ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1987

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АКОПЯН Н. З., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Задача вынужденных колебаний тонкой идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле рассмотрена в работе [1], в которой показано существенное влияние напряженности магнитного поля на амплитуду резонансных колебаний.

В настоящей работе, исходя из линейных уравнений магнитоупругости тонких пластин [2], рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластинки-полосы конечной электропроводности в продольном магнитном поле. Исследовано и показано существенное влияние напряженности магнитного поля, проводимости материала пластинки, частоты внешней силы и толщины пластинки на характеристики вынужденных колебаний.

1. Рассмотрим тонкую изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, отнесенную к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xy. Пусть пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводимостью σ находится в вакууме и под действием поперечной нагрузки $P(x, t)$ колеблется во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}(H, 0, 0)$, направленном по оси ox. Граничные условия, нагрузка и геометрия пластинки таковы, что формой колебаний является цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными координатной линии oy.

Задача решается на основе следующих предположений: а) справедлива гипотеза магнитоупругости тонких тел [2] в виде, предложенном в работе [3]; б) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и окружающей среды равны единице; в) влияние токов смещения пренебрежимо мало.

На основе принятых предположений в работе [3] получена следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \\
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma h}{c}\left(\varphi+\frac{H}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi, t)}{\xi-x}\,d\xi=0 \\
D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2\sigma h}{c}H\left(\varphi+\frac{H}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-P(x, t)=0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

описывающая вынужденные колебания пластинки-полосы конечной проводимости в продольном магнитном поле.

В уравнениях (1.1) w — прогиб пластинки, ψ — тангенциальная компонента индуцированного в слое $|z|<h$ электрического поля, f — нормальная компонента индуцированного в слое $|z|<h$ магнитного поля, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ε — коэффициент затухания при отсутствии магнитного поля, ρ — плотность материала пластинки, c — электродинамическая постоянная,

$$\delta=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x\in[0, a] \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0, a] \end{cases}$$

a — ширина пластинки-полосы. В первых двух уравнениях $-\infty<x<\infty$, а в последнем — $x\in[0, a]$.

К системе уравнений (1.1) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить обычные условия закрепления краев пластинки, начальные условия и условия на бесконечности (f и ψ стремятся к нулю при $|x|\to\infty$).

Как показывает точное решение системы (1.1) в случае бесконечной пластинки, член $\partial f/\partial x$ во втором уравнении имеет порядок h/a по сравнению с последним членом этого уравнения [4]. Поэтому, оставаясь в пределах точности теории тонких пластинок, в дальнейшем им будем пренебрегать. Тогда из первых двух уравнений системы (1.1) путем применения обратного преобразования Гильберта и с учетом третьего уравнения определяем f и ψ. Подставляя найденное значение ψ в третье уравнение системы (1.1), задачу вынужденных колебаний пластинки в продольном магнитном поле приводим к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{4\sigma h}{c^2}\int_0^a \frac{\partial F}{\partial t}\,\frac{d\xi}{\xi-x}+\frac{2\sigma h H^2}{c^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}=0 \tag{1.2}$$

где

$$F=D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}-P(x, t)$$

с обычными краевыми условиями для w на длинных сторонах $x=0$ и $x=a$ пластинки.

2. На основе (1.2) рассмотрим задачу вынужденных колебаний шарнирно опертой по краям $x=0$, $x=a$ пластинки-полосы шириною a под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, t)=P_1(x)\sin\omega t$.

Решение исходного уравнения (1.2), удовлетворяющего известным условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin\lambda_n x, \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{a} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $w_n(t)$

$$L_m(w_m)+4\pi\sigma\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\frac{dL_n(w_n)}{dt}+\frac{\sigma H^2}{\rho c^2}\frac{dw_m}{dt}=$$

$$=A_m\sin\omega t+4\pi\sigma\omega B_m\cos\omega t \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$L_k=\Omega_{0k}^2+\frac{d^2}{dt^2}+\varepsilon\frac{d}{dt},\quad \Omega_{0k}^2=\frac{D\lambda_k^4}{2\rho h}$$

$$a_{mn}=\frac{2h}{\pi a\lambda_m c^2}\int_0^a\int_0^a\frac{\cos\lambda_m x\sin\lambda_n\xi}{\xi-x}\,d\xi dx$$

$$A_m=\frac{1}{a\lambda_m\rho h}\int_0^a\cos\lambda_m x\,dP_1 \tag{2.3}$$

$$B_m=\frac{1}{\pi a\lambda_m\rho c^2}\int_0^a\int_0^a\frac{P_1(\xi)\cos\lambda_m x}{\xi-x}\,d\xi dx$$

Ω_{0k}—частоты собственных колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля.

Если возмущающая сила отсутствует ($A_m=B_m=0$), то уравнения (2.2) являются однородными и характеризуют собственные магнитоупругие колебания конечнопроводящей пластинки в продольном магнитном поле. Представляя решение указанной однородной системы в виде

$$w_n(t)=c_n\exp(i\omega_0 t) \tag{2.4}$$

где ω_0—частота магнитоупругих колебаний, для определения неизвестных коэффициентов c_n получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений [5]:

$$[\gamma_m^2+\Omega^2+(\gamma+\alpha\alpha_0)\Omega]c_m+\alpha_0\Omega\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}(\gamma_n^2+\Omega^2+\gamma\Omega)c_n=0$$

где

$$\gamma_k=\frac{\Omega_{0k}}{\Omega_{01}},\quad \Omega=\frac{i\omega_0}{\Omega_{01}},\quad \gamma=\frac{\varepsilon}{\Omega_{01}},\quad \alpha=\frac{V_A^2}{c^2}$$

$$V_A^2=\frac{H^2}{4\pi\rho},\quad b_{mn}=a_{mn}\Omega_{0n}^2,\quad \alpha_0=\frac{4\pi\sigma}{\Omega_{01}} \tag{2.5}$$

Приравнивая определитель однородной системы (2.5) нулю, приходим к следующему характеристическому уравнению относительно частоты Ω

$$\|[\gamma_m^2+\Omega^2+(\gamma+\alpha\alpha_0)\Omega]\delta_{mn}+\alpha_0\Omega(\gamma_n^2+\Omega^2+\gamma\Omega)b_{mn}\|=0 \tag{2.6}$$

где δ_{mn}—символ Кронекера.

Легко показать, что определитель (2.6) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из (2.6) для определения первой частоты магнитоупругих колебаний получается уравнение

$$\sigma_0\Omega^3+(\beta+\sigma_0\gamma)\Omega^2+[\sigma_0(1+\alpha\beta)+\beta\gamma]\Omega+\beta=0 \tag{2.7}$$

где

$$\beta=\frac{1}{a_{11}\varepsilon\Omega_{01}^2}$$

Уравнение типа (2.7) при $\varepsilon=0$ получено и исследовано в работах многих авторов. Показано существенное влияние напряженности магнитного поля и проводимости материала пластинки как на частоту, так и на демпфирование колебаний.

Вернемся к основной задаче вышеуказанных колебаний пластинки, ограничиваясь первым приближением. Тогда из системы (2.2) в случае $P_1(x)=P_0\sin\lambda_1 x$ получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\left(\beta+\sigma_0\frac{d}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2w_1}{d\tau^2}+\gamma\frac{dw_1}{d\tau}+w_1+w_c\sin\theta\tau\right)+\sigma_0\alpha\beta\frac{dw_1}{d\tau}=0 \tag{2.8}$$

где

$$\tau=\Omega_{01}t,\quad \theta=\omega/\Omega_{01},\quad w_c=P_0/2\rho h\Omega_{01}^2$$

w_c — прогиб пластинки от статически действующей вертикальной силы $P_0\sin\lambda_1 x$.

Частное решение уравнения (2.8), описывающее установившиеся вынужденные колебания, имеет вид

$$w_1=w_c\sqrt{\beta^2+\sigma_0^2\theta^2}\{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)[(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2]+$$
$$+\sigma_0\alpha\beta\theta^2[2\beta\gamma+2\sigma_0(1-\theta^2)+\sigma_0\alpha\beta]\}^{-0.5}\sin(\theta\tau-\varphi) \tag{2.9}$$

где угол φ, представляющий сдвиг фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями, определяется из соотношения [6]

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)\gamma+\sigma_0\alpha\beta^2}{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)(1-\theta^2)-\sigma_0\alpha\beta\theta^2}\theta \tag{2.10}$$

Как видно из (2.9), амплитуда вынужденных колебаний получается путем умножения статического прогиба w_c на абсолютное значение множителя

$$K=\left\{(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2+\frac{2\sigma_0\alpha\beta\theta^2}{\beta^2+\sigma_0^2\theta^2}[\beta\gamma+\sigma_0(1-\theta^2)+0{,}5\sigma_0\alpha\beta]\right\} \tag{2.11}$$

который называется динамическим коэффициентом [6]. При отсутствии магнитного поля ($\alpha=0$) из (2.11) для динамического коэффициента получим известное выражение

$$K_0=[(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2]^{-0,5} \tag{2.12}$$

Для большей наглядности сначала рассмотрим случай идеально проводящего материала ($\sigma_0 \to \infty$). В этом случае из (2.11) легко получить следующее выражение для динамического коэффициента

$$K_1 = [(\gamma\theta)^2 + (1-\theta^2)^2 + 2\alpha\beta(1-\theta^2) + (\alpha\beta)^2]^{-0.5} \qquad (2.13)$$

Сравнивая (2.13) с (2.12), можем записать

$$K_1 = K_0 \left[1 + \frac{2\alpha\beta(1-\theta^2) + (\alpha\beta)^2}{(1-\theta^2)^2 + (\gamma\theta)^2} \right]^{-0.5} \qquad (2.14)$$

Рассматривая (2.13) или (2.14), легко заметить, что зависимость динамического коэффициента от параметра α, характеризующего напряженность магнитного поля, является монотонно убывающей, если $\theta \leqslant 1$. Для этого случая ($\theta \leqslant 1$) на основании формулы (2.14) проведены вычисления значения относительного динамического коэффициента в зависимости от напряженности магнитного поля при различных значениях $s = 2h/a$. Здесь и в дальнейшем при расчетах принято: $E = 1{,}1 \cdot 10^{12}$ дин/см², $a = 10$ см, $\rho = 8{,}93$ г/см³, $\nu = 0{,}36$, $\gamma_0 = 0{,}03$, где $\gamma_0 = 2\pi\varepsilon/\Omega_{01}$ — относительное рассеяние энергии вследствие конструкционного демпфирования. Результаты подсчета значений K_1/K_0 приведены в табл. 1 и на фиг. 1, причем пунктирные линии соответствуют случаю $\theta^2 = 0{,}9$, а сплошные линии — случаю $\theta = 1$ (случай резонанса в отсутствии магнитного поля). Рассматривая таблицу и построенные кривые, замечаем, что при наличии магнитного поля амплитуда вынужденных колебаний существенно уменьшается и это влияние намного усиливается в случае резонансных колебаний.

Таблица 1

Значения K_1/K_0

	$10^{-4} \cdot H$ (э) / $10^2 \cdot s$	0	1	2	3	4	5
$\theta^2 = 0{,}9$	1	1	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$
	5	1	0,602	0,502	0,309	0,201	0,139
	9	1	0,959	0,855	0,724	0,595	0,48[illegible]
$\theta = 1$	1	1	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	$3{,}8 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	$9{,}6 \cdot 10^{-5}$	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$
	5	1	0,169	$4{,}8 \cdot 10^{-2}$	$2{,}1 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$7{,}7 \cdot 10^{-3}$
	9	1	0,746	0,270	0,124	$7 \cdot 10^{-2}$	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$

Если же частота вынуждающей силы велика по сравнению с собственной частотой ($\theta > 1$), то нарушается монотонная зависимость динамического коэффициента от напряженности магнитного поля. В этом случае динамический коэффициент принимает максимальное значение при $\alpha = (\theta^2 - 1)/\beta$ и равняется

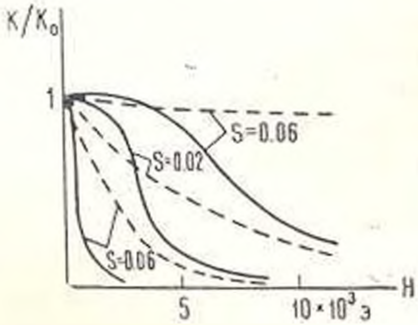
$$\max_{(\alpha)} K_1 = (\gamma\theta)^{-1}, \quad (\theta > 1) \qquad (2.15)$$

На фиг. 2 приведены графики зависимости K_1/K_0 от напряженности магнитного поля при различных s, когда $\theta^2 = 1{,}1$, откуда видно, что в отличие от предыдущего случая ($\theta \leqslant 1$) здесь наличие магнитного поля может привести к существенному увеличению амплитуды вынужденных колебаний.

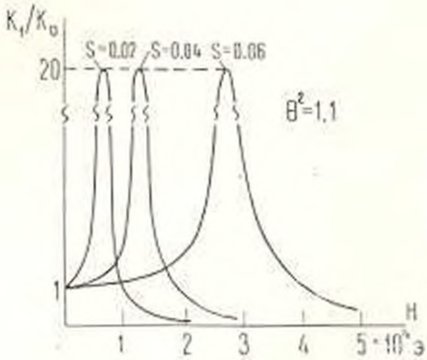
Перейдем к исследованию зависимости величины K_1 от частоты вынуждающей силы при фиксированных значениях напряженности магнитного поля. Из (2.13) видно, что динамический коэффициент K_1 как функция величины θ имеет максимум при $\theta^2 = 1+\alpha\beta - 0.5\gamma^2$, который равен

$$\max_{(\theta)} K_1 = \frac{1}{\gamma\sqrt{1+\alpha\beta}} \tag{2.16}$$

где учтено, что $\gamma^2 \ll 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из (2.16) видно, что величина γ^{-1} является максимальным значением динамического коэффициента по θ при отсутствии магнитного поля ($\alpha = 0$), то есть

$$\max_{(\theta)} K_0 = \gamma^{-1}$$

В силу этого формулу (2.16) можно представить в виде

$$\frac{\max\limits_{(\theta)} K_1}{\max\limits_{(\theta)} K_0} = \gamma \max_{(\theta)} K_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\beta}} \tag{2.17}$$

Зависимость величины $\gamma \max\limits_{(\theta)} K_1$ от s и H приведена в табл. 2 и на фиг. 3.

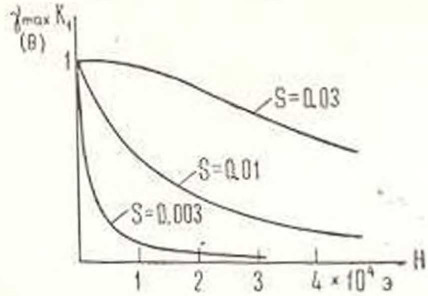
Рассматривая кривые, изображенные на фиг. 3, замечаем, что наложением магнитного поля с напряженностью порядка 10^4э можно в несколько сотен раз уменьшить максимальную амплитуду вынужденных колебаний.

До сих пор рассматривали влияние магнитного поля на характеристики вынужденных колебаний, принимая модель идеального проводника. Рассмотрим теперь аналогичные вопросы в случае конечнопроводящего материала, опираясь на формулу (2.11). С этой целью на фиг. 1 представлен график зависимости относительного динамического коэффициента K/K_0 от напряженности магнитного поля при различных значениях относительной частоты: $\theta^2=0{,}9$, $\theta^2=1$, $\theta^2=1{,}1$. Представленные кривые построены по формулам (2.11) и (2.12) для медной пластинки ($\sigma=5{,}3\cdot10^{17}\ \text{с}^{-1}$) при $s=0{,}02$.

