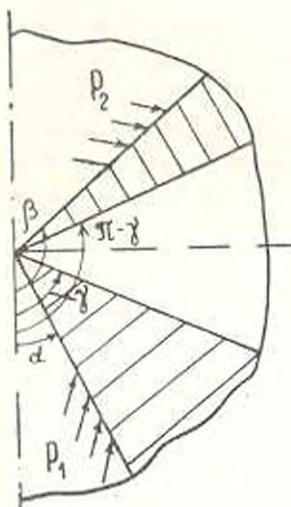
$$\omega = \frac{2r q_2 \sin^2 \beta}{A_{22} - A_{23}} \sin \theta \left( \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma / 2} + \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + Dr \sin \theta \quad (4.5)$$

Граничная поверхность между упругой и пластической зонами определяется соотношением

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{\chi + \mu}{2A_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \left( \ln \frac{\operatorname{tg} \gamma / 2}{\operatorname{tg} \beta / 2} + \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{G}{2}} \left( 2 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}}}{1 + \sqrt{1 - q_1^2 / L}} + \sqrt{1 - q_1^2 / L} - \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^2 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В случае  $\beta \geq \pi/2$  (фиг. 4) может возникнуть двухстороннее пластическое состояние [8]. В пластической зоне  $\alpha \leq \theta \leq \gamma$  напряжения и перемещения определяются прежними формулами (4.3), а в упругой зоне  $\gamma \leq \theta \leq \pi - \gamma$  — формулами (4.4), (4.5). В пластической зоне  $\pi - \gamma \leq \theta \leq \beta$  находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_1 - \sqrt{\frac{G}{2}} \sqrt{1 - q_1^2 / L}, \quad \sigma_z = \sigma_1 - \sqrt{2G} \sqrt{1 - q_1^2 / L} \\ \tau &= q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_\theta = -p_2 + \sqrt{\frac{G}{2}} \left( 2 \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \right. \\ &+ \left. \ln \frac{1 + \sqrt{1 - q_1^2 / L}}{1 + \sqrt{1 - q_1^2 / L}} + \sqrt{1 - q_1^2 / L} - \sqrt{1 - q_1^2 / L} \right) \\ \omega &= \frac{4r q_1 \sin^2 \alpha \sin \theta}{A_{22} - A_{23}} \left( \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \operatorname{Intg} \frac{\gamma}{2} \right) - \end{aligned}$$



Фиг. 1

$$-\frac{3r}{A_0 L q_1} \sqrt{\frac{G}{2}} \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \gamma} \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^4 \gamma}} \left( \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^4 \gamma}} - \sqrt{L - q_1^2 \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^4 \gamma}} \right) + Dr \sin \theta \quad (4.7)$$

Перемещения  $u$  и  $v$  определяются согласно (4.3). В рассмотренном здесь случае параметр  $\gamma$  находим из соотношения

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = & \sqrt{\frac{G}{2}} \left[ 2 \ln \frac{\sin^2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} + \ln \frac{|1 + \sqrt{1 - (q_1^2 \sin^4 \alpha) / (L \sin^4 \gamma)}|^2}{(1 + \sqrt{1 - q_1^2 / L})(1 + \sqrt{1 - q_1^2 / L})} + \right. \\ & \left. + \sqrt{1 - q_1^2 / L} + \sqrt{1 - q_1^2 / L} \right] + \frac{\chi + \mu}{A_0} \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^4 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \operatorname{Intg} \frac{\gamma}{2} + \\ & + \left( \frac{\chi + \mu}{A_0} - \sqrt{2G} \right) \sqrt{1 - \frac{q_1^2 \sin^4 \alpha}{L \sin^4 \gamma}} \end{aligned}$$

Случай  $\gamma = \pi/2$  соответствует предельному состоянию трубы.

ԳԻԱՆԱՅԻՆ ԵՎ ԿՈՆԱԿԱՆ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ  
ԱԹԱԶԳԱՊՂԱՍՏԻՎԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ. Ա. ՉԱԴՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գիտարկված է օրթոտրոպ, հասա պատերով ղլանային խողովակի առաձգապլաստիկական վիճակը ներքին և արտաքին ղլանային մակերևույթների վրա ազդող հավասարաչափ բաշխված նորմալ և շոշափոց ուժերի, ճակատային հատույթների վրա կիրառված առանցքային ձող ուժերի և ոլորող մոմենտների համատեղ ազդեցության տակ, ինչպես նաև անիզոտրոպ, երկար կոնական խողովակի առաձգապլաստիկական վիճակը արտաքին և ներքին կողային մակերևույթների վրա ազդող հավասարաչափ բաշխված նորմալ և շոշափոխ ուժերի ղեկբում: Ընդունված է, որ նյութի անիզոտրոպության ղլխավոր առանցքները համընկնում են, համապատասխանաբար, ղլանային և ղնդային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ: Ստացված են արտահայտություններ, որոնք կապ են հաստատում արտաքին ուժերի և առաձգական ու սլլաստիկ գոտիների սահմանի միջև:

THE ELASTOPLASTIC STATE OF ANISOTROPIC  
CYLINDRICAL AND CONICAL TUBES

A. G. HACOBIAN, M. A. ZADROYAN

S u m m a r y

The elastoplastic state of an orthotropic thick-walled cylindrical tube under the joint effect of uniformly distributed normal and tangential forces on internal and external cylindrical surfaces, extending axial forces and twisting moments applied on end-face plane cross-section,

and the elastoplastic state of the anisotropic, long, conical tube under the uniform normal and tangential forces acting on internal and external lateral surfaces are considered. The main axes of anisotropy are assumed to coincide, respectively, with the axes of cylindrical and spherical coordinates. The relations establishing a connection between external forces and the boundary between elastic and plastic zones have been obtained.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Задоян М. А.* О некоторых решениях уравнений пластического течения анизотропной среды.—Изв. АН СССР. МТТ, Инж. ж., 1966, № 2, с. 91—96.
2. *Колмогоров В. Л., Соловей В. Д.* К предельной нагрузке анизотропной трубы под внутренним давлением. Прикл. механика, 1975, т. 11, в. 7, с. 79—88.
3. *Carter E., Neale K. W.* Large strain inelastic behaviours of cylindrical tubes. —Intern. J. Solids and Struct., 1983, v. 19, № 8, p. 709—724.
4. *Sugimoto Masakatsu, Itakura Jochikeyo, Saito Koichi.* Изучение пластического поведения труб из анизотропного материала с открытыми и закрытыми концами под внутренним давлением „Нихон кикай гаккай ромбунсю“.—Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1973, 39, № 328, p. 3609—3618.
5. *Бочарова С. А.* Напряженное состояние цилиндра из анизотропного материала под действием внутреннего давления и осевой силы при больших пластических деформациях.—Изв. вузов. Машиностроение, 1971, № 7, с. 5—10.
6. *Vollen Josef, Frosch Hans-Georg.* Elastisch-plastisches Verhalten dickwandiger Zylinder unter Berücksichtigung der plastischen Anisotropie und der plastischen Kompressibilität. Forsch. Ingenieurw., 1983, 49, № 4, p. 112—116.
7. *Акопян А. Г.* Предельное состояние пластически анизотропной конической трубы.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. 38, № 1, с. 20—32.
8. *Задоян М. А.* Упругопластическое состояние конической трубы.—Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 56—60.
9. *Задоян М. А.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы.—Изв. АН СССР. МТТ, 1987, № 4, с. 98—109.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
8.VII.1985

УДК 532.591

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ  
 БЮРГЕРСА-КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

ОГАНЯН Г. Г.

Уравнение Бюргера-Кортевега-де Вриза описывает распространение волн малой, но конечной амплитуды в диспергирующих средах, в которых учтено влияние диссипации. Оно, например, моделирует волновые процессы в химически активных газожидкостных смесях [1—3], звуковые колебания электронной плазмы, магнитогидродинамические ударные волны. Известно, что уравнение Бюргера описывает структуру слабой ударной волны, а уравнение Кортевега-де Вриза — распространение кноидальных волн и солитонов. Одновременный учет эффектов дисперсии и диссипации рассматривался с точки зрения влияния дисперсии на структуру ударной волны [4], для чего использовалась механическая аналогия с «потенциальной ямой».

В настоящей работе получено точное частное решение, записываемое через эллиптические функции Якоби. Это решение посредством разложения в ряд по малому параметру Якоби удается упростить и привести к тригонометрической форме.

