ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXII, №5
1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Периодичность—10 номеров в год.
Основан в 1944 г.
На русском языке.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

Գինը 55 կ.
ЦЕНА 55 к.

Индекс 77730

h.82 1986

CONTENTS

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 16.05.86 г. Подписано к печати 15.08.86 г. ВФ 06845
Бумага № 2, 70×108$^{1}/_{16}$. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.
Учет, изд. 3.31 л. Тираж 455. Заказ 381. Издат. 6827.
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 517.925+517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

Метод оценки порядка мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений, основанный на свойстве «близости a-точек».

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 26/XI 1984)

Основной метод оценки порядков* целых решений алгебраических дифференциальных уравнений высших порядков основан на теореме Вимана—Валирона. Исследование же порядков мероморфных решений проводилось до сих пор исключительно для определенных конкретных уравнений.

Ниже изучаются алгебраические дифференциальные уравнения следующего класса: $\mathfrak{M}_\varphi$-мероморфных в $|z|<\infty$ функций $w(z)$, являющихся решениями уравнения

$$P_1(z, w, w') = P_2(z, w, w', \ldots, w^{(n)}), \tag{1}$$

где P_1—полином от каждой из переменных. P_2—рациональная функция от каждой из переменных и для нее в $a_1, \ldots, a_5$-точках функции w, лежащих в $|z|<r$, выполняется соотношение

$$|P_2(z, a_\nu, w'(z), \ldots, w^{(n)}(z)| \leqslant \varphi(r), \quad \nu = 1, 2, \ldots, 5. \tag{2}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $w \in \mathfrak{M}_\varphi$, *где* φ—*функция конечного порядка. Тогда* $w(z)$ *имеет конечный порядок.*

Положив $P_2 \equiv 0$ в теореме 1, получим следующее

Следствие 1 (А. А. Гольдберг ([2])). *Всякое мероморфное решение алгебраического дифференциального уравнения первого порядка имеет конечный порядок.*

Следствие 2. *Всякое мероморфное решение уравнения*

$$P_1(z, w, w')/P_2(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = \prod_{\nu=1}^{q} (w - a_\nu)$$

имеет конечный порядок.

Отметим, что следствие 2 заключает в себе следующую качественную информацию: равенство нулю функции $P_1(z, w, w')$ лишь в

---

* Порядок функции $\varphi(r)$ действительного переменного определяется как $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln\varphi(r)/\ln r)$. Порядок мероморфной функции $w(z)$—порядок ее неванлинновской характеристической функции $T(r, w)$; здесь и в дальнейшем пользуемся стандартной терминологией и обозначениями теории распределения значений (см. ([1])).

$a_1, a_2, \ldots, a_5$-точках достаточно для вывода о конечности порядка мероморфной функции, удовлетворяющей этому условию.

Доказательство теоремы 1 основано на оценках производных мероморфных функций на множествах ее a-точек; оценки же эти, в свою очередь, выводятся из свойства „близости a-точек" мероморфных функций, которое выявляет следующая

Теорема А (см. ([3])). *Пусть $w(z)$—мероморфная в $|z|<\infty$ функция; $\psi(r)$—монотонная функция, $\psi(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$; $a_\nu\in\overline{C}$ попарно различны. Тогда для любого $r\notin E$, где E—некоторое множество конечной логарифмической меры, в круге $|z|\leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ односвязных непересекающихся областей $E_i(r)$, $i=1, 2, \ldots, \Phi(r)$, удовлетворяющих условиям:*

I) $w(z)$—*однолистна в* $\overline{E_i(r)}$, $i=1, 2, \ldots, \Phi(r)$;

II) $(\Phi(r)/A(r))\to 1$ *при* $r\to\infty$, $r\notin E$,

III) $\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r))\leqslant K\psi(r)rA^{1/2}(r)$,

где $d(E_i(r))$—*диаметр* $E_i(r)$, $K=K(a_1, a_2, \ldots, a_q)=\mathrm{const}<\infty$;

IV) $\sum_{\nu=1}^{q} n_0(r, a_\nu)\geqslant[q-4-o(1)]A(r)$, $r\to\infty$, $r\notin E$, (3)

где $n_0(r, a_\nu)$—*количество* a_ν-*точек в* $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$.

Теорема A показывает, что близки не только количества $a_1, a_2, \ldots, a_q$-точек функции $w(z)$ в кругах $|z|<r$ (как это следует из теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса), но также, одновременно, близки их модули и аргументы (это следует из свойств I—IV теоремы A и первой основной теоремы теории распределения значений, согласно которым в каждой области $E_i(r)$ лежит в среднем от $q-4$ до q $a_1, a_2, \ldots, a_q$-точек, а диаметры областей $E_i(r)$ „малы"). Таким образом в большинстве своем $a_1, \ldots, a_q$-точки близко располагаются друг к другу.

Используя некоторые детали доказательства теоремы А, из нее выводим следующие оценки: области $E_i(r)$ можно выбрать таким образом, чтобы для всякой a_ν-точки $z_{\nu,j}$, $\nu=1, 2, \ldots, q$, лежащей в $\bigcup_i E_i(r)$, $i=1, 2, \ldots, \Phi(r)$, выполнялось неравенство

$$|w'(z_{\nu,j})|\geqslant\frac{KA^{1/2}(r)}{r\psi(r)},\quad j=1, 2, \ldots, n_0(r, a_\nu), \tag{4}$$

где $K=K(a_1, \ldots, a_q)=\mathrm{const}>0$; тем самым приведенное свойство „близости a-точек" дополняется указанием оценок снизу $|w'|$ в a-точках функции $w(z)$.

Доказательство теоремы 1 легко вытекает из приведенных выше утверждений (3) и (4). В самом деле. Пусть $a_1, \ldots, a_5$ те же, что в определении класса $\mathfrak{M}_\varphi$; $z_{\nu,j}$—a_ν-точки функции $w(z)$, лежащие в $|z|\leqslant r$, $\nu=1, 2, \ldots, 5$, $j=1, 2, \ldots$. Согласно свойству IV теоремы А при $r\notin E$ хотя бы для одного значения a_ν (положим для a_1) выполняется неравенство

$$n_0(r, a_1) > A(r)/6, \tag{5}$$

причем в каждой точке $z_{1,j}$ выполняется оценка (4). По определению класса $\mathfrak{M}_\varphi$ имеем

$$|P_1(z_{1,j}, a_1, w(z_{1,j}), w'(z_{1,j}), \ldots, w^{(n)}(z_{1,j}))| \leqslant \varphi(r). \tag{6}$$

Известно ([4]), что корни полинома $z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$ лежат в круге $\max\{(m|b_1|), (m|b_2|)^{1/2}, \ldots, (n|b_m|)\}^{1/n}$. Применив эту оценку к (1) в точках $z_{1,j}$ (которое очевидно может быть записано с учетом (6) в виде $F_{1,0}(z_{1,j}, a_1)[w'(z_{1,j})]^m + F_{1,1}(z_{1,j}, a_1)[w'(z_{1,j})]^{m-1} + \ldots + F_{1,m}(z_{1,j}, a) + \varphi_1(z_{1,j}) + i\varphi_2(z_{1,j}) = 0$, где φ_1 и φ_2 величины $O[\varphi(r)]$), получим

$$|w'(z_{1,j})| \leqslant K|z_{1,j}|^p \leqslant Kr^p, \tag{7}$$

где $p = \text{const} < \infty$ зависит от $F_{1,0}, \ldots, F_{1,m}$, $\varphi(r)$, а количество точек $z_{1,j}$ в круге $|z| \leqslant r$ удовлетворяет неравенству (5). Остается к неравенству (7) применить неравенство (4), используя которое, получим

$$A(r) \leqslant Kr^{2p+2}\psi^2(r).$$

Доказательство завершается применением известного предложения — порядки функций $A(r)$ и $T(r)$ совпадают — и учетом того, что $\psi(r)$ может иметь произвольно медленный рост.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Федорюку за ценное обсуждение результата.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների կարգի գնահատման մեթոդ, հիմնված «a-կետերի մոտիկության հատկության» վրա

Մինչև այժմ առավելապես դիտարկվել են առաջին կարգի հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումներ։ Մերոմորֆ ֆունկցիաների a*-կետերի մոտիկության հատկության օգնությամբ ապացուցվում է, որ բարձր կարգ ունեցող հետևյալ հավասարման.*

$$P_1(z, w, w')/P_2(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = \prod_{\nu=1}^{q} (w - a_\nu),$$

որտեղ P_1, P_2*—բազմանդամներն են, իսկ* $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, *մերոմորֆ լուծումները ունեն վերջավոր կարգ։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлинна,* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941. [2] *А. А. Гольдберг,* Укр. мат. журн., т. 8, с. 254—261 (1956). [3] *Г. А. Барсегян,* Мат. сб., т. 120 (162), с. 42—67 (1983). [4] *Г. Полиа, Г. Сеге,* Задачи и теоремы из анализа, т. I, М., Наука, 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Н. К. Хачатрян

Гамильтоновость и системы различных представителей в семействах подмножеств вершин графа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/II 1985)

В работе найдены достаточные условия гамильтоновости графа, использующие структурные характеристики окрестностей вершин. Предложены полиномиальные алгоритмы для построения гамильтонового цикла в графах, удовлетворяющих найденным условиям. Все не определяемые понятия и обозначения можно найти в ([1]).

Рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множества вершин и ребер графа G обозначаются, соответственно, через $V(G)$ и $E(G)$. Степень вершины x в G обозначается через $d_G(x)$, множество вершин, смежных с x, —через $N_G(x)$, а расстояние между вершинами x и y в G—через $d_G(x, y)$. Гамильтоновым циклом графа G называется простой цикл, содержащий все вершины G. Если в графе G существует гамильтонов цикл, то G называется гамильтоновым графом. Введем обозначения:

$$\varepsilon_G(x)=\{y\in N_G(z)|z\in N_G(x),\ d_G(y)\leqslant d_G(x)\};$$

$$F_G(x)=\{Q(z)|z\in N_G(x)\},\text{ где } Q(z)=\{y\in N_G(z)|d_G(y)\leqslant d_G(x)\};$$

$$A_G(x, y)=\{B(z)|z\in N_G(x)\},\text{ где } B(z)=N_G(z)\setminus(\{y\}\cup N_G(y));$$

$M_G(x)=\{y\in V(G)|d_G(x, y)\leqslant 2\}$; $G(x)$—подграф графа G, порожденный множеством вершин $M_G(x)$.