Таблица 2

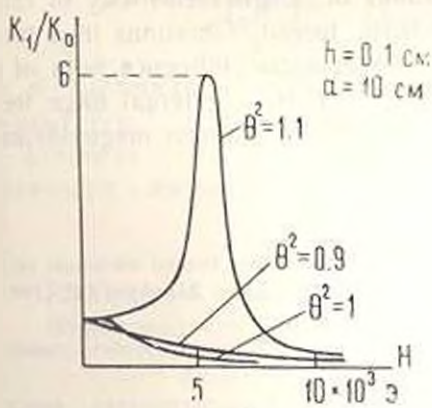
Значения $\gamma_{max}^{(\theta)} K(s, H)$

$10^2 s$ \ $10^{-4}H$ (э)	0	1	2	3	4	5
0,3	1	0,093	0,047	0,032	0,023	0,019
1	1	0,494	0,273	0,186	0,141	0,113
3	1	0,947	0,828	0,701	0,594	0,508
5	1	0,988	0,954	0,904	0,846	0,786
7	1	0,995	0,982	0,962	0,935	0,903
9	1	0,998	0,992	0,981	0,968	0,951

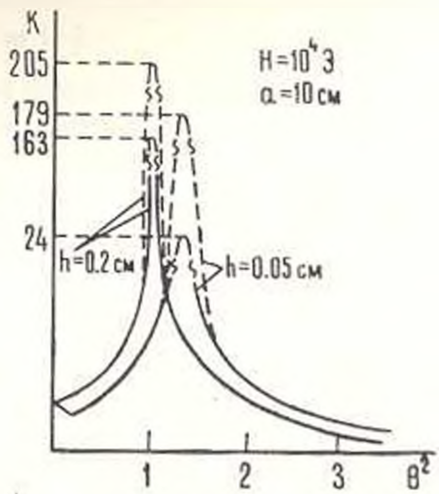


Фиг. 3

Сравнивая фиг. 1,2 с фиг. 4 замечаем: а) зависимость динамического коэффициента от напряженности магнитного поля для конечно проводящего материала имеет качественно аналогичную картину, что и в случае идеального проводника; б) модель идеального проводника дает завышенное значение для максимума динамического коэффициента и увеличивает скорость убывания амплитуды вынужденных колебаний.



Фиг. 4



Фиг. 5

Зависимость динамического коэффициента от частоты вынуждающей силы при $H=10^4$э показана на фиг. 5. Сплошные линии построены на основе формулы (2.11) и соответствуют конечному проводнику, а пунктирные линии—на основе формулы (2.13) и соответствуют идеальному проводнику.

Из фиг. 5 видно: а) в случае конечнопроводящего материала, в отличие от идеального проводника, при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности динамический коэффициент вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения δ, после чего картина зависимости такая, как и в случае идеального проводника, б) как и выше, модель идеального проводника дает завышенные результаты.

ԸՆԴԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Պ. Զ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում, ելնելով բարակ սալերի մագնիսաառաձգականության տեսության գծային հավասարումներից, դիտարկվում են ընդերկայնական մագնիսական դաշտում վերջավոր էլեկտրահաղորդիչ բարակ սալ-շերտի ստիպողական տատանումները։

Հետազոտված է և ցույց է տրված մագնիսական դաշտի լարվածության, սալի նյութի հաղորդականության, արտաքին ուժի հաճախականության և սալի հաստության էական ազդեցությունը ստիպողական մագնիսաառաձգական տատանումների բնութագրիչների վրա։

FORCED VIBRATIONS OF FINITE CONDUCTIVE PLATE IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

P. Z. HAKOPIAN, G. E. BAGDASARIAN

Summary

In the work based on linear equations of magnetoelasticity of thin plates, the finite conductive thin plate-strip forced vibrations in a longitudinal magnetic field is considered. The essential influence both of a magnetic field intensity, plate material conductivity, external force frequencies and plate thickness upon characteristics of forced magnetoelastic vibrations have been investigated and shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Вынужденные колебания тонкой идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле.—Докл. АН АрмССР, 1985, т. 80, № 1, с. 28—32.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272 с.
3. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной.—Уч. записки ЕГУ, 1977, № 2, с. 32—48.
4. *Багдасарян Г. Е.* К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле.—Докл. АН АрмССР, 1975, т. 61, № 5, с. 275—283.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961, 339 с.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.—М.: Физматгиз, 1959, 439 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.1.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 532.58.620.22

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО КОНУСА В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ГРИГОРЯН М. С.

Уравнения электродинамики для сплошных сред и магнитных жидкостей приведены в работах [1, 2]. Общие вопросы движения магнитных жидкостей и тонких тел в сжимаемой жидкости рассмотрены в работах [3, 4]. При наличии кавитации движения тонких тел рассмотрены в [5].

В настоящей статье изучается движение тела в магнитной жидкости, которая считается неэлектропроводящей.

Уравнения неразрывности и движения были получены в [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\overline{U}=0\\ \rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P'+\frac{(\overline{B}\nabla)\overline{H}}{4\pi}+\eta\Delta\overline{U}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{U}\\ P'=P+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^H\left|\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{T,H}\right|\overline{H}\,d\overline{H}\end{gathered}\tag{1}$$

где ρ—плотность, $\overline{U}$—скорость частицы, $\overline{H}$—магнитное поле, $\overline{B}=\mu\overline{H}$, $\mu=\mu(\rho,T,H)$, ξ, η—вязкостные постоянные, P'—суммарное давление, P—давление.

Уравнения электродинамики для магнитной жидкости:

$$\operatorname{div}\overline{B}=0,\quad \operatorname{rot}\overline{H}=0$$

Рассмотрим задачу движения тонкого конуса со скоростью V. Ввиду малости возмущений можно полагать

$$P=P_0+P_1,\quad \rho=\rho_0+\rho_1,\quad \overline{H}=\overline{H}_0+\overline{H}_1\tag{2}$$

Считаем, что μ зависит только от ρ, при этом

$$P'=P+\frac{1}{8\pi}\left[\mu-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\right]H^2\tag{3}$$

и уравнение движения имеет вид

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d^2\mu}{d\rho^2}\nabla\rho H^2-\frac{1}{8\pi}\left|\mu-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\right|\nabla H^2+\frac{\mu(\overline{H}\nabla)\overline{H}}{4\pi}\tag{4}$$

где отброшены слагаемые с ξ, η.

Учитывая то, что $\overline{H}\times\operatorname{rot}\overline{H}=0$ и используя равенство

$$\overline{H}\times\operatorname{rot}\overline{H}=\frac{1}{2}\nabla H^2-(\overline{H}\nabla)\overline{H} \tag{5}$$

можно записать

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d\mu}{d\rho}\nabla H^2+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d^2\mu}{d\rho^2}\nabla\rho H^2 \tag{6}$$

Кроме того. предполагается постоянство энтропии

$$\frac{dP}{dt}=a^2\frac{d\rho}{dt} \tag{7}$$

a—скорость звука.

Для малых возмущений

$$P_1=a_0^2\rho_1 \tag{8}$$

a_0—невозмущенная скорость звука.

Окончательно получаются линеаризованные уравнения задачи

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\overline{V}=0$$

$$\rho_0\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=-\nabla P_1+\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\nabla\frac{H^2}{8\pi}+\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H^2}{8\pi}\nabla\rho_1 \tag{9}$$

$$P_1=a_0^2\rho_1,\qquad \nabla\mu\overline{H}_0+\mu_0\nabla\overline{H}_1=0$$

В силу того, что $\operatorname{rot}H_1=0$, следует полагать

$$\overline{V}=\nabla\varphi,\qquad \overline{H}_1=\nabla\psi$$

Считаем, что $\overline{H}_0$ направлено по оси x, вдоль которой движется конус.

Из уравнения (9) имеем

$$\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-P_1+\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{P_1}{a_0^2} \tag{10}$$

$$\frac{d\mu_0}{d\rho_0}H_0\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\mu_0\nabla^2\psi=0 \tag{11}$$

$$P_1=a_0^2\rho_1,\quad \frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla^2\varphi=0 \tag{12}$$

Отсюда получится уравнение

$$\frac{P_1}{a_0^2}=-\frac{\rho_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\rho_0\dfrac{d\mu_0}{d\rho_0}\dfrac{H_0}{4\pi}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{a_0^2-\rho_0\dfrac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\dfrac{H_0^2}{8\pi}} \tag{13}$$

Функции φ и ψ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left|a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\mu_0+\frac{\rho}{\mu_0}\left(\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\right)^2\frac{H_0^2}{4\pi}\right|+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\left(a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{14}$$

$$\mu_0\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}H_0\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi \tag{15}$$

В (14) введена радиальная координата r.

Из (14) следуют соотношения

$$\frac{r}{\sqrt{\theta}}=\lambda,\quad \theta=\frac{\mu_0 c^2+\rho_0\left(\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\right)^2\frac{H_0^2}{4\pi}}{\mu_0 c^2} \tag{16}$$

$$c^2=\frac{a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}}{\mu_0} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{18}$$

Волновое движение будет при $c^2>0$.

Можно также получить

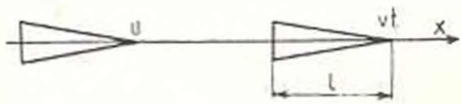
$$\psi=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{\mu_0}\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dt+\Phi \tag{19}$$

Φ — гармоническая функция, $\nabla\Phi=0$.

На конусе имеют место граничные условия [4, 5]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\simeq V\beta,\quad r=r_k,\quad r_k=(Vt-x)\beta \tag{20}$$

где β — угол полураствора конуса (фиг. 1).



Фиг. 1

Обозначим через l высоту конуса.

Для простоты можно считать, что жидкость несжимаема и полагать $\nabla^2\varphi=0$, тогда $\theta=1$ и решение имеет вид [4]

$$\varphi=-\frac{1}{2}\int_{Vt-l}^{Vt}\frac{V\beta r_k dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+r^2}} \tag{21}$$

Так же, как в [5], удержим в решении на конусе члены порядка $\beta^2\ln\beta$, тогда получим

$$\varphi=-\frac{1}{2}V\beta r_k(x,t)\ln\frac{1}{r_k} \tag{22}$$

Таким образом, потенциал скорости φ найден на конусе в главных порядках.

Для вычисления $\overline{H}_1$ или ψ следует учесть граничные условия на конусе: равенство нормальных компонент индукции $\overline{B}$ и тангенциальных компонент H.

Обозначая штрихом значения $\overline{H}$ в конусе, принимая в нем $\mu'=1$, имеем

$$r=r_k, \quad \mu H_{1r}+\beta\mu H_0 \simeq H'_{1r}+\beta H_0, \quad H_{1x}-\beta H_{1r}=H'_{1x}-\beta H'_{1r}$$

Поскольку на конусе решение зависит от разности $Vt-x$, где t — время с начала движения, можно, полагая $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \simeq -\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, из (19) получить

$$\psi=-\frac{\varkappa}{V}\varphi+\Phi, \quad \varkappa=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{\mu_0}$$

Внутри конуса $H'_x=H_0+H'_{1x}$.

Тогда граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\mu\left(-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\beta(\mu-1)H_0=\frac{\partial\psi'}{\partial r}$$

$$-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\left(-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(\mu-1)+\beta^2(\mu-1)H_0=\frac{\partial\psi'}{\partial x} \qquad (23)$$

Следует учесть, что ψ'—решение уравнения

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial r}=0$$

Подобным же способом, как и для φ, можно получить

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Vt-l}^{Vt}\frac{q_1(x_1 t)dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+r^2}}$$

На конусе в главном порядке

$$\Phi\simeq-\frac{1}{2\pi}q_1(x_1 t)\ln\frac{1}{r}$$

Можно искать решение в конусе в виде ряда по полиномам Лежандра по угловой координате, причем в главном порядке получается

$$\psi'\simeq A\frac{3}{2}(Vt-x)^2-A\frac{r^2+(Vt-x)^2}{2}$$

где A —постоянная.

Из условий (23) можно получить

$$-\mu\varkappa\beta+\mu\frac{1}{2\pi r_k}q_1+\beta(\mu-1)H_0=-Ar_k \qquad (24)$$

$$-\frac{\varkappa}{2}\beta^2\ln\frac{1}{r_k}-\frac{1}{2\pi}\frac{dq_1}{dx}\ln\frac{1}{r_k}+\beta\left(-\varkappa\beta+\frac{q_1}{2\pi r_k}\right)\times$$

$$\times(\mu-1)+\beta^2(\mu-1)H_0=-2A(Vt-x) \qquad (25)$$

В силу малости Ar_k из (24) имеем

$$q_1=\frac{(\mu\varkappa-\mu H_0+H_0)\,2\pi(Vt-x)\beta^2}{\mu},\quad A\sim\beta^2$$

Тогда для давления получаем

$$P_1=-\left\{\frac{1}{2}\rho_0V^2\beta^2\ln\beta+\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{8\pi}\ln\beta\left(\varkappa-2H_0+\frac{2H_0}{\mu_0}\right)\beta^2\right\}$$

Поскольку жидкость несжимаема, здесь принято $\frac{1}{a_0^2}=0$.

При $\mu_0=1$ $P_1=-\frac{1}{2}\rho_0V^2\beta^2\ln\beta$, являющееся главным членом в формуле для давления в жидкости без магнитного поля. Подобные же формулы в порядке $\beta^2\ln\beta$ получатся в сжимаемой среде.

Как видно из асимптотического решения, учет магнитных свойств меняет давление на конусе.

Полученные формулы позволяют определять значения $\frac{d\mu_0}{d\rho_0}$, $\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}$ по измерениям P на конусе.

Для смеси жидкостей, имеющих магнитные проницаемости μ' и $\bar{\mu}$ с малой концентрацией последней β', имеется приближенная формула

$$\mu_0=\mu'+\frac{3(\bar{\mu}-\mu')\mu'\beta'}{\bar{\mu}+2\mu'}$$

Для заданных μ', $\bar{\mu}$ и β', записав для плотности смеси

$$\rho_0=(1-\beta')\rho'+\beta'\bar{\rho}$$

можно получить

$$\frac{d\mu_0}{d\rho_0}=\frac{3(\bar{\mu}-\mu')\mu'}{(\bar{\mu}+2\mu')(\bar{\rho}-\rho')}$$

Отсюда

$$P_1=-\left[\frac{1}{2}\rho_0V^2+\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\rho_0}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\left(\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}-2\mu_0+2\right)\right]\beta^2\ln\beta$$

По заданным постоянным значениям μ_0, ρ_0 можно выяснять, возрастает ли давление.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Մ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Տրված է ոչ էլեկտրահաղորդիչ մագնիսական հեղուկի առանցքային մագնիսական դաշտով հաստատուն արագությամբ շարժվող կոնի վերաբերյալ խնդրի լուծումը։

Որոշվում է կոնի վրա ճնշման գլխավոր բաղադրիչը։

Ստացված արդյունքների համաձայն կարելի է փորձնական ճանապարհով որոշել հեղուկի հատկությունները։

THE STUDY OF MOTION OF A THIN CONE IN MAGNETIC FLUID

A. G. BAGDOEV, M. S. GRIGORIAN

Summary

The solution of the motion problem of a cone with constant velocity in a nonelectroconducting magnetic fluid in an axial magnetic field has been worked out. The principal addend in the formula for pressure on the cone has been found. The obtained results for the properties of fluid can be determined experimentally.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 533 с.
2. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1973, вып. 17, с. 221—229.
3. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.—Итоги науки и техники, М.: 1981, т. 16.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: МГУ, 1977. 299 с.
5. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.—ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 951—953.

Институт механики АН Армянской ССР
Кироваканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.XII.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 624.04

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

1. При построении расчетных динамических моделей строительных и машиностроительных конструкций часто используют априорные представления об их поведении при гармонических нагрузках, задаваясь той или иной формой комплексной жесткости или комплексной податливости. В частности, такой подход используется в известных гипотезах внутреннего трения Шлиппе-Бокка и Е. С. Сорокина [1], где комплексная жесткость вводится в различной форме в уравнения гармонических колебаний системы. Вместе с тем из теории динамических систем следует, что между вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частями передаточной функции физически реализуемой системы

$$\Phi(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) \tag{1.1}$$

должны существовать следующие зависимости [2]:

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\alpha)d\alpha}{\alpha-\omega}, \quad Q(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\alpha)d\alpha}{\alpha-\omega} \tag{1.2}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения. Формулы (1.2) определяют собой преобразование Гильберта, вычисление которого представляет определенные трудности, поэтому непосредственная проверка однозначной связи между частотными характеристиками $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ для реальных систем затруднена.

В настоящей статье излагается способ вычисления преобразования Гильберта через преобразования Фурье функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, что упрощает задачу, так как для преобразований Фурье имеются обширные таблицы. С помощью предложенного способа исследуется зависимость между параметрами комплексной жесткости для гипотез внутреннего трения Фохта и Е. С. Сорокина.

2. Преобразование Гильберта вытекает непосредственно из вещественной формы преобразования Фурье [3] и поэтому оригинал $s(\tau)$ и его преобразование Гильберта

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)d\tau}{\tau-t} \tag{2.1}$$

оказываются связанными следующими формулами:

$$F_s(\alpha)=iF_S(\alpha)\operatorname{sign}\alpha, \quad F_S(\alpha)=-iF_s(\alpha)\operatorname{sign}\alpha \tag{2.2}$$

где

$$F_s(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\exp(i\alpha\tau)d\tau, \quad F_S(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)\exp(i\alpha\tau)d\tau \tag{2.3}$$

есть Фурье-преобразования функций $s(\tau)$ и $S(t)$ соответственно. Формула (2.3) позволяет произвести вычисление интегралов (1.2) и тех случаях, когда известно одно из преобразований (2.3). Действительно, пусть известен интеграл $F_S(\alpha)$, тогда по формуле (2.2) мы можем вычислить $F_s(\alpha)$, а затем по формуле обращения

$$s(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_s(\alpha)\exp(-i\alpha\tau)\,d\alpha \tag{2.4}$$

определить интересующую нас функцию $s(\tau)$. Во многих случаях вычисление интеграла (2.4) может оказаться более простой процедурой, чем вычисление преобразований (1.2). Рассмотрим несколько примеров вычисления преобразований Гильберта.

