ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXIII, №4
1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

ԳԻՆԸ 55 կ.
ЦЕНА 55 к.

Индекс

CONTENTS

p.

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 9.10. 1986 г. Подписано к печати 25.12. 1986 г. ВФ 06430.
Бумага № 2,70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4.2.
Учетно.-изд. л. 3,32. Тираж 455. Заказ 685. Издат. 6917.
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 4

МАТЕМАТИКА

УДК 513.83+519.55

А. А. Бабаджанян

О «конструктивности» в теореме о неподвижной точке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/VII 1984)

Роль теорем о неподвижной точке общеизвестна. Оставаясь в рамках чисто топологических условий (в отличие от теоремы о сжимающем отображении), они служат основой доказательства многих теорем существования. Теорема Боля—Брауэра составляла основу доказательства основной теоремы фон Неймана в теории игр, а также теорем о существовании равновесия в моделях математической экономики (некоторые упомянутые результаты сейчас легче получить, используя теорему о неподвижной точке Какутани для многозначных отображений).

Как известно, теорема о неподвижной точке Боля—Брауэра и ее обобщения—теорема Шаудера, Тихонова, Какутани, Лефшеца—Хопфа ([1-4]) неконструктивны, в них нет такой простой процедуры, как метод последовательных приближений Пикара (в линейном случае Пикара—Пуанкаре—Неймана) в условиях теоремы о сжимающем отображении Каччиополи—Банаха.

В 1967 г. Скарф ([5]) предложил основанный на лемме Шпернера численный метод нахождения неподвижной (ε-неподвижной) точки непрерывного отображения симплекса из R^n в себя.

Непрерывный аналог метода Скарфа в 1974 г. был предложен в ([6]), где использовалось краткое доказательство Хирша ([7]) о неретракции шара на свою границу. Возможности этих методов, однако, сильно ограничены размерностью задачи. Более полная библиография дана в ([8]).

1. Пусть F—непрерывное отображение, действующее в конечномерном нормированном пространстве R^n и замкнутый шар $B^n \subset R^n$, множество неподвижных точек отображения F есть $\mathrm{Fix}(F)$. Необходимые определения и обозначения взяты из ([2,3]).

Теорема 1. *Для любого непрерывного отображения F: $: B^n \to B^n$ всякая точка сгущения последовательности неподвижных точек*

$$x_{k+1} = Fr_k(x_{k+1}) \quad (\text{или } x_{k+1} = r_k F(x_{k+1})) \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где начиная с произвольного r_0 ретрагирующие отображения $r_k: B^n \to B^n$, $(k=0, 1, \ldots)$ удовлетворяют условию:

(B) $\quad r_k(x_k) = x_k \qquad$ (соответственно $r_k F(x_k) = F(x_k)$) $\quad k=1, \ldots,$

является неподвижной точкой отображения F.

Доказательство следует из компактности B^n и условия (В). Заметим, что если $\mathrm{Fix}(F)\cap r_k(B^n)\neq\varnothing$ для $k>k'$, то последовательность (1) может „обрываться" на неподвижной точке (или точках) отображения F.

Теорема 2. *В условиях теоремы Боля-Брауэра, „с вероятностью один" предел всякой сходящейся подпоследовательности последовательности неподвижных точек*

$$x_{k+1}=Fr_k(x_{k+1}) \quad (\text{или} \quad x_{k+1}=r_kF(x_{k+1})) \quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{2}$$

где начиная с произвольного r_0 *ретрагирующие отображения* $r_k: B^n\to B^n$ *удовлетворяют условию*:

(В) $\quad r_k(x_k)=x_k \quad$ (соответственно $r_kF(x_k)=F(x_k)$) $\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$
и $\quad x_k\neq x_{k'}\ (k\neq k')$

является неподвижной точкой отображения F.

Схема доказательства. Положим отображения F и r_k гладкими. Отображения $Fr_k(x)$ (или $r_kF(x)$), $k=0,\ 1,\ldots$ гладко гомотопны F, т. е. существует гомотопия $H(t,\ x): B^n\times(0,\ 1]\to R^n$, и $t=t(s)$. Пусть $t(1)=1$, $t(s)=0$ при $s\to 0$, где $H_{t(1/k+1)}(x)=x-Fr_k(x)$ (или $H_{t(1/k+1)}(x)=x-r_kF(x)$).

По теореме Сарда „с вероятностью один" 0 есть регулярное значение отображения $H_{t(1/k+1)}(x)$. С учетом того, что B^n компактно и $\mathrm{Fix}(F)$ конечно, существует конечное число связных компонент (гладких одномерных многообразий) $H^{-1}(0)$, для которых, в силу условия (В), крайняя точка является неподвижной точкой F.

Замечание 1. Если отображение F имеет единственную неподвижную точку, тогда последовательность (1) сама сходится к неподвижной точке F.

Такая „конструктивность" имеет место и в условиях теоремы Шаудера.

2. Пусть $F: E\to E$ линейный вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Рассмотрим уравнение второго рода

$$x=Fx+f \qquad (f\in E) \tag{3}$$

и пусть существует непрерывный обратный $(I-F)^{-1}$. Тогда единственное решение (3) может быть найдено последовательно из приближенного уравнения

$$x_{k+1}=FP_kx_{k+1}+f \quad (\text{или} \quad x_{k+1}=P_kFx_{k+1}+f)\ k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{4}$$

где линейный, идемпотентный оператор, определенный на всем E, (проектор) $P_k: E\to E_{(k)}\subset E$ ($E_{(k)}$—замкнутые подпространства из E шага k) удовлетворяет условиям (B) $P_kx_k=x_k$ (соответственно $P_kFx_k=Fx_k$) $k=0,\ 1,\ldots$, начиная с произвольного p_0.

Будем полагать, что $\|P_k\|<C$ равномерно по k.

Теорема 3. *Последовательность решений уравнения* (4) *сходится к решению* (3), *если существуют непрерывные обратные* $(I-FP_k)^{-1}$ (соответственно $(I-P_kF)^{-1}$) *для любого* $k=0,\ 1,\ldots$

Легко видеть, что (4) можно решить в подпространстве $E_k = P_k E$ (вообще конечномерном)

$$X_{k+1}=P_kFX_{k+1}+P_kf \quad (P_kf\neq 0),$$

а затем скорректировать на E

$$x_{k+1}=FX_{k+1}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots\ ).$$

Соответственно, (4) может быть решено следующим образом

$$X_{k+1}=P_kFX_{k+1}+P_kFf \quad (P_kFf\neq 0),$$

$$x_{k+1}=X_{k+1}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots\ ).$$

Такие методы решения линейных уравнений даны в ([9]) и названы проекционно-связными ([10]).

Отдельный интерес представляют эти методы с ортогональным проектором, удовлетворяющим условиям (В).

Замечание 2. В конечномерном случае проекционно-связные методы позволяют уменьшать размерность решаемой системы, а при выборе P_k в специальном виде—распараллеливать процесс решения.

3. В. п. п. 1,2 предлагается способ аппроксимации исходного оператора F последовательностью $F_{k+1}=FP_k$ (или, $F_{k+1}=P_kF$) $k=0, 1, \ldots$. В этой связи, вопросы устойчивости индекса линейных, фредгольмовых операторов $I-F_{k+1}$, аналогично равномерной и компактной аппроксимации, выделены в самостоятельную работу.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

Անշարժ կետի թեորեմում «կոնստրուկտիվության» մասին

Հայտնի է, որ Բրաուերի՝ անշարժ կետի մասին թեորեմը և նրա ընդհանրացումները՝ Շաուդերի, Տիխոնովի, Կակուտանիի, Լեֆշեց-Հոպֆի թեորեմը ոչ կոնստրուկտիվ են, նրանցում չկա այնպիսի հասարակ արարողություն, ինչպիսին է Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը (գծային դեպքում՝ Պիկար-Պուանկարե-Նեյմանի) Կաչիոպոլի-Բանախի սեղմող արտապատկերման մասին թեորեմի պայմաններում։

Աշխատանքում ներկայացված է անշարժ կետի թեորեմում «կոնստրուկտիվ» սխեմա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. С. Понтрягин*, Основы комбинаторной топологии. М., 1947. [2] *J. Dugundji. A. Granas*, Fixed-Point Theory. v. 1.: Warsaw, Pol. Sci. Pub., 1982. [3] *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко*, Геометрические методы нелинейного анализа, М., Наука, 1975. [4] *Дж. Милнор, А. Уоллес*, Дифференциальная топология. М., Мир, 1972. [5] *H. Scarf*, SIAM J. Appl. Math., v. 15, 1967, p. 1328—1343 [6] *R. B. Kellog, T. Y. Li, J. A. Yorke*. In: Computing Fixed Points with Applications. S. Karamadian (ed.), New-York, 1977, pp. 133—147. [7] *M. W. Hirsch*. Proc. of AMS, 14, 1963, p. 364—365. [8] *М. Дж. Тодд*. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. М., Наука, 1983. [9] *А. А. Бабаджанян*. ДАН Арм. ССР т. 77, №4(1983). [10] *А. А. Бабаджанян*, в кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники. т. 13 (1984).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 4

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

А. Д. Тунuев, А. Н. Серебровский

Расширенный метод обратной матрицы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 3/VI 1985)

Впервые метод обратной матрицы был применен Л. В. Канторовичем к одной из частных задач линейного программирования ([1,2]). В дальнейшем этот алгоритм был развит для решения общей задачи линейного программирования ([3]). Аналогичные результаты были получены в ([4]).

В ([5]) была поставлена задача пересмотра группы симплексных методов с точки зрения идеи особого правила выбора не одного, а одновременно нескольких элементов—направляющего вектора. Относительно симплекс-метода эта задача рассматривалась в ([6]). Здесь эта задача решается для метода обратной матрицы. Основой метода является понятие частично-обратной матрицы, которая в рассматриваемом смысле единственная ([5]) и является дальнейшим развитием обратной матрицы Мура—Пенроуза.

Приведем основные обозначения из ([7]). Вектор $x=\{x_i\}$, где i пробегает множество N, обозначим $x[N]$. Вектор $x[K]$, где $K\subset N$, будет обозначать K-й „кусок“ вектора $x[N]$. Компоненту вектора $x[N]$, имеющего индекс i, обозначим $x[i]$. Символ $a[M, N]=\{a_{ij}\}$ будет обозначать матрицу, индексы строк которой пробегают множество M, а индексы столбцов N. Вектор $a[i, N]$—i-я строка матрицы $a[M, N]$, а $a[M, j]$ ее j-й столбец.

1°. *Признак оптимальности.* Пусть $M=\{1, 2, \ldots, m\}$, $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ и требуется максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N] \tag{1}$$

при

$$a[M, N]x[N]=a[M, 0], \tag{2}$$

$$x[N]\geqslant 0[N]. \tag{3}$$

Зададим разбиение $K=\{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$, где $K\subseteq N$, $K_i\cap K_j=\varnothing$ ($i, j=1, 2, \ldots, \tau$). Пусть при этом разбиение $\tilde{a}[K, M]$ частично-обратная матрица для $a[M, K]$.

Утверждение. Если вектор $x^0[K, 0]=\tilde{a}[K, M]a[M, 0]\geqslant 0[K]$ и расширенные оценки $x^0[0, j]=c[K]\tilde{a}[K, M]a[M, j]-c[j]\geqslant 0$, $j\in N$, то $x[N]=\{x^0[K, 0], 0[N\setminus K]\}$—решение задачи (1)—(3).

2°. *Описание метода.* Пусть задача (1)—(3) невырожденная, $x^0[K, M]=\tilde{a}[K, M]$, $x^0[K, 0]\geqslant 0[K]$ ($x^0[K, M]$ может быть и единичной матрицей).

Первая итерация. 1. Если расширенные оценки $x^0[0, j] \geqslant 0$, $j \in N$, то $x[N] = \{x^0[K, 0], 0[N \setminus K]\}$ — решение задачи.

2. Если, по крайней мере, для одного $j \in N$ столбец $x^0[K, j] \leqslant 0[K]$ и $x^0[0, j] < 0$, то задача (1)—(3) неразрешима.

3. Если план $x^0[K, 0]$ содержит нулевые компоненты, то переходим к п. 8 для их исключения.

Пусть $x^0[K, 0] > 0[K]$. Выбираем $\bar{K} \subseteq N$ такое, что оценки $x^0[0, j] < 0$, $j \in \bar{K}$. Вычисляем $x^0[K, j] = \tilde{a}[K, M]a[M, j]$, $j \in \bar{K}$. Далее определяем

$$\theta_{s_1} = \frac{x^0[s_1, 0]}{\|x^0[s_1, \bar{K}_{s_1}]\|} = \min_i \frac{x^0[i, 0]}{\|x^0[i, \bar{K}_i]\|}$$

для тех i, для которых вектор $x^0[i, \bar{K}_i]$ содержит *все* положительные компоненты вектора $x^0[i, \bar{K}]$. Ясно, что для выбранных i $x^0[i, \bar{K}_i] > 0[\bar{K}_i]$ и $\bar{K}_i \subseteq \bar{K}$. Полагаем $\bar{K} = \bar{K}_{s_1}$.

5. Обозначим $S_r = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots, r)$. На r-ом шаге определяем r-й $(r \geqslant 2)$ особый направляющий вектор*. Пусть:

(а) $\theta_{s_r} = \dfrac{x^{r-1}[s_r, 0]}{\|x^{r-1}[s_r, \bar{K}]\|} = \min\limits_{i \geqslant r} \dfrac{x^{r-1}[i, 0]}{\|x^{r-1}[i, \bar{K}]\|}$.

для тех i, для которых $\|x^{r-1}[i, \bar{K}]\| \neq 0$;

(б) $\sum\limits_{l \in S_{r-1}} x^{r-1}[l, \bar{K}]x^{r-1}[l, 0] + \dfrac{x^{r-1}[s_r, \bar{K}]x^{r-1}[s_r, 0]}{\|x^{r-1}[s_r, \bar{K}]\|^2} \geqslant 0[\bar{K}]$;

(в) $\sum\limits_{j \in \bar{K}} x^{r-1}[0, j]x^{r-1}[s_r, j] < 0$**.

Если один из подпунктов (а)—(в) нарушается, то переходим к п. 7, где полагаем $r = r - 1$.

6. Шаг обобщенного жорданового исключения. Пусть $L = \bar{K} \cup M$. Полагаем

$$x^r[i, j] = \begin{cases} x^{r-1}[i, j], & i \in S_{r-1}, \ j \in L, \\ \dfrac{x^{r-1}[i, j]}{\|x^{r-1}[i, \bar{K}]\|}, & i = s_r, \ j \in L, \\ x^{r-1}[i, j] + \alpha_i^{r-1}[s_r, j], & i \bar{\in} S_r, \ j \in L, \end{cases}$$

где $\alpha_i^{r-1} = \alpha_i^{r-1}(\bar{K}) = -\sum\limits_{j \in \bar{K}} x^{r-1}[i, j]x^r[s_r, j]$, $i \bar{\in} S_r$.

7. Определяем новую частично-обратную матрицу $\tilde{u}[N_r, M]$. Пусть $x^r[S_r, \bar{K}] = \{x^r[i, j]\}$ и $v^r[\bar{K}, M] = x^r[S_r, \bar{K}]^T x^r[S_r, M]$. Формируем множество $N_r = K_r' \cup K_r'' \cup K_r'''$, где $K_r' = \bar{K} \cap K_r$, $K_r = K \setminus S_r$, $K_r'' = \bar{K} \setminus K_r'$, $K_r''' = K_r \setminus K_r'$. Тогда $\tilde{u}[N_r, M] = \{\tilde{u}[i, j]\}$, где

---

* При $r = 1$, минуя п. 5, переходим к п. 6, где $\bar{K} = \bar{K}_{s_1}$.

