

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ Д О К Л А Д Ы

LXXXIII, №1

1986

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, անվան. գիտ. բնկեան (պատ. փառապատիվ), Է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Զ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ. անդամ, Վ. Զ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Զ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի անդամ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱԼԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ս. Մ. ՍԱԳՈՒՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. ҚАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.



Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Դ. Թուհիև, Ա. Ս. Թուհիև—Ուղղանկյան մատրիցաների հակադարձելիության մի մեթոդի և նրա կիրառությունների մասին	3
Վռլ Կիմ Տուան—Փաթույթի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների ֆակտորիզացիայի մասին L^p տարածություններում	7
Դ. Հ. Մարտիրոսյան—Փոթսի մոդելի ֆազային դիագրամի վերաբերյալ	11
Դ. Գ. Գևորգյան—Զարիելի ֆունկցիաները ըստ Ֆրանկլինի համակարգի բացարձակ զուգամետ շարքերով ներկայացման վերաբերյալ	15

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Դ. Զ. Գևորգյան—Բազմապրոցեսորային համակարգերում գծային հաշվումների բար- դության վերաբերյալ	19
--	----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ն. Հայրապետյան, Յու. Ն. Հայրապետյան—էնչտեյն—Ֆոկեր—Պլանկի հավասար- ման արտածումը եզրային էֆեկտների հաշվարկմամբ	24
Լ. Շ. Կրիզորյան, Ա. Ա. Սանաբյան—Կադիմիրի Լֆելտեր իդեալական հաղորդիչ սֆե- րիկ մակերևույթի համար	28
Ա. Գ. Ռազդոն, Գ. Ս. Ռեզիդենցյան—Ոչ գծային դիսիպատիվ համասեռ միջավայրում տարածվող փոխազդող սահմանափակ հզոր լուսային փնջերի հավասարումները և ներանց լուծումները	34

ՄՈԼԵԿՈՒԼՅԱՐ ԿՆՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Ա. Ռուսկյան, Ռ. Ա. Զախարյան, Ս. Ն. Հայրապետյան—ԴՑ-Ռենթ մեխանիզմի մշտիչ ազդեցությունը բջի թաղանթում վիրուսի սորոցիայի վրա	40
--	----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Գ. Ն. Գրիգորյան, Ա. Մ. Ստոլբերգ, Ի. Ա. Զաղաջյան—3-ամիս-2-իզո- պրոպիլ-6, 6-դիմեթիլ-4-օկտո-5, 6-դիգիդրո-8-պիրանո [4', 3': 4,5]-տիևնո [2,3-դ] պիրիմիդին-4-օնա (ԱՆ-442-132) միացության ազդեցությունը սպիտակ առնետների լարերինթային ուսուցման վրա	45
---	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>А. Д. Туниев, А. С. Туниев</i> —Об одном методе обращения прямоугольных матриц и его применении	3
<i>Ву Ким Туан</i> —О факторизации интегральных преобразований типа свертки в пространстве L^2_μ	7
<i>Д. Г. Мартиросян</i> —О фазовой диаграмме модели Поттса	11
<i>Г. Г. Геворкян</i> —О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина	15

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Д. Э. Геворкян</i> —О сложности линейных вычислений на многопроцессорных системах	19
--	----

ФИЗИКА

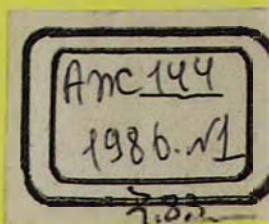
<i>В. И. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян</i> —Вывод уравнения Эйнштейна—Фока—Планка с учетом краевых эффектов	24
<i>Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян</i> —Эффект Казимира для идеально проводящей сферической поверхности	28
<i>А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргенян</i> —Уравнения взаимодействующих ограниченных мощных световых пучков в однородных нелинейных диссипативных средах и их решения	34

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

<i>Л. А. Рухкян, Р. А. Захарян, С. Н. Айрапетян</i> —О механизме подавляющего действия дс-РНК на сорбцию вируса на клеточной мембране	40
---	----

ФИЗИОЛОГИЯ

<i>Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг, И. А. Джагацпаян</i> —Влияние соединения 3-амино-2-изо-пропил-6,6-диметил-4-оксо-5,6 дигидро-8Н-пирано [4',3':4,5]тиено [2,3-d]пиримидин-4-она (АН-442-132) на лабиринтное обучение белых крыс	45
--	----



CONTENTS

MATHEMATICS

- A. D. Tunlev, A. S. Tunlev*—About a method of conversion of rectangular matrixes and its applications 3
- Vu Kim Tuan*—On factorization of convolution integral transforms in the space L^p 7
- D. H. Martirosian*—On the phase diagram in the Potts model 11
- G. G. Gevorgian*—On the representation of measurable functions by absolute convergence series with the Franklin system 15

APPLIED MATHEMATICS

- D. S. Gevorgian*—On the complication of line calculation on multiprocedure systems 19

PHYSICS

- V. N. Halrapetian, U. N. Halrapetian*—The derivation of Einstein—Foker—Plank equation taking into account the margin effects 24
- L. Sh. Grigorian, A. A. Saharian*—Casimir effect for a perfect conducting spherical surface. 28
- A. G. Bagdov, G. S. Besirgenian*—The equations and solutions of interacting finite power light beams in the homogeneous nonlinear dissipative media 34

MOLECULAR BIOLOGY

- L. A. Rukhikian, R. A. Zakharian S. N. Ayrapetian*—On the mechanism of dc-RNA derpressing effect on the virus sorbtion on cellular membrane 40

PHYSIOLOGY

- G. E. Grigorian, A. M. Stolberg, I. A. Jughatspantan*—Effect of compound 3 amino-2-izo-propyl-6,6-dimethyl-4-oxsa-5, 6-digidro 811-pyrano [4',5':4,5] thieno [2, 3-d] pyrimidin-4-ona (AN-442-132) on maze learning in albino rats 45

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 2.07.86 г. Подписано к печати 30.09.86 г. ВФ 05727
Бумага № 2, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.
Учет. изд. 3,32 л. Тираж 455. Заказ 475. Издат. 6848
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туниев, А. С. Туниев

Об одном методе обращения прямоугольных матриц
и его применении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 20/XII 1984)

В данной работе предлагаются метод обращения прямоугольных матриц и его применение в линейном программировании. В основу этой работы положены теоретические положения, изложенные в ^(1,2). Предлагаемые методы отличаются от приведенных в ^(1,2) тем, что здесь рассматривается случай, когда $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, $i \neq j$. Приведем необходимые обозначения из ⁽³⁾. Вектор $x = \{x_i\}$, где i пробегает множество N , обозначим $x[N]$. Если $K \subset N$, то соответствующий „кусоч“ вектора обозначим $x[K]$. Символ $a[M, N] = \{a_{ij}\}$ обозначает матрицу, индексы строк и столбцов которой пробегают множество M и N .

1°. *Описание метода.* Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \quad (1)$$

где $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть ранг $a[M, N]$ равен r и первые ее r строк линейно-независимы. Обозначим $R = \{1, 2, \dots, r\}$, $N' = \{0, 1, \dots, n\}$ и положим $a^0[M, N'] = a[M, N']$. Сущность метода заключается в следующем.

1. Последовательно для $s = 1, 2, \dots, r$ выбираем $K_s \subseteq N$ такое что $\|a^{s-1}[s, K_s]\| \neq 0$, и полагаем

$$a^s[i, N'] = \begin{cases} \frac{a^{s-1}[i, N']}{\|a^{s-1}[i, K_s]\|}, & \text{при } i = s, \\ a^{s-1}[i, N'] + \alpha_i^s a^s[s, N'], & \text{при } i \in M \setminus s, \end{cases}$$

где $\alpha_i^s = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i, K_s]a^s[s, K_s]$, $i \in M \setminus s$.

2. Через r шагов получим эквивалентную систему $a^r[R, N]x[N] = a^r[R, 0]$.

3. Пусть $K = \bigcup_{s \in R} K_s$. Строим матрицу $b[R, K] = \{b[s, j]\}$, где

$$b[s, j] = \begin{cases} a^s[s, j], & j \in K_s, \\ 0 & j \in K \setminus K_s \ (s \in R). \end{cases} \quad (2)$$

4. Пусть $x^0[K, N'] = b[R, K]^T a^r[R, N']$. Формируем систему $x^0[K, N]x[N] = x^0[K, 0]$.

Теорема 1. При введенных предположениях справедливы утверждения:

а) $x^0[K, K]x^0[K, j] = x^0[K, j], j \in N'$;

б) $x^0[K, j]$ ортогонален ядру матрицы $b[R, K], j \in N$;

в) $a[M, K]x^0[K, j] = a[M, j], j \in N'$,

при этом подобное разложение в рассматриваемом смысле (при $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$) является единственным.

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме теоремы 2 из (1).

Следствие. Если $x^0[K, 0]$ и $x'[K', 0]$ — решения (особые) системы (1) соответственно при $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ и $\{K'_1, K'_2, \dots, K'_r\}$, где $K_s \subseteq K'_s, s \in R$; $K' = \bigcup_{s \in R} K'_s$, то $\|x^0[K, 0]\| \geq \|x'[K', 0]\|$.

Замечание 1. Если в описанном методе на каждом s -ом шаге преобразуются только элементы, стоящие ниже s -ой ($s=1, 2, \dots, s$) строки, то для нахождения решения системы (1), согласно формуле (4) из (1), организуется обратный ход.

2°. Об одном классе полуобратных матриц. Пусть $b[N, N] = -a[M, N]^T a[M, N]$. Рассмотрим нормальное матричное уравнение

$$b[N, N]x[N, M] = a[M, N]^T. \quad (3)$$

Пусть $K=N=\bigcup_{s \in R} K_s$, где $K_s \subseteq N, s \in R$. При $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ применим к системе (3) описанный выше метод. Тогда после r шагов получим эквивалентную систему вида $p[N, N]x[N, M] = \bar{a}[N, M]$, где $\bar{a}[N, M]$ — особое решение (3).

Теорема 2. Полуобратная матрица $\bar{a}[N, M]$ обладает первыми тремя свойствами частично-псевдообратной матрицы (1) и в рассматриваемом смысле единственна.

3°. Линейное программирование. Рассмотрим задачу линейного программирования: максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N] \quad (4)$$

при

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], x[N] \geq 0[N]. \quad (5)$$

3°. 1. Признаки оптимальности особого плана. Пусть $K \subseteq N$ и $\bar{a}[K, M]$ полуобратная матрица относительно матрицы $a[M, K]$. Тогда: а) расширенные оценки $x^0[0, j] = c[K]\bar{a}[K, M]a[M, j] - c[j] = \bar{a}[K, M]^T c[K]^T a[M, j] - c[j], j \in N'$; б) если $x^0[0, j] \geq 0, j \in N'$ и $x[K] = \bar{a}[K, M]a[M, 0] \geq 0[K]$, то из критерия оптимальности Л. В. Канторовича (4) следует, что $x[K]$ — решение задачи (4), (5), а $\lambda[M] = \bar{a}[K, M]^T c[K]^T$ — решение сопряженной к ней задачи.

3°. 2. Модификация расширенного симплекс-метода (2). Пусть задача (4), (5) не вырожденная, $x^0[M, N'] = a[M, N']$, $x^0[M, M]$ — единичная матрица, $x^0[M, 0]$ — опорный план и $x^0[0, j], j \in N'$ — оценки (при $j=0, c[j]=c$). Опишем переход от s -го шага к $s+1$, где $s=0, 1, 2, \dots, s$. Пусть после $s \geq 1$ шагов получена система $x^s[M, N]x[N] = x^s[M, 0]$, оценки $x^s[0, j], j \in N'$, и система векторов $\{b[i, K_i]\}_{i \in S_d}$, где $S_d = \{1, 2, \dots, d\}, d \leq m$ (при $s=0 S_d = \emptyset$).

Описание метода. 1. Пусть $x_s[0, j] < 0, j \in \bar{K}_{s+1}$, где $\bar{K}_{s+1} \subseteq N^*$.

2. Пусть $x^s[i, 0] > 0, i \in M^{**}$. Определяем

$$\theta_f = \frac{x^s[f, 0]}{\|x^s[f, \bar{K}_f]\|} = \min_i \frac{x^s[i, 0]}{\|x^s[i, \bar{K}_i]\|}$$

для тех i , для которых вектор $x^s[i, \bar{K}_i]$ содержит все положительные компоненты вектора $x^s[i, \bar{K}_{s+1}]$. Ясно, что $\bar{K}_i \subseteq \bar{K}_{s+1}$.

3. Шаг обобщенного жорданового исключения. Полагаем

$$x^{s+1}[i, N'] = \begin{cases} \frac{x^s[i, N']}{\|x^s[i, \bar{K}_i]\|}, & \text{при } i=f, \\ x^s[i, N'] + \alpha_i^{s+1} x^{s+1}[f, N'], & \text{при } i \neq f, \end{cases}$$

где $\alpha_i^{s+1} = x_i^{s+1}(\bar{K}_f) = -x^s[i, \bar{K}_f] x^{s+1}[f, \bar{K}_f]$, $i \neq f$.

4. Если $f \in S_d$, то полагаем $\bar{b}[f, K_f] = x^{s+1}[f, \bar{K}_f]$, $\bar{b}[i, K_i] = b[i, K_i]$, $i \in S_d \setminus f$.

Если $f \notin S_d$, то полагаем $\bar{b}[f, K_f] = x^{s+1}[f, \bar{K}_f]$, $\bar{b}[i, K_i] = b[i, K_i]$, $i \in S_d$ ($f+d \leq m$). (6)

5. Если оценки $x^{s+1}[0, j] \geq 0, j \in N$, то переходим к п. 6, в противном случае переходим к п. 1, где полагаем $s = s+1$.

6. Пусть $f \in S_d$. Полагаем $K = \bigcup_{i \in S_d} K_i$ и строим матрицу $\bar{b}[S_d, K] = \{\bar{b}[i, j]\}$, где

$$\bar{b}[i, j] = \begin{cases} \bar{b}[i, j], & \text{при } j \in K_i, \\ 0, & \text{при } j \in K \setminus K_i \ (i \in S_d). \end{cases}$$

Тогда $\{x[K] = \bar{b}[S_d, K]^T x^{s+1}[S_d, 0], x[M \setminus S_d] = x^{s+1}[M \setminus S_d, 0]\}$ — особое решение задачи (4), (5).

Если $f \notin S_d$, то в пункте 6, с учетом (6), полагаем $K = K \cup K_f$, $S_d = S_d \cup f$.

Доказательство конечности метода проводится по схеме теоремы 2 из (2).

З а м е ч а н и е 2. Предлагаемый метод с учетом 3°.1 может лечь в основу для пересмотра метода обратной матрицы и двойственного симплекс-метода.

4°. О дальнейшем развитии LU-разложения***. Используя параметрическое линейное преобразование (1), можно показать, что если $a[M, N]$ матрица полного ранга, то при некоторых естественных предположениях и выборе $\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$

$$a[M, N] = L_K[M, M] U_K[M, N], \text{ где } K = N = \bigcup_{i=1}^m K_i \quad (7)$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле единственное. Здесь $L_K[M, M]$ нижняя треугольная матрица, диагональные

* Если для некоторого i , $x^s[i, j] < 0$ и $x^s[0, j] < 0$, то задача (4), (5) неразрешима

** Если для некоторых i , $x^s[i, 0] = 0$, то определяем коэффициенты разложения по псевдобазису и, как в расширенном симплекс-методе, исключаем нулевые компоненты плана.

*** Результаты, изложенные в п. 4°, сформулированы и доказаны А. Д. Туниевым.

элементы которой равны единице, а „куски“ строк $u_K[M, N]$ удовлетворяют условию: $u_K[i, K_i]u[j, K_i] = 0, i < j$ ($i=1, 2, \dots, m-1; j=2, 3, \dots, m$).

Разложение (7) можно представить в виде произведения элементарных матриц (подобно тому, как это делается для LU -разложения). Последнее позволяет оценить ошибки округления методов, основанных на данном разложении. В частности, на основании (7) был обобщен метод Краута и с учетом соображения из (5) показано, что если в обобщенном методе Краута используется режим накопления скалярного произведения, то точность полученного результата определяется $\beta = \beta(K)$, которая характеризует рост элементов.