Определение 1. Скажем, что p-вершинный граф G обладает свойством μ, если $p\geqslant 3$, в G нет изолированных вершин и

а) для каждого $x\in V(G)$ с $d_G(x)<\frac{p-1}{2}$ семейство $F_G(x)$ не имеет системы различных представителей (сокращенно с. р. п.);

б) для каждого $x\in V(G)$ с $d_G(x)=\frac{p-1}{2}$ семейство $F_G(x)$ не имеет с. р. п. или $|\varepsilon_G(x)|\leqslant\frac{p-1}{2}$.

Прежде чем перейти к изложению основных теорем, приведем одно простое необходимое условие гамильтоновости графа.

Утверждение. Если граф G с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p$ гамильтонов, то семейство множеств $\{N_G(x_i)|1\leqslant i\leqslant p\}$ имеет с. р. п.

Теорема 1. *Если граф G обладает свойством μ, то G—гамильтонов.*

Теорема 1 обобщает результаты, полученные в ([2]). Отметим, что для каждого $p \geqslant 13$ существует граф G_p с $V(G_p)=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $E(G_p)=\{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_1, x_7), (x_2, x_5), (x_2, x_8), (x_2, x_9), (x_3, x_5), (x_3, x_{10}), (x_3, x_{11}), (x_4, x_5), (x_4, x_{12}), (x_4, x_{13})\} \cup \{(x_i, x_j) | 5 \leqslant i < j \leqslant p\}$, который обладает свойством μ. Граф G_p не удовлетворяет условиям гамильтоновости, найденным в работах ([2–7]). В графе G, удовлетворяющем условию μ, гамильтонов цикл строится в три этапа. Сперва граф G достраивается специальным образом до графа $[G]$ (см. ([2])). Затем в графе $[G]$ с помощью алгоритма, работающего по принципу: „иди в соседнюю еще не пройденную вершину минимальной степени", —строится гамильтонов цикл. И, наконец, построенный гамильтонов цикл преобразуется в гамильтонов цикл графа G. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3 в ([2]).

Теорема 2. *Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п., то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.*

Доказательство. Предположим, теорема неверна. Это означает, что существует негамильтоновый граф G с гамильтоновой цепью $x=x_1, x_2, \ldots, x_p=y$, $p=|V(G)| \geqslant 3$ и семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п. Пусть $N_G(x_1)=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$, $n \geqslant 1$, $2=i_1<i_2<\ldots<i_n \leqslant p-1$. Тогда $(x_p, x_{i_j-1}) \notin E(G)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, так как иначе в G имелся бы гамильтонов цикл $x_1, x_2, \ldots, x_{i_j-1}, x_p, x_{p-1}, \ldots, x_{i_j}, x_1$. Отсюда следует, что семейство $A_G(x, y)$ имеет с. р. п. —$(x_{i_1-1}, x_{i_2-1}, \ldots, x_{i_n-1})$, что противоречит выбору G. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и $d_G(x)+d_{G(x)}(y) \geqslant |M_G(x)|$, то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.

Следствие 2 ([3]). Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и $d_G(x)+d_G(y) \geqslant |V(G)|$, то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.

Лемма 1 ([4]). *Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$—тупиковая цепь графа G и $d_G(x_1)+d_G(x_k) \geqslant k$, то в подграфе, порожденном вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, существует гамильтонов цикл.*

Пусть G—граф с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Тупиковой цепью в графе G назовем такую цепь $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, что $N_G(x_{i_1}) \subset \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ и $N_G(x_{i_k}) \subset \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ Опишем алгоритм Q, который строит в графе G тупиковую цепь P.

Шаг 1. $j:=1$. Строим в графе G тупиковую цепь $x_1^j, x_2^j, \ldots, x_{k_j}^j$. $P:=x_1^j x_2^j \ldots x_{k_j}^j$.

Шаг 2. Если $(x_1^j, x_{k_j}^j) \notin E(G)$, то перейти к шагу 5.

Шаг 3. Если P гамильтонов цикл в G, то стоп.

Шаг 4. Если существует вершина, не принадлежащая циклу P (обозначим z_1^j) и смежная с вершиной x_l^j, $1<l<k_j$, $(x_l^j, z_1^j) \in E(G)$, то строим более длинную цепь следующим образом: $P:=y_1^j y_2^j \ldots$ $\ldots y_{s_j}^j x_{l+1}^j x_{l+2}^j \ldots x_{k_j}^j x_1^j x_2^j \ldots x_l^j z_1^j z_2^j \ldots z_{n_j}^j = x_1^{j+1} x_2^{j+1} \ldots x_{k_{j+1}}^{j+1}$; $(y_i^j, y_{i+1}^j) \in$

$\in E(G)$, $1 \leq i < s_j$; $(y^j_{s_j}, x^j_{l+1}) \in E(G)$; $(z^j_i, z^j_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i < n_j$; $(N_G(x^{j+1}_1) \cup \cup N_G(x^{j+1}_{k_{j+1}})) \subseteq \{x^{j+1}_1, x^{j+1}_2, \ldots, x^{j+1}_{k_j+1}\}$; $j := j+1$. Иначе, если такой вершины z^j_1 нет, граф G не связный и алгоритм завершает работу. Перейти к шагу 2.

Шаг 5. Если $d_G(x^j_1) + d_G(x^j_{k_j}) \geq k_j$, то по лемме 3 существует такое s, $2 \leq s \leq k_j - 2$, что $x^j_1, x^j_{s+1})$, $(x^j_s, x^j_{k_j}) \in E(G)$ и можем перестроить цепь P. $P := x^j_1 x^j_2 \ldots x^j_s x^j_{k_j} x^j_{k_j-1} \ldots x^j_{s+1} \equiv x^{j+1}_1 x^{j+1}_2 \ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j := j+1$. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Если $d_G(x^j_1) < d_G(x^j_{k_j})$, то $P := x^j_{k_j} x^j_{k_j-1} \ldots x^j_{1_j} \equiv x^{j+1}_1 x^{j+1}_2 \ldots \ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j := j+1$.

Шаг 7. Пусть $N_G(x^j_{k_j}) = \{x^j_{i_1}, x^j_{i_2}, \ldots, x^j_{i_n}\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Найдем минимальное l, $1 \leq l < i_1$, такое, что существует s, $1 \leq s < n$, для которого $(x^j_l, x^j_{i_s+1})$, $(x^j_{i_s}, x^j_{k_j}) \in E(G)$. $P := x^j_1 x^j_2 \ldots x^j_l x^j_{i_s+1} x^j_{i_s+2} \ldots \ldots x^j_{k_j} x^j_{i_s} x^j_{i_s-1} \ldots x^j_{l+1} \equiv x^{j+1}_1 x^{j+1}_2 \ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j := j+1$. Если такого l не существует, то алгоритм завершает работу. Перейти к шагу 2.

Теорема 3. *Связный граф G с p вершинами, $p \geq 3$, является гамильтоновым, если для каждой пары вершин x, $y \in V(G)$ с $d_G(x) < \frac{p}{2}$ и $d_G(x, y) = 2$ семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п.*

Доказательство. Достаточно показать, что алгоритм Q строит в графе G, удовлетворяющем условиям теоремы, гамильтонов цикл. Заметим, что каждый возврат к шагу 2 алгоритма Q происходит либо после удлинения цепи, либо после уменьшения числа i_1, описанного на шаге 7. Поэтому ясно, что если не произойдет остановки алгоритма на шагах 4 и 7, то будет построен гамильтонов цикл. Так как граф G связный, то остановки на шаге 4 произойти не может. Покажем невозможность остановки на шаге 7. Для этого достаточно доказать, что существует s, $1 \leq s < n$, для которого $(x^j_{i_1-1}, x^j_{i_s+1})$, $(x^j_{i_s}, x^j_{k_j}) \in E(G)$. Предположим $(x^j_{i_1-1}, x^j_{i_s+1}) \notin E(G)$, $1 \leq s < n$. Тогда заметим, что по работе алгоритма на шаге 7 $d_G(x^j_{k_j}) < \frac{k_j}{2} \leq \frac{p}{2}$ и по предположению $A_G(x^j_{k_j}, x^j_{i_1-1})$ имеет с. р. п. $(x^j_{i_1+1}, x^j_{i_2+1}, \ldots, x^j_{i_n+1})$. Это противоречит условию теоремы. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Связный p-вершинный, $p \geq 3$, граф G гамильтонов, если для каждой пары вершин x, y, где $d_G(x) < \frac{p}{2}$ и $d_G(x, y) = 2$, выполняется неравенство $d_G(x) + d_{G(x)}(y) \geq |M_G(x)|$.*

Следствие 3 является обобщением теоремы Оре ([4]).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственнго университета

Ն. Կ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Գրաֆի համիլտոնությունը և նրա գագաթների ենթաբազմությունների ընտանիքների տարբեր ներկայացուցիչների համակարգերը

Ստացված է գրաֆի համիլտոնյան երեք բավարար պայման, որոնք հիմնըված են գագաթային շրջակայքերի կառուցվածքային բնութագրերի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари,* Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян* Мат. заметки, т. 35, № 1 (1984) [3] *I. A. Bondy, V. Chvatal,* Discrete Math., v. 15, p. 111—135 (1976). [4] *O. Ore,* Amer. Math. Monthly, v. 67, 55 (1960). [5] *P. Erdös, V. Chvatal,* Discrete Math., v. 2, p. 111—113 (1972). [6] *I. A. Nach-Williams,* Studies in pure mathematics, Academic Press, N. Y., 1971. [7] *G. G. Nicoghossian, P. Häggkvist,* J. Combin. Theory, B, v. 30, p. 118—120 (1981).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

А. К. Матевосян

Присоединенные операторы сдвига и их приложения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 22/II 1985)

1. Известно, что с каждым ортогональным базисом связано некоторое семейство операторов обобщенного сдвига (о. с.) A^s, так что функции базиса $\varphi_k(t)$, $t \in \Omega$, Ω—бикомпактное топологическое пространство, удовлетворяют соотношению

$$A_t^s \varphi_k(t) = \varphi_k(s) \cdot \varphi_k(t). \tag{1}$$

В общем виде о. с. введены Б. М. Левитаном ([1]) как операторы, удовлетворяющие некоторым аксиомам. Если $R(t, s)$—некоторая эрмитова функция вида

$$R(t, s) = \widetilde{A}_t^s r(t), \tag{2}$$

где $\widetilde{A}^s$ обозначает сопряженный к A^s оператор, то собственные функции о. с. A^s, определяемые по (1), являются собственными функциями ядра $R(t, s)$. Этот факт в достаточной мере отражает теоретическую и прикладную роль о. с. и их собственных функций. Достаточно отметить, что собственные функции о. с. A^s являются базисом Карунена—Лоэва (2) для случайного процесса с нулевым средним и ковариационной функцией вида ([2]).