** Подпункты (а), (б) гарантируют неотрицательность полученного плана, а (в) — увеличение значения линейной формы (1).

$$\tilde{u}[i, j]=\begin{cases} x^r[i, j]+v^r[i, j], & i\in K_r', \ j\in M, \\ v^r[i, j], & i\in K_r'', \ j\in M, \\ x^r[i, j], & i\in K_r''', \ j\in M. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что если $\tilde{u}[i, j]=0$, $i\in J$ и $j\in M$, где $J\subset N_r$, полагаем $N'_r=N_r\setminus J$.

Конец первой итерации, переходим к п. 1.

8. Пусть $x^0[i, 0]=0$, $i\in S_r$. Выбираем $\tilde{K}$ такое, что $\tilde{K}\subset K$ и $\tilde{K}\cap S_r=\varnothing$. Далее последовательно выбрав в качестве особых направляющие векторы с индексами $s_1, s_2, \ldots, s_r$, согласно п. 6,7, после r шагов получим частично-обратную матрицу $\tilde{u}[N_r, M]$. При этом будут исключены r нулевых компонент плана $x^0[K, 0]$, а значение линейной формы (1) не изменится. Переходим к п. 4.

Теорема. *Пусть элементы* $\tilde{u}[N_r, M]$ *определены согласно* (4). *Тогда:*

а) *матрица* $\tilde{u}[N_r, M]$ *является частично-обратной для* $a[M, N_r]$ *и в рассматриваемом смысле (при выбранном* $\tilde{K}$*) единственной;*

б) *вектор* $u[N_r, 0]=\tilde{u}[N_r, M]a[M, 0]$ *является улучшенным особым планом задачи* (1)—(3), *при этом значение линейной формы* (1) *равно* $c[N_r]u[N_r, 0]>c[K]x^0[K, 0]$.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 из ([6]). Из этой теоремы следует, что расширенный метод обратной матрицы конечен.

Замечание 1. Если в п. 5 (а) минимум достигается для нескольких индексов, то выбираем наименьший из них.

Замечание 2. С учетом ([8]) этот метод модифицируется. Суть его заключается в том, что на каждом r-ом шаге итерации можно выбирать не постоянное $\tilde{K}$ (зависящее от номера итерации), а $\tilde{K}_{s_r}$, где $\tilde{K}_{s_r}$, при $r\geqslant 2$, определяется так же, как и при $r=1$. При этом для $r=1, 2, \ldots, r$ п. 5 минуется и преобразуются все элементы $x^{r-1}[i, j]$.

Вызывает интерес задача проф. Н. З. Шора (ИК им. В. М. Глушкова АН УССР), которая состоит в определении конечного набора $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_d$, приводящего к быстрому достижению оптимума.

3°. Численный эксперимент проводился по следующей методике. Отталкиваясь от одного и того же начального опорного плана, методом, изложенным в 2°, задача (1)—(3) решалась n раз, где n—число переменных задачи.

При ее s-ом решении, независимо от номера итерации, число элементов $\tilde{K}=\tilde{K}^s$ (см. п.4) не превышало $n-(s-1)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$.

Если при s-ом решении на некоторой итерации число оценок для $x_s[0, j]<0$ превышало $n-(s-1)$, то число элементов $\tilde{K}=\tilde{K}^s$ выбиралось равным $n-(s-1)$, при этом в множество $\tilde{K}^s$ входили те индексы j, для которых $x_s[0, j]\leqslant x_s[0, i]$, $i\in N\setminus\tilde{K}^s$. При $s=n$ это был обычный метод обратной матрицы.

Первые эксперименты на ЕС ЭВМ показали, что при n разовом решении задачи (1)—(3) в большинстве случаев (95%)* существуют такие $s(s \neq n)$, при которых:

а) точность полученного результата (время решения задачи) лучше, чем в обычном методе обратной матрицы;

б) в вырожденных задачах удается обойти вырожденные опорные планы и получить оптимальный план;

в) удается получить неопорный особый план.

Задачу (1)—(3) можно решать не n раз, а l раз, где $l=\left[\frac{n}{d}\right]$, $d\in\left\{1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$. В этом случае при s-ом решении задачи число элементов $\overline{K}=\overline{K}^s$ не превышает $n-(s-1)d$ $(s=1, 2, \ldots, l)$.

На многопроцессорных вычислительных комплексах l разовое решение задачи (1)—(3) можно проводить параллельно (одновременно) на l процессорах. При этом решение задачи можно прервать либо по критерию точности $(\|a[M, 0]-a[M, N]x[N]\|)$, либо по критерию времени, либо с учетом обоих критериев.

ВЦ Министерства местной промышленности
Армянской ССР
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
Академии наук Украинской ССР

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻԵՎ, Ա. Ն. ՍԵՐԵԲՐՈՎՍԿԻ

Հակադարձ մատրիցայի ընդլայնված մեթոդ

Տվյալ աշխատանքում առաջարկվում է գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման մեթոդ, որը հանդիսանում է հակադարձ մատրիցայի հայտնի մեթոդի ընդհանրացված տարբերակը։

Մեթոդի հանրահաշվական հիմք հանդիսանում է մասնակի-հակադարձ մատրիցայի գաղափարը, որը հանդիսանում է Մուր—Պենրոուզի հակադարձ մատրիցայի ընդհանրացումը, և ժորդանյան բացառումների ընդհանրացված պրոցեդուրան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. В. Канторович*, ДАН СССР, т. 37, № 7—8 (1942). [2] *Л. В. Канторович, М. К. Гавурин*, в кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта, Изд-во АН СССР, Л., 1949. [3] *Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер*, Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Лениздат, 1951. [4] *G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe*, RAND Report RM—1264, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954 [5] *А. Д. Туниев*, Кибернетика, № 3, 1983. [6] *А. Д. Туниев*, Кибернетика, № 4, 1984. [7] *И. В. Романовский*, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977. [8] *А. Д. Туниев, А. С. Туниев*, ДАН Арм. ССР, т. 83, № 1 (1986).

* Нами рассматривались 20 задач различной плотности, при этом $m=100$, $n=500$; $m=200$, $n=500$.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

М. И. Караханян

Почти-периодичность в спектральном анализе нормальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 8/VI 1985)

Пусть $B(X)$—банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном банаховом пространстве X. Если для оператора $S\in B(X)$ имеет место равенство $\|e^{itS}\|=1$ для всех $t\in\mathbf{R}$, то оператор S называют эрмитовым (см. [1,2]). Оператор $A\in B(X)$ назовем нормальным, если $A=H+iK$, где H, $K\in B(X)$—коммутирующие эрмитовы операторы. Нетрудно видеть, что для нормального оператора A представление в виде $H+iK$ единственно.

Пусть S—компактный эрмитов оператор, действующий в слабо полном банаховом пространстве X, тогда e^{itS}—изометрическое представление группы $\mathbf{R}$ в пространстве X. Как показал Ю. И. Любич [3] (см. также [4]), для полноты системы собственных векторов компактного эрмитова оператора S в слабо полном банаховом пространстве X (что эквивалентно полноте системы собственных векторов представления e^{itS}) необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi(e^{itS}x)$ была боровской почти-периодической функцией на $\mathbf{R}$.

В данной работе с использованием методики работ [3,4] будет получено обобщение этих результатов для нормальных операторов как в ограниченном, так и неограниченном случаях.

Пусть G—локально компактная, σ—компактная абелева группа. Обозначим через $C_{AP}(G)$ банахову алгебру равномерных почти-периодических функций на группе G, наделенную sup-нормой. Если алгебру $C_{AP}(G)$ пополнить по предгильбертовой структуре, определяемой скалярным произведением $\langle f,\psi\rangle_b=M[f\bar{\psi}]$, где $M[f\bar{\psi}]=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(H_n)}\int\limits_{H_n}f\bar{\psi}d\lambda$ (см. [5], с. 323), то получится гильбертово пространство почти-периодических функций Безиковича на группе G, которое обозначают через $B^2(G)$.

Отметим, что унитарные характеры $\hat{G}$ образуют в пространстве $B^2(G)$ ортонормированный базис; нетрудно видеть, что естественный изоморфизм $C_{AP}(G)\simeq C[b(G)]$, где $b(G)$—боровский компакт группы G, продолжается до изометрического изоморфизма $B^2(G)\simeq L^2[b(G)]$, где $L^2[b(G)]$ строится по нормированной мере Хаара $d\mu$ на группе $b(G)$.

Пусть $T: G \to \mathrm{Aut}(X)$ — изометрическое представление группы G в пространстве X, т. е. $\|T(g)\|=1$ для каждого $g \in G$. Отметим, как это принято в теории представлений топологических групп, что все рассматриваемые здесь представления предполагаются сильно непрерывными. Вектор $x \in X$ $(x \neq 0)$ будем называть собственным вектором представления T, если существует характер $\chi \in \hat{G}$ такой, что $T(g)x = \chi(g)x$ для каждого элемента $g \in G$.

Теорема 1. *Пусть X — слабо полное банахово пространство, G — локально компактная, σ — компактная абелева группа и T — изометрическое представление группы G в пространстве X. Тогда для того чтобы система собственных векторов представления T была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функция $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть по $\varepsilon > 0$, $\|x - \sum_{k=1}^{m} x_k\| < \varepsilon$, где $T(g)x_k = \chi_k(g)x_k$ для всех $g \in G$ и $k=1, \ldots, m$, тогда $\left|\varphi(T(g)x) - \sum_{k=1}^{m} \varphi(x_k)\chi_k(g)\right| \leqslant \varepsilon\|\varphi\|$, откуда и следует, что функция $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$.

Достаточность. Пусть для каждого элемента $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функция $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$. Сопоставим функции $\varphi(T(g)x)$ ее ряд Фурье в пространстве $B^2(G)$, т. е. $\varphi(T(g)x) \backsim \sum_{\chi \in \hat{G}} c_\chi \cdot \chi(g)$, где $c_\chi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \times$
$$\times \int_{H_n} \varphi(T(g)x)\overline{\chi(g)}\, d\lambda(g).$$

В силу слабой полноты пространства X существует слабый предел
$$P_\chi x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(g)x\overline{\chi(g)}\, d\lambda(g).$$

Покажем, что $i)$ $P_{\chi_\alpha} \cdot P_{\chi_\beta} = \delta_{\alpha,\beta} P_{\chi_\alpha}$;

$ii)$ $T \cdot P_\chi x = \chi P_\chi x$.

Так как T — изометрическое представление группы G, то $\|P_\chi\| \leqslant 1$. Проверим свойство $i)$. Пусть $x \in X$, тогда
$$P_{\chi_\alpha} \cdot P_{\chi_\beta} x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(g)[P_{\chi_\beta} x]\overline{\chi_\alpha(g)}\, d\lambda(g) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(g)x\overline{\chi_\alpha(g)}\, d\lambda(g) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \chi_\alpha(h)\overline{\chi_\beta(h)}\, d\lambda(h) =$$
$$= \langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle_b \cdot P_{\chi_\alpha} x = \delta_{\alpha,\beta} P_{\chi_\alpha} x.$$

Покажем выполнение свойства $ii)$. Для $g \in G$ имеем
$$T(g)P_\chi x = T(g)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(h)x\overline{\chi(h)}\, d\lambda(h) =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(H_n)}\int_{H_n} T(h)x\overline{\chi(h-g)}d\lambda(h)=\chi(g)P_\chi x.$$

Таким образом, вектор $x(\chi)=P_\chi x$ является собственным вектором представления T, ибо $Tx(\chi)=TP_\chi x=\chi P_\chi x=\chi x(\chi)$, где $\chi\in\hat{G}$. Пусть теперь $\varphi\in X^*$—такой функционал, что $\varphi(x(\chi))=0$, тогда $c_\chi=\varphi(P_\chi x)=$ $=\varphi(x(\chi))=0$. Так как унитарные характеры $\chi\in\hat{G}$ образуют ортонормированный базис в $B^2(G)$, то $\varphi(T(g)x)\equiv 0$, откуда $\varphi(x)=0$ и значит $\varphi=0$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что для изометрического представления локально компактной группы в рефлексивном пространстве аналогичный результат получен Ю. И. Любичем (см. [6]) исходя из других соображений.

Если использовать вышеуказанную теорему 1 применительно к конечному семейству $\{A_1, \ldots, A_N\}$ коммутирующих нормальных операторов из $B(X)$, то получается следующая

Теорема 2. *Пусть X—слабо полное банахово пространство и $\{A_1, \ldots, A_N\}$—конечное семейство коммутирующих, нормальных операторов из $B(X)$. Тогда для того чтобы система собственных векторов семейства $\{A_1, \ldots, A_N\}$ была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi[e^{i(<\bar{s},\bar{K}>)-<\bar{t},\bar{H}>}x]\in C_{AP}(\mathrm{R}^{2N})$, где $<\bar{s},\bar{K}>=\sum_{p=1}^{N}s_pK_p$, $<\bar{t},\bar{H}>=$ $\sum_{p=1}^{N}t_pH_p$; $H_p=\frac{A_p+A_p^+}{2}$, $K_p=\frac{A_p-A_p^+}{2i}$; $p=1, \ldots, N$.*

В случае, когда при каждом $p=1, \ldots, N$, $A_p=A_p^+$, получается эрмитов вариант теоремы 2.

Рассмотрим случай неограниченных операторов. Пусть A—линейный оператор, заданный на линейном многообразии $D(A)\subset X$. Оператор A назовем нормально-корректным (н-корректным) (см. [4]), если:

1) A—замкнутый оператор и существует замкнутый линейный оператор A^+ такой, что $D=D(A)\cap D(A^+)$ плотно в X и $AA^+x=A^+Ax$ для каждого $x\in D$;

2) задача
$$\begin{cases} s\dfrac{\partial x(s,t)}{\partial s}+t\dfrac{\partial x(s,t)}{\partial t}=i(sK-tH)x(s,t)\\ x(0,0)=x_0,\quad -\infty<s,\ t<\infty\end{cases}$$

при любом $x_0\in D$ имеет единственное решение $x(s, t)$ в классе сильно дифференцируемых вектор-функций, где $H=\frac{A+A^+}{2}$, $K=\frac{A-A^+}{2i}$;

3) операторы $V(s, t)$, определяемые соотношением $x(s, t)=$ $=V(s, t)x_0$, удовлетворяют условию $\|V(s, t)\|=1$ при каждом $(s, t)\in\mathrm{R}^2$. Нетрудно видеть, что если оператор A н-корректен, то семейство операторов $\{V(s, t)\}_{(s,t)\in R^2}$—сильно непрерывная двухпараметрическая группа, для которой инфинетизимальными производящими операторами являются iK и $-iH$.

Как и выше, из теоремы 1 выводится следующая

Теорема 3. *Для того чтобы система собственных векторов н-корректного оператора A была полна в слабо полном банаховом пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функция $\varphi[V(s, t)x] \in C_{AP}(\mathbf{R}^2)$.*

Отметим, что аналогичную теорему можно получить для конечного семейства коммутирующих н-корректных операторов.

Ереванский государственный университет

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

Համարյա-պարբերականությունը նորմալ օպերատորների սպեկտրալ անալիզում

Դիցուք G—լոկալ կոմպակտ, σ-կոմպակտ աբելյան խումբ է և $C_{AP}(G)$ բոլոր հավասարաչափ համարյա-պարբերական ֆունկցիաների բանախյան հանրահաշիվն է, G-խմբի վրա որոշված, sup-նորմայի նկատմամբ։ Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ արդյունքը։

Թեորեմ։ Դիցուք X-թույլ լրիվ Բանախի տարածություն է, G-լոկալ կոմպակտ, σ-կոմպակտ աբելյան խումբ է և T-ն այդ խմբի իզոմետրիկ ներկայացումն է X տարածությունում։

Այդ դեպքում, որպեսզի T ներկայացման սեփական վեկտորների ընտանիքը կազմի լրիվ սիստեմ X տարածությունում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $x \in X$ և $\varphi \in X^*$, $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$.