§ 1. Приведение к интегрируемой форме. В системе координат, движущейся с невозмущенной скоростью звука  $c_0$ , уравнение Бюргера-Кортевега-де Вриза имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.1)$$

где  $u$  — скорость частиц среды,  $t$  — время,  $x$  — координата,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$  — соответственно коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии. Интересуясь стационарными решениями уравнения (1.1), положим  $u(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Vt$ , где  $V$  — скорость движения фронта ударной волны малой, но конечной амплитуды. Тогда уравнение сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое после интегрирования запишется в виде

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{\zeta}{\gamma} \frac{du}{d\xi} + \frac{\alpha}{2\gamma} u^2 - \frac{V}{\gamma} u + C = 0 \quad (1.2)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Вводя новые переменную  $s$  и функцию  $v$

$$s = \left( \frac{\alpha}{12\gamma} \right)^{1/2} \xi, \quad u = \frac{V}{\alpha} + \frac{6}{25} \frac{\zeta^2}{\alpha\gamma} - v \quad (1.3)$$

перепишем уравнение (1.2) в виде

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - 5 \left( \frac{12\delta^2}{25x\gamma} \right)^{1/2} \frac{dv}{ds} - 6v^3 + \frac{72\delta^2}{25x\gamma} v + \frac{6V}{a} \left( \frac{V}{x} - \frac{36}{625} \frac{v^4}{x\gamma^3} \right) - \frac{12\gamma}{a} C = 0$$

Обозначая  $12\delta^2(25x\gamma)^{-1} = a^2$  и выбирая постоянную интегрирования

$$C = \frac{V^2}{2x\gamma} - \frac{a}{8\gamma} a^2 \quad (1.4)$$

приведем искомое уравнение к форме уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - 5a \frac{dv}{ds} - 6v^3 + 6a^2 v = 0 \quad (1.5)$$

Отметим, что уравнение (1.5), выведенное из (1.1), совершенно другим методом получено в [5].

§ 2. *Недиссипативный случай* ( $\bar{v} = 0$ ). Уравнение (1.5) упрощается

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = 6v^3 \quad (2.1)$$

Умножая уравнение (2.1) на  $dv/ds$  и интегрируя один раз, получим

$$\left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 4v^3 - c_1 = 4(v-b_1)(v-b_2)(v-b_3) \quad (2.2)$$

Здесь  $c_1$  — постоянная интегрирования, определяемая из задач с граничными или начальными условиями.  $b_1, b_2, b_3$  — корни уравнения  $4v^3 - c_1 = 0$ , связанные между собой соотношениями

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0, \quad b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 = 0, \quad b_1 b_2 b_3 = -\frac{c_1}{4}$$

Обозначим через  $b_2$  вещественный корень, а  $b_1, b_3$  — комплексно-сопряженные корни

$$b_2 = \sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}, \quad b_1 = \sqrt[3]{\frac{c_1}{4}} \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \quad b_3 = \bar{b}_1$$

Интегрируя уравнение (2.2) и далее заменяя переменную интегрирования  $v$  на  $\varphi$

$$v = \sqrt[3]{\frac{c_1}{4}} + \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{c_1}{4}} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2.3)$$

приведем его к нормальной тригонометрической форме эллиптического интеграла первого рода

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \pm 2\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{c_1}{4}} (s+c_2), \quad k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Здесь  $c_2$  — постоянная интегрирования,  $k$  — модуль интеграла,  $0 < k < 1$ . Согласно определению эллиптического косинуса [6, 8], (2.3) можно выразить через эллиптические функции Якоби

$$v = \sqrt{\frac{c_1}{4}} \left[ 1 + \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{cn}(2z, k)}{1 - \operatorname{cn}(2z, k)} \right], \quad z = \sqrt{3} \sqrt{\frac{c_1}{4}} (s + c_2) \quad (2.4)$$

Отметим, что решение уравнения (2.1) можно записать также через функцию Вейерштрасса [7]:  $v = \wp(s - c_2, 0, c_1)$ , с инвариантами  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = c_1$ . Выражая  $\wp$  через эллиптические функции Якоби [8], снова приходим к решению (2.4). Используя формулу для удвоенных аргументов эллиптического косинуса [6, 8], решение (2.4) можно записать в виде

$$v = \sqrt{\frac{c_1}{4}} \left[ 1 + \sqrt{3} \frac{\operatorname{cn}^2(z, k)}{\operatorname{sn}^2(z, k) \operatorname{dn}^2(z, k)} \right], \quad \operatorname{dn}^2 z = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z$$

где  $\operatorname{sn}(z, k)$  — эллиптический синус. Согласно известным разложениям в ряд по параметру Якоби  $q$  [6], имеем

$$\frac{\operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)} = \frac{\pi}{2K} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2K} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 + (-1)^n q^n} \sin \frac{n\pi z}{K} \right]$$

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right), \quad K'(k) = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (2.5)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $k'$  — дополнительный модуль интеграла. В рассматриваемой задаче  $q \approx 0,02$ , поэтому проводя соответствующие выкладки, для функции  $v$  можно получить выражение

$$v = \sqrt{\frac{c_1}{4}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{c_1}{4}} 0,966 \operatorname{ctg}^2(0,983 z) + O(q)$$

Если внести обозначения  $A_1 = 0,983\sqrt{3} \sqrt{\frac{c_1}{4}}$ ,  $B_1 = \sqrt{A_1 c_2}$ , выражение для истинной скорости  $u$  примет вид

$$u = \frac{V}{\alpha} - \frac{A_1}{0,966\sqrt{3}} - A_1 \operatorname{ctg}^2 \left[ \sqrt{\frac{A_1 \alpha}{12\gamma}} (x - Vt) + B_1 \right] \quad (2.6)$$

Ниже, в п. 3, будет показано, что требование перехода диссипативного решения к решению (2.6) приводит к условию  $B_1 = u$ , так что окончательно получим

$$u = \frac{V}{\alpha} - \frac{A_1}{0,966\sqrt{3}} - A_1 \operatorname{ctg}^2 \left[ \sqrt{\frac{A_1 \alpha}{12\gamma}} (x - Vt) \right] \quad (2.7)$$

Итак, решение (2.7) представляет собой волну, распространение которой описывается уравнением (2.1). Нетрудно показать, что период такой волны равен

$$T \approx \sqrt{\frac{12\gamma}{A_1 \alpha}}$$

§ 3. Учет диссипации. Переходя в уравнении (1.5) от  $s$  к новой независимой переменной  $z = \exp(\alpha s)$ , приведем (1.5) к виду

$$a^2 z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} - 4a^2 z \frac{dv}{dz} - 6v^3 - 6a^2 v = 0 \quad (3.1)$$

Полагая  $v = a^2 z^2 f(z)$ , получим относительно функции  $f(z)$  уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 6f^2$$

совпадающее по виду с уравнением (2.1). Поэтому точное решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$v = \sqrt{\frac{c_3}{4}} a^2 e^{2az} \left[ 1 + \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{cn}(2z, k) \operatorname{sn}^2(k)}{1 - \operatorname{cn}(2z, k)} \right], \quad z = \sqrt[3]{\frac{c_3}{4}} (e^{a_1 z} + c_4) \quad (3.2)$$

где  $c_3, c_4$  — безразмерные постоянные интегрирования, значения модуля  $k$  приведено в п. 2. Отметим, что решение уравнения (1.5) можно также записать через функцию Вейерштрасса [7] с инвариантами  $g_2 = 0, g_3 = -1$ :

$$v = a^2 c_3^2 e^{-2az} \wp(c_3 e^{-az} + c_4, 0, -1)$$

Постоянные интегрирования  $c_3$  и  $c_4$  связаны с  $c_2$  и  $c_1$  несложными соотношениями, которые здесь не приводим. Используя известные формулы перехода от  $\wp$  к эллиптическим функциям Якоби [8], снова приходим к решению (3.2). Согласно формуле для удвоенного аргумента эллиптических функций [6, 8], полученное решение можно выразить через истинную скорость  $u$  по формуле (1.3)

$$u(\xi) = \frac{V}{\alpha} + \frac{6\delta^2}{25\alpha\gamma} - \sqrt{\frac{c_3}{4}} \frac{12\delta^2}{25\alpha\gamma} e^{a_1 z} \left[ 1 + \sqrt{3} \frac{\operatorname{cn}^2(z, k)}{\operatorname{sn}^2(z, k) \operatorname{dn}^2(z, k)} \right] \quad (3.3)$$

Для дальнейшего сравнения решений (3.3) и (2.6) выберем постоянные  $c_3$  и  $c_4$  следующим образом:

$$c_3 = \left( \frac{25\alpha\gamma}{12\delta^2} \right)^3 c_1, \quad c_4 = -1$$

Тогда, используя формулы (2.5), решение (3.3) можно упростить до вида

$$u(\xi) = \frac{V}{\alpha} + \frac{6\delta^2}{25\alpha\gamma} - \frac{A_1}{0,966\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2}{5} \frac{\delta}{\gamma} \xi\right) - A_1 \operatorname{ctg}^2 \left[ \sqrt{\frac{25\alpha\gamma}{12\delta^2}} A_1 \left( \exp\left(\frac{\delta}{5\gamma} \xi\right) - 1 \right) \right] \quad (3.4)$$

Как видно из решения (3.4), учет диссипации приводит к тому, что волновой процесс, описываемый уравнением (1.5), является аперриодическим. В предельном случае отсутствия диссипации разложим экспоненту в ряд по степеням  $\frac{\delta}{\gamma}$  и далее устремим  $\delta$  к нулю. Тогда (3.4) перейдет в решение (2.6), в котором необходимо положить  $B_1 = \pm \pi$ , то есть в решение (2.7). Таким образом, требование перехода диссипативного решения в недиссипативное ( $\delta \rightarrow 0$ ) приводит к необходимости определения лишь одной постоянной интегрирования.

Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Տարրեր միջազայրերում ալիքների տարածումը դիսիպացիայի էֆեկտների առկայությանը նկարագրվում է Բյուրգերս-Կորտեևեգ-դե Վրիզի հաստատումով: Ցակորիի էլիպտիկական ֆունկցիաների միջոցով պոնված է ալիքազատման ճշգրիտ մասնակի լուծումը, որը վերլուծելով շարքի բառ հակորիի փոքր պարամետրի, բերվում է Լամանչյունաչափական տեսքի: Յույց է տրված, որ դիսիպացիայի էֆեկտի հաշվառումը բերում է ալիքային պրոցեսի ոչ պարբերական դառնալուն:

ON PARTIAL SOLUTION OF THE BURGER-KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

G. G. OGHANIAN

S u m m a r y

The Burger-Korteweg-de Vries equation describes the propagation of waves of small amplitude in the media with dissipation and disperse effects. The exact partial solution is obtained which is defined by means of Jacobi elliptic functions. It has been shown that dissipation effect brings about aperiodic wave process.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в вязкожидкостной смеси.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5, с. 71—76.
2. Оганян Г. Г. О распространении возмущений в химически активной жидкости, содержащей пузырьки газа.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, 31, № 3, с. 49—62.
3. Губайдуллин А. А., Иванкоев А. И., Нигматуллин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
4. Карлман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. Kallnowski M. N., Grundland M. An exact solution of the Korteweg-de Vries equation with dissipation.—Lett. in Math. Physics, 1981, v. 5, p. 61—65.
6. Градштейн И. С. и Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
8. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стигга. М.: Наука, 1979. 830 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
22.XI.1985

УДК 539.3

## О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ УПРУГИХ РЕБЕР К КОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А., ХИЖНЯК Л. А.

Взаимодействие изотропной и анизотропной оболочек с упругими ребрами рассматривалось в работах [1, 2]. Ниже на основе фундаментального решения, построенного в [3], решается задача включения для пьезокерамической оболочки конечной длины.

1. Рассмотрим отнесенную к координатной системе  $x, \beta, \gamma$  замкнутую по  $\beta$  цилиндрическую пьезокерамическую оболочку длины  $l_0$ , поляризованную вдоль оси  $x$ . На торце  $x=0$  оболочка жестко закреплена, торец  $x=l_0$  свободен от сил. Пусть в точках  $x_0, \beta_0 + mT$  ( $m=1, 2, \dots, n-1$ ) к оболочке приложена система сосредоточенных сил с компонентами  $P_x=P_1, P_y=P_2, P_z=P_3$ .

Будем исходить из полученного ранее [3] фундаментального решения уравнений теории пологих пьезокерамических оболочек. Компоненты матрицы Грина представим в виде

$$u_{ij}(x, \beta, z_0, \beta_0) = u_{ij}^0(x, z_0) + A_{ij} \Psi_j \quad (1.1)$$

$$\Psi_j = - \frac{P_j}{F_2 R_2^2 a_0} G(x, \beta, z_0, \beta_0); \quad G(x, \beta, z_0, \beta_0) = E(x - x_0, \beta - \beta_0) + \\ + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{10} B_k^{(l)} \exp[ik\omega_k^{(l)}]$$

где  $u_{ij}^0$  — общее решение системы уравнений пологой оболочки [3] при  $P_j=0$  ( $j=1, 2, 3, 4$ );  $B_k^{(l)}$  — постоянные, определяемые из граничных условий;  $E(x - x_0, \beta - \beta_0)$  — фундаментальное решение;  $u_{ij}$  — перемещения ( $i=1, 2, 3$ ) и потенциал электрического поля ( $i=4$ ) в точке  $(x, \beta)$  от действия сосредоточенной силы  $P_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) или заряда  $P_4$  в точке  $(x_0, \beta_0 + mT)$ . Остальные величины, входящие в (1.1), определены в [3].

Условия на торцах оболочки имеют вид

$$u = v = \omega = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (1.2)$$

$$T_1 = M_1 = S = N_1^* - N_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \quad \text{при } x=l_0$$

Рассмотрим два случая электрических граничных условий: 1 —

горцы оболочки электродированы и заземлены ( $\varphi=0$ ); 2—заземленный торец электродирован и заземлен ( $\varphi=0$ ), свободный торец электрически зажат ( $D_z=0$ ).

В рассматриваемой задаче нас будут интересовать перемещения от сосредоточенной силы  $P_1$ . В силу (1.1) имеем

$$u_{11}=u(x, \beta)=u^0 + A_{11}U_1, \quad u_{21}=v(x, \beta)=z^0 + A_{12}U_1, \quad (1.3)$$

$$u_{31}=w(x, \beta)=\alpha r + A_{13}U_1, \quad u_{41}=\varphi(x, \beta)=\varphi^0 + A_{14}U_1$$

$$u^0 = \frac{\rho}{\mu} \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) z^0 + (12e^2 a_{11} / \mu^2 a_3 c_{33} + c_{21} / \mu) B_5^{(0)} z^0 -$$

$$+ (c_{44} \gamma - 12a_3 \rho / \mu^2 a_3 c_{33}) B_6^{(0)} z^0 + B_7^{(0)} z^0 + B_8^{(0)} z^0 + B_9^{(0)} z^0; \quad \omega^0 = \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) +$$

$$+ 12a_3 (e B_5^{(0)} - \nu B_6^{(0)}) / \mu a_3 c_{33}$$

$$\varphi^0 = -\rho \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z^0 x) z^0 + (c_{44} \gamma - 12a_3 \rho / \mu^2 a_3 c_{33}) B_5^{(0)} z^0 +$$

$$+ (12a_3 \rho^2 / \mu^2 a_3 c_{33} + c_{21} / \mu) B_6^{(0)} z^0 + B_7^{(0)}$$

$$A_{11} = \frac{h^2}{R_1^2} \sum_{j=0}^2 b_{11}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{4-2j} \partial z^{2j}} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{11}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j} r}$$

$$A_{12} = \frac{h^2}{R_1^2} \sum_{j=1}^2 b_{12}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j}} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=1}^2 b_{12}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j} r}$$

$$A_{13} = \frac{h^2}{R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{13}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j}}$$

$$A_{14} = \frac{h^2 b_{14}^{10}}{R_1^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12R_2^2} \sum_{j=0}^2 b_{14}^{1j} \frac{\partial^4}{\partial x^{2-2j} \partial z^{2j} r}$$

$$b_{10}^{10} = -c_{44}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11}); \quad b_{11}^{11} = -c_{11}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11}); \quad b_{12}^{12} = 0; \quad b_{13}^{13} = -c_{44} c_{33} \varepsilon_{33}$$

$$b_{14}^{14} = -c_{33}(r^2 - c_{44} \varepsilon_{11}) - \varepsilon_{33} f; \quad b_{11}^{11} = -2/r^2 - \varepsilon_{33} c_{11} r^2 - \varepsilon_{11} f; \quad b_{12}^{12} = -e_{13} \gamma + c_{44}(e_{13}^2 - \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_{13}^{13} = 0; \quad b_{14}^{14} = c_{11} g; \quad b_{11}^{11} = c_{33}(e_{23} s + e_{33} r); \quad b_{12}^{12} = s \varepsilon + r(2e_{33} f + c_{33} e_{13})$$

$$b_{13}^{13} = s \varepsilon + r(2f e_{13} - c_{11} e_{33}); \quad b_{14}^{14} = c_{11}(\varepsilon_{11} s + e_{13} r); \quad b_{10}^{10} = c_{44}(e_{13} e_{33} + \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_{11}^{11} = c_{33} g + e_{13} \gamma - c_{44}(e_{13}^2 + c_{11} \varepsilon_{33}); \quad b_{12}^{12} = -c_{11} g; \quad b_{13}^{13} = c_{14} \gamma; \quad b_{14}^{14} = -c_{33} c_{44} e_{33}$$

$$b_{15}^{15} = c_{13} c_{33} r - 2e_{33} c_{11} s + c_{33}(c_{11} e_{13} - c_{11} e_{33}); \quad b_{16}^{16} = 2f r s - c_{11} e_{33} r - e_{13} f$$

$$b_{17}^{17} = c_{11}(r s - c_{11} e_{33} - e_{13}^2)$$

Входящие сюда упругие и пьезоэлектрические постоянные и их комбинации определены в [3].

Используя выражения для усилий и моментов [1] и уравнения состояния пьезокерамической среды [5], имеем

$$T_1 = \frac{h}{R_2} \left[ c_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + w \right) + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \quad (1.4)$$

$$S = \frac{h}{R_2} \left[ c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial z}{\partial z} \right], \quad M_1 = - \frac{h^3}{12R_2^3} \left( c_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)$$

$$N_1 = - \frac{h^3}{12R_2^3} \left[ c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{41}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \beta} \right]$$

$$D_1 = \frac{1}{R_2} \left[ e_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + e_{13} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - e_{35} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$$

Подставляя (1.3) в граничные условия (1.2), получим системы линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных  $B_i^{(k)}$ , ( $k=0, 1, \dots$ ), ( $i=1, 2, \dots, 10$ ). В силу громоздкости их не выписываем. Этим заканчивается построение матрицы Грина для конечной оболочки.

