

ՓԻԶԻԿԱ • ՖԻԶԻԿԱ • PHYSICS



ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ДУБЛЕТ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ
ՖԻԶԻԿԱ ФИЗИКА

ՀԱՏՈՐ ТОМ

37

№ 4



ՀՀ ԳԱՄ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА
ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

2002

Журнал издается с 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

В. М. Арутюнян, главный редактор
Э. Г. Шароян, зам. главного редактора
А. А. Ахумян
Г. А. Вартапетян
Э. М. Казарян
А. О. Меликян
А. Р. Мкртчян
Д. Г. Саркисян
Ю. С. Чилингарян
А. А. Мирзаханян, ответственный секретарь

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵՔԻՍ

Վ. Մ. Հարությունյան, գլխավոր խմբագիր
Է. Գ. Շառոյան, գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ա. Ա. Հախումյան
Հ. Հ. Վարդապետյան
Է. Մ. Ղազարյան
Ա. Հ. Մելիքյան
Ա. Ռ. Մկրտչյան
Գ. Հ. Սարգսյան
Յու. Ս. Չիլինգարյան
Ա. Ա. Միրզախանյան, պատասխանատու քարտուղար

EDITORIAL BOARD

V. M. Aroutiounian, editor-in-chief
E. G. Sharoyan, associate editor
A. A. Hakhumyan
H. H. Vartapetian
E. M. Ghazaryan
A. O. Melikyan
A. R. Mkrtchyan
D. H. Sarkisyan
Yu. S. Chilingaryan
A. A. Mirzakhanyan, executive secretary

Адрес редакции: Республика Армения, 375019,
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն,
375019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ:

Editorial address: 24-g, Marshal Bagramyan Av.,
Yerevan, 375019, Republic of Armenia.

УДК 535.016

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ В ФУНКЦИЯХ ГУРСА

А.М. ИШХАНИЯН, А.М. МАНУКЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 марта 2002 г.)

Изучена интегрируемость трехуровневой квантово-механической задачи в обобщенных гипергеометрических функциях Гурса ${}_2F_2$. Суммарно получены 4 бесконечных класса моделей, интегрируемых в этих функциях, один из которых является обобщением ранее известного семейства, а остальные – новые.

1. Введение

На всем протяжении развития квантовой физики точно интегрируемые модели привлекали повышенное внимание, ибо часто именно благодаря им удавалось выявить наиболее существенные, качественные стороны происходящих физических процессов (см., например, [1-4]). В пору зарождения квантовой механики аналитические подходы, едва ли не единственно возможные в то время, послужили главной основой для установления базовых парадигм квантовой оптики. Впоследствии нередкими были случаи, когда новые точные решения приводили либо к переосмыслению определенных установившихся представлений, либо к прорыву в новых направлениях исследований. И в настоящее время, с развитием численных методов, аналитические методы не утратили своего значения. Как генераторы точных решений, они продолжают удерживать свои позиции не только в смысле математической техники, обеспечивающей все более высокий порядок приближений расчетных значений выходных параметров задачи, но также и с точки зрения предсказания новых и объяснения уже открытых экспериментально эффектов. Сошлемся, например, на работу [5], по-новому трактующую механизм STIRAP-а (вынужденного адиабатического Рамановского перехода) в трехуровневых системах, и на [6], предсказавшую сужение нецелого порядка интерференционных краев картины дифракции атомов на стоячей волне.

Следует отметить, что хотя по мере углубления в технику аналитических расчетов существенно повышается уровень математической

сложности, имеющийся заметный прогресс в развитии общих подходов (например, теорема о классовом свойстве решений [7,8]) позволяет оптимистически смотреть на дальнейшее применение точных методов.

В настоящей работе мы изучаем аналитические решения трехуровневых задач. Следует указать, что трехуровневые модели представляют заметно больший интерес по сравнению с двухуровневыми. Это, очевидно, вызвано тем, что трехуровневые системы имеют более богатую структуру и тем самым предоставляют большие возможности для различных вариаций.

Взаимодействие трехуровневой системы с внешним электромагнитным полем описывается системой из трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка. При этом все известные к настоящему времени решения выражаются в обобщенных гипергеометрических функциях, а именно, в функциях ${}_3F_2$, ${}_2F_2$ и ${}_1F_2$. По этой причине мы начали систематическое исследование этих функций на предмет годности для построения решений трехуровневой задачи для различных квантовых систем. В работах [9] исследовалась функция Клаузена ${}_3F_2$ и на основе метода, разработанного в [7,8], было выявлено 12 бесконечных классов интегрируемых случаев. Здесь мы продолжаем применение данного метода, но уже в приложении к обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$, называемой иначе функцией Гурса. В итоге удастся построить 4 бесконечных класса интегрируемых трехуровневых моделей, которые могут быть использованы во многих задачах квантовой физики.

2. Новые классы

Уравнения Шредингера в приближении вращающейся волны для амплитуд населенностей уровней a_1 , a_2 и a_3 трехуровневой квантовой системы, взаимодействующей с двумя квазирезонансными классическими электромагнитными волнами, имеют вид [10]

$$\begin{aligned} ia_{1t} &= Ue^{-i\delta_1} a_2, & ia_{3t} &= Ve^{+i\delta_2} a_2, \\ ia_{2t} &= Ue^{i\delta_1} a_1 + Ve^{-i\delta_2} a_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где U, V – медленно меняющиеся во времени частоты Раби и $\delta_{1,2}$ – расстройки соответствующих частот полей от атомных, также являющиеся медленными (по сравнению с характерными временами атомных переходов) функциями времени. Исключением a_2 и a_3 из системы (1) задача сводится к нахождению решения следующего линейного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$a_{111} + \left(2i\delta_{11} - 2\frac{U_i}{U} + i\delta_{21} - \frac{V_i}{V} \right) a_{11} + \left[\left(i\delta_{11} - \frac{U_i}{U} \right) + U^2 + V^2 + \right. \\ \left. + \left(i\delta_{11} - \frac{U_i}{U} \right) \left(i\delta_{11} - \frac{U_i}{U} + i\delta_{21} - \frac{V_i}{V} \right) \right] a_{11} + U^2 \left(i\delta_{11} + \frac{U_i}{U} + i\delta_{21} - \frac{V_i}{V} \right) a_1 = 0. \quad (2)$$

Нас интересует вопрос, возможно ли осуществить такое взаимно-однозначное преобразование $z=z(t)$ и подобрать такую функцию $P=P(z)$, чтобы после замены

$$a_1(z) = u(z) / \varphi(z) \quad (3)$$

уравнение (2) свелось к уравнению

$$u_{zzz} + \left(\frac{C}{z} - s \right) u_{zz} + \left(\frac{B}{z^2} + \frac{D}{z} \right) u_z + \frac{A}{z^2} u = 0. \quad (4)$$

Это есть уравнение, одним из решений которого является, как известно [11], обобщенная гипергеометрическая функция ${}_2F_2$ (функция Гурса) от переменной sz :

$$u = {}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; sz) = 1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} sz + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)} \frac{(sz)^2}{2} + \dots, \quad (5)$$

$$a_{1,2} = -\frac{D/s+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D/s+1}{2} \right)^2 + \frac{A}{s}}, \quad b_{1,2} = \frac{C-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C-1}{2} \right)^2 - B}.$$

Физические требования, накладываемые на задачу, следующие: функции $U(t)$, $V(t)$, $L_{1,2}(t)$ должны быть вещественны и, кроме того, должно быть, для определенности, $U, V > 0$. (Следует заметить здесь, что вещественность $L_{1,2}(t)$, вообще говоря, не является обязательным условием. В принципе, эти функции могут содержать чисто мнимые слагаемые. В этом случае модели будут описывать процессы с учетом распада уровней на некие третьи уровни. Однако в настоящей работе мы подобные ситуации не рассматриваем.)

В соответствии с общей методикой [7-9], в качестве функции $z=z(t)$ можно использовать любую физически разумную комплекснозначную функцию от действительной переменной t (времени), удовлетворяющую требованию взаимной однозначности отображения $t \leftrightarrow z$. Тогда, если $a_1^*(z)$, $U^*(z)$, $V^*(z)$, $\delta_{1,2}^*(z)$ удовлетворяют уравнению, полученному из (2) переписыванием для переменной z , то для функций $U(t)$, $V(t)$, $\delta_{1,2}(t)$, определяемых соотношениями

$$U(t) = U^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad V(t) = V^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d\delta_{1,2}(t)}{dt} = \frac{d\delta_{1,2}^*(z)}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (6)$$

решение исходной задачи выражается согласно (3), как

$a_1(t) = u(z(t)) / \varphi(z(t))$. В силу того, что функции $z=z(t)$ составляют континуум, множество функций $U(t), V(t), \delta_{1,2}(t)$, построенных на выбранном базисе $U^*(z), V^*(z), \delta_{1,2}^*(z)$, составляет класс.

Анализ коэффициентов уравнения (4) подсказывает выбор функций $U^*(z), V^*(z), \delta_{1,2}^*(z)$ и $\varphi(z)$ в виде

$$U^* = U_0^* z^{k_1}, \quad V^* = V_0^* z^{k_2}, \quad \delta_{1,2}^* = \frac{\beta_{1,2}}{z} + \gamma_{1,2}, \quad \varphi(z) = \exp(\lambda z). \quad (7)$$

После сравнения коэффициентов при одних и тех же порядках $\frac{d^n a_1}{dz^n}$ в (2) и (4) получается система уравнений

$$\frac{i(2\beta_1 + \beta_2) - (2k_1 + k_2)}{z} + i(2\gamma_1 + \gamma_2) = 3\lambda - s + \frac{C}{z}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i\beta_1 - k_1}{z^2} + \left(\frac{i\beta_1 - k_1}{z} + i\gamma_1 \right) \left[\frac{i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2)}{z} + i(\gamma_1 + \gamma_2) \right] + \\ & + U_0^{*2} z^{2k_1} + V_0^{*2} z^{2k_2} = 3\lambda^2 - 2\lambda s + \frac{2\lambda C + D}{z} + \frac{B}{z^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$U_0^{*2} z^{2k_1} \left[\frac{i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2}{z} + i(\gamma_1 + \gamma_2) \right] = \lambda^2 (\lambda - s) + \frac{\lambda(\lambda C + D)}{z} + \frac{(\lambda B + A)}{z^2}. \quad (10)$$

Из (8) сразу вытекают универсальные формулы для свободных параметров C и s :

$$C = i(2\beta_1 + \beta_2) - (2k_1 + k_2), \quad (11)$$

$$s = 3\lambda - i(2\gamma_1 + \gamma_2), \quad (12)$$

а (9), (10) дают следующие выражения для параметров B , D и A :

$$B = (i\beta_1 - k_1)[i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2 + 1)] + U_0^{*2} \delta_{-1, k_1} + V_0^{*2} \delta_{-1, k_2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D = & i(i\beta_1 - k_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + i\gamma_1[i(\beta_1 + \beta_2) - (k_1 + k_2)] + \\ & + U_0^{*2} \delta_{-1/2, k_1} + V_0^{*2} \delta_{-1/2, k_2} - 2\lambda C, \end{aligned} \quad (14)$$

$$A = -\lambda B + iU_0^{*2}(\gamma_1 + \gamma_2)\delta_{-1, k_1} + U_0^{*2}[i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2]\delta_{-1/2, k_1}, \quad (15)$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ — символ Кронекера ($\delta_{\alpha, \beta} = 1$, когда $\alpha = \beta$, и 0, когда $\alpha \neq \beta$).

Далее, из (9) следует, что, во-первых $k_1, k_2 \in \{0, -1/2, -1\}$ и, во-вторых, накладывается дополнительное ограничение

$$\lambda(3\lambda - 2s) = -\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2) + U_0^{*2} \delta_{0, k_1} + V_0^{*2} \delta_{0, k_2}. \quad (16)$$

Еще три дополнительных ограничения на параметры задачи накладыва-

ет уравнение (10):

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda C + D) &= iU_0^{*2}(\gamma_1 + \gamma_2)\delta_{-1, \beta, k_1} + U_0^{*2}[i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2]\delta_{0, k_1}, \\ \lambda^2(\lambda - s) &= iU_0^{*2}(\gamma_1 + \gamma_2)\delta_{0, k_1}, \quad [i(\beta_1 + \beta_2) + k_1 - k_2]\delta_{-1, k_1} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) представляют собой конфликтные уравнения, которые могут быть удовлетворены лишь при определенных выборах входных параметров задачи U_0^* , V_0^* , $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$. Детальный анализ всевозможных конфигураций позволяет выделить в конечном счете 4 независимых класса, которые вместе с налагаемыми на входные параметры окончательными ограничениями (получающимися в результате разрешения уравнений (16)-(17)) сведены в Таблицу 1 [где обозначено $\eta = [(\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2) + 2U_0^{*2})/(\gamma_1 + 2\gamma_2)]$]. В таблицу, ввиду тривиальности, не включена разрешенная конфигурация $k_1 = k_2 = 0$, т. е. U^* , $V^* = \text{const}$, $\delta_{1,2}^* = \text{const}$ (класс Раби). Таким образом, одно из решений исходной трехуровневой задачи (1) для перечисленных четырех классов задается формулами (3), (5), (11)-(15) с $\varphi = e^{2z}$. Два других независимых решения также записываются с помощью функции Гурса (см., например, [12]). Все доселе известные решения трехуровневой задачи, интегрируемые в функциях Гурса, представляют собой частные случаи моделей, представленных в приведенной таблице. Например, 2-й класс суть обобщение семейства [12] (в этой работе наложено дополнительное ограничение двухфотонного резонанса).

Таблица 1

N	k_1	k_2	U^*	V^*	δ_{1z}^*	δ_{2z}^*	Ограничения	λ
1.	-1	-1	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{V_0^*}{z}$	β_1/z $\gamma_1 + \beta_1/z$ $\gamma_1 + \beta_1/z$	$\gamma_2 - \beta_1/z$ $-\beta_1/z$ $-\gamma_1 - \beta_1/z$	$\beta_2 = -\beta_1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$ $\beta_2 = -\beta_1, \gamma_2 = 0, \gamma_1 \neq 0$ $\beta_2 = -\beta_1, \gamma_2 = -\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$	0 $i\gamma_1$ 0
2.	-1/2	-1	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{V_0^*}{z}$	$\gamma_1 + \beta_1/z$ $\gamma_1 + \beta_1/z$	$\beta_2/z - \gamma_1$ β_2/z	$\gamma_2 = -\gamma_1, \gamma_1 \neq 0$ $\gamma_2 = 0, \gamma_1 \neq 0$	0 $i\gamma_1$
3.	0	-1	U_0^*	$\frac{V_0^*}{z}$	$\gamma_1 + \beta_1/z$	$\beta_2/z + \gamma_2$	$\gamma_2 \neq -\gamma_1/2$ $U_0^{*2} = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)$	$i\eta$
4.	-1/2	-1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{V_0^*}{\sqrt{z}}$	$\gamma_1 + \beta_1/z$	$\beta_2/z - \gamma_1$	$\gamma_2 = -\gamma_1, \gamma_1 \neq 0$	0

3. Заключение

Таким образом, данная работа, являющаяся второй в серии исследований обобщенных гипергеометрических функций, могущих послужить в качестве основы для построения решений трехуровневой задачи,

выявила четыре класса моделей, для которых решение исходной задачи выражается в функциях Гурса. Один из этих классов является обобщением класса Кэрролла-Хью [12], остальные – новые. Мы надеемся, что описанные модели найдут применения в различных задачах квантовой физики. Например, четвертый класс охватывает интересный вариант трехуровневой задачи Ландау–Зинера о пересечении термов. Мы надеемся провести анализ этого и других физически важных случаев в ближайшем будущем.

В заключение укажем, что роль точно интегрируемых моделей не ограничивается лишь развитием аппарата теории модельных линейных квантовых систем. Фактически, как показывает практика, они играют важную роль и в построении начальных приближений в задачах слабо-нелинейных систем, таких, как Бозе-Энштейновский конденсат атомарных газов, взаимодействующий со (слабыми) внешними волнами. Подобные задачи часто представляют значительные трудности для численного моделирования из-за крайне медленного установления квазистационарных режимов. Этот аспект (возможно, наиболее актуальный в настоящий момент) также числится в списке проблем, к изучению которых мы надеемся приступить в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного Научно-Технического Центра No. A-215-99 и PA No. 0591-2002.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.D.Landau. *Phys. Z. Sovjetunion*, 2, 46 (1932); C.Zener. *Proc. Roy. Soc. (London)*, ser. A, 137, 696 (1932).
2. N. Rosen, C. Zener. *Phys. Rev.*, 40, 502 (1932).
3. A. Bambini, P.R. Berman. *Phys. Rev. A*, 23, 2496 (1981) ; Ю.Н. Демков, М. Куни-ке. *Вестник Ленингр. ун-та, Физ., Хим.*, 16, 39 (1969).
4. C.E.Carroll and F.T.Hioe. *Phys. Rev. A*, 42, 1522 (1990); C.E.Carroll and F.T. Hioe. *J. Opt. Soc. Am. B*, 5, 1335 (1988) ; C.E.Carroll and F.T.Hioe. *Phys. Rev. A*, 36, 724 (1987).
5. A.M.Ishkhanyan and K.-A.Suominen. *Phys. Rev. A*, 65, 051403(R) (2002).
6. A.M.Ishkhanyan. *Phys. Rev. A*, 61, 063609 (2000).
7. A.M. Ishkhanyan. *J. Phys. A*, 30, 450 (1997); A.M. Ishkhanyan. *Optics Communications*, 176, 155 (2000).
8. A.M. Ishkhanyan. *J. Physics A: Math. Gen.*, 33, 5539 (2000); A.M.Ishkhanyan and K.-A.Suominen. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34, 6301 (2001).
9. A.M. Ishkhanyan. *J. Physics A: Math. Gen.*, 33, 5041 (2000); А.М.Ишханян. Доклады НАН РА (в печати).
10. B.W.Shore. *The Theory of Coherent Atomic Excitation*, New York, Wiley, 1990; L.Allen, J.H.Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. New York, Wiley, 1975.
11. L.J.Slater. *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966; A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi. *Higher Transcendental Functions*, New York, McGraw-Hill, 1953.
12. C.E.Carroll and F.T.Hioe. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 22, 2633 (1989).

ԵՌԱՄԱԿԱՐԴԱԿ ԽՆԴՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ
ԳՈՒՐՍԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ, Ա.Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ուսումնասիրված է Գուրսայի ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ${}_2F_2$ ֆունկցիաներով եռամակարդակ քվանտամեխանիկական խնդրի ինտեգրումը: Ստացված է այդ ֆունկցիաներով ինտեգրվող մոդելների ընդհանուր առմամբ 4 անսահման դաս, որոնցից մեկը իրենից ներկայացնում է մինչ այդ հայտնի ընտանիքի ընդհանրացումը, իսկ մյուսները նոր են:

EXACT SOLUTIONS OF THE THREE-LEVEL PROBLEM
IN TERMS OF GOURSAT FUNCTIONS

A.M. ISHKHANYAN, A.M. MANUKYAN

The integrability of the three-level quantum-mechanical problem in terms of generalized hypergeometric functions ${}_2F_2$ is studied. A total of 4 infinite classes of models integrable in terms of these functions is derived one of which is a generalization of the previously known subfamily, and the others are new.