Այս թեորեմը թույլ է տալիս ստանալ Յու. Ի. Լյուբիչի [3], [4] արդյունքների ընդհանրացումները։ Մասնավորապես $\{A_1, \ldots, A_N\}$ նորմալ, կոմպակտ, միմյանց հետ տեղափոխելի օպերատորների համակարգի համար ստացվում է սեփական վեկտորների լրիվության չափանիշ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Э. Кацнельсон*, Сб. мат. исследований, Кишинев, т. 5, № 3 (1970). [2] *Е. А. Горин*, Вестн. Харьковского ун-та, № 205, прикл математика и механика, вып. 45 (1980). [3] *Ю. И. Любич*, ДАН СССР, т. 132, № 3 (1960). [4] *Ю. И. Любич*, УМН, т. 18, вып. I (109) (1963). [5] *Э. Хьюитт, К. Росс*, Абстрактный гармонический анализ, т. I, Наука, М., 1975. [6] *Ю. И. Любич*, Введение в теорию банаховых представлений групп, Вища школа, Харьков, 1985.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

Л. А. Галстян, В. К. Дубовой

О вырожденной проблеме Шура

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/VI 1985)

В работах [1–4] решение матричной проблемы Шура привело к построению важных объектов j-теории: элементарного кратного множителя с одной стороны и конечного произведения двучленных множителей с другой. При этом в случае невырождения информационного блока основного матричного неравенства их совпадение являлось следствием их полной адекватности данной задаче.

Ситуация усложняется при рассмотрении вырожденных задач Шура. Здесь однозначности построения решающего задачу элементарного кратного множителя нет [4]. Нет однозначности также при построении двучленных множителей в процессе пошагового решения задачи.

В настоящей заметке устанавливается взаимосвязь между такими задачами и конечными произведениями двучленных множителей неполного ранга. Выясняется также структура элементарных кратных множителей, правильному разложению которых на двучленные множители соответствует пошаговый процесс.

Все необходимые понятия и обозначения содержатся в [3–4].

1°. Пошаговое решение вырожденной задачи Шура

$$\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\ldots+c_n\zeta^n+\ldots,\ \ker(I-C_nC_n^*)\neq\{0\},$$

приводит к построению конечного произведения двучленных множителей неполного ранга

$$B_n(\zeta)=b_0(\zeta)\cdot b_1(\zeta)\cdot\ldots\cdot b_n(\zeta),$$
$$b_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ c_0^{(k)*}\end{bmatrix}(P_k-\widetilde{c}_0^{(k)}\widetilde{c}_0^{(k)*})^{[-1]}[I,\ c_0^{(k)}]\widetilde{j}, \tag{1}$$

в котором P_k—ортопроекторы на дополнения к ядрам $\Lambda_0^{(k)}=\ker(I-c_0^{(k)}c_0^{(k)*})$, причем

$$N_0^{(0)}=\ker(I-c_0c_0^*)\subset N_0^{(1)}\subset\ldots\subset N_0^{(n)}\subset E_p,$$
$$\widetilde{c}_0^{(k)}=P_kc_0^{(k)},\quad \widetilde{j}=\begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix},$$

а матрицы $c_0^{(k)}$—известные параметры Шура.

Одновременно строятся унитарные матрицы $U_0, U_1, \ldots, U_n$, действующие в подпространствах $M_0^{(k)}=\ker(I-c_0^{(k)*}c_0^{(k)})\subset E_q$ по правилу

$$U_k|_{M_0^{(k)}}=c_0^{(k)}|_{M_0^{(k)}},\quad U_k=\begin{bmatrix} u_0 & & & \\ & u_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_k \end{bmatrix},\quad k=0,1,\ldots,n,$$

после чего общее решение поставленной задачи записывается в виде дробно-линейного преобразования $\theta(\zeta)=B_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}$, с параметром $\omega(\zeta)$, имеющим структуру $\omega(\zeta)=\begin{vmatrix} U_n & 0 \\ 0 & \bar{\omega}(\zeta) \end{vmatrix}$, где $\bar{\omega}(\zeta)$—произвольная голоморфная сжимающая матрица-функция подходящей размерности.

Важно отметить, что здесь выбор дополнений к ядрам $N_0^{(k)}$, на которые проектируют ортопроекторы P_k, совершенно произволен. При их изменении результат дробно-линейного преобразования соответствующего параметра не меняется.

Последнее, в частности, можно объяснить тем, что задание параметров Шура $c_0^{(0)}=c_0, c_0^{(1)}, \ldots, c_0^{(n)}$, для которых ядра $N_0^{(k)}$ монотонно „расширяются", однозначно определяет задачу.

Добавим, что при ортогональных разложениях пространств E_p и E_q:

$$E_p=N_0^{(k)}\oplus N_1^{(k)},\quad E_q=M_0^{(k)}\oplus M_1^{(k)},\quad k=0,1,\ldots,n,$$

$$N_0^{(k)}=N_0^{(0)}\oplus(N_0^{(1)}\ominus N_0^{(0)})\oplus\ldots\oplus(N_0^{(k)}\ominus N_0^{(k-1)}),$$

$$M_0^{(k)}=M_0^{(0)}\oplus(M_0^{(1)}\ominus M_0^{(0)})\oplus\ldots\oplus(M_0^{(k)}\ominus M_0^{(k-1)})$$

параметры $c_0^{(k)}$ имеют блочно-диагональный вид

$$c_0^{(k)}=\begin{vmatrix} U_k & 0 \\ 0 & \bar{c}_0^{(k)} \end{vmatrix},\quad k=0,1,\ldots,n,$$

где $U_0, U_1, \ldots, U_n$—те же, что и выше, а $\bar{c}_0^{(0)}, \bar{c}_0^{(1)}, \ldots, \bar{c}_0^{(n)}$—строгие сжатия.

Справедливо также и обратное утверждение:

Т е о р е м а. *Пусть*

$$B_n(\zeta)=\overrightarrow{\Pi}_{k=0}^{n} b_k(\zeta),$$
$$b_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ c^{(k)*} \end{bmatrix}(P_k-c^{(k)}c^{(k)*})^{[-1]}[I, c^{(k)}]\tilde{j} \tag{2}$$

—произвольное конечное произведение параметризованных двучленных множителей неполного ранга.

Тогда, если выполняются неравенства $P_0\geqslant P_1\geqslant\ldots\geqslant P_n$, $\operatorname{rang} P_n\geqslant p-q$, *то существует проблема Шура, пошаговое решение которой приводит к построению произведения* (2).

2°. Ясно, что произведение (1) является элементарным кратным множителем неполного ранга.

Выясним структуру подпространства типа K, соответствующего этому произведению. Целесообразно здесь исходить из последнего множителя $b_n(\zeta)$. Ему, как легко видеть, соответствует подпространство $L_n=P_nE_p=\Delta_{P_n}$.

Рассмотрим теперь произведение двух множителей $B^1(\zeta)=b_{n-1}(\zeta)\times$

$\times b_n(\zeta)$. Имеем $\theta^{(n-1)}(\zeta)=b_{n-1}(\zeta)\, b_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}=b_{n-1}(\zeta)\{\theta^{(n)}(\zeta)\}=c_0^{(n-1)}+$ $+c_1^{(n-1)}\zeta+\ldots$, где $\theta^{(n)}(\zeta)=b_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}=c_0^{(n)}+\ldots$

Отсюда получаем для $B^1(\zeta)$ следующее подпространство типа K: $L_{n-1}=\Delta P_{n-1}\oplus T_n^{[-1]*}\Delta P_n$, где T_n—матрица, связывающая тейлоровые коэффициенты параметра с коэффициентами результата дробно-линейного преобразования.

Очевидно, проектор на L_{n-1} имеет вид

$\mathcal{P}^{(n-1)}=\left|\begin{array}{c|c} P_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}\end{array}\right|$, где Q_{n-1}—проектор на подпространство $T_n^{[-1]*}\Delta P_n$.

Продолжение этого процесса приводит к следующим рекуррентным построениям:

$$L_0=\Delta P_0\oplus T_1^{[-1]*}L_1,\quad L_1=\Delta P_1\oplus T_2^{[-1]*}L_2,\ \ldots,\ L_n=\Delta P_n. \qquad (3)$$

Ясно, что L_0—подпространство типа K для всего произведения $B_n(\zeta)$. Ортопроектор на него имеет вид

$$\mathcal{P}^{(0)}=\left|\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & Q_0\end{array}\right|,$$

в котором Q_0—ортопроектор на подпространство $T_1^{[-1]*}L_1$.

Обратно, если $B_n(\zeta)$ произвольный элементарный кратный множитель неполного ранга, параметризованный относительно подпространства типа K, имеющего структуру (3), то правильное отщепление слева от него двучленных множителей приводит к произведению Бляшке—Потапова, соответствующему пошаговому решению некоторой задачи Шура.

Заметим, что даже в той простой ситуации, когда проектор на подпространство типа K имеет блочно-диагональную структуру, правильное отщепление двучленных множителей не всегда приводит к пошаговому процессу.

Ереванский государственный университет
Харьковский государственный университет

Լ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Վ. Կ. ԴՈՒԲՈՎՈՅ

Շուրի վերասերված խնդրի մասին

Հոդվածը նվիրված է Շուրի վերասերված խնդրի և Բլյաշկե-Պոտապովի վերջավոր արտադրյալների փոխադարձ համապատասխանության հարցերին։ Բերված են բավարար պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում տվյալ վերջավոր արտադրյալին համապատասխանող Շուրի խնդիրը միակն է։

Պարզված է այն K տիպի ենթատարածությունների ստրուկտուրան, որոնց համապատասխանող տարրական բազմապատիկ արտադրիչների վերլուծությունը երկանդամ արտադրիչների բերում է Շուրի խնդրի քայլ առ քայլ լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Галстян*, ДАН АрмССР, т. 63, № 1 (1976). [2] *Л. А. Галстян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 3 (1977). [3] *В. К. Дубовой*, Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов, Киев, Наукова думка, 1983. [4] *В. К. Дубовой*, Теория функций, функц. анализ и их прил. ХГУ, вып. 42 (1984).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 519.853

МАТЕМАТИКА

Э. В. Карслян, Ф. П. Григорян, В. Г. Александрян

Одна задача нелинейного программирования в комплексной плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/IX 1985)

В приложениях, в частности при исследовании многомерных систем автоматического управления, возникает следующая задача. Дана невырожденная комплексная матрица $C=A+iB$, где $A=(a_{kj})_{n\times n}$ и $B=(b_{kj})_{n\times n}$ соответственно действительная и мнимая части матрицы $C=(c_{kj})_{n\times n}$. Требуется найти матрицу $Z=X+iY$, $Z=(z_{kj})_{n\times n}$, $X=(x_{kj})_{n\times n}$, $Y=(y_{kj})_{n\times n}$, обладающую наименьшей нормой, такую, чтобы $\det(Z-C)=0$.

Здесь под нормой понимается число

$$\|Z\|=[\sum_{k,j}(x_{kj}^2+y_{kj}^2)]^{1/2}=[\operatorname{tr}(ZZ^*)]^{1/2} \qquad (1)$$

(где tr означает след матрицы).

В работе [1] решена аналогичная задача для вещественных матриц, связанная с задачей отыскания радиуса устойчивости произвольного конечномерного базиса в метрике чебышевского типа.

Решение задачи. Сформулированная задача записывается в виде обычной задачи на условный минимум

$$\min\|Z\|, \quad \det(Z-C)=0. \qquad (2)$$

Пусть $\det(Z-C)=U+iV$, $U=\operatorname{Re}\det|Z-C|$, $V=\operatorname{Im}\det|Z-C|$. Тогда (2) приводится к следующей задаче:

$$\min\|Z\|, \quad U=0, \quad V=0. \qquad (3)$$

Составим функцию Лагранжа: $\Lambda=\frac{1}{2}\|Z\|^2-\mu_1 U-\mu_2 V$, где μ_1, μ_2—действительные числа. Приравнивая частные производные Λ по x_{kj} и по y_{kj} $(k, j=1, \ldots, n)$ к нулю, получим

$$\left\{\begin{array}{l} x_{kj}=\mu_1\dfrac{\partial u}{\partial x_{kj}}+\mu_2\dfrac{\partial v}{\partial x_{kj}}, \\ y_{kj}=\mu_1\dfrac{\partial u}{\partial y_{kj}}+\mu_2\dfrac{\partial v}{\partial y_{kj}}. \\ \quad u=0, \ v=0 \end{array}\right. \qquad (4)$$

Для решения системы (4) понадобится известная вспомогательная формула

$$\sum_{j=1}^{n} m_{kj}M_{\alpha j}=\delta_{k\alpha}\det M, \tag{5}$$

где $M_{\alpha j}$—алгебраическое дополнение $m_{\alpha j}$ в матрице $M=(m_{\alpha j})$, а $\delta_{k\alpha}$—символ Кронекера. Применяя формулу (5) к определителю матрицы $(Z-C)$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} (z_{kj}-c_{kj})M_{\alpha j}=\delta_{k\alpha}\det(Z-C).$$

Пусть $M_{\alpha j}=U_{\alpha j}+iV_{\alpha j}$. Тогда последнее соотношение принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n}[(x_{kj}-a_{kj})+i(y_{kj}-b_{kj})](U_{\alpha j}+iv_{\alpha j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\{[(x_{kj}-a_{kj})U_{\alpha j}-(y_{kj}-b_{kj})V_{\alpha j}]+$$

$$+i[(y_{kj}-b_{kj})U_{\alpha j}+(x_{kj}-a_{kj})V_{\alpha j}]\}=\delta_{k\alpha}(U+iV).$$

Разделяя действительную и мнимую части в левой и правой частях полученного соотношения, имеем

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}[(x_{kj}-a_{kj})U_{\alpha j}-(y_{kj}-b_{kj})V_{\alpha j}]=\delta_{k\alpha}U,\\ \sum_{j=1}^{n}[(y_{kj}-b_{kj})U_{\alpha j}+(x_{kj}-a_{kj})V_{\alpha j}]=\delta_{k\alpha}V.\end{gathered} \tag{6}$$

Дифференцируя соотношение (6) при $k=\alpha$, получим

$$\begin{gathered}U_{\alpha j}=\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}=\frac{\partial V}{\partial y_{\alpha j}},\\ V_{\alpha j}=\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha j}}=-\frac{\partial U}{\partial y_{\alpha j}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Пользуясь (7) и (4), из (6) имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{kj}-a_{kj})\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}+(y_{kj}-b_{kj})\frac{\partial U}{\partial y_{\alpha j}}\right]=0; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{kj}-a_{kj})\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha j}}+(y_{kj}-b_{kj})\frac{\partial V}{\partial y_{\alpha j}}\right]=0. \tag{9}$$

Умножая (8) на μ_1, а (9) на μ_2 и суммируя полученные соотношения, с учетом (4) получим

$$\sum_{j=1}^{n}[(x_{kj}-a_{kj})x_{\alpha j}+(y_{kj}-b_{kj})y_{\alpha j}]=0.$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$(X-A)X^T+(Y-B)Y^T=0, \tag{10}$$

где T означает транспонированную матрицу. Теперь, умножая (8) на μ_2, а (9) на $(-\mu_1)$, суммируя полученные соотношения и учитывая (4) и (7), получим

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{kj}-a_{kj})y_{sj}-(y_{kj}-b_{kj})x_{sj}=0.$$

Представив последнее уравнение в матричной форме, имеем

$$-(X-A)Y^T+(Y-B)X^T=0. \tag{11}$$

Легко видеть. что левые части соотношений (10) и (11) являются соответственно действительной и мнимой частями матрицы $(Z-C)\overline{Z}_T$ (здесь «—» означает комплексно-сопряженную матрицу). Отсюда следует, что

$$(Z-C)Z^*=0, \tag{12}$$

где $Z^*=\overline{Z}^T$.