Каноническое представление функции двух переменных, в общем случае не обладающей эрмитовой симметрией, заключается в разложении по сингулярным базисам ([3]), что обобщает метод разложения по собственным функциям. Причем здесь приходится оперировать с двумя ортогональными базисами—правым и левым сингулярными базисами.

Техника разложений по сингулярным базисам представляет мощный аппарат решения самых различных задач. Здесь необходимо отметить возможности этого метода в цифровой обработке двумерных изображений ([2]), а именно, в задачах сжатого описания изображений и восстановления «смазанных» изоображений. Широкое практическое применение разложений по сингулярным базисам ограничено сложностями вычислительноого характера.

В настоящей заметке аксиоматически определяются и изучаются аналогии о. с., возникающие при каноническом представлении функции двух переменных по сингулярным базисам. Рассматриваются приложения этих операторов.

2. Пусть на функциях $f(t) \in C(\Omega)$ определены семейства операторов A^s и B^s, зависящих от элемента $s \in \Omega$ как от параметра,

т. е. каждой функции $f(t)$ ставятся в соответствие функции двух переменных $A_t^s f(t)$ и $B_t^s f(t)$, где нижний индекс t подчеркивает, что операторы A^s и B^s применяются к функции f как к функции от переменной t. Пусть выполняются следующие условия: 1) операторы A^s являются о. с.; 2) операторы B^s линейны; 3) функция $B_t^s f(t)$ непрерывна по совокупности переменных; 4) для каждой функции $f(t)\in C$ и каждых точек r, s, $t\in\Omega$ выполняется равенство

$$A_r^t B_r^s f(r) = B_t^s A_r^t f(r). \tag{3}$$

Семейства операторов A^s и B^s, $s\in\Omega$, удовлетворяющие условиям 1—4, назовем о. с. и присоединенными о. с. (п. о. с.) соответственно. Отметим, что таковыми являются семейства операторов A^s и A^s.

Ниже R^s и Q^s обозначают двойственные относительно A^s и B^s операторы ([1]), которые определяются из равенств

$$R_t^s f(t) = A_s^t f(s), \quad Q_t^s f(t) = B_s^t f(s).$$

Пусть для каждой функции $f(t)\in C$ и каждых точек r, s, $t\in\Omega$ выполняются условия ([1]):

$$\tilde{A}_s^r A_t^s f(t) = A_t^s \tilde{A}_t^r f(t), \tag{4}$$

$$\tilde{R}_s^r A_t^s f(t) = \tilde{A}_t^r A_t^s f(t). \tag{5}$$

Такие о. с. назовем регулярными. Регулярными являются о. с. на группе. Предположим также, что для каждой функции $f(t)\in C$ и каждых точек r, s, $t\in\Omega$ выполняются условия:

$$\tilde{B}_s^r A_t^s f(t) = A_t^s \tilde{B}_t^r f(t), \tag{6}$$

$$\tilde{Q}_s^r B_t^s f(t) = \tilde{A}_t^r A_t^s f(t), \tag{7}$$

являющиеся аналогами условий (4) и (5).

Теорема 1. *Пусть $D(t)$ линейное представление размерности n о. с. A^s, тогда существует семейство матриц $C(t)$ размерности n, $t\in\Omega$, такое, что:*

$$B_t^r D(t) = C(r)\cdot D(t), \tag{8}$$

$$\tilde{B}_t^r D(t) = C^*(r)\cdot D(t),$$

$$\tilde{Q}_t^r C(t) = D(t)\cdot D^*(r),$$

где $*$—знак эрмитового сопряжения матрицы.

Семейство матриц $C(t)$, удовлетворяющих (8), назовем представлениями п. о. с. B^s.

Теорема 2. *Пусть $C^q(t)=\{c_{ij}^q(t)\}_1^{n_q}$ и $C^p(t)=\{c_{ij}^p(t)\}_1^{n_p}$ есть два неэквивалентных неприводимых представления п. о. с. B^s, тогда матричные элементы этих представлений удовлетворяют соотношениям ортогональности*

$$\int_\Omega c_{in}^p(t)\overline{c_{km}^q(t)}dt = \alpha_p \delta_{p,q}\delta_{i,k}\delta_{n,m},$$

δ—символ Кронекера.

При доказательстве теорем используются методы ([1]).

3. Пусть A^s и B^s есть семейства о. с. и п. о. с., причем операторы A^s коммутируют, тогда размерности всех неприводимых представлений равны 1, т. е. матрицы $D(t)$ и $C(t)$ переходят в функции $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ такие, что

$$A_t^s\varphi_k(t)=\varphi_k(s)\varphi_k(t), \quad B_t^s\varphi_k(t)=\psi_k(s)\psi_k(t). \tag{9}$$

Предложение 1. *Пусть семейства операторов A^s и B^s, $s=1, 2, \ldots, N$, есть регулярные о. с. и п. о. с. соответственно и пусть матрица $a(t, s)$, $t, s=1, 2, \ldots, N$, представима в виде*

$$a(t, s)=\tilde{B}_t^s b(t), \tag{10}$$

тогда системы представлений $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^N$ о. с. A^s и $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^N$ п. о. с. B^s образуют сингулярные базисы матрицы $a(t, s)$, соответствующие сингулярным значениям $\rho_k=\sum_{t=1}^N b(t)\overline{\varphi_k(t)}$.

Пусть теперь $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$—два базиса N-мерного пространства и $\varphi_k(s_0)=1$ для всех $k=1, 2, \ldots, N$. Тогда существуют единственные числа $a(t, s, r)$ и $b(t, s, r)$, удовлетворяющие равенствам $\varphi_k(s)\varphi_k(t)=\sum_{r=1}^N a(t, s, r)\varphi_k(r)$, $\psi_k(s)\varphi_k(t)=\sum_{r=1}^N b(t, s, r)\varphi_k(r)$, $t, s, k=1, 2, \ldots, N$. Кубические матрицы $a(t, s, r)$ и $b(t, s, r)$ размерности N задают коммутативные операторы A^s и B^s, удовлетворяющие условиям 1, 2, 4. Таким образом, по каждой невырожденной матрице посредством ее сингулярных базисов могут быть определены о. с. и п. о. с. так, что функции сингулярных базисов удовлетворяют (9), а п. о. с. B^s определяет тип „перемешивания", которым из некоторого вектора $b(t)$ строится матрица $a(t, s)$. Использование этого факта в определенной мере устранит вычислительные трудности, связанные с применением разложения по сингулярным значениям.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Կ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Տեղաշարժի կցված օպերատորները և նրանց կիրառումները

Աքսիոմների միջոցով սահմանվում և ուսումնասիրվում են Բ. Մ. Լևիտանի ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորների զուգադիրները, որոնք ասոցիացվում են երկու տարբեր օրթոգոնալ բազիսների հետ։ Դիտարկվում են սահմանված օպերատորների կիրառումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. М. Левитан,* Теория операторов обобщенного сдвига, Наука, М., 1973. [2] Обработка изображений и цифровая фильтрация, под ред. Т. Хуанга, Мир, М., 1979. [3] *В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов,* Матрицы и вычисления, Наука, М., 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 517.582

МАТЕМАТИКА

Г. О. Акопян

Об оценках производных решений одного класса гипоэллиптических уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Александряном 16/XI 1985)

Рассмотрим уравнение

$$P(D)u=0. \tag{1}$$

Л. Хермандером доказано (см. ([1])), что все решения $u(x)$ гипоэллиптического уравнения (1) в области $\Omega\subset E_n$ принадлежат некоторому классу Жевре $\Gamma^\gamma(\Omega)$. Точнее: пусть $P(D)$ гипоэллиптический оператор. Для любого компакта $K\subset\Omega$ существует постоянная $C>0$ такая, что для всех мультииндексов $\alpha\geqslant 0$ и всех решений $u(x)$ уравнения (1)

$$|D^\alpha u(x)|\leqslant C^{|\alpha|}|\alpha|^{\gamma\cdot|\alpha|}, \quad x\in K. \tag{2}$$

При этом в (1) доказано существование числа γ_0, называемого показателем гипоэллиптичности оператора $P(D)$, такого, что неравенство (2) имеет место при $\gamma=\gamma_0$, но не имеет места при $\gamma=\gamma_0-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Это значит, что полученный результат является неулучшаемым в терминах классов Жевре.

Для регулярных (невырожденных) операторов, введенных С. М. Никольским ([2]) и В. П. Михайловым ([3]), неулучшаемые оценки в терминах классов Жевре для производных решений уравнения (1) получены Г. Г. Казаряном ([4]).

В настоящей работе результаты статьи ([4]) переносятся на случай более общих (нерегулярных) гипоэллиптических операторов, введенных в ([5–8]).

Пусть R_n, $E_n(C_n)$—n-мерные эвклидовы пространства точек $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ($\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$) с вещественными (соответственно комплексными) координатами, z_n^+—n-мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, $R_n^{(0)}=\left\{\xi.\ \xi\in R_n,\ \prod_{j=1}^n \xi_j\neq 0\right\}$, $R_n^+=\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \xi_j\geqslant 0,$ $j=1,\ldots,n\}$.

Для $\xi\in R_n$, $\mu\in R_n^+$, $\lambda\in R_n^{(0)}\cap R_n^+$, $\alpha\in Z_n^+$, $t>0$ положим $|\xi|=\sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}$, $|\xi|_\lambda=\sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2/\lambda_j}}$, $|\xi^\mu|=|\xi_1|^{\mu_1}\ldots|\xi_n|^{\mu_n}$, $t^\lambda\xi=(t^{\lambda_1}\xi_1,\ldots,t^{\lambda_n}\xi_n)$, $|\alpha|=\sum_{j=1}^n \alpha_j$, $\xi^\alpha=$

$=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,\ldots,n)$ обобщенные по С. Л. Соболеву производные.

Пусть $P(D)=\sum\limits_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами и $P(\xi)=\sum\limits_\alpha \gamma_\alpha\xi^\alpha$ отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) $(P)=\{\alpha:\alpha\in Z_n^+,\ \gamma_\alpha\neq 0\}$.

Определения и терминология, используемые ниже, заимствованы из работ [3,6,7].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{G}=\{\nu^k\}_{k=1}^m$, $\nu^k\in R_n(k=1,\ldots,m)$. Характеристическим многогранником (х. м.) или многогранником Ньютона $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ набора $\mathfrak{G}$ назовем наименьший выпуклый многогранник в R_n, содержащий все точки набора $\mathfrak{G}$.