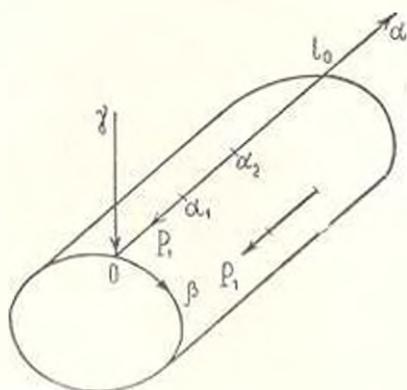
2. Пусть конечная пьезокерамическая оболочка усилена вдоль отрезков  $z_1 \leq z \leq z_2$ ,  $\beta_m = 2\pi m/\omega$  ( $m=0, 1, \dots, \omega-1$ ) тонкими упругими ребрами жесткости, нагруженными на концах  $z_1$  одинаковыми продольными силами  $P_1$  вдоль отрицательной оси  $z$  (фиг. 1).

Будем предполагать, что ребро непрерывно скреплено с оболочкой и работает только на растяжение-сжатие, материал ребра диэлектрик. Условие совместности деформации ребра и оболочки имеет вид

$$P(\alpha)/EF = \int_{z_1}^{z_2} \epsilon(z, z_0) q(z_0) dz_0 \quad (2.1)$$

$$\epsilon(z, z_0) = \epsilon_1 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u = \frac{u_{11}}{P_1}$$

Здесь  $\epsilon(z, z_0)$  — продольная деформация;  $u_{11}$  — перемещение в точке  $(z, 0)$  от действия сосредоточенной силы  $P_1$ , приложенной в точке  $z_0$ ;  $\beta_m$ ,  $q(z_0)$  — интенсивность контактных усилий, действующих на оболочку;  $E$  и  $F$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения ребра.



Фиг. 1

Вычисляя ядро  $\epsilon(z, z_0)$  с учетом (1.1), (1.3) и подставляя его в (2.1), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно интенсивности контактных усилий.

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{q(t) dt}{(t-x)} + A \int_{z_1}^{z_2} q(t) F(x, t) dt + B \int_{z_1}^{z_2} q(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

$$x = (Lx + z_1 + z_2)/2; \quad a_0 = (Ll - z_1 - z_2)/2, \quad L = z_2 - z_1; \quad A = -3L\omega / \sum_{m=1}^{\omega} \operatorname{Re} [id(z_m)/z.]$$

$$B = -TR_2 h A a_0 / EF b_{10}^{11}, \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, t) - \frac{Th a_0}{b_{10}^{11}} \frac{\partial u^0}{\partial z}$$

$$\Phi_1(x, t) = \frac{\text{sign}(x-t) a_0}{2a_3} \left( 1 - \frac{b_{10}^{11} a_3}{12 b_{10}^{11} a_3} \right) \left[ 1 - \text{Im} i \exp(iz_0 L |x-t|/2) \right]$$

$$\Phi_2(x, t) = \frac{1}{12} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} i d(z_n) \left[ \text{ctg} \frac{\omega z_n L (x-t)}{4} - \frac{4}{L \omega z_n (x-t)} \right]$$

$$\Phi_3 = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{R_2}{h} \right)^2 \rho(z_n^k) (k\omega)^{-1} + \frac{1}{12} d(z_n^k) \right] \exp(ik\omega L z_n^k |x-t|/2) -$$

$$- \frac{d(z_n)}{12} \exp(ik\omega L z_n |x-t|/2) \left| \text{sign}(x-t) \right.$$

$$\Phi_4(x, t) = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^{(k)} \left[ \left( \frac{R_2}{h} \right)^2 (k\omega)^2 b_1(z_n^k) + \right.$$

$$\left. + \frac{(k\omega)^2}{12} b_2(z_n^k) \right] \exp[ik\omega z_n^k (Lx + x_2 + a_3)/2]; \quad b_1(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_{10}^{11}}{b_{10}^{11}} z^{5-2l}$$

$$b_2(z) = \sum_{j=0}^4 \frac{b_{11}^{11}}{b_{10}^{11}} z^{6-2j}; \quad \rho(z) = b_1(z) \Delta'(z); \quad d(z) = b_2(z) \Delta'(z)$$

Условие равновесия ребра даст

$$\int_{-1}^1 q(t) dt = -2P_1 / R_2 L \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) решались численно методом Мультипликации [6]. После определения контактных усилий механические и электрические величины вычисляются по формулам

$$u_k(x, \beta) = R_2 \int_{a_1}^{a_2} \sum_{j=1}^3 q_j(z_0, \beta) u_{kj}(x, a_0, \beta, \beta_0) dz_0 \quad (2.4)$$

$u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ,  $u_4 = \varphi$ ,  $q_j(z_0, \beta)$  — контактное усилие в точке  $(z_0, \beta)$  от действия нагрузки  $P_1$ .

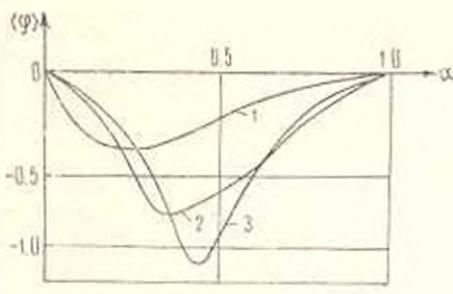
В частности, потенциал электрического поля в оболочке имеет вид

$$\langle \varphi \rangle = - \int_{a_1}^{a_2} q_1(z_0, \beta) \left[ - \frac{Th a_3}{b_{10}^{11}} \varphi^0 + A_{10} \psi_1 \right] dz_0 \quad (2.5)$$

$$\langle \varphi \rangle = \varphi(x, \beta) / V_0; \quad V_0 = b_{10}^{11} P_1 / Th R_2 a_3$$

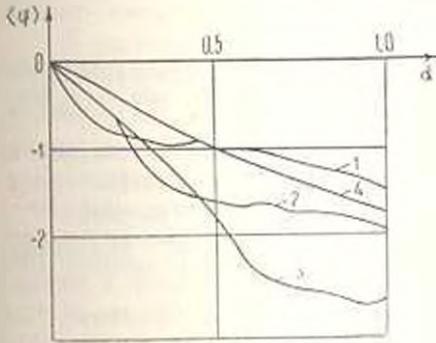
На фиг. 2 представлены графики распределения потенциала электрического поля вдоль оси  $x$  для случая заземленных торцов оболочки из пьезокерамики  $PZT-5$  [5] при  $\beta=0$ ,  $\omega=6$ ,  $R_2/h=5$ .

Кривая 1 соответствует  $\alpha_1=0,1$ ,  $\alpha_2=0,4$ ; кривая 2— $\alpha_1=0,3$ ,  $\alpha_2=0,6$ ; кривая 3— $\alpha_1=0,4$ ,  $\alpha_2=0,5$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ —координаты начала и конца ребра соответственно).



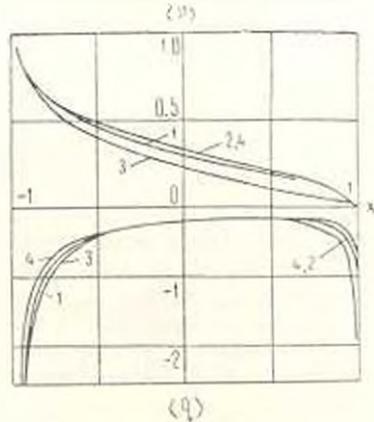
Фиг. 2

На фиг. 3 представлены распределения потенциала электрического поля для случая 2 при тех же параметрах оболочки. Кривая 1 соответствует  $\alpha_1=0,1$ ,  $\alpha_2=0,4$ ; кривая 2— $\alpha_1=0,3$ ,  $\alpha_2=0,6$ ; кривая 3— $\alpha_1=0,6$ ,  $\alpha_2=0,9$ ; кривая 4— $\alpha_1=0,3$ ,  $\alpha_2=0,6$  ( $\beta = \pi/\omega$ ).



Фиг. 3

На фиг. 4 представлены кривые относительного усилия в ребре  $P(x)/P_1 = \langle P \rangle$  и контактного погонного усилия  $\langle q \rangle q(x) R_2 I_0 / 2 P_1$ .



Фиг. 4

Анализ результатов расчета позволяет сделать вывод, что значение потенциала существенно зависит от места расположения ребра. При приближении ребра к свободному краю абсолютная величина потенциала увеличивается.

**ԱՌԱՋՊԱՆԱՆ ԿՈՂՆԵՐԻՑ ՊՅԵՃՈՒՆԵՐԱՄԵԿԱԿԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹԻՆ ԲԵՐԻ ՓՈՒԱՆՑՐԱՆ ԽԱՍԻՆ**

Լ. Ա. ՅԻՇՏԻՆՍԿԻ, Լ. Ա. ԽԵՒՆՅԱԿ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկված է ներդրակի խնդիրը առավելագույն կողից վերջավոր դրանային պլանկերամիկական թաղանթին բերի փոխանցման դեպքում: Մի ծայրը ամրակցված, իսկ մյուսը ուժերից ազատ վերջավոր թաղանթի համար կառուցված է Գրինի մատրիցը: Այնուհետև ներդրակի խնդիրը բերված է ինտեգրալ հավասարման, որը լուծված է թվային եղանակով: Հաշվված են էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը, նիզերը կողում և կոնտակտային ճիգերը՝ ազատ ծայրում տարբեր էլեկտրական սպառմանների դեպքում:

# LOADING TRANSFER FROM ELASTIC RIBS TO THE FINITE PIEZOELECTRIC SHELL.

L. A. PILSHTINSKI, L. A. KHIZNYAK

## Summary

The problem concerning loading transfer from elastic ribs to the finite cylinder piezoelectric shell has been examined. Green's matrix has been built for the finite shell secured on one end and free of forces on the other. Then the problem of inclusion is reduced to an integral equation, which is solved numerically. The potential field, the forces in the ribs, and the contact forces for various electrical conditions on the loose end have been defined.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. П., Толкачев В. М. О передаче усилия от ребер жесткости к цилиндрической оболочке.—В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, с. 177—181.
2. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.—ПММ. 1975, т. 39, вып. 5 с. 900—908.
3. Фильштинский Л. А., Хизняк Л. А. Реакция пьезокерамической оболочки на сосредоточенные воздействия.—ПММ. 1983, т. 47, вып. 3, с. 478—482.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
5. Бершинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.—В кн.: Физическая акустика. (Под ред. У. Мелона). Т. 1, ч. А. М.: Мир, 1966, с. 204—226.
6. Калаидия А. П. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.