НПО Министерства местной промышленности
Армянской ССР
ЕрНИПИ АСУГ

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻՅԱՆ, Ա. Ս. ԹՈՒՆԻՅԱՆ

Ուղղանկյան մատրիցների հակադարձելիության մի մեթոդի և նրա կիրառությունների մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է ոչ թե մեկ, այլ մի քանի էլեմենտների (ուղղորդ-վեկտորի) ընտրությամբ պայմանավորված ուղղանկյան մատրիցների հակադարձման մեթոդ:

Առաջարկվող մեթոդը հիմք է հանդիսանում Մուր-Պենրոուզի հայտնի մատրիցային ընդհանրացման համար: Ցույց է տրված ստացված արդյունքների կիրառությունը գծային ծրագրավորման մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Д. Туниев, Кибернетика, № 3, 1983. ² А. Д. Туниев, Кибернетика, № 4, 1984.
³ И. В. Романовский, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977.
⁴ Л. В. Канторович, ДАН СССР, т. 37, № 7—8 (1942). ⁵ В. В. Воеводин, Вычислительные основы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1961.

УДК 517.518.13

Ву Ким Туан

О факторизации интегральных преобразований типа свертки
 в пространстве L_2^Φ

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 13/II 1985)

В работе ⁽¹⁾ было показано, что любое классическое интегральное преобразование типа свертки ⁽²⁾ на полупрямой (исключая преобразование Меллина) факторизуется через композиции более простых интегральных преобразований и порядок композиции зависит от свойств оригинала и составляющих операторов. В настоящей статье такая зависимость и сама возможность факторизаций исследуются в пространстве L_2^Φ , введенном в ^(3,4).

Определение 1. H -преобразованием функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ называется следующий интеграл:

$$(Hf)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} H(s) f^*(1-s) x^{-s} ds, \quad (1)$$

сходящийся в среднем квадратичном. Здесь $f^*(s) \in L_2(\sigma)$ — преобразование Меллина функции $f(x)$ ^(4,5), $\sigma = \{s, \operatorname{Re} s = 1/2\}$, а

$$H(s) = \Gamma \begin{bmatrix} a_1 + \alpha_1 s, \dots, a_A + \alpha_A s, b_1 - \beta_1 s, \dots, b_B - \beta_B s \\ c_1 + \gamma_1 s, \dots, c_C + \gamma_C s, d_1 - \delta_1 s, \dots, d_D - \delta_D s \end{bmatrix} \quad (2)$$

— образ ядра H -преобразования; компоненты векторов (α_A) , (β_B) , (γ_C) , (δ_D) предполагаются положительными, а компоненты векторов (a_A) , (b_B) , (c_C) , (d_D) — комплексными, причем

$$\operatorname{Re} a_i + \alpha_i/2 \neq -n, \quad i = \overline{1, A}; \quad \operatorname{Re} b_i - \beta_i/2 \neq -n, \quad i = \overline{1, B}; \quad (3)$$

$$\operatorname{Re} c_i + \gamma_i/2 \neq -n, \quad i = \overline{1, C}; \quad \operatorname{Re} d_i - \delta_i/2 \neq -n, \quad i = \overline{1, D}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что все классические преобразования типа свертки (Лапласа, Стильтеса, Ханкеля, Харди, Мейера, Нараина... ^(2,5-8)) и им обратные являются частными случаями H -преобразования.

Упорядоченную пару (κ, μ) , где

$$\kappa = \sum_{j=1}^A \alpha_j + \sum_{j=1}^B \beta_j - \sum_{j=1}^C \gamma_j - \sum_{j=1}^D \delta_j, \quad (4)$$

$$\mu = (A + B - C - D)/2 + \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^C c_j + \sum_{j=1}^D d_j - \sum_{j=1}^A a_j - \sum_{j=1}^B b_j \right) + \\
+ \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^B \beta_j + \sum_{j=1}^C \gamma_j - \sum_{j=1}^A \alpha_j - \sum_{j=1}^D \delta_j \right), \quad (5)$$

назовем характеристическим числом H -преобразования (1).

Теорема 1. Пусть $2\operatorname{sgn}x + \operatorname{sgn}\mu \geq 0$. Тогда H -преобразование (1) существует и представимо в виде

$$(Hf)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} h_1(xy) f(y) \frac{dy}{y}, \quad (6)$$

$$h_1(x) = \frac{x}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{H(s)}{1-s} (x^{-s} ds). \quad (7)$$

Если еще $2\operatorname{sgn}x + \operatorname{sgn}(\mu - 1/2) > 0$, то H -преобразование (1) может быть записано и в следующей форме:

$$(Hf)(x) = \int_0^{\infty} h(xy) f(y) dy, \quad (8)$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} H(s) x^{-s} ds, \quad (9)$$

причем интегралы (7) и (9) сходятся в среднем квадратичном.

Отметим, что формулы (6), (8) соответственно осуществляют классические преобразования типа свертки и Ватсона ^(4,5,9).

Преобразование (1) в случае $2\operatorname{sgn}x + \operatorname{sgn}\mu < 0$ при переходе к оригиналам приводит к оператор-функциям ^(3,4,10).

Определение 2. Пусть $2\operatorname{sgn}\alpha + \operatorname{sgn}\beta \geq 0$. Пространством $L_2^{(\alpha, \beta)}$ называется множество таких функций $f(x)$ на $(0, \infty)$, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} e^{-\alpha\pi s/2} s^{-\beta} F(s) x^{-s} ds, \quad F(s) \in L_2(\sigma). \quad (10)$$

Очевидно, что множество пространств $L_2^{(\alpha, \beta)}$ вполне упорядочено:

$$L_2^{(\alpha', \beta')} \subset L_2^{(\alpha, \beta)} \text{ при } 2\operatorname{sgn}(\alpha' - \alpha) + \operatorname{sgn}(\beta' - \beta) > 0, \quad (11)$$

и что $L_2^{(0,0)} \equiv L_2(0, \infty)$.

Замечание. Если $\alpha > 0$ и β фиксированы, то существует функция $\Phi(s)$ из класса $\mathcal{P}$ ⁽⁴⁾ такая, что $L_2^{(\alpha, \beta)} = L_2^{\Phi}$.

Теорема 2. а) Пространство $L_2^{(0, \beta)}$ состоит из функций $f(x)$, представимых в виде $f(x) = x^{-\beta} I_{0+}^{\beta} \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$, а I_{0+}^{β} — оператор дробного интегрирования ^(1,2,4). б) Пространство $L_2^{(\alpha, \beta)}$ при $\alpha > 0$ состоит из функций $f(x)$, для которых существуют такие зависящие только от f постоянные числа $M_f > 0$, что

$$\left\| \left(x \frac{d}{dx} \right)^m \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2\alpha x}{(m+k-\alpha-\beta-1/2)} \frac{d}{dx} \right) f(n^{2\alpha} x) \right\|_2 < M_f, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

где m — некоторое натуральное число, причем $m > \alpha + \beta$.

Теорема 3. H -преобразование (1) существует в пространстве $L_2^{(\alpha, \beta)}$ тогда и только тогда, когда $2\operatorname{sgn}(\alpha + x) + \operatorname{sgn}(\beta + \mu) \geq 0$. При этом условии H -преобразование изоморфно отображает пространство $L_2^{(\alpha, \beta)}$ на пространство $L_2^{(\alpha+x, \beta+\mu)}$.

Если, кроме того, $2\operatorname{sgn}x + \operatorname{sgn}(\mu - 1/2) > 0$ и выполняются условия

$$\operatorname{Re} a_i + \alpha_i/2 > 0, \quad i = \overline{1, A}; \quad \operatorname{Re} b_i - \beta_i/2 > 0, \quad i = \overline{1, B}; \quad (13)$$

$$\operatorname{Re} c_i + \gamma_i/2 > 0, \quad i = \overline{1, C}; \quad \operatorname{Re} d_i - \delta_i/2 > 0, \quad i = \overline{1, D},$$

то формула (1) может быть представлена в классическом виде:

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{B+C, A+D}^{A, B} \left(xy \middle| \begin{matrix} (1-b_B, \beta_B), (c_C, \gamma_C) \\ (a_A, \alpha_A), (1-d_D, \delta_D) \end{matrix} \right) f(y) dy, \quad (14)$$

где $H_{p, q}^{m, n} \left(x \middle| \begin{matrix} (a_p, \alpha_p) \\ (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right)$ — H -функция Фокса (11).

Определение 3. Если $H_1, \dots, H_n$ — такие H -преобразования, что их образы ядер $H_1(s), \dots, H_n(s)$ удовлетворяют условию

$$H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s) = H(s), \quad (15)$$

где $H(s)$ определяется по формуле (2), то будем говорить, что H -преобразование (1) факторизуется на преобразования $H_1, \dots, H_n$.

Пусть преобразования $H_1, \dots, H_n$ имеют соответственно характеристические числа $(x_1, \mu_1), \dots, (x_n, \mu_n)$ $\left(x = \sum_{i=1}^n x_i, \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \right)$.

Теорема 4. Если $2\operatorname{sgn}(x + \alpha) + \operatorname{sgn}(\mu + \beta) \geq 0$, то H -преобразование (1) в $L_1^{(\alpha, \beta)}$ можно факторизовать через преобразования $H_1, \dots, H_n$, расположенные в следующем порядке:

$$(Hf)(x) = (H_{i_n} \dots H_{i_2} H_{i_1})f = g(x), \quad (16)$$

тогда и только тогда, когда $(i_1, \dots, i_n)$ — такая подстановка чисел $(1, 2, \dots, n)$, что

$$2\operatorname{sgn} \left(\alpha + \sum_{k=1}^j x_{i_k} \right) + \operatorname{sgn} \left(\beta + \sum_{k=1}^j \mu_{i_k} \right) \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

причем для $H_1, \dots, H_n$ всегда существует по крайней мере одна подстановка, удовлетворяющая условию (17). При указанных условиях обратный к (16) оператор $(H^{-1}g)(x)$ факторизуется следующим образом:

$$(H^{-1}g)(x) = (H_{i_1}^{-1} \dots H_{i_n}^{-1})g. \quad (18)$$

Замечание. Если (17) имеет место для всех подстановок, что справедливо, например, в случае

$$2\operatorname{sgn} \left(x - \sum_{i=1}^n |x_i| \right) + \operatorname{sgn} \left(\beta - \sum_{i=1}^n |\mu_i| \right) \geq 0, \quad (19)$$

то порядок действий операторов в (16) может быть произвольным.

Очевидно, что все обратные к H -преобразованиям также являются H -преобразованиями, поэтому в теоремах 3, 4 величины $2\operatorname{sgn}x + \operatorname{sgn}\mu$ и $2\operatorname{sgn}x_i + \operatorname{sgn}\mu_i$ для операторов H и H_i могут иметь произвольные знаки или обращаются в нуль.

Пример. Пусть $L\{\varphi(t); x\}$ и $L^{-1}\{\varphi(t); x\}$ — прямое и обратное преобразования Лапласа функции $\varphi(t)$ в точке x ^(3,8). Образы ядер преобразований $x^{a_1/a_2} L\{t^{a_1+a_2-1} f(t^{a_2}); x^{1/a_2}\}$, $x^{(1-a_1-a_2)/a_2} L^{-1}\{t^{-a_2} f(t^{a_2}); x^{1/a_2}\}$, $\operatorname{Re} a_1 + a_2/2 > 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$, очевидно равны $\Gamma(a_1 + a_2 s)$, $1/\Gamma(a_1 + a_2 s)$, поэтому по определению 3 H -преобразование (1) при условиях (13) факторизуется на композицию преобразований Лапласа вида

$$x^{a_1/a_2} L\{t^{a_1+a_2-1} f(t^{a_2}); x^{1/a_2}\}, \quad i = \overline{1, A}, \quad (20)$$

$$x^{-b_1/b_2} L\{t^{b_1-b_2-1} f(t^{-b_2}); x^{-1/b_2}\}, \quad i = \overline{1, B},$$

$$x^{(1-c_1-1/b_1)/b_1} L^{-1}\{t^{-c_1} f(t^{1/b_1}); x^{1/b_1}\}, \quad i = \overline{1, C},$$

$$x^{(d_1-b_1-1)/b_1} L^{-1}\{t^{-d_1} f(t^{-b_1}); x^{-1/b_1}\}, \quad i = \overline{1, D}.$$

Замечание. Если условия (13) не выполняются, то вместо (20) нужно взять операторы, порожденные равенством (15) из ⁽¹⁾.

В заключение отметим, что в качестве H_i можно брать также преобразования Ханкеля, Римана—Лиувилля, Вейля, Стильтеса, Мейера, ... и им обратные ⁽¹⁾.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

ՎՈՒ ԿԻՄ ՏՈՒՆՆ

Փաթույթի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների ֆակտորիզացիայի մասին
 L^{Φ} տարածություններում

(¹) աշխատանքում ցույց է տրված, որ փաթույթի տիպի կամայական դասական ինտեգրալ ձևափոխություն ֆակտորիզացվում է ավելի պարզ ինտեգրալ ձևափոխությունների կոմպոզիցիայի միջոցով և որպես ձևափոխության բաղադրիչներ կարելի է վերցնել Հապլասի մոդիֆիկացված օպերատորները, իսկ կոմպոզիցիայի կարգը կախված է օրիգինալ ֆունկցիայի հատկություններից և բաղադրիչ օպերատորների տեսքից:

Այս աշխատանքում այդպիսի կախվածությունը և ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը ուսումնասիրվում է L^{Φ} տարածությունում (^{2,3}): Աշխատանքում սահմանված բնութագրիչ տարածության հատկության և ձևափոխությունների օգնությամբ հաջողվում է նկարագրել պատկեր ֆունկցիաների տարածությունը, ինչպես նաև L^{Φ} -ում որոշ ֆակտորիզացիայի իրավացիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. А. Брычков, Х. -Ю. Глеске, О. И. Марицев, Итоги науки и техники ВИНТИ, мат. анализ, т. 21 (1983). ² В. А. Диткин, А. П. Прудников, Итоги науки ВИНТИ, мат. анализ, т. I (1966). ³ С. А. Акопян, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 13, № 1 (1960). ⁴ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. ⁵ Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.-Л., 1948. ⁶ В. А. Диткин, А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Наука, М., 1974. ⁷ О. И. Марицев, Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул), Наука и техника, Минск, 1978. ⁸ R. Narain, Proc. Amer. Math. Soc., v. 14, № 2 (1963). ⁹ G. N. Watson, Proc. London Math. Soc. (2), v. 35 (1933). ¹⁰ И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер, Преобразование типа свертки, ИЛ, М., 1958. ¹¹ С. Fox, Trans. Amer. Math. Soc., v. 98, № 3 (1961).

УДК 519.248:531.9

МАТЕМАТИКА

Д. Г. Мартиросян

О фазовой диаграмме модели Поттса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 7/III 1985)

Пусть Z^v — v -мерная целочисленная решетка, $v \geq 2$. Расстояние между двумя точками $x, y \in Z^v$, $x = (x_1, \dots, x_v)$, $y = (y_1, \dots, y_v)$, определим как $d(x, y) = \sum_{i=1}^v |x_i - y_i|$. Мы будем рассматривать модель Поттса, в которой спин $\varphi(x)$, $x \in Z^v$ принимает значения в конечном множестве $Q = \{1, \dots, q\}$, а формальный гамильтониан записывается в виде

$$H = - \sum_{\langle x, y \rangle} \delta_{\varphi(x), \varphi(y)}, \quad \varphi(x), \varphi(y) \in Q, \quad (1)$$

где суммирование производится по всем парам ближайших соседей x, y на решетке Z^v и δ — символ Кронекера.

Котецки и Шлосман ⁽¹⁾, используя метод положительной отражательности, доказали наличие в этой модели точки $\beta_c > 0$ сосуществования $(q+1)$ фаз при больших q . Другой подход к решению этой задачи, основанный на применении контурной техники, был предложен Динабургом и Синаем в ⁽²⁾ и независимо от них Брикмонтом, Куродой и Лебовицем.

В настоящей работе приводится полное описание трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний в модели Поттса, задаваемой гамильтонианом (1), при всех $v \geq 2$, при любых β и достаточно больших q .

Теорема. Для любого $v \geq 2$ найдется $q_0(v)$ такое, что при всех $q > q_0(v)$ для гиббсовских состояний, описываемых гамильтонианом (1) и параметрами β, q , справедливо следующее утверждение. Существует β_c такое, что

1. При $\beta = \beta_c(q)$ имеется в точности $(q+1)$ гиббсовских состояний $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(q)}$ (чистых фаз) таких, что любое трансляционно-инвариантное гиббсовское состояние P представимо в виде

$$P = \alpha_0 P^{(0)} + \dots + \alpha_q P^{(q)}, \quad \text{где } \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \text{ и } \sum \alpha_i = 1.$$

2. При $\beta > \beta_c(q)$ имеется в точности q гиббсовских состояний $P_\beta^{(1)}, \dots, P_\beta^{(q)}$ таких, что любое трансляционно-инвариантное состояние представимо в виде

$$P = \alpha_1 P_\beta^{(1)} + \dots + \alpha_q P_\beta^{(q)}, \quad \text{где } \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \text{ и } \sum \alpha_i = 1.$$

3. При $\beta < \beta_c(q)$ гиббсовское состояние единственно в классе всех гиббсовских состояний с заданными значениями параметров.