Определение 2. Х. м. набора точек $(P)\bigcup\{0\}$ назовем х. м. оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 3. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным (в. п.), если: а) $\mathfrak{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ положительны.

Обозначим k-мерные $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ грани многогранника $\mathfrak{N}$ через $\mathfrak{N}_l^k$ $(l=1,\ldots,M_k)$. $(n-1)$-мерная грань $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ $(l=1,\ldots,M_{n-1})$ многогранника $\mathfrak{N}$ называется главной, если единичная внешняя нормаль $\lambda^l=(\lambda_1^l,\ldots,\lambda_n^l)$ этой грани имеет хотя бы одну положительную координату. Главная грань $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ называется вполне правильной (в. п.), если $\lambda_j^l>0$ $(j=1,\ldots,n)$. Точка $\alpha\in\mathfrak{N}$ называется главной (соответственно в. п.), если α является предельной хотя бы для одной $(n-1)$-мерной главной (соответственно в. п.) грани многогранника $\mathfrak{N}$. Грань $\mathfrak{N}_l^k$, $k<n-1$, называется главной (соответственно в. п.), если она состоит из главных (соответственно в. п.) точек.

Определение 4. Грань $\mathfrak{N}_l^k$, $(l=1,\ldots,M_k;\ k=0,\ldots,n-1)$ $\mathfrak{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ назовем регулярной (невырожденной), если подмногочлен $P^{l,k}(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{N}_l^k$, удовлетворяет условию

$$P^{l,k}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}_l^k}\gamma_\alpha\xi^\alpha\neq 0,\quad \xi\in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся регулярными, будем называть нерегулярными. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) назовем регулярным (невырожденным), если все главные грани х. м. $\mathfrak{N}(P)$ регулярны. В противном случае оператор $P(D)$ назовем нерегулярным (вырожденным).

Обозначим через $\Lambda_l^k=\Lambda_l^k(P)$ множество тех внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей λ k-мерной в. п. некоординатной грани $\mathfrak{N}_l^k$ $(0\leqslant k\leqslant n-1,\ 1\leqslant l\leqslant M_k)$ х. м. $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(P)$, для которых $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j=1$ и $\Lambda^{n-1}=\bigcup\limits_{l=1}^{M_{n-1}}\Lambda_l^{n-1}$.

Пусть $\nu^k \in R_n^+$ $(k=1, \ldots, m)$. Положим $h(\xi)=\sum_{k=1}^{m} |\xi^{\nu^k}|$, а через $\mathfrak{N}(h)$ обозначим х. м. набора $\{\nu^k\}_{k=1}^m$.

Определение 5. Функция $h(\xi)$ называется весом гипоэллиптичности оператора $P(D)$, если для некоторой постоянной $C>0$

$$A(\xi)=\sum_{\alpha\neq 0}\left|\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|}\leqslant\frac{C}{h(\xi)},\quad \forall \xi\in R_n,\ P(\xi)\neq 0,$$

при этом для любого $\nu\in R_n^+\setminus\mathfrak{N}(h)$, $\nu\neq 0$, существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такая, что при $s\to\infty$ $\xi^s\to\infty$ и

$$[h(\xi^s)+|(\xi^s)^\nu|]\cdot A(\xi^s)\to\infty.$$

Обозначим через $\mathscr{P}$ множество гипоэллиптических операторов с постоянными коэффициентами, все k-мерные главные грани $(k<n-1)$ х. м. $\mathfrak{N}(P)$ которых регулярны, и положим для $P\in\mathscr{P}$

$$\mathfrak{M}(P)=\{\nu;\ \nu\in R_n^+;\ |\xi^\nu|\cdot A(\xi)\leqslant\text{const}<\infty,\ \xi\in R_n\}.$$

Пусть все главные грани х. м. $\mathfrak{N}(P)$ оператора $P\in\mathscr{P}$ регулярны, за исключением, быть может, единственной главной грани $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$, $\lambda_0\in\in\Lambda^{n-1}$ нормаль грани $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$, $0<\delta<1$. Положим

$$\sum(p^{i_0,n-1})=\{\tau\in R_n^{(0)},\ p^{i_0,n-1}(\tau)=0\},$$

$$B(\delta)=\{\nu;\ \nu\in R_n^+,\ (\lambda^0,\nu)\leqslant\delta;\ (\lambda,\nu)\leqslant 1,\ \forall\lambda\in\Lambda^{n-1}\setminus\{\lambda^0\}\}.$$

Лемма 1. *Пусть все главные грани х. м. оператора $P\in\mathscr{P}$, за исключением главных нерегулярных граней $\mathfrak{N}_1^{n-1},\ldots,\mathfrak{N}_N^{n-1}$, регулярны, тогда существуют числа δ_i $0<\delta_i<1$ $(i=1,\ldots,N)$ такие, что*

$$\mathfrak{M}(P)=B(\delta_1,\ldots,\delta_n)=\{\nu;\ \nu\in R_n^+;\ (\lambda^i,\nu)\leqslant\delta_i,\ i=1,\ldots,N,\ (\lambda,\nu)\leqslant 1,\ \forall\lambda\in\in\Lambda^{n-1}\setminus\{\lambda^1,\ldots,\lambda^N\}\},$$

где λ^i—внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ $(i=1,\ldots,N)$.

Согласно лемме 1 множество $\mathfrak{M}(P)$ является многогранником, поэтому если обозначить через e^k, $k=0,\ldots,M'$, вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$ и положить $h(\xi)=\sum_{k=0}^{M'}|\xi^{e^k}|$, то функция $h(\xi)$, порождаемая многогранником $\mathfrak{M}(P)$, будет весом гипоэллиптичности оператора $P\in\mathscr{P}$.

Пусть $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(P)$—вполне правильный х. м., $h(\xi)$—вес оператора $P\in\mathscr{P}$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$—произвольная точка из $\mathfrak{M}(P)$ с рациональными компонентами. Обозначим через $k(\nu)$ наименьшее натуральное число такое, что $k(\nu)\cdot\nu\in Z_n^+$. Положим также $N(P)=\{u;\ u\in C(E_n),\ P(D)u=0\}$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $h(\xi)$ вес гипоэллиптичности оператора $P\in\mathscr{P}$ и $\nu\in\mathfrak{M}(P)$ вектор с рациональными компонентами. Пусть $u\in N(P)$ и K произвольный компакт из E_n. Тогда существует постоянная $C=C(K)>0$ такая, что для всех $j=0, 1, \ldots$*

$$\sup_{x\in K} |D^{[k(\nu)\cdot\nu]\cdot l}u(x)| \leqslant C^l \cdot j^{k(\nu)\cdot l}.$$

Результат теоремы 1 является неулучшаемым, как показывает следующая

Теорема 2. *Пусть все главные грани х. м. оператора $P\in\mathscr{P}$ регулярны, а грань $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$ не регулярна $x_0\in\Omega$. Если для любой функции $u\in N(P,\Omega)=\{v,\ v\in C(\Omega),\ P(D)v=0\}$ существуют постоянная $C=C(u)>0$, мультииндекс $\alpha\neq 0$ и рациональное число $l=l(u)$ такие, что*

$$|D^{l\cdot\alpha}u(x_0)| \leqslant C^l \cdot j^{l\cdot l}, \quad j=1, 2, \ldots,$$

то $\frac{\alpha}{l}=\left(\frac{\alpha_1}{l}, \ldots, \frac{\alpha_n}{l}\right)\in\mathfrak{M}(P)$.

Замечание. Аналогичное утверждение имеет место и в случае наличия нескольких $(n-1)$-мерных нерегулярных граней х. м. $\mathfrak{N}(P)$.

Доказательства теорем 1, 2 проводятся модификацией методов, разработанных в [3–7] с использованием свойств множества $\mathfrak{M}(P)$, порождающего вес гипоэллиптичности оператора $P(D)$.

Приведем пример, иллюстрирующий сформулированные результаты.

Пусть $n=2$, $P(\xi)=\xi_2^8+\xi_1^6(\xi_1-\xi_2)^6+\xi_1^8\cdot\xi_2^8+1$. Очевидно, что $P\in\mathscr{P}$, следовательно по лемме 1 $\mathfrak{M}(P)=B(\delta_0)=\{\nu;\ \nu\in R_2^+,\ \nu_1+3\nu_2\leqslant 1;\ \nu_1+\nu_2\leqslant \delta_0\}$, где $\delta_0=\frac{2}{3}$.

Весом гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ является функция

$$h(\xi)=|\xi_1|^{2/3}+|\xi_2|^{1/3}+|\xi_1|^{1/2}\cdot|\xi_2|^{1/6}.$$

По теореме 1 для $\nu=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)\in\mathfrak{M}(P)$ и для произвольного компакта $K\subset\Omega$, где Ω открытое множество из R_2, существует постоянная $C_1=C_1(K)>0$ такая, что

$$\sup_{x\in K} |D_1^{3l}D_2^{l}u(x)| \leqslant C_1^l \cdot j^{6\cdot l}, \quad j=1, 2, \ldots. \tag{3}$$

С другой стороны, по теореме 4.4.6 работы [1]

$$\sup_{x\in K} |D_1^{3l}D_2^{l}u(x)| \leqslant C_2^l \cdot j^{7,5\cdot l}, \quad j=1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Сравнение полученных неравенств (3) и (4) показывает, что на самом деле решения уравнения (1) имеют лучшие свойства гладкости (в смысле принадлежности к пространству Жевре), чем это следовало из теорем 4.4.6 работы [1].