УДК 539.126

РЕДКИЙ РАСПАД $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ ВНЕ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

А.Г. ОГАНЕСЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 28 января 2002 г.)

Рассмотрен распад $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ в расширениях Стандартной Модели (СМ), где вклад хромомagnetного оператора намного больше своего значения в СМ. Учитывая экспериментальные ограничения, показано, что возможны большие отклонения от предсказаний СМ как для ширины распада, так и для CP нарушающей асимметрии.

1. CP-нарушение

Несмотря на то, что нарушение CP-инвариантности было открыто еще в 1964г. [1], оно остается одной из плохо исследованных явлений физики элементарных частиц. В частности, непонятно, описывает ли предлагаемый Стандартной Моделью электрослабых и сильных взаимодействий механизм CP-нарушения физическую картину этого явления. Есть надежда, что детальное исследование B-мезонных распадов прояснит этот вопрос [2]. С этой точки зрения особенно интересны исследования эффектов, связанных с нарушением CP-инвариантности в редких B-мезонных распадах.

Целью этой статьи является исследование прямого CP-нарушения в случае редкого распада $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ в рамках СМ и ее расширений. Этот распад еще не зарегистрирован экспериментально, но может быть обнаружен в ближайшем будущем [2]. Прямая CP-асимметрия в случае распада $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ определяется величиной

$$a_{CP} = \frac{\Gamma(B \rightarrow X_{\bar{S}} \ell^+ \ell^-) - \Gamma(\bar{B} \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-)}{\Gamma(B \rightarrow X_{\bar{S}} \ell^+ \ell^-) + \Gamma(\bar{B} \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-)},$$

где Γ – ширина распада. Прямая CP-асимметрия появляется в результате интерференции слабых и сильных фаз. Слабые фазы содержатся в комплексных константах связи лагранжиана – в элементах матрицы Кабибо-Кобаяши-Маскавы (ККМ) или во вкладах возможной новой физики в вильсоновские коэффициенты. Сильные фазы возникают от мнимых частей диаграмм. Для получения в данном процессе отличной от нуля CP-асимметрии в амплитуде распада необходимы по крайней мере два

вклада с различными сильными и слабыми фазами.

2. Эффективный гамильтониан

Для теоретического описания редких слабых распадов используется так называемый метод эффективного гамильтониана, который позволяет наиболее корректным образом учитывать КХД поправки. В случае распада $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ он имеет вид

$$H_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[V_{ts}^* V_{tb} \sum_{i=1}^{10} C_i(\mu) O_i(\mu) - V_{us}^* V_{ub} \sum_{i=1,2} C_i(\mu) (O_i(\mu) - O_i^*(\mu)) \right],$$

где эффективные операторы O_i приведены в [3],

$$\lambda_u = V_{us}^* V_{ub} = A \lambda^4 (\rho - i\eta), \quad \lambda_t = V_{ts}^* V_{tb} = -A \lambda^2 (1 - \lambda^2/2 + \lambda^2 (\rho - i\eta)),$$

$$\lambda = |V_{us}| = 0.22, \quad A = 0.819 \pm 0.035, \quad \rho = 0.160_{-0.070}^{+0.094}, \quad \eta = 0.381_{-0.058}^{+0.061},$$

C_i — вильсоновские коэффициенты [3,4], G_F — постоянная Ферми, V_{ij} — элементы матрицы ККМ. Для нашего рассмотрения особую значимость имеют так называемые магнитный и хромомагнитный дипольные операторы

$$O_7 = (e/g^2) m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R) F_{\mu\nu}, \quad O_8 = (1/g) m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} T^a b_R) G_{\mu\nu}^a.$$

Как видно, в эффективном гамильтониане коэффициент второго члена в λ^2 раз меньше первого и, следовательно, может быть отброшен, но для получения отличной от нуля СР-асимметрии этот член необходим. Учитывая малость коэффициента λ_u , можно ожидать, что СР-асимметрия в СМ будет малой.

В случае СМ для СР-асимметрии получается следующая формула [5]:

$$a_{CP} = \frac{2(\hat{s}-1)^2 \left(\text{Im}[\lambda_u \lambda_t^*] / |\lambda_t|^2 \right) \left[(1+2\hat{s}) \text{Im}[\xi_1^* \xi_2 + 6 \text{Re}[C_7^{(0)}] \text{Im}[\xi_2]] \right]}{(\hat{s}-1)^2 \left((1+2\hat{s}) \left[|C_9^{\text{eff}}|^2 + |C_{10}|^2 \right] + 12 \text{Re}[C_7^{(0)} C_9^{\text{eff}*}] + 4(1+2/\hat{s}) |C_7^{(0)}|^2 \right)},$$

где $C_9^{\text{eff}} = \xi_1 + \xi_2 (\lambda_u / \lambda_t)$, $\hat{s} = (p_{\ell^+} + p_{\ell^-})^2 / m_b^2$.

Мы рассматриваем кинематический интервал $0.05 \leq \hat{s} \leq 0.25$, где резонансные эффекты малы. Для получения интегральной СР-асимметрии надо отдельно проинтегрировать числитель и знаменатель по $\hat{s}$. В результате в СМ интегральная СР-асимметрия получается очень маленькой, порядка 0.1% [6], что делает невозможным ее экспериментальное обнаружение.

Дифференциальная ширина распада $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ определяется

величиной [5,7]

$$R(\hat{s}) = \frac{d}{d\hat{s}} \Gamma(b \rightarrow s \ell^+ \ell^-) / \Gamma(b \rightarrow c e \bar{\nu}_e) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \left| \frac{V_{ts}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{(1-\hat{s})^2}{f(z)k(z)} \left[(1+2\hat{s}) \left(|C_9^{eff}|^2 + |C_{10}|^2 \right) + 4 \left(1 + \frac{2}{\hat{s}} \right) |C_7^{eff}|^2 + 12 C_7^{eff} \operatorname{Re} [C_9^{eff}] \right].$$

В СМ для соответствующей интегральной величины получается значение [4]

$$R = \int_{0.005}^{0.25} d\hat{s} R(\hat{s}) = (1.25 \pm 0.08) \times 10^{-5}.$$

3. СР-асимметрия вне Стандартной Модели

Если перейти от СМ к другой модели, то с точки зрения эффективного гамильтониана изменятся коэффициенты Вильсона. Вообще говоря, может измениться и операторный базис, но эту возможность мы не рассматриваем.

Шесть из десяти вильсоновских коэффициентов в древесном приближении дают вклады в разные нелептонные распады, и поэтому их возможные отклонения от значений СМ малы. Мы будем полагать, что от значений СМ отличаются только вильсоновские коэффициенты C_7 и C_8 , при этом считаем, что они могут быть и комплексными. Аналогичное рассмотрение было проведено для распада $B \rightarrow X_S \gamma$ [8], и актуальность этого обуславливается тем, что имеются экспериментальные данные, которые свидетельствуют о большом значении вильсоновского коэффициента C_8 [9].

Можно менять и вильсоновские коэффициенты C_9 и C_{10} , но в типичных случаях C_9 незначительно отличается от своего значения в СМ, а C_{10} входит в выражение для СР-асимметрии только в знаменатель и незначительно влияет на результат [10].

Таким образом, будем рассматривать теории вне СМ, не конкретизируя модель, изменяя коэффициенты C_7 и C_8 так, чтобы теоретические и экспериментальные результаты для распадов $B \rightarrow X_S \gamma$ и $B \rightarrow X_S g$ были в согласии.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные ограничения (и соответствующие теоретические предсказания в рамках СМ [11,12]) приведены в следующих формулах:

$$Br[B \rightarrow X_S \gamma] = (2.96 \pm 0.35) \times 10^{-4} \quad (Br^{SM}[B \rightarrow X_S \gamma] = (3.3 \pm 0.35) \times 10^{-4}),$$

$$Br[B \rightarrow X_S g] < 2.5 \times 10^{-2} \quad (Br^{SM}[B \rightarrow X_S g] = (2.2 \pm 0.8) \times 10^{-3}).$$

Пренебрегая вкладом, обусловленным малой фазой СМ, и учи-

тывая, что величины C_7 и C_8 могут быть и комплексными, для CP-асимметрии получим следующую общую формулу [10]:

$$a_{CP} = \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 \frac{G_F^2 m_b^5 |\lambda_t|^2}{48\pi^3} \frac{\int d\hat{s} (1-\hat{s})^2 \{ (1+2\hat{s}) a_{99} + 4(1+2/\hat{s}) a_{77} + 12 a_{79} \}}{2\Gamma(b \rightarrow \bar{c} e \nu) \int d\hat{s} R(\hat{s})},$$

где (для обозначений см. [3,4])

$$\begin{aligned} a_{99} &= -\frac{\alpha_S(\mu_b)}{\pi} F_{89} \operatorname{Im} \hat{C}_9^{\text{eff}} \operatorname{Im} \hat{C}_8, \\ a_{77} &= \frac{\alpha_S(\mu_b)}{\pi} \left(\operatorname{Re} \hat{C}_7^{(0)\text{eff}} \operatorname{Im} \hat{C}_8 - \operatorname{Im} \hat{C}_7^{(0)\text{eff}} \operatorname{Re} \hat{C}_8 \right) \operatorname{Im} F_{87}, \\ a_{79} &= 2 \operatorname{Im} \hat{C}_7^{(0)\text{eff}} \operatorname{Im} \hat{C}_9^{\text{eff}} + \frac{\alpha_S(\mu_b)}{2\pi} \operatorname{Im} \hat{C}_7^{(1)\text{eff}} \operatorname{Im} \hat{C}_9^{\text{eff}} + \\ &+ 4 \frac{\alpha_S(\mu_b)}{\pi} \operatorname{Im} \hat{C}_7^{(0)\text{eff}} \operatorname{Im} \hat{C}_9^{\text{eff}} \omega_{79} + \frac{\alpha_S(\mu_b)}{2\pi} \operatorname{Im} \hat{C}_8^{(0)\text{eff}} \left(\operatorname{Im} F_{87} \operatorname{Re} \hat{C}_9^{\text{eff}} - \operatorname{Re} F_{87} \operatorname{Im} \hat{C}_9^{\text{eff}} \right). \end{aligned}$$

В итоге, учитывая экспериментальные ограничения, получаем

$$-8\% \leq a_{CP} \leq 6\%.$$

Интегральная величина R (т.е. ширина распада) может быть больше своего значения в СМ до 2.3 раза.

В заключение отметим, что с нашей стороны впервые было показано, что в расширениях Стандартной Модели CP нарушающие эффекты в распаде $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ могут во много раз превышать значения, предсказанные СМ. Такие большие эффекты могут быть зарегистрированы в экспериментах, посвященных исследованиям В-мезонных распадов, и в случае обнаружения однозначно укажут на существование CP нарушающих источников вне СМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.H.Christenson, J.W.Cronin, V.L.Fitch, and R.Turlay. Phys. Rev. Lett., **13**, 138 (1964).
2. BABAR physics book. By BABAR Collaboration, SLAC-R-504 (1998).
3. C.Bobeth, M.Misiak, and J.Urban. Nucl. Phys., **B574**, 291 (2000).
4. H.H.Asatryan, H.M.Asatrian, C.Greub, and M.Walker. Phys. Lett., **B507**, 162 (2001).
5. A.J.Buras and M.Munz. Phys. Rev., **D52**, 186 (1995).
6. Ahmed Ali, G. Hiller. Eur. Phys. J., **C8**, 619 (1999).
7. M.Misiak. Nucl. Phys., **B393**, 23 (1993).
8. A.L.Kagan, M.Neubert. Phys. Rev., **D58**, 094012 (1998).
9. A.L.Kagan, J.Rathsman. hep-ph/9701300.
10. H.H.Asatryan, H.M.Asatrian, G.K.Yeghiyan, G.K.Savvidy. Int. J. Mod. Phys., **A16**, 3805 (2001).
11. K.G.Chetyrkin, M.Misiak, and M.Munz. Phys. Lett., **B400**, 206 (1997).
12. C.Greub, P.Liniger. Phys. Rev., **D63**, 054025 (2001).

Դիտարկված է $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ տրոհումը ստանդարտ մոդելի (ՍՄ) այն ընդհանրացումներում, որտեղ քրոմոմագնիսական օպերատորի ներդրումը շատ անգամ մեծ է իր արժեքից ՍՄ-ում: Հաշվի առնելով փորձարարական սահմանափակումները, ցույց է տրված, որ հնարավոր են մեծ շեղումներ ՍՄ-ի կանխագուշակումներից ինչպես տրոհման լայնության, այնպես էլ CP խախտող ասիմետրիայի համար:

RARE DECAY $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ BEYOND THE STANDARD MODEL

A.H. HOVHANNISYAN

We consider the decay $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ in general extensions of the Standard Model where the contribution of the chromomagnetic operator is highly enhanced. Taking into account the available experimental constraints, we show that large deviations from the predictions of the SM are possible for both the decay rate and CP-violating asymmetry.

УДК 531.19

КОМПЛЕКСНЫЕ НУЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ
Q-ПОЗИЦИОННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 30 января 2002 г.)

С помощью теории динамических систем исследованы нули Янга-Ли и Поттса Q -позиционной одномерной модели Поттса при $Q > 0$. Показано, что в одномерном случае точки фазового перехода на комплексной плоскости можно найти из условия существования нейтральных фиксированных точек. Найдены плотности распределения нулей Янга-Ли и Поттса, а также соответствующие критические показатели. Проведена классификация распределения нулей Янга-Ли и Поттса в зависимости от параметров модели.

1. Введение

В 1952 г. Ли и Янг, рассматривая статистическую сумму (с.с.) модели решеточного газа как полином от фугитивности [1] ($y = e^{\mu}$, где μ – химический потенциал), доказали, что сингулярности термодинамических потенциалов отсутствуют в областях на комплексной плоскости, где нет нулей статистической суммы. Из эквивалентности модели решеточного газа и модели Изинга со спином $1/2$ они доказали теорему о том, что нули с.с. ферромагнитной модели Изинга на комплексной плоскости активности ($z = e^H$, где H – магнитное поле) распределены по единичной окружности с центром в начале координат (нули Янга-Ли), т.е. фазовый переход второго рода происходит только в отсутствие магнитного поля. Позднее, в 1964 г. Фишер [2] исследовал нули с.с. на комплексной температурной плоскости для модели Изинга со спином $1/2$ на квадратной решетке (нули Фишера).

Модель Поттса является одной из наиболее важных моделей в статистической физике [3]. Показано, что при нецелых значениях Q она описывает физические системы как спиновые стекла [4], гелеобразование и вулканизацию в разветвленных полимерных системах [5] и т.д. [3]. Известно также, что с.с. антиферромагнитной модели Поттса при $T=0$ соответствует хроматическому полиному и связана с проблемой раскраски графов [6]. Впервые нули Янга-Ли для ферромагнитной Q -позиционной одномерной модели Поттса были исследованы методом трансфер-

матриц в работе [7]. Наиболее интересным результатом этой работы было то, что при $Q < 1$ нули Янга-Ли заполняют интервал на положительной полуоси. Впоследствии этот результат был подтвержден численно для некоторых $Q < 1$ в работе [8]. Однако до сих пор оставался неясным вопрос о распределении нулей Янга-Ли при $Q < 1$ и малых температурах. В работе [7] указано лишь, что при малых температурах, кроме интервала на действительной оси, существуют также комплексно сопряженные нули Янга-Ли.

В данной работе впервые исследуются нули Поттса, а также проводится полная классификация нулей Янга-Ли и Поттса для ферромагнитной и антиферромагнитной Q -позиционной одномерной модели Поттса. Нулями Поттса называются комплексные нули с.с. относительно параметра Q [9].

2. Модель Поттса

Гамильтониан модели Поттса имеет вид

$$-\beta H = J \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + h \sum_i \delta(\sigma_i, 0), \quad (1)$$

где $\sigma_i = 0, 1, 2, \dots, Q-1$, $\beta = 1/kT$. Модель ферромагнитная при $J > 0$ и антиферромагнитная при $J < 0$. Суммирование в первой сумме (1) ведется по всем парам ближайших соседних узлов, а во второй – по всем узлам решетки. Переменные Поттса σ_i определены в узлах решетки (рис.1), и число узлов равно $2N+1$. При условии циклических граничных условий $\sigma_N = \sigma_{-N}$, разрезая решетку в центральном узле σ_0 , получим две идентичные ветви (I и II). Обозначив через $g_N(\sigma_0)$ статистический вес одной из ветвей I или II, для с.с. модели получим

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = \sum_{\sigma_0} e^{h\delta(\sigma_0, 0)} g_N^2(\sigma_0). \quad (2)$$

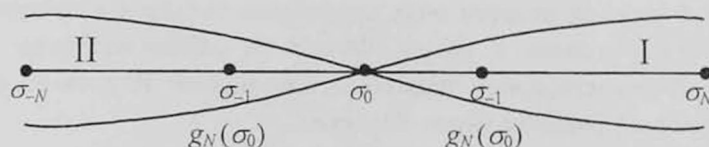


Рис.1. Схема вывода рекуррентного уравнения.