Сумский филиал Харьковского  
политехнического института им. В. П. Ланна

Поступила в редакцию  
19.XI.1981

УДК 539.376

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ  
СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ  
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ  
ПОРКШЕЯН В. М.

Возрастающие масштабы практического использования полимеров и композитов привели к необходимости экспериментального исследования и теоретического обоснования физических, и частности, термомеханических процессов в средах данного типа. Особый интерес вызывает изучение термовязкоупругих тонкостенных конструкций [1—6].

В настоящей работе рассмотрен случай осесимметричных циклических колебаний оболочек вращения с учетом связности тепловых и механических эффектов. Гипотеза терморологической простоты материала не привлекается; при постановке краевой задачи учитывается осциллирующая составляющая температурного поля [6].

Решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 14 порядка осуществляется разложением полей перемещений и температур на регулярную и погранслоистую составляющие.

Особенность исследуемой задачи состоит в том, что при построении погранслоя принципиально невозможно ввести локальную систему координат у краев оболочки, использование которой позволило бы одновременно удовлетворить всем граничным условиям. Указанная трудность преодолевается в работе построением двух существенно различных погранслоев.

1. *Постановка задачи.* Рассматривается тонкая термовязкоупругая, анизотропная, неоднородная оболочка вращения толщины  $h$  с главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ ;  $h \ll R_1$ ,  $R_2 < \infty$ . В качестве криволинейных координат выбираются толщиная координата  $z$ , угол  $x$ , образованный осью вращения и нормалью к срединной поверхности, и угол поворота произвольного осевого сечения оболочки  $\varphi$ :

$$|z| \leq \frac{h}{2}; \quad x_0 \leq x \leq x_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Используемая в настоящей работе модель термовязкоупругой среды получена на основе традиционного термодинамического анализа одного частного представления функционала свободной энергии Гельмгольца, рассмотренного в работе [7].

$$\rho \dot{b}(t) = \int \int \int \left[ \frac{1}{2} E^{ijkl}(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\eta)}{\partial \eta} - \varphi^{nl}(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \varepsilon_{nl}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} - \frac{1}{2} m(r, t, \tau, \eta) \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right] d^3 \tau d^3 \eta$$

где  $f(r, t, \tau, \eta) = f[r, T(r, t-\tau), \varepsilon_{ij}(r, t-\tau), T(r, t-\eta), \varepsilon_{kl}(r, t-\eta), T(r, t), \varepsilon_{mn}(r, t), t-\tau, t-\eta]$ ,  $b(t) = T(r, t) - T(r, 0)$ ;  $r$  — радиус-вектор материальных точек.

Предлагаемая модель способна отразить ряд свойств реальных полимеров: эффекты механической и тепловой «памяти»; зависимость термомеханических характеристик материала как от предистории, так и от текущих значений деформаций и температуры. В случае гармонических колебаний около положения равновесия определяющие уравнения для тензора напряжений и энтропии, совместные со вторым законом термодинамики в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема, имеют вид, аналогичный соотношениям Дюгамеля-Неймана в теории термоупругости, [7]:

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl}(T, t\omega) \varepsilon_{kl} - \varphi^{ni}(T, t\omega) \theta; \quad \rho S = \varphi^{nl}(T, t\omega) \varepsilon_{nl} + m(T, t\omega) \theta \quad (1.1)$$

где  $\sigma^{ij}$  — комплексный тензор напряжений;  $S$  — удельная комплексная энтропия.

В работе [6] из принципа Лагранжа, гипотез Кирхгофа-Лява, допущения о линейном законе распределения температуры по толщине с учетом определяющих уравнений (1.1) получена следующая приведенная система уравнений движения и теплопроводности для осесимметричных деформаций:

$$\begin{aligned} a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u + \varepsilon a_4 w''' + \varepsilon a_5 w'' + a_6 w' + a_7 w &= \varepsilon^{-1} A_1 \theta' + A_2 \theta' + \varepsilon^{-1} A_3 \theta + A_4 \theta \\ \varepsilon b_0 w''' + \varepsilon b_1 w'' + b_2 u' + b_3 u + \varepsilon^2 b_4 w''' + \varepsilon^2 b_5 w'' + \varepsilon b_6 w' + \varepsilon b_7 w &= \\ &= Q + B_1 \theta'' + \varepsilon B_2 \theta'' - B_3 \theta' + \varepsilon B_4 \theta' + \varepsilon^{-1} B_5 \theta + B_6 \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon c_1 T'' + \varepsilon^2 c_2 T'' + \varepsilon c_3 T' + \varepsilon c_4 T' + c_5 T + \varepsilon c_6 T - c_7 = \varepsilon^2 C(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon d_1 T'' + \varepsilon^2 d_2 T'' + d_3 T' + \varepsilon d_4 T' + d_5 T - d_6 T + d_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon c_1 \theta'' - \varepsilon^2 c_2 \theta'' - \varepsilon c_3 \theta' + \varepsilon c_4 \theta' + c_5 \theta - \varepsilon c_6 \theta + \tilde{c}_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

$$\varepsilon d_1 \theta'' + \varepsilon^2 d_2 \theta'' + d_3 \theta' + \varepsilon d_4 \theta' + d_5 \theta + d_6 \theta - \tilde{d}_7 = \varepsilon^2 D(u, w, u', w', w'', T, T', \theta, \theta')$$

Граничные условия на боковых поверхностях ( $x=x_0$ ,  $x=x_1$ ) выбираются в одном из следующих сочетаний:

$$A_l + B_j - Ck + Dn, \quad l=1, 2, 3; \quad j, k, n=1, 2,$$

где

$$A \quad 1) \quad T|_{x_k} = T_k^*; \quad \theta|_{x_k} = \theta_k^*, \quad n, k=0, 1$$

$$2) \quad c_n T' - c_{n+1} T' + \tilde{c}_n T|_{x_k} = q_{nk}^*$$

$$e_n \theta' + e_{n-1} \theta^1 + e_n \theta |_{x_k} = \bar{q}_n, \quad n, k=0, 1$$

$$3) e_n T'' + e_{n-1} T' + s_n T^0 + s_{n-1} T^1 + g_n |_{x_k} = 0$$

$$e_n \theta^0 + e_{n-1} \theta^1 + s_n \theta^0 + s_{n+1} \theta^1 + \bar{g}_n |_{x_k} = 0; \quad n, k=0, 1$$

$$B \quad 1) u |_{x_k} = u_k^*$$

$$2) p_1 u' + p_2 u + p_3 w'' + p_4 w' + p_5 w + p_6 \theta^0 + p_7 \theta^1 |_{x_k} = P_k^*, \quad k=0, 1$$

$$C \quad 1) w |_{x_k} = w_k^*$$

$$2) q_1 u'' + q_2 u' + q_3 u + q_4 w'' + q_5 w' + q_6 w + q_7 \theta^0 + q_8 \theta^1 + q_9 \theta^0 + q_{10} \theta^1 + q_{11} \theta^1 |_{x_k} = P_k^*, \quad k=0, 1$$

$$D \quad 1) w' |_{x_k} = \bar{w}_k^*$$

$$2) t_1 u' + t_2 u + t_3 w'' + t_4 w' + t_5 w + t_6 \theta^0 + t_7 \theta^1 |_{x_k} = M_k^*, \quad k=0, 1$$

Здесь  $T(x, t) = T(x) + \operatorname{Re}[\theta(x) \exp(i\omega t)]$  — абсолютная температура оболочки;  $T(x) = \bar{T} + z \bar{T} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T}(x, z) dz$  — усредненная за цикл колебаний

температура;  $\theta = \theta^0 + z \theta^1 + i \theta_2$  — амплитуда осциллирующей составляющей температурного поля;  $Q \exp(i\omega t)$  — суммарное нормальное давление на лицевых поверхностях ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) оболочки,  $Q = z^{-2} \bar{Q}$ ;  $u = u_1 +$

$+ i u_2 = \frac{\bar{u}}{h}$ ,  $\bar{u}$  — комплексное перемещение вдоль меридиана;  $w = w_1 +$

$+ i w_2 = \frac{\bar{w}}{h}$ ,  $\bar{w}$  — комплексный прогиб;  $(\cdot)' = \frac{d}{dx}$ ;  $\varepsilon = \frac{h}{R}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $K =$

$= \max(R_1, R_2)$ ;  $R_{1(2)} = R r_{1(2)}$ ;  $P(\bar{T}, \bar{T}) = P_n(\bar{T}, \bar{T}) + \varepsilon P_1(\bar{T}, \bar{T}) + \varepsilon^2 P_2(\bar{T}, \bar{T})$ ,

$P = (a_j, A_j, b_j, B_j, c_j, d_j, e_j, p_j, q_j, t_j, s_j)$ .