Заметим, что, пользуясь другими методами, Лане, Мессаже и Руис получили аналогичный результат, но только в случае $\nu=2$.

Приведем набросок доказательства теоремы. Для этого заметим, что, как известно ⁽²⁾, при достаточно больших q найдется такое значение параметра $\beta_c(q)$, при котором можно построить q обычных контурных моделей и одну контурную модель с взаимодействием так, что каждая из этих контурных моделей описывает гиббсовское случайное поле с заданными значениями параметров. Отправляясь от этих контурных моделей, мы строим q новых контурных моделей при $\beta > \beta_c(q)$ и одну контурную модель при $\beta < \beta_c(q)$ таким образом, что гиббсовские случайные поля, отвечающие этим контурным моделям, являются крайними точками совокупности гиббсовских состояний. Это составляет содержание приводимых ниже основных лемм. Начнем с определений. Заметим сначала, что значение упомянутого выше параметра $\beta_c(q)$, существование которого установлено в ⁽¹⁾, ⁽²⁾, является значением обратной температуры (так называемым критическим значением), при котором происходит фазовый переход первого рода. Из теоремы 1 вытекает, что все значения для $\beta_c(q)$ совпадают, однако в дальнейшем изложении мы этого не будем предполагать. Поэтому для определенности можно считать, что $\beta_c(q)$ совпадает со значением, найденным в ⁽²⁾. Далее, конфигурацией $\varphi(V)$ на множестве $V \subset Z^{\nu}$ будем называть любое отображение $\varphi: V \rightarrow Q$, где множество $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ значений спина было введено выше. Будем говорить, что конфигурация φ находится в фазе p , $1 \leq p \leq q$, в точке $x \in Z^{\nu}$, если $\varphi(x) = p$, причем $\varphi(y) = \varphi(x) = p$ для всех y таких, что $d(x, y) = 1$, и находится в фазе 0 в точке x , если из $d(x, y) = 1$ следует $\varphi(y) \neq \varphi(x)$. Если конфигурация φ не находится ни в одной из фаз 0, 1, ..., q в точке $x \in Z^{\nu}$, то x называется неправильной точкой конфигурации φ . Располагая множеством неправильных точек конфигурации, можно общепринятым способом (см. ⁽²⁾) ввести понятие границы $B(\varphi)$ конфигурации φ . Как известно, это дает возможность ввести важное понятие контура. Контуров мы будем обозначать через $\gamma^{(p)}$, считая, что p является значением фазы лишь в точках, примыкающих к контуру извне. Через $E^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)$ будем обозначать кристаллическую статистическую сумму контура $\gamma^{(p)}$, при значении параметра β , через $Z(\gamma^{(p)}|F)$ — кристаллическую статистическую сумму $\gamma^{(p)}$, соответствующую контурному функционалу F . Далее, точку $x \in Z^{\nu}$ будем называть устойчивой для конфигурации φ , если φ находится в фазе $p \neq 0$ в точке x при $\beta > \beta_c(q)$, в фазе 0 при $\beta < \beta_c(q)$ и может находиться в любой фазе 0, 1, ..., q при $\beta = \beta_c(q)$. Наконец, для конфигурации φ обозначим через $V^{(u)}(\varphi)$ объединение всех связанных компонент множества неустойчивых точек конфигурации φ , примыкающих к границе ∂V , а через $P_V(\cdot | \varphi(Z^{\nu} \setminus V))$ обозначим распределение Гиббса в объеме V с граничными условиями $\varphi(Z^{\nu} \setminus V)$ вне V .

Лемма 1. Для любого $\nu \geq 2$ найдется $q_0(\nu) > 0$ такое, что для всех $q > q_0(\nu)$

а) при $\beta \geq \beta_c(q)$ существуют q контурных функционалов $\{F^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)\}$, $p=1, 2, \dots, q$, таких, что

$$\Xi^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta) = Z\{\gamma^{(p)} | F^{(p)}(\cdot, \beta)\}, \quad p=1, 2, \dots, q, \quad (2)$$

где функция $F^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)$ монотонно возрастает по β при $\beta \geq \beta_0$ для любых фиксированных p , $1 \leq p \leq q$, и контура $\gamma^{(p)}$;

б) при $\beta \leq \beta_c(q)$ существуют функционал $\{F^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta)\}$ и взаимодействие $G^{(0)}$ такие, что

$$\Xi^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta) = Z^{(0)}(F^{(0)}, G^{(0)}). \quad (3)$$

Здесь функция $G^{(0)}$ не зависит от β , а $F^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta)$ монотонно убывает по β при $\beta \leq \beta_c$.

Доказательство этой леммы существенно опирается на результаты работы (3).

Лемма 2. Пусть $v \geq 2$ и последовательность кубов $V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$ такова, что $\bigcup V_n = Z^v$, а граничные условия $\varphi_n(Z^v \setminus V_n)$ вне V_n произвольны. Для числа $q_0(v)$ из предыдущей леммы и любого значения β обратной температуры найдется такое $c(\beta, q)$ при $q > q_0(v)$, что

$$\lim P_{V_n}(\varphi(V_n) : |V^{(u)}(\varphi)| > c(\beta, q) |\partial V| | \varphi_n(Z^v \setminus V_n)) = 0$$

равномерно по всем граничным условиям.

Результаты, сформулированные в теореме, получаются из этих лемм путем не очень сложных выкладок, методика которых достаточно хорошо известна. Однако последнее утверждение теоремы может быть получено из приведенных лемм лишь в классе трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний. Общее утверждение требует привлечения значительно более сложных построений. Доказательства лемм, особенно центральной леммы 2, носят конструктивный характер и основаны на специальном подборе особых множеств конфигураций и сравнении их вероятностей.

Приношу благодарность Е. И. Динабургу и Я. Г. Синаю за полезные обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Դ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Փոթսի մոդելի ֆազային դիագրամի վերաբերյալ

Աշխատանքում դիտարկվում է Փոթսի մոդելը β պարամետրով և q -արժեք սպինով: Ապացուցվում է կրիտիկական β_c շերմաստիճանի հակադարձ արժեքի միակնությունը: Պարզվում է, որ $\beta = \beta_c$ դեպքում կարելի է նշել ճիշտ $q+1$ ալիպսի Դիրսի բաշխումներ, որ ցանկացած տրանսլացիոն ինվարիանտ Դիրսի բաշխումը պատկանում է նրանց ուղուցիկ թաղանթին: Իսկ $\beta > \beta_c$ դեպքում գոյություն ունեն ճիշտ q Դիրսի բաշխումներ, որոնց ու-

ռուցիկ թաղանթը պարունակում է ցանկացած տրանսլյացիոն-ինվարիանտ
Գիբսի բաշխում: Վերջապես $\beta < \beta_c$ դեպքում Գիբսի բաշխումը միակն է պա-
րամետրերի տվյալ արժեքներ ունեցող Գիբսի բոլոր բաշխումների դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ R. Kotecky, S. B. Shlosman, Commun. Math. Phys., v. 83, 493—515 (1982).
- ² Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, Тр. конф. по мат. физике, Дубна, август, 1984. ³ Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, Тр. Моск. мат. о-ва, т. 17, 213—242 (1967).

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/III. 1985)

В работе ⁽¹⁾ доказано, что для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ по системе Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$. В той же работе доказано, что для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ и любого положительного ε существует функция $g(x)$ такая, что

1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$;

2) ряд Фурье—Хаара функции $g(x)$ абсолютно сходится.

В работах ^(2,3) доказана возможность представления измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по другим системам.

В настоящей заметке аналогичные теоремы доказываются для рядов по системе Франклина (о системе Франклина см. например ⁽⁴⁻⁶⁾).

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. Для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд по системе Франклина, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ почти всюду конечная измеримая функция. Тогда для любого положительного ε существует функция $g(x)$ такая, что

1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$;

2) ряд Фурье—Франклина функции $g(x)$ абсолютно равномерно сходится, т. е. равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 g(t) f_n(t) dt \right| |f_n(x)|,$$

где $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная система Франклина.

Лемма 1. Пусть $[a, b] \subset [0, 1]$ отрезок с двоично-рациональными концами, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и N любое натуральное число.

Тогда существует полином по системе Франклина $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x)$ такой, что

1) $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = 0$, когда $x \notin [a, b]$;

- 2) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < \gamma$ для любого $x \in [a-\delta, b+\delta]$;
- 3) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f(x)| < \frac{c}{\varepsilon^2}$, где c — некоторая абсолютная константа;
- 4) $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = 1$, когда $x \in A$, где $A \subset [a, b]$ и $\mu(A) > (1-\varepsilon)(b-a)$.

Доказательство. Выберем натуральное q такое, что

$$2^{3-q} \leq \varepsilon < 2^{4-q}. \quad (1)$$

Пусть $a = \frac{m_1}{2^{k_1}}$ и $b = \frac{m_2}{2^{k_2}}$. Разделим отрезок $[a, b]$ на равные интервалы $\Delta_i = \left[a + \frac{i-1}{2^k}, a + \frac{i}{2^k} \right]$ длины 2^{-k} , где $k \geq \max(k_1, k_2)$ (число k пока не фиксировано, оно будет выбрано позже). Определим непрерывные функции $\varphi_i(x)$ следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \notin \Delta_i \\ 1, & \text{когда } x \in \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+q}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+q}} \right], \\ 2^{q-1}-2,5, & \text{когда } x = a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+q}} \text{ или } x = a + \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{k+q}}, \\ 0, & \text{когда } x = a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{2}{2^{k+q}} \text{ или } x = a + \frac{i}{2^k} - \frac{2}{2^{k+q}}, \\ \text{линейная на остальных отрезках.} \end{cases} \quad (2)$$

Легко видеть, что

$$\int_{\Delta_j} \varphi_i(x) dx = 0 \text{ для любых } i \text{ и } j \quad (3)$$

и

$$\int_{\Delta_j} x \varphi_i(x) dx = 0 \text{ для любых } i \text{ и } j. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$.

Учитывая, что функции Франклина $f_n(x)$ с номерами $n \leq 2^k$ линейны на отрезках Δ_j , из (3) и (4) следует

$$\int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k. \quad (5)$$

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ ряд Фурье — Франклина функции $\varphi(x)$. Учитывая (5), (2) и интерполяционные свойства системы Франклина (см. (8)), имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+q}+1} a_n f_n(x). \quad (6)$$

При достаточно больших k из (6), (2), (1) следуют условия 1 и 4. Для коэффициентов a_n имеем (см. (5))

$$|a_n| = \left| \int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f_n\|_1 < c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} 2^q. \quad (7)$$

Откуда получаем (см. (5), формула (3, 4))

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+q+1}} |a_n f_n(x)| = \sum_{\mu=k}^{k+q} \sum_{n=2^{\mu+1}}^{2^{\mu+1}} |a_n f_n(x)| < c_2 \sum_{\mu=k}^{k+q} 2^{\frac{\mu}{2}} \cdot \sup_{2^{\mu+1} \leq n \leq 2^{\mu+1}} |a_n| < < c 2^{2q} < \frac{c}{\varepsilon^2}. \quad (8)$$

Остается доказать условие 3. Пусть $t \in [a - \delta, b + \delta]$, t_n определено, как в (5), формулой (2.2). Обозначим через $\rho(x, A)$ расстояние точки x от множества A . Тогда, используя оценки 3. Чисельского для функций системы Франклина (см. (5), (6.1)), получим (где $0 < q < 1$)

$$|a_n f_n(t)| \leq c_3 |a_n| n^{\frac{1}{2}} q^{n|t-t_n|} = c_3 n^{\frac{1}{2}} q^{n|t-t_n|} \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx \right| \leq \leq c_4 n q^{n|t-t_n|} n^{\frac{1}{2}} q^{n \cdot \rho(t_n, (a, b))} \cdot \|\varphi\|_1 < c_4 n q^{n(|t-t_n| + \rho(t_n, (a, b)))}. \quad (9)$$

Учитывая, что $|t - t_n| + \rho(t_n, (a, b)) > \rho(t, (a, b)) \geq \delta$, из (9) получим

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+q+1}} |a_n f_n(t)| \leq c_4 \sum_{n=2^{k+1}}^{\infty} n \cdot q^{n\delta}. \quad (10)$$

Учитывая, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n q^{n\delta}$ сходится для любого $\delta > 0$, можно k выбрать настолько большим, чтобы $c_4 \sum_{n=2^{k+1}}^{\infty} n q^{n\delta} < \gamma$. Откуда следует условие 2 леммы 1. Лемма доказана.

Из леммы 1 легко получается

Лемма 2. Пусть $\varphi(x)$ ступенчатая функция и ε любое положительное число. Тогда для любого натурального N существует полином по системе Франклина $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x)$ такой, что

$$1) \sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = \varphi(x), \text{ когда } x \in A, \text{ где } A \subset [0, 1] \text{ и } \mu A > 1 - \varepsilon;$$

$$2) \sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < c_5 \cdot \frac{\|\varphi\|_\infty}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 1 доказывается с помощью этих лемм, по методу работ (1-3).

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности функцию можно считать непрерывной. Пусть $\varepsilon_k = 2^{-k\varepsilon}$, $k = 1, 2, \dots$ и $\delta_k = \varepsilon_{k+1}$. Существуют ступенчатые функции $\psi_n(x)$ такие, что

$$\|\varphi_k - f\|_\infty < \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Из (10) следует, что для функций $\psi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, где $\varphi_0 = 0$, имеем

$$\|\psi_k\| < 2\delta_{k-1}, \quad n \geq 2 \quad (12)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \neq f(x). \quad (13)$$

Из леммы 2 следует существование полиномов по системе Франклина, обладающих следующими свойствами:

$$\sum_{n=N_k}^{M_k} |a_n f_n(x)| < c_3 \frac{\|\psi_k\|_{\infty}}{\varepsilon_k^2} < 2c_3 \cdot \varepsilon_k,$$

$$N_1 < M_1 < N_2 < \dots < M_k < N_{k+1} < \dots$$

$$\sum_{n=N_k}^{M_k} a_n f_n(x) = \psi_k(x), \text{ когда } x \in A_k, \text{ где } \mu(A_k) > 1 - \varepsilon_k.$$

Легко видеть, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ требуемый ряд. Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Հափելի ֆունկցիաները ըստ ֆրանկլինի համակարգի բացարձակ զուգամետ շարքերով ներկայացման վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Կամայական համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ շարք, որը համարյա ամենուրեք բացարձակ զուգամիտում է $f(x)$ -ին, որտեղ $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ -ը Ֆրանկլինի օրթոնորմավորված համակարգն է:

Թեորեմ 2. Կամայական համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի և կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $g(x)$ ֆունկցիա այնպես, որ

$$1. \mu\{x: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$$

2. $g(x)$ -ի Ֆուրյե-Ֆրանկլինի շարքը բացարձակ հավասարաչափ զուգամետ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Գ. Գ. Арутюнян, ДАН АрмССР, т. 42, №3, с. 134—140 (1966). ² Р. С. Давтян, Мат. заметки, т. 19 с. 673—680 (1976). ³ G. G. Gevorgian, Analysis math., v. 8 (4) p. 239—256 (1982). ⁴ Z. Ciesielski, Studia Math., v. 23, p. 141—157 (1963). ⁵ Z. Ciesielski, ibidem, v. 27, p. 289—323 (1966). ⁶ Z. Ciesielski, Sdudi Math., v. 53, p. 277—301 (1975).

УДК 519.61

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Д. З. Геворкян

О сложности линейных вычислений на многопроцессорных системах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 1/II 1986 г.)

При решении различных прикладных задач часто требуется вычислять произведение $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ фиксированной $(N \times N)$ -матрицы F на произвольный вектор переменных $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$:

$$\bar{y} = F \cdot \bar{x} \quad (1)$$

При этом большинство решаемых задач а) имеют массовый характер; б) должны решаться в ограниченном времени; в) требуют обработки больших массивов информации. Это приводит к необходимости разработки вычисляющих произведение (1) параллельных алгоритмов, предназначенных для реализации на многопроцессорных вычислительных системах, представляющих собой множество (из K) процессорных элементов (ПЭ), объединенных с помощью специальной системы коммутации и выполняющих любую из l заданных операций (^{1,2}). Если K —ограничено, то говорят, что алгоритм обладает ограниченным параллелизмом, в противном случае—неограниченным параллелизмом.