Аналогично, разрезая ветвь I (II) в узле σ_1 (σ_{-1}), получим рекуррентное уравнение для $g_N(\sigma_0)$: $g_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma_1} e^{J\delta(\sigma_1, \sigma_0) + h\delta(\sigma_1, 0)} g_{N-1}(\sigma_1)$. Вводя вспомогательную переменную $x_N = g_N(\sigma \neq 0)/g_N(\sigma = 0)$, получим рекуррентное уравнение для x_N , где $z = e^J$ и $\mu = e^h$:

$$x_{N+1} = f(x_N), \quad f(x) = \frac{(z + Q - 2)x + \mu}{(Q - 1)x + z\mu}. \quad (3)$$

Все термодинамические характеристики модели можно выразить через x [10]; например, средняя намагниченность имеет вид

$$M = (NZ)^{-1} \sum_{\sigma} \delta(\sigma, 0) e^{-\beta H} = \mu(\mu + (Q-1)x)^{-1}.$$

Отображение (3) представляет из себя отображение Мебиуса, динамика которого хорошо исследована [11]. Легко показать, что отображение (3) имеет только фиксированные точки (ф.т.), которые определяются решениями уравнения $f(x)=x$. Согласно теории динамических систем, ф.т. $\bar{x}$ притягивающая, если $|\lambda| < 1$, где $\lambda = f'(\bar{x})$; отталкивающая, если $|\lambda| > 1$ и нейтральная, если $|\lambda| = 1$. Отображение (3) имеет только две ф.т., x_1 и x_2 , причем если одна из ф.т. притягивающая, то другая отталкивающая или обе они нейтральные. С точки зрения стат. физики стабильной фазе соответствует предельное значение сходящегося ряда x_N , при фазовом переходе ряд x_N не сходится. Отсюда следует, что в нашей модели стабильной фазе соответствует притягивающая ф.т., а фазовому переходу – нейтральная ф.т. Как было указано во Введении, фазовым переходам соответствуют нули с.с., значит, нули с.с. ассоциируются с существованием нейтральной ф.т. и их можно найти из условия существования нейтральных ф.т. $f(x)=x$ и $f'(x)=e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Исключая x из обоих уравнений, получим уравнение для нулей с.с., где $\varphi \in [0, \pi]$:

$$z^2 \mu^2 - 2[(z-1)(z+Q-1)\cos\varphi - Q+1]\mu + (z+Q-2)^2 = 0. \quad (4)$$

3. Нули Янга-Ли

Чтобы найти нули Янга-Ли [1], необходимо решить уравнение (4) относительно μ :

$$\mu_{1,2} = A[2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - B \pm 2\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - B)}], \quad (5)$$

где $A = (z-1)(z+Q-1)/z^2$ и $B = A^{-1}(z+Q-2)/z$. Из (4) и (5) следует, что $\mu_{1,2}$ либо действительные, либо комплексно сопряженные и лежат на окружности с радиусом $R = |z+Q-2|/z$. Для ферромагнитной модели Поттса ($z > 1$) имеем $B > 1$. Из (5) следует, что $\mu_{1,2}$ комплексно сопряженные и имеют вид $\mu = Re^{i\theta}$, где

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{B^{-1}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

Отсюда очевидно, что не существует решений уравнения (4) в интервале $-\theta_0 < \theta < \theta_0$, где $\theta_0 = 2\arccos\sqrt{B^{-1}}$. Это означает существование щели в распределении нулей Янга-Ли вблизи действительной положительной оси, что соответствует отсутствию фазовых переходов для $Q > 1$. Крайние точки $\mu_{\pm}$ соответствуют $\varphi = 0$ и равны



$$\mu_{\pm} = \frac{1}{z^2} \{ \sqrt{(z-1)(z+Q-1)} \pm \sqrt{1-Q} \}^2.$$

Классификация нулей Янга-Ли для ферромагнитной и антиферромагнитной моделей приведена на рис.2 и 3. Плотность распределения нулей Янга-Ли можно найти, дифференцируя обе части уравнений (4) или (6) относительно μ и ϕ для действительных ($g(\mu)$) или комплексных ($g(\theta)$) $\mu_{\pm}$ соответственно:

$$g(\mu) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{|\mu - \sqrt{\mu_+\mu_-}|}{\sqrt{(\mu_+ - \mu)(\mu - \mu_-)}}, \quad g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\sin \frac{\theta}{2}|}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что плотности $g(\mu)$ и $g(\theta)$ стремятся к бесконечности при $\theta \rightarrow \theta_0$ или $\mu \rightarrow \mu_{\pm}$ по закону $g(\theta) \propto |\theta - \theta_0|^\sigma$ или $g(\mu) \propto |\mu - \mu_{\pm}|^\sigma$, где σ — критический показатель сингулярности Янга-Ли и $\sigma = -1/2$.

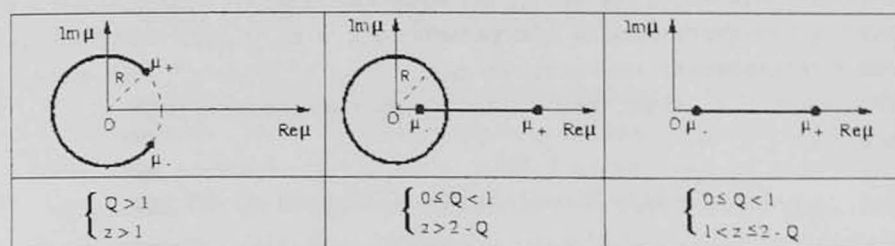


Рис.2. Нули Янга-Ли ферромагнитной модели Поттса.

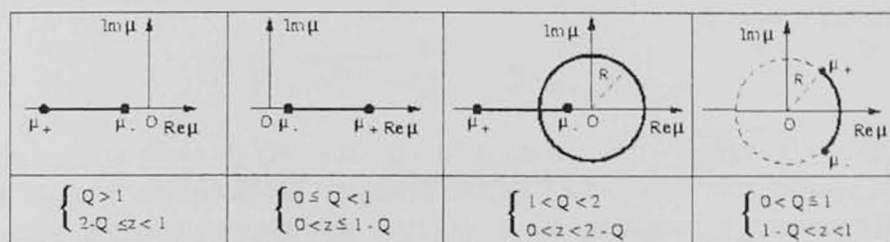


Рис.3. Нули Янга-Ли антиферромагнитной модели Поттса.

4. Нули Поттса

Для того, чтобы найти нули Поттса, рассмотрим уравнение (4) относительно Q . Сделав подстановку $P = Q + z - 1$, уравнение (4) примет вид

$$P^2 - 2P[1 - \mu + \mu(z-1)\cos\phi] + (1 - z\mu)^2 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) исследуется аналогично уравнению (4). Результаты представлены на рис.4 и 5, где $R = |1 - z\mu|$. Для комплексных P плотность нулей Поттса имеет вид $g(\theta)$ из (7), где $\theta_0 = 2 \arccos \sqrt{B^{-1}}$ и $B^{-1} = \mu(z-1)(z\mu-1)^{-1}$. Для действительных P плотность нулей Поттса имеет вид $g(\mu)$ из (7) с заменой $\mu \rightarrow P$ и $P_{\pm} = (\sqrt{1-\mu} \pm \sqrt{\mu(z-1)})^2$. В данном случае также нули Поттса накапливаются вблизи точек $P_{\pm}$, и плотность нулей расходится степенным образом с показателем $\sigma = -1/2$.

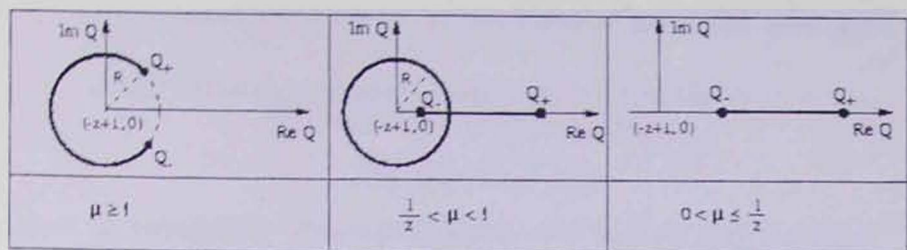


Рис.4. Нули Поттса ферромагнитной модели Поттса.

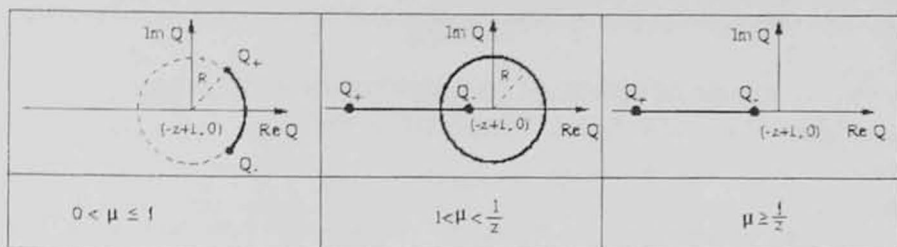


Рис.5. Нули Поттса антиферромагнитной модели Поттса.

5. Заключение

Сравнивая наши результаты с результатами, полученными методом трансфер-матриц [7,9], получим, что фаза φ производной рекурсивной функции $f(x)$ совпадает с разностью фаз двух максимальных собственных значений трансфер-матрицы. Заметим, что при $Q < 1$ в методе трансфер-матриц [7] необходимо рассматривать только два первых собственных значения.

Автор выражает благодарность Н.С.Ананкиану за обсуждение статьи и ценные замечания. Работа выполнена при частичном финансировании из грантов INTAS-97-347 и ISTC-A-102.

ЛИТЕРАТУРА

1. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys. Rev., **87**, 404, 410 (1952).
2. M.E.Fisher. Lectures in Theoretical Physics, ed. W.E.Brittin, Univ. of Colorado

Press, Boulder, 1965, v.7c, p.1.

3. F.Y.Wu. Rev. Mod. Phys., **58**, 235 (1982).
4. A.Aharony, P.Pfeuty. J. Phys. C: Solid State Phys., **12**, L125 (1979).
5. T.C.Lubensky, J.Isaacson. Phys. Rev. Lett., **41**, 829 (1978).
6. A. D.Sokal. Physica A, **279**, 324 (2000).
7. Z.Glumac, K.Uzelac. J. Phys. A: Math. Gen., **27**, 7709 (1994).
8. J.L.Monroe. J. Phys. A: Math. Gen., **29**, 5421 (1996).
9. S.-Y.Kim, R.J.Creswick. Phys. Rev. E, **63**, 066107 (2001); B.P.Dolan et al. J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 6211 (2001).
10. R.G.Ghulghazaryan. Int. J. Mod. Phys. B, **14**, 589 (2000); N.S.Ananikian, R.G.Ghulghazaryan. Phys. Lett. A, **277**, 249 (2000).
11. A.F.Beardon. Iteration of Rational Functions. Springer, New York, 1991.

ՓՈՒՅՈՒ Չ-ԴԻԲՔԱՅԻՆ ՄԻԱՉԱՓ ՄՈԴԵԼԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ
ԳՈՒՄԱՐԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԶՐՈՆԵՐԸ

Ռ.Գ. ԴՈՒԼԴԱԶԱՐՅԱՆ

Կիրառելով դինամիկական համակարգերի տեսությունը՝ հետազոտված են Փոքսի Q -դիրքային միաչափ մոդելի Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոները ոչ ամբողջ $Q > 0$ համար: Յույց է տրված, որ միաչափ դեպքում կոմպլեքս հարթության վրա փուլային անցման կետերը կարելի է գտնել նեյտրալ կանգուն կետերի գոյության պայմանից: Ստացված են Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոների բաշխման խտությունները և համապատասխան կրիտիկական ցուցիչները: Յանգ-Լիի և Փոքսի զրոների բաշխումները դասակարգված են ըստ մոդելի պարամետրների:

COMPLEX ZEROS OF THE PARTITION FUNCTION
OF THE Q -STATE POTTS MODEL

R.G. GHULGHAZARYAN

Using the dynamical systems theory, the Yang-Lee and Potts zeros of the one-dimensional Q -state Potts model are investigated for $Q > 0$. It is shown that in the one-dimensional case the phase transition points on the complex plane may be found from the condition of existence of neutral fixed points. Densities of the Yang-Lee and Potts zeros and corresponding critical exponents are found. The Yang-Lee and Potts zeros are classified depending on the parameters of the model.

УДК 530.145

РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ УЙМИНА-ЛАЯ-САЗЕРЛЭНДА СПИНА 3/2 В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ФЕРМИОНОВ

М.Б. МИРУМЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 24 декабря 2001 г.)

Исследована решеточная спиновая модель Уймина-Лая-Сазерлэнда спина 3/2. Построено представление алгебры $su(2)$ спина 3/2 в линейном пространстве операторов рождения и уничтожения трех фермионов. Найден выражение для гамильтониана и энергетический спектр, а также соответствующие уравнения Бете.

1. Введение

Точнорешаемые модели статистической физики и теории поля, относящиеся к малому числу измерений ($d = 0, 1, 2$), давно находятся в сфере пристального внимания физиков-теоретиков. Интерес сильно возрос в последнее время, в связи с многочисленными приложениями в физике твердого тела.

Развитие современных наноструктурных технологий позволяет рассматривать экспериментально проблемы в ноль- (квантовые точки), одно- (квантовые нити) и двух- (эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость) мерных моделях.

Известная одномерная решеточная модель Гейзенберга спина 1/2 с гамильтонианом

$$H = J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1)$$

была впервые решена Бете в 1931г. [1] с помощью подстановки, носящей сейчас его имя (анзац Бете). В течение последних 25 лет этот метод развился в мощный формализм под названием квантовый метод обратной задачи рассеяния (КМОЗР) [2,3] или алгебраический анзац Бете (ААБ). Метод позволяет найти полное множество собственных значений и собственных векторов интегрируемой системы. Интегрируемость модели обеспечивается требованием выполнения уравнений Янга-Бакстера, которые эквивалентны существованию бесконечного числа законов

сохранения. Затем с помощью алгебраического анзаца Бете могут быть найдены спектр энергетических состояний модели [4,5] и уравнения Бете. Так как фермионное пространство Фока конечномерно, применение ААБ в матричной формулировке намного упрощается. Надо отметить, что техника ААБ в основном была развита для спиновой решеточной модели ХХЗ, а его применение к моделям, изначально сформулированным при помощи антикоммутирующих операторов, оказалось сложнее. Например, для модели Хаббарда, которая изначально была решена методом координатного анзаца Бете, применение ААБ оказалось возможным недавно [6], после существенных работ Шастри [7-9], в которых было использовано преобразование Йордана-Вигнера для перехода от фермионных операторов к спиновым, с целью применения МОЗР в матричной формулировке. В последнее время повысился интерес к спиновым решеточным моделям, сформулированным посредством ферми-операторов, с использованием преобразования Йордана-Вигнера [10], а также некоторых новых методов, развитых в работах [5-7].

Оказалось, что явное построение интегрируемых моделей и применение КМОЗР в терминах ферми-операторов становится сравнительно легкой задачей. Так как пространство Фока фермиона конечномерно, то изучение полного набора собственных векторов и собственных значений трансфер-матрицы упрощается. Известно, что тривиальное обобщение модели Гейзенберга на высшие спины неинтегрируемо [11]. Первая интегрируемая модель спина s была сформулирована Г.Уймином [8], Дж.К.Лаем [9] и Б.Сазерлендом [12]. Ими была исследована модель с гамильтонианом

$$H = J \sum_{i=1}^N (Id_{i,j+1} + P_{i,j+1}), \quad (2)$$

где $P_{i,j+1}$ – оператор перестановки состояний в узлах i и $i+1$, а $Id_{i,j+1}$ – единичный оператор. Они показали ее интегрируемость и решили координатным анзацем Бете.

В данной работе исследована решеточная модель Уймина-Лая-Сазерленда спина $3/2$. Построено представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в тензорном произведении пространств Фока трех фермионов спина $1/2$. Методом алгебраического анзаца Бете найдены спектр трансфер-матрицы и гамильтониан исследуемой модели.

2. Квантовый метод обратной задачи рассеяния в градуированных пространствах

Здесь мы напомним основные формулы квантового метода обратной задачи рассеяния. Основным объектом формализма КМОЗР является R -матрица [1,3,4,5], с помощью которой матрица монодромии и трансфер-матрица соответственно определяются как

$$T(u) = \prod_{j=1}^N R_{ij}(u) = \prod_{j=1}^N L_j(u) \quad (3)$$

и

$$\tau(u) = \text{Tr}_\sigma \prod_{j=1}^N R_{aj}(u) = \text{Tr} \prod_{j=1}^N L_j(u), \quad (4)$$

где u – спектральный параметр, а $L_j(u)$ – оператор Лакса (определенный далее согласно (13)) (след берется во вспомогательном пространстве). По определению

$$R_{aj}(u, v) : V_\sigma(u) \otimes V_j(v) \rightarrow V_j(v) \otimes V_\sigma(u), \quad (5)$$

где пространства $V_\sigma(u)$ и $V_j(u)$ – соответственно вспомогательное и квантовое, которые являются неприводимыми представлениями группы симметрии рассматриваемой модели. Уравнения Янга-Бакстера обеспечивают коммутативность трансфер-матриц при разных значениях спектрального параметра, т. е.

$$[T(u), T(v)] = 0. \quad (6)$$

Соотношение (3) порождает бесконечный ряд коммутирующих и сохраняющихся величин, т.е. интегралов движения.

Гамильтониан определяется из следующего соотношения:

$$H = - \left. \frac{\partial \ln T(u)}{\partial u} \right|_{u=0}. \quad (7)$$

Следуя [6,7], обозначим базисы в $V_\sigma(u)$ и $V_j(u)$ соответственно через $|a\rangle$ и $|j\rangle$, тогда R -матрицу можно представить в виде

$$R_{aj}(j) \otimes |a\rangle = R_{a'j'}^{aj} |a'\rangle \otimes |j'\rangle, \quad (8)$$

где по повторяющимся индексам a' и j' подразумевается суммирование (но не по индексам a и j).

Так как в общем случае в формализме могут присутствовать антикоммутирующие операторы, то ясно, что в квантовом и вспомогательном пространствах будут присутствовать и грассмановые переменные, и возникает необходимость правильно учитывать знаки, возникающие при их упорядочении.

Операторы Хаббарда определяются соотношениями

$$\begin{aligned} X_{a'}^a &= |a'\rangle \langle a|, \\ X_{j'}^j &= |j'\rangle \langle j| \end{aligned} \quad (9)$$

в пространствах V_σ и V_j соответственно. Легко видеть, что для R -матрицы имеем:

$$R_{aj} = R_{aj} |j\rangle \langle j| = (-1)^{p(a)p(j')} R_{aj'}^{aj} X_{a'}^a X_{j'}^j, \quad (10)$$

где $p(a)$ и $p(j)$ обозначают четности соответствующих состояний в $V_a(u)$ и $V_j(u)$, соответственно.

Из определения (9) легко видеть, что операторы Хаббарда имеют проективное свойство, т.е.

$$X_a^b X_a^{b'} = \delta_a^{b'} X_a^b.$$

Уравнения Янга-Бакстера в обычной форме имеют следующий вид:

$$R_{ab}(u, v) R_{aj}(u, w) R_{bj}(v, w) = R_{bj}(v, w) R_{aj}(u, w) R_{ab}(u, v). \quad (12)$$

Оператор Лакса определяется как [8]

$$L_a^a = \langle a' | R(u, v) | a \rangle = (-1)^{p(a)p(j)} R_{a'j}^{aj}(u, v) X_j^{j'}. \quad (13)$$

Тогда можно показать, что уравнение Янга-Бакстера (12) принимает следующий вид [8]:

$$\tilde{R}_{ab}^{a'b'}(L \otimes_s L)_{ab}^{a'b'} = (L \otimes_s L)_{ab}^{a'b'} \tilde{R}_{ab}^{a'b'}, \quad (14)$$

или

$$\tilde{R}(u-v)(T(u) \otimes_s T(v)) = (T(v) \otimes_s T(u)) \tilde{R}(u-v), \quad (15)$$

где

$$\tilde{R}_{cd}^{ab} = R_{cd}^{ba},$$

$$(A \otimes_s B)_{bd}^{ac} = (-1)^{(p(a)+p(b))p(d)} A_b^a B_d^c$$

градуированное тензорное произведение [9].

3. Представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в пространстве операторов рождения и уничтожения фермионов, решетка Уймина-Лая-Сазерлэнда спина $3/2$

Интегрируемая модель спина s впервые была построена Г. Уймином, Дж. Лаем и Б. Сазерлэндом [8,9,12], а до этого было доказано, что тривиальное обобщение модели Гейзенберга неинтегрируемо [11]. Для исследования модели Уймина-Лая-Сазерлэнда спина $3/2$ на языке фермионных операторов, нам необходимо построить представление алгебры $su(2)$ в пространстве операторов рождения и уничтожения фермионов трех сортов. Почему необходимо работать именно в тензорном произведении пространств Фока трех сортов фермионов, будет ясно из дальнейшего изложения.