Коэффициенты  $P_j$  весьма громоздки; ограничимся выражениями для  $\bar{C}$ , имеющими смысл усредненной диссипации (с точностью до слагаемого  $\frac{\omega}{2} R^{k+1} m_2 |\theta^0|^2$ ), и  $\bar{D}$ :

$$\begin{aligned} \bar{C} = \frac{\omega}{2} R^{k+1} & \left[ \varepsilon E_1^{2k} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k}) + \varepsilon^2 E_2^{2k} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k}) + \right. \\ & + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k} + \varepsilon^2 E_2^{k+2} (\varepsilon_{2n} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{1n} \varepsilon_{1k}) + \varphi_1^k (\theta_1 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n}) + \\ & \left. + \varepsilon \varphi_1^k (\theta_1 \varepsilon_{2n} + R \theta_1 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n} - R \theta_2 \varepsilon_{1n}) + \varepsilon^2 R \varphi_1^k (\theta_1 \varepsilon_{2n} - \theta_2 \varepsilon_{1n}) \right] \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$-\frac{k}{\varphi_2^{n/2}}(\theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_2 \varepsilon_{1n}) - \varepsilon \frac{k+1}{\varphi_2^{n/2}}(\theta_2 \varepsilon_{2n} + R\theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_1 \varepsilon_{1n} + R\theta_1 \varepsilon_{1n}) -$$

$$-\varepsilon^2 R \varphi_2^{n/2}(\theta_2 \varepsilon_{2n} + \theta_1 \varepsilon_{1n})]$$

$$D = [i\omega R^{k-1} \{ T(\varepsilon \varphi^{n/2} \varepsilon_{n/2} + \varepsilon^2 \varphi^{n/2} \varepsilon_{n/2} + m\theta + \varepsilon R m \theta) +$$

$$+ \varepsilon R T(\varepsilon \varphi^{n/2} \varepsilon_{n/2} + \varepsilon^2 \varphi^{n/2} \varepsilon_{n/2} + m\theta + \varepsilon R m \theta) \}, k=0, 1]$$

Здесь  $E^{n/kl}(T, T, i\omega) = E_1^{n/kl}(T, T, \omega) + iE_2^{n/kl}(T, T, \omega)$  — комплексный тензор модулей материала;  $\varepsilon_{n/2} = \varepsilon_{n/2}^0 + 2\varepsilon_{n/2}^1 + i\varepsilon_{2n/2}$  — комплексный тензор деформаций;  $\varphi^{n/2}(T, T, i\omega) = \varphi_1^{n/2}(T, T, \omega) + i\varphi_2^{n/2}(T, T, \omega)$  — приведенный комплексный тензор теплового расширения;  $m(T, T, i\omega) = m_1(T, T, \omega) + im_2(T, T, \omega)$  — приведенный комплексный коэффициент теплоемкости;  $F(T, T) = h^{-k} \int_{-k/2}^{k/2} F(T+zT, z) z^k dz$ .

Компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + z\varepsilon_{11}^1 = \frac{u' + w}{r_1} - \frac{z}{r_1} \left( \frac{w' - u}{r_1} \right)'$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + z\varepsilon_{22}^1 = \frac{u \operatorname{ctg} x + w}{r_1} - z \frac{\operatorname{ctg} x}{r_2} \frac{w' - u}{r_1} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^0 + z\varepsilon_{33}^1 = \frac{\varphi_{33}^0}{E_{3333}} \theta - \frac{E_{3333}^0}{E_{3333}} \varepsilon_{33} + z \left[ \frac{\varphi_{33}^1}{E_{3333}} \theta - \frac{E_{3333}^1}{E_{3333}} \varepsilon_{33} + \left( \frac{\varphi_{33}^0}{E_{3333}} \right)' \theta - \left( \frac{E_{3333}^0}{E_{33} \varphi} \right)' \varepsilon_{33} \right]$$

2. Выбор разрешающих функций. Не нарушая общности, положим, что  $Q \sim 0(\varepsilon)$  и заданы следующие граничные условия:

$$f|_{x_j} = f_j^k = \varepsilon^{-k/2} (f_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} f_{j1}^k + \dots), \quad u|_{x_j} = u_j^k = \varepsilon^{-k/2} (u_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} u_{j1}^k + \dots) \quad (2.1)$$

$$w|_{x_j} = w_j^k = \varepsilon^{-k/2} (w_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} w_{j1}^k + \dots), \quad w'|_{x_j} = \bar{w}_j^k = \varepsilon^{-k/2} (\bar{w}_{j0}^k + \varepsilon^{1/2} \bar{w}_{j1}^k + \dots)$$

где  $f = (T, \theta)$ ;  $k, j = 0, 1$ ;  $\rho_0 = -\frac{1}{2}$ ;  $\rho_1 = -1$ .

Решение системы (1.2) строится в виде

$$Z = Z^I(x) + Z^{II}(\xi_1) + Z^{III}(\zeta_1) + Z^{IV}(\xi_2) + Z^{V}(\zeta_2)$$

где

$$Z = (g_1, g_2, u, w); \quad g_1 = (T, \theta); \quad g_2 = (T, \theta)$$

$$x = x_0 + \varepsilon^{1/2} \xi_2 = x_0 + \zeta_2 = x_1 - \varepsilon^{1/2} \xi_1 = x_1 - \zeta_1$$

$$g_i^j(x) = g_{i0}^j + \varepsilon^{1/2} g_{i1}^j + \dots, \quad i=0, 1 \quad (2.2)$$

$$u^I(x) = \varepsilon^{-1} (u_0^I + \varepsilon^{1/2} u_1^I + \dots), \quad w^I(x) = \varepsilon^{-1} (w_0^I + \varepsilon^{1/2} w_1^I + \dots)$$

$$g_i^j(\xi_1) = \varepsilon^{-1/2} (g_{i0}^j + \varepsilon^{1/2} g_{i1}^j + \dots), \quad u^{II}(\xi_1) = \varepsilon^{-1} (u_0^{II} + \varepsilon^{1/2} u_1^{II} + \dots)$$

$$w^{II}(\xi_1) = \varepsilon^{-1/2} (w_0^{II} + \varepsilon^{1/2} w_1^{II} + \dots) \quad (2.3)$$

$$g_1^{(1)}(\zeta_1) = g_{10}^{(1)} + \varepsilon^{1/2} g_{11}^{(1)} + \varepsilon g_{12}^{(1)} + \dots, \quad g_2^{(1)}(\zeta_1) = \varepsilon^{-1} (g_{20}^{(1)} + \varepsilon^{1/2} g_{21}^{(1)} + \varepsilon g_{22}^{(1)} + \dots) \quad (2.4)$$

$$u^{(1)}(\zeta_1) = u_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2} u_1^{(1)} + \varepsilon u_2^{(1)} + \dots, \quad w^{(1)}(\zeta_1) = w_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2} w_1^{(1)} + \varepsilon w_2^{(1)} + \dots$$

$Z^{(1)}(\zeta_1)$  и  $Z^{(1)}(\zeta_2)$  имеют такой же вид.

Повышение (или понижение) порядка малости по  $\varepsilon$  кривых условий и нагрузки  $Q$  приводит к повышению (или понижению) порядка малости значений разрешающих функций (2.2) — (2.4), но не изменяет общей схемы решения задачи.

В настоящей работе при реализации первого и второго итерационных процессов ограничимся определением главных членов в разложениях (2.2) — (2.4), поскольку все последующие находятся аналогично.

В дальнейшем в очевидных случаях индексы  $(\ )^I, (\ )^{II}, (\ )^{III}$  опускаем.

3. *Первый итерационный процесс.* Переходим к построению регулярного решения. После подстановки (2.2) в (1.2) с учетом разложения коэффициентов

$$(a_j, A_j, b_j, B_j, c_j, d_j)(T, \bar{T}) = Y(T, \bar{T}) = Y(T_0, \bar{T}_0) + \varepsilon^{1/2} Y(T_0, \bar{T}_0) + \dots$$

получаем последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $T_j, \bar{T}_j, \theta_j, \bar{\theta}_j, u_j, w_j, j=0, 1, \dots$

Введем обозначения

$$f = (T, \bar{T}); \quad c_j = (c_j, \bar{c}_j); \quad d_j = (d_j, \bar{d}_j)$$

На первом этапе имеем

$$f_0(x) = -\frac{c_f}{c_2}, \quad f_2(x) = -\frac{d_2 f_0 + d_3 f_0 + d_f}{d_4}$$

Перемещения  $u$  и прогибы  $w$  определяются из следующих уравнений:

$$F_1(x)u_0' + F_2(x)u_0'' + F_3(x)u_0 = F_4(x), \quad w_0(x) = \frac{b_2 - b_2 u_0 - b_3 u_0}{b_0} \quad (3.1)$$

Здесь  $F_1(x) = a_1 - \frac{b_2}{b_0} a_0$ ;  $F_2(x) = a_2 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right)' - a_0 \frac{b_2}{b_0} - a_0 \frac{b_2}{b_0}$

$$F_3(x) = a_3 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right)'' - \frac{a_2}{b_0} b_2; \quad F_4(x) = a_4 - a_0 \left( \frac{b_2}{b_0} \right)''' - a_0 \frac{b_0}{b_0}$$

$$c_f = c_{f0}; \quad a_j = a_{j0}; \quad b_j = b_{j0}; \quad d_j = d_{j0}; \quad b_0 = Q + B_0 \theta_0; \quad a_0 = A_1 \theta_0 + A_2 \theta_0$$

Выбор метода решения уравнения (3.1) связан, в основном, с геометрией оболочки. Для оболочек, замкнутых в полюсе, коэффициенты  $F_k(x), k=1, 2, 3$  имеют особенность при  $x=0$ ; в этом случае

ограниченное решение уравнения определяется с точностью до одной константы  $O^1$ .