Ереванский государственный
университет

Գ. Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Հիպոէլիպտիկ հավասարումների մի դասի լուծումների ածանցյալների գնահատականների մասին

Աշխատանքում ստացված են $P(D)u=0$ *հավասարման լուծումների լավագույն գնահատականներ, որտեղ* $P(D)$*-ն հաստատուն գործակիցներով ոչ ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ օպերատոր է, որը բավարարում է որոշակի պայմանների։*

Գնահատականները ստացված են հիպոէլիպտիկության կշռի գաղափարի հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Хермандер,* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Мир, М., 1965. [2] *С. М. Никольский,* ДАН СССР, т. 146, № 4 (1962). [3] *В. П. Михайлов,* Тр. МИАН, № 91 (1967). [4] *Г. Г. Казарян,* Мат. сб., т. 128, № 3 (1985). *B. Pini,* Bull Un. Math. Ital., 18 (3) (1963). [6] *Г. Г. Казарян.* ДАН СССР, т. 214. № 5 (1974). [7] *Г. Г. Казарян,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 6 (1980) [8] *В. Н. Маргарян,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 6 (1980).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 5

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О смешанной граничной задаче теплопроводности для цилиндра конечной длины

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/VII 1985)

В работе приводится решение смешанной краевой задачи стационарного осесимметричного распределения температуры в круглом цилиндре конечной длины d, на поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена произвольным образом изменяется по длине цилиндра. Предполагаем, что внутри цилиндра имеются источники тепла с изменяющейся по радиусу и по длине цилиндра интенсивностью. В этом случае температура $U(r, x)$ цилиндра удовлетворяет дифференциальному уравнению [1,2]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\frac{1}{\lambda}w(r, x) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R}=h(x)[S(x)-U(R, x)];\quad -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0[T_0(r)-U(r, 0)];$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=d}=h_1[T_1(r)-U(r, d)]. \tag{2}$$

Здесь λ—коэффициент теплопроводности, w—интенсивность тепловыделения, h_j, S, T_j—соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h(x)$, $S(x)$, $T_0(r)$, $T_1(r)$ и $w(r, x)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию в соответствующих областях. Исходя из физического смысла, предполагаем, что h_j неотрицательны. Представим функцию $U(r, x)$ в виде ряда

$$U(r, x)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(r)\eta_k(x), \tag{3}$$

где $U_k(r)=\int\limits_0^d U(r, x)\eta_k(x)dx$, а $\eta_k(x)$ являются собственными функциями краевой задачи

$$\eta''(x)+\gamma^2\eta(x)=0;\quad -\eta'(0)+h_0\eta(0)=\eta'(d)+h_1\eta(d)=0 \tag{4}$$

и имеют вид

$$\eta_k(x)=\mu_k\left(\cos\gamma_k x+\frac{h_0}{\gamma_k}\sin\gamma_k x\right);\quad \mu_k=\sqrt{\frac{2}{d}}\left[1+\frac{h_0^2}{\gamma_k^2}+\frac{(h_0+h_1)(\gamma_k^2+h_0h_1)}{\gamma_k^2(\gamma_k^2+h_1^2)d}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

причем собственные значения γ_k являются положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_k d=\frac{\gamma_k(h_0+h_1)}{\gamma_k^2-h_0h_1}. \tag{6}$$

Уравнения типа (6) рассматривались различными авторами, давшими асимптотические выражения их корней [3], а также определившими величины первых корней для различных значений h_0 и h_1 [4]. Двусторонние оценки корней уравнения (6), сближающиеся при возрастании k с быстротой $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$, даны в [5]. Как известно [3], система функций $\{\eta_k(x)\}$ ортонормирована и полна в $(0, d)$. Умножив уравнение (1) на $\eta_k(x)dx$ и проинтегрировав от 0 до d, получим

$$U_k''(r)+\frac{1}{r}U_k'(r)-\gamma_k^2U_k(r)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^d w(r,x)\eta_k(x)dx-$$

$$-h_0\eta_k(0)T_0(r)-h_1\eta_k(d)T_1(r)=-w_k(r). \tag{7}$$

Решая уравнение (7) и учитывая ограниченность решения при $r=0$, будем иметь

$$U_k(r,x)=\frac{1}{I_0(\gamma_kR)}\left\{I_0(\gamma_kr)\left[M_k+\int_r^R r_1w_k(r_1)(I_0(\gamma_kR)K_0(\gamma_kr_1)-K_0(\gamma_kR)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times I_0(\gamma_kr_1))dr_1\right]+[I_0(\gamma_kR)K_0(\gamma_kr)-K_0(\gamma_kR)I_0(\gamma_kr)]\int_0^r r_1w_k(r_1)I_0(\gamma_kr_1)dr_1\right\}, \tag{8}$$

где $I_n(r)$, $K_n(r)$ — видоизмененные функции Бесселя первого и второго рода n-го порядка. Для определения постоянных M_k, входящих в (8), умножив первое из граничных условий (2) на $\eta_k(x)dx$ и проинтегрировав от 0 до d, получим

$$m_k=\frac{(\gamma_kd)^{3/2}I_0(\gamma_kR)}{\gamma_kI_1(\gamma_kR)+I_0(\gamma_kR)\int_0^d h(x)\eta_k^2(x)dx}\left[\int_0^d h(x)S(x)\eta_k(x)dx+\frac{1}{RI_0(\gamma_kR)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^R rw_k(r)I_0(\gamma_kr)dr-m_0\int_0^d h(x)\eta_0(x)\eta_k(x)dx-\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{m_j}{(\gamma_jd)^{\frac{3}{2}}}\int_0^d h(x)\eta_j(x)\eta_k(x)dx\right]; \tag{9}$$

$$m_0=\frac{I_0(\gamma_0R)}{\gamma_0I_1(\gamma_0R)+I_0(\gamma_0R)\int_0^d h(x)\eta_0^2(x)dx}\left[\int_0^d h(x)S(x)\eta_0(x)dx+\right.$$

$$+\frac{1}{RI_0(\gamma_0 R)}\int_0^R r w_0(r) I_0(\gamma_0 r)\,dr-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_j}{(\gamma_j d)^{3/2}}\int_0^d h(x)\eta_j(x)\eta_0(x)\,dx\Bigg],$$

где

$$m_k=(\gamma_k d)^{3/2}M_k;\quad m_0=M_0, \tag{10}$$

а штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Таким образом, для определения новых постоянных m_k получили бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (9). Для исследования этой системы оценим вначале сумму модулей коэффициентов при неизвестных m_j в каждом из уравнений (9). Обозначив через σ_k сумму модулей коэффициентов в k-том уравнении первой из систем и воспользовавшись оценкой коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией [6], будем иметь для $k>0$

$$\sigma_k<\frac{H\gamma_k^{\frac{3}{2}}I_0(\gamma_k R)\mu_k\sqrt{d}}{2\left[\gamma_k I_1(\gamma_k R)+I_0(\gamma_k R)\int\limits_0^d h(x)\eta_k^2(x)dx\right]}\left\{\mu_0\left[\left(1+\frac{h_0^2}{\gamma_0\gamma_k}\right)\frac{1}{\gamma_k-\gamma_0}+\right.\right.$$

$$+\left|1-\frac{h_0^2}{\gamma_0\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_k+\gamma_0}+\frac{2h_0}{\gamma_0\gamma_k}\Bigg]+\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{\mu_j}{(\gamma_j d)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{h_0^2}{\gamma_j\gamma_k}\right)\frac{1}{|\gamma_j-\gamma_k|}+\right.$$

$$\left.\left.+\left|1-\frac{h_0^2}{\gamma_j\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_j+\gamma_k}+\frac{2h_0}{\gamma_j\gamma_k}\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь через H обозначена полная вариация функции $h(x)$ в интервале $(0, d)$. Учитывая, далее, двусторонние оценки γ_k [5], после различных упрощений получим

$$\sigma_k<H\left(1+\frac{2}{\gamma_k R}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{k}}+\frac{0{,}3\ln k}{k}\right)<H\left(1+\frac{2d}{k\pi R}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{k}}+\frac{0{,}3\ln k}{k}\right). \tag{12}$$

Таким образом, суммы модулей коэффициентов при неизвестных m_j в уравнениях (9) с возрастанием k стремятся к нулю с быстротой $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, причем если $H<\frac{1}{4}\left(1+\frac{2d}{\pi R}\right)^{-1}$, то $\sigma_k<1$ для всех k. Свободные члены системы согласно предположению об ограниченности вариации функций $h(x)$, $S(x)$, $T_0(r)$, $T_1(r)$ и $w(r, x)$ с возрастанием k также стремятся к нулю с быстротой $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Согласно теории бесконечных систем [7] имеют место ограниченность решения системы (9) и сходимость метода последовательных приближений. Задаваясь значениями h_0, h_1, $h(x)$, $T_0(r)$, $T(r)$, $S(x)$, λ, $w(r, x)$ и решая усеченную систему (9), найдем оценки величин m_k сверху и снизу, после чего способом, описанным в [8], получим из (3), (8) и (10) значения $U(r, x)$ с избытком и недостатком. Заметим, что при конкретном задании упомянутых величин преобразованием систем (9) можно значительно усилить быстроту убывания постоянных, определяемых из бесконечной системы [9], что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Институт математики
Академии наук
Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Վերջավոր երկարությամբ գլանի համար ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է վերջավոր երկարություն ունեցող կլոր գլանում ջերմության կայունացած առանցքասիմետրիկ բաշխման խառը եզրային խնդիրը՝ գլանի արտաքին մակերևույթը շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը կամայական ձևով փոփոխվում է ըստ գլանի երկարության։ Ենթադրվում է նաև, որ գլանի ներսը գոյություն ունեն ջերմության աղբյուրներ՝ ըստ շառավղի ու երկարության փոփոխվող ինտենսիվությամբ։

Լուծումը տրվում է շարքով՝ ըստ (4) եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների և Բեսսելի ձևափոխված ֆունկցիաների, որի հաստատուն գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգից։ Ապացուցվում է, այդ համակարգի սահմանափակ լուծման գոյությունը և հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер,* Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. [2] *А. В. Лыков,* Теория теплопроводности, Высшая школа, М., 1967. [3] *Б. М. Левитан,* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [4] *А. Я. Григорьев, О. Н. Маньковский,* Инженерные задачи нестационарного теплообмена, Л., 1968. [5] *Р. С. Минасян,* ДАН АрмССР, т. 28, № 4 (1959). [6] *А. Зигмунд,* Тригонометрические ряды. Т. 1, Мир, М., 1968. [7] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962. [8] *Р. С. Минасян,* Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958). [9] *Р. С. Минасян,* в кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 8. Вопросы теории тепло- и массопереноса, Минск, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

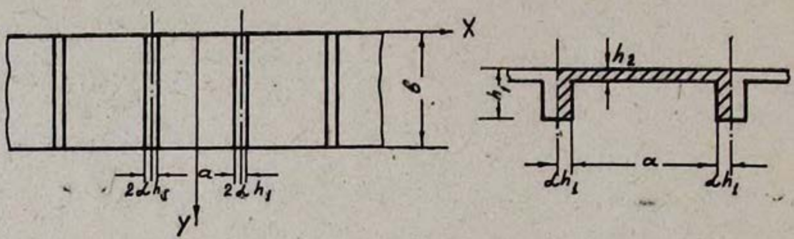
Э. В. Белубекян, А. З. Дарбинян

Оптимальное оребрирование длинной пластинки, изготовленной из композиционного материала

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 3/XII 1985)

Пусть длинная прямоугольная пластинка ширины b подкреплена равноудаленными ребрами жесткости, шарнирно закреплена вдоль кромок $y=0$ и $y=b$ и подвергается поперечному давлению $q=q(y)$ (рисунок). Предполагается, что конструкция изготовлена из монослоев ВКМ, поочередно уложенных под углом $\pm\varphi$ к оси x в пластинках между ребрами и вдоль оси y в ребрах.