Алгебра $su(2)$ определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [S^+, S^-] &= 2S; \\ [S, S^\pm] &= \pm 2S^\pm. \end{aligned} \quad (17)$$

Легко видеть, что операторы

$$\begin{aligned} S^+ &= c^+; & S^- &= c^-; & n &= c^+ c^-, \\ S &= \frac{1}{2}(2n-1) \end{aligned} \quad (18)$$

(где c^+, c^- – операторы рождения и уничтожения фермиона, соответственно) реализуют представление алгебры $su(2)$ спина $1/2$. Как показано в [12,13], представление алгебры $su(2)$ спина 1 реализуется операторами рождения и уничтожения двух сортов фермионов следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+ &= (1-n_1)c_2 + (1-n_2)c_1^+, \\ S^- &= (1-n_2)c_1 + (1-n_1)c_2^+, \\ S &= n_1 - n_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где c_i^+ и c_i ($i=1,2$) – операторы рождения и уничтожения соответствующих фермионов:

$$\begin{aligned} \{c_j^+, c_i\} &= \delta_{ij}; \\ n_j &= c_j^+ c_j. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как тензорное произведение пространств Фока l фермионов 2^l -мерно, то для того, чтобы построить представление алгебры $su(2)$ размерности $2s+1$, количество требуемых фермионов должно удовлетворять соотношению

$$2s+1 \leq 2^l. \quad (21)$$

Мы намерены построить представление алгебры $su(2)$ размерности 4 (т.е. спина $3/2$). Согласно (18) минимальное число необходимых фермионов для построения равно трем.

Представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ операторами рождения и уничтожения фермионов четырехмерно и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S^+ &= \sqrt{3}(1-n_3)c_1^+c_2 + 2(1-n_1)c_2^+c_3 + \sqrt{3}(1-n_1)(1-n_2)c_3^+, \\ S^- &= \sqrt{3}(1-n_3)c_2^+c_1 + 2(1-n_1)c_3^+c_2 + \sqrt{3}(1-n_1)(1-n_2)c_3, \\ S &= 3n_1 + n_3 - 3/2 - 5/2n_1n_3 - 7/2n_1n_3 - 3/2n_2n_3 + 3n_1n_2n_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Легко проверить, что действуя операторами (22) на векторы

$$\begin{aligned} |3/2\rangle &= |1\rangle|0\rangle|0\rangle, \\ |1/2\rangle &= |0\rangle|1\rangle|0\rangle, \\ |-1/2\rangle &= |0\rangle|0\rangle|1\rangle, \\ |-3/2\rangle &= |0\rangle|0\rangle|0\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

получаем:

$$\begin{aligned}
S^+|3/2\rangle &= 0; & S^-|3/2\rangle &= \sqrt{3}|1/2\rangle; & S|3/2\rangle &= 3/2|3/2\rangle, \\
S^+|1/2\rangle &= \sqrt{3}|3/2\rangle; & S^-|1/2\rangle &= 2|-1/2\rangle; & S|1/2\rangle &= 1/2|1/2\rangle, \\
S^+|-1/2\rangle &= 2|1/2\rangle; & S^-|-1/2\rangle &= \sqrt{3}|-3/2\rangle; & S|-1/2\rangle &= -1/2|-1/2\rangle, \\
S^+|-3/2\rangle &= \sqrt{3}|-1/2\rangle; & S^-|-3/2\rangle &= 0; & S|-3/2\rangle &= -3/2|-3/2\rangle.
\end{aligned} \tag{24}$$

Индексы градуировки векторов следующие:

$$P(\sigma) = 1, \quad (\sigma = 3/2; 1/2; -1/2), \quad P(-3/2) = 0. \tag{25}$$

Очевидно, что оператор Казимира К алгебры $\mathfrak{su}(2)$, который равен

$$K = S^+S^- + S^-S^+ + S^2, \tag{26}$$

проецирует 8-мерное пространство состояний Фока трех фермионов на 4-мерное подпространство с базисом (23).

Действие операторов (22) на отбрасываемые векторы

$$\begin{aligned}
|x_1\rangle &= |1\rangle|1\rangle|1\rangle, \\
|x_2\rangle &= |0\rangle|1\rangle|1\rangle, \\
|x_3\rangle &= |1\rangle|1\rangle|0\rangle, \\
|x_4\rangle &= |1\rangle|0\rangle|1\rangle
\end{aligned} \tag{27}$$

равно нулю. Другими словами, $\ker K = \{a^i x_i : \forall a^i \in \mathfrak{o}^1, i = 1, 2, 3, 4\}$. Таким образом, получаем, что

$$F \otimes F \otimes F = V \oplus \ker K, \tag{28}$$

где $V \subset F \otimes F \otimes F$ с базисом (23), причем

$$\ker K = \ker S = \ker S^\pm. \tag{29}$$

Для спина 3/2 оператор Хаббарда имеет вид

$$\begin{aligned}
X_{im}^k &= \begin{pmatrix} |-3/2\rangle\langle -3/2| & |-1/2\rangle\langle -3/2| & |1/2\rangle\langle -3/2| & |3/2\rangle\langle -3/2| \\ |-3/2\rangle\langle -1/2| & |-1/2\rangle\langle -1/2| & |1/2\rangle\langle -1/2| & |3/2\rangle\langle -1/2| \\ |-3/2\rangle\langle 1/2| & |-1/2\rangle\langle -1/2| & |1/2\rangle\langle 3/2| & |3/2\rangle\langle 3/2| \\ |-3/2\rangle\langle 3/2| & |-1/2\rangle\langle 3/2| & |1/2\rangle\langle 3/2| & |3/2\rangle\langle 3/2| \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)(1-n_1)(1-n_2)c_3^+ & (1-n_1)(1-n_3)c_2^+ & (1-n_2)(1-n_3)c_1^+ \\ (1-n_1)(1-n_2)c_3 & (1-n_1)(1-n_2)n_3 & (1-n_1)c_2^+c_3 & (1-n_2)c_1^+c_3 \\ (1-n_1)(1-n_3)c_2 & (1-n_1)c_3^+c_2 & (1-n_1)n_2(1-n_3) & (1-n_3)c_1^+c_2 \\ (1-n_2)(1-n_3)c_1 & (1-n_2)c_3^+c_2 & (1-n_3)c_2^+c_1 & n_1(1-n_2)(1-n_3) \end{pmatrix}, \tag{30}
\end{aligned}$$

где индексом i обозначен i -ый узел решетки.

Оператор перестановки Π_{ij} имеет следующий вид:

$$\prod_j \sum_{m_j} |m_j\rangle \langle k_j| \langle m_l| = (-1)^{F(k)} X_{ik}^m X_{jk}^k. \quad (31)$$

Для R -матрицы имеем следующее соотношение (см., например, [12]):

$$\tilde{R}(u)_{ms}^{kq} = \delta_m^k \delta_s^q + u \delta_s^k \delta_m^q; \quad (\bar{k}, m, s, q = \pm 1/2; \pm 3/2). \quad (32)$$

Согласно (13), оператор Лакса имеет следующий вид:

$$L_l(u) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \Theta_1^+ & \Theta_2^+ & \Theta_3^+ \\ \Theta_1 & \xi_2 & G_1 & G_2 \\ \Theta_2 & G_1^+ & \xi_3 & G_3 \\ \Theta_3 & G_2^+ & G_3^+ & \xi_4 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1(u) &= (1-n_1)(1-n_2)(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) + (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_2(u) &= -(1-n_1)(1-n_2)n_3 + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_3(u) &= -(1-n_1)n_2(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)], \\ \xi_4(u) &= -n_1(1-n_2)(1-n_3) + u[(1-n_1)(1-n_2)(1-2n_3) - (n_1-n_2)^2(1-n_3)] \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= (1-n_1)(1-n_2)c_3, \\ \Theta_2 &= (1-n_1)(1-n_3)c_2, \\ \Theta_3 &= (1-n_1)(1-n_2)c_1, \\ G_1 &= -(1-n_1)c_2^+c_3, \\ G_2 &= -(1-n_2)c_1^+c_3, \\ G_3 &= -(1-n_3)c_1^+c_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (23) видно, что

$$\Theta_l | -3/2 \rangle = 0; \quad (l=1;2;3), \quad (36)$$

т. е. локальным порождающим вектором (или псевдовакуумом) является низший вектор представления $| -3/2 \rangle$.

4. Спектр трансфер-матрицы и уравнения Бете

Обозначая матрицу монодромии, которая определена, согласно (3), как

$$T(u) = T_j^i(u) = \begin{pmatrix} A(u) & D_1^+(u) & D_2^+(u) & D_3^+(u) \\ D_1(u) & B(u) & D_1(u) & G_2(u) \\ D_2(u) & G_1^+(u) & E(u) & G_3(u) \\ D_3(u) & G_2^+(u) & G_3^+(u) & F(u) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

из (15) для (32) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} T_m^k(u)T_s^q(v) + (u-v)(-1)^{p(m)p(q)+p(k)p(q)+p(m)p(k)} T_s^k(u)T_m^q(v) = \\ = T_m^k(u)T_s^q(v) + (u-v)(-1)^{p(q)p(s)+p(m)p(q)+p(s)p(m)} T_m^q(v)T_s^k(u). \end{aligned} \quad (38)$$

из которого легко можно получить следующие коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии:

$$\begin{aligned} A(u)C_l^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_l^+(v)A(u) - \frac{1}{u-v} C_l^+(u)A(v); \quad (l=1,2,3), \\ B(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)B(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)B(v), \\ E(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)E(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)E(v), \\ F(u)C_3^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_3^+(v)F(u) - \frac{1}{u-v} C_3^+(u)F(v), \\ G_1(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)G_1(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)G_1(v), \\ G_3(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_3^+(v)G_3(u) - \frac{1}{u-v} C_3^+(u)G_1(v), \\ G_2^+(u)C_1^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)G_2^+(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)G_2^+(v), \\ G_3^+(u)C_2^+(v) &= \frac{u-v+1}{u-v} C_2^+(v)G_3^+(u) - \frac{1}{u-v} C_2^+(u)G_3^+(v) \end{aligned} \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} B(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)B(u) + \frac{1}{u-v} (C_1^+(v)G_1(u) - C_1^+(u)G_1(v)), \\ B(u)C_3^+(v) &= C_3^+(v)B(u) + \frac{1}{u-v} (C_1^+(v)G_2(u) - C_1^+(u)G_2(v)), \\ E(u)C_1^+(v) &= C_1^+(v)E(u) + \frac{1}{u-v} (C_2^+(v)G_1^+(u) - C_2^+(u)G_1^+(v)), \\ E(u)C_3^+(v) &= C_3^+(v)E(u) + \frac{1}{u-v} (C_2^+(v)G_3(u) - C_2^+(u)G_3(v)), \\ F(u)C_1^+(v) &= C_1^+(v)F(u) + \frac{1}{u-v} (C_3^+(v)G_2^+(u) - C_3^+(u)G_2^+(v)), \\ F(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)F(u) + \frac{1}{u-v} (C_3^+(v)G_3^+(u) - C_3^+(u)G_3^+(v)), \\ G_1^+(u)C_1^+(v) &= + \frac{u-v+1}{u-v} C_1^+(v)G_1^+(u) - \frac{1}{u-v} C_1^+(u)G_1^+(v), \\ G_1^+(u)C_2^+(v) &= C_2^+(v)G_1^+(u) + \frac{1}{u-v} (E(u)C_1^+(v) - E(v)C_1^+(u)), \\ C_l^+(u)C_l^+(v) &= \frac{1-(u-v)}{1+(u-v)} C_l^+(v)C_l^+(u). \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (10) и (35), для гамильтониана модели получаем

$$H = \sum_{i=1}^N H_{i+1}, \quad (41)$$

где

$$H_{ij} = \Delta_i \Delta_j \left(I_{ij} + \prod_{l=1}^3 P_{ijl} \right) \Delta_i \Delta_j \quad (42)$$

и

$$P_{ijl} = 1 - (c_{il}^+ - c_{ij}^+)(c_{il} - c_{jl}), \quad (43)$$

а

$$\Delta = \frac{1}{2} K. \quad (44)$$

Согласно (36), вектор

$$|0\rangle = \prod_{i=1}^N |-3/2\rangle_i \quad (45)$$

является порождающим вектором. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} A(u)|0\rangle &= (u+1)^N |0\rangle, \\ B(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle, \\ E(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle, \\ F(u)|0\rangle &= u^N |0\rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Из формул (3), (35) и (46) следует, что

$$T(u)|0\rangle = \begin{pmatrix} (u+1)^N & * & * & * \\ 0 & u^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^N \end{pmatrix} \quad (47)$$

где звездочками обозначены некоторые ненулевые векторы из V . Это означает, что остальные ненулевые собственные векторы матрицы монодромии могут быть только линейными комбинациями векторов

$$D_i^+ |0\rangle. \quad (48)$$

Поэтому будем искать собственные векторы матрицы монодромии в виде линейных комбинаций векторов (48):

$$|v\rangle = (C_1^+(v) + C_2^+(v) + C_3^+(v)) |0\rangle. \quad (49)$$

Можно показать, что

$$\tau(u)|v\rangle = e_N^{(1)}|v\rangle, \quad (50)$$

где

$$e_N^{(1)}|v\rangle = \frac{u-v+1}{u-v}[(u+v)^N - u^N], \quad (51)$$

при условии, что имеет место следующее уравнение Бете:

$$v^N = (v+1)^N. \quad (52)$$

Таким образом, одночастичные (из (47) видно, что операторы можно интерпретировать как операторы рождения) собственные векторы матрицы монодромии найдены. Аналогичным образом находим, что

$$\begin{aligned} \tau(u)|v_1, v_2\rangle &= e_N^{(2)}|v_1, v_2\rangle, \\ e_N^{(2)} &= \frac{u-v_1+1}{u-v_1} \frac{u-v_2+1}{u-v_2} \{(u+1)^N - u^N\} - 2u^N, \end{aligned} \quad (53)$$

при условии, что параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Бете:

$$\begin{cases} \frac{u-v_1+1}{u-v_1} \frac{v_2^N - (v_2+1)^N}{u-v_2} - \frac{u-v_1+1}{u-v_1+1} \frac{v_2^N + (v_2+1)^N}{(u-v_1)(v_1-v_2)} = 0, \\ \frac{u-v_2+1}{u-v_2} \frac{v_1^N - (v_1+1)^N}{u-v_1} - \frac{u-v_2+1}{u-v_2+1} \frac{v_1^N + (v_1+1)^N}{(u-v_2)(v_2-v_1)} = 0, \end{cases} \quad (54)$$

а

$$|v_1, v_2\rangle \equiv \sum_{l=1}^3 C_l^+(v_1) C_l^+(v_2). \quad (55)$$

Аналогичным образом можно найти и n -частичные собственные векторы матрицы монодромии, только расчеты более длинные и утомительные.

5. Заключение

В работе исследована решеточная спиновая модель Уймина-Лая-Сазерленда спина $3/2$. Построено представление алгебры $su(2)$ спина $3/2$ в линейном пространстве операторов рождения и уничтожения трех фермионов. Найдены выражение для гамильтониана и энергетический спектр, а также соответствующие уравнения Бете. Данный подход интересен тем, что в нем переход от спиновых операторов к фермионным сделан с помощью преобразований (18), (19) и (22), которые являются альтернативой преобразованиям Йордана-Вигнера.

Автор выражает благодарность А.Г.Седракяну и Д.Р.Караханяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Bethe. Z. Phys., 79, 205 (1931).
2. C.N.Yang. Phys. Rev., 168, 1920 (1968).
3. R.J.Baxter. Ann. Phys., 70, 193 (1972), 70, 323 (1972), 76, 1 (1972), 76, 25 (1972).
4. L.Faddeev, L.Takhtajan. Russian Math. Surveys, 34, 11 (1979). V.Korepin, N.M.Bogoliubov, A.Izergin. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge Univ. Press, 1993. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., Наука, 1986.
5. T.Hakobyan and A.Sedrakyan. Phys. Lett., 377B, 250 (1996).
6. A.Avakyan, T.Hakobyan and A.Sedrakyan. Nucl. Phys., 490B [FS], 633 (1997). J.Ambjorn, A.Avakyan, T.Hakobyan, A.Sedrakyan. Mod. Phys. Let., A 13, 495 (1998).
7. F.Gohmann, Sh.Murakami. J. Phys. A: Math. Gen., bf 31, 7729 (1998).
8. G.Uimin. JETP Lett., 12, 225 (1970).
9. J.K.Lai. J. Math. Phys., 15, 1675 (1974).
10. P.Dargis, Z.Maassarani. Nucl. Phys., 535B, 681 (1998).
11. F.D.M.Haldane. J. Phys., C14, 2585 (1981).
12. B.Sutherland. Phys. Rev., B12, 3795 (1975).
13. J.Ambjorn, D.Karakhanyan, M.Mirumyan, A.Sedrakyan. Nucl. Phys., B599, 547 (2001).

ՈՒՅՄԻՆ-ԼԱՅ-ՍԱԶԵՐԼԵՆԴԻ 3/2 ՍՊԻՆԻ ՍՈՂԵԼԸ ՖԵՐՄԻՈՆՆԵՐԻ
ԾՆՍԱՆ ԵՎ ՈՉՆՉԱՑՍԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՄԱՍԵ

Մ. Բ. ՄԻՐՈՒՄՅԱՆ

Աշխատանքը նվիրված է 3/2 սպինի Ույմին-Լայ-Սազերլենդի մոդելի ուսումնասիրմանը: Կառուցված է $su(2)$ հանրահաշվի ներկայացումը երեք ֆերմիոնների ծնման և ոչնչացման օպերատորների գծային տարածությունում: Գտնված են նաև համիլտոնիանը և էներգիական սպեկտրը, ինչպես նաև Բեթեի համապատասխան հավասարումները:

UIMIN-LAI-SUTHERLAND SPIN-3/2 CHAIN MODEL IN TERMS
OF FERMION CREATION AND ANNIHILATION OPERATORS

M.B. MIRUMYAN

The Uimin-Lai-Sutherland spin-3/2 chain model is investigated. The representation of the $su(2)$ algebra for the spin 3/2 is constructed in the linear space of the creation and annihilation operators of three fermions. Expressions are obtained for the Hamiltonian and energy spectrum as well as the corresponding Bethe equations are derived.

УДК 539.1

МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА-КАММИНГСА ДЛЯ АТОМА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Г.А. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 16 января 2002 г.)

Определены собственные состояния модели Джейнса-Каммингса (атом в квантованном электромагнитном поле) на базе гамильтониана, включающего кинетическую энергию центра масс атома. Рассмотрены случаи стоячей и бегущих встречных волн и сделано их количественное сопоставление.