Сделаем замену переменной в уравнении (12):

$$C\eta=Z, \quad Z^*=\eta^*C^*. \tag{13}$$

Запишем (12) в следующем виде: $ZZ^*=CZ^*$.
Отсюда, используя (13), получим $C\eta\eta^*C^*=C\eta^*C^*$, т. е.

$$\eta\eta^*=\eta^*, \tag{14}$$

откуда имеем $\eta=(\eta^*)^*=\eta\eta^*$.

Таким образом $$\eta=\eta^*. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что η и $\eta\eta^*$—эрмитовы матрицы. Очевидно, что η и $\eta\eta^*$ приводятся к диагональному виду одной и той же унитарной матрицей S, $S^*=S^{-1}$.

Пусть теперь

$$W=S^*\eta S, \quad \eta=SWS^*, \tag{16}$$

где W—диагональная матрица.
Имеем $W=S^*\eta S=S^*\eta\eta^*S=S^*\eta^2S$, $\quad W^2=S^*\eta SS^*\eta S=S^*\eta^2S$.
Таким образом $W=W^2$, т. е.

$$W_{jj}=W_{jj}^2. \tag{17}$$

Из (13) и (16) следует $Z=CSWS^*$, $Z^*=SW^*S^*C^*$ и

$$ZZ^*=CSWS^*C^*. \tag{18}$$

Согласно (1) и (18) имеем

$$\|Z\|=[\mathrm{tr}(CSWS^*C^*)]^{1/2}=\{\mathrm{tr}[CSW(CS)^*]\}^{1/2}. \tag{19}$$

Пусть $CS=(d_{jk})$, $(CS)^*=(\overline{d}_{kj})$, $W=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Тогда (19) принимает вид

$$\|Z\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n}|d_{rj}|^2\right)\lambda_j. \tag{20}$$

Из (17) имеем $W_{jj}\in\{0; 1\}$. Предположим, что из диагональных элементов матрицы W отличными от нуля являются элементы λ_{j_1}, $\lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_m}$.

Тогда из (20) получаем, что $\|Z\|^2=\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{r=1}^{n}|d_{rj_l}|^2$. Отсюда следует, что какова бы ни была эрмитова матрица η, величину нормы $\|Z\|$ минимизирует такая матрица W, которая имеет лишь один отличный от нуля элемент. Предположим, что этим элементом является W_{kk}. Тогда последнее соотношение принимает следующий вид:

$$\|Z\|^2=\sum_{r=1}^{n}|d_{rk}|^2. \tag{21}$$

Обозначим

$$D_k=(d_{1k}, d_{2k}, \ldots, d_{nk})^T, \quad S=(\sigma_{rj})=(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n); \ \sigma_{rj}=\sigma'_{rj}+i\sigma''_{rj};$$

$$\sigma^j=(\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \ldots, \sigma_{nj})^T=(\sigma'_{1j}, \sigma'_{2j}, \ldots, \sigma'_{nj})^T+i(\sigma''_{1j}, \sigma''_{2j}, \ldots, \sigma''_{nj})^T=\beta^j+i\gamma^j.$$

Тогда легко видеть, что $D_k=C\sigma^k$. Следовательно,

$$\|Z\|^2=\|D_k\|^2=\|C\sigma^k\|^2=(C\sigma^k)^*(C\sigma^k). \tag{22}$$

Таким образом, $\|Z\|=(\sigma^k)^*C^*C\sigma^k$. Преобразуем норму (21) к виду, который понадобится нам в дальнейшем:

$$\|Z\|^2=\sum_{r=1}^{n}|d_{rk}|^2=\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\sum_{r=1}^{n}C_{\alpha r}\sigma_{rk}\right|^2=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\} \tag{23}$$

Таким образом, задача вновь свелась к задаче на условный экстремум:

$$\min\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\},$$

$$\sum_{r=1}^{n}(\sigma'^2_{rk}+\sigma''^2_{rk})=1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Lambda_1=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\}-$$

$$-\nu\left[\sum_{r=1}^{n}(\sigma'^2_{rk}+\sigma''^2_{rk})-1\right].$$

Здесь ν—действительное число.

Дифференцируя Λ_1 и приравнивая к нулю, имеем

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\sigma'_{mk}}=2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[a_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})+b_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})]-2\nu\sigma'_{mk}=0;$$

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\sigma''_{mk}}=2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[-b_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})+a_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})]-2\nu\sigma''_{mk}=0.$$

Представляя полученные соотношения в матричной форме, имеем

$$(A^TA+B^TB)\beta^k+(B^TA-A^TB)\gamma^k=\nu\beta^k; \tag{24}$$

$$(A^TB-B^TA)\beta^k+(A^TA+B^TB)\gamma^k=\nu\gamma^k. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает уравнение

$$(C^*C-\nu E)\sigma^k=0, \tag{26}$$

где E—единичная матрица.

Итак, решение задачи достигается, если σ^k—нормированный собственный вектор, а ν—соответствующее собственное значение матрицы C^*C.

Теперь определим минимальное значение $\|Z\|$. Из (26) имеем $C^*C\sigma^k=\nu\sigma^k$ или $(\sigma^k)^*C^*C\sigma^k=\nu$. Следовательно, в силу (22) получаем $\|Z\|=\sqrt{\nu}$. Таким образом, $Z=CSWS^*$, где столбцы S—собственные векторы матрицы C^*C, соответствующие ее собственным значениям $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$; W—диагональная матрица, имеющая всего один ненулевой элемент w_{kk}, где k определяется из условия $\nu_k=\min\limits_j \nu_j$ и $\min\|Z\|=\sqrt{\nu_k}$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Է. Վ. ԿԱՐՍԼՅԱՆ, Յ. Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Վ. Գ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Կոմպլեքսային հարթության մեջ ոչ գծային ծրագրավորման մեկ խնդիր

Կիրառման խնդիրներում, մասնավորապես բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգերի հետազոտման ժամանակ, ծագում է հետևյալ խնդիրը։ Տրված է չվերասերվող կոմպլեքսային մատրից $C=A+iB$, *որտեղ* A-*ն և* B-*ն համապատասխանաբար* C *մատրիցայի իրական և կեղծ մասերն են։*

Անհրաժեշտ է գտնել Z *մատրիցան, որը* $\det(Z-C)=0$ *պայմանի դեպքում ունի ամենափոքր նորմա։*

Նման խնդիր լուծված է ([1]*) աշխատանքում իրական մատրիցաների համար, կապված չեբիշևյան տիպի մետրիկայում կամայական վերջնաչափ բազիսի կայունության շառավղի փնտրման խնդրի հետ։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. В. Гаврушенко, В. Н. Прупис*, Ж.В.М. и матфиз., т. 21, № 5, 1312—1315 (1981). [2] *Р. Ганнинг, Х. Росси*, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., Мир, 1969. [3] *П. Ланкастер*, Теория матриц, М., Наука, 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

В. А. Явряи

О спектральном разложении однопарного интегрального оператора

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 6/IX 1985)

1. В пространстве $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ рассмотрим оператор L, задаваемый формулой $Ly=-y''+q(x)y$, где $q(x)$ вещественная локально суммируемая функция, и определенный на финитных функциях $y(x)$, удовлетворяющих в нуле условию $y'(0)-hy(0)=0$, $\operatorname{Im}h=0$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ решения уравнения $-y''+q(x)y=0$ и $\varphi'(0)-h\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\psi(0)-\varphi(0)\psi'(0)=1$. Тогда обратимый оператор $A=L^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром

$$K(x,s)=\begin{cases}\varphi(x)\psi(s), & x\leqslant s\\ \varphi(s)\psi(x), & x\geqslant s\end{cases}, \tag{1}$$

который определен на тех финитных функциях $f(x)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx=0. \tag{2}$$

В пространстве $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ мы будем изучать оператор A в предположении, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольные локально квадратично интегрируемые вещественные функции, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L^2(0,a)$ для любого a и

$$\int_0^\infty (\varphi^2(x)+\psi^2(x))dx=\infty. \tag{3}$$

Для простоты предполагаем также, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на множестве положительной меры не обращаются в нуль одновременно.

Условие (3) соответствует случаю точки Вейля в теории операторов Штурма—Лиувилля. В настоящей работе для оператора A строится теория, аналогичная спектральной теории операторов Штурма—Лиувилля на $L^2(0,\infty)$. В случае конечного интервала интегральные операторы с ядрами вида (1) рассматривались в монографии Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [1], где они назывались однопарными интегральными операторами.

Оператор A симметричен. Если $\varphi(x)\in\mathscr{L}^2(0,\infty)$, то его область определения неплотна и возможен случай, когда он не имеет замыкания.

Следуя ([2]), интервал (α, β) будем называть исключительным, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно-зависимы в этом интервале. Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ множество всех максимальных исключительных интервалов. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(x)\neq 0$ в интервале вида $(0, \beta)$ и что интервал вида $(\alpha, +\infty)$ не есть исключительный (в противном случае надо рассматривать пространства $\mathcal{L}^2(\beta, \infty)$ и $\mathcal{L}^2(0, \alpha)$).

Теорема 1. *Ортогональное дополнение $K(A)$ области значений оператора A состоит из функций $g(x)$, удовлетворяющих условиям:*

1) $g(x)=0$ *почти всюду на* $F=(0, \infty)\setminus\bigcup\limits_k(\alpha_k, \beta_k)$,

$$2) \quad \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} g(x)\varphi(x)dx=\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} g(x)\psi(x)dx=0.$$

Очевидно, что если $g(x)$ финитная функция и $g(x)\in K(A)$, то $g(x)$ принадлежит области определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A и $Ag=0$.

Следствие 1. *Для того чтобы существовал обратный оператор A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы отсутствовали исключительные интервалы.*

Следствие 2. *Замыкание H_0 области значений оператора A состоит из функций $g(x)$, произвольных на F и*

$$y(x)=\begin{cases} c_k\varphi(x), & x\in(\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x)\neq 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k), \\ c_k\psi(x), & x\in(\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x)\equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k). \end{cases}$$

Очевидно, что подпространство H_0 приводит оператор A. Обозначим через A_0 часть оператора A в подпространстве H_0: $A_0f=Af$, $f\in\mathfrak{D}(A)\cap H_0$. Область определения $\mathfrak{D}(A_0)$ оператора A_0 плотна в H_0.

Теорема 2. *Замыкание $\overline{A_0^{-1}}$ оператора A_0^{-1} есть самосопряженный оператор.*

Отметим, что $g\in\mathfrak{D}((A_0^{-1})^*)=\mathfrak{D}(\overline{A_0^{-1}})$ означает, что существует такая постоянная c и функция $g^*(x)\in H_0$, что $g(x)=c\varphi(x)-\int\limits_0^x V(x, s)g^*(s)ds$, где $V(x, s)=\varphi(x)\psi(s)-\varphi(s)\psi(x)$. При этом очевидно, что c и $g^*(x)$ определяются единственным образом и $(A^{-1})^*g=g^*$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ есть решение интегрального уравнения Вольтерра $\varphi(x, \lambda)+\lambda\int\limits_0^x V(x, s)\varphi(s, \lambda)ds=\varphi(x)$. Обозначим через $\mathcal{L}_0$ множество финитных функций из H_0. Можно проверить, что уравнение $A_0^{-1}f-\lambda f=g\in\mathcal{L}_0$ ($\mathrm{Im}\lambda=0$) имеет решение в том и только том случае, когда $\Phi(g, \lambda)=0$, где $\Phi(g, \lambda)=\int\limits_0^\infty g(x)\varphi(x, \lambda)dx$. Таким образом, $\Phi(g, \lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ есть направляющий функционал для оператора A_0^{-1}; применяя метод направляющего функционала М. Г. Крейна, с учетом теоремы 2 получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Существует единственная неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ такая, что отображение*

$$U: g \to \Phi(g, \lambda), \quad g \in \mathcal{L}_0$$

есть изометрия из $\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{L}^2_\sigma$. Более того, продолжение U по непрерывности отображает H_0 на все пространство $\mathcal{L}^2_\sigma$. При этом оператор A_0 переходит в оператор умножения на $1/\lambda$ в пространстве $\mathcal{L}^2_\sigma$.

Теорема 3 в случае отсутствия исключительных интервалов и без указания единственности спектральной функции $\sigma(\lambda)$ другим путем установлена де Бранжем (см. ([2]), с. 49).

Если $f(x)$ финитная функция и $f(x) \in K(A)$, то $\Phi(f, \lambda)=0$ для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на подпространство $K(A)$. Легко видеть, что если $f(x)$ финитная функция, то $(Pf)(x)$ тоже будет финитной и $\Phi(Pf, \lambda)=0$. Следовательно, для финитных $f(x)$ имеем

$$\int_0^\infty |f(x)-(Pf)(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

2. Теперь мы хотим построить аналоги кругов Вейля для однопарного интегрального оператора.

В пространстве $\mathcal{L}^2(0, b)$ рассмотрим интегральные операторы $A(b, \tau)$ с ядрами

$$K(x, s, b, \tau)=\begin{cases} \varphi(x)(\psi(s)+\tau\varphi(s)), & x \leq s \\ \varphi(s)(\psi(x)+\tau\varphi(x)), & x \geq s \end{cases},$$

где τ — вещественный параметр, $-\infty<\tau<\infty$.

Эти операторы являются расширениями части оператора A, рассмотренного в подпространстве $\mathcal{L}^2(0, b)$.

Пусть $A_\lambda(b, \tau)$ Фредгольмова резольвента оператора $A(b, \tau)$: $(I-\lambda A(b, \tau))^{-1}=I+\lambda A_\lambda(b, \tau)$. Тогда можно показать, что $A_\lambda(b, \tau)$ интегральный оператор с однопарным ядром:

$$A_\lambda(x, s, b, \tau)=\begin{cases} \varphi(x, \lambda)(\psi(s, \lambda)+m(\lambda, b, \tau)\varphi(s, \lambda)), & x \leq s \\ \varphi(s, \lambda)(\psi(x, \lambda)+m(\lambda, b, \tau)\varphi(x, \lambda)), & x \geq s \end{cases} \quad (\operatorname{Im}\lambda>0),$$

где
$$m(\lambda, b, \tau)=(E_0\tau+E_1)(D_0\tau+D_1)^{-1}, \tag{4}$$

$$E_0=1+\lambda\int_0^b \psi(x, \lambda)\varphi(x)dx, \qquad E_1=\lambda\int_0^b \psi(x, \lambda)\psi(x)dx,$$

$$D_0=-\lambda\int_0^b \varphi(x, \lambda)\varphi(x)dx, \qquad D_1=1-\lambda\int_0^b \varphi(x, \lambda)\psi(x)dx,$$

а $\psi(x, \lambda)$ есть решение интегрального уравнения

$$\psi(x, \lambda)+\lambda\int_0^x V(x, s)\psi(s, \lambda)ds=\psi(x).$$

Дробно-линейное преобразование (4) переводит вещественную ось

$\mathrm{Im}\tau=0$ на некоторую окружность $C_b(\lambda)$. Можно показать, что эту окружность можно задавать также уравнением

$$\int_0^\infty |\psi(x, \lambda)+m\varphi(x, \lambda)|^2 dx=\frac{\mathrm{Im}\, m}{\mathrm{Im}\, \lambda} \qquad (\mathrm{Im}\, \lambda>0). \tag{5}$$

Круг, ограниченный окружностью $C_b(\lambda)$, обозначим через $K_b(\lambda)$. Очевидно, что $K_b(\lambda)$ определяется неравенством

$$\int_0^\infty |\psi(x, \lambda)+m\varphi(x, \lambda)|^2 dx\leqslant\frac{\mathrm{Im}\, m}{\mathrm{Im}\, \lambda}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при любом $b>0$ круги $K_b(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\,\gamma>0)$ лежат в верхней полуплоскост. Ясно также, что круги $K_b(\lambda)$ включены друг в друга, $K_{b'}(\lambda)\subset K_b(\lambda)$ при $b<b'$. Можно показать, что радиус круга $K_b(\lambda)$ задается формулой

$$r_b(\lambda)=1/2\mathrm{Im}\,\lambda\int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \qquad (\mathrm{Im}\,\lambda>0). \tag{7}$$

Уравнение окружности $C_b(\lambda)$ (так называемая окружность Вейля) в форме (4) в случае оператора Штурма—Лиувилля установлено М. Г. Крейном ([3]), а (5), (6) и (7) известные формулы Вейля.