Ставится задача определения значений h_1, h_2, α, a, φ из условия



наибольшей несущей способности конструкции при сохранении ее веса и ограничений на прочность. Условие

$$a=\frac{2\alpha h_1(h_1-h_0)}{h_0-h_2}, \tag{1}$$

где h_0—толщина сплошной длинной пластинки заданного веса, обеспечивает постоянство веса конструкции.

Ввиду равноудаленности ребер рассматривается задача прочности ортотропной пластинки размерами $a\times b$, опертой вдоль кромок $x=\pm a/2$ на упругие балки.

Функция w прогиба пластинки должна удовлетворять уравнению

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q \tag{2}$$

и граничным условиям

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\quad y=b,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \quad x=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\alpha h_1 q=E_1 J\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad \text{при } x=\frac{a}{2},$$

где $D_{ik}=\frac{B_{ik}h_2^3}{12}$, $D_3=D_{12}+2D_{66}$, $J=\alpha h_1^4/12$—момент инерции половины по ширине ребра жесткости, E_1—модуль упругости ВКМ вдоль волокон, B_{ik}—упругие характеристики монослоев ВКМ по оси x, определяемые через их упругие характерисгики B_{ik}^0 по направлению волокон по известным формулам поворота ([1]).

Разлагая функцию нагрузки в ряд Фурье

$$q(y)=\sum_1^\infty a_k \sin\lambda_k y, \quad a_k=\frac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin\lambda_k y dy, \quad \lambda_k=\frac{\pi k}{b},$$

находим решение уравнения (2) с удовлетворением условий (3) для трех возможных случаев: $D=D_3^2-D_{11}D_{12}>0$, $D<0$, $D=0$.

Для сокращения записи здесь приводится решение только для случая $D<0$:

$$w=\sum_1^\infty\left[\frac{a_k}{D_{22}\lambda_k^4}+A_k \operatorname{sh}\beta_1\lambda_k x\sin\beta_2\lambda_k x+B_k \operatorname{ch}\beta_1\lambda_k x\cos\beta_2\lambda_k x\right]\sin\lambda_k y, \tag{4}$$

где

$$\beta_{1,2}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}\pm D_3}{2D_{11}}},$$

$$A_k=-\frac{2a_k}{C_k D_{11}\lambda_k^2}\left(\frac{E_1 J}{D_{22}}-\alpha h_1\right)\left(\beta_2 \operatorname{ch}\beta_1\frac{\lambda_k a}{2}\sin\beta_2\frac{\lambda_k a}{2}-\beta_1 \operatorname{sh}\beta_1\frac{\lambda_k a}{2}\cos\beta_2\frac{\lambda_k a}{2}\right),$$

$$B_k=-\frac{2a_k}{C_k D_{11}\lambda_k^2}\left(\frac{E_1 J}{D_{22}}-\alpha h_1\right)\left(\beta_1 \operatorname{ch}\beta_1\frac{\lambda_k a}{2}\sin\beta_2\frac{\lambda_k a}{2}+\beta_2 \operatorname{sh}\beta_1\frac{\lambda_k a}{2}\cos\beta_2\frac{\lambda_k a}{2}\right),$$

$$C_k=4\beta_1\beta_2(\beta_1^2+\beta_2^2)\left(\operatorname{sh}^2\beta_1\frac{\lambda_k a}{2}+\sin^2\beta_2\frac{\lambda_k a}{2}\right)+\frac{E_1 J}{D_{11}}\lambda_k(\beta_1\sin\beta_2\lambda_k a+\beta_2 \operatorname{sh}\beta_1\lambda_k a).$$

Условия прочности принимаются в виде:

$$\sigma_{y\max}\leqslant\sigma_{B1} \quad \text{для ребра,} \tag{5}$$

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2-\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2}\leqslant 1 \tag{6}$$

для наиболее опасных точек пластинки.

Здесь σ_{B1}, σ_{B2}, τ_{B0}—прочностные характеристики ВКМ, $\sigma_{y\max}$—наибольшее напряжение в ребре, определяемое по формуле

$$\sigma_{y\max}=-E_1\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{при} \quad x=\frac{a}{2}, \quad y=\frac{b}{2}, \tag{7}$$

σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}—напряжения в наиболее опасных точках пластинки ($x=0$, $y=b/2$, $z=h_2/2$ и $x=a/2$, $y=b/2$, $z=h_2/2$) по направлениям укладки монослоев ВКМ:

$$\sigma_{11}=B_{11}^0 e_{11}+B_{12}^0 e_{22}, \quad \sigma_{22}=B_{12}^0 e_{11}+B_{22}^0 e_{22}, \quad \sigma_{12}=B_{66}^0 e_{12}, \tag{8}$$

e_{11}, e_{22}, e_{12}—деформации по направлениям укладки монослоев ВКМ, которые по формулам:

$$e_{11}=e_x\cos^2\varphi+e_y\sin^2\varphi-e_{xy}\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$e_{22}=e_x\sin^2\varphi+e_y\cos^2\varphi+e_{xy}\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$e_{12}=(e_x-e_y)\sin 2\varphi+e_{xy}\cos 2\varphi$$

выражаются через деформации по направлениям осей x и y:

$$e_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad e_y=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad e_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{9}$$

при $x=0,\ y=b/2,\ z=h_2/2;\ x=a/2,\ y=b/2,\ z=h_2/2.$

При заданном распределении нагрузки $q(y)$ по формулам (7) и (8) вычисляются напряжения в наиболее опасных точках ребра и пластинки и затем из условий прочности (5) и (6) определяются соответствующие значения параметра нагрузки q_{01}, q_{02}, q_{03}. Допускаемая несущая способность будет

$$q_0=\min\{q_{01},\ q_{02},\ q_{03}\}. \tag{10}$$

При заданном весе конструкции (h_0), а также значении $\alpha=0{,}1$, что соответствует согласно теории расчета балок предельному значению отношения ширины ребра к высоте (1/5), параметр q_0 определяется значениями высоты ребра h_1, толщины пластинки h_2 и углом укладки монослоев ВКМ—φ, оптимальным выбором которых следует добиться максимального значения q_0.

Поставленная задача сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

найти $$Q=\max_{\bar{x}}\bar{q}_0,\quad x=\{\bar{h}_1,\ \bar{h}_2,\ \varphi\} \tag{11}$$

при ограничениях $$\bar{h}_0\leqslant\bar{h}_1\leqslant 0{,}2;\ \delta\leqslant\bar{h}_2\leqslant\bar{h}_0;\ 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\ \bar{a}\geqslant 5\bar{h}_2. \tag{12}$$

Здесь $\bar{q}_0=q_0/\sigma_{B1}$—целевая функция, q_0определяется из (10), $\bar{x}$—вектор управления, $\bar{h}_1=h_1/b$, $\bar{h}_2=h_2/b$, $\bar{a}=a/b$, $\bar{h}_0=h_0/b$—геометрические параметры конструкции.

Ограничения (12) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Значения параметра δ принимаются: $\delta=0{,}01$ при $a\geqslant b$ и $\delta=0{,}01\bar{a}$ при $a<b$.

Задача решается при помощи комплексного метода случайного поиска, разработанного Боксом ([2]). Численная реализация проведена для пластинки, изготовленной из СВАМ 5:1.

Полученные значения оптимальных параметров φ, $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, соответствующее межреберное расстояние $\bar{a}$ и соответствующая максимальная несущая способность Q для различных весовых характеристик $\bar{h}_0$ приведены в таблице. Там же для сравнения даны значения наибольшей несущей способности Q_0 для соответствующих сплошных пластинок ($\varphi=90°$).

Расчеты показывают, что оптимальный проект соответствует равенству значений нагрузок, определяемых в опасных точках $q_{01}=q_{02}=q_{03}$, что соответствует равнопрочной конструкции.

$\bar{h}_0$	φ^0	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\bar{a}$	Q	Q_0
0,05	88	0,193	0,0178	0,171	0,00915	0,00339
0,04	86	0,168	0,0146	0 170	0,00625	0,00216
0,03	86	0,144	0,0113	0,163	0,00382	0,00122
0,02	87	0,111	0,00798	0,167	0,00191	0,000542
0,01	88	0,073	0,00437	0,165	0,000586	0,000135

Сравнение результатов несущей способности для ребристой и сплошной пластин одинакового веса показывает, что оптимальное оребрирование приводит к существенному увеличению несущей способности. Причем этот эффект тем больше, чем меньше значение $\bar{h}_0$. При $\bar{h}_0 = 0{,}01$ можно достичь увеличения несущей способности в 4,34 раза.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ա. Ջ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված երկար սալի օպտիմալ կողավորումը

Դիտարկվում է նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող, կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և կոշտության կողերով ուժեղացված երկար ուղղանկյան սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը։

Հաշվի առնելով կողերի և նրանց մեջ գտնվող սալերի ամրության վրա դրված սահմանափակումները, որոշվում են կոնստրուկցիայի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա մաքսիմալ կրողունակությունը տրված կշռի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян,* Теория анизотропных пластин, Наука, М., 1967. [2] *Д. Химмельблау,* Прикладное нелинейное программирование, Мир, М., 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 550.388.2

ГЕОФИЗИКА

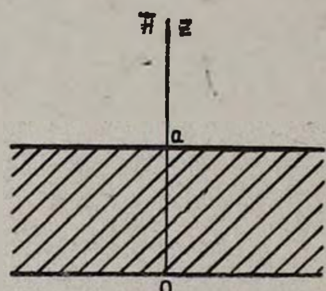
Ю. С. Варданян

К теории возбуждения электрических полей и возникновения неоднородностей в верхних слоях атмосферы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 13/IX 1984)

Вопросы электродинамики ионосферной плазмы в последние годы приобрели большую значимость, и в этом направлении достигнуты определенные успехи. В настоящей работе между поверхностями $z=0$ и $z=a$ (в магнитном поле, перпендикулярном к границам раздела, см. рисунок) рассматривается слой слабоионизированного газа типа ионосферы, расположенного в верхних слоях уровня F. На таких высотах гравитация и градиент давления также играют существенную роль ([1]).