а) Пусть $S(t)=\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Тогда $F_S(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $F_s(\alpha)=i\frac{\operatorname{sign}\alpha}{\sqrt{2\pi}}$

По формуле (2.4) получаем

$$s(\tau)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}\alpha\exp(-i\alpha\tau)\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha\tau\,d\alpha=\frac{1}{\pi\tau}$$

Здесь использована известная из теории обобщенных функций формула [4]

$$\int_{0}^{\infty}\exp(i\xi x)d\xi=ix^{-1}+\pi\delta(x)$$

откуда следует

$$\int_{0}^{\infty}\sin\xi x\,d\xi=\frac{1}{x}, \quad \int_{0}^{\infty}\cos\xi x\,d\xi=\pi\delta(x)$$

Подставляя полученное выражение для $s(\tau)$ в (2.1), можно получить интегральное представление дельта-функции $\delta(t)$ в виде свертки двух функций $\frac{1}{\pi t}$

$$\delta(t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau(t-\tau)}$$

Нетрудно также заметить, что полученная для $s(\tau)$ формула непосредственно следует из основного свойства дельта-функции. Действительно, из (2.1) следует, что

$$s(\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(t)dt}{t-\tau}$$

и при $S(t)=\delta(t)$ сразу получаем $s(\tau)=\frac{1}{\pi\tau}$.

б) Если функция $S(t)$ имеет вид единичной функции Хевисайда $S(t)=H(t)$, то

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\alpha)+i\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \tag{2.5}$$

Отсюда

$$s(\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\tau\alpha}{\alpha}d\alpha \tag{2.6}$$

Полученный несобственный интеграл расходится и с точки зрения классического анализа не существует. Для придания этому интегралу смысла рассмотрим преобразование Фурье функции $|x|^{-2m-1}$.

Согласно [4] (с. 227) в приведенных выше обозначениях

$$F_{|x|^{-2m-1}}(\alpha)=\frac{\alpha^{2m}}{\sqrt{2\pi}}\left[c_0^{(2m+1)}-c_1^{(2m+1)}\ln|\alpha|\right] \tag{2.7}$$

где

$$c_0^{(2m+1)}=\frac{2(-1)^m}{(2m)!}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2m}+\Gamma'(1)\right],\quad c_1^{(2m+1)}=\frac{2(-1)^m}{(2m)!} \tag{2.8}$$

[5] $\Gamma'(1)=-C$, где $C=0,5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Вместе с тем из (2.7) следует

$$F_{|x|^{-2m-1}}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x dx}{x^{2m+1}} \tag{2.9}$$

откуда при $m=0$ получаем интеграл (2.6). Следовательно,

$$s(\tau)=-\frac{1}{2\pi^2}[1-C-\ln|\alpha|] \tag{2.10}$$

в) Рассмотрим теперь случай $S(t)=t^n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Имеем

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}t^n\cos\alpha t\,dt \tag{2.11}$$

при четном n и

$$F_S(\alpha)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}t^n\sin\alpha t\,dt \tag{2.12}$$

при нечетном n.

Вычисляя интегралы (2.5) и (2.6) ([3], 3. 761) и учитывая (2.2), находим при n четном и нечетном соответственно

$$F_s(\alpha)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\operatorname{sign}\alpha\,\frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$$

$$F_s(\alpha)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\operatorname{sign}\alpha\,\frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$

Далее получаем при n четном

$$s(\tau)=\frac{2i\Gamma(n+1)\cos\frac{(n+1)\pi}{2}}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha\tau d\alpha}{\alpha^{n+1}}\tag{2.13}$$

Интеграл, входящий в (2.13), может быть вычислен по формуле (2.7). Учитывая (2.8) и обозначая $n=2m$, находим

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha\tau d\alpha}{\alpha^{2m+1}}=\frac{(-1)^m\tau^{2m}}{(2m)!}\left|1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{2m}-C+\ln|\tau|\right|$$

При нечетном n необходимо воспользоваться следующей формулой [4] (с. 218) с введением дополнительного множителя за счет различного обозначения преобразования Фурье

$$F_{x^{-2m}}(\alpha)=\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}|\alpha|^{2m-1}\frac{\pi}{(2m-1)!}$$

Поскольку

$$F_{x^{-2m}}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha x dx}{x^{2m}}$$

то

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha x dx}{x^{2m}}=\frac{(-1)^m\pi}{2(2m-1)!}|\alpha|^{2m-1}$$

3. Применим далее описанный выше способ вычисления преобразования Гильберта для анализа динамических систем с внутренним трением, описываемым гипотезами Фохта, Е. С. Сорокина и Шлиппе-Бокка [1].

Для простоты рассмотрим безынерционный упруговязкий элемент. Для элемента Фохта уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$c\dot{y}+ky=q\exp(i\omega t)$$

и комплексная жесткость

$$K(\omega)=k+ic\omega$$

Действительная и мнимая части передаточной функции

$$P(\omega)=\mathrm{Re}K^{-1}(\omega)=\frac{k}{k^2+c^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\mathrm{Im}K^{-1}(\omega)=-\frac{c\omega}{k^2+c^2\omega^2} \qquad (3.1)$$

Проверим, соблюдаются ли для характеристик (3.1) зависимости (1.2). Вычислим преобразование Фурье функции $P(\omega)$

$$F_P(\alpha)=\frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\omega\alpha)d\omega}{k^2+c^2\omega^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}c^{-1}\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1})$$

Следовательно,

$$F_Q(\alpha)=-i\,\mathrm{sign}\,\alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}c^{-1}\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1})$$

и

$$Q(\omega)=-\frac{i}{2c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,\alpha\exp(-|\alpha|k\cdot c^{-1}-i\alpha\omega)d\alpha=-\frac{\omega\cdot c}{k^2+\omega^2\cdot c^2}$$

т. е. приходим к функции $Q(\omega)$, задаваемой формулой (3.1). Таким образом, фохтовский элемент удовлетворяет условиям физической реализуемости.

Безынерционный элемент Е. С. Сорокина описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$k(u+iv)y=q\exp(i\omega t) \qquad (3.2)$$

где корректно определяемые параметры комплексной жесткости имеют вид [6]

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},\quad v=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

причем параметры u, v не зависят от частоты возмущения ω. Здесь γ — коэффициент потерь. Поскольку $u^2+v^2=1$, то для этой модели

$$P(\omega)=uk^{-1},\quad Q(\omega)=-vk^{-1} \qquad (3.3)$$

Следует отметить, что аналогичный вид имеет комплексная жесткость, соответствующая гипотезе Шлиппе-Бокка, согласно которой уравнение гармонических колебаний безынерционного элемента имеет вид

$$\frac{k\cdot\gamma}{\omega}\dot{y}+ky=q\exp(i\omega t)$$

Комплексная жесткость в этом случае

$$K(\omega)=k(1+i\gamma)$$

совпадает с комплексной жесткостью для гипотезы Е. С. Сорокина при часто применяемых в динамических расчетах значениях параметров $u=1$, $v=\gamma$.

Проверим, выполняются ли для характеристик (3.3) зависимости (1.2). Определим преобразование Фурье функции $P(\omega)$.

$$F_P(\alpha) = \frac{u}{k\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\alpha)\,d\omega = \frac{u\sqrt{2\pi}}{k}\,\delta(\alpha)$$

отсюда

$$F_Q(\alpha) = -iuk^{-1}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{sign}\,\alpha\,\delta(\alpha)$$

и

$$Q(\omega) = -\frac{iu}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,\alpha\,\exp(-i\omega\alpha)\,\delta(\alpha)\,d\alpha = 0$$

Как видим, для этих моделей зависимости (1.2) не выполняются и, следовательно, эти модели не являются физически реализуемыми. Таким образом, приведенный способ вычисления преобразования Гильберта позволяет сравнительно легко производить анализ априорных моделей динамических систем, основанных на построении комплексной жесткости или комплексной податливости системы. Этот способ позволяет также аналитически определять одну из составляющих комплексной жесткости по экспериментально определенной другой составляющей.

ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԻԼԲԵՐՏԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Շարադրված է Հիլբերտի ձևափոխության հաշվման մեթոդը Ֆուրյեի ֆունկցիայի ձևափոխման միջոցով։ Առաջարկված մեթոդով հետազոտված է համալիրային կոշտության պարամետրերի միջև կախվածությունը Ֆոխտի և Սորոկինի ներքին շփման հիպոթեզի համար։

A METHOD OF APPLICATION OF GILBERT TRANSFORMATION FOR THE INVESTIGATION OF DYNAMIC SYSTEMS

L. G. PETROSIAN

Summary

A method of calculation of Gilbert transformation was set forth through Fourier transform function. With the help of the proposed method the dependence between the complex rough parameters for Focht's and Sorokin's internal friction hypothesis was studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Стройиздат, 1960. 131 с.
2. *Боде Т.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М., 1948.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
6. *Цейтлин А. И., Гусева Н. И.* Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. М.: Стройиздат, 1979.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
18.III.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

АВЕТИСЯН А. С.

В электротехнике широко применяются регулярно-слоистые среды, свойства которых меняются по нормали к поверхности. Для сред, не обладающих пьезоэлектрическим эффектом, в работе [5] исследована задача Лява в случае неоднородного слоя, лежащего на упругом однородном полупространстве. Рассмотрены два конкретных случая неоднородности слоя (линейная и экспоненциальная неоднородность) и получено дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости поверхностной волны. В работе [6] исследовано распространение поверхностной сдвиговой волны типа SH в неоднородном полупространстве.

1. В настоящей работе рассматривается случай неоднородного пьезоэлектрического полупространства, неоднородность свойств которого локализована в приповерхностном слое толщины h, намного меньшей, чем длина поверхностной акустической волны $\lambda = 2\pi/k$. Исходя из этого, решается модельная задача о распространении поверхностной сдвиговой волны типа SH, когда неоднородный пьезоэлектрический слой толщиной h граничит с однородным пьезополупространством. Рассматривается случай, когда слой и полупространство принадлежат одному из кристаллических классов 4,4mm, тетрагональной или 6,6 mm, гексагональной симметрии. Декартовая координатная система выбрана таким образом, что неоднородный слой занимает область $0 \leqslant x_2 \leqslant h$, а однородное полупространство — область $x_2 \geqslant h$. Ось x_3 параллельна главным осям симметрии кристаллов. Уравнения электроупругости антиплоской деформации $u = [0; 0; u(x_1, x_2, t)]$ для пьезоэлектрических кристаллов из указанных классов совпадают [1]. Для однородного пьезоэлектрика они имеют вид

$$(1+\chi^2) c_{44} \nabla^2 u = \rho \ddot{u}, \quad \nabla^2 \varphi = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \nabla^2 u \tag{1.1}$$

здесь $\chi^2 = e_{15}^2/(\varepsilon_{11} c_{44})$ — коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика.

Уравнения упругости и электростатики при антиплоской деформации для неоднородного пьезоэлектрика, принадлежащего вышеуказанным классам, не разделяются

$$c_{44}(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+e_{15}(x_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}=\rho(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.2)$$

$$e_{15}(x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}(x_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}=0 \qquad (1.3)$$

Материальные соотношения для σ_{23} и D_2 имеют вид

$$\sigma_{23}=c_{44}(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+e_{15}(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\quad D_2=e_{15}(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}-\varepsilon_{11}(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

На свободной границе неоднородного слоя $x_2=0$ механические напряжения отсутствуют, электрический потенциал и нормальная компонента электрической индукции непрерывны

$$\sigma_{23}^{(1)}=0;\quad \varphi_1=\varphi_0;\quad D_2^{(1)}=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} \qquad (1.4)$$

здесь φ_0 — потенциал внешнего электрического поля, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi_0=0 \qquad (1.5)$$

Индексами 0, 1, 2 будут отмечены величины, относящиеся соответственно к вакууму, слою и полупространству.

На границе $x_2=h$ выполняются: непрерывность перемещения, механического напряжения, электрического потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции:

$$u_1=u_2,\quad \sigma_{23}^{(1)}=\sigma_{23}^{(2)},\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad D_2^{(1)}=D_2^{(2)} \qquad (1.6)$$

Таким образом, искомая задача сводится к решению уравнений (1.1—1.3) и (1.5) с граничными условиями (1.4) и (1.6).

2. Тонкость неоднородного слоя позволяет принять допущения, что перемещение u_1 по толщине слоя не меняется, а электрический потенциал φ_1 меняется линейно [2, 3]. Исходя из (1.4) и (1.5), для u_1 и φ_1 будем иметь

$$u_1=Bu_1(x_1, t),\quad \varphi_1(x_1, x_2, t)=\frac{x_2}{h}\left[\varphi_2(x_1, h, t)-\varphi_0(x_1, 0, t)\right]+\varphi_0(x_1, 0, t) \qquad (2.1)$$

Допущения, сделанные по отношению u_1 и φ_1, позволяют преобразовать граничные условия для механического напряжения и электрических характеристик [2, 3]. Задача приводится к решению уравнений однородного пьезополупространства (1.1) и уравнения Лапласа для φ_0 (1.5) с граничными условиями

$$c_{44}^{(2)}\frac{\partial u_2(x_1, h, t)}{\partial x_2}+e_{15}^{(2)}\frac{\partial\varphi_2(x_1, h, t)}{\partial x_2}-\frac{e_{15}^{**}}{h}\frac{\partial^2\varphi_2(x_1, h, t)}{\partial x_1^2}=\rho^*\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-$$

$$-c_{44}^{*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-e_{15}^{*}\frac{\partial^2\varphi_0(x_1, 0, t)}{\partial x_1^2}+\frac{e_{15}^{**}}{h}\frac{\partial^2\varphi_0(x_1, 0, t)}{\partial x_1^2}$$

$$e_{15}^{(2)}\frac{\partial u_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}-\varepsilon_{11}^{(2)}\frac{\partial\varphi_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}=-\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi_0(x_1,0,t)}{\partial x_2}+\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h}\frac{\partial^2\varphi_2(x_1,h,t)}{\partial x_1^2}+$$
$$+\left(\varepsilon_{11}^{*}-\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h}\right)\frac{\partial^2\varphi_0(x,0,t)}{\partial x_1^2}-e_{15}^{*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \tag{2.2}$$

$$\varphi_0(x_1,0,t)-\varphi_2(x_1,h,t)=\frac{h^2}{\varepsilon_{11}^{*}}e_{15}^{(2)}\frac{\partial u_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}-\frac{h^2}{\varepsilon_{11}^{*}}\varepsilon_{11}^{(2)}\frac{\partial\varphi_2(x_1,h,t)}{\partial x_2}$$

$$u_2(x_1,h,t)=Bu_1(x_1,t)$$

здесь ρ^*, c_{44}^*, ε_{11}^*, e_{15}^*, ε_{11}^{**}, e_{15}^{**}—приведенные характеристики неоднородного слоя, которые определяются следующим образом:

$$a^*=\int_0^h a(x_2)\,dx_2,\qquad a^{**}=\int_0^h x_2 a(x_2)\,dx_2 \tag{2.3}$$

Сделанные допущения в отношении u_1 и φ_1 позволяют получить дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости, которое с учетом введенных обозначений принимает следующий вид:

$$(1+\varkappa_2^2)\left(1-\frac{v^2}{c_t^2}\right)^{1/2}+\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}}k\left(1-\frac{v^2}{c_*^2}\right)=\varkappa_2^2\left(\frac{A_1+A_2}{A_3}-A_4\right) \tag{2.4}$$

где $c_t^2=(1+\varkappa_2^2)c_{44}^{(2)}/\rho_2$, $c_*^2=c_{44}^*/\rho^*$, величины A_j зависят от электрических характеристик слоя и полупространства, а также от kh:

$$A_1=\left(1+\frac{e_{15}^{**}}{he_{15}^{(2)}}\right)\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{(2)}}+k\left(\frac{\varepsilon_{11}^{*}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}-\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}\right)\right]-\left(1+\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}k\right)\left(\frac{e_{15}^{*}}{e_{15}^{(2)}}-\frac{e_{15}^{**}}{he_{15}^{(2)}}\right)k$$

$$A_2=\left(\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}-\frac{e_{15}^{*}}{e_{15}^{(2)}}\right)\left[1+\frac{e_{15}^{**}}{he_{15}^{(2)}}k+\left(\frac{e_{15}^{*}}{e_{15}^{(2)}}-\frac{e_{15}^{**}}{he_{15}^{(2)}}\right)\left(1+\frac{h^2\varepsilon_{11}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{*}}k\right)k\right]k \tag{2.5}$$

$$A_3=1+\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}k+\left(1+\frac{h^2\varepsilon_{11}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{*}}k\right)\left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{(2)}}+\left(\frac{\varepsilon_{11}^{*}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}-\frac{\varepsilon_{11}^{**}}{h\varepsilon_{11}^{(2)}}\right)k\right]$$

$$A_4=\frac{e_{15}^{**}}{he_{15}^{(2)}}k$$

Из условия затухания волн в глубине пьезоэлектрического полупространства для фазовой скорости получается $v<c_t$. Для существования решений дисперсионного уравнения (2.4), удовлетворяющих этому условию, характеристики свойств слоя и полупространства должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}}\left(1-\frac{c_t^2}{c_*^2}\right)k<\varkappa_2^2\left(\frac{A_1+A_2}{A_3}-A_4\right)<1+\varkappa_2^2+\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}}k \tag{2.6}$$

Очевидно, что выполнение неравенств (2.6) обусловлено соотношениями характеристик свойств неоднородного слоя и однородного полупространства. Следовательно, при некотором выборе неоднородности слоя может нарушиться правая или левая части неравенства (2.6). Оно может нарушиться также в зависимости от величины kh.