Так как $m(\lambda, b, \tau)$ непрерывно зависит от b, $b\geqslant 0$ и $m(\lambda, 0, \tau)=\tau$, то легко видеть, что $m(\lambda, b, \tau)$ при любом $b>0$, $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\tau\geqslant 0$ в круг $K_b(\lambda)$.

Теорема 4. *Существует функция $\Omega(\lambda)$, притом единственная, такая, что*

$$\psi(x, \lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(x, \lambda)\in\mathscr{L}^2(0, \infty) \qquad (\mathrm{Im}\,\lambda>0).$$

Ядро $R(x, s, \lambda)$ резольвенты оператора A_0^{-1} имеет вид:

$$R(x, s, \lambda)=\begin{cases}\varphi(x, \lambda)(\psi(s, \lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(s, \lambda)), & x\leqslant s\\ \varphi(s, \lambda)(\psi(x, \lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(x, \lambda)), & x\geqslant s\end{cases}. \tag{8}$$

Правая часть (8) есть также ядро замыкания фредгольмовой резольвенты оператора A (хотя замыкание A не всегда существует). Так как $r_b(\lambda)\to 0$ при $b\to+\infty$, то $\Omega(\lambda)=\lim\limits_{b\to\infty} m(\lambda, b, \tau)$ и, следовательно, $\Omega(\lambda)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ функция и отображает верхнюю полуплоскость на свою часть. Из (8) следует, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ оператора A дает представление $\Omega(\lambda)=\alpha+$
$+\beta\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{1}{1+t^2}\right)d\sigma(t)$, где $\beta\geqslant 0$, α—вещественно.

Отметим, что теорему 3 можно вывести также из теоремы 4. Теперь приведем оценку спектральной функции оператора A, которая аналогична случаю оператора Штурма—Лиувилля.

Теорема 5. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[0, b]$, $\varphi(0)\neq 0$ и отношение $\psi(x)/\varphi(x)$ убывающая* *функция на* $[0, b]$. *Тогда спектральная функция* $\sigma(\lambda)$ *оператора* A *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|} < +\infty.$$

Для доказательства этой теоремы мы сначала показываем, что оператор $A(b, \tau)$ при некотором τ положителен, а функция $\varphi(x, \lambda)$ при любом $x < b$ является целой функцией λ не более половинного порядка. Отсюда получаем оценку спектральной функции оператора $A(b, \tau)$, а с помощью формулы (6) эта же оценка переносится на функцию $\sigma(\lambda)$.

Армянский сельскохозяйственный институт

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ

Միազույգ ինտեգրալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է (1) բանաձևով սահմանված A *օպերատորը, որը որոշված է (2) պայմանին բավարարող և* $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ *տարածության պատկանող ֆունկցիաների վրա։*

Ապացուցված է, որ A *օպերատորը ինքնահամալուծ է (թեորեմ 2) և ստացված է նրա սպեկտրալ վերլուծությունը (թեորեմ 3)։ Ստացված է սպեկտրալ ֆունկցիայի գնահատականը (թեորեմ 5), որը Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի դեպքի անալոգն է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн*, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания систем, ГИТТЛ, М—Л. 1950. [2] *De Branges Louis*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 105, p. 43—83 (1962). [3] *М. Г. Крейн*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 16, с. 293—324 (1952).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

Об оценивании функционалов от спектральной плотности, имеющей нули

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 22/X 1985)

1. Задача об асимптотически эффективном непараметрическом оценивании функционалов от спектральной плотности гауссовской стационарной последовательности рассматривалась в работе И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского ([1]). В этой работе найдены нижние границы для точности непараметрических оценок, а также построены асимптотически эффективные непараметрические оценки для линейных и некоторых нелинейных, но достаточно гладких функционалов от спектральной плотности.

Однако в работе ([1]) все основные результаты получены в случае, когда спектральная плотность равномерно отделена от нуля.

Цель настоящей заметки—сообщить о некоторых обобщениях результатов работы ([1]) на случай, когда спектральная плотность имеет нули.

2. Пусть x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$—гауссовская стационарная последовательность со средним нуль $(Ex_t=0)$ и спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Предположим, что с. п. $f(\lambda)$ неизвестна, но известно, что она принадлежит множеству F спектральных плотностей, удовлетворяющему следующим условиям:

C_1 Равномерно по $f \in F$ $\sup \frac{1}{|I|^2} \int_I f(\lambda) d\lambda \int_I f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty$, где sup берется по отрезкам $I \subset [-\pi, \pi]$, $|I|$—длина отрезка I.

C_2. Равномерно по $f \in F$ $\sum_{|k|>n} |a_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$;

C_3. Равномерно по $f \in F$ $\sum_{|k|>n} |c_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$, где $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$—коэффициенты Фурье функций $\ln f(\lambda)$ и $f(\lambda)$ соответственно.

Пусть $\varphi(\cdot)$ известный функционал, определенный на пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Мы хотим оценить значение функционала φ в точке f по n последовательным наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$ над последовательностью x_t.

Предположим, что функционал φ дифференцируем в смысле Гато с производной $\mathrm{grad}\varphi(f)$, удовлетворяющей следующим условиям:

B_1. Равномерно по $f \in F$ $\|f \mathrm{grad}\varphi(f)\| < \infty$, где $\|\cdot\|$—норма в пространстве L^2.

B_2. Равномерно по $f \in F$ $\sum_{|k|>n} |b_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$, где $\{b_k\}$— коэффициенты Фурье функции $\mathrm{grad}\varphi(f)(\lambda)$.

Обозначим через Φ_n класс всех оценок функционала $\varphi(f)$, построенных по наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$, и пусть W—это класс всех симметричных, неубывающих функций потерь, таких, что $w(0)=0$, $w \in W$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.1 работы ([1]) и дает минимаксную нижнюю границу для риска всевозможных оценок функционала $\varphi(g)$ в некоторой окрестности точки f.

Теорема 1. *Пусть множество F и функционал φ удовлетворяют условиям C_1—C_3, B_1 и B_2. Тогда для всех $w \in W$*

$$\Delta \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \inf_{\varphi_n \in \Phi_n} \sup_{\|g-f\|<\delta} E_g\{w(\sqrt{n}(\varphi_n - \varphi(g)))\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\sqrt{2\pi} \| f \mathrm{grad}\varphi(f) \| u) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \qquad (1)$$

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на нижеприводимую лемму 1.

Введем в рассмотрение параметрическое семейство спектральных плотностей $f_h(\lambda)$:

$$f_h(\lambda) = f(\lambda)(1 + h\psi(\lambda)), \qquad (2)$$

где $\psi(\lambda) \in L^2$, а $h \in R^1$ такое, что $|h|$ достаточно мала.

Обозначим через $P_{n,h}$ распределение вектора $X = (x_1, \ldots, x_n)'$.

Лемма 1. *Пусть с. п. $f \in F$ и пусть функция $\psi(\lambda)$ из (2) удовлетворяет условию $\sum_{|k|>n} |r_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$, где $\{r_k\}$—коэффициенты Фурье функции $r(\lambda) = \dfrac{\psi(\lambda)}{f(\lambda)}$. Тогда семейство распределений $\{P_{n,h}\}$ при $n \to \infty$ удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности в точке $h=0$ с информацией Фишера $J = \|\psi\|^2$.*

3. Теперь рассмотрим линейный функционал $T(f)$:

$$T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) b(\lambda) d\lambda. \qquad (3)$$

Естественной оценкой для функционала $T(f)$ является функция $\hat{T}_n$:

$$\hat{T}_n = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\lambda) b(\lambda) d\lambda, \qquad (4)$$

где $I_n(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi n} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j e^{-i\lambda j} \right|^2$ —периодограмма последовательности x_t.

Обозначим через F_1 множество всех спектральных плотностей, удовлетворяющих условию C_3.

Предположим, что функция $b(\lambda)$ из (3) вещественна и удовлетворяет следующим условиям: равномерно по $f\in F_1$

$\tilde{B}_1$. $\|bf\|<\infty$;

$\tilde{B}_2$. $\sum\limits_{|k|>n}|b_k|^2=o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$, где $\{b_k\}$—коэффициенты Фурье функции $b(\lambda)$.

Пусть W_l класс функций потерь $w\in W$, удовлетворяющих дополнительному условию: при некоторых $c_1>0$ и $c_2>0$ $w(u)\leqslant\leqslant c_1\exp\{c_2|u|\}$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.1 работы [1] на рассматриваемый здесь случай.

Теорема 2. *Пусть с. п. $f\in F_1$ и пусть функция $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$.*

Тогда для всех $w\in W_l$ равномерно по f и T

$$\lim_{n\to\infty} E_f\{w(\sqrt{n}(\hat{T}_n-T(f))\}=Ew(\xi), \tag{5}$$

где ξ—нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией $\sigma^2=2\pi\|bf\|^2$.

Замечание 1. Из соотношений (1) и (5) следует, что если с. п. $f(\lambda)\in F$, то оценка $\tilde{T}_n$ является асимптотически эффективной оценкой для линейного функционала $T(f)$ в классе $\Phi_n(T)$.

Доказательство теоремы 2 легко следует из нижеприведеных лемм.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 равномерно по f и T*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}|E_f(\hat{T}_n)-T(f)|=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} nE_f(\hat{T}_n-T(f))^2=2\pi\|bf\|^2$.

Лемма 3. *В условиях теоремы 2 равномерно по f, T и $u\in R^1$*

$$\lim_{n\to\infty}|P\{\sqrt{n}(\hat{T}_n-T(f))<u\}-P(\xi<u)|=0,$$

где ξ—нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией $\sigma^2=2\pi\|bf\|^2$.

Институт математики
Академия наук Армянской ССР

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Զրոներ ունեցող սպեկտրալ խտությունից ֆունկցիոնալների գնահատման մասին

Դիցուք x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$ զրոյական միջինով և $f(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi, \pi]$, սպեկտրալ խտությամբ գաուսյան ստացիոնար հաջորդականություն է, $X_n=(x_1, \ldots, x_n)$-ը n-չափանի վերցվածք է այդ հաջորդականությունից և դիցուք $\varphi(f)$-ն ֆունկցիոնալ է որոշված L^2 տարածության վրա։ Հոդվածում դիտարկվում է $\varphi(f)$ ֆունկցիոնալի ոչպարամետրական գնահատման խնդիրը

X_n վերցվածքի միջոցով, այն դեպի համար, երբ $f(\lambda)$ ֆունկցիան ունի զրոներ։ Ստացված է բանաձև ոչպարամետրական գնահատականի ճշգրտության ստորին եզրի համար։ Բերված են ասիմպտոտիկ էֆեկտիվ գնահատականներ այն դեպքի համար, երբ $\varphi(f)$ ֆունկցիոնալը գծային է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Z. Has'minskii, I. A. Ibragimov*, Probability Theory and Rel. Fields, v. 73, №3 (1986). [2] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*, Асимптотическая теория оценивания, Наука, М., 1979 [3] *Ю. А. Кошевник, Б. Я. Левит*, Теория вероятн. и ее примен., т. 21, вып. 4 (1976) [4] *М. С. Гиновян*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 136 (1984).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 512.62

МАТЕМАТИКА

М. К. Кюрегян

Некоторые вопросы конструктивной теории приводимости полиномов над конечными полями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/III 1986)

Проблема синтеза неприводимых над полем Галуа полиномов заданной степени в явном виде является наиболее важной и трудной проблемой современной алгебры. Фундаментальные результаты конструктивной теории приводимости полиномов над конечными полями в основном принадлежат Р. Р. Варшамову [1-3] и др. Данная статья является продолжением этих работ.

Пусть $GF(q)$—поле Галуа порядка $q=p^s$, p—простое число, s—натуральное. Обозначим и в дальнейшем будем понимать $f(x)=\sum_{u=0}^{n} a_u x^u$ произвольный нормированный неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n.

Опираясь на полученные в [4] результаты, докажем следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $g(x)-\alpha=\sum_{v=0}^{k} g_v x^v-\alpha$—*неприводимый над полем* $GF(q^{dn})$ *полином степени* k, *где* $g_v\in GF(q^d)$ $(n, d)=1$, $d\geqslant 1$, $f(\alpha)=0$. *Тогда полином* $f(g(x))$ *степени* kn *не будет разлагаться в поле* $GF(q^d)$.

Доказательство. Согласно [4] полином $f(x)$ неприводим над полем $GF(q^d)$, следовательно, над полем $GF(q^{dn})$ имеем: $f(x)=\prod_{u=0}^{n-1}(x-\alpha^{q^{du}})$ и после замены x через $g(x)$ получим $f(g(x))=\prod_{u=0}^{n-1}(g(x)-\alpha^{q^{ud}})$. Согласно [4] $f(g(x))$ неприводим над полем $GF(q^d)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* δ, $\delta_1\in GF(q)$, $\delta\neq 0$ и $x^{\frac{p^{sn}-1}{p-1}}\equiv 1 \pmod{f(x-\delta_1)}$ (*a*). *Тогда полином*

$$x^n f\left(\frac{x^p-\delta_1 x-\delta}{x}\right) \tag{1}$$

степени pn *неприводим над полем* $GF(q)$ *в том и только в том случае, если имеет место соотношение*

$$\sum_{u=0}^{sn-1} \delta^{p^u} x^{\frac{p^{ns}-p^{u+1}}{p-1}} \not\equiv 0 \pmod{f(x-\delta_1)} \quad (б)$$

и полином (1) *разлагается на произведение p неприводимых множителей степени n тогда и только тогда, когда условие* (*б*) *не имеет места.*

Доказательство. Учитывая неприводимость полинома $f(x)$ над полем $GF(q)$, имеем над полем $GF(q^n)$ соотношение

$$f(x)=\prod_{u=0}^{n-1}(x-\alpha^{q^u}). \tag{2}$$

Заменив в соотношении (2) x на $\dfrac{x^p-\delta_1 x-\delta}{x}$ и умножив обе части (2) на x^n, получим

$$x^n f\left(\frac{x^p-\delta_1 x-\delta}{x}\right)=\prod_{u=0}^{n-1}(x^p-(\delta_1+\alpha)^{q^u}x-\delta). \tag{3}$$

Согласно работе ([5]) при выполнении условий $(\delta_1+\alpha)^{\frac{p^{sn}-1}{p-1}}=1$ и

$$\frac{\delta}{\delta_1+\alpha}+\frac{\delta^p}{(\delta_1+\alpha)^{1+p}}+\frac{\delta^{p^2}}{(\delta_1+\alpha)^{1+p+p^2}}+\ldots+\frac{\delta^{p^{sn-1}}}{(\delta_1+\alpha)^{1+p+\ldots+p^{sn-1}}}=$$

$$=\sum_{u=0}^{ns-1}\delta^{p^u}(\delta_1+\alpha)^{\frac{p^{ns}-p^{u+1}}{p-1}}\neq 0$$

полином $x^p-(\delta_1+\alpha)x-\delta$ неприводим над полем $GF(q^n)$, тогда из ([4]) следует неприводимость полинома (1) над полем $GF(q)$. Из этого следует, что если выполнены условия (а) и (б), то полином (1) неприводим над полем $GF(q)$.