В зависимости от параллелизма выполнения операций и передачи данных многопроцессорные системы делятся на системы типа SIMD (одна команда—много данных), MISD (много команд—одно данное) и MIMD (много команд—много данных) (²).

В работе (³) были построены реализуемые на системах типа SIMD параллельные алгоритмы с ограниченным параллелизмом, вычисляющие дискретные ортогональные преобразования Фурье, Уолша, ВКФ.

В данной работе исследуется сложность вычисления произведения (1) на системах типа SIMD и MISD. С этой целью введены модели линейных SIMD- и MISD-вычислений и найдены нижние оценки для числа параллельных шагов, необходимых для вычисления (1) посредством этих вычислений. Построены асимптотически оптимальные—с числом шагов, по порядку не превышающим найденную нижнюю оценку,—линейные SIMD-вычисления с ограниченным параллелизмом, вычисляющие широкий класс дискретных ортогональных преобразований (Фурье, Хаара, Уолша и др.). Предложенные алгоритмы обладают тем свойством, что число K используемых процессорных элементов может быть задано заранее, что важно с точки зрения практической реализации и надежности.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ —множество входных переменных над

полем комплексных чисел C . и пусть $z_j^s = x_{i_k}$; $-m \leq j \leq 0$; $s \in S_j \subset \{1, 2, \dots, K\}$ $x_{i_k} \in X$ (соответствие взаимнооднозначно).

Определение 1. Линейным K -параллельным SIMD-вычислением назовем последовательность групп операций такую, что j -я ($j=1, 2, \dots, L$) группа есть:

- либо $z_j^s \leftarrow z_p^r$ ($r \neq s$) для всех $s \in S_j \subset \{1, 2, \dots, K\}$ (обмены);
- либо $z_j^s \leftarrow \lambda_j^s \cdot z_q^s$ ($\lambda_j^s \in C$) для всех $s \in S_j \subset \{1, 2, \dots, K\}$ (умножения);
- либо $z_j^s \leftarrow z_t^s + z_l^s$ для всех $s \in S_j \subset \{1, 2, \dots, K\}$ (сложения).

Индексы p, q, t, l, r зависят от j и s ; $-m \leq p, q, t, l < j$; $r \in S_p$.

Каждой рабочей переменной z_j^s линейного SIMD-вычисления естественным образом соответствует некоторая линейная функция от $x_1, x_2, \dots, x_N$, называемая значением z_j^s . Скажем, что линейное K -параллельное SIMD-вычисление вычисляет произведение $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ фиксированной $(N \times N)$ -матрицы F на произвольный вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, если при любых значениях x_i значения всех y_m встречаются среди значений z_j^s , и обозначим через $SMK(F) = \{\beta\}$ класс всех таких вычислений, и пусть $SMK(F, \lambda) = \{\beta \in SMK(F) / (1/|J|) \sum_{j \in J} (1/|S_j|) \sum_{s \in S_j} |\lambda_j^s| \leq \lambda\}$, где J — множество всех индексов j , соответствующих умножениям в вычислении β .

Обозначим через $L_\beta^0, L_\beta^+, L_\beta^x$ число параллельных шагов (число групп) в вычислении β , на которых выполняются обмены, сложения и умножения на комплексные константы соответственно; $\mu \geq 1$ — отношение среднего времени умножения к среднему времени сложения на ПЭ.

Теорема 1. Пусть $\beta \in SMK(F)$ и $c = \max_{j \in J} \{2, |\lambda_j^s|^{1/\mu}\}$. Тогда

$$L_\beta^+ + \mu \cdot L_\beta^x \geq \log |\Delta(F)| / (K \cdot \log c) \quad (2)$$

где $\Delta(F)$ — наибольший по модулю минор матрицы F .

Теорема 2. Для всякого $\beta \in SMK(F, \lambda)$ справедливо неравенство

$$L_\beta^0 + (\log_2 3) \cdot L_\beta^+ + (\log_2 (\lambda + 1)) L_\beta^x \geq 2 \cdot \log_2 |\det F| / K \quad (3)$$

Определение 2. Линейным MISD-вычислением γ длины L_γ с длиной конвейера K назовем последовательность групп операций такую, что j -я ($j=1, 2, \dots, L_\gamma$) группа есть

$$\bar{v}_j^s \leftarrow A_j^s \cdot \bar{u}_j^s,$$

где $r_1 = \min\{j, K\} \geq s \geq r_2 = \begin{cases} 1, & \text{при } j \leq L-K \\ j+K-L, & \text{при } j > L-K \end{cases}$; $\bar{v}_j^s = (v_j^s(1), v_j^s(2))^T$;

A_j^s — (2×2) -матрицы с элементами $a_j^s(t, l) \in C$; $\bar{u}_j^s \in X^2$ при $s=1$ и $L-K \leq j \leq L$ и $\bar{u}_j^s = \bar{v}_{j-1}^{s-1}$ в других случаях.

Класс линейных MISD-вычислений γ с длиной конвейера K , вычисляющих произведение (1) (при любых значениях x_i значения y_m встречаются среди значений $\bar{v}_j^s(t)$, $t=1, 2$) обозначим через $MSK(F)$ и пусть

$$\text{MSK}(F, \alpha) = \{\gamma \in \text{MSK}(F) \mid \|\alpha_j^s(t, l)\| \leq \alpha; j = 1, 2, \dots, L_\gamma; s = r_1, r_1 + 1, \dots, r_1\}$$

Теорема 3. Для всякого $\gamma \in \text{MSK}(F)$ справедливо неравенство

$$L_\gamma \geq \log |\det F| / \log b, \quad (4)$$

$$\text{где } b = (1/L_\gamma) \sum_{j=1}^{L_\gamma} \left[\prod_{s=r_1}^{r_1} (1 + (1/2) \|A_j^s\|)^2 \right].$$

Теорема 4. Для всякого $\gamma \in \text{MSK}(F, \alpha)$ справедливо неравенство

$$L_\gamma \geq \log |\Delta(F)| / \log(2\alpha) + K \quad (5)$$

Покажем асимптотическую достигаемость оценок (2), (3) для достаточно широкого класса дискретных ортогональных преобразований (ДОП), т. е. для вычисления произведения (1), когда $F = H_N$ есть $(N \times N)$ -матрица ($N = q^m$), строки которой соответствуют дискретным функциям в некотором ортогональном базисе и которую можно представить в виде произведения слабозаполненных матриц (4):

$$H_N = G_{m-1} \cdot G_{m-2} \cdot \dots \cdot G_0 \quad (6)$$

Большинство элементов в матрицах $G_r (r = 0, m-1)$ равны нулю, а ненулевые элементы независимо от базисной системы функций расположены в определенном порядке (4). На представлении (6) основаны алгоритмы быстрых дискретных ортогональных преобразований (БДОП), вычисляющие ДОП с матрицей H_N по соотношениям:

$$\bar{z}_0 = x; \bar{z}_{r+1} = G_r \cdot \bar{z}_r, r = 0, 1, \dots, m-1; \bar{y} = \bar{z}_m$$

Для вычисления $\bar{z}_{r+1}$ по $\bar{z}_r$ (r -й этап БДОП) требуется q^{m-1} умножений $(q \times q)$ -матриц $V_r^s (s = 1, q^{m-1})$, составленных из элементов G_r , на $(q \times 1)$ -подвекторы вектора $\bar{z}_r$. В зависимости от элементов V_r^s можно получить класс $\mathcal{H}$ матриц H_N , соответствующих ДОП с алгоритмами БДОП, в частности, дискретным преобразованиям Фурье (ДПФ), Уолша (ДПУ), Виленкина-Крестенсена (ВКФ), Хаара (ДПХ) (4).

Лемма. Пусть $H_N \in \mathcal{H}$. Тогда ее можно представить в виде:

$$H_N = (G'_{m-1} \cdot P_q) \cdot (G'_{m-2} \cdot P_q) \cdot \dots \cdot (G'_0 \cdot P_q), \quad (7)$$

где $G'_r (r = 0, m-1)$ — квазидиагональные матрицы с блоками V_r^s на диагонали; P_q — матрица перестановки:

$$P_q \cdot (\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{N-1})^T =$$

$$= (\alpha^0, \alpha^{N/q}, \dots, \alpha^{(q-1)N/q}, \alpha^1, \alpha^{N/q+1}, \dots, \alpha^{(q-1)N/q+1}, \dots, \dots, \alpha^{N-1})^T$$

Теперь приведем вычисляющие ДОП с матрицами $H_N \in \mathcal{H}$ линейные SIMD-вычисления, которые схематически можно описать следующим образом.

Алгоритм I.

Вход. Вектор $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$, $N = q^m$.

Число ПЭ. $q^{m'}$ ($m' \leq m-1$).

Выход. Вектор $\bar{y} = H_N \cdot \bar{x}$, где $H_N \in \mathcal{H}$.

Вычисление. Вычисление состоит из m этапов, определяемых соотношениями:

$$\bar{z}_0 = \bar{x}; \bar{z}_{r+1} = G'_r \cdot (P_q \cdot \bar{z}_r), r = 0, 1, \dots, m-1; \bar{y} = \bar{z}_m$$

На каждом этапе сначала осуществляется перестановка компонент исходного вектора $\bar{z}_r = (\sigma_r^0, \dots, \sigma_r^{N-1})^T$ согласно оператору P_q . Затем выполняются $q^{m-m'-1}$ операций, p -я из которых ($p=0, 1, \dots, q^{m-m'-1}-1$) состоит из следующих шагов:

шаг I. В каждую s -ю ветвь вычисления (в s -й ПЭ) засылается под-вектор $\bar{z}_r^l = (\sigma_r^l, \sigma_r^{lq+l}, \dots, \sigma_r^{(q-1)N/q+l})^T$ вектора $P_q \cdot \bar{z}_r$, где $l = p \cdot q^{m'} + s$ ($s = \overline{1, q^m}$).

шаг II. Параллельно в каждой ветви s ($s = \overline{1, q^m}$) вычисляются $V_r^l \cdot \bar{z}_r^l$.

шаг III. Полученные на втором шаге результаты посылаются обратно.

Перейдем теперь к случаю, когда число ПЭ— K задано заранее. *Алгоритм II* (вычисление ДОП потока векторов).

Вход. Поток векторов $\chi = \{\bar{x}(1), \bar{x}(2), \dots, \bar{x}(i), \dots\}$.

Число ПЭ. Произвольное K .

Выход. Поток векторов $Y = \{\bar{y}(1), \bar{y}(2), \dots, \bar{y}(i), \dots\}$, где $\bar{y}_i = H_N \cdot \bar{x}(i)$, $H_N \in \mathcal{H}$; $i = 1, 2, \dots$

Вычисление. Представим число K в виде:

$$K = \sum_{h=0}^{t-1} q^{m_h},$$

где $0 \leq m_h \leq m-1$; $m_{h+1} \geq m_h$ и сгруппируем ветви вычисления (соответственно ПЭ системы), включив в h -ю группу q^{m_h} ветвей. Из очередных K векторов потока χ образуем t массивов, включив в h -й массив $X(h)$ q^{m_h} векторов. В каждой h -й группе ветвей параллельно вычисляются ДОП векторов из h -го массива, последовательно для каждого вектора $\bar{x}(i) \in X(h)$ применяя алгоритм 1 при $m' = m_h$. После этого вычисляются ДОП следующих K векторов потока χ и т. д.

Утверждение. При любом K построенные линейные K -параллельные SIMD-вычисления асимптотически оптимальны (т. е. асимптотически достигаемы оценки (2) и (3)) в классах $SMK(H_N, \lambda)$, где λ определяются элементами матриц G_r в представлении (6) для $H_N \in \mathcal{H}$. В частности для ДПФ, ДПУ, ВКФ $\lambda = 1$.

Замечание. Полученные результаты можно обобщить для задачи вычисления ДОП функций, определенных на абелевой группе G порядка $N = q^m$ по системе характеров G .

Автор выражает искреннюю благодарность С. С. Агаяну за постановку задач и руководство работой.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Դ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Բազմապարզանքային համակարգերում գծային հաշվումների բարդության վերաբերյալ

Աշխատանքում հետազոտվում է SIMD և MISD տեսակի համակարգերի (2) միջոցով $(N \times N)$ -մատրիցի և $(N \times 1)$ -վեկտորի արտադրյալը հաշվելու բարդությունը: Այդ նպատակով ներմուծված են գծային SIMD-և MISD-հաշ-

վումների հասկացությունները և գտնված են դրանց վրա սահմանված բարդության ստորին գնահատականներ: Կառուցված են դիսկրետ օրթոգոնալ ձևափոխություններ հաշվող ասիմպտոտիկ օպտիմալ (ներմուծված բարդության նկատմամբ) գծային SIMD-հաշվումներ, ըստ որում պահանջվող պրոցեսորային տարրերի թիվը կամայական է, որը շատ կարևոր է գործնական տեսանկյունով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Элементы параллельного программирования, Радио и связь, М., 1983. ² Алгоритмы, математическое обеспечение и архитектура многопроцессорных вычислительных систем, Наука, М., 1982. ³ S. S. Agaian, D. Z. Gevorgian, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 44, Theory of algorithms, Péch (Hungary), p. 15—25 (1984). ⁴ А. И. Солодовников, И. И. Канатов, А. М. Спиваковский, Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 2, Изд-во ЛГУ, с. 99—112 (1976).

УДК 593.12

ФИЗИКА

В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян

Вывод уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка с учетом краевых эффектов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 15/IV 1985)

Плотность вероятности перехода $w(t_0, x_0; t, x)$ из состояния x_0 , которое система имела в момент t_0 , в состояния, для которых x лежит между x и $x+dx$, к моменту t для цепи Маркова удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского (УС)

$$w(t_0, x_0; t+\tau, x) = \int w(t_0, x_0; t, z) w(t, z; t+\tau, x) dz, \quad (1)$$

где интегрирование распространено на всю область изменения x .

Для перехода от УС к дифференциальному уравнению Эйнштейна—Фоккера—Планка (УЭФП) (1) умножается на произвольную гладкую функцию $g(x)$, обращающуюся в нуль на границах области изменения $w(t_0, x_0; t+\tau, x)$ вместе со своей первой производной и интегрируется по всей области изменения $w(t_0, x_0; t+\tau, x)$. Далее $g(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x-z)$ вокруг точки z . В результате получается

$$\begin{aligned} \int w(t_0, x_0; t+\tau, x) g(x) dx &= \int w(t_0, x_0; t, z) g(z) dz \int w(t, z; t+\tau, x) dx + \\ &+ \int dz w(t_0, x_0; t, z) \int w(t, z; t+\tau, x) \left\{ g'(z)(x-z) + \right. \\ &\left. + \frac{g''(z)}{2!} (x-z)^2 + \frac{g'''(z)}{3!} (x-z)^3 + \dots \right\} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

В первом интеграле справа в (2) заменим переменную интегрирования z на x и перенесем его налево. Получим

$$\begin{aligned} \int g(x) \frac{w(t_0, x_0; t+\tau, x) - w(t_0, x_0; t, x)}{\tau} dx &= \int w(t_0, x_0; t, z) \left[g'(z) \frac{x-z}{\tau} + \right. \\ &\left. + \frac{g''(z)}{2!} \cdot \frac{(x-z)^2}{\tau} + \frac{g'''(z)}{3!} \cdot \frac{(x-z)^3}{\tau} + \dots \right] dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{z-x}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (z-x) w(t, x; t+\tau, z) dz = A(x, t); \quad (4)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(z-x)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (z-x)^2 w(t, x; t+\tau, z) dz = 2B(x, t); \quad (5)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{|z-x|^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (z-x)^2 w(t, x; t+\tau, z) dz = 0. \quad (6)$$

Условие (6)—это фактически и есть условие, допускающее переход к дифференциальному уравнению второго порядка (УЭФП).

Учтем теперь наличие «края». Очевидно, что при этом должно выполняться

$$w(t_0, x_0; t, x_{\text{кр}}) = 0 \quad (7)$$

при $z \geq x_{\text{кр}}$. Действительно, по своему определению (смыслу) $w(t_0, x_0; t, x)$ появляется в результате введения статистического ансамбля (в результате «набора статистики»). В конкретном случае: в некоторую точку z в момент t_0 помещается N невзаимодействующих частиц, которые при $t > t_0$ начинают распространяться. Тогда $w(t_0, z; t, x_{\text{кр}}) dx$ указывает вероятность попадания частицы в область $x_{\text{кр}}, x_{\text{кр}} + dx$. Так как в статистическом ансамбле $N \rightarrow \infty$, то статистика в принципе «набирается» и для «прикраевой» области (например, если первоначальное число частиц 10^6 , а в «прикраевую» область попала одна, то для 10^{12} частиц число попавших в «прикраевую» область уже достаточно для «набора статистики»). При этом, однако, в соответствии с (7) при $N \rightarrow \infty$ ни одна частица не попадает в область $x \geq x_{\text{кр}}$.