Будем считать, что слабоионизированный газ состоит из электронов, положительных ионов одного сорта и нейтральных молекул с возмущающей горизонтальной скоростью $\vec{W}$. Тогда уравнения движения



для ионов и электронов, линеаризованные относительно возмущения физических величин, в пренебрежении инерциальными, нелинейными членами, силой Кариолиса и частотой соударений электронов с ионами (необходимые для этого условия хорошо выполняются в ионосфере) будут иметь вид:

$$\frac{-\nabla \bar{p}_i}{N_{0i}} + e\left\{-\nabla\psi + \frac{1}{c}[\vec{v}_i\vec{H}]\right\} = \gamma_{in}(\vec{v}_i - \vec{W}) + \frac{n_i}{2N_{0i}}(m_i+m_e)\vec{g}; \qquad (1)$$

$$\frac{-\nabla \bar{p}_e}{N_{0e}} - e\left\{-\nabla\psi + \frac{1}{c}[\vec{v}_e\vec{H}]\right\} = \gamma_{en}[\vec{v}_e - \vec{W}) + \frac{n_e}{2N_{0e}}(m_i+m_e)\vec{g}.$$

В этих уравнениях e—заряд иона; m_i, m_e—массы соответственно иона и электрона; $\vec{v}_i$, $\vec{v}_e$—их скорости; n_i, n_e—возмущения равновесных концентраций N_{0i}, N_{0e} соответствующих частиц. Возмущения их давлений $\overline{p_i}=n_ikT_i$, $\overline{p_e}=n_ekT_e$, поскольку процессы считаются изотермическими. T_i и T_e—ионная и электронная температуры, k—постоянная Больцмана. ψ—потенциал электрического поля, $\vec{g}$—ускорение силы тяжести, γ_{in}, γ_{en}—частоты соударений соответственно ионов и электронов с нейтралами, $\vec{W}$—скорость нейтральных частиц.

В рассматриваемой области, охватывающей F-слой среднеширотной ионосферы, основным фактором ионообразования является фотоионизация, обусловленная солнечным электромагнитным излучением. Обратный процесс—потеря ионов происходит путем передачи заряда от первичных ионов к вторичным, а также переносом частиц. Последнее в уравнении движения (1) выражено учетом членов $\nabla\overline{p_i}$ и $\nabla\overline{p_e}$, ответственных за амбиполярную диффузию.

Таким образом уравнения непрерывности заряженных частиц на этих высотах, где преобладают атомарные ионы, записываются следующим образом:

$$\operatorname{div} N_{oi}\vec{v}_i=J-\beta N_e;$$
$$\operatorname{div} N_{oe}\vec{v}_e=J-\beta N_e, \qquad (2)$$

J—функция ионообразования Чепмена, которая, по-видимому, здесь также справедлива, поскольку рассматривается простейший случай фотоионизации однокомпонентной изотермичной атмосферы монохроматическим излучением, β—формальный (т. к. в этой области реакция прилипания отсутствует) коэффициент прилипания электронов к нейтральным атомам, линейно зависящим от концентрации нейтральных частиц, т. е. $\beta=a_rN_n$.

Пусть сила тяжести и температура всех сортов частиц, составляющих слабоионизованный газ, не зависят от высоты z, тогда частоты столкновений $\gamma_{i,en}$ (пропорциональные плотности нейтральных молекул, выраженной барометрической формулой $N_n=N_n^{(0)}e^{-z/H_n}$) и невозмущенная плотность заряженных частиц $N_{oi,e}$ будут иметь вид $\gamma_{i,en}=\gamma_{i,eo}e^{-z/H_n}$, $N_{oi,e}=N_0e^{z/H_n}$; здесь $H_n=kT_n/m_ng$—высота однородной атмосферы; m_n—температура и масса нейтральных частиц; $\gamma_{i,eo}$ и N_0—соответственно частоты столкновений и концентрация заряженных частиц на высоте $z=0$; H_m—постоянная аппроксимации экспонентой концентрации заряженных частиц (такое приближение для большинства задач весьма удовлетворительно).

Подставляя в (2) скорости $\vec{v}_i$, $\vec{v}_e$, найденные из (2), получаем уравнения, составляющие вместе с уравнением Пуассона $-\nabla\psi=4\pi e(n_i-n_e)$ замкнутую систему для определения потенциала ψ и n_i, n_e.

Далее, если учитывать лишь вертикальные изменения регулярных ионосферных параметров и считать, что скорость нейтралов $\vec{W}$ не зависит от z и составляющая $W_z=0$, то, используя уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{W}=0$, можно члены Фурье-разложения W_x, W_y разбить на пары и решать задачу для каждой пары отдельно.

В качестве такой пары выберем

$$W_x=\frac{W_0}{k_1}\sin k_1x\cdot\sin k_2y,\quad W_y=\frac{W_0}{k_2}\cos k_1x\cdot\cos k_2y; \tag{3}$$

другие пары членов разложения можно привести к виду (3) соответствующей заменой переменных (2). Тогда электрический потенциал ψ и n_i, n_e можно представить в виде

$$\psi=f_1\sin k_1x\cdot\cos k_2y,\quad n_i=f_2\sin k_1x\cdot\cos k_2y,\quad n_e=f_3\sin k_1x\cdot\cos k_2y. \tag{4}$$

После подстановки (4) в (2) и уравнение Пуассона получим

$$a^{(1)}_{i,e}(z)f''_{1zz}+a^{(2)}_{i,e}(z)f'_{1z}+a^{(3)}_{i,e}(z)f_1+a^{(4)}_{i,e}(z)f''_{2,3zz}+a^{(5)}_{i,e}(z)f'_{2,3z}+a^{(6)}_{i,e}(z)f_{2,3}+A_{i,e}=0;$$

$$a^{(1)}_{i,e}(z)=\left(\frac{a_r}{N_{oi}}\,\frac{N_n}{4\pi e}\mp\frac{c}{H_z}\lambda_{i,e}\right),\quad a^{(2)}_{i,e}(z)=\mp\lambda_{i,e}\frac{c}{H_z}\left(\frac{1}{H_n}+\frac{1}{H_m}\right)$$

$$a^{(3)}_{i,e}(z)=-k_0^2\left(\frac{a_r}{N_{oi}}\,\frac{N_n}{4\pi e}\mp\frac{c}{H_z}\,\frac{\lambda_{i,e}}{(1+\lambda^2_{i,e})}\right),\quad a^{(4)}_{i,e}(z)=-\frac{1}{\gamma_{i,en}}\cdot\frac{kT_{i,e}}{N_{oi,e}};$$

$$a^{(5)}_{i,e}(z)=-\frac{1}{\gamma_{i,en}}\cdot\frac{1}{N_{oi,e}}\left(\frac{1}{H_n}kT_{i,e}+\frac{1}{2}m_{i,e}g\right);$$

$$a^{(6)}_{i,e}(z)=\frac{1}{N_{oi,e}}\left(a_rN_n-\frac{1}{2}\,\frac{m_{i,e}g}{\gamma_{i,en}H_n}+\frac{k_0^2kT_{i,e}}{\lambda^2_{i,e}\gamma_{i,en}}\right);$$

$$A_{i,e}=\mp\lambda^{-1}_{i,e}\frac{k_0^2}{k_1k_2}W_0,\quad k_0^2=k_1^2+k_2^2,\quad k_0^2f_1-f''_{1zz}=4\pi e(f_2-f_3), \tag{5}$$

где первые и вторые индексы относятся соответственно к ионам и электронам; $\lambda_{i,e}=\frac{eH}{m_{i,e}}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\gamma_{i,en}}$ — отношение ларморовской частоты вращения ионов (электронов) к частоте соударений ионов (электронов) с нейтралами.

Как видно из (5), учет силы тяжести заряженных частиц и членов, ответственных за амбиполярную диффузию, приводит к системе трех уравнений, и сведение ее в общем случае к одному уравнению весьма затруднительно. Поэтому очень часто, используя даже условие квазинейтральности $n_i\approx n_e$ в космических явлениях, прибегают к наложению ограничений на горизонтальные масштабы неоднородностей поля и рассматривают случаи предельно больших и предельно малых масштабов ([3]).

Однако в настоящей работе будет показано, что условие квазинейтральности позволяет свести задачу к одному уравнению без введения дополнительных ограничений на размеры неоднородностей поля.

В самом деле, учитывая квазинейтральность плазмы, можно в (5) положить $f_2\approx f_3$. После чего получим систему из двух уравнений относительно неизвестных функций f_1, f_3, которая вместе с уравнением Пуассона определит и f_2 ([4]).

Произведя замену $f_3=N_0e^{z/H_m}u_1(t)\frac{1}{t}$ $f_1=u(t)\frac{1}{t}$, где $t=e^{-\zeta}$, $\zeta=z/H_n$, из (5) можно легко исключить $u(t)$ и получить уравнение четвертого порядка относительно $u_1(t)$. Но с помощью численных оценок реальных параметров рассматриваемой нами F-области ионосферы порядок уравнения можно будет понизить на единицу и привести к следующему виду:

$$t\frac{d^3u_1}{dt^3}+(a_1-1)\frac{d^2u_1}{dt^2}+a_2\frac{du_1}{dt}-\frac{2(3+m)}{4}\cdot\frac{a_2}{t}u_1+c=0;$$

$$a_1=-\frac{1}{4}\left[2(2+3m)+gH_n\frac{(m_i\lambda_{eo}\gamma_{eo}+m_e\lambda_{io}\gamma_{io})}{(kT_i\lambda_{eo}\gamma_{eo}+kT_e\lambda_{io}\gamma_{io})}\right]; \qquad (6)$$

$$a_{21}=-\frac{H_n^2}{4}\frac{a_rN_n^{(0)}\gamma_{io}\gamma_{eo}(\lambda_{io}+\lambda_{eo})}{(kT_i\lambda_{eo}\gamma_{eo}+kT_e\lambda_{io}\gamma_{io})}, \quad m=\frac{H_n}{H_m}.$$

Решением уравнения (6) будет:

$$u_1(t)=3^6\sqrt{3}t^{13/6}[AJ_6(2\sqrt{a_2}t^{1/2})+BY_6(2\sqrt{a_2}t^{1/2})]+CL_{-1/3}+C_1L_1,$$

здесь J_6 и Y_6—соответственно функции Бесселя первого и второго рода, $L_{-1/3}$ и L_1—функции Ломмеля, для которых имеем

$$L_{-1/3}=3/2\Gamma\left(-\frac{1}{6}+3\right)\Gamma\left(-\frac{1}{6}-3\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a_2)^k t^{(k+2)}}{\Gamma\left(-\frac{1}{6}+3+k+1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{6}-3+k+1\right)};$$

$$L_1=3^6\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-3\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a_2)^k t^{(8+3k)/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3+k+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-3+k+1\right)};$$

A, B, C, C_1—произвольные постоянные, которые должны определяться из граничных условий.