Известно, что представления стоячей и двух встречных волн для классического поля эквивалентны. Однако в квантовой теории эти представления и их гамильтонианы различны [1]. Упомянутое несоответствие физических аспектов обсуждено в работе [2] на примере вычисления квантовых амплитуд когерентной дифракции атомных волн в поле квантового резонатора (резонансная дифракция Капицы-Дирака [3] в квантованном случае), в условиях, когда время взаимодействия намного меньше времени прохождения атомом расстояния, равного длине волны. Было показано, что различия между амплитудами рассеяния могут быть значительными, и представлена физическая причина этих различий. Ею является поведение закона сохранения импульса в системе "атом + поле".

В настоящей работе рассматриваются стационарные состояния вышеуказанных двух систем: атом+квантованное поле излучения стоячей волны (СВ) и/или бегущих встречных волн (БВВ). Использована известная теоретическая модель Джейнса-Каммингса [4]. Спонтанная эмиссия и другие некогерентные процессы в модели не учитываются.

Сначала рассмотрим случай БВВ. Гамильтониан в дипольном и вращающейся волны приближениях дается формулой [2]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)\hbar\omega_0 + \hbar\omega(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2) + \\ + \frac{1}{2^{3/2}}\hbar\Omega_0[\sigma_+(a_1 \exp(ikz) + a_2 \exp(-ikz)) + \sigma_-(a_1^+ \exp(ikz) + a_2^+ \exp(-ikz))], \quad (1)$$

где $\hat{p}$ – оператор импульса атома, σ_3 , σ_+ , и σ_- – обыкновенные опера-

торы Паули, a_i^* и a_i ($i=1,2$) – соответственно операторы рождения и уничтожения для двух бегущих волн, $k = \omega/c$, Ω_0 – частота Раби в вакууме, ω – частота поля, а ω_0 – частота внутренних переходов атома. Рассматриваемая система атом в поле БВВ имеет четыре степени свободы. Три оператора, которые вместе с гамильтонианом дают полную систему взаимно коммутативных операторов, следующие: $\hat{N} = (1/2)(1 + \sigma_3) + a_1^* a_1 + a_2^* a_2$, $\hat{P} = \hat{p} + \hbar k(a_1^* a_1 - a_2^* a_2)$, $\hat{T} = \sigma_3 \exp(i\pi \hat{p} / \hbar k)$. Следовательно, $\hat{H}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$ и $\hat{T}$ имеют совместные собственные значения и общую систему собственных функций. Ниже будут рассмотрены только эти состояния, которые являются основными.

Волновую функцию системы можно представить в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{r=0}^N a_r(t) |r\rangle_1 |N-r\rangle_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(P - (N-2r)\hbar k)z\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{r=0}^{N-1} b_r(t) |r\rangle_1 |N-1-r\rangle_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(P - (N-1-2r)\hbar k)z\right). \quad (2)$$

Коэффициенты в случае стационарных состояний имеют вид $a_r(t) = a_r \exp[-iEt/\hbar]$, $b_r(t) = b_r \exp[-iEt/\hbar]$, где E – полная энергия системы. После стандартных преобразований из уравнения Шредингера получается следующая система тридиагональных рекуррентных уравнений:

$$[E - \hbar\omega - (P - 2r\hbar k)^2 / 2M] a_r = (\hbar\Omega_0 / 2^{3/2}) [\sqrt{N/2 + r} b_{r-1} + \sqrt{N/2 - r} b_r], \quad (3a)$$

$$[E + \hbar\varepsilon - \hbar\omega - (P - (2r+1)\hbar k)^2 / 2M] b_r = (\hbar\Omega_0 / 2^{3/2}) \times [\sqrt{N/2 + r + 1} a_{r+1} + \sqrt{N/2 - r} a_r], \quad (3b)$$

где $r = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2$, а $\varepsilon = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты поля от атомного перехода.

До рассмотрения решений этих уравнений обратимся к случаю СВ. Гамильтониан в этом случае имеет вид [2]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)\hbar\omega_0 + \hbar\omega a^+ a + \frac{1}{4}\hbar\Omega_0(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)[\exp(ikz) + \exp(-ikz)]. \quad (4)$$

Действуя, как и в случае с (2), (3a) и (3b), приходим к уравнениям

$$[E - \hbar\omega - (P - 2r\hbar k)^2 / 2M] a_r = (\hbar\Omega_0 / 4)\sqrt{N} [b_{r-1} + b_r], \quad (5a)$$

$$[E + \hbar\varepsilon - \hbar\omega - (P - (2r+1)\hbar k)^2 / 2M] b_r = (\hbar\Omega_0 / 4)\sqrt{N} [a_{r+1} + a_r]. \quad (5b)$$

Кроме очевидных сходств, системы (3a), (3b) и (5a), (5b) имеют и важные различия. В то время как первое множество уравнений конечно,

второе бесконечно. Следующее различие состоит в коэффициентах правых частей: они зависят от r для первого множества, но постоянны для второго. И последнее различие, которое уже концептуальное и заслуживает особого внимания: полный импульс P в случае БВВ, в отличие от своего аналога P в случае СВ, не может трактоваться как квазиимпульс. Это утверждение следует из того факта, что замена $P \rightarrow P + s2\hbar k$, с переобозначением $r \rightarrow r - s$ в (3а), (3б), где s – целое число, сохраняет коэффициенты левых частей неизменными, в то время как коэффициенты правых частей изменяются. Это приводит к новым значениям энергий и вероятностных амплитуд.

Учитывая, что физической причиной этого различия является закон сохранения импульса, мы приходим к выводу, что принятие концепции квазиимпульса в пространственно-периодических системах обусловлено неприменимостью закона сохранения импульса. В закрытых системах, где сохраняется полный импульс, нет концепции квазиимпульса.

На рис. 1а и 1б изображен энергетический спектр как функция от импульса соответственно для случаев БВВ и СВ. Четко видны упомянутые различия для энергетических спектров. Во-первых, количество энергетических ветвей конечно для БВВ ($2N+1=13$ в выбранном случае), в то время как оно бесконечно для СВ (дано только несколько нижних ветвей). Во-вторых, спектр БВВ не повторяется по зонам с шириной $2\hbar k$, что как раз и означает неприменимость концепции квазиимпульса в этом случае.

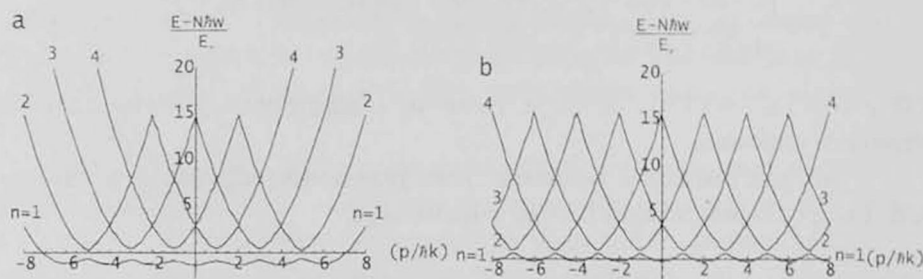


Рис.1.

Распределения вероятностных амплитуд даны на рис.2а и 2б для случая $N=6$. Можно видеть очевидные отличия в случаях с БВВ и СВ. Графики также показывают разницу между импульсными распределениями для связанных (нижние уровни) и свободных (верхние уровни) состояний.

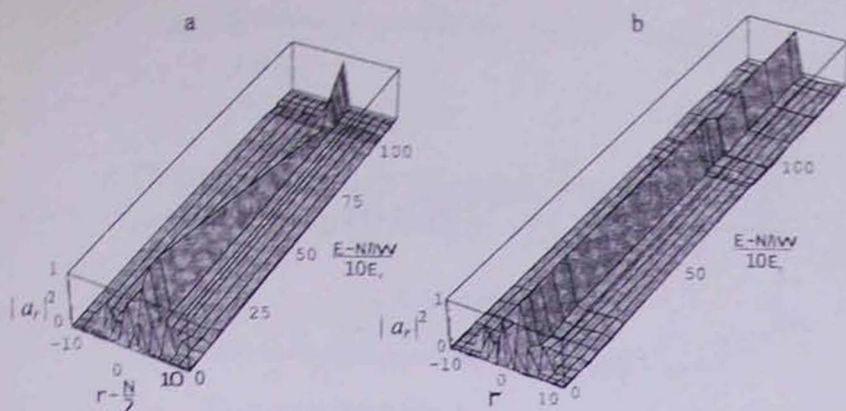


Рис.2.

Доплерон-резонансное рассеяние

Доплеронный резонанс имеет место для атома, который движется в поле СВ [5], и применяется в атомной оптике и лазерном охлаждении. В отличие от резонанса Брэгга, в случае доплерон-резонанса атом одновременно с рассеянием меняет населенность энергетического уровня. Здесь будет исследован предел малых интенсивностей, и внимание будет уделено роли многофотонной энергии отдачи.

Условием доплерон-резонанса (в пределе малых интенсивностей) является уравнение [6]

$$\omega - \omega_0 = (2n_1 - 2r - 1)kp / M + (2n_1 - 2r - 1)^2 \hbar k^2 / 2M). \quad (6)$$

С помощью этого условия исследуем поведение импульса конечного состояния p_f в зависимости от начального импульса p . Для этого рассмотрим условие (6) как зависимость r от P , а потом поместим его в выражение конечного импульса возбужденного атома $p_f = P + (N - 2r - 1) = p + (2n_1 - 1 - 2r)$. Простые подстановки дают

$$p_f = \pm \sqrt{p^2 + 2M\hbar(\omega - \omega_0)} \quad (7)$$

при условии, что начальный импульс удовлетворяет условию доплерон-резонанса (6). Для каждого фиксированного значения частоты ω , удовлетворяющего условию (6), величина начального импульса P принимает дискретные значения, соответствующие целым значениям $(2n_1 - 1 - 2r)$.

Графики уравнения (7) даны на рис.3. Для сравнения даны также графики без учета члена энергии отдачи (последний член в (6)).

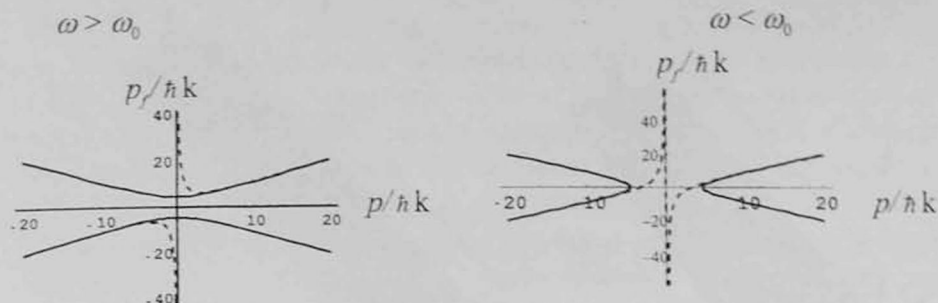


Рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg. Photons and Atoms. Introduction in Quantum Electrodynamics. Wiley, New York, 1989.
2. B.W.Shore, P.Meystre, S.Stenholm. J. Opt. Soc. Am., B 8, 903 (1991).
3. А.Ж.Мурадян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 10, 361 (1975); R.J.Cook and A.F.Bernhardt. Phys. Rev. A, 18, 2533 (1978); P.Meystre, E.Schumacher, and S.Stenholm. Opt. Comm., 73, 443 (1989); J.H.Muller, D.H.Doery, E.Vredenburg, K.Holmerson, S.L. Rolston, W.D.Phillips. Phys. Rev. Lett., 83, 284 (1999).
4. E.T.Jaynes and F.W.Cummings. Proc. IEEE, 51, 89 (1963).
5. A.F.Bernhardt and B.W.Shore. Phys. Rev. A, 23, 1290 (1981).
6. P.R.Berman and J.Ziegler. Phys. Rev. A, 15, 2042 (1977).

ՋԵՅՆՍ-ԲԱՍԽՆԳՍԻ ՄՈԴԵԼԸ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ
ԱՏՈՍԻ ՀԱՍՐՆԹԱՑ ԸԱՐԺԱՆ ԴԵՊԸՈՒՄ

Գ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Ատոմի քվանտային համընթաց շարժման հաշվառմամբ, քննարկված են Ջեյնս-Բամմինգսի մոդելի սեփական վիճակները: Հաշվված են էներգիական սպեկտրը և ալիքային ֆունկցիաները կանգուն ալիքի և հանդիպակաց ալիքների քվանտացված դաշտերում:

JAYNES-CUMMINGS MODEL FOR AN ATOM MOVING IN THE FIELD OF COUNTERPROPAGATING WAVES

G.A. MURADYAN

The eigenstate problem of the Jaynes-Cummings model on the basis of complete Hamiltonian, including the center-of-mass kinetic energy operator, is considered. The energy spectrum and wave functions in the cases of standing wave and counterpropagating waves are calculated.

УДК 621.315

К ПРОБЛЕМЕ НАРУШЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КОНА В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

А.А. САРКИСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 декабря 2001 г.)

На основе анализа доказательства обобщенной теоремы Кона обсуждаются возможные причины ее нарушения. Приведены примеры конкретных систем, в которых имеет место это нарушение.

Теоретическое обобщение теоремы Кона на случай низкоразмерных систем позволило сформулировать ее следующим образом: резонансные частоты спектра магнитооптического поглощения квантовой ямы (КЯ) с параболическим ограничивающим потенциалом не зависят от электрон-электронного взаимодействия и определяются частотами одночастичных переходов [1].

В данной работе на основе анализа доказательства этой теоремы обсуждаются возможные причины ее нарушения.

Кратко остановимся на доказательстве теоремы Кона. Рассмотрим электронный газ в однородном магнитном поле. Будем предполагать, что взаимодействие электронов парное и имеет вид

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i < j=1}^N U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (1)$$

В этом случае для гамильтониана системы можем записать

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (2)$$

где $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал магнитного поля.

Доказательство теоремы Кона базируется на возможности точной диагонализации гамильтониана N невзаимодействующих электронов в магнитном поле [2], т.е. первого члена в (2). В этом случае возможно построение лестничных операторов, соединяющих друг с другом векторы состояний системы в гильбертовом пространстве. Если на рассматриваемую систему падает длинноволновое электромагнитное возмущение

$$\hat{H} = -e \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i e^{-i\mathbf{a}\mathbf{r}_i} \mathbf{E}_0 (\cos \theta, \sin \theta), \quad (3)$$

то это возмущение можно выразить через линейную комбинацию вышеуказанных лестничных операторов [2]. При этом важным свойством этих операторов является их коммутируемость с оператором взаимодействия $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, при условии, что оно описывается по закону (1), т.е. парное и зависит от взаимного расположения электронов.

Если теперь рассматриваемая система помещена в КЯ, то гамильтониан запишется как

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) + V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (4)$$

где V_{conf} — член, описывающий взаимодействие электронов со стенками КЯ. В этом случае возникает необходимость точной диагонализации гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (5)$$

Как показано в работах [1,3,4], это возможно, если $V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ в общем случае имеет вид

$$V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N (\gamma_1 x_i^2 + \gamma_2 y_i^2 + \gamma_3 z_i^2), \quad (6)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — параметры, определяемые физическими свойствами и размерами КЯ.

Действительно, представив $V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ в виде (6), мы придем к задаче Кона, где теперь уже вместо циклотронной частоты ω_c будет стоять некоторая приведенная частота Ω [1,3,4]. Таким образом, и в этом случае возможно построить лестничные операторы, соединяющие друг с другом векторы состояний системы в гильбертовом пространстве и обладающие всеми вышеперечисленными свойствами. Обсудим теперь некоторые причины нарушения этой теоремы.

1. Влияние границы перехода полупроводник-диэлектрик

Ясно, что аппроксимация ограничивающего потенциала КЯ параболической функцией верна для нижних уровней системы. Поэтому естественно предполагать, что для верхних энергетических уровней ход ограничивающего потенциала будет отличным от параболического. Следовательно, возникает необходимость такой модернизации ограничивающего потенциала, которая соответствовала бы более реальной картине перехода полупроводник-диэлектрик. В ряде работ были рассмотрены различные модификации параболического потенциала. В частности, в

[5] были рассмотрены электронные состояния в КЯ, ограничивающий потенциал которой имеет вид:

$$V_{\text{conf}}(r) = \begin{cases} \omega^2, & r < r_0 \\ V_0 = \omega r_0^2, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (7)$$

где r_0 — радиус КЯ.

Оператор Гамильтона для электронного газа в такой яме под действием внешнего магнитного поля запишется как

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) + \sum_{i < j=1}^N U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (8)$$

Очевидно, что теперь уже невозможно точно диагонализировать часть гамильтониана, не содержащую электрон-электронного взаимодействия, т.е. не будет иметь место основополагающее коммутационное соотношение между лестничными операторами и оператором электрон-электронного взаимодействия из-за элементарной невозможности построения таких операторов. Последнее обусловлено неполиномиальным характером решения одночастичного уравнения Шредингера для электронов в КЯ с ограничивающим потенциалом (7).

2. Учет непараболичности закона дисперсии электронов

В работе [6] отмечалось, что с ростом магнитного поля возникает нарушение обобщенной теоремы Кона. Объяснялось это тем фактом, что с ростом H энергетические уровни системы поднимались и поэтому существенную роль начинали играть ангармонические члены ограничивающего потенциала ямы. Однако, надо отметить, что к ангармонизму в уравнении Шредингера можно придти и в рамках параболического приближения ограничивающего потенциала, но теперь уже учитывая непараболичность закона дисперсии электронов. Простейшие случаи одночастичных состояний в таких КЯ, как при наличии H , так и при его отсутствии, обсуждались в [7,8]. В этих работах закон дисперсии электронов рассматривался в рамках двухзонной модели Кейна и имел вид

$$E = \sqrt{p^2 s^2 + m^2 s^4}, \quad (9)$$

где s — параметр непараболичности, описывающий взаимодействие зон. Следовательно, уравнение Шредингера для электронного газа в данном случае запишется как

$$\sum_{i=1}^N \left(\left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 s^2 + m^2 s^4 \right) \Psi = \left(E - \sum_{i < j=1}^N U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_{i=1}^N (\gamma_1 x_i^2 + \gamma_2 y_i^2 + \gamma_3 z_i^2) \right)^2 \Psi. \quad (10)$$

Ясно, что и в этом случае, несмотря на параболичность вида ограничи-

вающего потенциала, одночастичная часть гамильтониана не будет точно диагонализированной и поэтому возникнет нарушение теоремы Кона. Таким образом, возможна ситуация, когда под действием магнитного поля состояния в яме не поднимаются настолько высоко, чтобы проявлялась непараболичность ограничивающего потенциала, однако в то же время из-за того же влияния существенную роль начинает играть непараболичность закона дисперсии электронов.

Данная работа выполнена в рамках международной программы INTAS 99-00928 и гранта ANSEF (Armenian National Science and Education Fund) PS24-01.