3. Рассмотрим частный случай, при котором неоднородность свойств пьезоэлектрического слоя по толщине меняется линейно таким образом, что на границе $x_2=h$ имеет место условие непрерывности электромеханических свойств слоя и полупространства. На $x_2=0$ $\rho^{(1)}$, $c_{44}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(1)}$, $e_{15}^{(1)}$ — характеристики неоднородного слоя. Тогда, неоднородность характеристик слоя описывается функциями

$$a(x_2)=(a_2-a_1)\frac{x_2}{h}+a_1 \tag{3.1}$$

где $a\in\{\rho, c_{44}, \varepsilon_{11}, e_{15}\}$.

В этом случае, с учетом формул (3.1) и (2.3) дисперсионное уравнение (2.4) преобразуется к следующему виду:

$$(1-V^2)^{1/2}+\frac{(1+\beta)kh}{2(1+\varkappa_2^2)}\left(1-\frac{(1+\varkappa_2^2)(1+\alpha)}{1+\beta}V^2\right)-\frac{\varkappa_2^2}{1+\varkappa_2^2}\left(\frac{A_1'+A_2'}{A_3'}-A_4'\right) \tag{3.2}$$

Здесь

$$A_1'=\eta+kh[2(\gamma-\delta)+\eta(2+\delta)]/6+k^2h^2(\gamma-\delta)/12$$

$$A_2'=kh(\gamma-3\delta-1)/6+(1+\delta)(\gamma-3\delta-1)k^2h^2/12+k^3h^3(1+2\delta)(\gamma-3\delta-1)/18(1+\gamma)$$

$$A_3'=1+\eta+kh[(1+\gamma)/2+2\eta/(1+\gamma)]+k^2h^2(1+2\gamma)/3(1+\gamma);\quad A_4'=kh(2+\delta)/6 \tag{3.3}$$

$$\alpha=\rho_1/\rho_2,\quad \beta=c_{11}^{(1)}/c_{11}^{(2)},\quad \gamma=\varepsilon_{11}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(2)},\quad \delta=e_{15}^{(1)}/e_{15}^{(2)},\quad \eta=\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{(2)},\quad V=v/c_t$$

Условия существования поверхностных волн, скорость которых удовлетворяет неравенству $v<c_t$, в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{(1+\beta)-(1+\varkappa_2^2)(1+\alpha)}{2}kh\leqslant\varkappa_2^2\left(\frac{A_1'+A_2'}{A_3'}-A_4'\right)\leqslant 1+\varkappa_2^2+\frac{1+\beta}{2}kh \tag{3.4}$$

Из формул (2.4)—(2.6) получаются аналогичные соотношения для случая, когда граничат однородные пьезоэлектрики—тонкий слой и полупространство. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$(1-V^2)^{1/2}+\frac{\beta}{1+\varkappa_2^2}kh\left(1-\frac{\alpha}{\beta}V^2\right)=\frac{\varkappa_2^2}{1+\varkappa_2^2}\left(\frac{A_1''+A_2''}{A_3''}-A_4''\right) \tag{3.5}$$

где

$$A_1''=\eta(1+\delta kh),\quad A_2''=(\gamma+\delta)(2+\delta kh)kh,\quad A_3''=1+\eta+(\gamma+\eta/\gamma)kh,\quad A_4''=\delta kh$$

Условие существования поверхностных волн в этом случае принимает вид

$$(\beta-\alpha)kh\leqslant\varkappa_2^2|(A_1''+A_2'')/A_3''-A_4''|\leqslant 1+\varkappa_2^2+\beta kh \tag{3.6}$$

В этом случае на границе $x_2=h$ имеет место разрыв между свойствами слоя и полупространства. Когда $\rho(x_2)=\rho_1$, $c_{44}(x_2)=c_{44}^{(1)}$, $e_{15}(x_2)=0$,

$\varepsilon_{11}(x_2)=\varepsilon_{11}^{(1)}$, получается задача о распространении поверхностных сдвиговых волн в слоистой среде: тонкий диэлектрический слой—пьезоэлектрическое полупространство [2].

Интересно сравнение законов дисперсии при этих двух частных случаях. Фазовая скорость определяется из (3.2) и (3.5), соответственно. Из (3.4) и (3.6) видно, что в этих случаях условие существования поверхностной волны неодинаковы. Следовательно, если в одном из этих случаев волны существуют, то в другом они могут не существовать и наоборот.

Пусть граничат два однородных пьезоэлектрических кристалла—полупространство из сульфида кадмия (CdS—класс 6mm гексагональной симметрии) и слой титаната бария ($BaTiO_3$—класс 4mm тетрагональной симметрии). При этом оси A_6 и A_4 направлены в противоположные стороны. Ось x_3 совпадает с A_6. Величины характеристик этих кристаллов приведены в таблице [4].

Таблица

	$c_{44}\cdot 10^{10}$ Па	$\rho\cdot 10^{3}$ кг/м³	$\varepsilon_{11}\cdot 10^{-11}$ ф/м	e_{15} Кл/м²	$\varepsilon_0\cdot 10^{-11}$ ф/м
CdS	1.49	4.824	7.99	−0.21	0.885
$BaTiO_3$	5.43	6.02	1744	21.3	

Если формально не учитывать пьезоэффекта обеих сред, то поверхностные волны Лява не существуют. При учете пьезоэффекта условие существования поверхностных волн принимает вид (3.6). Это условие выполняется. При этом длина поверхностной волны удовлетворяет условию $\lambda > 4186{,}67\,h$. Если пьезоэлектрический слой имеет линейную неоднородность свойств такую, что на границе $x_2=0$ значения электромеханических характеристик совпадают со значениями пьезокристалла $BaTiO_3$, а на $x_2=h$ — со значениями пьезокристалла CdS, то поверхностные волны Лява не возникают. Они отсутствуют и тогда, когда формально не учитываются пьезоэлектрические свойства обеих сред.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿ ՇԵՐՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԼՅԱՎԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ պիեզոէլեկտրիկ շերտի հաստությունը փոքր է մակերևույթային ալիքի երկարությունից։ Հետազոտված է դիսպերսիայի ստացված հավասարումը։ Ստացված են Լյավի ալիքի գոյության պայմանները կամայական անհամասեռ բարակ շերտի դեպքում։ Դիտարկված է մակերևույթային ալիքի գոյության խնդիրը, երբ պիեզոէլեկտրիկ շերտի անհամասեռությունը գծային է։

LOVE'S ELECTRO ELASTIC SURFACE WAVES IN CASE OF INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC LAYER

A. S. AVETISIAN

S u m m a r y

The case when the thickness of piezoelectric layer is lesser than the length of the surface wave is considered. The derived dispersion equation is investigated. The existence conditions of Love's surface wave are obtained for an arbitrary inhomogeneous thin layer. An example of surface wave existence in the case of linear inhomogenuity of the piezoelectric layer is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аветисян А. С.* К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. *38*, №1, с. 12—19.
2. *Аветисян А. С.* Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем. Тезисы докладов III Всесоюзного Симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Цахкадзор: Изд. ЕрГУ, 1984.
3. *Белубекян М. В., Геворкян А. В.* О магнитоупругих волнах Лява.—Математические методы и физико-механические поля. 1983, вып. 18, с. 55—57.
4. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
5. *Bakirtas I. et Maugin G. A.* Ondes de surface SH pures en élasticité inhomogène. —Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, v. 1, №6, 1982, p. 995—1013.
6. *Bhattacharya S. N.* Exact solution of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media.—Pure and Appl. Geophysics, 1972, v. 93, №1, p. 19—35.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.V.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3.539.55

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПАНЕЛИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

АРТЕМЯН Э. Г.

В [1] на примере одномерной задачи было показано, что свободно опертая по краям цилиндрическая панель теряет устойчивость при внутреннем давлении, а не при внешнем, как наблюдалось в случае шарнирного закрепления. Работа [1] примечательна также тем, что в отличие от тех случаев, когда докритические перерезывающие усилия можно не учитывать, в этой работе показано, что эти усилия оказывают существенное влияние на значения критических параметров. Эти результаты позволили сделать вывод, что принятие начального докритического состояния безмоментным приводит не только к количественным, но и к качественным погрешностям.

В данной работе рассматривается задача устойчивости свободно опертой цилиндрической панели из наследственно-упругого материала, находящейся под воздействием внешнего равномерного давления в произвольном стационарном температурном поле. Предполагается, что панель имеет бесконечную протяженность вдоль образующей. Начальное докритическое состояние панели принимается моментным и характеризуется следующей системой:

$$\frac{dT^0}{ds}+\frac{N^0}{R}=0;\quad \frac{dN^0}{ds}-\frac{T^0}{R}=-Z;\quad \frac{dM^0}{ds}=N^0 \tag{1}$$

Предполагается, что на панель действует нормальная равномерная нагрузка интенсивностью $q=Z(X)$.

Панель, как уже сказано, предполагается свободно опертой, то есть на кромках заданы условия свободного опирания:

$$T^0=M^0=w^0=0 \quad \text{при} \quad s=0 \text{ и } s=s_0 \quad (s_0<\pi R) \tag{2}$$

Начальные усилия определяются непосредственно из (1) и при условиях (2) имеют следующий вид:

$$T^0=Rq\left|1-\frac{\cos(2s-s_0)/2R}{\cos s_0/2R}\right|;\quad N^0=Rq\,\frac{\sin(2s-s_0)/2R}{\cos s_0/2R}$$

Предполагается, что свойства материала описываются соотношениями [3]

$$\sigma_{ij}=(1-\Gamma^*)(\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij})-(3\lambda+2\mu)\int_0^T\alpha(T)dT\delta_{ij}$$

Здесь коэффициенты λ, μ и α так же, как и в [3], считаются произвольным образом зависящими от времени, но так, что коэффициент Пуассона $\nu=\lambda/2(\mu+\alpha)$ является постоянным [5], а оператор Γ^* определяется следующим образом:

$$\Gamma^* u(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau, T)\, u(\tau)\, d\tau$$

Рассматриваются только лишь ядра экспоненциального типа—типичное тело:

$$\Gamma(t-\tau, T) = A(T) \exp\{-\alpha(T)(t-\tau)\}$$

Можно предположить, что общий вид коэффициентов вязкости определяется после применения температурно-временной аналогии [6,7]. Уравнение устойчивости запишется в виде

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} d\tau \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} d\tau \right) \right] \right\} - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - N^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = 0 \qquad (3)$$

После некоторых преобразований (3) можно привести к виду

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} + (A+\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} + (A+\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + T^0 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} \right) - N^0 \left(\alpha(T) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} \right) \right] = 0$$

где

$$\theta = \frac{s}{R}; \quad c^2 = h^2/12R^2$$

Решение этого уравнения ищем в виде [9]

$$w = \bar{w} \exp\{kt\}$$

При предельных значениях k ($k=0$; $k\to\infty$) получаем следующую систему:

$$c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) - N^0 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0$$

$$c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (A+\alpha) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (A+\alpha) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) - N^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \qquad (4)$$

Интересующие нас значения мгновенного и длительного критических усилий получаются соответственно из первого и второго уравнений системы (4). Из системы видно, что первое уравнение является частным случаем второго $(\alpha(T)=1;\ \dot{A}(T)=0)$.

Решим каждое из уравнений в отдельности. Решая первое уравнение, представим в виде рядов функции T^0 и N^0

$$T^0=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\lambda_m\theta;\quad N^0=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\lambda_m\theta \tag{5}$$

где $b_m=\frac{1}{\theta_0}\lambda_m a_m;\quad \lambda_m=\pi m$

модуль Юнга

$$E=\sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos\lambda_m\theta \tag{6}$$

а также прогиб

$$\overline{w}=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\lambda_k\theta \tag{7}$$

при этом $\overline{w}$ удовлетворяет условиям (2) для возмущенного состояния.

Подставляя (5), (6) и (7) в первое уравнение (4) и производя некоторые преобразования относительно неизвестных функций f_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\left|(2c_0-c_{2k})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\frac{1}{h}((2a_0-a_{2k})\lambda_k-b_{2k})\right|\lambda_k^2 f_k+ \tag{8}$$

$$+\sum_{p=1}^{k-1}\left|(c_{k-p}-c_{k+p})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\frac{1}{h}((a_{k-p}-a_{k+p})\lambda_k-(b_{k-p}-b_{k+p}))\right|\lambda_p^2 f_p+$$

$$+\sum_{p=k+1}^{\infty}\left|(c_{p-k}-c_{p+k})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\frac{1}{h}((a_{p-k}-a_{p+k})\lambda_k-(b_{p-k}-b_{p+k}))\right|\lambda_p^2 f_p=0$$

Определим коэффициенты вышеприведенных разбиений, учитывая, что модуль Юнга зависит от температуры. Предполагаем, что эта зависимость носит линейный характер

$$E=E_0(1-\mu\alpha_0 T)$$

где μ — некоторый безразмерный коэффициент, α_0 — коэффициент линейного теплового расширения материала панели. Для простоты предположим также, что температура изменяется по следующему закону:

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{\theta}{\theta_0}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\theta=0 \text{ при } T=T_1;\quad \theta=\theta_0 \text{ при } T=T_2$$

Тогда коэффициенты разбиений примут следующий вид:

$$a_0=Rq\left|1-\frac{2}{\theta_0}\,\frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right|;\quad c_0=E_0[2-\mu\alpha_0(T_1+T_2)]$$

$$a_k = Rq \left| \frac{2\theta_0}{(\pi k)^2 + \theta_0^2} \frac{[1+(-1)^k](1-\cos\theta_0)}{\sin\theta_0} \right|$$

$$c_k = \frac{E_0}{\theta_0} \left| \frac{(1-\mu\alpha_0 T_1)}{\pi k} \sin(\pi k \theta_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu\alpha_0(T_2 - T_1)}{\theta_0} \left(\frac{1}{(\pi k)^2} (\cos(\pi k\theta_0) - 1) + \frac{\theta_0}{\pi k} \sin(\pi k\theta_0) \right) \right|$$

Условием нетривиального решения системы (8) является равенство нулю ее детерминанта.

Если обозначить $\varphi_k = \lambda_k^2 f_k$ и сделать некоторые несложные преобразования, то нетрудно убедиться в том, что система (8) является нормальной, следовательно, корни можно определить методом последовательных приближений и этот процесс сходится [8].

Рассмотрим решение второго уравнения системы (4).