Полином $x^p-(\delta_1+\alpha)x-\delta$, для которого $(\delta_1+\alpha)^{\frac{p^{sn}-1}{p-1}}=1$, согласно ([5]) разлагается на p линейных множителей, т. е. имеем соотношение

$$x^p-(\delta_1+\alpha)x-\delta=\prod_{v=1}^{p}(x-\beta_v)$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{u=0}^{ns-1}\delta^{p^u}(\delta_1+\alpha)^{\frac{p^{ns}-p^{u+1}}{p-1}}=0.$$

Легко убедиться, что

$$x^p-(\delta_1+\alpha)^{q^u}x-\delta=\prod_{v=1}^{p}(x-\beta_v^{q^u}). \tag{4}$$

Учитывая соотношения (3) и (4), получим

$$x^n f\left(\frac{x^p-\delta_1 x-\delta}{x}\right)=\prod_{v=1}^{p}\prod_{u=0}^{n-1}(x-\beta_v^{q^u}).$$

Отсюда следует, что полином (1) разлагается на p сомножителей тогда и только тогда, когда выполнены условия (а) и (б), т. е. теорема доказана. Доказанный результат является существенным усилением работы ([6]).

Рассмотрим случай, когда $\delta=1$ и $q=2^s$. Условие (а) автоматически выполняется, т. е. всегда верно равенство $x^{2^n-1} = 1(\mathrm{mod} f(x+\delta_1))$.

Упростим условие (б). Ясно, что

$$\sum_{u=0}^{sn-1} (\delta_1+\alpha)^{2^{sn}-2^{u+1}} = (\delta_1+\alpha)^{2^{sn}} \left(\sum_{u=0}^{sn-1} \left(\frac{1}{\delta_1+\alpha} \right)^{2^u} \right)^2 =$$

$$= (\delta_1+\alpha) \left[\left(\sum_{u=0}^{s-1} \left(\sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\delta_1+\alpha} \right)^{2^{sv}} \right)^{2^u} \right) \right]^2$$

и $f(x+\delta_1) = \sum_{u=0}^{n} a_u (x+\delta_1)^u = \sum_{u=0}^{n} b_u x^u$.

Отсюда согласно теореме Виетта

$$\sum_{u=0}^{s-1} \left(\sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\delta_1+\alpha} \right)^{2^{sv}} \right)^{2^u} = \sum_{u=0}^{s-1} ((b_1 b)_0^{-1})^{2^u}.$$

Для этого случая из теоремы 2 получим

Следствие. *Пусть* $\delta_1 \in GF(2^s)$, *тогда полином* $x^n f\left(\frac{x^2+\delta_1 x+1}{x}\right)$ *неприводим над полем* $GF(2^s)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{u=0}^{s-1} [b_1 b_0^{-1}]^{2^u} = 1 \tag{б$_1$}$$

и разлагается на произведение двух двойственных неприводимых над полем $GF(2^s)$ *полиномов степени* n *тогда и только тогда, когда условие* (б$_1$) *не имеет места.*

Теорема 3. *Пусть* δ, $\delta_1 \in GF(q)$ *и* $\delta_1^{n\frac{q-1}{p-1}} = 1$. *Тогда полином*

$$f(x^p - \delta_1 x - \delta) \tag{5}$$

степени pn *неприводим над полем* $GF(q)$, *если*

$$\sum_{u=0}^{sn-1} \delta_1^{\frac{p^{sn}-p^{u+1}}{p-1}} x^{p^u} \not\equiv o(\mathrm{mod} f(x-\delta)), \tag{6}$$

и разлагается на произведение p *неприводимых множителей степени* n *тогда и только тогда, когда не имеет места условие* (6).

Доказательство. В формуле (2) заменим x на $x^p - \delta_1 x - \delta$, получим $f(x^p - \delta_1 x - \delta) = \prod_{u=0}^{n-1} (x^p - \delta_1 x - (\delta+\alpha)^{q^u})$. Согласно работе [5] при выполнении условий $\delta_1^{\frac{p^{sn}-1}{p-1}} = 1$ и

$$\frac{\delta+\alpha}{\delta_1} + \frac{(\delta+\alpha)^p}{\delta_1^{1+p}} + \frac{(\delta+\alpha)^{p^2}}{\delta_1^{1+p+p^2}} + \ldots + \frac{(\delta+\alpha)^{p^{ns-1}}}{\delta_1^{1+p+p^2+\ldots+p^{sn-1}}} \neq 0$$

или, что то же самое,

$$\delta_1^{n\frac{p^s-1}{p-1}} = 1 \text{ и } \sum_{u=0}^{sn-1} (\delta+\alpha)^{p^u} \delta_1^{\frac{p^{sn}-p^{u+1}}{p-1}} \neq 0$$

полином $x^p - \delta_1 x - (\delta+\alpha)$ неприводим над полем $GF(q^n)$, а из теоремы 1 следует неприводимость полинома $f(x^p - \delta_1 x - \delta)$ над полем $GF(q)$.

Из этого следует, что если выполнено условие (6), то полином (5) неприводим над полем $GF(q)$.

Полином $x^p-\delta_1 x-(\delta+\alpha)$, для которого $\delta_1^{n\frac{p^s-1}{p-1}}=1$, согласно ([5]) разлагается на p линейных множителей, т. е. имеем: $x^p-\delta_1 x-(\delta+\alpha)=\prod_{v=1}^{p}(x-\beta_v)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{u=0}^{sn-1}(\delta+\alpha)^{p^u}\delta_1^{\frac{p^{sn}-p^{u+1}}{p-1}}=0.$$

Отсюда следует $f(x^p-\delta_1 x-\delta)=\prod_{v=1}^{p}\prod_{u=0}^{n-1}(x-\beta_v^{q^u})$.

Значит, полином (5) разлагается на p сомножителей тогда и только тогда, когда не выполнены условия (6), что и требовалось доказать.

Теорема 3 является существенным усилением результатов ([2,7,8]).

Следствие. *Если* δ_1, $\delta\in GF(2^s)$, *то полином* $f(x^2-\delta_1 x-\delta)$ *степени* $2n$ *неприводим над полем* $GF(2^s)$, *если*

$$\sum_{u=0}^{s-1}\left(\frac{n\delta-\pi}{\delta_1^2}\right)^{2^u}\neq 0, \tag{7}$$

где π — *коэффициент при неизвестном* x^{n-1} *полинома* $f(x)$ *и разлагается на произведение двух неприводимых множителей степени* n, *если не выполнено условие* (7).

Теорема 4. *Пусть* δ, $\delta_1\in GF(q)$ *и* $\delta_1\neq 0$. *Тогда полином степени* pn

$$f(x^p-\delta_1^{p-1}x-\delta) \tag{8}$$

неприводим над полем $GF(q)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{u=0}^{s-1}\left(\frac{n\delta-\pi}{\delta_1^p}\right)^{p^u}\neq 0, \tag{9}$$

где π — *коэффициент при неизвестном* x^{n-1} *полинома* $f(x)$.

Доказательство. В формуле (2) заменим x на $x^p-\delta_1 x-\delta$, получим $f(x^p-\delta_1^{p-1}x-\delta)=\prod_{u=0}^{n-1}(x^p-\delta_1^{p-1}x-(\delta+\alpha)^{q^u})$. Согласно работе ([5]) для неприводимости полинома $x^p-\delta_1^{p-1}x-(\delta+\alpha)$ над полем $GF(q^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\delta+\alpha}{\delta_1^p}+\left(\frac{\delta+\alpha}{\delta_1^p}\right)^p+\left(\frac{\delta+\alpha}{\delta_1^p}\right)^{p^2}+\ldots+\left(\frac{\delta+\alpha}{\delta_1^p}\right)^{p^{ns-1}}\neq 0 \text{ или } \sum_{u=0}^{s-1}\left(\frac{n\delta-\pi}{\delta_1^p}\right)^{p^u}\neq 0.$$

Теперь из теоремы 1 следует неприводимость полинома (8) над полем $GF(q)$. Отсюда получаем, что соотношение (9) является необходимым и достаточным условием неприводимости полинома (8) над полем $GF(q)$. Теорема доказана.

Опираясь на полученные результаты и используя работу ([4]), можно будет доказать следующий факт.

Теорема 5. *Пусть* δ, δ_1, δ_2, $\delta_3\in GF(2^s)$ и δ_1, $\delta_2\neq 0$. *Тогда для того чтобы полином*

$$f(x^3+(\delta_2^2+\delta_1)x^2+\delta_1\delta_2x+\delta_2^3+\delta_2\delta_3+\delta)$$

был неприводим над полем $GF(2^s)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{v=0}^{s-1}\left(\frac{\pi+n\delta}{\delta_1^2}\right)^{2^v}=1 \quad \text{и} \quad \sum_{v=0}^{s-1} n\delta_1^{2^v}\delta_2^{-2^{v+1}}=1,$$

где π—коэффициент при неизвестном x^{n-1} полинома $f(x)$.

Теорема 5 является существенным усилением результата (9) и более конструктивна.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Р. Р. Варшамову за полезные советы в процессе работы над статьей.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Մ. Կ. ԿՅՈՒՐԵՂՅԱՆ

Վերջավոր դաշտերի բազմանդամների վերածելիության կոնստրուկտիվ տեսության մի քանի հարցեր

Գալուայի դաշտերի վրա բազմանդամների վերածելիության արտակարգ ինքնուրույն հետաքրքրություն ներկայացնող պրոբլեմը կարևոր դեր է կատարում ժամանակակից տեխնիկայում։

Աշխատանքում հետազոտվում են մի քանի ձևափոխություններ, որոնց համար որպես որոշման տիրույթ հանդիսանում է Գալուայի $GF(q)$ *դաշտից վերցված գործակիցներով բազմանդամների օղակը։ Ապացուցվում են մի շարք թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս անվերածելի բազմանդամներ կառուցել բացահայտ տեսքով Գալուայի* $GF(q)$ *կամայական դաշտի վրա։*

Ստացված արդյունքներից, որպես մասնավոր դեպքեր, ստացվում են մի քանի հայտնի թեորեմներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Р. Варшамов*, Studia Scietiarum Mathematicarum Hungarica, 5—19, 1973. [2] *Р. Р. Варшамов*, ДАН СССР, т. 211, №4 (1973). [3] *Р. Р. Варшамов*, ДАН СССР, т. 275, №5 (1984). [4] *М. К. Кюрегян*, ДАН АрмССР, т. 81, №2 (1985). [5] *S. Schwarz*, Mathematicko-fyzikalny casopis sav, m. 10, №2, 68—80 (1960). [6] *Р. Р. Варшамов*, *Г. А. Гараков*, Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники, г. 6, 1970. [7] *A. A. Albert*, Fundamental concepts of higher algebra. Univ. of Chicago Press. 1956. *Agou Simon*, J. of Number Theory, 9, №2, 229—239 (1977). [9] *Agou Simon*, J. of Number Theory, 10 L, 64—69 (1978).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Смешанная граничная задача теплопроводности для полого цилиндра конечной длины

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 29/X 1985)

В работе рассматривается смешанная краевая задача стационарного осесимметричного распространения тепла в полом цилиндре конечной длины d, на поверхностях которого происходит теплообмен с окружающей средой, когда коэффициенты теплообмена изменяются по длине цилиндра, а внутри цилиндра имеются источники тепла. В этом случае температура цилиндра $U(r, z)$ удовлетворяет уравнению [1,2]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{1}{\lambda}w(r, z) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$-\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=h_0[T_0(r)-U(r, 0)]; \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=d}=h[T(r)-U(r, d)];$$

$$-\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R_1}=h_1(z)[S_1(z)-U(R_1, z)]; \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R_2}=h_2(z)[S_2(z)-U(R_2, z)]$$

$$(R_1<R_2), \tag{2}$$

где λ—коэффициент теплопроводности цилиндра, w—интенсивность тепловыделения, h_j, T_j, S_j—соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h_1(z)$, $h_2(z)$, $S_j(z)$, $T_j(r)$ и $w(r, z)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию в соответствующих областях, а также что h_j неотрицательна. Представим функцию $U(r, z)$ в виде ряда

$$U(r, z)=\sum_{k=0}^{\infty} U_k(r)\eta_k(z), \tag{3}$$

где $U_k(r)=\int_0^d U(r, z)\eta_k(z)dz$, а $\eta_k(z)$ являются собственными функциями краевой задачи

$$\eta''(z)+\gamma^2\eta(z)=0; \quad -\eta'(0)+h_0\eta(0)=\eta'(d)+h\eta(d)=0 \tag{4}$$

и имеют вид

$$\eta_k(z)=\mu_k\left(\cos\gamma_k z+\frac{h_0}{\gamma_k}\sin\gamma_k z\right), \quad \mu_k=\sqrt{\frac{2}{d}}\left[1+\frac{h_0^2}{\gamma_k^2}+\frac{(h_0+h)(\gamma_k^2+h_0 h)}{\gamma_k^2(\gamma_k^2+h^2)d}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

причем собственные значения γ_k являются положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_k d=\frac{\gamma_k(h_0+h)}{\gamma_k^2-h_0h}. \qquad (6)$$

Как известно ([3]), система функций $\{\eta_k(z)\}$ ортонормирована и полна в интервале $(0, d)$. Умножив уравнение (1) на $\eta_k(z)dz$ и проинтегрировав от 0 до d, для определения $U_k(r)$ получим уравнение

$$U_k''(r)+\frac{1}{r}U_k'(r)-\gamma_k^2U_k(r)=-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^d w(r, z)\eta_k(z)dz-$$

$$-h\eta_k(d)T(r)-h_0\eta_k(0)T_0(r)=-w_k(r), \qquad (7)$$

решение которого имеет вид

$$U_k(r)=\frac{1}{\delta_k(R_2, R_1)}\left\{\delta_k(R_2, r)\left[M_k-\int\limits_R^r r_1w_k(r_1)\delta_k(r_1, R_1)dr_1\right]+\right.$$

$$\left.+\delta_k(r, R_1)\left[N_k-\int\limits_r^{R_2} r_1w_k(r_1)\delta_k(R_2, r_1)\right]dr_1\right\}. \qquad (8)$$

Здесь $\delta_k(x, y)=I_0(\gamma_kx)K_0(\gamma_ky)-K_0(\gamma_kx)I_0(\gamma_ky)$; $I_n(x)$, $K_n(x)$—модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n-го порядка. Для определения коэффициентов M_k и N_k, входящих в выражение (8), умножив поочередно последние два из граничных условий (2) на $\eta_j(z)dz$ и проинтегрировав от 0 до d, получим

$$m_k=\frac{1}{\xi_k}\left\{\frac{n_k}{R_1\delta_k(R_2, R_1)}-(\gamma_kd)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^d h_1(z)\left[m_0\eta_0(z)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{\infty}{}'(\gamma_jd)^{-\frac{3}{2}}m_j\eta_j(z)\right]\eta_k(z)dz\right\}+p_k;$$

$$n_k=\frac{1}{\xi_k}\left\{\frac{m_k}{R_2\delta_k(R_2, R_1)}-(\gamma_kd)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^d h_2(z)\left[n_0\eta_0(z)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{\infty}{}'(\gamma_jd)^{-\frac{3}{2}}n_j\eta_j(z)\right]\eta_k(z)dz\right\}+q_k;$$

$$m_0=\frac{1}{\xi_0}\left[\frac{n_0}{R_1\delta_0(R_2, R_1)}-\sum_{j=1}^{\infty}(\gamma_jd)^{-\frac{3}{2}}m_j\int\limits_0^d h_1(z)\eta_j(z)\eta_0(z)dz\right]+p_0; \qquad (9)$$

$$n_0=\frac{1}{\xi_0}\left[\frac{m_0}{R_2\delta_0(R_2, R_1)}-\sum_{j=1}^{\infty}(\gamma_jd)^{-\frac{3}{2}}n_j\int\limits_0^d h_2(z)\eta_j(z)\eta_0(z)dz\right]+q_0,$$