ЛИТЕРАТУРА

1. F.M.Peeters. Phys. Rev. B, **42**, 1486 (1990).
2. W.Kohn. Phys. Rev., **123**, 1242 (1960).
3. P.Maksym, T.Chakraborty. Phys. Rev. Lett., **65**, 108 (1990).
4. Q.Li et al. Phys. Rev. B, **43**, 5151 (1991).
5. E.M.Ghazaryan, L.S.Petrosyan, and H.A.Sarkisyan Proc. of 23-th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics. Eds. A.N.Sissakian, G.S.Pogosyan, L.G.Mardoyan, Dubna, **2**, 502, 2002.
6. D.Pfannkuche and R.Gerhards. Phys. Rev. B, **44**, 13132 (1991).
7. E.M.Ghazaryan, L.S.Petrosyan, and H.A.Sarkisyan. Physica E, **8**, 19 (2000).
8. E.M.Ghazaryan, L.S.Petrosyan, and H.A.Sarkisyan. Physica E, **11**, 362 (2001).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԿԵՏԵՐՈՒՄ ԿՈՆԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԽԱԽՏԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Կոնի ընդհանրացված թեորեմի ապացույցի վերլուծության հիման վրա քննարկվում են դրա խախտման հնարավոր պատճառները: Բերվում են որոշակի համակարգերի օրինակներ, որոնցում իրականանում են այդ խախտումները:

ON THE PROBLEM OF VIOLATION OF KOHN'S THEOREM IN QUANTUM DOTS

H.A. SARKISYAN

On the basis of consideration of generalized Kohn's theorem prove the possible causes of its violation are discussed. Specific systems, in which this violation takes place, are considered.

УДК 621.315

КВАНТОВО-РАЗМЕРНЫЙ ЭФФЕКТ ШТАРКА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

В.А. АРУТЮНЯН, Г.Г. СУЛТАНЯН

Гюмрийский образовательный комплекс

Государственного инженерного университета Армении

(Поступила в редакцию 18 марта 2002 г.)

Рассмотрены состояния носителей заряда в квантованном сферическом слое. Предложена физически адекватная модель, позволяющая в аналитическом виде определить энергетический спектр и волновые функции одноэлектронных состояний. В рамках теории возмущений рассчитана величина шарковского сдвига уровней под воздействием однородного внешнего поля. Получена явная зависимость величины энергетического сдвига от напряженности внешнего поля и геометрических размеров образца.

1. Введение

В настоящее время интенсивно исследуются оптические и электрооптические свойства различных квазинульмерных структур со сферической симметрией – как квантовых точек (см., напр., обзор [1]), так и многослойных сферических наногетероструктур [2-6]. Эти исследования стимулированы тем, что подобные гетерофазные системы являются очень перспективными материалами для создания новейших элементов современной оптоэлектроники. Ясно, что при изучении подобных структур необходимым звеном является исследование физических свойств “отдельно взятого” нанокристаллического сферического слоя. Как с чисто физической, так и с прикладной точек зрения, подобный нанокристалл интересен прежде всего тем, что “синтезирует” в себе как свойства квантованных пленок (КП), так и сферических квантовых точек (КТ), и в силу “комбинирования” уникальных свойств последних может иметь применение как в “чистом” виде, так и в качестве составной компоненты при создании многослойных сферических наногетероструктур. В этой связи определенный интерес представляет, в частности, исследование влияния внешнего электрического поля на состояния носителей заряда в таком слое. Шарковскому расщеплению уровней и электрооптическим явлениям в КП посвящено множество как экспериментальных, так и теоретических работ (см., напр., обзор [7]). В ряде работ

рассмотрен также квантово-размерный эффект Штарка в квантовых точках сферической формы [8-10]. Так, в [8,9] экспериментально выявлена зависимость величины штарковского сдвига уровней от геометрических размеров образца, обусловленная квантованием движения электронов и дырок, а в [10] развита теория Штарк-эффекта в КТ при условиях, когда, помимо отдельного квантования движения каждого из носителей, возможно также и связывание электронно-дырочной пары в объемный экситон, и предложен новый электрооптический метод для определения "критических" размеров сферы, выше которых становится возможным образование в ней трехмерного экситона. Насколько нам известно, работ, в которых рассматривалось бы влияние однородного электрического поля на перестройку энергетического спектра носителей заряда в сферическом слое, к настоящему времени нет.

Цель настоящей работы – теоретическое рассмотрение штарковского сдвига энергетических уровней носителей заряда в полупроводниковом сферическом слое. Из самых общих соображений ясно, что физическая специфичность слоя наиболее ярко будет проявляться в том случае, если:

а) слой достаточно "тонкий", т.е. имеет место режим "сильного" квантования. Иначе говоря, толщина пленки L должна быть много меньше боровского радиуса трехмерного экситона a_0 :

$$R_2 - R_1 = L \ll a_0, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы слоя.

б) внутренний радиус слоя R_1 не является слишком "большим", т.е. радиус кривизны слоя достаточно мал, чтобы слой можно было рассматривать как "чисто" сферический. Иначе говоря, R_1 должен меняться в интервале

$$L \leq R_1 < a_0. \quad (2)$$

Очевидно, что в противоположном случае, когда эти условия не имеют места, задачу в итоге можно свести либо к случаю квантованной сферы, либо к случаю "обычной" пленки.

2. Электронные состояния в слое

В силу условия (1) кулоновским взаимодействием между носителями можно пренебречь и по аналогии с "обычной" пленкой [1-7] в радиальном направлении аппроксимировать слой бесконечно глубокой потенциальной ямой:

$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \infty & \text{при } r \leq R_1, r \geq R_2. \end{cases} \quad (3)$$

С другой стороны, в силу того же условия (1), т.е. в силу “тонкости” слоя, орбитальное движение носителей можно описать в рамках модели жесткого ротатора. Действительно, в пределах слоя “центробежная” энергия $U_\ell(r) = \hbar^2 \ell(\ell+1) / 2\mu r^2$ “особенностей” по переменной r не имеет и меняется сравнительно мало, и посему без потери общности ее можно заменить энергией ротационного движения с эффективным радиусом R_0 , определяемым следующим условием:

$$\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu R_0^2} = \frac{1}{2} [U_\ell(R_1) + U_\ell(R_2)] . \quad (4)$$

Сделанное приближение не затрагивает физической сути задачи, однако существенно упрощает все последующие вычисления и позволяет получить конечные результаты в аналитическом виде. Ограничимся рамками двухзонной модели. Для случая простых невырожденных зон (и в приближении изотропной эффективной массы) огибающие волновые функции электрона в сферических координатах (r, θ, φ) ищем в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(r) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) , \quad (5)$$

где $\Phi(r)$ – радиальная часть полной огибающей волновой функции электрона $\Psi(\mathbf{r})$, а $Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$ – нормированные сферические функции. Вид последних хорошо известен (см., напр., [11]), и в явном виде их выписывать мы не будем. Сделав “стандартную” подстановку

$$\Phi(r) = \frac{\chi(r)}{r} , \quad (6)$$

в приближении изотропной эффективной массы (μ) приходим к следующему “радиальному” уравнению Шредингера:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \chi'' + E\chi - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \chi = 0 , \quad (7)$$

где E – полная энергия частицы в слое. Проведя теперь в (7) замену (4) и воспользовавшись граничными условиями

$$\Phi(R_1) = \Phi(R_2) = 0 , \quad (8)$$

для энергетического спектра и “радиальной” части огибающей волновой функции электрона получаем:

$$E_{n, \ell} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2\mu L^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu R_0^2} ; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

$$\Phi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\sin \frac{\pi n}{L} (r - R_1)}{r} . \quad (10)$$

Как видим, в рамках предложенной модели энергия частицы представляет собой простую сумму энергий радиального и ротационного движений, а радиальная волновая функция – стоячую волну, начальная фаза которой определяется радиусом слоя R_1 .

3. Штарковский сдвиг уровней

Если внешнее поле напряженности $\mathbf{F}$ направить вдоль оси z : $\mathbf{F} = F(0, 0, F)$, то для потенциала $\phi(\mathbf{r})$ будем иметь [12]:

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(Fr + \frac{A}{r^2} \right) \cos \theta & \text{при } r \geq R_2, \\ \left(Br + \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta & \text{при } R_1 \leq r \leq R_2, \\ Dr \cos \theta & \text{при } r \leq R_1. \end{cases} \quad (11)$$

В общем случае, когда диэлектрические проницаемости “ядра” (ϵ_1), собственно слоя (ϵ_2) и среды (ϵ_3) различны, из граничных условий для потенциала получаем следующие значения постоянных, определяющих значение потенциала внутри слоя:

$$B = \frac{C}{R_1^3} \frac{\epsilon_3 + 2\epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_3}, \quad C = \frac{3F\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_3)R_1^3 R_2^3}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)(\epsilon_3 + 2\epsilon_2)R_2^3 + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_3)R_1^3}. \quad (12)$$

Внешнее поле можно рассматривать как возмущение в том случае, если будет выполняться условие

$$\frac{qFL}{\epsilon} \ll E_{1,0}, \quad (13)$$

где q – заряд частицы, $\epsilon = (2\epsilon_{2,3} + \epsilon_{2,1})/3$, $\epsilon_{2,3} = \epsilon_2/\epsilon_3$, $\epsilon_{2,1} = \epsilon_2/\epsilon_1$, а $E_{1,0}$ – энергия основного состояния частицы в слое в отсутствие поля, т.е. если энергия, сообщаемая частице полем будет много меньше ее энергии квантованного движения в слое.

Нетрудно видеть, что диагональные элементы оператора возмущения

$$\hat{V} = q \left(Br + \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta \quad (14)$$

обращаются в ноль, т.е. линейный Штарк-эффект в системе отсутствует.

По орбитальному (ℓ) и азимутальному (m) квантовым числам получаем следующие правила отбора: отличны от нуля только матричные элементы $V_{\ell, \ell \pm 1}$ для переходов с сохранением $|m|$. Для поправки же второго порядка к энергетическому уровню в общем виде теперь имеем:

$$\Delta E_{n,\ell}^{(2)} = |V_{\ell,\ell-1}|^2 \sum_{n \neq n'} \frac{|V_{n,n'}|^2}{E_{n,\ell} - E_{n',\ell-1}} + |V_{\ell,\ell+1}|^2 \sum_{n \neq n'} \frac{|V_{n,n'}|^2}{E_{n,\ell} - E_{n',\ell+1}}, \quad (15)$$

где $V_{n,n'}$ – матричный элемент оператора $\hat{V}$, построенный на радиальных волновых функциях из (10):

$$V_{n,n'} = q \frac{L}{\pi^2} \frac{8nn'}{(n^2 - n'^2)^2} \left[-B + C \frac{R_1^3 + R_2^3}{R_1^3 R_2^3} \right], \quad (16)$$

а для $V_{\ell,\ell \pm 1}$, соответственно, имеем:

$$V_{\ell,\ell \pm 1} = \begin{cases} i \times \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}} & \text{при } \ell \rightarrow \ell-1 \quad (\ell=1,2,\dots), \\ -i \times \sqrt{\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(2\ell+3)(2\ell+1)}} & \text{при } \ell \rightarrow \ell+1 \quad (\ell=0,1,2,\dots). \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя теперь (16) в (15) и проведя суммирование по n' , для $\Delta E_{n,\ell}^{(2)}$ получаем:

$$\Delta E_{n,\ell}^{(2)} = \frac{q^2}{48n^2 E_{n,0}} \left[BL - CL \frac{R_1^3 + R_2^3}{R_1^3 R_2^3} \right]^2 (f_{n,\ell} + g_{n,\ell}), \quad (18)$$

где $f_{n,\ell}, g_{n,\ell}$ имеют следующий вид:

$$f_{n,\ell} = \left(1 - \frac{15}{\pi^2 n^2} \right) \left(|V_{\ell,\ell-1}|^2 + |V_{\ell,\ell+1}|^2 \right), \quad (19)$$

$$g_{n,\ell} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{21}{\pi^4 n^4} \right) \left(\frac{L}{R_0} \right)^2 \left[(\ell+1) |V_{\ell,\ell+1}|^2 - \ell |V_{\ell,\ell-1}|^2 \right]. \quad (20)$$

В частности, для штарковского сдвига основного состояния ($n=1; \ell=0$) будем иметь:

$$\Delta E_{1,0}^{(2)} = \frac{q^2}{48E_{1,0}} \left[BL - CL \frac{R_1^3 + R_2^3}{R_1^3 R_2^3} \right]^2 [f_{1,0} + g_{1,0}], \quad (21)$$

где $f_{1,0}, g_{1,0}$ теперь имеют следующий вид:

$$f_{1,0} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{15}{\pi^2} \right), \quad (22)$$

$$g_{1,0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{21}{\pi^4} \right) \left(\frac{L}{R_0} \right)^2. \quad (23)$$

4. Обсуждение результатов

В рамках предложенной модели относительно результатов, полу-

ченных в работе, можем заключить следующее:

1. С ростом как "радиального", так и орбитального квантовых чисел, сдвиг уровней очень быстро уменьшается, и реально наибольший физический интерес представляет перестройка основного энергетического уровня. Из (21-23) видно, что при $n=1; \ell=0$ наряду с сугубо "пленочным" штарковским фактором $f_{1,0} = (1 - 15/\pi^2)/3$ в нашем случае вклад в штарковское смещение вносит также и фактор $g_{1,0}$, и по сравнению с КП [7] штарковский сдвиг основного уровня уменьшается именно на величину

$$g_{1,0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{21}{\pi^4} \right) \left(\frac{L}{R_0} \right)^2.$$

Подобное уменьшение сдвига обусловлено тем, что энергия, получаемая частицей от внешнего поля, "расходуется не только на возмущение "радиального" движения, но также и на сообщение частице определенной "центробежной" энергии. Так что в присутствии внешнего поля состояния с нулевым значением орбитального числа во всяком случае будут отсутствовать.

2. Внешнее поле частично снимает вырождение по азимутальному числу, оставляя каждый энергетический уровень двукратно вырожденным по m (исключая уровень с $\ell=0$).

3. Величина сдвига в большой степени зависит от геометрических размеров образца. Эта зависимость обусловлена, с одной стороны, пространственной ограниченностью движения носителей заряда в пределах слоя, а с другой стороны, степенью "сферичности" слоя по отношению к плоско-параллельной пленке, определяемой в нашем случае отношением $\lambda = L/R_0$. В предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ выражения (21-23) переходят в выражения, аналогичные результатам для Штарк-эффекта в "обычной" квантованной пленке:

$$\Delta E_{1,0}^{(2)} \cong \frac{1}{3} \left(\frac{qFL}{\varepsilon} \right)^2 \times \frac{1}{48E_{1,0}} \left(1 - \frac{15}{\pi^2} \right).$$

4. Как и в случаях КП и КТ [7,10], размерный Штарк-эффект в слое также характеризуется квадратичной зависимостью от напряженности внешнего поля.

5. Существенная зависимость величины штарковского смещения не только от напряженности внешнего поля, но также от толщины и радиуса слоя, дает возможность, путем варьирования величиной поля и геометрическими размерами образца, добиться желаемого и регулируемого изменения параметров (например, эффективного увеличения-уменьшения ширины запрещенной зоны) той или иной компоненты в композиционных сферических гетероструктурах.

В заключение авторы выражают благодарность С.Л.Арутюняну и А.А.Дживаняну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В.Гапоненко. ФТП, 30, 577 (1996).
2. J.W.Haus, H.S.Zhou, I.Honma, H.Komiyama. Phys. Rev. B, 47, 1359 (1993).
3. D.Schooss, A.Mews, A.Eychmuller, H.Weller. Phys. Rev. B, 49, 17072 (1994).
4. A.Mews, A.V.Kadavanich, U.Banin, A.P.Alivasatos. Phys. Rev. B, 53, 13242 (1996).
5. Н.В.Ткач, ФТТ, 39, 373 (1997).
6. Н.В.Ткач, В.А.Головацкий, О.Н.Войцеховская. ФТП, 34, 602 (2000).
7. S.Schmitt-Rink, D.S.Chemia, D.A.V.Miller. Adv. in Phys., 38, 89 (1989).
8. А.И.Екимов, П.А.Скворцов, Т.В.Шубина. ЖТФ, 59 (3), 202 (1989).
9. S.Nomura, T.Kobayashi. Sol. St. Commun., 74, 1153 (1990).
10. С.И.Покутний. ФТП, 34, 1120 (2000).
11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., Наука, 1974.
12. В.Смайт. Электростатика и электродинамика. М., ИЛ, 1954.

ՉԱՓԱՅԻՆ ԲՎԱՆՏԱՅՎԱԾ ՇՏԱՐԿ ԷՖԵԿՏԸ
ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԳՉԱՅԻՆ ԳՆԴԱՅԻՆ ՇԵՐՏՈՒՄ

Վ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Հ.Գ. ՍՈՒԼԹԱՆՅԱՆ

Դիտարկված են լիցակիրների վիճակները քվանտացված գնդային շերտում: Անալիտիկ տեսքով ստացված են արտահայտություններ էներգիական մակարդակների և էլեկտրոնային ալիքային ֆունկցիաների համար: Հաշվարկված է շտարկյան շեղումը և ստացված է նրա կախումը արտաքին դաշտի լարվածությունից և նմուշի երկրաչափական չափսերից:

QUANTUM-SIZE STARK-EFFECT IN A SEMICONDUCTOR SPHERICAL LAYER

V.A. HAROUTYUNIAN, H.G. SULTANIAN

States of charge carriers in a quantum spherical layer are considered. The energy spectrum and wave functions for one-electron states are derived in analytical form. Expressions for Stark shift of energy levels and their dependence on the intensity of the external field and geometrical parametres of the layer are obtained.

УДК 538.2

ОПТИЧЕСКАЯ АСИММЕТРИЯ СПИРАЛЬНЫХ СРЕД С ГРАДИЕНТОМ ПАРАМЕТРОВ

О.С. ЕРИЦЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 12 сентября 2001 г.)

Рассмотрено распространение электромагнитной волны в изотропных гиротропных средах и в средах со спиральной структурой в присутствии градиента оптических параметров. Показано, что спиральные среды обладают эффектами асимметрии, аналогичными эффектам необратимости волн.

1. Введение

В настоящей работе рассмотрено два вопроса, относящихся к оптике гиротропных сред в присутствии зависимости параметров от координат. Первый вопрос относится к эквивалентности двух систем материальных уравнений [1,2] в изотропных неоднородных естественно-гиротропных средах.

Установление материальных уравнений гиротропных сред постоянно было связано с такими фундаментальными вопросами электродинамики, как вопросы о форме вектора плотности потока энергии, о выражении плотности электромагнитной энергии и о граничных условиях. Эти вопросы возникают в связи с отнюдь не простой задачей обеспечить баланс энергии в рамках выдвинутых вариантов материальных уравнений [1,2]. Так, гиротропия может быть учтена введением пространственных производных полей в выражениях обеих индукций (электрической и магнитной (первый вариант)) или же введением таких производных только в уравнении связи между электрическим полем и электрической индукцией (второй вариант) [1,2]; при этом в случае второго варианта следует изменить обычные граничные условия, чтобы обеспечить сохранение энергии.

В случае однородных изотропных гиротропных сред установление соответствия между указанными вариантами материальных уравнений осуществляется крайне просто, а именно, связью $\gamma = 2\varepsilon\alpha$, где α и γ – параметры, описывающие гиротропию при первом и втором вариантах, соответственно, ε – диэлектрическая проницаемость. Такой связью обес-

печивается совпадение волновых уравнений и одинаковость поворотов плоскости поляризации в безграничной среде.