Проведем в (3) интегрирование по частям. В силу условия (7) интегрирование нужно проводить не до $+\infty$, а до $x_{\text{кр}}$. При этом $g(x)$ таково, что $g(x_{\text{кр}}) = 0$ и $g'(x_{\text{кр}}) = 0$. Используя обозначения, введенные в (4), (5), и интегрируя первый член в (3) справа по частям, получим:

$$A(t, z) w(t_0, x_0; t, z) g(z) \Big|_{z=-\infty}^{z=x_{\text{кр}}} - \int g(z) \frac{\partial}{\partial z} [A(t, z) w(t_0, x_0; t, z)] dz. \quad (8)$$

Дважды интегрируя по частям второй член справа, в (3) получим:

$$\begin{aligned} & g'(z) B(t, z) w(t_0, x_0; t, z) \Big|_{z=-\infty}^{z=x_{\text{кр}}} - g'(z) \frac{\partial}{\partial z} [B(t, z) w(t_0, x_0; t, z)] dz = \\ & = g(z) \frac{\partial}{\partial z} [B(t, z) w(t_0, x_0; t, z)] \Big|_{z=-\infty}^{z=x_{\text{кр}}} - \int g(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(t, z) w(t_0, x_0; t, z)] dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая, что на границах интервала интегрирования $g(z) = 0$; $g'(z) = 0$, изменяя обозначения переменной интегрирования в (8), (9) с z на x , получим в (3):

$$\int g(x) \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [A(t, x) w] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(t, x) w \right\} dx = 0. \quad (10)$$

Так как это уравнение должно иметь место для произвольных $g(x)$ (обращающихся в нуль вместе с $g'(x)$ на границах области интегрирования), то плотность вероятности перехода $w(t_0, x_0; t, x)$ должна удовлетворять УЭФП

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(t, x)w] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(t, x)w]. \quad (11)$$

Условием, допускающим переход от интегрального УС к дифференциальному УЭФП, является (6). Исследуем поведение этого выражения (его применимость) при приближении x к $x_{кр}$. Условие (6) легко понять, если принять во внимание, что для малых $|z-x|$, $|z-x|^3$ очень мала, а с ростом $|z-x|w(t, x; t+\tau, z)$ должна убывать столь быстро, что члены, пропорциональные $\sim |z-x|^n w(t, x; t+\tau, z) \rightarrow 0$, стремятся к нулю вместе с $\tau \rightarrow 0$. Именно это требование позволяет рассматривать x как непрерывно изменяющуюся величину. Заметим, что выводы, полученные с помощью этого условия, неприменимы для очень малых промежутков времени, например, для броуновского движения в газе, если под x подразумевать скорость движения частицы и считать, что в момент соударения она меняется мгновенно (см. (1)). Условие (7) логично дополнить следующим:

$$w(t, z; t+\tau, x_{кр}) = 0, \quad (12)$$

если $|x_{кр} - z| \geq v\tau, \quad (13)$

где v — скорость (максимальная) перемещения частицы. Физически это условие понятно. Вероятность перехода определяется возможностью (хотя бы в принципе) для определенной (пусть хотя бы единственной) частицы ансамбля совершить перескок. Условие (6) (необходимое для возможности перехода от УС к УЭФП) в случаях, когда оно выполняется для $w(t, x; t+\tau, z)$ с бесконечными „хвостами“, будет выполняться и для „обрезанных“ в смысле (7), (12), (13) $w(\dots)$, так как вклад, даваемый в интеграл областью „хвостов“, мал (с ростом $|x-z|$ $w(t_0, z; t+\tau, x)$ быстроубывающая функция).

Подчеркнем, что интегрирование по частям в (3) допустимо, если выполняются условия:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \sum_i \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} g(x) \frac{\partial}{\partial z} [A(t, z)w(t_0, x_0; t, z)] dz = 0; \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \sum_i \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} \frac{\partial}{\partial z} [g'(z)B(t, z)w(t_0, x_0; t, z)] dz = 0; \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \sum_i \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} \left\{ g(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(t, z)w(t_0, x_0; t, z)] \right\} dz = 0. \quad (16)$$

Здесь x_i — точки, в которых подынтегральные выражения в (14) — (16) имеют особенности, т. е. интегрирование по частям оказывается допустимым, когда интегралы в (14) — (16) существуют хотя бы в смысле несобственных (2).

При выполнении условий (14) — (16) переход от УС к УЭФП допустим и в «прикраевой» области. Однако значения коэффициентов $A(t, x)$, $B(t, x)$ уже не будут теми же, что и во „внутренних“ об-

ластях. Действительно, условие (7) приводит к тому, что $A(t, x)$ и $B(t, x)$ задаются выражениями (4), (5) с верхним пределом интегрирования, равным $x_{кр}$ (а не ∞ , как для „внутренней“ области). Последнее же обстоятельство приводит к тому, что даже если во „внутренней“ области $w(\dots)$ обладает изотропностью и однородностью (следовательно, как легко убедиться, $A(t, x) \equiv 0$), то в „прикраевой“ области он не равен нулю и, более того, в УЭФП соответствующий член оказывается определяющим.

Например, полагая

$$w(t, x; t+\tau, z) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} \delta(z-x, h) & z < x-h \\ \frac{1}{2\tau} \delta(z-x, -h) & z > x-h, \end{cases} \quad (17)$$

мы получим дискретную модель случайного блуждания, изученную нами в (3) и подтверждающую в этом частном случае изложенный выше вывод.

Авторы глубоко признательны Д. М. Седракяну и А. О. Меликяну за стимулирующий интерес к работе и полезные замечания.

Ереванский государственный университет

Վ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, ՅՈՒ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

էյնշտեյն—Ֆոկեր—Պլանկի հավասարման արտածումը եզրային էֆեկտների հաշվարկմամբ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ եզրի առկայության դեպքում Սմոլու-խովսկու ինտեգրալ հավասարումից կարելի է ստանալ էՖՊ հավասարումը, Այդ հավասարման գործակիցները այնպիսին են, որ «ամպ» ներքին անդամում ստացվում է էՖՊ հայտնի հավասարումը, ընդ որում «Մերձեզրային» տիրույթում գործակիցների տեսքը տարբերվում է առայժմ հայտնի տեսքից: Ստացվում են նաև պայմաններ, որոնք թույլ են տալիս անցում կատարել ինտեգրալ Սմոլուսկովսկու հավասարումից դիֆերենցիալ էՖՊ-ին՝ «եզրի» հաշվարկմամբ, նույնագործի հայտնի պայմաններն էապես լրացվում են, նեղացնելով, այդպիսով, այն ֆունկցիաների հնարավոր դասը, որոնք բավարարում են դիֆերենցիալ էՖՊ հավասարմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. А. Леонтович, Статистическая физика, Наука, М., 1983. ² Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 1, Физматгиз, М., 1963. ³ В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян, ДАН АрмССР, т. 81, № 1 (1985).

УДК 530.145

ФИЗИКА

Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян

Эффект Казимира для идеально проводящей
сферической поверхности

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 27/V 1985)

В 60-е гг. в лабораторных условиях было обнаружено явление притяжения между двумя идеально проводящими плоскопараллельными пластинами, соответствующее отрицательному давлению (¹)

$$p = - \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4},$$

где d — расстояние между проводниками. Оно возникает в результате возмущения нулевых колебаний электромагнитного вакуума пластинами (²). В аналогичной ситуации для сверхпроводящей сферической поверхности изменение полной энергии вакуума было рассчитано в период с 1968 по 1978 гг. (³⁻⁵):

$$E = 0,04618 \frac{\pi \hbar c}{a}, \quad (1)$$

где a — радиус сферы. В работах (⁶⁻⁸) приближенным численным методом вычислены компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного вакуума

$$\tau_{ik}^{\pm} = \text{diag}(\epsilon, -p, -p_{\perp}, -p_{\perp}),$$

где ϵ — плотность вакуумной энергии, а p и $p_{\perp}$ — соответствующие давления в радиальном и азимутальном направлениях. Ниже точным численным методом рассчитаны ϵ , p , $p_{\perp}$ и установлен ряд свойств τ_{ik} .

В случае сферически-симметрической задачи операторы электромагнитного поля удобно разлагать в ряд по состояниям фотона с определенными значениями энергии $\hbar\omega$, полного момента $\hbar\sqrt{l(l+1)}$, где $l=1, 2, 3 \dots$, его проекции $\hbar m (-l \leq m \leq l)$ и четности $(-1)^{l+1+\lambda}$. Рассмотрим вектор-потенциал в кулоновской калибровке

$$\vec{A} = \sum_{\omega l m \lambda} (c_{\omega l m \lambda} \vec{A}_{\omega l m \lambda} + c_{\omega l m \lambda}^+ \vec{A}_{\omega l m \lambda}^*), \quad (2)$$

где $c_{\omega l m \lambda}$, $c_{\omega l m \lambda}^+$ — операторы уничтожения и рождения фотона, $\lambda=0$ для фотонов магнитного типа и $\lambda=1$ для фотонов электрического типа (⁹). Элементарные гармоники $\vec{A}_{\omega l m \lambda}$ находятся путем решения уравнений Максвелла в пустоте при граничных условиях

$$\vec{E} \times \vec{n} = \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3)$$

на сверхпроводящей поверхности $r=a$. В (3) $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{n}=\vec{r}/r$ — единичный вектор, а r — радиальная координата сферической системы координат, начало которой мы поместим в центре сферы. Функции $A_{\omega l m \lambda}$ приведены в (9,10). С помощью выражений

$$\varepsilon = \langle 0 | (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) | 0 \rangle / 8\pi, \quad p_{\perp} = (\varepsilon - p) / 2, \quad (4)$$

$$p = \varepsilon - \langle 0 | [(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 + (\vec{n} \cdot \vec{H})^2] | 0 \rangle / 4\pi,$$

где $|0\rangle$ — амплитуда состояния электромагнитного вакуума, и разложений $\vec{E}$, $\vec{H}$, вытекающих из (2), после суммирования по m находим, что внутри сферы

$$\varepsilon = \frac{\hbar c}{8\pi a^3} \sum_{\omega l \lambda} \omega \frac{l j_{l+1}(\omega r) + (l+1) j_{l-1}(\omega r) + (2l+1) j_l(\omega r)}{j_l(\omega a) - j_{l-1}(\omega a) j_{l+1}(\omega a)} \quad (5)$$

$$p_{\perp} = \frac{\hbar c}{8\pi a^3 r^2} \sum_{\omega l \lambda} \frac{l(l+1)(2l+1) j_l^2(\omega r)}{\omega [j_l(\omega a) - j_{l-1}(\omega a) j_{l+1}(\omega a)]}$$

Здесь j_l — сферическая функция Бесселя, а ω пробегает дискретный набор значений, определяемый условиями (3):

$$j_l(\omega a) = 0 \quad \text{при } \lambda = 0, \quad (6)$$

$$d[aj_l(\omega a)]/da = 0 \quad \text{при } \lambda = 1.$$

В соответствии со стандартной процедурой перенормировки расходящихся сумм нужно в (5) ввести обрезавшую функцию $\psi(\mu\omega)$ (μ — параметр обрезания), $\psi(0)=1$, после чего все суммы становятся конечными. Теперь задача сводится к вычислению предела

$$\text{reg} \langle 0 | \tau_{ik} | 0 \rangle = \lim_{\mu \rightarrow +0} [\langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a) | 0 \rangle - \lim_{a \rightarrow \infty} \langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a) | 0 \rangle].$$

Нужно также доказать, что результат не зависит от вида обрезавшей функции. С этой целью воспользуемся формулой

$$\sum_{z_n > 0} \frac{f(z)}{s'(z_n)} = w + \int_0^{\infty} f(t) dt + i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f(it)}{\exp[-2\pi i s(it)] - 1} - \frac{f(-it)}{\exp[2\pi i s(-it)] - 1} \right\} dt \quad (7)$$

где $w=0$, если $s(0) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $w=f(0)/2s'(0)$, если $s(0)=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В (7) суммирование ведется по всем неотрицательным z_n , для которых $s(z_n)=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом предполагается, что функции $s(z)$, $f(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$ аналитичны в полуплоскости $x>0$, $s'(z_n) \neq 0$ и

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \Phi(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \Phi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\Phi(x, y) = f(z) \{1 - \exp[-2\pi i s(z) \text{sgn}(y)]\}^{-1}$. Доказательство равенства (7) не представляет особого труда. В литературе рассмотрен

его частный случай $s(z)=z$, известный под названием формулы Абеля—Плана ⁽¹¹⁾. Функцию $s(z)$ определим выражением ⁽³⁾

$$s_{\lambda}(z) = \begin{cases} -(1/\pi) \arctg[j_1(z)/n_1(z)] & \text{при } \lambda=0 \\ -(1/\pi) \arctg\{[z/j_1(z)]' / [zn_1(z)]'\} & \text{при } \lambda=1 \end{cases} \quad (9)$$

так, чтобы в (5) суммирование по ω (определяемое уравнениями (6)) велось по целочисленным значениям функции $s_{\lambda l}(\omega a)$. В (9) $n_1(z)$ — сферическая функция Неймана, а штрих над функцией означает производную по ее аргументу. Нетрудно видеть, что $j_1^2(z) - j_{l-1}(z)j_{l+1}(z) = \pi s_{1l}'(z)/z^2$, когда $z = \omega a$. По этой причине функция $f(z)$, фигурирующая в (7), аналитична. С помощью асимптотических разложений функций Бесселя ⁽¹²⁾ можно убедиться, что $f(z)$ и $s(z)$ удовлетворяют условиям (8). Следовательно, обобщенная формула Абеля—Плана (7) применима к (5), и регуляризация τ_{lk} сводится к отбрасыванию первого интеграла в правой части (7). В результате

$$q = -\frac{\hbar c}{4\pi^3 a^4} \lim_{\mu \rightarrow +0} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi\left(\frac{\mu}{a} z\right) F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p, p_{\perp}, \quad (10)$$

где

$$x = r/a < 1, \quad \chi(y) = [\psi(iy) + \psi(-iy)]/2,$$

$$F_l^{(q)} = z^2 \Omega_l(z) [li_{l+1}^2(zx) + (l+1)li_{l-1}^2(zx) - (2l+1)li_l^2(zx)], \quad (11)$$

$$F_l^{(p_{\perp})} = l(l+1)(2l+1) \frac{z}{x^2} \Omega_l(z) li_l^2(zx), \quad \Omega_l(z) = \frac{k_l(z)}{l_l(z)} + \frac{[zk_l(z)]'}{[zli_l(z)]'}.$$

а $li_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} I_{l+1/2}(z)$, $k_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} K_{l+1/2}(z)$ — модифицированные сферические функции Бесселя I и III рода ⁽¹²⁾. Для частного вида обрезающей функции $\psi(y) = e^{-y}$ соотношения (10), (11) были получены в ⁽⁵⁾ другим способом.

Анализ асимптотических разложений функций $F_l^{(q)}$ показывает, что в (10) интеграл и сумма сходятся настолько быстро, что к пределу $\mu \rightarrow 0$ можно переходить непосредственно под интегралом. Имеем (см. (11))

$$q = -\frac{\hbar c}{4\pi^3 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p, p_{\perp}, \quad (12)$$

независимо от выбора функции $\psi(\mu\omega)$ в области $0 < \omega < \infty$. За пределами проводящей сферы $x = r/a > 1$ с помощью аналогичных выкладок можно вновь прийти к результату (12), не зависящему от вида $\psi(\mu\omega)$. При этом новые $F_l^{(q)}(z, x)$ отличаются от (11) заменой функций $li_l(z)$, $k_l(z)$ местами.

Оказывается, что вакуумный тензор энергии-импульса удовлетворяет ковариантному уравнению гидродинамики $\tau_{i,k}^k = 0$. В сферически-симметрическом случае оно сводится к выражению

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2}{r}(p - p_{\perp}) = 0, \quad (13)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, используя рекуррентные соотношения для i_l, k_l .