Предположим, что A и α линейным образом зависят от температуры [3]

$$A = \overline{A}(1 - bT); \quad \alpha = \overline{\alpha}(1 - bT)$$

где b—некоторый коэффициент. Согласно [6] имеем

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{\overline{A}}{\overline{\alpha}} = \text{const}$$

Второе уравнение системы (10) запишется в виде

$$c^2 \frac{\overline{A} + \overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} \left[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (1-bT) \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (1-bT) \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{h} \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \left(T^0 (1-bT) \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) - N^0 (1-bT) \frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3} \right| = 0 \tag{9}$$

Представим в виде рядов следующие функции:

$$E(1 - bT) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos\lambda_k\theta \tag{10}$$

$$T^0(1 - bT) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\lambda_k\theta \tag{11}$$

$$N^0(1 - bT) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\lambda_k\theta \tag{12}$$

В виде ряда ищем также прогиб

$$\overline{w} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\lambda_k\theta \tag{13}$$

Подставив (10)—(13) в уравнение (9) и сделав некоторые преобразования относительно неизвестных функций f_k, получим следующую систему бесконечных уравнений:

$$\left|(2c_0-c_{2k})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{A}+\bar{\alpha}}\frac{1}{h}((2a_0-a_{2k})\lambda_k-b_{2k})\right|\lambda_k^2 f_k+$$

$$+\sum_{p=1}^{k-1}\left|(c_{k-p}-c_{k+p})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{A}+\bar{\alpha}}\frac{1}{h}((a_{k-p}-a_{k+p})\lambda_k-\right.$$

$$\left.-(b_{k-p}-b_{k+p}))\right|\lambda_p^2 f_p+\sum_{p=k+1}^{\infty}\left|(c_{p-k}-c_{p+k})c^2\lambda_k(\lambda_k^2-1)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{A}+\bar{\alpha}}\frac{1}{h}((a_{p-k}-a_{p+k})\lambda_k-(b_{p-k}+b_{p+k}))\right|\lambda_p^2 f_p=0 \qquad (14)$$

Коэффициенты разбиений примут вид

$$c_0=E_0\left|2-(\mu\alpha_0+b)(T_1+T_2)+\mu\alpha_0 b\frac{2}{3}(T_1^2+T_1T_2+T_2^2)\right|$$

$$c_k=\frac{E_0}{\theta_0}\left\{\left|\frac{1}{\pi k}-\frac{(\mu\alpha_0+b)}{\pi k}(T_2-T_1)+\frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^3\theta_0}(T_1(\pi k)^2\theta_0^2-2(T_2-T_1)^2)\right|\sin(\pi k\theta_0)+\right.$$

$$+\left|-(\mu\alpha_0+b)\left(\frac{T_1}{\pi k}+\frac{T_2-T_1}{(\pi k)^2\theta_0}\right)+\frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^2\theta_0}2(T_2-T_1)(T_1+(T_2+T_1)\pi k)\right|\times$$

$$\left.\times\cos(\pi k\theta_0)+\left|(\mu\alpha_0+b)\left(\frac{T_1}{\pi k}+\frac{T_2-T_1}{(\pi k)^2\theta_0}\right)-\frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^2\theta_0}2T_1(T_2-T_1)\right|\right\}$$

$$a_0=\frac{2}{\theta_0}Rq\left\{\left|\theta_0-\frac{T_1+T_2}{2}\theta_0 b-b\frac{T_2-T_1}{\theta_0}\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2}-1\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2}(bT_2-1)+b\frac{T_2-T_1}{\theta_0}\right|\sin\theta_0+\left(b\,\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2}-b(T_2-T_1)-1\right)\cos\theta_0\right\}$$

$$a_k=\frac{1}{\theta_0}Rq\left\{\frac{\sin(\pi k\theta_0)}{\pi k}-b\left|\frac{\sin(\pi k\theta_0)}{\pi k}(T_1+\theta_0)+\frac{1}{\pi k}(\cos(\pi k\theta_0)-1)\right|-\right.$$

$$-(1-bT_1)\left|\frac{\sin\theta_0\sin(\pi k\theta_0)}{\pi k+1}+\frac{1}{(\pi k)^2-1}(\cos(\pi k\theta_0)-1)\right|-\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2}(1-bT_1)\times$$

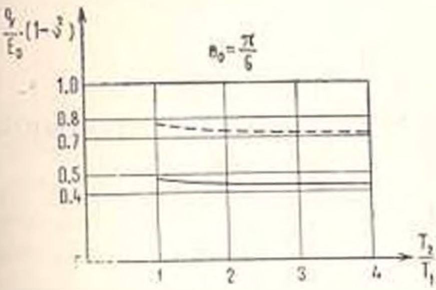
$$\times\left|\frac{\cos\theta_0\cos(\pi k\theta_0)}{\pi k}\frac{1}{2\pi k}\left(\frac{\sin(\pi k-1)\theta_0}{\pi k-1}-\frac{\sin(\pi k+1)\theta_0}{\pi k+1}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b(T_2-T_1)}{\theta_0}\left|\frac{\sin(\pi k+1)\theta_0}{(\pi k+1)^2}-\frac{\theta_0}{\pi k+1}(\cos(\pi k+1)\theta_0-1)+\right.$$

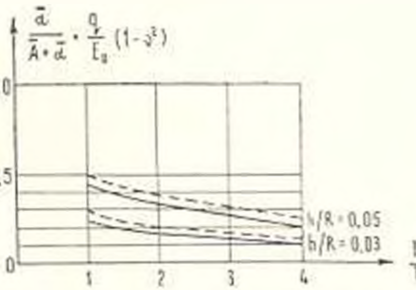
$$+\frac{\sin(\pi k-1)\theta_0}{(1-\pi k)^2}-\frac{\theta_0}{1-\pi k}(\cos(1-\pi k)\theta_0-1)+\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2}\left(\frac{\cos(1+\pi k)\theta_0-1}{(1+\pi k)^2}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\theta_0}{1+\pi k}\sin(1+\pi k)\theta_0+\frac{\cos(1-\pi k)\theta_0-1}{(1-\pi k)^2}+\frac{\theta_0}{1-\pi k}\sin(1-\pi k)\theta_0\right)\right|\right\}$$

Аналогично тому, как и в задаче упругости, нетрудно убедиться в том, что система (14) нормальна и, следовательно, корни можно определить методом последовательных сходящихся приближений [8]. Решая в отдельности задачи упругости и вязкости при одних и тех же параметрах, были получены критические силы. Сопоставление значений критических сил позволило сделать вывод, что коэффициентной зависимости между ними не существует.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приводится зависимость отношений критической силы к начальному модулю упругости ($q_{кр}/E_0\,(1-\nu^2)$) от отношения температур. При проведении вычислений температура бралась равной 200°. На фиг. 1 приведены 2 графика для отношения $h/R=1/20$ (пунктиром) и $h/R=1/30$ (сплошная). Коэффициент $\mu\alpha_0=1,3\cdot10^{-5}$ (коэффициент стали). Как и следовало ожидать, значение критической силы с возрастанием температуры уменьшалось и наибольшего значения достигало в случае $T_1=T_2$ и равнялось 0,720275. С уменьшением θ_0 ($\theta_0=\pi/10$) критическая сила уменьшалась, но закономерность изменения критической силы в зависимости от температуры сохранялась. Для $\theta_0=\pi/10$ также были проведены вычисления, но результаты графически не показаны, поскольку отличались очень мало от указанного на фиг. 1 случая. На фиг. 2 представлены зависимости длительной критической силы от изменения температур.

Варьировалось значение коэффициента b : $b=1,3\cdot10^{-5}$ (сплошные линии) и $b=1,3\cdot10^{-7}$ (пунктирные линии). Как видно из фиг. 2, закономерность изменения критической силы от температуры, как и в упругой задаче, здесь также сохранялась.

С другой стороны, уменьшение толщины панели в отличие от упругой задачи в данном случае приводило к более резкому уменьшению значения критической силы. Кроме того, увеличение температуры также влияло на значение критической силы более интенсивно, чем это наблюдалось в задаче упругости.

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՊԱՆԵԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Է. Հ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է առաձգամածուցիկ, արտաքին համաչափ ճնշման ենթարկված շրջանային պանելի կայունության խնդիրը կամայական ջերմային դաշտում. հաշվի առնելով նախնական վիճակի մոմենտայնությունը։ Կրիտիկական պարամետրերի որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցի ամենափոքր սեփական արժեքի գտնելուն։

THE STABILITY OF A TOUGH-ELASTIC CIRCULAR CYLINDRICAL PANEL IN THE TEMPERATURE FIELD

E. G. ARTEMIAN

Summary

The stability of a tough-elastic circular cylindrical panel is investigated using one-dimensional arrangement in the temperature field. The load uniform is considered. The calculation of critical parameters is reduced to the calculation of minimum proper values of die infinitum.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Л. А.* К устойчивости цилиндрической панели.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 16—21.
2. *Мовсисян Л. А.* Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки.—Докл. АН АрмССР, 1971, т. 52, № 2, с. 70—75.
3. *Мовсисян Л. А.* К устойчивости упругих и вязкоупругих термочувствительных пластин и оболочек.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1986, т. 39, № 4, с. 26—30.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
6. *Бугаков И. И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 265 с.
7. *Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
8. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.
9. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, Физматгиз, 1971. 237 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 11.VI.1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3:517.946

НЕУБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПАРАБОЛЕ

СЛУЦКИЙ А. С.

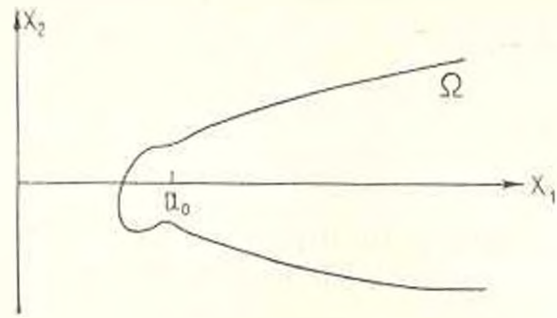
Полные асимптотические разложения решений задач теории тонких пластин построены в статьях [1—3]. В малой окрестности края пластинки возникает явление пограничного слоя. Определение погранслойных членов разложения сводится к решению краевых задач в бесконечных полуполосах [2—4]. При нахождении асимптотического разложения решения задачи об изгибе пластины с острым краем [5], [6] построение погранслоя сводится к нахождению решений первой краевой задачи плоской теории упругости и к задаче об антиплоском сдвиге той же области.

Задача Дирихле для общих эллиптических уравнений в областях типа параболоида и «воронки» изучалась в работе [7]. Для исследования асимптотики в окрестности особой точки границы в [7] производилась замена переменных, переводящая область в полуцилиндр. Коэффициенты операторов после такой замены в окрестности особой точки границы обладают свойством «стабилизации»—стремления к некоторым предельным значениям. Таким образом, задача сводится к изучению сильных (степенных) возмущений оператора с постоянными коэффициентами в цилиндре. Дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами изучались в статьях [8], [9]. Отметим, что результаты работ [8], [9] не применимы к исследованию асимптотики решения задачи Неймана и первой краевой задачи плоской теории упругости, поскольку у возмущенного оператора изменяется кратность собственного числа $\lambda=0$.

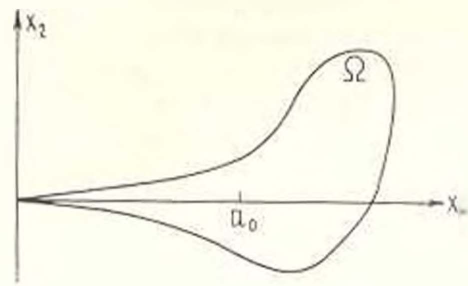
В настоящей работе строится асимптотика решения плоской задачи теории упругости в окрестности изолированной особенности границы типа параболы и заострения (фиг. 1 и 2).

Отметим, что определение неубывающих на бесконечности слагаемых в асимптотическом разложении решений уравнений двумерной теории упругости в параболе позволяет построить функции типа пограничного слоя в асимптотике решения задачи об изгибе тонкой пластины с острым краем.

1. Постановка задачи. Некоторые обозначения. Пусть Ω подобласть на плоскости (x_1, x_2), расположенная в полуплоскости $x_1>0$, множество $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1\leqslant a\}$ компактно при любом $a>0$, при $a>a_0$ $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1>a_0\}=\{|x_2|\leqslant 1/2\, x_1^{\alpha},\ x_1>a_0\}$, где $0<\alpha<1$. $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1<a_0\}=\Lambda$ (фиг. 1). При $x_1>a_0$ единичный вектор внешней нормали



Фиг. 1



Фиг. 2

n имеет вид $n=(1+\alpha^2 x_1^{2\alpha-2}/4)^{-1/2}\ (\alpha x_1^{\alpha-1}/2,\ -\operatorname{sign} x_2)$. В области Ω рассмотрим плоскую задачу теории упругости

$$M(\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2)u(x_1,\ x_2)=\Phi(x_1,\ x_2) \quad \text{при} \quad (x_1,\ x_2)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$1/2\ E/(1+\nu)\ (1+\alpha^2 x_1^{2\alpha-2}/4)^{-1/2}\ B^{\pm}(x_1,\ \partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2)u(x_1,\ x_2)$$

$$\text{при} \quad (x_1,\ x_2)\in\partial\Omega, \quad x_1>a_0 \tag{1.2}$$

$$u(x_1,\ x_2)=0 \quad \text{при} \quad (x_1,\ x_2)\in\partial\Omega, \quad x_1\leqslant a_0 \tag{1.3}$$

Здесь $u=(u_1,\ u_2)$ — вектор упругих смещений; M — матричный дифференциальный оператор, соответствующий двумерным уравнениям теории упругости:

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \dfrac{1}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{1}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

где ν — коэффициент Пуассона; $\Phi=(\Phi_1,\ \Phi_2)$ — вектор массовых сил;

$$B^{\pm}\left(x_1,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha(1-\nu)}{1-2\nu}x_1^{\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\mp\dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\alpha\nu}{1-2\nu}x_1^{\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\mp\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\mp\dfrac{2\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\mp\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Равенства (1.2) соответствуют граничным условиям в напряже-

ниях: $\cos(\widehat{nx_1})\sigma_{11}+\cos(\widehat{nx_2})\sigma_{12}=\Psi_1^{\pm}$; $\cos(\widehat{nx_1})\sigma_{21}+\cos(\widehat{nx_2})\sigma_{22}=\Psi_2^{\pm}$
$\Psi^{\pm}=(\Psi_1^{\pm},\Psi_2^{\pm})$ — вектор поверхностной нагрузки, знак „+“ относится к полуплоскости $x_2>0$, „−“ — к полуплоскости $x_2<0$.

Функционал энергии $\mathrm{Э}(u)$, соответствующий задаче (1.1)—(1.3), имеет вид

$$\mathrm{Э}(u)=\frac{E}{2(1+\nu)}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right)dx_1dx_2$$

Теорема 1. *Пусть* $\Phi_i\in L_2(\Omega)$, $\Psi_i^{\pm}\in L_2(\partial\Omega)$, $i=1,2$. *Тогда существует единственное обобщенное решение* $u=(u_1,u_2)\in W_2^1(\Omega)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.3), *и для него справедлива оценка*

$$\mathrm{Э}(u)\leqslant c(\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}+\|\Psi^{\pm}\|_{L_2(\partial\Omega)}) \tag{1.4}$$

При $x_1\to\infty$ *решение „u“ с конечной энергией допускает асимптотическое представление*

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_1-c_3x_2+o(x_1^{-\delta})\\u_2&=c_2+c_3x_1+o(x_1^{-\delta})\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad\alpha<1/3 \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_1-(2-3\alpha)c_3x_2x_1^{1-3\alpha}+o(x_1^{-\delta})\\u_2&=c_2+c_3x_1^{2-3\alpha}+o(x_1^{-\delta})\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad\alpha>1/3 \tag{1.6}$$

где δ — *положительное число.*

Доказательство существования решения с конечной энергией и формулы (1.4) проводится по стандартной схеме [10]. В пространстве $W_2^1(\Omega)$ вводится новое скалярное произведение, причем соответствующая ему норма есть $\mathrm{Э}(u)^{1/2}$. Доказательство оценки (1.4) и соотношения

$$\mathrm{Э}(u)\geqslant c\|u;\ W_2^1(\Omega)\|^2$$

вытекает из второго неравенства Корна. Асимптотические формулы (1.5), (1.6) будут введены в п. 2 и п. 3.

2. *Формальная асимптотика собственных векторов задачи в параболе.* Предположим, что функции Φ_j, $\Psi_j^{\pm}$, $j=1,2$ в правых частях равенств (1.1) и (1.2) равны нулю при $x_1>a_1$.