В пункте 2 мы рассмотрим изотропные гиротропные среды в присутствии градиента параметров и убедимся, что волновые уравнения, соответствующие двум вариантам материальных уравнений, не совпадают.

В следующем, третьем пункте рассматривается второй вопрос, исследуемый в данной статье: влияние градиента параметров неоднородной анизотропной среды со спиральной структурой на оптические свойства такой среды. Показано, что в такой ситуации имеет место асимметрия пропускания через слой, аналогичная такому же эффекту, обусловленному установленной ранее автором [3-5] необратимостью волн в однородных гиротропных средах и средах со спиральной структурой в присутствии магнитооптической активности.

В последнем пункте проводится краткое обсуждение результатов.

2. Изотропная естественно-гиротропная среда с градиентом параметров

Рассмотрим такие среды в следующих двух вариантах материальных уравнений.

а) Пространственная дисперсия учитывается в уравнении связи между электрическим полем и электрической индукцией [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{2} [\nabla \gamma, \mathbf{E}], \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

где параметром γ описывается пространственная дисперсия.

Волновое уравнение имеет вид

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon \mathbf{E} + 3 \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{2} [\nabla \gamma, \mathbf{E}]) = 0 \quad (2)$$

независимо от того, зависит ε от координат или нет.

б) Пространственная дисперсия учитывается в обоих уравнениях связи между индукциями и полями [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \hat{\varepsilon} (1 + \hat{\alpha} \nabla^x) \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \hat{\mu} (1 + \tilde{\alpha} \nabla^x) \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3)$$

где тильдой обозначено транспонирование, $\nabla^x_{ij} = e_{ijl} \partial / \partial x_l$, e_{ijl} – символы Леви-Чивита. Пространственная дисперсия описывается тензором $\hat{\alpha}$, который во втором из уравнений (3) фигурирует транспонированным.

Подробную литературу, относящуюся к построению систем (1) и (3), можно найти в монографиях [1,2].

Волновое уравнение при использовании уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{grad div E} - \nabla^2 \mathbf{E} - 2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \alpha \text{rot E} - \frac{\omega^2}{c^2} [\alpha \nabla \varepsilon, \mathbf{E}] - 2 \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon \alpha \nabla \alpha, \text{rot E}] - \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon [\nabla \alpha, \mathbf{E}] - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и существенно отличается от (2), основанного на материальных уравнениях (1). Мы, для простоты, считали ε, α, μ скалярами, положили $\mu = 1$ и ограничились членами первого порядка по α .

Различие между уравнениями (2) и (4) исчезает только в отсутствие градиентов; при этом имеет место известное соотношение [1,2]

$$\gamma = 2\varepsilon\alpha, \quad (5)$$

обеспечивающее одинаковость поворотов плоскости поляризации на заданной длине пути луча при использовании уравнений связи (1) и (3).

3. Среда со спиральной структурой

Рассмотрим теперь среду со спиральной структурой с осью z . Такой средой является, например, холестерический жидкий кристалл. Самая характерная особенность слоев таких сред – сильная зависимость коэффициентов пропускания и отражения от поляризации падающей волны [6]. С другой стороны и в связи с этим, слой преобразует поляризацию. Эти два связанных друг с другом обстоятельства и приводят к эффекту неодинакового пропускания, упомянутому выше.

Поясним роль преобразования поляризации на примере двухслойной системы (рис.1). Свет падает на систему со стороны первого слоя (рис.1а). Рассмотрим прохождение света через систему, следуя [7].

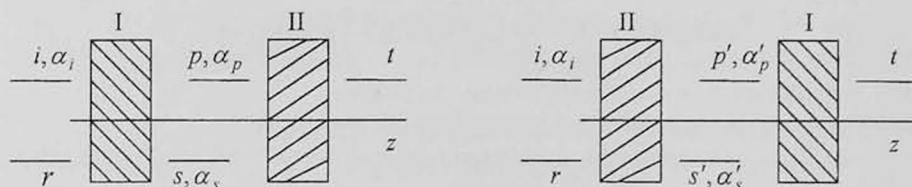


Рис.1. Двухслойные спиральные системы с перестановкой подслоев.

Обозначим поле падающей волны через $\mathbf{E}_i$, поля отраженной и прошедшей волн – через $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_t$, поля прямой и обратной волн между пластинками – соответственно через $\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_s$. Через α на рис.1 обозначены поляризации (например, отношения x -компонент полей к y -компо-

нентам). Коэффициенты прохождения и отражения по амплитуде – суть матрицы, связывающие пары компонент полей соответствующих волн. Пусть, для простоты, слои разделены интервалом вакуума с толщиной, кратной длине волны в вакууме. Тогда значения полей на правой границе первого слоя совпадают с их значениями на левой границе второго слоя. Матричные коэффициенты прохождения и отражения при падении волн слева обозначим через $\hat{T}_1, \hat{R}_1$ для первой пластинки и через $\hat{T}_2, \hat{R}_2$ – для второй. Соответствующие матрицы при падении волны s справа обозначим через $\tilde{\hat{T}}_1, \tilde{\hat{R}}_1$.

Для прошедшей волны в случаях, представленных на рис.1а и 1б соответственно, получаем:

$$\mathbf{E}_t = \hat{T}_2 [\hat{I} - \tilde{\hat{R}}_1 \hat{R}_2]^{-1} \cdot \hat{T}_1 \mathbf{E}_i, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_t' = \tilde{\hat{T}}_1 [\hat{I} - \tilde{\hat{R}}_2 \hat{R}_1]^{-1} \cdot \tilde{\hat{T}}_2 \mathbf{E}_i. \quad (7)$$

В общем случае $\mathbf{E}_t' \neq \mathbf{E}_t$. Фактором несовпадения $\mathbf{E}_t'$ и $\mathbf{E}_t$ является форма тензоров, фигурирующих в (6), (7), обеспечивающая некоммутативность произведения; такой формой обуславливается также отмеченное выше преобразование поляризации. Следовательно, если поменять местами слои (или пустить свет справа), то, вообще говоря, изменятся как поляризация прошедшей волны (эллиптичность и положение эллипса поляризации), так и интенсивность прошедшего света.

В качестве простейшего примера рассмотрим случай, когда у слоя II (рис.1а) область дифракционного отражения так далека от частоты волны, что селективности к поляризации нет, а на слой I падает волна с круговой поляризацией, для которой $\hat{T}_1 = 0$. (Для этого знак правизны поляризации должен совпадать со знаком правизны спирали, по которой закручена среда [6].) Тогда $\mathbf{E}_t = 0$, так как первый слой не пропускает света. Если пустить свет той же поляризации справа, то он, пройдя через слой II и полностью отражаясь от слоя I, при повторном отражении от слоя II уже пройдет через слой I. В этом можно убедиться, имея в виду, что правизна поляризации при отражении циркулярно поляризованной волны от слоя I не меняется, а при отражении от слоя II меняет знак.

Отметим, что спиральные среды с непостоянным шагом спирали рассматривались ранее разными авторами [4,6], но вопроса об оптической асимметрии не ставилось.

Рис.2 иллюстрирует эффект неодинакового пропускания для неоднородного спирального слоя ($\epsilon_{xx} = 2.143$, $\epsilon_{yy} = 2.29$; обратный шаг спирали $2\pi/\sigma$ меняется от значения $a_1 = 22.44$ мкм⁻¹ на одной границе до $a_2 = 19.635$ мкм⁻¹ на другой границе линейно; толщина слоя $d = 20$ мкм,

ω/c дано в мкм^{-1} ; в слое помещается целое число витков спирали) в случае плоской поляризации падающей волны; в обоих случаях электрическое поле падающей волны на входе в слой направлено вдоль директора на входах.

Расчет выполнен прямым применением условий непрерывности тангенциальных к границам компонент полей, без привлечения матричных методов, в частности, без привлечения соотношений (6) и (7), которые послужили лишь для простоты пояснения появления асимметрии.

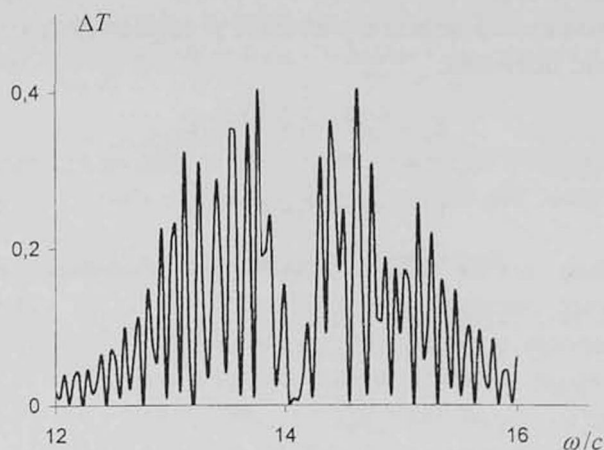


Рис.2. Частотная зависимость разности ΔT коэффициентов пропускания (по интенсивности) спиральным слоем, соответствующих взаимно противоположным направлениям нормального прохождения света. Параметры ячейки приведены в тексте.

4. Обсуждение

Рассмотренное выше свойство неодинаковости пропускания внешне напоминает эффекты необратимости волн [3-5]. Последняя, однако, имеет более глубокое физическое происхождение и заключается в нарушении оптического принципа обратимости, которое имеет место из-за появления в дисперсионном уравнении нечетных степеней модуля волнового вектора, что приводит к нецентросимметричности поверхностных волновых векторов. Рассмотренные выше системы не обладают необратимостью волн и они, к тому же, не являются единственными, обладающими рассмотренной выше неодинаковостью пропускания [8,9]. Однако они, в смысле применений, кажутся нам более эффективными в связи с малыми размерами и отсутствием внешних полей, в том числе магнитного поля, необходимого для появления необратимости волн.

1. Ф.И.Федоров. Теория гиротропии. Минск, Наука и техника, 1976.
2. В.М.Агранович, В.Л.Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., Наука, 1978.
3. О.С.Ерицян. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 3, 217 (1968).
4. О.С.Ерицян. УФН, 138, 645 (1982); Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван, Айастан, 1988.
5. О.С.Ерицян. Mol. Cryst. and Liq. Cryst., E9, 348, 79 (2000); ЖЭТФ, 117, 115 (2000).
6. В.А.Беляков, А.С.Сонин. Оптика холестерических жидких кристаллов. М., Наука, 1982.
7. В.А.Амбарцумян. Научные труды, т.1. Ереван, изд. АН Арм. ССР, 1960.
8. С.Н.Курилкина, Оптика и спектр., 83, 326 (1997).
9. В.Н.Белый, С.Н.Курилкина, С.Н.Ковчур. Оптика и спектр., 83, 409 (1997).

ՊԱՐՈՒՐԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԱՍԻՄԵՏՐԻԱՆ
ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ԳՐԱԴԻԵՆՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Հ.Ս. ԵՐԻՅԱՆ

Զննարկված է էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումը պարամետրերի գրադիենտով օժտված իզոտրոպ գիրոտրոպ և պարուրային միջավայրերում: Ցույց է տրված, որ վերջիններում տեղի ունեն ախմետրիայի էֆեկտներ, որոնք համանման են անշրջելիությամբ հարուցած էֆեկտներին:

OPTICAL ASYMMETRY OF HELICAL MEDIA
WITH A GRADIENT OF PARAMETERS

H.S. ERITSYAN

The propagation of electromagnetic waves in isotropic gyrotropic media and helical media in the presence of gradients of optical parameters is considered. It is shown that in helical media effects of asymmetry analogous to effects of irreversibility of waves can be observed.

УДК 541.64

ПЕРЕХОД СПИРАЛЬ-КЛУБОК В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАМКНУТЫХ ГЕТЕРОПОЛИМЕРНЫХ ДНК

А.В. ГРИГОРЯН, А.В. БАДАСЯН, А.Ю. ЧУХАДЖЯН,
Е.Ш. МАМАСАХЛИСОВ, В.Ф. МОРОЗОВ

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 января 2002 г.)

Построен гамильтониан, описывающий переход спираль-клубок в кольцевой замкнутой гетерополимерной ДНК (кзДНК) в рамках гамильтониана открытой цепи. Топологические ограничения, накладываемые на структуру, учитываются зависимостью приведенной энергии водородной связи от неусредненной степени денатурации.

Известно, что в клетках высших животных ДНК обмотаны вокруг специальных белковых структур (гистонов), образуя псевдокольцевую структуру. Кроме того, ДНК некоторых вирусов, а также цитоплазматическая ДНК высших животных внутри клетки часто находятся в кольцевой замкнутой форме. Для изучения перехода спираль-клубок в данных молекулах ранее был предложен метод получения кривых плавления на основе кривых плавления таких же линейных ДНК [1-4]. Поскольку эти работы были посвящены гомополимеру, то целью данной работы является установление связи между линейной и кольцевой ДНК (кзДНК) для случая гетерополимера.

В отличие от [4], рассмотрим молекулу двухспиральной ДНК, содержащую комплементарные азотистые основания двух разных сортов (гетерополимер). Включим в гамильтониан системы только факт комплементарного спаривания азотистых оснований. Кооперативность системы, как и в [4], будет обеспечиваться неаддитивностью петлевого фактора. Гамильтониан такой модели, согласно [1,2], имеет вид

$$-\beta H = \sum_{i=1}^N J_i \delta \left(\sum_{k=1}^i \gamma_k; 0 \right) = \sum_{i=1}^N J_i \delta_1^{(i)}, \quad (1)$$

где $J_i = U_i / kT$ – приведенная к температуре энергия водородной связи, U_i – энергия комплементарного связывания i -ой пары азотистых оснований и, в отличие от [4], зависит от i , $\beta = 1/T$, $\delta(a, b)$ – символ Кронекера а по значению $\sum_{k=1}^i \gamma_k$ можно судить о том, реализуется ли спиральная

образуется замкнутая петля длиной в i повторяющихся единиц, то выделяется энергия U_i , специфическая для данной повторяющейся единицы, если же нет, то энергия равна нулю. Следует отметить, что ДНК является системой, гетерогенной (содержащей беспорядок) по энергиям образования водородных связей (U_i зависит от сорта повторяющейся единицы) и гомогенной по петлевому фактору ($\sum_{k=1}^N \gamma_k$ не зависит или слабо зависит от сортов повторяющихся единиц).

Как и в гомополимерном случае, будем считать, что кзДНК есть система, в которой состояние одной повторяющейся единицы зависит от состояния всей молекулы, а параметр J_i предполагается зависящим от микроскопической (неусредненной) доли разорванных водородных связей (степени денатурации)

$$P = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^i. \quad (2)$$

Поскольку мы предположили для кзДНК зависимость приведенной энергии водородной связи J_i от мгновенной степени денатурации P , то разложим $J = J(P)$ в ряд по параметру P :

$$J_i = J_{0i} + \sum_{k=0}^M a_k P^k. \quad (3)$$

Здесь мы сделали существенное и оправданное предположение о независимости коэффициентов a_k от беспорядка, поскольку данные коэффициенты отражают свойства цепи в целом и являются нелокальными, в то время как J_{0i} остаются локальными. Таким образом, статистическая сумма с гамильтонианом (1) и условием (2) запишется в виде

$$Z = \sum_{\{\gamma_i\}} \exp \left[\sum_{i=1}^N J_{0i} \delta_i^{(i)} + N \sum_{k=0}^M b_k P^k \right], \quad (4)$$

где $b_k \equiv a_k - a_{k-1}$. В этом выражении первая сумма в экспоненте зависит от беспорядка, вторая же от беспорядка не зависит. Аналогично [4], выразим не зависящую от беспорядка $\exp[Nb_k P^k]$ следующим образом:

$$\exp[Nb_k P^k] = \int_{-\infty}^{\infty} dy_k \delta(y_k - P) \exp[Nb_k y_k^k]. \quad (5)$$

Используя интегральное представление дельта-функции, приходим к следующему выражению для статистической суммы:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Dy Dx \exp \left[N \sum_{k=0}^M \left(b_k y_k^k + \frac{i x_k (y_k - 1)}{N} \right) \right] \left\{ \sum_{\{\gamma_i\}} \exp \left[\sum_{i=1}^N \left(J_{i0} + i \sum_{k=0}^M x_k \gamma_i^k / N \right) \delta_i^i \right] \right\}. \quad (6)$$

Здесь подынтегральное выражение в статистической сумме стало линейным по P и выражение в фигурных скобках идентично статистической сумме Z_0 линейной модели с гамильтонианом (1), содержащим беспорядок. Для такого рода гамильтонианов показана сходимость приведенной свободной энергии [5], поэтому в термодинамическом пределе $Z_0 \sim \lambda_0^N$. Введя обозначение $\sum_{k=0}^M x_k = x$, получим

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Dy Dx \exp \left[N \sum_{k=0}^M \left(b_k y_k^k + \frac{ix_k (y_k - 1)}{N} + \ln \lambda_0 (J_{i0} + ix/N) \right) \right]. \quad (7)$$

Таким образом, в предположении, что задача о поведении λ_0 — приведенной свободной энергии для открытой цепи (ляпуновская экспонента) решена, используем, как и в [4], метод перевала для больших N и получим оценку для статистической суммы:

$$Z \propto \exp \left[N \left(\sum_{k=0}^M ((1-k)b_k \alpha^k + k b_k \alpha^{k-1}) + \ln \lambda_0 \left\{ J_{i0} - \sum_{k=0}^M k b_k \alpha^{k-1} \right\} \right) \right]. \quad (8)$$

Таким образом, модель кЗДНК сводится к модели линейной цепи, только выражение статистической суммы имеет сложный множитель, а величина λ_0 сложным образом зависит от степени денатурации α линейной ДНК и так же зависит от беспорядка, как и в случае открытой цепи. Для степени денатурации из (4) имеем:

$$\alpha_{a^*} = \langle P \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{N \partial b_1} = \alpha. \quad (9)$$

Таким образом, степени денатурации для кольцевой замкнутой ДНК и линейной оказываются равными. Это позволит впоследствии связать между собой кривые денатурации кольцевой замкнутой ДНК и линейной через преобразование шкалы температур аналогично тому, как это сделано для базовой модели [3] и модели с растворителем [4]. Получить соотношение в явном виде мешает отсутствие законченной теории для гетерополимерной открытой ДНК, однако показано, что вся процедура перехода от степени денатурации кЗДНК к линейной, изложенная в [4], вполне применима к гетерополимерной ситуации. Следовательно, показана принципиальная возможность получить кривую денатурации для кЗДНК, используя кривую денатурации линейной ДНК.

Работа выполнена благодаря гранту CRDF AB2-2006.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.F.Morozov, E.Sh.Mamasakhlisov, Sh.Hayryan, Chin-Kun Hu. Physica A, 281, 51 (2000).
2. В.Ф.Морозов, Е.Ш.Мамасакхлисов, М.С.Шагинян. Изв. НАН Армении, Фи-

зика, 33, 195 (1998).