Простые выражения получаются в центре и на больших расстояниях от проводящей сферы. Здесь дают вклад только мультиполя $l=1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= -\frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty \left[\left(\frac{z-1}{z+1} e^{2z} + 1 \right)^{-1} - \left(\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} e^{2z} - 1 \right)^{-1} \right] z^3 dz = \\ &= -0,03811 \frac{\hbar c}{a^4}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(0)}{3} &= p(0) = p_\perp(0), \quad \varepsilon'(0) = p'(0) = p'_\perp(0), \quad \varepsilon(x) \approx -4p(x) \approx \\ &\approx \frac{8}{5} p_\perp(x) \approx \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4 x^7}, \quad \text{при } x \gg 1. \end{aligned}$$

Вклад мультиполей высших порядков становится важным вблизи поверхности сферы. Для этого случая в (13) выведена формула

$$\varepsilon(x) \approx -\frac{\hbar c}{30\pi^2 a^4 (1-x)^3}, \quad x \approx 1. \quad (15)$$

Остальные компоненты τ_{ik} легко получаются из (13) и (15):

$$p(x) \approx -\frac{\hbar c}{60\pi^2 a^4 (1-x)^2}, \quad p_\perp(x) \approx \frac{1}{2} \varepsilon(x), \quad \left(\frac{\varepsilon(x)}{p(x)} \right)' = \left(\frac{p(x)}{p_\perp(x)} \right)' \approx -1, \quad x \approx 1. \quad (16)$$

Приведем также интегральное представление уравнения (13) с граничными условиями (14)

$$p(r) = \frac{1}{r^3} \int_{\eta(r)}^r \varepsilon(t) t^2 dt. \quad (17)$$

Здесь $\eta(r)$ равно нулю внутри сферы и ∞ за ее пределами. Из (16) и (17) вытекает, что заключенная внутри идеально проводящей сферы энергия вакуума — бесконечно большая отрицательная величина, а вне сферы — бесконечно большая положительная величина. При этом полная энергия $E = 4\pi a^2 \lim_{\delta \rightarrow +0} [p(a-\delta) - p(a+\delta)]$ конечна (см. (1)).

Исходя из (14) — (17) для компонент τ_{ik} можно записать следующие простые аппроксимационные формулы

$$p(x) \approx \frac{\varepsilon(0)}{3(1-x)^2} e^{-2x}, \quad p_\perp(x) \approx \varepsilon(0) \frac{1-x+x^2}{3(1-x)^3} e^{-2x} \quad \text{при } x < 1 \quad (18)$$

$$p(x) \approx -\frac{\hbar c e^{-2/x}}{8\pi^2 a^4 x^5 (x-1)^2}, \quad p_\perp(x) \approx \frac{\hbar c}{16\pi^2 a^4} \frac{2+5x(x-1)}{x^6 (x-1)^3} e^{-2/x} \quad \text{при } x > 1.$$

Результаты численных расчетов по формуле (12) приведены в таблице. Они позволяют вычислить относительную погрешность аппроксимаций (18), которая равна нескольким процентам. Величины $\varepsilon, p, p_\perp$ вычислены также и в (7,8) на основе формул, полученных в (5). В

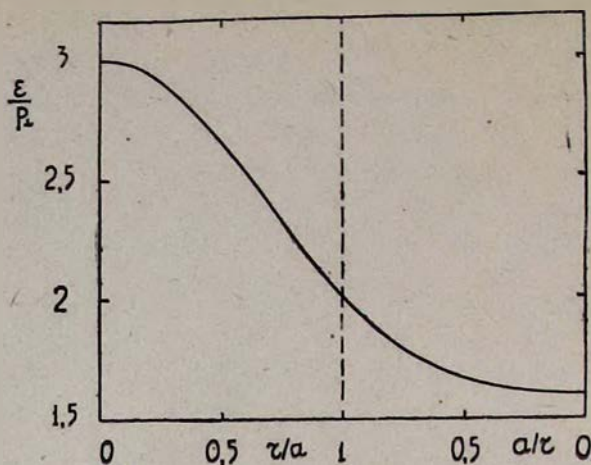


Рис. 1. Отношение плотности энергии вакуума ε к азимутальному давлению $p_{\perp}$ в зависимости от расстояния r до центра идеально проводящей сферической поверхности радиуса a . Величины ε , $p_{\perp}$ вычислены на ЭВМ по формуле (14).

r/a	ε	p	$p_{\perp}$	r/a	ε	p	$p_{\perp}$
0,0	-0,03811	-0,01270	-0,01270	1,0	∞	$-\infty$	∞
0,1	-0,03910	-0,01290	-0,01310	1,1	2,804	-0,1265	1,465
0,2	-0,04234	-0,01353	-0,01440	1,2	0,2940	-0,02379	0,158
0,3	-0,04866	-0,01470	-0,01698	1,3	0,0763	-0,008035	0,040 ₃
0,4	-0,06008	-0,01667	-0,02170	1,5	0,01157	-0,001728	0,006 ₅₁
0,5	-0,08137	-0,01998	-0,03069	1,7	0,003134	-5,496 10^{-4}	0,001 ₉₄₂
0,6	-0,1254	-0,0258	-0,04978	1,9	0,001115	-2,154 10^{-4}	6,948 10^{-4}
0,7	-0,2362	-0,03777	-0,09921	2,0	7,121 10^{-4}	-1,422 10^{-4}	4,468 10^{-4}
0,8	-0,6382	-0,06893	-0,2846	5,0	9,842 10^{-7}	-1,676 10^{-7}	4,455 10^{-7}
0,9	-4,127	-0,2193	-1,954	10,0	5,114 10^{-9}	-1,464 10^{-9}	3,309 10^{-9}
1,0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	100,0	5,066 10^{-16}	-1,449 10^{-16}	3,259 10^{-16}

этих работах авторы I_{ν} , K_{ν} заменили соответствующими асимптотическими разложениями, справедливыми при $\nu \gg 1$ ($\nu = l + 1/2$), и ограничились членами порядка $1/\nu$, не оценивая при этом допускаемую ошибку. Так как в (12) $\nu \geq 3/2$, то неясно, насколько оправданно такое приближение и верно ли оно вообще. Наши расчеты с использованием точных выражений для I_{ν} и K_{ν} позволяют определить относительную ошибку ($\sim 10\%$) результатов (^{7,8}). По точности они уступают простым формулам (18).

Авторы признательны академику АН Армянской ССР Г. С. Саакяну за интерес к работе и ценные стимулирующие обсуждения.

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Կազմիւրի էֆեկտը իդեալական հաղորդիչ սֆերիկ մակերևույթի համար

Ուսումնասիրված է էլեկտրամագնիսական վակուումի վիճակը իդեալական հաղորդիչ սֆերիկ մակերևույթի ներսում և դրսում: Ապացուցված է, որ վակուումի էներգիայի-իմպուլսի թե՛նզորը կախված չէ վերանորման եղանակից և

բավարարում է հիդրոդինամիկայի հավասարմանը: Հաշվված են այդ թեքերի բաղադրիչները և դրանց համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, Атомиздат, М., 1980. ² H. B. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., v. 51, p. 793 (1948). ³ T. H. Boyer, Phys. Rev., v. 174, p. 1764, (1968). ⁴ B. Davies, J. Math. Phys., v. 13, p. 1324(1972). ⁵ K. A. Milton, L. L. De Raad, J. Schwinger, Ann. Phys., v. 115, p. 388(1978). ⁶ K. Olaussen, F. Ravndall, Nucl. Phys., v. B 192, p. 237(1981). ⁷ I. Brevik, H. Kolbenstvedt, Ann. Phys., v. 149, p. 237(1983). ⁸ I. Brevik, H. Kolbenstvedt, Can. J. Phys., v. 62, p. 805(1984). ⁹ В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1980. ¹⁰ Дж. Джексон, Классическая электродинамика, Мир, М., 1965. ¹¹ М. А. Евграфов, Аналитические функции, Наука, М., 1968. ¹² И. Стуган, М. Абрамовиц, Справочник по специальным функциям, М., Наука, 1979. ¹³ R. Balian, B. Duplantier, Ann. Phys., v. 112, p. (1978).

УДК 535.317

ФИЗИКА

А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргян

**Уравнения взаимодействующих ограниченных мощных световых пучков
в однородных нелинейных диссипативных средах и их решения**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 5/1 1986)

В работе, в общем случае, для плоско поляризованных взаимодействующих мощных световых пучков, распространяющихся навстречу друг другу в однородных средах с насыщением и с кубической нелинейностью, получены параболические уравнения для комплексных амплитуд. Рассмотрены частные случаи: линейной и круговой поляризации одинаковых пучков. Находятся решения полученных уравнений в виде гауссовых пучков при наличии диссипации.

Имеется много работ, посвященных как исследованию свойств сред с насыщением (^{1,2}), так и решению задач самофокусировки стационарных пучков (³⁻⁶).

В (³⁻⁶) рассмотрены взаимодействия встречных пучков в однородных недиссипативных средах с кубической нелинейностью. Исследования проведены как теоретически, так и экспериментально. В частности, определены фокусные расстояния. Указаны новые оптические устройства (^{3,5,6}), в которых используется эффект взаимодействия (бистабильность).

В (⁶) для встречных бегущих волн, распространяющихся в неоднородной активной среде с кубической нелинейностью и линейной поляризацией, получены параболические уравнения для амплитуд и эйконолов. В случае однородной среды и осесимметричных пучков получены решения этих уравнений, которые позволяют исследовать ход распространения пучков. При самофокусировке определены фокусные расстояния.

1. Выведем уравнения для амплитуд и эйконолов взаимодействующих встречных пучков, распространяющихся в изотропной, однородной диссипативной среде с нелинейным законом зависимости ϵ от $\mathcal{E}$, ($\mathcal{E}$ — комплексная амплитуда монохроматической волны, а ϵ — диэлектрическая проницаемость среды).

Исходные уравнения электродинамики совместно с материальными уравнениями для ненамагничиваемых ($\mu = 1$), изотропных сред сводятся к волновому уравнению

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{D} = \text{Re}\{\vec{D}_1 e^{-i\omega t}\}$, $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E} + \bar{\epsilon} |\mathcal{E}|^2 \vec{E} + \bar{\beta} \mathcal{E}^2 \vec{E}^*$, $\bar{\epsilon} = \epsilon_s + i\epsilon_i$.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{\beta}$ — диэлектрические постоянные однородной среды. (Здесь и далее индексом * обозначаются комплексно сопряженные величины).

Решение уравнения (1) ищется в форме $\vec{E} = \text{Re}\{\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}\}$, где ω — основная циклическая частота, а $\vec{\mathcal{E}}$ для двух плоско поляризованных волн записывается в форме

$$\vec{\mathcal{E}} = (A_1 e^{ip} + B_1 e^{iq}) \vec{e}_1 + (A_2 e^{ip} + B_2 e^{iq}) \vec{e}_2, \quad (2)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — единичные векторы, находящиеся в плоскости, перпендикулярной к оси пучка ($\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$), A_1, B_1, A_2, B_2 — комплексные амплитуды волн, p, q — эйконы основных волн.

Полагая $A_1 = a_1 e^{i\varphi_1}, B_1 = b_1 e^{i\psi_1}, A_2 = a_2 e^{i\varphi_2}, B_2 = b_2 e^{i\psi_2}$, (a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные амплитуды, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ — дополнительные эйконы возбужденных волн), подставляя решение (2) в уравнение (1) и проводя осреднение по быстрым осцилляциям $p - q$ в отрезке $[0, 2\pi]$, с использованием дисперсионных соотношений (7), при предположении, что A_1, B_1, A_2, B_2 медленно меняющиеся амплитуды на длине волны, получим параболические уравнения для комплексных амплитуд (8)

$$\Delta A_1 + 2i \sum \frac{\partial A_1}{\partial x_k} a_k + \frac{\bar{\varepsilon} \omega^2}{c^2} [A_1(C + b_1^*) + A_2 b_1 b_2 e^{-i(\psi_1 - \psi_2)}] + \\ + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\beta} (2B_2 B_1^* A_2 + 2B_1 B_1^* A_1 + A_2^2 A_1^* + A_1^2 A_1^*) = 0, \quad (3)$$

где $C = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$.

(Уравнение для B_1 получается из (3) заменой $A_{1,2}$ на $B_{1,2}$, φ на ψ , a_k на b_k , а уравнения для A_2 и B_2 записываются в идентичной форме, только в нелинейных частях следует поменять индекс 1 на 2, а 2 на 1).

Рассмотрим частный случай двух одинаковых волн, распространяющихся вдоль оси x . В этом случае $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \varphi_1 = \varphi_2, \psi_1 = \psi_2, a_1 = -b_1 = k, a_{2,3}, b_{2,3} = 0$. В частности, при линейной поляризации $a_2 = 0$ и уравнения (3) примут вид

$$\Delta_{\perp} A_1 + 2ik \frac{\partial A_1}{\partial x} + 3 \frac{\bar{\varepsilon}' \omega^2}{c^2} a_1^2 A_1 = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon' = \bar{\varepsilon} + \bar{\beta}$, а $\Delta_{\perp}$ — укороченный оператор Лапласа.

В случае круговой поляризации $A_2/A_1 = i$ и в (4) следует полагать $\varepsilon' = \bar{\varepsilon}$. Отметим, что в случае одного пучка в (4) тройку перед нелинейным членом следует заменить на единицу.

Заменяя в (4) A_1 на $a_1 e^{i\varphi}$ и проводя соответствующие вычисления, получим уравнения для амплитуд и фаз. Решения упомянутых уравнений для осесимметричных гауссовых пучков записываются в форме:

$$a = \frac{a_0}{f(x')} \exp\left(-\frac{r^2}{2y^2 f^2(x')}\right), \quad \varphi = k \left[\sigma_F(x') + \frac{r^2}{2R(x')} \right]. \quad (5)$$

Смысл принятых буквенных обозначений, кроме $x' = L - |x|$, указан в (7).

Подставляя решения (5) соответственно в уравнения амплитуды и эйконала, разлагая $\exp(\dots)$ в степенный ряд и приравнявая слагаемые порядка $O(1)$ и $O(r^2)$, получим уравнения для безразмерной ширины, радиуса кривизны и набег фазы

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{n}{f^2}, \quad \frac{1}{R(x')} = \frac{d}{dx'} \ln f(x') - \frac{N}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \frac{a_0^2}{f^2(x')}, \quad \frac{d\sigma_F}{dx'} = -\frac{1}{2f^2} \times \\ &\times \left(\frac{y_0^2}{4l_1^2} - N a_0^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right), \quad \text{где } n = \frac{1}{4l_1^2} \left(1 - 4N \frac{l_1^2}{F_{\text{нл}}} \right), \\ \frac{1}{F_{\text{нл}}} &= a_0^2 \left(\frac{N}{4} k^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} a_0^2 + \frac{\varepsilon_2}{y_0^2 \varepsilon_0} \right), \quad \frac{1}{l_1^2} = \frac{2}{ky_0^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

(Уравнения, полученные в разных приближениях как для f , так и для σ , совпадают. В решении (6) для одного пучка $N=1$, а для двух пучков $N=3$.)

Решение уравнения (6) для f при граничных условиях

$$f(0)=1, \quad f'(0)=-\Gamma, \quad -\Gamma = \frac{1}{R(0)} + \frac{N}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} a_0^2 < 0$$

записывается в форме

$$x' = \frac{\sqrt{f^2(\Gamma^2 + n) - n}}{\Gamma^2 + n} - \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + n}. \quad (7)$$

Требуя, чтобы расстояние $2L$ между начальными положениями пучков было таким, что $f'(L)=0$, можно получить $f^2(L)=n/(\Gamma^2+n)$. Тогда из (7) следует, что

$$L = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + n}, \quad \frac{f^2}{f_0^2} = 1 + x^2 \frac{(\Gamma^2 + n)^2}{n}, \quad \text{где } f_0^2 = \frac{n}{\Gamma^2 + n}. \quad (8)$$

(Рассматривается пучок, идущий слева направо.)

Такой выбор начального расположения пучков обеспечивает непрерывный переход их профилей в точке $x'=L$, ($x=0$), т. е. в плоскости симметрии фронтов встречных пучков при $L=\Gamma/(\Gamma^2+n)$ имеет место гладкий переход пучков. Но ход распространения лучей в этой точке имеет излом ($\partial\varphi/\partial r = r/R(x')$, $1/R(+0) = -1/R(-0) = N/2 \times \varepsilon_1/\varepsilon_0 \cdot k a_0^2/f_0^2$).