Для нахождения асимптотики собственных векторов задачи (1.1)—(1.3) введем новые переменные $y_1=x_1^{1-\alpha}$, $y_2=(1-\alpha)x_2x_1^{-\alpha}$. В плоскости (y_1,y_2) область $\{(x_1,x_2)\in\Omega;\ x_1>\alpha_0\}$ имеет вид полуполосы $\Pi=\{y_1>a_0^{1-\alpha};\ y_2\in[-(1-\alpha)/2,\ (1-\alpha)/2]\}$. Запишем матричные операторы M и $B^{\pm}$ в координатах (y_1,y_2); их элементы имеют вид:

$$M_{11}=\rho^2\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}\right)+\right.\right.$$

$$+ y_1^{-2}y_2\left(\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\alpha^2+\alpha}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\Bigg)\Bigg); \quad M_{12}=M_{21}=\rho^2\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right); \quad M_{22}=\rho^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y_2^2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}\right)+y_1^{-2}y_2\left(\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}y_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

$$B_{11}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\mp\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

$$B_{12}^{\pm}=B_{21}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{1}{1-2\nu}\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$

$$B_{22}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y_2}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

где $\rho(x_1)=(1-\alpha)x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Отметим, что операторы M и $B^{\pm}$ в координатах (y_1, y_2) следует интерпретировать как сильно возмущенные операторы первой краевой задачи плоской теории упругости в полуполосе П. Общие краевые задачи для операторов с постоянными коэффициентами в цилиндрических областях исследовались в работе [11]. В п. 2 § 6 книги [12] изучались собственные векторы двумерной задачи теории упругости в полуполосе. Построим асимптотику собственных векторов возмущенной задачи.

Однородные уравнения (2.5), (2.6) в полуполосе П имеют вид

$$M\left(y_1^{-1}, y_2, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)u(y_1, y_2)=0; \quad B^{\pm}\left(y_1^{-1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)u\left(y_1, \pm\frac{1-\alpha}{2}\right)=0 \tag{2.1}$$

Найдем асимптотику при $y_1\to\infty$ решений системы (2.1), растущих на бесконечности не быстрее полинома. Формальное асимптотическое разложение ищем в виде рядов

$$u^{(1)}(y_1, y_2)=y_1^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}P_{2k}(y_2y_1^{-1})+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}P_{2k+1}(y_2y_1^{-1})\right) \tag{2.2}$$

$$u^{(2)}(y_1, y_2)=y_1^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}P_{2k}(y_2y_1^{-1})+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}P_{2k+1}(y_2y_1^{-1})\right) \tag{2.3}$$

где P_l — полиномы степени l; γ — некоторые постоянные. Определим числа γ и коэффициенты полиномов у первых членов рядов (2.2), (2.3), полагая P_0 равным 1.

Подставим ряд (2.3) в уравнения (2.1). Приравнивая члены при одинаковых показателях степени переменной y_1, получим уравнения для нахождения функций P_l (коэффициенты полинома P_k вычисляются из условия равенства нулю членов порядка $y_1^{\gamma-k}$). Итак, P_1 определяется из задачи

$$M\left(0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_1(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

$$B^{\pm}\left(0,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_1(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{2\nu}{1-2\nu}\end{pmatrix}$$

Решением (2.4) является функция $P_1=-\nu(1-\nu)\gamma y_2y_1^{-1}$. Приравнивая члены при y_1^{-2}, получим систему уравнений для нахождения P_2:

$$M\left(0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_2(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}\dfrac{2\nu^2-5\nu+2}{(1-\nu)(1-2\nu)}+\left(\gamma-\dfrac{1}{1-\alpha}\right)y_2\\ 0\end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

$$B^{\pm}\left(0,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_2(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}\pm\gamma\left(\dfrac{(2\nu^2-5\nu+2)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\nu}{1-\nu}(\gamma-1)\dfrac{1-\alpha}{2}\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

Задача (2.5) разрешима при $\gamma=0$ и $\gamma=1$. Значению $\gamma=0$ соответствует функция $P_2(y_2y_1^{-1})=0$, а значению $\gamma=1$ — функция

$$P_2(y_2y_1^{-1})=\alpha/(1-\alpha)(2(1-\nu)-\nu/(1-\nu))/(1-2\nu)(y_2y_1^{-1})^2+p_2$$

где p_2 — постоянная, определяемая из условия разрешимости задачи для определения функции $P_4(y_2y_1^{-1})$.

Таким образом, получены старшие члены и показатель γ в асимптотическом представлении (2.2). Аналогично, из задач типа (2.4) вычисляются следующие члены асимптотики. Итак, асимптотические разложения $u^{(1,1)}$, $u^{(1,2)}$ решений системы (2.1), найденные по формуле (2.2), имеют вид

$$u^{(1,1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad u^{(1,2)}=\begin{pmatrix}y_1\\ -\dfrac{\nu}{1-\nu}y_2\end{pmatrix}+o(y_1^{-1}) \quad \text{при} \quad y_1\to\infty \qquad (2.6)$$

Подставляя ряд (2.3) в уравнения системы (2.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях y_1, получим равенства для определения функций P_j в асимптотическом разложении (2.3). Правые части вида (2.4) для нахождения функций P_1, P_2, P_3 удовлетворяют условию разрешимости; задача для P_4 разрешима только при следующих значениях γ:

$$\gamma_0=0,\quad \gamma_1=1/(1-\alpha),\quad \gamma_2=3-1/(1-\alpha),\quad \gamma_3=3 \qquad (2.7)$$

Из соотношений (2.7) вытекает, что асимптотика собственных векторов $u^{(2,1)}$, $u^{(2,2)}$, $u^{(2,3)}$, $u^{(2,4)}$ системы (2.1), определяемая по формуле (2.3), имеет вид

$$u^{(2,1)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad u^{(2,2)}=\begin{pmatrix}-(1-\alpha)^{-1}\ y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\ y_2\\ y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{pmatrix}$$

$$u^{(2,3)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2-3\alpha}{1-\alpha}y_2 y_1^{2-\frac{1}{1-\alpha}}+D_1^{(2)}y_2 y_1^{-\frac{1}{1-\alpha}}+D_2^{(2)}y_2^3 y_1^{-\frac{1}{1-\alpha}}/6 \\ y_1^{3-\frac{1}{1-\alpha}}+\dfrac{\nu}{1-\nu}\,\dfrac{(2-3\alpha)(1-3\alpha)}{2(1-\alpha)^2}\,y_2^2 y_1^{1-\frac{1}{1-\alpha}} \end{pmatrix}+o\left(y_1^{-1-\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$u^{(1,3)}=\begin{pmatrix} -3y_2y_1^2+D_1^{(3)}y_2+D_2^{(3)}y_2^3/6 \\ y_1^3+\dfrac{\nu}{1-\nu}\,\dfrac{3(2-3\alpha)}{2(1-\alpha)}\,y_2 y_1^2 \end{pmatrix}+o(y_1^{-1}) \tag{2.8}$$

где $D_1^{(k)}=-1/4(1-\alpha)^2\gamma_k(\gamma_k-1/(1-\alpha))(\gamma_k-2)/(1-\nu)$

$D_2^{(k)}=-\gamma_k(\gamma_k-1/(1-\alpha))(\gamma_k-2/(1-\alpha))\,(2-5\nu+2\nu^2)/((1-\nu)(1-2\nu))$

$k=2,\ 3.$

Итак, главные части формальных асимптотических разложений (2.2), (2.3) определяются из равенств (2.6), (2.8). В асимптотику решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) входят решения u однородной системы (2.1), имеющие конечную энергию $Э(u)$. Запишем функционал $Э(u)$ в переменных $(y_1,\ y_2)$:

$$Э(u)=\int\limits_{\Omega}\Bigg(\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}y_2\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\Big)\Big(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_2y_1^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\Big)+$$
$$+\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\Big)+\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y_2}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}y_2\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y_2}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\times$$
$$\times y_1^{-1}y_2\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\Big)+\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\Big(\frac{2\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_2y_1^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\Big)+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\Big)\Bigg)dy_1dy_2$$

Вектора $u^{(1,1)}$ и $u^{(2,1)}$ обращают энергию в нуль, а $u^{(1,2)}$ и $u^{(2,2)}$ — в бесконечность. Интеграл $Э(u^{(1,3)})$ конечен при $\alpha<1/3$, а интеграл $Э(u^{(2,3)})$ — при $\alpha>1/3$. Итак, в случае $\alpha<1/3$ в асимптотику решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) при $x_1\to\infty$ входят функции $u^{(1,1)}$, $u^{(2,1)}$, $u^{(1,3)}$, а в случае $\alpha>1/3$ — функции $u^{(1,1)}$, $u^{(2,1)}$, $u^{(2,3)}$.

Вид асимптотического разложения (1.5), (1.6) вытекает из формул (2.8) для векторов $u^{(1,3)}$, $u^{(2,3)}$, записанных в переменных $(x_1,\ x_2)$.

3. *Обоснование асимптотического разложения.* Введем функцию $F(x_1,\ x_2)$, удовлетворяющую соотношениям:

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2},\quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2},\quad \sigma_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \tag{3.1}$$

Условие совместности деформации приводит к равенству

$$\Delta^2F=0 \tag{3.2}$$

Однородные граничные условия для функции F имеют вид

$$\partial^2F/\partial s^2=0;\quad \partial^2F/\partial s\partial n=0 \tag{3.3}$$

где s — касательное, n — нормальное направление к $\partial\Omega$.

Произведя интегрирование по $\partial\Omega$, перепишем равенство (3.3) в области $x_1>a$ при достаточно больших a:

$$F=0;\ \partial F/\partial n=0 \quad \text{при } x_2<0,\quad (x_1,\ x_2)\in\partial\Omega$$
$$F=c_1\int_a^{x_1}\sqrt{1-\alpha^2 t^{2\alpha-2}}\,dt,\quad \frac{\partial F}{\partial n}=c_2 \quad \text{при } x_2>0,\quad (x_1,\ x_2)\in\partial\Omega \tag{3.4}$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, определяемые значениями функций F и $\partial F/\partial n$ при $x_1=a$.

Переходя к переменным $(y_1,\ y_2)$, найдем асимптотическое разложение задачи (3.2), (3.4) при $y_1\to\infty$. Формальную асимптотику ищем в виде

$$F(y_1,\ y_2)=\sum_{j=-1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} y_1^{\frac{k}{1-\alpha}-j} f^{(j,k)}(y_2) \tag{3.5}$$

Запишем уравнения (3.2), (3.4) в переменных $(y_1,\ y_2)$ и разложим функции из правых частей равенств (3.4) в ряд по степеням y_1. Операторы, стоящие в левых частях краевой задачи (3.2), (3.4) представим в виде суммы

$$\Delta^2\left(y_1,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)\to\frac{\partial^4}{\partial y_2^4}+L_1\left(y_1,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right);\ \frac{\partial}{\partial n}\left(y_1,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)\to$$
$$\to\frac{\partial}{\partial y_2}+L_2\left(y_1,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$

где $L_j(y_1,\ \partial/\partial y_1,\ \partial/\partial y_2)$, $j=1,\ 2$ — дифференциальные операторы, удовлетворяющие при $f(y_2)\in C^3(R^1)$ соотношению

$$L_j\left(y_1,\ \frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2}\right)f(y_2)y_1^l=o(y_1^{l-1})$$

Таким образом, старшие члены f_0 асимптотического разложения (3.5) решения задачи (3.2), (3.4) удовлетворяют уравнениям:

$$\partial^4 f_0/\partial y_2^4=0$$
$$f_0=0,\quad \partial f_0/\partial y_2=0,\quad \text{при}\quad y_1>a,\quad y_2=-1/2(1-\alpha) \tag{3.6}$$
$$f_0=c_1x^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3;\quad \partial f_0/\partial y_2=c_2x_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\quad \text{при}\quad y_1>a,\ y_2=1/2(1-\alpha)$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные, определяемые значением при $y_1=a$ функции F — решением задачи (3.2), (3.4). Итак, старшие члены f_0 асимптотического разложения (3.5), найденные из равенства (3.6), имеют вид

$$f_0(y_1,\ y_2)=\left(c_2y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-2\left(c_1y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3\right)\right)y_2^3+1/2\,c_2y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,y_2^2+$$
$$+\left(3/2\left(c_1y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3\right)-1/4c_2y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)y_2+1/2c_1y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}-1/8\,c_2\,y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+1/2\,c_3$$

Аналогично находятся остальные члены ряда (3.5). Запишем асимптотику решения задачи (3.2), (3.4) в переменных (x_1, x_2) и из соотношений (3.1) найдем напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Определяя из закона Гука по известным напряжениям вектор смещения u, получим асимптотические разложения (1.5), (1.6). Отметим, что слагаемые, обращающие функционал энергии Э в бесконечность, в асимптотику не входят.

Введем пространства $L_{2,1}$ и $W^1_{2,1}$ функций f с конечной нормой $\|x_1 f\|_{L_2}$, $\|x_1^1 f\|_{W^1_2} + \|x_1^1 f\|_{L_2}$. Обоснование асимптотического разложения (3.5) решения задачи (3.2), (3.4), а следовательно, и равенств (1.5), (1.6) вытекает из известного утверждения, по существу содержащегося в [12], [13].

Лемма 1. *Предположим, что функции f, стоящие в правых частях уравнений* (3.2) и (3.4), *принадлежат пространству* $L_{2,1}(\Omega)$. *Тогда существует единственное обобщенное решение „u" задачи* (3.2), (3.4) *из пространства* $W^1_{2,1}(\Omega)$, *и для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^1_{2,1}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L_{2,1}(\Omega)}$$

В п. 2, 3 предполагалось, что функции $\Phi_j(x_1, x_2)$, $\Psi_j^{\pm}(x_1, x_2)$ $j=1, 2$ из правых частей уравнений (1.1) и (1.2) имеют компактный носитель. Общий случай рассматривается аналогично. Если $\Phi_j=0$ при $x_1>a_0$, а $\Psi^{\pm}\neq 0$ при сколь угодно больших значениях x_1, то в асимптотическое разложение решения u задачи (1.1), (1.2), (1.3) при $x_1\to\infty$ войдут слагаемые, компенсирующие вектор $\Psi^{\pm}$. Поскольку функции $\Psi_j^{\pm}$ принадлежат $L_2(\partial\Omega)$, соответствующие слагаемые в асимптотике решения u убывают при $x_1\to\infty$ достаточно быстро, и, таким образом, вид старших членов асимптотического разложения (1.5), (1.6) не изменится. В случае, когда носитель Φ некомпактен, решение u задачи (1.1), (1.2), (1.3) представим в виде

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)$$

где w — решение задачи Дирихле для уравнения (1.1) с нулевыми граничными условиями. Отметим, что функция w принадлежит пространству $W^1_2(\Omega)$. При таком выборе величины w, функция v удовлетворяет однородным соотношениям (1.1), (1.3) и равенствам (1.2) с правыми частями $\Psi^{\pm}$ из $L_2(\partial\Omega)$; следовательно, для v справедливо разложение (5), (6). Итак, решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) допускает асимптотическое представление (1.5), (1.6) и в том случае, когда носитель функций Φ и $\Psi^{\pm}$ некомпактен.

4. *Определение коэффициентов в асимптотике решения.* Найдем явную зависимость коэффициентов c_1, c_2, c_3 в формулах (1.5), (1.6) от правых частей задачи (1.1), (1.2), (1.3). Для этого воспользуемся методом [15] В. Г. Мазья — Б. А. Пламеневского. Построим неэнергетические решения $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$, $w^{(4)}$ задачи (1.1), (1.2), (1.3), совпадающие при $x_1\to\infty$ с векторами $u^{(1,1)}$, $u^{(2,1)}$, $u^{(2,2)}$, $u^{(1,2)}$ соответственно. Пусть $z(x_1)$ — срезка: $z=1$ при $x_1>a$, $z=0$ при $x_1<1/2\,a$ и

$\varepsilon \in C^{\infty}(R^1)$, $\omega=\varepsilon u$, где u—неэнергетический собственный вектор. Функции $M(\omega)$ и $B^{\pm}(\omega)$ имеют компактный носитель. Искомые неэнергетические решения представим в виде

$$w(x_1, x_2)=\omega(x_1, x_2)+v(x_1, x_2) \tag{4.1}$$

где v— решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с правыми частями $M(\omega)$, $\Psi^{\pm}(\omega)$ (существование функции v вытекает из теоремы 1, при $x_1\to\infty$ для v выполняются равенства (5) и (6)).