Анализ последующих систем позволяет получить регулярное решение, удовлетворяющее исходной системе (1.2) с любой заданной точностью по  $\varepsilon$ .

4. Второй итерационный процесс. Для нахождения первого пограничного у края  $x=x_1$  вводится локальная координата  $\xi$ :  $x=x_1-\varepsilon^{1/2}\xi$ ,  $\xi=x_1$ .

Как и при построении регулярного решения, первый пограничный находит из последовательности систем, полученных подстановкой (2.3) в однородную систему (1.2) с заменой  $x$  на  $\xi$ .

Главные члены разложения (2.3), удовлетворяющие условию убывания при  $\xi \rightarrow \infty$ , определяются с точностью до четырех постоянных  $G_j^0$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ :

$$T_0^0 = G_1^0 \exp(k\xi), \quad T_1^0 = \frac{d_2}{d_1} G_1^0 \exp(k\xi), \quad \theta_0^0 = G_2^0 \exp(k\xi), \quad \theta_1^0 = \frac{d_2}{d_1} G_2^0 \exp(k\xi) \quad (4.1)$$

$$u_0 = H_1 \exp(\lambda_1 \xi) + H_2 \exp(\lambda_2 \xi) + H_3 \exp(k\xi)$$

$$w_0 = G_1^0 \exp(\lambda_1 \xi) + G_2^0 \exp(\lambda_2 \xi) + H G_3^0 \exp(k\xi)$$

где  $p_1 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_3 = 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ ;  $H = B_1 - B_2 - \left( \frac{b_2}{k a_1} + \frac{k b_0}{a_1} \right) A_1$

$$H_k = \left( \frac{a_2}{a_1} \lambda_k + \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{\lambda_k} \right) G_1^0, \quad k=0, 1$$

$$H_2 = \left( \frac{a_1 k H + a_2 H}{a_1} - \frac{1}{k} \frac{a_3}{a_1} \right) G_1^0; \quad p_1 = b_1 - \frac{b_2}{a_1} a_1; \quad p_2 = b_1 - \frac{b_0}{a_2} a_0 - \frac{a_1}{a_2} b_2$$

$$p_3 = b_1 - \frac{a_1}{a_1} b_2; \quad k^2 = \frac{c_2 d_1}{c_1 d_2 - c_1 d_3}; \quad \text{Re}(k) < 0; \quad a_j = a_{j0}; \quad b_j = b_{j0}$$

$$c_j = c_{j0}; \quad d_j = d_{j0}; \quad B_j = B_{j0}; \quad A_j = A_{j0}; \quad f_{j0} = f_j(x=x_1) = f_j(\xi=0)$$

Для получения второго пограничного у края  $x=x_1$  вводится локальная координата  $\zeta$ :

$$x = x_1 - \varepsilon \zeta, \quad \zeta = \zeta_1$$

После замены  $x$  на  $\zeta$  и подстановки (2.4) в однородную систему (1.2) получаем последовательность систем для определения  $(T_j, T_j^1, \theta_j, \theta_j^1, u_j, w_j)^{0,1}$ .

Убывающее при  $\zeta \rightarrow \infty$  решение первой системы находится с точностью до двух постоянных  $G_j^0$  и  $G_j^1$ :

$$T_0^0 = M G_1^0 \exp(\gamma \zeta), \quad T_0^1 = G_1^1 \exp(\gamma \zeta), \quad \theta_0^0 = -M G_2^0 \exp(\gamma \zeta), \quad \theta_0^1 = G_2^1 \exp(\gamma \zeta)$$

$$u_0 = \frac{G_1^0}{\gamma} \frac{A b_1 - a_1 B}{a_1 b_1 - a_1 b_0} \exp(\gamma \zeta), \quad u_1 = G_2^1 \frac{B a_1 - A b_0}{a_1 b_1 - a_1 b_0} \exp(\gamma \zeta)$$

где

$$t_1^2 + t_2 \gamma + t_3 = 0, \quad \operatorname{Re}(t) < 0; \quad M = \frac{c_2}{c_1} - \frac{1}{\gamma} \frac{c_3}{c_1}, \quad A = A_1 M - A_2, \quad B = -B_1 M + B_2$$

$$t_1 = d_2 - d_1 \frac{c_2}{c_1}, \quad t_2 = d_1 \frac{c_3}{c_1} + d_2 \frac{c_2}{c_1} - d_3, \quad t_3 = d_3 - d_2 \frac{c_3}{c_1}, \quad a_j = a_{j0}, \quad b_j = b_{j0}$$

$$c_j = c_{j0}, \quad d_j = d_{j0}, \quad B_j = B_{j0}, \quad A_j = A_{j0}, \quad f_{j0} = f_j(x=x_1) = f_j(\zeta=0)$$

Построением второго погранслоя завершается решение задачи: наличие семи произвольных констант позволяет удовлетворить всем граничным условиям при  $x=x_1$ .

Погранслой при  $x=x_0$  строится аналогичным образом.

В заключение коротко воспроизведем схему построения решения.

1) Выбором констант  $(G_1^{II})_0$  и  $(G_1^{II})_0$  однозначно определяется

вектор  $f_{k0}^{II}$ , удовлетворяющий краевым условиям

$$f_{k0}^{II}(\xi_k=0) = f_{k0}^*$$

2) Выбором констант  $(G_1^{III})_0$  и  $(G_2^{III})_0$  определяется вектор  $f_{k0}^{III}$

такой, что

$$f_{k0}^{III}(\xi_k=0) + f_{k0}^{II}(\xi_k=0) = f_{k0}^*$$

3) И снова, выбором констант  $(G_1^{IV})_1$  и  $(G_1^{IV})_1$  определяется  $f_{k1}^{IV}$  —

вектор из условий

$$f_{k1}^{IV}(\xi_k=0) + f_{k0}^{III}(\xi_k=0) + f_{k0}^{II}(x=x_k) = f_{k1}^*$$

и т. д.

Перемещения  $n$  и прогибы  $w$  строятся по следующей схеме.

1) Используя  $(G_1^{II})_0$  и  $(G_1^{II})_0$ , находим прогиб  $w_{k0}^{II}$ , удовлетворяющий вместе со своей производной краевым условиям

$$w_{k0}^{II}(\xi_k=0) = w_{k0}^*, \quad (w_{k0}^{II})'(\xi_k=0) = \bar{w}_{k0}^*$$

2) Выбором константы  $(G_k^I)_0$  определяются  $u_{k0}^I$ :

$$u_{k0}^I(x=x_k) + u_{k0}^{II}(\xi_k=0) = u_{k0}^*$$

и т. д.

5. *Некоторые выводы и замечания.* Проведенный анализ право-мочен, если выполнено следующее условие:

$$\varepsilon \ll \max \{ |P_j| \} \tag{5.1}$$

то есть для сравнительно слабых нагружений, малых частот колебаний и тонких оболочек. Очевидно, что при этом не приходится ожидать значительного теплообразования в оболочке. Это обстоятельство позволяет пренебречь в исходных уравнениях нелинейностью, которая

обусловлена зависимостью  $P$  от  $T^0$  и  $T^1$ . А именно, полагаем

$$P(\overset{0}{T}, \overset{1}{T}) = \begin{matrix} P(\overset{0}{T}^1, \overset{1}{T}^1), & x \in D \\ P(\overset{0}{T}^*, \overset{1}{T}^*), & x \in \bar{D} \end{matrix}$$

где  $D = \{x | x_0 + \delta < x < x_1 - \delta\}$ ,  $\bar{D} = \{x | x_0 < x < x_0 + \delta \wedge x_1 - \delta < x < x_1\}$ ,

$$0 < \delta \ll \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

Нелинейность уравнений (1.2) связана также со структурой функций  $\overset{k}{C}$  и  $\overset{k}{D}$ . При построении решения осуществляется следующее разложение:

$$S(\overset{k}{e}_{jn}^1, \overset{k}{e}_{jn}^{11}, \overset{k}{e}_{jn}^{111}, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{\theta}^{111}, \overset{k}{T}^1, \overset{k}{T}^{11}, \overset{k}{T}^{111}) = S^I + S^{II} + S^{III}$$

где  $S = (\overset{k}{C}, \overset{k}{D})$ ; вектор  $S^I = S^I(\overset{k}{e}_{jn}^1, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{T}^1)$  определяет регулярную часть;

вектор  $S^{II} = S^{II}(\overset{k}{e}_{jn}^{11}, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{T}^{11})$  — первый погранслой;

$S^{III} = S^{III}(\overset{k}{e}_{jn}^{111}, \overset{k}{e}_{jn}^{111}, \overset{k}{e}_{jn}^{111}, \overset{k}{\theta}^1, \overset{k}{\theta}^{11}, \overset{k}{\theta}^{111}, \overset{k}{T}^1, \overset{k}{T}^{11}, \overset{k}{T}^{111})$  — второй погранслой.