Подставляя выражение f^2 из (8) в уравнение (6) для σ_F и проводя интегрирование при $n>0$, получим:

$$\sigma_F - \sigma_0 = -\frac{m}{2\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{L\sqrt{n}} x, \quad (9)$$

$$\text{где } m = \frac{y_0^2}{4l_1^2} \left(1 - 4N l_1^2 a_0^2 \frac{\varepsilon_1}{y_0^2 \varepsilon_0} \right).$$

Отметим, что для встречного пучка, распространяющегося справа налево, правая часть (9) меняет знак.

Из (9) следует, что

$$\frac{1}{2} (\sigma_F - \sigma_B) = \Delta - \frac{m}{2\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{L\sqrt{n}} x, \quad (10)$$

где постоянная Δ находится из равенства фаз (с точностью слагаемого $-2kL$) при $x=L$ (выходное сечение)

$$\Delta = -kL + \frac{m}{2\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{\sqrt{n}}. \quad (11)$$

Из равенств (10), (11) при $x=-L$ (входное сечение) следует, что

$$\frac{1}{2}(\sigma_F - \sigma_B) = \frac{m}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{\sqrt{n}} - kL. \quad (12)$$

Зная разность фаз на входе, можно определить пропускную способность интерферометра ⁽³⁾, решая уравнение

$$\frac{(1-\bar{R})a_0^2}{c_0^2} = [1 + F \sin^2(kL + G)]^{-1}, \quad (13)$$

где $G = -\frac{m}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \Gamma/\sqrt{n}$, C_0 — начальная интенсивность пучка перед

входом в интерферометр, $F = 4\bar{R}/(1-\bar{R})^2$, а $\bar{R}$ — коэффициент отражения зеркала. В частном случае конфокальных зеркал ($R(\pm L) = \pm 2L$), $\Gamma/\sqrt{n} = 1$ или $f_0^4 = nL(|R| - L)$, что является резонансным уравнением для нелинейного интерферометра, и решение уравнения (13) приведено в ⁽³⁾.

Другой вариант решения уравнений (6) состоит в требовании гладкости лучей при $x' = L$ ($x = 0$), ($1/R(+0) = 1/R(-0)$, $L = \Gamma/(\Gamma^2 + n) + 3/2\varepsilon_1/\varepsilon_0 \cdot a_0^2$), но при этом функция $f'(x') = df/dx'$ в этой точке будет терпеть разрыв.

Таким образом, в однородных диссипативных средах в плоскости симметрии фронтов встречных пучков имеет место или излом лучей, или излом профилей пучков. В недиссипативных средах имеет место гладкий переход как лучей, так и профилей пучков при соответствующем выборе расстояния между начальными сечениями пучков ^(3,7).

Следует отметить, что так как точное решение уравнений (6) вблизи оси симметрии встречных пучков можно представить в форме степенных рядов по r , то обнаруженный эффект для однородных диссипативных сред, по всей видимости, верен в окрестности оси симметрии. Желательно по этой задаче провести соответствующие экспериментальные исследования.

Решения (7), (9) отличаются от соответствующих решений, полученных в ^(3,5) тем, что они содержат нелинейное поглощение ($\varepsilon_1 > 0$) или усиление ($\varepsilon_1 < 0$), которое особенно важно учитывать в активных средах с эффектом бистабильности (взаимодействие пучков).

3. Рассмотрим задачу наложения волн в однородной среде с насыщением. В этом случае ⁽¹⁾

$$\varepsilon = 1 \pm \frac{4\pi|d_{12}^{\pm}|^2}{eh\sqrt{1+\alpha}} = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{\sqrt{1+\lambda|\mathcal{E}|^2}}, \quad (14)$$

где смысл величин $d_{12}^{\pm}$, h , α указан в ⁽¹⁾, ε_0 , λ — известные постоянные, ($\varepsilon_0 - 1 < 0$, $\lambda > 0$), $\mathcal{E}$ — амплитуда волны.

Для среды с насыщением уравнение (1) примет вид

$$\Delta \mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{\sqrt{1 + \lambda |\mathcal{E}|^2}} \right) \mathcal{E} = 0. \quad (15)$$

В случае встречных пучков с линейной поляризацией $\mathcal{E} = A_1 e^{ip} + B_1 e^{iq}$. Подставляя решение $\mathcal{E}$ в уравнение (15), помножая поочередно на e^{-ip} , e^{-iq} и осредняя по $p-q$ или, что то же самое, по $p-q+\varphi-\psi$, можно получить уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 - 1) A_1 + 2i\alpha_k \frac{\partial A_1}{\partial x_k} + \Delta_{\perp} A_1 + \frac{\omega^2}{c^2} A_1 (\varepsilon_0 - 1) \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{\lambda}\right) \eta + \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(\varepsilon_0 - 1)}{\pi \lambda \eta a_1} e^{i\varphi} \left\{ E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{\lambda}\right) - [1 + \lambda(a_1^2 + b_1^2)] \eta^2 F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{\lambda}\right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(и такому же уравнению удовлетворяет B_1 с той разницей, что вместо φ стоит ψ , а вместо $\alpha_k - \beta_k$).

$$\text{Здесь } \bar{\lambda}^2 = 4i\alpha_1 b_1 \eta^2, \quad \eta^2 = [1 + \lambda(a_1 + b_1)^2]^{-1}, \quad F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{\lambda}\right) E\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) -$$

эллиптические интегралы первого и второго рода.

При малых b_1 последние два слагаемых в (16) и в не приведенном уравнении для второго пучка, распространяющегося справа налево, дают

$$-\frac{\omega^2}{2c^2} \eta (\varepsilon_0 - 1) \lambda b_1^2 A_1, \quad -\frac{\omega^2}{2c^2} \eta (\varepsilon_0 - 1) \lambda a_1^2 B_1$$

И уравнения для комплексных амплитуд A_1 и B_1 сводятся к параболическому уравнению (4), в котором $3a_1^2$ в нелинейном члене заменен соответственно на $a_1^2 + 2b_1^2$ и $b_1^2 + 2a_1^2$. Подобные уравнения для неоднородной кубическо-нелинейной среды были получены в (1).

В случае одного пучка, полагая в упомянутом уравнении $b_1 = 0$, получим

$$2i\alpha_k \frac{\partial A_1}{\partial x_k} + \Delta_{\perp} A_1 + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda a_1^2}} - 1 \right) A_1 = 0 \quad (17)$$

Уравнение (16) при $a_1 = b_1$ и $\lambda a_1^2 \gg 1$ имеет вид

$$-\frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 - 1) A_1 + 2i\alpha_k \frac{\partial A_1}{\partial x_k} + \Delta_{\perp} A_1 + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 - 1) \frac{2}{\pi \sqrt{\lambda a_1^2}} = 0$$

Решение уравнения (17) полезно при изучении процессов взаимодействия волн в интерферометрах Фабри-Перо и других оптических приборах, в которых происходит включение двух устойчивых состояний с помощью мощных пучков (5).

Авторы благодарят академика АН Армянской ССР Л. М. Тер-Микаеляна за обсуждения работы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ոչ գծային դիսիպատիվ համասեռ միջավայրում տարածվող փոխազդող սահմանափակ հզոր լուսային փնջերի հավասարումները և նրանց լուծումները

Ընդհանուր դեպքում, հաճեցված և խորանարդ աստիճանով ոչ գծային համասեռ դիսիպատիվ օպտիկական միջավայրերում հանդիպակաց ուղղություններով տարածվող հարթ բեռացված հզոր լուսային ալիքների կոմպլեքս ամպլիտուդաների համար ստացված է կապակցված պարաբոլակ հավասարումների սիստեմ: Դիտարկված են գծային և շրջանային բեռացված միատեսակ հանդիպակաց փնջերի մասնավոր դեպքերը: Նշված մասնավոր դեպքերում իկական ամպլիտուդայի և ֆազայի համար ստացված են համապատասխան հավասարումներ:

Ֆազայի համար ստացված լուծումը հնարավորություն է տալիս հաշվելու ինտեքսերոմետրի բաց թողնման հնարավորությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *М. Л. Тер-Микаелян*, Нелинейная резонансная оптика. Ч. 1. 2, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1974. ² *С. Г. Зегерт*, Теоретические основы лазерной спектроскопии насыщения, Изд-во ЛГУ, 1979. ³ *J. K. Marburger, F. S. Felber*, The Physical Review A., v. 17, № 1 (1978). ⁴ *С. А. Ахманов, Р. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов*, УФН, т. 93, вып. 1 (1967). ⁵ *А. Е. Kaplan*, Optical Letters, v. 6, p. 360—362 (1981). ⁶ *А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргениян*, ДАН АрмССР, т. 79, № 1 (1984). ⁷ *С. Г. Раутян*, ЖЭТФ, т. 41, с. 440 (1984). ⁸ *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, т. 8, М., Наука, 1982. ⁹ *А. Г. Багдоев*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 1 (1980).

УДК 611.93.573.324.11

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

Л. А. Рухкян, Р. А. Захарян, С. Н. Айрапетян

О механизме подавляющего действия дс-РНК на сорбцию вируса на клеточной мембране

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Африкяном 9/X 1985)

Среди факторов, определяющих противовирусную резистентность клетки организма, наиболее изученными являются система интерферонов и активируемые ими механизмы, подавляющие размножение вируса на стадии внутриклеточных этапов репродукции: синтез вирусспецифических ферментов, белков, нуклеиновых кислот (¹). В то же время возможные механизмы десенсилизации плазматической мембраны клетки к процессу адсорбции вируса, т. е. первого этапа контакта вирусной частицы с клеткой, практически не изучены.

Ранее нами на модельных экспериментах было продемонстрировано, что двуспиральная РНК (дс-РНК—индуктор интерферона) является одновременно мембранно-активным соединением—значительно стимулирует пейсмекерную активность нейрона, и эта стимуляция сопровождается увеличением в клетке уровня сАРМ, входа ионов Ca^{++} .

Предыдущими нашими работами было показано, что фосфорилирование мембраны приводит к подавлению сродства хеморецепторов для синаптических медиаторов, имеющих пептидную природу (²). Судя по аналогии рецептор-лиганд взаимодействия предполагалось, что процесс вирус-мембрана взаимодействие также будет находиться в зависимости от степени фосфорилирования поверхностной мембраны клетки. Проверке данного предположения посвящена настоящая работа, в которой исследованы: процесс адсорбции вируса на плазматической мембране клетки в условиях воздействия дс-РНК, роль ионов Ca^{++} , уровень фосфорилирования мембранных белков при подавлении адсорбции вируса.

Полученные результаты позволяют сформулировать механизм понижения сродства плазматической мембраны клетки к адсорбции вируса путем фосфорилирования плазматической мембраны, возможно вирусных рецепторов.

В работе использована однослойная культура фибробластов куриного эмбриона. В качестве питательной среды употребляли среду 199 с 10% бычьей сыворотки. Клетки культивировали в чашках Карреля. Опыты проводили с вирусом осповакцины, адаптированным к куриным эмбрионам, которым заражали 11—13-дневных эмбрионов. После 48 ч инкубации при 37° из хорионаллантоисной оболочки в физиологическом растворе готовили взвесь, которая служила исходным материалом для

получения концентрированного вируса, осповакцины в градиенте концентрации 10—40 % сахарозы. Инфекционную активность вируса тестировали методом бляшкообразования. Исходный титр вируса составлял $1 \cdot 10^7$ БОЕ/мл. Монослой фибробластов ($1,2 \cdot 10^6$) находился в контакте с вирусом 45 мин; затем клетки отмывали и определяли титр связавшегося и несвязавшегося вируса; количественные данные вычислены по анализам 5 параллельных опытов в каждом эксперименте. В зависимости от условий опыта в среду вводили вещества, действие которых исследовали: дс-РНК, полученная из дрожжей,—100 мкг/мл; гидролизованная дс-РНК (0,2 М NaOH, 37°, 24 ч)—100 мкг/мл; ЭГТА—1 мМ; очищенная ДНК вируса осповакцины.

Измерение входа Ca^{++} в клетку проводили радиондикаторным методом. ^{45}Ca добавляли к монослою культуры фибробластов ($1,5 \cdot 10^6$) в конечной концентрации 0,1 мКи/мл. Дальнейшую обработку клетки проводили согласно методу, описанному в работе (3). Фосфорилирование белков плазматической мембраны проводили по (4).

В первой серии экспериментов мы изучали инфекционную активность вируса осповакцины на клеточной культуре куриных фибробластов, предварительно обработанных в течение 40 мин дс-РНК, гидролизованной дс-РНК, ЭГТА; также определялась инфекционность очищенной ДНК вируса осповакцины.

Влияние дс-РНК, частично гидролизованной дс-РНК и ионов Ca^{++} на инфекционность вируса осповакцины

Номер эксперимента	Обработка до контакта с вирусом	% к контролю	
		вирус, оставшийся несвязанным	понижение бляшкообразования
1	Монослой+вирус	9	100
2	Монослой+дс-РНК+вирус	52	25
3	Монослой+частично гидролизованная дс-РНК+вирус	40	53
4	Монослой+частично гидролизованная дс-РНК, удаление среды с дс-РНК+свежая среда (3 ч инкубации)+вирус	15	82
5	Монослой+ЭГТА+дс-РНК+вирус	28	48
6	Монослой+ЭГТА+дс-РНК*+вирус	10	80
7	Монослой+дс-РНК+ДНК вируса	—	43**
8	Монослой+частично гидролизованная дс-РНК+ДНК вируса	—	100**

* Частично гидролизованная дс-РНК.

** В № 7 и 8 контролем служил опыт: монослой+ДНК вируса

Как видно из таблицы, дс-РНК, в процентах от контроля, существенно, на 75 %, подавляет инфекционность вируса осповакцины и значительно понижает адсорбцию вируса. Используемая в тех же концентрациях дс-РНК, гидролизованная до моно-, ди-, три- и тетрануклеотидов, оказывает более слабый защитный эффект (31 %). Адсорбция вируса в данном случае составляет 70% от контроля.

Если в отношении дс-РНК защитный эффект от инфицирования вирусом может быть объяснен в конечном итоге и индукцией интерферона, то в случае гидролизованной дс-РНК (31 % защиты и 30 % несвязав-

шегося с клетками вируса) следует допустить наличие другого механизма, обеспечивающего относительно низкий уровень адсорбции по сравнению с контролем.—механизма, действующего в отсутствие индукции интерферона.

В пользу сделанного заключения говорят также результаты эксперимента № 4 (таблица). В противном случае после удаления питательной среды, содержащей продукты гидролиза дс-РНК, противовирусная активность должна была бы сохраниться, более того, полученный результат свидетельствует о том, что индуцируемый механизм защиты функционирует в присутствии индуктора или во всяком случае продуктов гидролиза дс-РНК. Аналогичные результаты получены по активации дс-РНК макрофагов (5). Результаты экспериментов № 5 и 6 свидетельствуют, что удаление из среды ионов Ca^{++} значительно снижает защитный эффект как нативной, так и гидролизованной дс-РНК и способствует активной адсорбции вируса клетками. Таким образом, присутствие ионов Ca^{++} в питательной среде является существенным фактором, предопределяющим активацию механизма защиты клетки от вируса, не зависящего от индукции интерферона.

В эксперименте № 7 защитный эффект дс-РНК может быть отнесен по существу за счет индукции интерферона, однако из эксперимента № 8 ясно, что индуцируемый механизм защитного действия не активен в случае инфицирования клеток «голой» ДНК вируса осповакцины, т. е. не срабатывает на этапе адсорбции «голой» ДНК на активированной плазматической мембране клетки. Это позволяет предположить, что индуцируемый механизм действует на уровне взаимодействия плазматической мембраны клетки (возможно вирусных рецепторов) и белковой оболочки вируса осповакцины.

Полученные нами ранее данные по стимуляции дс-РНК увеличения входа ионов Ca^{++} в клетку, а также данные по активации макрофагов дс-РНК через аналогичную стимуляцию входа ионов Ca^{++} позволили и в данном случае предположить стимуляцию дс-РНК и продуктами ее частичного гидролиза входа ионов Ca^{++} в клетки, предварительно обработанные индуктором.

На рис. 1 приведены данные о содержании Ca^{++} в intactных клетках, в клетках, обработанных дс-РНК и продуктами частичного

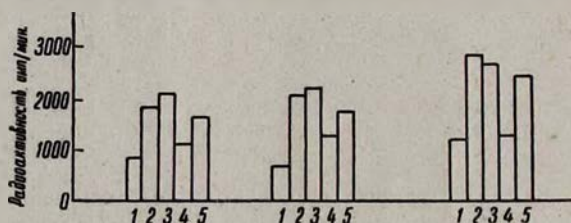


Рис. 1. Увеличение поступления ^{45}Ca в клетки моно-слоя фибробластов куриного эмбриона. По оси ординат—радиоактивность (имп./мин) экстрактов клеток монослоя фибробластов: 1—контроль, intactные клетки; 2—клетки после контакта с дс-РНК, 3—клетки после контакта с дс-РНК+вирус; 4—клетки+вирус; 5—клетки после контакта с частично гидролизованной дс-РНК

гидролиза дс-РНК. Полученный результат свидетельствует о том, что действительно «активированное» состояние плазматической мембраны коррелирует с увеличением входа Ca^{++} в клетку.