В области $\Omega_\delta=\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ \delta^{-1}>x_1>a_0\}$ для решений u и v задачи (1.1), (1.2), (1.3) с различными правыми частями справедлива формула Бетти:

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\int\limits_{\Omega_\delta}(u_1M_1(v)+u_2M_2(v)-v_1M_1(u)-v_2M_2(u))\,dx_1dx_2=$$

$$=\sum_{\pm}\int\limits_{\Gamma_\delta^{\pm}}\left(\left(u_1\sigma_{11}(v)+u_2\sigma_{12}(v)-v_1\sigma_{11}(u)-v_2\sigma_{12}(u)\right)\frac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\pm\right. \tag{4.2}$$

$$\left.\pm(u_1\sigma_{21}(v)+u_2\sigma_{22}(v)-v_1\sigma_{21}(u)-v_2\sigma_{22}(u))\right)/\sqrt{1+\alpha^2x_1^{2\alpha-2}/4}\,ds+$$

$$+\int\limits_{-\frac{1}{2}\delta^{-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(u_1\sigma_{11}(v)+u_2\sigma_{12}(v)-v_1\sigma_{11}(u)-v_2\sigma_{12}(u))\,dx_2$$

где $M_1=M_{11}+M_{12}$, $M_2=M_{21}+M_{22}$—компоненты оператора M, $\Gamma_\delta^{\pm}=\{(x_1, x_2):\ x_2\in R^1,\ a_0<x_1<\delta^{-1}\}\cap\partial\Omega$. Подставим в равенство (4.2) вектор u—решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с правыми частями Φ, $\Psi^{\pm}$ и w—неэнергетическое решение однородной задачи, построенное по формуле (4.1). Устремим δ к нулю, тогда тождество (4.2) примет вид

$$\int\limits_{\Omega}(w_1\Phi_1+w_2\Phi_2)\,dx_1\,dx_2=\sum_{\pm}\int\limits_{\Gamma_\delta^{\pm}}(\Psi_1^{\pm}w_1+\Psi_2^{\pm}w_2)\,ds+$$

$$+\lim_{\delta\to0}\int\limits_{-1/2\delta^{-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(w_1\sigma_{11}(u)+w_2\sigma_{12}(u)-u_1\sigma_{11}(w)-u_2\sigma_{12}(w))\,dx_2 \tag{4.3}$$

Переходя к координатам (y_1, y_2), вычислим последний предел в правой части уравнения (4.3). При $w=w^{(3)}$

$$\lim_{\delta\to0}\int\limits_{-1/2\delta^{-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(w_1^{(3)}\sigma_{11}(u)+w_2^{(3)}\sigma_{12}(u)-u_1\sigma_{11}(w^{(3)})-u_2\sigma_{12}(w^{(3)}))\,dx_2=-\frac{(1-\nu)(2-3\nu)}{2(1-\nu)}c_2$$

Аналогичные соотношения получим и при других значениях w. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$c_1=(1-\nu)\frac{1}{2(1-\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w^{(1)}),\quad c_2=(1-\nu)\frac{2}{(1-\alpha)(2-3\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w^{(2)})$$

$$c_3=(1-\nu)\frac{6}{(2-3\alpha)(1-3\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w) \tag{4.4}$$

где $w=w^{(3)}$ при $\alpha<1/3$, $w=w^{(4)}$ при $\alpha>1/3$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$, $w^{(4)}$—некоторые неэнергетические решения однородной задачи (1.1), (1.2), (1.3), определяемые формулой (4.1)

$$L(\Phi,\Psi^{\pm},w)=\int_{\Omega}(w_1\Phi_1+w_2\Phi_2)dx_1dx_2-\sum_{\pm}\int_{\Gamma^{\pm}}(\Psi_1^{\pm}w_1+\Psi_2^{\pm}w_2)ds$$

5. *Асимптотика в окрестности заострения.* Пусть Ω — область на плоскости (x_1, x_2) с компактным замыканием и гладкой (класса C^{∞}) границей вне малой окрестности нуля. Предположим, что в точке 0 граница области Ω имеет особенность типа заострения (фиг. 2), то есть $\{(x_1, x_2)\in\Omega:\ x_1<a_0\}=\{|x_2|\leqslant 1/2x_1^{\alpha},\ x_1<a_0\}$, где $\alpha>1$.

В области Ω рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (1.3). Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если* $\Phi_j\in L_2(\Omega)$, $\Psi_j^{\pm}\in L_2(\partial\Omega)$: $j=1, 2$, *то существует единственное решение „u" задачи* (1.1), (1.2), (1.3) *с конечной энергией* $\text{Э}(u)$ *и для него справедлива оценка* (1.4). *При* $x_1\to 0$ *решение „u" с конечной энергией допускает асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} u_1&=c_1-(2-3\alpha)c_3x_2x_1^{3\alpha-1}+o(x_1^{\delta})\\ u_2&=c_2+c_3x_1^{3\alpha-2}+o(x_1^{\delta}),\quad \delta>0\end{aligned} \tag{5.1}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, поскольку преобразование координат $(x_1, x_2)\to(y_1, y_2)$ переводит область $\{(x_1, x_2): x_1<a_0, |x_2|<1/2x_1^{\alpha}\}$ в полуполосу П. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 из равенств (5.1) можно определить по формулам (4.4).

Автор выражает глубокую благодарность Мазья В. Г. и Назарову С. А. за помощь в работе.

ՊԱՐԱԲՈԼԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՉԱՃՈՂ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ա. Ս. ԱԼԻՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի առաջին եզրային խնդիրը $|x_2|\leqslant x_1^{\alpha}$, $0<\alpha<1$ պարաբոլի հետ համընկնող տիրույթներում, երբ x_1-ը բավականաչափ մեծ է։ Կառուցված է վերջավոր էներգիայով լուծման ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, երբ $x_1\to\infty$։ Գտնված է ասիմպտոտիկայի առաջ անդամների գործակիցները

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը այն տիրույթներում, երբ տիրույթի եզրը պարունակում է սրածայր մեկուսացված կետ Ստացված է լուծման ասիմպտոտիկ վերլուծությունը եզրի եզակիության շրջակայքում:

INDESCENDING SOLUTIONS OF THE FLAT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A PARABOLA

A. S. SLUTSKI

S u m m a r y

The first boundary value problem of the flat theory of elasticity in domains coincident with the $|x_2| \leqslant |x_1|$ $(0 < \alpha < 1)$ parabola for sufficiently large x_1 is studied in this paper. The asymptotic decomposition of solutions with a final energy for $x_1 \to \infty$ is constructed. The flat problem of the theory of elasticity in the domain containing an isolated singularity of the boundary as a peak is considered. The asimptotic decomposition is obtained for a solution near the boundary singularity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fridrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory elastic plates. –Comm. Pure and Appl. Math., 1961, v. 14, № 1.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 21, № 4, с. 668—686.
3. *Ворович И. И., Аксентян О. К.* Напряженное состояние плиты малой толщины.—ПММ, 1967, т. 28, № 6, с. 1057—1074.
4. *Назаров С. А., Семенов Б. Н.* Об асимптотике решений задач изгиба тонких пластин с разрывными нагрузками.—В кн.: Колебания и устойчивость механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, вып. 5, с. 135—145.
5. *Маховер Е. В.* Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем.—Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та, физ-матем. ф-та, 1957, 17, вып. 2, с. 28—39.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.—М.: Наука, 1970. 512 с.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решения задачи Дирихле вблизи изолированной особенности границы.—Вестник ЛГУ, сер. мат. мех., астр., 1977, № 13, вып. 3, с. 60—67.
8. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике поведения решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.—Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, т. 36, с. 980—1033. Письмо в редакцию (поправка).—Изв. АН СССР, сер. мат., 1973, т. 37, с. 700—701.
9. *Пламеневский Б. А.* О существовании и асимптотике решений дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами в банаховом пространстве.—Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, т. 36, с. 1348—1401. Письмо в редакцию (поправка).—Изв. АН СССР, сер. мат., 1973, т. 37, с. 959.
10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

11. *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space — Comm. Pure and Appl. Math., 1963, v. 16, pp. 121—239.

12. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.

13. *Багиров Л. А., Фейгин В. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей.—Докл. АН СССР, 1973, т. *211*, № 1, с. 23—26.

14. *Назаров С. А.* Асимптотика по малому параметру решения эллиптической по Аграновичу-Вишику краевой задачи в областях с конической точкой. В кн.: Проблемы математического анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979, вып. 7, с. 146—167.

15. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений.— Докл. АН СССР, 1974, т. *219*, с. 286—291.

Ленинградский НИИ химического машиностроения

Поступила в редакцию 5.III.1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 19[illegible] Механика

УДК 532.516

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ЦЕЛЬЮ УМЕНЬШЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л.

1. *Управление нормальной скоростью.* Пусть тело S обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U на бесконечности. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти такое распределение скоростей отсоса (вдува) по поверхности тела, при котором скорость диссипации энергии D минимальна. Диссипация характеризует потери механической энергии, переходящие в конце концов в тепло. Поэтому D является естественной характеристикой эффективности устройства, управляющего отсосом (вдувом). Другой разумной характеристикой эффективности устройства является, казалось бы, сопротивление X, испытываемое телом S. Например, в задаче об оптимальном управлении формой тела заданного объема (в отсутствии отсоса) наличие связи D и X [1]

$$D=X\cdot U \tag{1.1}$$

показывает, что эти характеристики гидродинамического совершенства формы тела фактически эквивалентны. Однако, в рассматриваемой нами задаче изменение граничных условий приводит к тому, что формула (1.1) становится неприменимой. Как будет показано ниже, задача о минимуме сопротивления в этом случае имеет тривиальное решение с бесконечной тягой ($X\to-\infty$), так что естественной характеристикой эффективности устройства является именно D.

Уравнения движения жидкости, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{v},\quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}|_S=W\mathbf{n},\quad \mathbf{v}|_\infty=U \tag{1.3}$$

$$D(W)=\frac{\mu}{2}\int\limits_G\sum_{i,j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d^3x \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}$—скорость жидкости, ρ—плотность, p—давление, μ—динамическая вязкость, W—скорость отсоса (вдува), G—внешность тела S, $\mathbf{n}$—единичный вектор внешней нормали.

Будем считать, что полный расход жидкости через поверхность тела задан и равен Q.

$$\int\limits_S W dS = Q \qquad (1.5)$$

2. *Условия оптимальности.* Для получения необходимого условия оптимальности сформулированной задачи (1.2)—(1.5) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим расширенный функционал

$$J = D + \int\limits_G \{\boldsymbol{v}^* \cdot [\mu \Delta \boldsymbol{v} - \rho(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} - \nabla p] + p^* \nabla \cdot \boldsymbol{v}\} d^3x + \lambda \left(\int\limits_S W dS - Q \right) \qquad (2.1)$$

Здесь $\lambda = \mathrm{const}$ — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (1.5) изопериметрического типа; $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}^*(x)$, $p^* = p^*(x)$ — множители Лагранжа, являющиеся функциями в области G, которые соответствуют дифференциальным связям (1.2). Сходный подход к решению других задач математической физики изложен в монографиях [2—5], поэтому вывод необходимого условия оптимальности приведем в сжатой форме.

Первая вариация функционала J вычисляется согласно правилу варьирования контурных и объемных интегралов и после громоздких преобразований с использованием формулы Гаусса-Остроградского приводится к виду

$$\delta J = \int\limits_S \left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right) \delta W dS + \int\limits_G \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{v}^* d^3x +$$

$$+ \int\limits_G \{\mu \Delta \boldsymbol{v}^* - \nabla p^* + \rho[(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}^* - (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}^*] - 2\mu \Delta \boldsymbol{v}\} \cdot \delta \boldsymbol{v} d^3x \qquad (2.2)$$

При выводе (2.2) необходимо учитывать граничные условия (1.3). Вообще говоря, при составлении расширенного функционала (2.1) можно было присоединить соответствующие (1.3) поверхностные интегралы. Однако, достаточно варьировать (2.1) и учитывать, что на поверхности тела вариации скорости течения $\delta \boldsymbol{v}$ и скорости отсоса (вдува) δW связаны соотношением

$$\delta \boldsymbol{v}|_S = \boldsymbol{n} \delta W$$

Отметим также, что в (2.2) опущены поверхностные интегралы, учет которых при выводе условий оптимальности приводит к естественным однородным граничным условиям на «сопряженную скорость» $\boldsymbol{v}^*$.

Таким образом, в силу произвольности вариаций δW, $\delta \boldsymbol{v}$ и δp из (2.2) окончательно получаем необходимое условие оптимальности:

в области течения

$$\mu \Delta \boldsymbol{v}^* - \nabla p^* + \rho [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}^* - (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}^*] = 2\mu \Delta \boldsymbol{v}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}^* = 0, \quad \boldsymbol{v}^*|_S = \boldsymbol{v}^*|_\infty = 0 \qquad (2.3)$$

на поверхности тела

$$\left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda\right)\Big|_S = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь ∇v — тензор с компонентами $(\nabla v)_{ij} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$, так что $(\nabla v) \cdot v^*$ — вектор с компонентами $[(\nabla v) \cdot v^*]_i = \sum_j \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \cdot v_j^*$.

Необходимое условие оптимальности (2.3), (2.4) в случае нулевого расхода $Q=0$ ранее было получено несколько иным методом в работе [6]. Отметим также, что «сопряженная» краевая задача (2. 3) для множителей Лагранжа v^*, p^* возникает и при решении других вариационных задач в вязкой несжимаемой жидкости [7, 8], а собственно условие оптимальности — условие типа (2.4) — отражает специфику каждой конкретной задачи.

Полученное выражение для первой вариации (2.2) можно использовать для построения эффективного численного алгоритма решения рассматриваемой вариационной задачи. Алгоритм предлагаемого итерационного метода состоит из следующих операций:

1) выбирается начальное приближение для распределения скорости отсоса (вдува);

2) решается «прямая» краевая задача (1.2), (1.3). Запоминаются значения скоростей v и W;

3) решается «сопряженная» краевая задача (2.3). Запоминаются значения множителей Лагранжа v^* и p^*. При этом выражение (2.2) для первой вариации принимает вид

$$\delta J = \int_S \left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda\right) \delta W \, dS \qquad (2.5)$$

4) задается некоторое значение постоянной λ, соответствующее заданию ограничения на Q и пп. 2, 3 повторяются для нового распределения скорости отсоса (вдува), которое определяется по формуле

$$W_{\text{нов}} = W_{\text{стар}} + \delta W, \quad \delta W = -\gamma(S)\left(\mu \frac{\partial V_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial V_n}{\partial n} + \lambda\right) \qquad (2.6)$$

где $\gamma(S)$ — произвольная неотрицательная функция, определенная на поверхности тела. Выбор улучшающей вариации в виде (2.6) на каждом шаге приводит к уменьшению функционала J, поскольку формула для первой вариации (2.5) после подстановки выражения для δW принимает вид

$$\delta J = -\int_S \gamma(S)\left[\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda\right]^2 dS \leqslant 0$$

При этом на каждой итерации вычисляется значение функционала диссипации (1.4). Последовательность операций пп. 2, 3 выполняется до тех пор, пока величина невязки $D(W_{i-1}) - D(W_i)$ не станет меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε.

Использование указанной градиентной процедуры предполагает наличие быстрых методов решения прямой и сопряженной краевых задач. Для течения идеальной жидкости или газа наличие таких методов позволило решить ряд задач с использованием указанного алгоритма, например, задачу максимизации критического числа Маха при обтекании симметричного профиля крыла [9]. В рассматриваемом случае течения вязкой жидкости существующие пока методы численного решения уравнений Навье-Стокса (1.2) являются весьма медленными и, к тому же, они работают в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса $(\mathrm{Re} < 10^4)$ [10]. Опыт проведения подобных расчетов в идеальном газе [9] показал, что необходимое число итераций при $\varepsilon = 10^{-4}$ составляет обычно несколько десятков, поэтому даже при $\mathrm{Re} < 10^3$ время численного решения оптимальных задач в вязкой жидкости на сегодняшний день недопустимо велико.

3. *Приближение Стокса.* Сделанный выше вывод о сложности численного решения относится к решению оптимальных задач в рамках полных уравнений Навье-Стокса. Если упростить исходные уравнения движения жидкости, то решение может существенно упроститься. Наиболее важным с практической точки зрения является приближение больших чисел Re (приближение Прандтля). В этом приближении предполагается, что поперечная скорость в пограничном слое мала по сравнению с продольной. Интуитивно ясно, что при решении оптимальной задачи в рамках уравнений Навье-Стокса поперечная и продольная скорости будут иметь одинаковый порядок (во всяком случае для плохообтекаемых тел). Поэтому сформулированная вариационная задача при $\mathrm{Re} \to \infty$ должна рассматриваться в рамках полных уравнений Навье-Стокса, если не введены дополнительные ограничения на максимальную скорость отсоса (вдува).

Другим важным упрощением исходных уравнений является приближение малых чисел Re (приближение Стокса). В этом случае сформулированная вариационная задача при $\mathrm{Re} \to 0$ может рассматриваться в рамках уравнений Стокса, так как никакие предположения, необходимые для вывода уравнений Стокса, при этом не нарушаются.