Из проведенного исследования системы уравнений (1.2) при сделанных предположениях малости (5.1) следует, что в подавляющей части оболочки температурное поле определяется тепловыми условиями на лицевых поверхностях.

В качестве примера рассмотрим оболочку, с лицевых поверхностей которой осуществляется теплообмен с внешними средами по закону Ньютона. Температурное поле вдали от краев оболочки определяется регулярной составляющей и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_0^0(x) &= \frac{\overset{0}{\gamma}^+ T^+ + \overset{0}{\gamma}^- T^-}{\overset{0}{\gamma}^+ + \overset{0}{\gamma}^-} + o(\varepsilon), & T_0^1(x) &= -\frac{\overset{0}{\Lambda}^{21}}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \frac{\overset{0}{\gamma}^+}{r_2} + \frac{\overset{0}{\gamma}^- - \overset{0}{\gamma}^+}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} T_0^0 + \\ &+ \frac{R}{2} \frac{\overset{0}{\gamma}^+ T^+ - \overset{0}{\gamma}^- T^-}{\overset{0}{\Lambda}^{22}} + o(\varepsilon); & \theta_0^0(x) &= \frac{\overset{0}{\gamma}^+ \theta^+ + \overset{0}{\gamma}^- \theta^-}{\overset{0}{\gamma}^+ + \overset{0}{\gamma}^-} + o(\varepsilon^{3/2}) \\ \theta_0^1(x) &= -\frac{\overset{0}{\Lambda}^{21}}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \frac{\overset{0}{\theta}^+}{r_2} - \frac{\overset{0}{\gamma}^- - \overset{0}{\gamma}^+}{\overset{0}{\Lambda}^{33}} \theta_0^0 + \frac{R}{2} \frac{\overset{0}{\gamma}^+ \theta^+ - \overset{0}{\gamma}^- \theta^-}{\overset{0}{\Lambda}^{22}} + o(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma^\pm$  — коэффициенты теплообмена с лицевых поверхностей;  $\Lambda^{ij}$  — тензор коэффициентов теплопроводности;  $T^\pm = R_1(\theta^\pm \exp(i\omega t))$  — температура внешних сред.

Если  $T^\pm = \text{const}$ , то с точностью  $o(\varepsilon)$  в оболочке устанавливается однородное по  $x$  и линейное по  $z$  температурное поле. В случае  $\theta^\pm \neq 0$  указанное температурное поле также и стационарно с точностью  $o(\varepsilon^{3/2})$ .

Что же касается приграничных областей оболочки, то здесь осциллирующие температурные поля, задаваемые на боковых по-

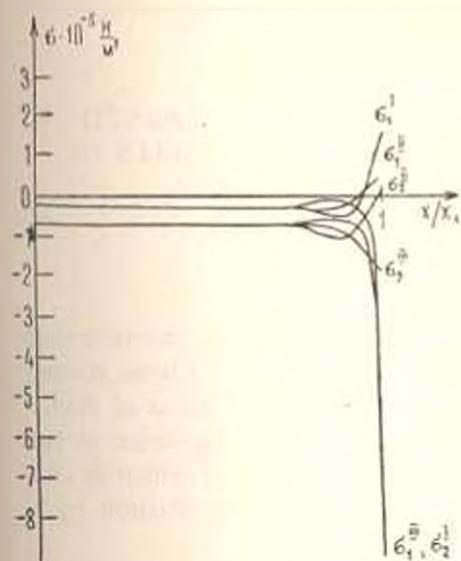
верхностях, самым существенным образом меняют картину напряженно-деформированного состояния в оболочке

Последнее утверждение проиллюстрируем на примере тонкого сферического купола, подверженного внешнему гармоническому нагружению. Боковая поверхность оболочки жестко закреплена и поддерживается при заданной температуре; с лицевых поверхностей осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона.

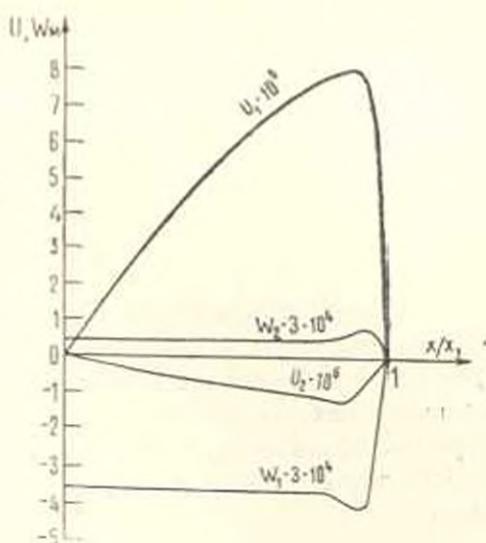
Численный расчет проведен для купола, изготовленного из капрона-Б, термомеханические модули которого приведены в работе [8]. Остальные параметры принимаются следующими:

$$\omega = 0,1 \text{ рад/сек}; R = 0,1 \text{ м}; h = 10^{-4} \text{ м}; \alpha_1 = \pi/2; Q = 10^4 \text{ н/м}^2; T^- = 40 \text{ C};$$

$$T^- = 20^\circ\text{C}; T^+ = 30^\circ\text{C}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведено распределение действительной и мнимой составляющих окружных напряжений  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_2 + i\sigma_2$  в зависимости от амплитуды температурных осцилляций на краях оболочки  $\theta^0 = i(I); 0(II); 1(III)$ .

На фиг. 2 приведены графики меридианального перемещения  $u = u_1 + iu_2$  и прогиба  $w = w_1 - iw_2$  для случая  $\theta^0 = 0$ .

Проведенный численный анализ показывает, что для адекватного описания термонапряженного состояния вязкоупругих оболочек необходимо учитывать осцилляции тепловых полей.

ՑԻՊԻԿ ԲԵՌԵԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳԵՊԳՈՒՄ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՄԱՐ  
ՋԵՐՄԱԱԽԱՉԳԱՄԱՆՈՒՑԻՎՈՒԹՅԱՆ ԿԱՊԱԿՅՈՒՄ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ  
ՄԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Մ. ՊՈՐԿՇԵՅԱՆ

Ա. մ. վ. ա. փ. ո. մ.

Աստամնասիրվում է սահմայառաիկ մեթոդի կիրառությունը ջիկյիկ  
րեոնալորումների զիպրում պատման թազանիների ջերմաառաձգամածու-  
ջիկություն կապակցված խնդիրների անայիպի նամար: Սաաջված է սեղա-  
փոխությունների սեղայար և սահմանային ջերտիրի բաղադրիչների ձկվածք-  
ների և ջերմաաիձանների կաուցման սխեման:

Ցույց է տրված երկու տարրեր սահմանային ջերտիրի գոյությունը,  
որոնցից աուջիեր պայմանալորված է թաղանթի շարժման ճաղասարում-  
ներով, իսկ երկրորդը ջերմահաղորդականության ճաղասարումներով:

AN ASYMPTOTIC METHOD OF SOLUTION OF COUPLED  
PROBLEM OF THERMOVISCOELASTICITY FOR SHELLS OF  
REVOLUTION UNDER PERIODIC LOADING

V. M. PORKSHEYAN

S u m m a r y

Asymptotic analysis of the coupled problem of thermoviscoelasticity for the shells of revolution under periodic loading has been studied. The expressions for the regular and boundary-layer solutions of displacements, flexures and temperatures are obtained. The existence of two types of boundary-layer solution has been shown, first of which is caused by the equations of motion, second—by the heat conduction equations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Воронин И. И., Сафроненко В. Г. О применении вариационных принципов в связанных задачах термовязкоупругих оболочек.—Изв АН СССР. МТТ, 1980. № 4, с. 166—173.
2. Гуменюк Б. И., Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные динамические задачи термовязкоупругости для пластин и оболочек.—В кн.: Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 374—382.
3. Киричок И. Ф., Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение гибких вязкоупругих пластин и оболочек при циклических нагрузках.—Проблемы прочности, 1979, № 3, с. 10—14.
4. Колтунов М. А., Мирсайнов М., Трояновский И. Я. Вынужденные колебания вязкоупругих осесимметричных оболочек.—В кн.: Динамика оснований, фундаментов и подзем. сооружений. Ташкент: 1977, с. 148—150.
5. Неборзова П. Ф. К определению температурного поля в полимерной цилиндрической оболочке при циклическом нагружении (техническая теория)—Прикладная теория упругости, Саратов, 1980, с. 28—33.

6. Поркшеяк В. М. О постановке краевой задачи связанной термовязкоупругости — Рук. деп. ВИНТИ, № 3000—83 ДЕП, 1982. 12 с.
7. Поркшеяк В. М. Об одном представлении функционала свободной энергии в термовязкоупругости.—Рук. деп. ВИНТИ, № 5095—82 ДЕП, 1982. 8 с.
8. Степаненко Ю. П. К вопросу об уравнениях состояния изотропного полимерного материала.—В кн. Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1981. с. 115—133.

НИИ механики и прикладной математики РГУ

Поступила в редакцию  
15.VIII.1984