где

$$m_k=(\gamma_kd)^{\frac{3}{2}}M_k;\ n_k=(\gamma_kd)^{\frac{3}{2}}N_k;\ m_0=M_0;\ n_0=N_0;$$

$$\zeta_k=\frac{\gamma_k}{\delta_k(R_2,\,R_1)}\left[I_0(\gamma_k R_2)K_1(\gamma_k R_1)+K_0(\gamma_k R_2)I_1(\gamma_k R_1)\right]+\int\limits_0^d h_1(z)\eta_k^2(z)dz;$$

$$\xi_k=\frac{\gamma_k}{\delta_k(R_2,\,R_1)}\left[I_1(\gamma_k R_2)K_0(\gamma_k R_1)+K_1(\gamma_k R_2)I_0(\gamma_k R_1)\right]+\int\limits_0^d h_2(z)\eta_k^2(z)dz;$$

$$p_k=\frac{(\gamma_k d)^{\frac{3}{2}}}{\zeta_k}\left[\frac{1}{R_1\delta_k(R_2,\,R_1)}\int\limits_{R_1}^{R_2} rw_k(r)\delta_k(R_2,\,r)dr+\int\limits_0^d h_1(z)S_1(z)\eta_k(z)dz\right];$$

$$q_k=\frac{(\gamma_k d)^{\frac{3}{2}}}{\xi_k}\left[\frac{1}{R_2\delta_k(R_2,\,R_1)}\int\limits_{R_1}^{R_2} rw_k(r)\delta_k(r,\,R_1)dr+\int\limits_0^d h_2(z)S_2(z)\eta_k(z)dz\right]; \qquad (10)$$

$$p_0=\frac{1}{\zeta_0}\left[\frac{1}{R_1\delta_0(R_2,\,R_1)}\int\limits_{R_1}^{R_2} rw_0(r)\delta_0(R_2,\,r)dr+\int\limits_0^d h_1(z)S_1(z)\eta_0(z)dz\right];$$

$$q_0=\frac{1}{\xi_0}\left[\frac{1}{R_2\delta_0(R_2,\,R_1)}\int\limits_{R_1}^{R_2} rw_0(r)\delta_0(r,\,R_1)dr+\int\limits_0^d h_2(z)S_2(z)\eta_0(z)dz\right],$$

а штрих при знаке сумм означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Таким образом, для определения новых неизвестных m_k и n_k получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (9). Для исследования этих систем оценим вначале суммы модулей коэффициентов при неизвестных m_j и n_j в каждом из уравнений (9). Обозначив через σ_k сумму модулей коэффициентов k-го уравнения первой из систем (9) и воспользовавшись оценкой коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией ([4]), будем иметь для $k>0$

$$\sigma_k<\frac{1}{R_1\gamma_k\delta_k(R_2,\,R_1)}+\frac{H_1\mu_k\sqrt{d}}{2\zeta_k}\gamma_k^{\frac{3}{2}}\left\{\mu_0\left|\left(1+\frac{h\delta}{\gamma_0\gamma_k}\right)\frac{1}{\gamma_k-\gamma_0}+\left|1-\frac{h\delta}{\gamma_0\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_k+\gamma_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2h_0}{\gamma_0\gamma_k}\right|+\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{\mu_j}{(\gamma_j d)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{h\delta}{\gamma_j\gamma_k}\right)\frac{1}{|\gamma_k-\gamma_j|}+\left|1-\frac{h\delta}{\gamma_j\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_j+\gamma_k}+\frac{2h_0}{\gamma_j\gamma_k}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Здесь через H_j обозначена полная вариация функции $h_j(z)$ в промежутке $(0,\,d)$. Учитывая, далее, двусторонние оценки γ_k ([5]), после упрощений получим

$$\sigma_k<2\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,e^{-\gamma_k(R_2-R_1)}+H_1\left(\frac{4}{k}+0{,}3\frac{\ln k}{k}\right)<2\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,e^{-\frac{k\pi}{d}(R_2-R_1)}+$$

$$+H_1\left(\frac{4}{\sqrt{k}}+0{,}3\frac{\ln k}{k}\right). \qquad (12)$$

Аналогичные оценки получим и для остальных систем (9). Таким образом, суммы модулей коэффициентов при неизвестных m_j и n_j в уравнениях (9) с возрастанием k стремятся к нулю с быстротой

$0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ причем если $H_j+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\exp\left|-\frac{\pi}{d}(R_2-R_1)\right|<\frac{1}{4}$, системы (9) вполне регулярны. Что касается свободных членов p_k и q_k этих систем, то согласно предположению об ограниченности вариации функций $h_1(z)$, $h_2(z)$, $S_j(z)$, $T_k(r)$ и $w(r, z)$ с возрастанием k p_k и q_k также стремятся к нулю с быстротой $0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Из теории бесконечных систем ([6]) следуют существование ограниченного решения систем (9) и сходимость метода последовательных приближений. Задаваясь значениями h_j, S_j, T_j и w и решая усеченную систему (9), найдем оценки постоянных m_k и n_k сверху и снизу, после чего способом, описанным в ([7]), из (3), (8) и (10) получим значения $U(r, z)$ с избытком и недостатком. Заметим, что при конкретном задании упомянутых величин преобразованием систем (9) можно значительно усилить быстроту убывания постоянных, определяемых из бесконечных систем ([8]), что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջերմափոխանակության խառը եզրային խնդիրը վերջավոր երկարության սնամեջ գլանի համար

Հոդվածում դիտարկվում է ջերմության կայունացած առանցքասիմետրիկ տարածման խառը եզրային խնդիրը վերջավոր երկարություն ունեցող սնամեջ գլանում, որի մակերևույթների վրա տեղի է ունենում ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ, երբ ջերմափոխանակության գործակիցները փոփոխվում են ըստ գլանի երկարության, իսկ գլանի ներսը գոյություն ունեն ջերմության աղբյուրներ։ Լուծումը տրվում է շարքով՝ ըստ եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների և Բեսսելի ձևափոխված ֆունկցիաների, որի անհայտ գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմներից։ Ապացուցվում է այդ սիստեմների վերջավոր լուծման գոյությունը և հաջորդաբար մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер*, Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. [2] *А. В. Лыков*, Теория теплопроводности, Высшая школа, М., 1967. [3] *Б. М. Левитан*, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [4] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. I, Мир, М., 1968. [5] *Р. С. Минасян*, ДАН АрмССР, т. 28, № 4 (1959). [6] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Физматгиз, 1962. [7] *Р. С. Минасян*, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958). [8] *Р. С. Минасян*, в сб.: Тепло- и массоперенос, т. 8, Вопросы теории тепло- и массопереноса. Минск, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 539.374

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

Пластическое течение между шероховатыми коническими поверхностями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 12/IV 1984)

Задача пластического течения материала между шероховатыми жесткими плитами в условиях плоской деформации впервые исследована Прандтлем (1). Далее теория течения идеально-пластического материала по жестким поверхностям развита и обобщена в работах (2-13) и др.

В статьях (8,9) впервые поставлена и исследована задача о течении пластического материала между коническими поверхностями. В этих исследованиях принимается, что конические поверхности шероховатые по кольцевому направлению и движутся с постоянными поперечными скоростями по этому же направлению.

В настоящей статье в сферических координатах рассматривается задача о течении несжимаемого идеально жесткопластического материала между двумерно-шероховатыми коническими поверхностями при их сближении с поперечными скоростями, изменяющимися по экспоненциальному закону по кольцевой координате (14). Принимается

$$v=\nu_1 re^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta=\alpha, \quad v=-\nu_2 re^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta=\beta,$$

где ν_i, β заданные положительные постоянные. В силу симметрии течения относительно плоскости $\varphi=0$ будем рассматривать область $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$ (рис. 1).

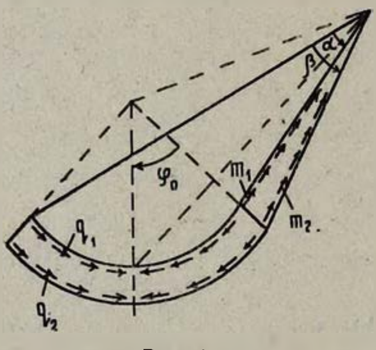


Рис. 1

Принимаем, что касательные напряжения, возникающие в конических поверхностях, заданы:

$$\tau_{r\theta}=m_1, \quad \tau_{\theta\varphi}=q_1 \text{ при } \theta=\alpha;$$
$$\tau_{r\theta}=-m_2, \quad \tau_{\theta\varphi}=-q_2 \text{ при } \theta=\beta, \tag{1}$$

очевидно $m_i^2+q_i^2<1$.

Компоненты напряжения, отнесенные к пластической постоянной k и скорости перемещения, как в ([14]), представим в виде

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\frac{6}{\Omega}f', \quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta+\frac{6}{\Omega}(f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi);$$

$$\sigma_\theta=-p_1+\mu\ln r-A(\varphi_0-\varphi)+6\int_\alpha^\theta(f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi)\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\Omega}d\theta-$$

$$-3\int_\alpha^\theta\tau_{r\theta}d\theta, \quad \tau_{r\theta}=\frac{1}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'; \tag{2}$$

$$\tau_{\theta\varphi}=\frac{3}{\Omega}\left(\psi'\sin\theta+\mu\frac{f}{\sin\theta}\right), \qquad \tau_{r\varphi}=-\frac{\mu}{\Omega\sin\theta}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi);$$

$$\Omega=\sqrt{(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'^2+9\left(\psi'\sin\theta+\frac{\mu f}{\sin\theta}\right)^2+\left(4+\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right)\times}$$

$$\overline{\times(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)^2+4(2f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi)(f'-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi)};$$

$$u=r(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)e^{-\mu\varphi}, \quad v=-3rfe^{-\mu\varphi},$$

$$w=3r\psi\sin\theta\, e^{-\mu\varphi}+\frac{D}{\mu}r\sin\theta, \tag{3}$$

где f и ψ произвольные функции θ, а p_1, M, A, D произвольные постоянные интегрирования.

Слагаемое $\frac{D}{\mu}r\sin\theta$ в соответствующем выражении w в работе ([14]) при вторичной редакции статьи автором опущено, так как оно не влияет на напряженное состояние. Однако оно необходимо для построения соответствующего возможного поля скоростей перемещений.

Приведенные выражения напряжений (2) и скорости перемещения (3) будут решениями системы уравнений теории пластичности, если функции f и ψ определить из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[\frac{\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'\right]'+\frac{6\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)+M\sin\theta=0;$$

$$\left[\frac{\sin^2\theta}{\Omega}\left(\psi'\sin\theta+\mu\frac{f}{\sin\theta}\right)\right]'-\mu\frac{\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)+\frac{A}{3}\sin\theta=0$$

или, учитывая представления (2),

$$(\tau_{r\theta}\sin\theta)'-\frac{6}{\mu}\tau_{r\varphi}\sin^2\theta+M\sin\theta=0;$$

$$(\tau_{\theta\varphi}\sin^2\theta)'+3\tau_{r\varphi}\sin^2\theta+A\sin\alpha=0. \tag{4}$$

Исключая отсюда $\tau_{r\varphi}$, а затем интегрируя полученное дифференциальное соотношение с использованием граничных условий (1) и вводя обозначения

$$A=B-\frac{1}{2}\mu M,\quad B=\frac{q_1\sin^2\alpha+q_2\sin^2\beta+\frac{1}{2}\mu(m_1\sin\alpha+m_2\sin\beta)}{\cos\alpha-\cos\beta}\tag{5}$$

$$C=\frac{q_1\sin^2\alpha\cos\beta+q_2\sin^2\beta\cos\alpha+\frac{1}{2}\mu\,(m_1\sin\alpha\cos\beta+m_2\sin\beta\cos\alpha)}{\cos\alpha-\cos\beta}\tag{6}$$

получаем $$s=\tau-\frac{\mu}{2\sin\theta}\,\omega,\quad \tau=\frac{B\cos\theta-C}{\sin^2\theta},\tag{7}$$

где $$\tau_{\theta\varphi}=s,\quad \tau_{r\theta}=\omega\tag{8}$$

Далее, вводя новую функцию $F(\theta)$

$$f'=F-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi\tag{9}$$

и исключая из выражения Ω (2) производные f', F' и ψ', при помощи соотношений

$$F'=\omega\Omega;\tag{10}$$

$$\psi'=\frac{s}{3}\,\frac{\Omega}{\sin\theta}-\mu\frac{f}{\sin^2\theta}\tag{11}$$

получаем

$$\Omega=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\omega^2-s^2}}\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2}{12\sin^2\theta}\right)F^2+3(f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)(f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi-F)}.$$

На боковых сечениях $\varphi=\pm\varphi_0$ отсутствуют внешние силы, поэтому $\int\limits_\alpha^\beta\sigma_\varphi(r,\theta,\varphi_0)d\theta=0.$

Подставляя сюда σ_φ из (2), получаем $M=0$, $B=A$,

$$p_1=\frac{6}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta(F-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi)[1+(\beta-\theta)\operatorname{ctg}\theta]\frac{d\theta}{\Omega}-\frac{3}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta(\beta-\theta)\omega d\theta.$$

Из первого уравнения (4) следует

$$\omega'=-\omega\operatorname{ctg}\theta-6\frac{F}{\Omega}\sin\theta.\tag{12}$$

Для определения функций f, F, ω, ψ из системы дифференциальных уравнений (9)—(12) имеем граничные условия

$$f(\alpha)=-\nu_1/3,\quad f(\beta)=\nu_2/3,$$
$$\omega(\alpha)=m_1,\qquad \omega(\beta)=-m_2.\tag{13}$$

После определения этих функций найдутся две компоненты напряжения (8), а остальные компоненты напряжения и скорости перемещения примут следующий вид:

$$\sigma_r=\sigma_0+\frac{6}{\Omega}(F-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi),\quad \sigma_\varphi=\sigma_0+\frac{6}{\Omega}(F-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi);$$

$$\sigma_\theta = -p_1 - A(\varphi_0 - \varphi) + 6\int_\alpha^\theta (F - 2f\,\mathrm{ctg}\,\theta - 2\mu\psi)\,\frac{\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta}{\Omega} - 3\int_\alpha^\theta \omega\,d\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu\,\frac{F}{\Omega\sin\theta} \tag{14}$$

$$u = rFe^{-\mu\varphi}, \quad v = -3rfe^{-\mu\varphi}, \quad w = 3r\psi\sin\theta e^{-\mu\varphi} + \frac{D}{\mu}\,r\sin\theta. \tag{15}$$

Давление на контактной поверхности $\theta = \alpha$ на единицу длины вдоль r будет $P = -2r\sin\alpha\int_0^{\varphi_0}(\sigma_\theta\cos\varphi - \tau_{\theta\varphi}\sin\varphi)|_{\theta=\alpha}\,d\varphi$. После вычисления получаем $P = 2r\sin\alpha[\,p_1\sin\varphi_0 + (1-\cos\varphi_0)(A+q_1)]$. Условие сохранения количества масс дает

$$\int_0^r\int_0^{\varphi_0}[v(r,\alpha,\varphi)\sin\alpha - v(r,\beta,\varphi)\sin\beta]\,r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta\int_0^{\varphi_0} ur^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \int_0^r\int_\alpha^\beta w|_{\varphi=\varphi_0}\,r\,d\theta\,dr.$$

Подставляя здесь выражения скоростей перемещения из (15), определяем

$$D = \frac{1-e^{-\mu\varphi_0}}{\cos\alpha - \cos\beta}\left(\nu_1\sin\alpha + \nu_2\sin\beta - 3\int_\alpha^\beta F\sin\theta\,d\theta\right) - \frac{3e^{-\mu\varphi_0}\mu}{\cos\alpha - \cos\beta}\int_\alpha^\beta \psi\sin\theta\,d\theta.$$

Случай гладких по направлению r конических поверхностей ($m_1 = m_2 = 0$) впервые рассмотрен в работах [8,9], а затем в [14]. Хотя условия сближения конических поверхностей и [9] и [14] приняты различными, но выражения напряжения в них в рассматриваемом случае по существу совпадают.