Стимулирующий эффект Ca^{++} под действием дс-РНК был нами ранее установлен в экспериментах на гигантских нейронах виноградной улитки, где дс-РНК также увеличивала содержание цАМФ внутри нейрона. На основе этих данных стимуляция входа Ca^{++} под действием дс-РНК была объяснена фосфорилированием мембранных белков Са-ионофора и переносчика Na-Са обмена. Наряду с этим, как было отмечено выше, процессы фосфорилирования хеморецепторов мембран приводят к подавлению их сродства к своим лигандам.

Для проверки участия процесса фосфорилирования мембран в механизмах, лежащих в основе подавляющего действия дс-РНК, на сорбцию вируса на поверхности клетки в следующей серии экспериментов мы исследовали фосфорилирование плазматической мембраны клеток в условиях понижения сорбции вируса на мембране.

Как видно из полученных данных (рис. 2), под действием дс-РНК происходит фосфорилирование белков с молекулярной массой $90-40-50 \times 10^3$ дальтон. Таким образом, на основе полученных дан-

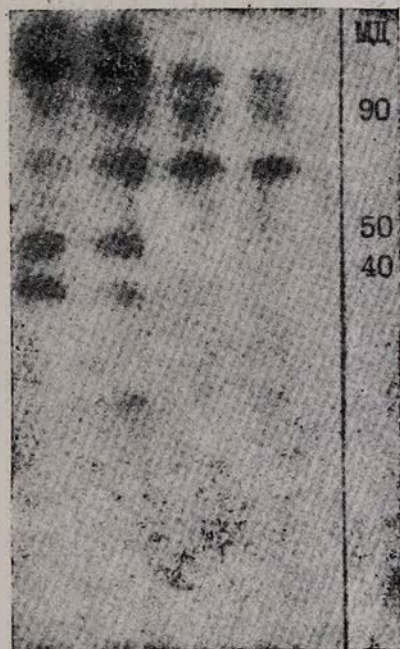


Рис. 2. Фосфорилирование мембранных белков плазматической мембраны в условиях понижения адсорбции вируса. Справа налево: 1, 2—интактные клетки; 3, 4—клетки, обработанные дс-РНК (понижение сорбции вируса на мембране до 50%)

ных можно предположить, что увеличение внутриклеточного Ca^{++} и процесс фосфорилирования плазматической мембраны (по аналогии

с другими хеморецепторами) приводят к подавлению сродства мембранного рецептора к вирусу.

Ca^{++} -зависимость этого процесса можно объяснить, по-видимому, тем, что Ca^{++} , являясь стимулятором мембранной протеинкиназы C^{++} , приводит к фосфорилированию мембранных белков, в том числе и Ca -транспортирующих белков с усилением входа Ca^{++} внутрь клетки. Очевидно, что для окончательного выяснения процесса фосфорилирования плазматической мембраны как универсального механизма, определяющего сродство плазматической мембраны к вирусу, требуются более детальные исследования на ряде вирусов, что и является предметом наших настоящих исследований. Предварительные результаты наших исследований свидетельствуют о наличии в плазматической мембране клетки дс-РНК активируемых протеинкиназ.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР
Ереванский зоотехническо-ветеринарный
институт МСХ СССР

Լ. Ա. ՌՈՒՆԻՅԱՆ, Ռ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ս. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԴՅ-ՌՆԹ մեխանիզմի ճեշի ազդեցությունը բջջի քաղամբում վիրուսի ստրբցիայի վրա

Աշխատանքում ուսումնասիրվել են բջջի պլազմատիկ թաղանթի վրա վիրուսի ադսորբցիոն պրոցեսը ԴՅ-ՌՆԹ-ի ազդման պայմաններում, կալցիումի իոնների դերը, թաղանթային սպիտակուցների ֆոսֆորիլացման մակարդակը վիրուսի ադսորբցիայի ընկճման դեպքում:

Ցույց է տրված, որ ԴՅ-ՌՆԹ-ն ունի պաշտպանական ազդեցություն բջջի վիրուսի վարակվելու նկատմամբ պլազմատիկ մեմբրանների նյութափոխանակային տեղաշարժի մակարդակի վրա և որ կալցիումի իոնների ներկայությունը էական գործոն է հանդիսանում, որը կանխորոշում է պաշտպանական մեխանիզմի ակտիվացիան անկախ ինտերֆերոնի ինդուկցիայից: Պլազմատիկ մեմբրանի ակտիվացած վրճակը կոռելյացիայի է ենթարկվում բջջի մեջ կալցիումի մոտքի մեծացման հետ և բջջի պլազմատիկ մեմբրանի սպիտակուցների ֆոսֆորիլացման հետ: Մտացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս պլազմատիկ մեմբրանի վիրուսի ադսորբցիայի նկատմամբ խնամակցության փոքրացման մեխանիզմը ձևակերպել ֆոսֆորիլացման միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Baron, F. Dianzani, G. I. Stanton, Texas Reports on Biology and Medicine, vol. 41, p. 715 (1981—1982). ² S. N. Ayrapetyan, V. L. Arvanov, S. B. Maginyan et al., Cellular and Molecular Neurobiology, vol. 5 № 3, p. 231—242 (1985). ³ P. H. Атауллаханов, Ф. И. Атауллаханов, Д. М. Абдулаев, Бюл. экспериментальной биологии и медицины, вып. 7, с. 81—84 (1984). ⁴ E. G. Lapetina, S. P. Watson, P. Cuatrecasas, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 81, № 23, p. 7431—7435 (1984). ⁵ S. I. Hamburg, H. B. Flett, I. C. Unkeless et al., Ann. N. Y. Acad. Sci., vol. 350, p. 72—91 (1980).

УДК 612.821.6+615.017.8

ФИЗИОЛОГИЯ

Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг, И. А. Джагацпаян

Влияние соединения 3-амино-2-изо-пропил-6,6-диметил-4-оксо-5,6-дигидро-8Н-пирано [4', 3':4, 5] тиено [2,3-d] пиримидин-4-она (АН-442-132) на лабиринтное обучение белых крыс

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 2/1 1986)

На основании результатов ранее проведенных исследований было показано, что противосудорожный препарат пуфемид в терапевтических дозах угнетает ориентировочно-исследовательскую активность крыс в тесте «открытого поля» (^{1,2}), а также возобновляет и усиливает конкурентные отношения между пищедобывательным и избегательным поведением в лабиринте. И поскольку совместить в данной конфликтной ситуации реализацию двух антиподных (по биологическому знаку) реакций невозможно, то блокируется пищевое поведение за счет выпадения акта возвращения в стартовую камеру (СК). При этом у обученных крыс полностью сохраняются механизмы памяти. Они точно воспроизводят «образ» целевого пути в лабиринте (³).

Важно было выяснить: специфичен ли описанный избирательный эффект для пуфемиды или это свойственно также и другим антиконвульсивным препаратам? В этой связи было испытано новое химическое соединение АН-442—132, синтезированное в ИТОХ АН Армянской ССР (⁴). Кристаллы вещества бело-кремового цвета плохо растворяются в воде. Характерным для данного соединения является выраженное антикоразоловое действие, предотвращающее клонические судороги у мышей в широком диапазоне доз (2,6—64 мг/кг).

Опыты проведены на беспородных крысах ($n=15$) обоего пола массой 200—300 г. Большинство из них участвовало в опытах с пуфемидом. В качестве теста индивидуального обучения крыс применяли «шестьеходовой» и «Т-образный» лабиринты закрытого типа. Животных брали на опыт при суточной пищевой депривации два-три раза в неделю. Методика и программа лабиринтного обучения, а также динамика развития поведения крыс подробно описаны (³). На каждой особи проведено по 5—7 опытов. «Соединение» вводили внутрибрюшинно в виде суспензии с карбоксиметилцеллюлозой 0,6—0,7 мл. В контрольных опытах вместо «соединения» применялся физиологический раствор в том же объеме.

Данные о пороговых противосудорожных дозах соединения АН-442—132 для крыс, к сожалению, отсутствуют. Поэтому об эффектах испытуемого вещества на организм судили по первичным изменениям временных параметров некоторых элементов репертуара поведения крыс, обученных в пищевых лабиринтах: скорости ответной реакции—побежки к кормушке, времени побежки и задержки у кормушки после

подкрепления, времени возвращения в СК и времени гримпиг (чистка шерсти) реакции. Следили также за координацией движений.

Первые изменения во временных параметрах пищедобывательного навыка отмечались при дозах 8—10 мг/кг. При каждом последующем увеличении исходной дозы «соединения» на 1—2 мг/кг усиливались нарушения функции двигательных элементов поведения: животные стали медленнее передвигаться к кормушке, дольше задерживаться у кормушки или в других отсеках лабиринта после подкрепления и медленнее возвращаться в СК (табл. 1). Было обнаружено также некоторое мнорелаксантное и седативное действие АН—442—132. Во время передвижения, особенно на гладком полу и на поворотах в лабиринте, у крыс временами подгибались конечности в дистальных суставах и расползались, что приводило к расстройству стато-кинетической координации. При прочих равных условиях эксперимента сравнительно большую устойчивость к «соединению» проявляли крысы-самки. Выявлены также индивидуальные различия в чувствительности крыс к данному веществу. Заслуживает внимания факт быстрого ослабления эффектов «соединения» при повторном его применении, независимо от исходной дозы (10—26 мг/кг). Причем толерантность к нему выражена больше, чем к пuffedиду (3).

Соединение АН—442—132 в определенных дозах аналогично пuffedиду вызывало нарушение навыка возвращения и задержки в СК. В первых пробах крысы либо не входили в СК, останавливаясь у входа и обследуя его, либо входили после тщательного обследования, но выскакивали при закрывании двери СК, а потом и вовсе переставали самостоятельно возвращаться (табл. 2). Эти данные показывают, что под влиянием «соединения» также растормаживается эмоция страха у крыс—усиливается избежательная реакция к СК. В подобной конфликтной ситуации удовлетворение конкурирующих потребностей (в пище и самосохранении) стало практически невозможным. В результате блокировалось целостное пищедобывательное поведение. В ответ на сигнал открывания двери СК крысы, правильно выбирая путь к пище и получая вознаграждение, отказывались возвращаться и задерживаться в СК. Последняя снова приобрела для крыс негативное сигнальное значение, и они стали ее избегать. Вместе с тем динамика развития нарушения поведения свидетельствовала о полной сохранности механизма воспроизведения следов памяти—приобретенного навыка поиска и добывания пищи. Более того, специальные опыты с применением «ручной» пробы (хэндлинг) показали, что у этих животных полностью сохранился также и навык узнавания траектории обратного пути от кормушки к СК. Но они его не выполняли, в связи с изменениями в соотношении сил конкурирующих потребностей животного, наступавшими под действием соединения АН—442—132. Правомерность данного заключения подтвердилась следующим экспериментом. Сочетание акта принудительного возвращения крыс в СК с пищевым подкреплением непосредственно в СК привело после нескольких проб к угашению избежательных тенденций к СК, и крысы начали самостоятельно (без ручной пробы!) возвращаться и задерживаться в СК до полного закрывания двери (табл. 2).

Таблица 1
Крыса № 45. Пищедобывательное поведение в «шести-
ходовом» лабиринте

№ пробы	Время двигательных реакций, с				Примечания
	Латентный период побежки	Побежка к кормушке	Задержка у кормушки	Возвращение в СК	
1	0,3	5,8	18	7	20 V—1985, опыт № 64 перед введением соединения АН—442—132
2	0,3	3,7	13	6	
3	0,3	4,0	17	6	
4	0,2	4,0	16	6	
5	0,2	3,8	22	8	
6	0,2	4,2	18	6	
1	8,5	29,0	300	0	Опыт № 3 спустя 67 мин после введения соединения в дозе 18 мг/кг
2	129,0	21,0	260	17	
3	0,5	11,3	300	0	
4	1,2	11,1	300	0	
5	1,3	11,3	42	17	
6	0,6	11,9	160	70	
1	0,3	5,6	25	11	22/V—1985, опыт № 65
2	0,1	4,0	17	7	
3	0,3	3,2	15	7	
4	0,3	3,7	14	12	
5	0,3	3,7	15	5	
6	0,1	4,1	17	7	

Таблица 2
Крыса № 48. Пищедобывательное поведение в «Т-образ-
ном» лабиринте.

№ пробы	Двигательные элементы поведения						Примечания
	Побежка к кормушке	Подкрепле- ние	Возврат в СК	Заход в СК	Уход из СК	Хэндинг	
1	+	+	+	+	—	—	27/V—1985, опыт № 63 перед введением соединения АН—442—132
2	+	+	+	+	—	—	
3	+	+	+	+	—	—	
4	+	+	+	+	—	—	
5	+	+	+	+	—	—	
6	+	+	+	+	—	—	
1	+	+	+	+	+	+	Опыт № 7 спустя 64 мин после введения соеди- нения в дозе 26 мг/кг
2	+	+	+	+	—	+	
3	+	+	+	+	—	+	
4	+	+	+	+	—	+	
5	+	+	+	+	+	+	Подкрепление в СК
6	+	+	+	+	—	+	
7	+	+	+	+	—	+	Без подкрепления
8	+	+	+	+	—	—	
9	+	+	+	+	—	—	

Примечание Знаки «+» и «—» — наличие и отсутствие реакции соответственно

Таким образом, повышая и поддерживая надлежащий уровень возбудимости нервного субстрата мозга, ответственного за пищевую мотивацию, можно было добиться смены доминирующей потребности у животного в момент его нахождения в СК. Вместо избегательной доминантой стала пищевая. Следовательно, нарушения лабиринтного обучения при действии соединения АН—442—132, как и пuffedида, имеют в своем основе изменения в мотивационно-эмоциональной сфере, а не дефекты памяти и собственно «интеллектуальной» деятельности.

Аналогичные изменения в поведении крыс наблюдались также при действии антихолинэргических препаратов атропина и этпепала (5).

Говорит ли общность эффектов антиконвульсивных средств на лабиринтное обучение об их специфичности, покажут дальнейшие исследования.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՍՏՈԼԲԵՐԳ, Ի. Ա. ԶԱՂԱՅՊԱՆՅԱՆ

3-ամինո-2-իզո-պրոպիլ-6, 6-դիմեթիլ-4-օկսո-5, 6-դիգիդրո-8հ-п-1-բանո [4',3':4,5]-տիենո[2,3-դ] պիրիմիդին-4-օնա (ԱՆ-442-132) միացության ազդեցությունը սպիտակ առնետների լաբիրինթային ուսուցման վրա

Հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ հակացնցումային դեղամիջոց պուֆեմիդին օժտված է ընտրողական ազդեցությամբ: Բացի ընդհանուր շարժողական ակտիվության ընկճումից, նա միաժամանակ վերականգնում է առնետների մոտ նախկինում տեղ գտած բացասական էմոցիաները, որոնք լաբիրինթային ուսուցման զարգացման պրոցեսում արգելակվել էին:

Հարց առաջացավ՝ արդյո՞ք նման ազդեցությունը հատուկ է միայն պուֆեմիդին: Փորձերը պարզեցին, որ մի շարք հակախոլիներգիկ դեղամիջոցներ (ատրոպին, էթիփենալ և այլն), ինչպես նաև նոր սինթեզված ԱՆ-442-132 միացությունն ունեն նույն ազդեցություն առնետների վարքի վրա, ինչպես պուֆեմիդը: Նրանք ուժեղացնում են կենդանիների մոտ վախի զգացումը և ակտիվախուլետային ռեակցիաները միջավայրի որոշ բացասական գործոնների նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. Е. Григорян, А. М. Стольберг, ДАН АрмССР, т. 79, № 5 (1984). ² Г. Е. Григорян, Н. Е. Акопян, ДАН АрмССР, т. 80, № 5 (1985) ³ Г. Е. Григорян, Н. Е. Акопян, А. М. Стольберг, ДАН АрмССР, т. 82, № 2 (1986) ⁴ А. П. Мкртчян, С. Г. Казарян, А. С. Нораян и др., Хим.-фарм. журн., т. 19, № 5 (1985). ⁵ В. М. Самвелян, Д. А. Герасимян, Изв. АН АрмССР (сер. биол.), т. 16, № 12 (1963)