В приближении Стокса сопряженная краевая задача (2.3) принимает вид

$$\mu \Delta v^* = \nabla (p^* + 2p), \quad \nabla \cdot v^* = 0, \quad v^*|_S = v^*|_\infty = 0 \tag{3.1}$$

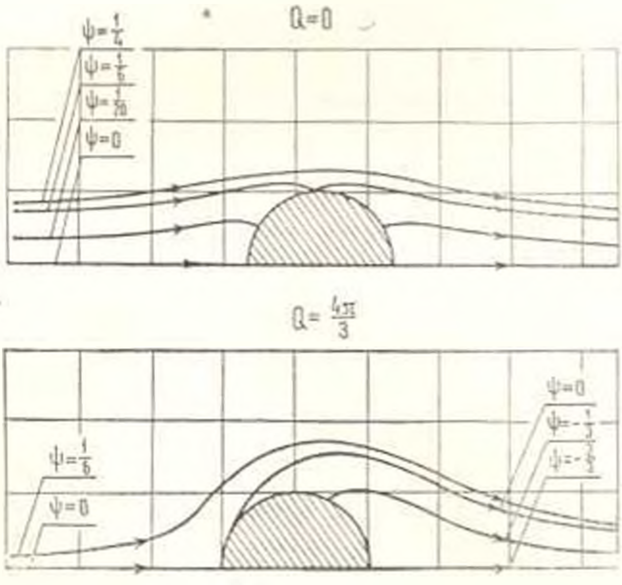
Задача (3.1) имеет только тривиальное решение $v^* = 0$, $p^* = -2p + \mathrm{const}$, впервые найденное в работе [11]. В результате необходимое условие оптимальности (2.4) приобретает исключительно простой вид

$$\left(p - 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}\right)\Big|_S = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

Для примера найдем оптимальное распределение скорости отсоса (вдува) по поверхности сферы единичного радиуса, центр которой находится в начале сферической системы координат (r, θ, φ). Ввиду линейности уравнений Стокса искомое решение можно представить в виде суммы решения, полученного в [6] при $Q=0$ и решения типа источника интенсивности Q, расположенного в центре сферы. Действительно, для решения [6] выполняются условия оптимальности (3.2), а для источника из соображений симметрии p и $\partial V_n/\partial n$ постоянны на поверхности сферы, так что условие (3.2) также выполняется. Тогда искомое решение приобретает вид

$$W=\frac{V}{3}\cos\theta+\frac{Q}{4\pi},\quad D=\rho\left(\frac{Q^2}{\pi}+\frac{16\pi V^2}{3}\right) \tag{3.3}$$

Картина линий тока около сферы при оптимальном законе отсоса (вдува) показана на фиг. 1 при $Q=0$ и $Q=\frac{4\pi}{3}V$. Из (3.3) видно что абсолютный минимум D достигается при $Q=0$ и равен $D=\frac{16\pi}{3}\rho V^2$. Другое точное решение оптимальной задачи в про-



Фиг. 1

тивоположном предельном случае $Re\to\infty$ недавно получено в работе [12]. Отметим, что подобного рода точные решения будут весьма полезны и при численном решении оптимальных задач в рамках уравнений Навье-Стокса, так как они могут служить начальным приближением для искомого решения, а также использоваться для оценки точности численных схем.

4. *Минимизация сопротивления.* Задача уменьшения сопротивления является одной из важнейших задач аэродинамики, причем управление отсосом (вдувом) представляется одним из наиболее перспективных направлений решения этой проблемы [13]. Однако, в рассматриваемой постановке задача о минимуме сопротивления имеет только тривиальное решение с бесконечной тягой. Покажем это на примере обтекания сферы стоксовой жидкостью. Известно однопараметрическое семейство решений этой задачи [14]

$$v = U - A\frac{U + n(U \cdot n)}{r} + (1 - A)\frac{3n(U \cdot n) - U}{r^3} \tag{4.1}$$

$$p = p_\infty - 2A\frac{(U \cdot n)}{r^2}, \quad W = (3 - 4A)(U \cdot n)$$

Решение (4.1) удовлетворяет уравнениям Стокса, условиям на бесконечности и условию прилипания касательной скорости. Семейство (4.1) содержит, в частности, известное решение Стокса обтекания сферы с условиями прилипания на поверхности ($A=3/4$) и приведенное выше оптимальное решение (3.3) при $Q=0$ ($A=2/3$). Сопротивление X, равное

$$X = \int_S \sum_j \sigma_{1j} dS_j, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

для решения (4.1) дается формулой

$$X = 8\pi\mu AU$$

так что при $A \to -\infty$ $X \to -\infty$. Из (4.1) видно, что скорость отсоса (вдува) W при этом оказывается неограниченной. Поэтому представляется правдоподобным, что наложение дополнительного ограничения на W приведет к тому, что задача о минимуме сопротивления станет нетривиальной. Разумным ограничением на W является величина интеграла

$$\int_S W^2 dS = N \tag{4.2}$$

которая характеризует мощность, затрачиваемую на отсос (вдув).

Законченные результаты в задаче уменьшения сопротивления удалось получить только для стоксовой жидкости. Разберем детальнее случай обтекания сферы. Как известно, одна и та же вариационная задача часто допускает различные способы решения. Приведенный ниже метод решения существенно отличается от использованного в предыдущих разделах. С идейной точки зрения этот метод близок к известному решению Гурвица [15] изопериметрической задачи о теле минимального периметра при заданной площади.

Оптимальное решение, которое предполагается осесимметричным, ищем в виде

$$\psi(r, \zeta)=r^2 J_2(\zeta)+\sum_{n=1}^{\infty}(B_n r^{1-n}+D_n r^{3-n}) J_n(\zeta) \tag{4.3}$$

$$u(r, \zeta)=P_1(\zeta)+\sum_{n=1}^{\infty}(B_n r^{-1-n}+D_n r^{1-n}) P_{n-1}(\zeta) \tag{4.4}$$

$$v(r, \zeta)=-\frac{2 J_2(\zeta)}{\sin\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1) B_n r^{-1-n}+(n-3) D_n r^{1-n}] \frac{J_n(\zeta)}{\sin\theta} \tag{4.5}$$

$$\frac{p(r, \zeta)}{\mu}=-\frac{2 D_1}{r}+2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{n} D_n r^{-n} P_{n-1}(\zeta) \tag{4.6}$$

Здесь $P_n(\zeta)$—полиномы Лежандра; $J_n(\zeta)=\dfrac{P_{n-2}(\zeta)-P_n(\zeta)}{2n-1}$; $\zeta=\cos\theta$. Решение (4.3)—(4.6) является частным случаем общего осесимметричного решения [16] уравнений Стокса, в котором выполнено граничное условие на бесконечности и условие отсутствия особенностей в поле течения. Заметим, что единицы измерения выбраны таким образом, что скорость на бесконечности равна $(\cos\theta, -\sin\theta, 0)$, а радиус сферы равен единице.

На поверхности сферы должно выполняться условие $v_\theta|_{r=1}=0$. Поэтому из (4.5) имеем

$$D_1=0, \quad B_2-D_2=2, \quad B_n+\frac{n-3}{n-1} D_n=0, \quad n \geqslant 3 \tag{4.7}$$

$$Q=2\pi \int_{-1}^{1} W d\zeta=4\pi B_1$$

$$N=2\pi \int_{-1}^{1} W^2 d\zeta=4\pi B_1^2+\frac{4\pi}{3}(1+B_2+D_2)^2+\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi}{2n-1}(B_n+D_n)^2$$

Используя (4.7), получаем окончательное выражение для мощности

$$N=\frac{Q^2}{4\pi}+\frac{4\pi}{3}(3+2 D_2)^2+\sum_{n=3}^{\infty} \frac{16\pi}{(n-1)^2(2n-1)} D_n^2 \tag{4.8}$$

Для решения (4.3)—(4.5) сопротивление дается формулой $X=-4\pi\mu D_2$ [16], поэтому из (4.8) немедленно следует, что минимум сопротивления при заданных Q и N реализуется на решении, в котором $D_n=0$ при $n \geqslant 3$. Окончательно оптимальное решение принимает вид

$$\Psi=\frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta\left(1+\frac{K-3}{2r}+\frac{1+K}{2r^3}\right)-\frac{Q}{4\pi}(1+\cos\theta) \tag{4.9}$$

$$W=\frac{Q}{4\pi}+K \cos\theta \tag{4.10}$$

Из (4.9), (4.10) нетрудно получить выражения для X и D

$$X=6\pi\mu\left(1-\frac{K}{3}\right) \tag{4.11}$$

$$D=\frac{Q^2}{\pi}\mu+6\pi\mu\left(K^2-\frac{2}{3}K+1\right) \qquad (4.12)$$

Здесь $K=\left(\frac{3N}{4\pi}-\frac{3Q^2}{16\pi^2}\right)^{1/2}$. Тот факт, что подкоренное выражение всегда неотрицательно, легко следует из неравенства Коши-Шварца. Из (4.11) получаем, что при увеличении N сопротивление сферы монотонно уменьшается и при $N\to\infty$ $X\to-\infty$. В то же время диссипация (4.12) остается ограниченной снизу, $D\geqslant\left(\frac{Q^2}{\pi}+\frac{16\pi}{3}\right)\mu$ в полном соответствии с (3.3).

5. *Управление касательной скоростью.* Рассмотрим теперь задачу о минимуме скорости диссипации при управлении касательной скоростью на границе тела S. Вариационная задача формулируется в виде (1.2)—(1.4), где граничное условие (1.3) заменено на $(v\cdot n)|_S=0$. Составим расширенный функционал

$$J=D+\int_G\{v^*\cdot[\mu\Delta v-\rho(v\cdot\nabla)v-\nabla p]+p^*\nabla\cdot v\}d^3x$$

Действуя аналогично случаю управления нормальной скоростью, получаем необходимое условие оптимальности: в области течения вновь получаем сопряженную краевую задачу (2.3), а на поверхности тела

$$(\tau^*_{3j}-2\tau_{3j})|_S=0, \quad n=(0,0,1), \quad j=1,\ 2 \qquad (5.1)$$

Здесь $\tau_{ij}=\mu(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)$—тензор вязких напряжений.

Вновь рассмотрим приближение Стокса. В этом приближении (5.1) принимает вид

$$\tau_{3j}|_S=0, \quad j=1,\ 2 \qquad (5.2)$$

так что касательные напряжения в оптимальном решении равны нулю.

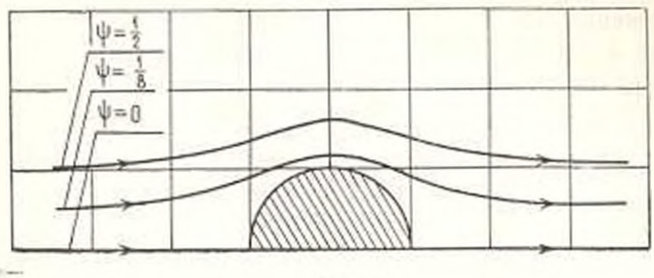
Точное решение оптимальной задачи об обтекании сферы при управлении касательной скоростью находится аналогично случаю управления нормальной скоростью и имеет вид

$$V=U-\frac{U+n(U\cdot n)}{2r}, \quad q=-\frac{1}{2}U\sin\theta, \quad D=4\pi\mu U^2 \qquad (5.3)$$

Сравним это решение с другими известными решениями задачи обтекания сферы: в задаче Стокса диссипация $D=6\pi\mu U^2$ в 1,5 раза больше диссипации (5.3), а в задаче обтекания непроницаемой сферы идеальной несжимаемой жидкостью $D=12\pi\mu U^2$, что в три раза больше, чем (5.3). Картина линий тока около сферы при оптимальном законе управления касательной скоростью изображена на фиг. 2.

Рассмотрим теперь задачу о минимуме сопротивления. Эта задача без дополнительных ограничений имеет, как и в случае отсоса (вдува), лишь тривиальное решение с бесконечной тягой. Поэтому введем ограничение

$$\int\limits_S q^2 dS = M \tag{5.4}$$



Фиг. 2

Найдем точное решение оптимальной задачи для случая стоксова обтекания сферы тем же методом, что и в разделе 4. Оптимальное решение ищем в виде (4.3)—(4.6). Условие непротекания на поверхности сферы дает

$$B_2 - D_2 + 1 = 0, \quad B_1 - D_1 = 0$$

$$B_n + D_n = 0, \quad n > 2$$

В результате касательная скорость q дается выражением

$$q = -(2D_2 + 3)\frac{J_2}{\sin\theta} - \sum_{n=3}^{\infty} 2D_n \frac{J_n}{\sin\theta} \tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и используя условие ортогональности [16]

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{J_n J_m}{1-\zeta^2} d\zeta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{n(n-1)(2n-1)}, & m = n \geq 2 \end{cases}$$

окончательно находим

$$M = 16\pi \left[\frac{(2D_2+3)^2}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{D_n^2}{n(n-1)(2n-1)} \right] \tag{5.6}$$

Так как сопротивление дается формулой $X = -4\pi\mu D_2$, то из (5.6) следует, что минимум сопротивления при заданном M реализуется на решении, в котором $D_n = 0$ при $n \geq 3$. Окончательно оптимальное решение принимает вид

$$\Psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{L-3}{2r} + \frac{1-L}{2r^3}\right) \tag{5.7}$$

$$q = -\frac{1}{2} L \sin\theta \tag{5.8}$$

Из (5.7), (5.8) нетрудно получить выражение для X

$$X = 6\pi\mu\left(1 - \frac{L}{3}\right), \quad L = (3M/2\pi)^{1/2}$$

В заключение заметим, что изложенный в разделах 4 и 5 подход к задаче минимизации сопротивления сферы может быть распространен на случай обтекания более сложных осесимметричных тел. Действительно, решение (4.3)—(4.6) является общим осесимметричным решением уравнений Стокса. С его помощью может быть найдено выражение для ограничений типа N или M в виде квадратичной формы от B_n и D_n. Используя граничное условие, эта квадратичная форма может быть редуцирована к формам типа (4.8), (5.6). Далее, как и рассмотренных выше примерах, надо минимизировать сопротивление $X=-4\pi\mu D_2$ при фиксированном значении полученной квадратичной формы.

ԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ԾԱԽՍԵՐԻ ՓՈՔՐԱՑՄԱՆ ՆՊԱՏԱԿՈՎ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀՈՍՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄԸ

Մ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, Պ. Լ. ԿՐԱՊԻՎՍԿԻ

Ամփոփում

Դիտարկված է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի կամայական մարմնի շուրջը հոսքի համար էներգիայի ցրման մինիմում արագության վարիացիոն խնդիրը: Մարմնի մակերևույթից կառավարվում է տրված ծախսով հեղուկի քաշում (փչում)։

Ստացված են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները և առաջարկված է թվային լուծման ալգորիթմ: Ռեյնոլդսի փոքր թվերի մոտարկումով խնդիրը գնդի շրջհոսման դեպքում լուծված է ճշգրիտ: Շոշափող արագությունների օպտիմալ կառավարման դեպքերի համար լուծված են նաև անալոգ խնդիրներ:

OPTIMAL CONTROL OF VISCOUS FLOW TO DECREASE ENERGY LOSS

M. A. BRUTIAN, P. L. KRAPIVSKII

Summary

The problem of the minimum energy dissipation of viscous fluid is considered. It is assumed that normal or tangential velocity is controlled on a surface of an arbitrary body. Necessary optimality conditions are derived. Using the Stokes approach of the optimum control problems, exact solutions are obtained with different isoperimetrical type constraints. According to this approach with an additional constraint on the control device power exact solutions are obtained for the variational problems of the minimum sphere drag.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
5. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
6. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Об оптимальном управлении потоком вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1984, т. *48*, вып. 6, с. 929—931.
7. *Миронов А. А.* К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости. —ПММ, 1975, т. *39*, вып. 1, с. 103—108.
8. *Pironneau O.* On the optimum design in fluid mechanics. J. Fluid Mech., 1974, v. 64, part. 1, p. 97—110.
9. *Брутян М. А., Ляпунов С. В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха. Учен. зап. ЦАГИ, 1981, т. *12*, № 5, с. 10—22.
10. *Fornberg B.* A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1980, v. 98, part. 4, p. 819—855.
11. *Pironneau O.* On optimum profiles in Stokes flow. J. Fluid Mech., 1973, v. 59, part. 1, pp. 117—128.
12. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Оптимальное управление вязким потоком при больших числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, № 3, с. 174—181.
13. *Чжен П.* Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979. 552 с.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 788 с.
15. *Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию. М.: Гостехиздат, 1957. 223 с.
16. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 63 с.

ЦАГИ

Поступила в редакцию
1.IV.1985