Когда конические поверхности гладки по кольцевому направлению, то в (5)—(6) следует положить $q_1 = q_2 = 0$. Это не внесет существенного упрощения в решение задачи, так как все компоненты напряжения и скорости перемещения отличны от тождественного нуля.

В случае двумерно-гладких конических поверхностей, т. е. когда $q_i = m_i = 0$, получаем из (5)—(7)

$$A = B = C = 0, \quad \tau(\theta) \equiv 0.$$

Тогда, полагая по всему объему тела $F = 0$, получаем $\omega = s = 0$, $\Omega = 6f'$. Дифференциальные уравнения (10) и (12) превращаются в тождества, а из (9) и (11) следует система линейных дифференциальных уравнений $f' + f\,\mathrm{ctg}\,\theta + \mu\psi = 0$ $\psi'\sin^2\theta + \mu f = 0$. Исключая ψ, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$f'' + f'\,\mathrm{ctg}\,\theta - \frac{1+\mu^2}{\sin^2\theta}f = 0. \tag{16}$$

Полагая $f(\theta) = y(x)$, где $x = \mathrm{ctg}\,\theta$, получаем уравнение $(1+x^2)y'' + xy' - (1+\mu^2)y = 0$.

Далее, принимая $y(x)=z(\xi)$, где $\xi=\operatorname{arcsh}x$, будем иметь $z''-(1+\mu^2)z=0$, общее решение которого будет $z=c_1\operatorname{sh}\sqrt{1+\mu^2}\,\xi+c_2\operatorname{ch}\sqrt{1+\mu^2}\,\xi$.

Таким образом, если ввести обозначение $\Delta(\theta)=\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{arcsh}(\operatorname{ctg}\theta)$, то общее решение (16) при граничных условиях (13) будет

$$f(\theta)=\frac{\nu_1\operatorname{sh}[\Delta(\theta)-\Delta(\beta)]+\nu_2\operatorname{sh}[\Delta(\theta)-\Delta(\alpha)]}{3\operatorname{sh}[\Delta(\beta)-\Delta(\alpha)]}.$$

Для рассматриваемого случая напряжения, скорости перемещения и давления будут

$$\sigma_r=\sigma_\theta+1,\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta+2,\quad \sigma_\theta=-p_1+2\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha},$$

$$p_1=2+\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta(\beta-\theta)\operatorname{ctg}\theta d\theta,\quad \tau_{r\theta}=\tau_{\theta\varphi}=\tau_{r\varphi}=u=0,$$

$$v=-3rfe^{-\mu\varphi},\quad w=\frac{r}{\mu}\left[D\sin\theta-3(f\sin\theta)'e^{-\mu\varphi}\right],$$

$$D=\frac{\nu_1\sin\alpha+\nu_2\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}(1+2e^{-\mu\varphi_0}),\quad P=2p_1r\sin\alpha\sin\varphi_0.$$

Здесь, как и в прежних окончательных выражениях, напряжения и давления следует умножить на $k=\sigma_s/\sqrt{3}$, где σ_s предел текучести материала при растяжении.

На ЭВМ ЕС—1022 для значений параметров $\nu_1=3$, $\nu_2=4{,}2$, $\mu=2$, $m_1=0{,}15$, $m_2=0{,}2$, $q_1=0{,}2$, $q_2=0{,}25$, $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$ получено численное решение системы уравнений (9)—(12) для граничных условий

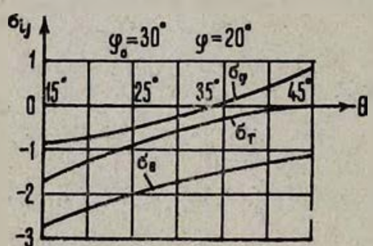


Рис. 2

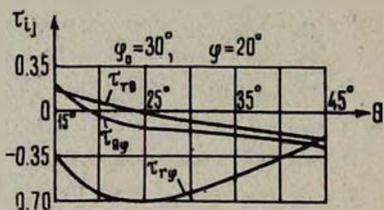


Рис. 3

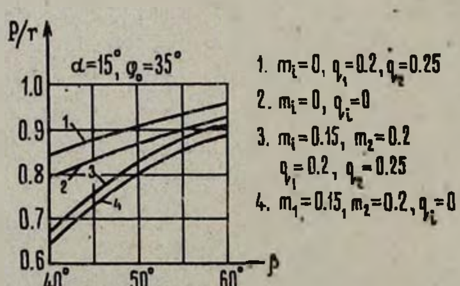


Рис. 4

(13), на основании которого на рис. 2. 3 приведены соответствующие графики напряжений (14). На рис. 4 показаны графики контактного $(\theta=\gamma)$ удельного давления P_r для различных случаев шероховатостей конических поверхностей.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Պլաստիկական հոսքը կոնական անհարթ մակերևույթների միջև

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անսեղմելի իդեալական կոշտ պլաստիկական նյութի հոսքը, երբ կոնական անհարթ մակերևույթները մոտենում են իրար՝ տված արագությամբ։ Ընդունվում է, որ այդ արագությունները օղակային կոորդինատի ուղղությամբ փոփոխվում են էքսպոնենցիալ օրենքով, իսկ մակերևույթները անհարթ են ինչպես կոնի ծնիչի, այնպես էլ օղակային ուղղությամբ։

Խնդիրը ընդհանուր դրվածքով բերվում է սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրմանը համապատասխան եզրային պայմաններով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Prandtl*, ZAMM, B. 3, s. 401—406 (1923). [2] *A. Nadal*, Z. Phys. B. 30, H. 2, s. 106—138 (1924). [3] *Р. Хилл*, Математическая теория пластичности, Гостехиздат, М. 1956. [4] *В. В. Соколовский*, Теория пластичности, Высшая школа, М., 1968. [5] *А. А. Ильюшин*, ПММ, т. 18, вып. 8, с. 265—288 (1954). [6] *R. T. Shield*, J. Mech. and Phis. Solids, v. 3, № 4, p. 246—258 (1955). [7] *Д. Д. Ивлев*, Теория идеальной пластичности, М., Наука, 1966. [8]. *Д. Д. Ивлев*, Тр. НИИ Воронежского гос. ун-та, вып. 10, с. 1—3 (1973). [9] *Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев, А. В. Романов.* Современные проблемы механики и авиации, Машиностроение, М., 1982. [10] *Д. Д. Ивлев*, ДАН СССР, т. 123, № 6. с. 988—990 (1958). [11] *М. А. Задоян*, ДАН СССР, т. 156, № 1, с. 38—39 (1964). [12] *М. А. Задоян*, ДАН АрмССР, т. 39, № 5, с.265—269 (1964). [13] *С. С. Григорян*, ДАН СССР, т. 257, № 25, с. 1075—1076 (1981). [14] *М. А. Задоян*, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 209—218 (1983).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 595.792

ЭНТОМОЛОГИЯ

К. А. Джанокмен, Е. К. Эртевцян

Виды рода Callocleonymus Masi (Hymenoptera, Chalcidoidea, Pteromalidae) в фауне СССР

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсесяном 26/V 1986)

Род Callocleonymus описан Мази (1) из Африки (Сомали). Типовым видом этого рода является Callocleonymus pulcher Masi. Керич (2) описал второй вид рода—Callocleonymus ferrierei Kerrich, выведенный в Китае из Curculionidae. Впоследствии, исследуя два котипа C. pulcher. обнаруженные Доменикини в музее в Генуе, Керич (3) уточнил дифференциальный диагноз вида. Экземпляры из Наталя (ЮАР), выведенные из предкуколки Pseudagrilus dubius Ob. (Buprestidae), Керич определил как C. pulcher.

Первая находка представителя этого интересного рода в нашей стране была сделана в Армении. Будучи в СССР, чешский хальцидолог Боучек определил обнаруженную в Ереване, в ходах с личинками златки Trop̆eopeltis anthaxoides Reitt., самку как Callocleonymus sp. aff ferrierei Kerrich (4).

Учитывая своеобразную морфологию рода Callocleonymus Masi, его определенную связь с ксилофагами и отсутствие сведений о видах рода в отечественной литературе, кроме краткого упоминания в статье А. С. Аветян и др. (4), мы сочли возможным привести здесь описание экземпляра из Туркмении, определенного нами как C. pulcher. К сожалению, у экземпляра Callocleonymus sp. aff ferrierei Kerrich из Армении отсутствует голова, что не позволяет дать описание этой формы.

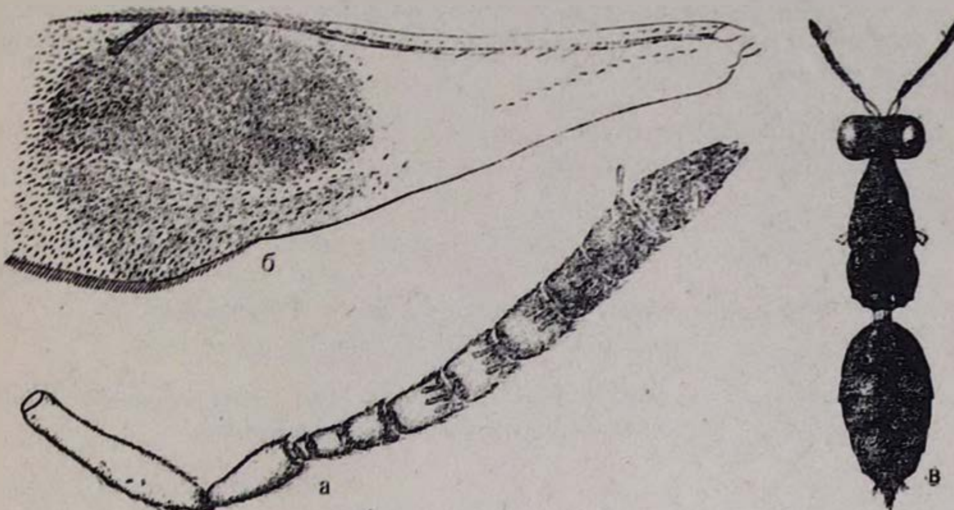
Callocleonymus pulcher Masi (рисунок, *а—в*)

Материал. Туркмения: Ашхабадский р-н, 40 лет ТССР, паразит златки (Buprestidae) на лохе, 15 VIII 1983, 1♀ (Васьков).

Самка. Голова почти в 2 раза шире длины. Расстояние между задними глазками (POL) в 2,6 раза больше расстояния между задним глазком и краем глаза (OOL). Усики причленяются чуть ниже уровня нижнего края глаз. Лоб выпуклый. Щеки вздутые. Внутренние края глаз книзу расходятся почти под углом в 45°. Передний край наличника ровный. Усик 11-члениковый (11171) (рисунок, *а*). Колечко поперечное, в 2 раза шире длины. 1-й членик жгутика несколько длиннее ширины, в 2 раза длиннее колечка, около 2/3 длины 2-го членика жгутика. 2-й членик жгутика около 3/4 длины 3-го членика жгутика, 3-й—5-й членики жгутика одинаковой длины и в 2 раза длиннее своей ширины; 6-й и 7-й членики жгутика квадратные.

Булава заостренная, ее вершина в виде маленького коготка. Палочковидная сенсилла булавы почти достигает уровня ее вершины. Палочковидная сенсилла на вершине 7-го членика жгутика слегка короче длины этого членика.

Грудь сильно уплощенная. Переднеспинка длинная, слегка ко-



Callocleonymus pulcher Masi —♀: *а*—усик; *б*—переднее крыло; *в*—общий вид тела

роче своей ширины, длиннее среднеспинки, измеренной посредине. Среднеспинка плоская, без выраженных парапсидальных борозд, почти одной длины со щитиком. Щитик плоский, в основании суженный, без френальной борозды. Промежуточный сегмент почти одной длины со щитиком, без шейки, с очень слабыми боковыми складками. Переднее крыло на рисунке, *б*. Маргинальная жилка в 3,5 раза длиннее радиальной, которая равна постмаргинальной. Базальная жилка голая. Базальная ячейка с продольным рядом щетинок. Костальная ячейка очень узкая, в 22 раза длиннее ширины, с щетинками на вершине и в основании. Диск крыла за зеркальцем в густом опушении.

Брюшко стебельчатое, овальное, в 1,6 раза длиннее ширины, немного длиннее груди. Общий вид тела на рисунке, *в*.

Окраска тела черно-зеленая. Голова и грудь с сильным бронзовым блеском. Темя, промежуточный сегмент и брюшко с фиолетовым отблеском. Жгутик усика коричневый с постепенным потемнением к вершине. Булава почти черная. Основной членик рыжеватый. Передние крылья с большим темным пятном ниже маргинальной и стигмальной жилок вплоть до заднего края крыла. Тазики рыжие. Остальная часть ног, кроме лапок средней и задней пар, тоже рыжие, но с присутствием коричневого тона в окраске задних бедер и всех пар голеней. Средние и задние лапки, кроме их последнего членика, белые. Задние голени с двумя шпорами. Стебелек брюшка бледно-желтый.

Скульптура головы и груди сетчато-пунктированная. Скульптура темени более сглаженная и более блестящая по сравнению с остальной частью головы. Переднеспинка и щитик с более мелкоячеистой скульптурой. Аксиллюлы гладкие и блестящие. Проксимальная треть средней зоны промежуточного сегмента грубоскульптированная, остальная часть средней зоны зеркально-блестящая, гладкая. Бока груди сетчато-пунктированные, с гладкими и блестящими участками ниже места прикрепления передних и задних крыльев. 1-й и 2-й видимые тергиты брюшка гладкие, остальные—с кожистой скульптурой. Длина тела 2,6 мм.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ա. ՋԱՆՈԿՄԵՆ, Ե. Կ. ՀԵՐԹԵՎՑԱՆ

Gallocleonymus Masi (Hymenoptera, Pteromalidae) սեռի տեսակներ՝ ՍՍՀՄ ֆաունայում

Հոդվածում տրվում է Callocleonymus Masi *սեռի տեսակներ ՍՍՀՄ ֆաունայում և* C. pulcher Masi *տեսակի նկարագրությունը։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Masi*, Boll. Lab. Ent. agr. Portici, v. 3, p. 247—324 (1940). [2] *J. G. Kerrich*, Eos, t. 33, cuad. 1—4, p. 269—273 (1957). [3] *J. G. Kerrich*, Eos, t. 36, cuad. 3, p. 373—374 (1940). [4] *А. С. Аветян, В. А. Тряпицын, Е. К. Эртевцян*, Зоол. сб. АН АрмССР, вып. 17, с. 33—86 (1976).