3. V.F.Morozov, E.Sh.Mamasakhlisov, A.V.Grigoryan, Sh.Hayryan, Chin-Kun Hu, to be published in Phys. Rev. E, 2002.
4. А.В.Бадасян, А.В.Григорян, А.Ю.Чухаджян, Е.Ш.Мамасакхлисов, В.Ф.Морозов. Изв. НАН Армении, Физика, 37, 59 (2002).
5. V.I.Oseledec. Trans. Moscow Math. Soc., 19, 197 (1968).

ՊԱՐՈՒՅՐ-ԿԾԻԿ ԱՆՑՈՒՄԸ ՓԱԿ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ
ՀԵՏԵՐՈՊՈԼԻՄԵՐԱՅԻՆ ԴՆԹ-ՆԵՐՈՒՄ

Ա.Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա.Վ. ԲԱԴԱՍՅԱՆ, Ա.ՅՈՒ. ՉՈՒԽԱԶՅԱՆ,
Յ.Շ. ՄԱՍԱԿԽԼԻՍՈՎ, Վ.Ֆ. ՄՐՈՐՉՈՎ

Բաց շղթայի համիլտոնյանի շրջանակներում կառուցված է փակ շրջանային հետերոպոլիմերային ԴՆԹ-ներում պարույր-կծիկ անցումը նկարագրող համիլտոնյանը: Կառուցվածքի վրա վերադրվող տոպոլոգիական բարդացումները հաշվի են առնվում ջրածնային կապի բերված էներգիայի՝ դեմատոտացիայի չմիջինացված աստիճանից կախվածության միջոցով:

HELIX-COIL TRANSITION IN HETEROPOLYMER CIRCULAR CLOSED DNA

A.V.GRIGORYAN, A.V.BADASYAN, A.Y.CHUHADJYAN,
E.SH.MAMASAKHLISOV, V.F.MOROZOV

The Hamiltonian describing helix-coil transition in heteropolymer circular closed DNA in scopes of open chain Hamiltonian is proposed. Topological restrains present in structure, are taken into account by the reduced hydrogen bound energy's dependence on the unaveraged degree of denaturation.

УДК 538.61

ВОЗМОЖНОСТИ НУЛЕВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С УЧЕТОМ ОСТАТОЧНОГО РАЗБАЛАНСА РАДИОМЕТРА

С.А. МХИТАРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 29 марта 2002 г.)

Рассмотрена методика нулевых радиометрических измерений, при которой радиометр балансируется путем инъекции импульсного шумового сигнала через антенный вход. Остаточный разбаланс учитывается при оценке антенной температуры.

1. Введение

Одной из перспективных схем реализации СВЧ радиометра, предназначенных для радиотеплолокации окружающей среды с целью сбора гидрометеорологической информации, является нулевой радиометр, для балансировки которого используется дозированная импульсная инъекция шума через направленный ответвитель в антенный вход радиометра. При надлежащем выборе схемы и методике измерений такой принцип позволяет ввести в радиометр систему петель автоматического регулирования, которые могут свести к минимуму или вовсе устранить влияние дестабилизирующих факторов: таких, как изменение коэффициента передачи приемно-усилительного тракта, кинетической температуры антенно-волноводного тракта, кинетической температуры опорной нагрузки и т.д. Это в свою очередь облегчает тарировку радиометра и тем самым повышает достоверность полученной информации. С другой стороны, появляется возможность отказаться от термостатирования опорной нагрузки входной цепи радиометра, т.к. кинетические температуры этих участков радиометра контролируются и учитываются в ходе радиометрических изменений. Отказ от термостатирования влечет за собой улучшение массогабаритных и энергетических параметров радиометра [1].

Перечисленные достоинства нулевого радиометра с импульсным подшумливанием обеспечиваются тем, что в настоящее время созданы высокотемпературные источники шума, которые достаточно стабильно работают в импульсном режиме.

Радиометр управляется встроенным микропроцессором, который

непосредственно вычисляет значения антенной температуры, а при использовании антенны с низким уровнем боковых лепестков вычисления доводятся до определения значений радиоярких температур. Это достигается тем, что микропроцессор берет на себя управление отдельными узлами радиометра. По его команде вырабатываются все сигналы, управляющие коммутаторами, генераторами шума, коэффициентом передачи приемного тракта, интервалом наблюдения и т.д. Так как после внесения программы и необходимых констант система работает автоматически, без вмешательства оператора, то снимаются все ограничения на сложность методики радиометрических измерений [2-4].

2. Описание и принцип работы радиометра

Принцип работы нулевого радиометра с импульсным подшумливанием иллюстрируется на рис.1. Здесь $Q(t)$ – управляющая функция опорной модуляции, $F(t)$ – функция управления генератора шума, T_a – антенная температура, U – напряжение на выходе синхронного детектора, $\Delta U(t_i)$ – приращение выходного напряжения.

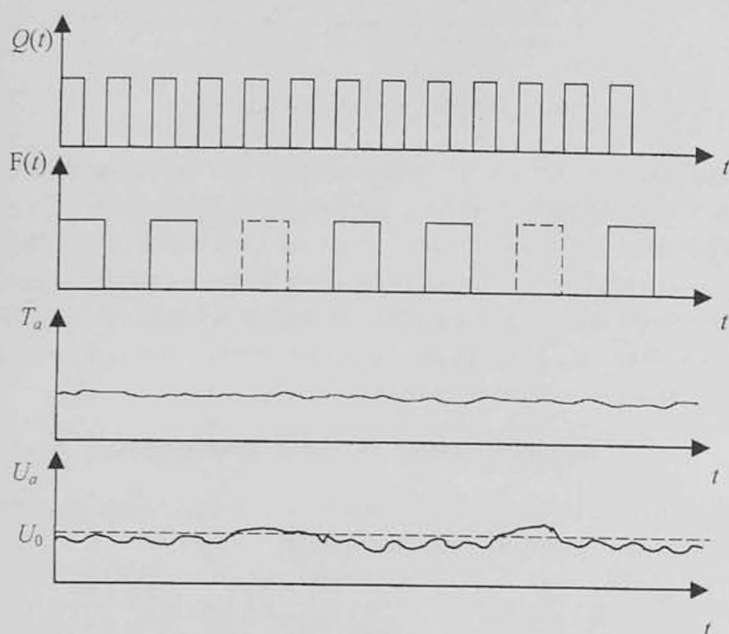


Рис.1. Иллюстрация принципа работы нулевого радиометра.

Основная программа микропроцессора, которая организуется в соответствии с алгоритмом определения T_a , фиксирует окончание текущего интервала наблюдения, производит вычисление значения антенной температуры и опрос термодатчиков. В начале каждого периода опорной модуляции радиометра с управляющей функцией $Q(t)$ проис-

ходит прерывание основной программы программой управления, которая устанавливает границы наблюдения, подсчитывает число импульсов инъекции шума в данном интервале, фиксирует выходные напряжения синхронного детектора в момент смены периодов модуляции, управляет генератором шума.

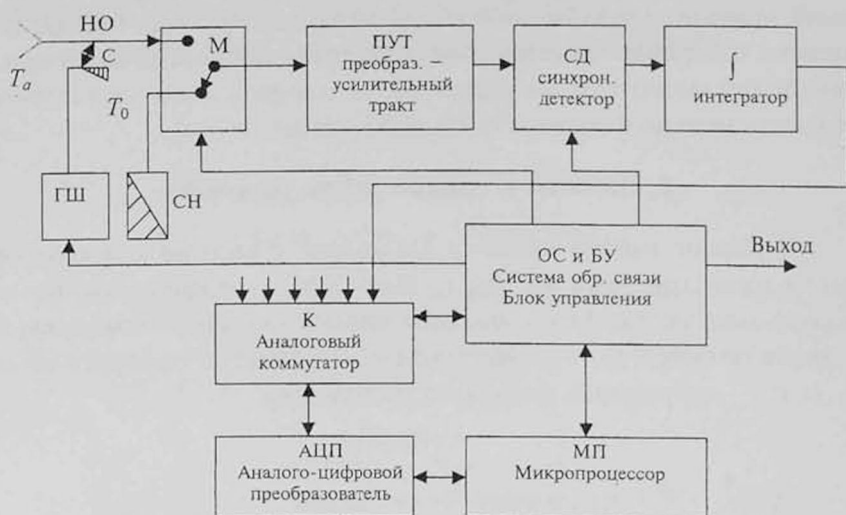


Рис. 2. Структурная схема радиометра.

Структурная схема описываемого радиометра приведена на рис.2. Принимаемый тепловой сигнал с шумовой температурой T_a через направленный ответвитель (НО) поступает на вход модулятора (М). Одновременно с принимаемым сигналом в модулятор поступает шумовой импульс генератора шума, который управляется по закону $F(t)$. Функция $F(t)$ дискретная и принимает два значения: $F(t)=1$ – генератор включен, $F(t)=0$ – генератор выключен.

3. Алгоритм оценки антенной температуры

Антенная температура оценивается по следующему выражению методики оценки антенной температуры [3]:

$$\tilde{T}_a = \frac{\tilde{T}_o - \alpha \tilde{T}_{\text{гш}}}{1 - \alpha} \frac{\Delta \tilde{T}_F}{1 - \alpha N_o} \left[N_i + \frac{\Delta \tilde{U}(t_H, t_K)}{\tilde{U}_o} \right], \quad (1)$$

где $\tilde{T}_o$, $\tilde{T}_{\text{гш}}$, $\Delta \tilde{T}_F$ – оценки величин соответственно опорной температуры модулятора, температуры на выходе включенного генератора шума и перепада при его переключении, приведенного к выходу направленного ответвителя, N_i – число импульсов инъекции в интервале наблюдения $[t_H, t_K]$, N_o – число периодов модуляции в интервале наблюдения, $\Delta \tilde{U}(t_H, t_K)$ – оценка приращения напряжения на входе интегратора, $\tilde{U}_o$ –

– оценка ширины диапазона изменений напряжения интегратора при отсутствии шума и при постоянном значении антенной температуры.

При неизменной антенной температуре выходное напряжение интегратора U_o линейно связано с коэффициентом передачи приемно-усилительного тракта. Это позволяет использовать в качестве тестового сигнала сигнал генератора шума, провести текущий контроль коэффициента передачи приемно-усилительного тракта, с последующим учетом в оценке T_a . Для этого достаточно измерять U_o в начале каждого интервала наблюдения.

Напряжение U_o оценивается по следующему алгоритму. Весь интервал наблюдения $[t_H, t_K]$ разбивается на M малых интервалов измерения, где управляющая функция меняет состояние лишь один раз, причем каждое из значений $F(t) = 0, F(t) = 1$ присутствует только на одном периоде модуляции. При каждом интервале измерения определяется величина U_o , а потом результаты усредняются по всему интервалу $[t_H, t_K]$. Оценка $\tilde{U}_o$ производится по следующей формуле:

$$\tilde{U}_o = \frac{\tau}{M} \left\{ \sum_{k=2}^{m-1} \left[\frac{2F(t_k)-1}{t_k-t_{k-1}} - \frac{2F(t_k)-1}{t_{k+1}-t_k} \right] U(t_k) - \frac{2F(t_1)-1}{t_2-t_1} U(t_1) + \frac{2F(t_m)-1}{t_m-t_{m-1}} U(t_m) \right\}, \quad (2)$$

где τ – период модуляции, t_k – моменты времени в порядке возрастания, при которых $F(t)$ меняет значение или происходит смена интервала наблюдения $[t_H, t_K]$.

Антенная температура оценивается по формулам (1) и (2). Можно показать, что дисперсия погрешности оценки антенной температуры $\delta \bar{T}_A^2$ определяется соотношением

$$\delta \bar{T}_A^2 = \frac{\Delta T_r^2}{(1-\alpha)^2 \Delta t} + \frac{\Delta T_F^2}{6(1-\alpha)^2 N_o^2 N_p^2} + \frac{\Delta U_n^2}{U_o^2} + \frac{16B(\rho)I}{3N_o^2 \Delta t^2 (1-\bar{\rho}^2)^2}, \quad (3)$$

$$I = \left[\tau \sum_{j=1}^M \Delta T_{AB_j} \right]^2, \quad \rho = \left| 1 - 2 \frac{T_o - \alpha T_{ГШО} - (1-\alpha)T_a}{\Delta T_F} \right|.$$

– параметры, характеризующие вклад в погрешности вследствие изменения антенной температуры и насыщения радиометра. Здесь ΔT_r – температурное разрешение радиометра, ограниченное шумами приемника и случайностью измеряемого сигнала, ΔU_n – ширина динамического диапазона, N_p – число градаций измерителя выходного напряжения интегратора, B – отношение дисперсии напряжения интегратора к этой дисперсии при отсутствии шума, ΔT_{AB_j} – отклонение среднего значения измеряемой температуры на всем выделенном периоде модуляции интервала измерения.

4. Заключение

Как показала дальнейшая эксплуатация данной системы, основная погрешность определяется собственными шумами, т.е. вклад последнего члена в (3) достаточно мал, даже в том случае, если интервал наблюдения охватывает несколько периодов опорной модуляции. Применение данной методики измерения позволяет полностью устранить нестабильность коэффициента передачи приемно-усилительного тракта.

Автор выражает благодарность А.Г.Горелику и Ж.Б.Хачатрян за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А.Кочеров. Тр. Гос. НИЦИПР, 26, 86 (1986).
2. А.Г.Гулян, Г.А.Двоян, Р.М.Мартirosян, Г.А.Пирумян. Изв. НАН Армении, Физика, 34, 247 (1999).
3. В.А.Иванов, С.А.Кочеров. Тр. Гос. НИЦИПР, 32, 57 (1988).
4. С.А.Кочеров, С.А.Мхитарян. Тр. Гос. НИЦИПР, 32, 115 (1988).

ՋՐՈՅԱԿԱՆ ՌԱԴԻՈՄԵՏՐԱԿԱՆ ՉԱՓՈՒՄՆԵՐԻ ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱՅՈՐԱՅԻՆ ԱՊԱՐԱՏԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ս.Ա. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Զննարկված է զրոյական ռադիոմետրական չափումների եղանակ, որի դեպքում ռադիոմետրը հավասարակշռվում է անտենայի մուտքին ներարկվող խմպուկների միջոցով: Մնացորդային անհավասարակշռությունը նույնպես մտնում է անտենայի ջերմաստիճանի մեջ:

POSSIBILITIES OF ZERO MEASUREMENTS WITH ALLOWANCE FOR REMNANT MISBALANCE OF THE RADIOMETER

S.A. MKHITARIAN

A zero radiometric measurement technique is considered where the radiometer is balanced by means of a pulsed noise signal injected into the antenna tract. The remnant misbalance is taken into account in estimation of the antenna temperature.

Ա.Մ.Իշխանյան, Ա.Մ.Մանուկյան. Եռամակարդակ խնդրի ճշգրիտ լուծումները Գուրսայի ֆունկցիաներով	199
Ա.Հ.Հովհաննիսյան. Հազվագյուտ $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ տրոհումը Ստանդարտ Մոդելից դուրս	206
Ռ.Գ.Ղուղազարյան. Փոքսի Q-դիրքային միաչափ մոդելի վիճակագրական գումարի կոմպլեքս զրոները	211
Մ.Բ.Միրումյան. Ույմին-Լայ-Սազերլենդի 3/2 սպինի մոդելը ֆերմիոնների ծնման և ոչնչացման նկարագրմամբ	217
Գ.Ա.Մուրադյան. Ջեյնս-Քամինգսի մոդելը հանդիպակաց ալիքների դաշտում ատոմի համընթաց շարժման դեպքում	228
Հ.Ա.Սարգսյան. Քվանտային կետերում Կոնի թեորեմի խախտման վերաբերյալ	233
Վ.Ա.Հարությունյան, Հ.Գ.Սուլթանյան. Չափային քվանտացված Շտարկ էֆեկտը կիսահաղորդչային գնդային շերտում	237
Հ.Ս.Երիցյան. Պարուրային միջավայրերի օպտիկական ասիմետրիան պարամետրերի գրադիենտի առկայությամբ	244
Ա.Վ.Գրիգորյան, Ա.Վ.Քաղասյան, Ա.Յու.Չուխաջյան, Յ.Շ.Մամասախյանով, Վ.Ֆ.Մորոզով. Պարույր-կծիկ անցումը փակ շրջանային հետերոպոլիմերային ԴՆԹ-ներում	250
Ա.Ա.Մխիթարյան. Ջրոյական ռադիոմետրական չափումների հնարավորությունները մնացորդային ապալարքի հաշվառմամբ	254

CONTENTS

A.M.Ishkhanyan, A.M.Manukyan. Exact solutions of the three-level problem in terms of Goursat functions	199
A.H.Hovhannisyan. Rare decay $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ beyond the Standard Model	206
R.G.Ghulghazaryan. Complex zeros of the partition function of the Q-state Potts model	211
M.B.Mirumyan. Uimin-Lai-Sutherland spin-3/2 chain model in terms of fermion creation and annihilation operators	217
G.A.Muradyan. Jaynes-Cummings model for an atom moving in the field of counterpropagating waves	228
H.A.Sarkisyan. On the problem of violation of Kohn's theorem in quantum dots . .	233
V.A.Haroutyunian, H.G.Sultanian. Quantum-size Stark-effect in a semiconductor spherical layer	237
H.S.Eritsyan. Optical asymmetry of helical media with a gradient of parameters . .	244
A.V.Grigoryan, A.V.Badasyan, A.Y.Chuhadjyan, E.Sh.Mamasakhlisov, V.F.Morozov. Helix-coil transition in heteropolymer circular closed DNA . .	250
S.A.Mkhitarian. Possibilities of zero measurements with allowance for remnant misbalance of the radiometer	254

СОДЕРЖАНИЕ

А.М.Ишханян, А.М.Манукян. Точные решения трехуровневой задачи в функциях Гурса.	199
А.Г.Оганесян. Редкий распад $B \rightarrow X_S \ell^+ \ell^-$ вне Стандартной Модели.	206
Р.Г.Гулгазрян. Комплексные нули статистической суммы Q -позиционной одномерной модели Поттса.	211
М.Б.Мирумян. Решеточная модель Уймина-Лая-Сазерлэнда спина $3/2$ в терминах операторов рождения и уничтожения фермионов.	217
Г.А.Мурадян. Модель Джейнса-Каммингса для атома, движущегося в поле встречных волн.	228
А.А.Саркисян. К проблеме нарушения теоремы Кона в квантовых точках.	233
В.А.Арутюнян, Г.Г.Султанян. Квантово-размерный эффект Штарка в полупроводниковом сферическом слое.	237
О.С.Ерицяи. Оптическая асимметрия спиральных сред с градиентом параметров.	244
А.В. Григорян, А.В.Бадасян, А.Ю.Чухаджян, Е.Ш. Мамасахлисов, В.Ф.Морозов. Переход спираль-клубок в кольцевых замкнутых гетерополимерных ДНК.	250
С.А.Мхитарян. Возможности нулевых измерений с учетом остаточного разбаланса радиометра.	254

Заказ №122. Тираж 100

Сдано в набор 15.06. 2002. Подписано к печати 21.07.2002.

Печ. л. 4.0. Бумага офсетная. Цена договорная.

Подразделение оперативной полиграфии Ереванского
гос. университета, Ереван, ул. Ал. Манукяна 1