Подставляя (7) в (5), будем иметь

$$f_1=\frac{Hz}{c}\frac{1}{k_0^2}\cdot\frac{\lambda_{io}\lambda_{eo}}{(\lambda_{io}^2-\lambda_{eo}^2)}\cdot\left\{\left(-\frac{2}{H_n}\left[\frac{m_igw_e}{\gamma_{io}\gamma_{eo}}+\frac{5}{H_n}\left(\frac{kT_i\lambda_{eo}}{\gamma_{io}}+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{kT_e\lambda_{io}}{\gamma_{eo}}\right)\right]t^{-2}+\left[a_rN_n^{(0)}(\lambda_{io}+\lambda_{eo})+k_0^2\left(\frac{kT_i}{\lambda_{io}}\frac{\lambda_{eo}}{w_i}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{kT_e\lambda_{io}}{\lambda_{eo}w_e}\right)\right]t^{-1}\right)u_1+\frac{1}{H_n}\left[\frac{m_igw_e}{\gamma_{io}\gamma_{eo}}+\frac{8}{H_n}\left(\frac{kT_i\lambda_{eo}}{\gamma_{io}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{kT_e\lambda_{io}}{\gamma_{eo}}\right)\right]t^{-1}u'_{1t}-\frac{4}{H_n^2}\left(\frac{kT_i\lambda_{eo}}{\gamma_{io}}+\frac{kT_e\lambda_{io}}{\gamma_{io}}\right)\times$$
$$\left.\times u''_{1tt}\right\}+\frac{H_z}{c}\frac{W_0}{k_1k_2}.$$

Отсюда, используя уравнение Пуассона, простым дифференцированием находим и амплитуду объемного заряда f_2-f_3:

$$f_2-f_3=\frac{1}{4\pi e}\cdot\left\{k_0^2f_1-\frac{4}{H_n^2}\left[t^2\frac{d^2f_1}{dt^2}+t\frac{df_1}{dt}\right]\right\}.$$

Как видно из (8), электрический потенциал f_1 и объемный заряд f_2-f_3 зависят от фотохимических условий, амбиполярной диффузии и скорости движения нейтрального газа в ионосфере. При этом вклад, вносимый каждым из этих факторов, зависит от численных соотношений соответствующих физических параметров задачи (коэффициента рекомбинации, температуры и плотности заряженных частиц и скорости нейтралов).

Таким образом, в работе показано, что условие квазинейтральности позволяет систему уравнений, описывающую электродинамические процессы в ионосфере выше уровня E (где $\lambda_{i,e} \gg 1$), свести к одному уравнению и получить его решение без наложения ограничений на масштабы явлений.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

ՅՈՒ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Մթնոլորտի վերին շերտերում էլեկտրական դաշտերի և անհամասեռությունների տեսության շուրջ

Աշխատանքում դիտարկվում է իոնոլորտի բնույթի թույլ իոնացված գազի շերտ, որը գտնվում է E-շերտի մակարդակի վերին մասում։ Ի նկատի առնելով լիցքավորված մասնիկների վրա ազդող ծանրության ուժը և այդ մասնիկների ճնշման գրադիենտը, ստացիոնար դեպքում հաշվված են չեզոք գազի շարժումով պայմանավորված էլեկտրաստատիկ դաշտը և իոնոլորտային անհամասեռությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. И. Акасофу, С. Чепмен,* Солнечно-земная физика, т. 1, Мир, 1974. [2] *Л. М. Алексеева, Ю. С. Варданян, Б. А. Тверской,* Геомагнетизм и аэрономия, т. 9 №3 (1969). [3] *Б. Н. Гершман,* Динамика ионосферной плазмы, Наука, М., 1974. [4] *С. И. Брагинский,* в сб.: Вопросы теории плазмы, под ред. М. А. Леонтовича, т. 1, Госатомиздат. М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 5

УДК 581.12

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР **В. О. Казарян, Г. В. Михаелян**

О суточной динамике азотного обмена в листьях древесных, кустарниковых и травянистых растений

(Представлено 2/XII 1985)

Суточная периодичность синтеза и накопления азотистых веществ в листьях привлекала внимание исследователей с давних времен. Однако до сих пор на этот счет нет единого мнения в связи с разноречивостью имеющихся данных ([1–3]). Имеющиеся в литературе работы проводились на различных объектах и не преследовали цели изучения азотного обмена в эволюционном аспекте. Исследования А. В. Благовещенского ([4]), проведенные на семенах растений различных семейств, показали, что каждый вид может быть охарактеризован средней величиной содержания азота в семенах. При этом эта величина не зависит от непосредственно действующей на растение окружающей среды и связана с историческими условиями, эволюцией растения и его происхождением.

Исходя из того, что эволюция основных жизненных форм растений шла в направлении интенсификации жизнедеятельности, усиления корне-листового обмена ([5]), мы вправе допустить, что суточная амплитуда синтеза и транспорта ассимилятов из листьев травянистых форм должна быть гораздо больше, чем у кустарников или деревьев.

Это предположение в отношении количественного изменения форм азота в листьях в различные часы суток экспериментально проверено нами в 1984—1985 гг. у представителей указанных жизненных форм растений.

Объектом исследования служили растения из семейства Rosaceae, где имеются все переходные формы от древесного типа к травянистому. Растения выращивали в условиях Ереванского ботанического сада в глиняных вазонах. После достижения примерно одинаковой вегетативной мощности и высоты были взяты пробы для анализов. Все растения были взяты на первом году жизни. Из древесных были взяты следующие виды: яблоня обыкновенная (Malus domestica Borkh), черемуха обыкновенная (Padus racemosa (Lam) Gilib), вишня магалебская (Cerasus mahaleb (L.) Mill), слива домашняя (Prunus domestica L.), груша обыкновенная (Pyrus communis L). Из кустарников: таволга Вангутта (Spiraea vanhouttei (Briot) Zbl.). шиповник обыкновенный (Rosa canina L.). пузыреплодник калинолистный (Physocarpus opulifolia (L.) Maxim), ожина (Rubus caesius L.). Из травянистых: земляника лесная (Fragaria veska L.), черноголовник многобрачный (Poterium polyganum Waldst. et. Kit), манжетка Гроссгейма (Alchemilla grossheimii Vur.), лапчатка прямая (Potentillia recta L.). Опыты проводили на зафиксированном листовом материале. Пробы были взяты в 6, 12, 18 и 0 ч суток. Определение форм азота проводили по методу Кельдаля ([6]). Содержание аминокислот — методом хроматографии на бумаге ([7]). Данные подвергали дисперсионному анализу по Д. А. Доспехову ([8]).

Содержание различных форм азота в листьях в различные часы суток (рис. 1) существенно колеблется у всех опытных растеиий. У

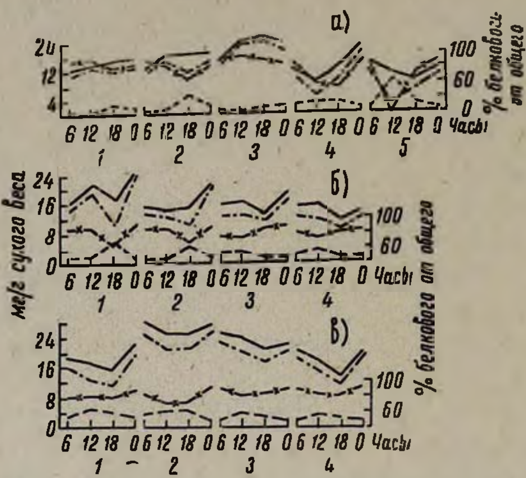


Рис. 1. Суточный ход количественного изменения форм азота в листьях древесных, кустарниковых и травянистых растений: —общий, —.—белковый; ———небелковый —х—% белкового от общего. *а:* 1—слива, *2*—черемуха, *3*—яблоня, *4*—вишня, 5—груша; *б:* 1—иповник, *2*—пузыреплодник, *3*—таволга, *4*—ожина; *в:* 1—черноголовник *2*—лапчатка, *3*—манжетка, *4*—земляника

всех исследованных объектов колебания белкового азота ($НСР_{05}=1,96$ мг/г сух. веса, $F_ф=40,07$, $F_{05}=3,23$) идентичны колебаниям содержания общего азота ($НСР_{05}=2,36$ мг/г сух. веса, $F_ф=5,02$, $F_{05}=3,23$). При этом максимумы и минимумы колебания общего и белкового азота в основном приходятся на одни и те же часы. Однотипность этих колебаний, как отмечает Размаев ([1]), свидетельствует, по-видимому, о немедленной транспортировке продуктов распада белков из мест их образования. Максимальное содержание общего и белкового азота приходится на ночное время. В отношении интенсивности включения азота в белковую фракцию следует указать, что кривая этого показателя идентична кривой изменения белкового азота. Как правило у всех жизненных форм уменьшение количества белкового азота сопровождается соответствующим увеличением небелковой формы. При этом содержание последней ($НСР_{05}=0,96$ мг/г сух. веса, $F_ф=15,12$, $F_{05}=5,23$) также подвержено значительным колебаниям в течение суток. Несмотря на то, что для всех жизненных форм максимальное содержание небелкового азота приходится на 12 или 18 ч, минимальное — на 6 или 0 ч суток, у всех объектов наблюдаются некоторые присущие им особенности накопления и оттока азотистых веществ. У вишни и груши обнаружены идентичные кривые суточной динамики общего и белкового азота. У сливы и черемухи содержание общего азота в листьях с 6 по 0 ч нарастает, в то время как белковый азот с 12 по 18 ч уменьшается и вновь возрастает в 0 ч. Среди древесных объектов исключение составляет яблоня, у которой содержание общего и белкового азота в 0 ч понижается.

Суточный ход изменения азотистых веществ у кустарников проходит несколько иначе: содержание общего азота у шиповника, таволги и ожины выражается двувершинной кривой с максимумами в 12 и 0 ч. У пузыреплодника с 6 по 18 ч идет уменьшение белковой фракции, затем наблюдается дальнейшее ее возрастание до 0 ч. Как правило, у всех кустарниковых форм ход синтеза белка усиливается с 18 ч. Об этом свидетельствует и процент белкового азота от общего. Так же как и у кустарников, у травянистых форм количество общего и белкового азота уменьшается в дневные часы и достигает максимума в ночное время. Следует отметить при этом, что у травянистых форм перемещение азотистых веществ из листьев днем осуществляется более интенсивно, в то время как у древесных форм в указанное время или не наблюдается перемещение, или же его активность менее выражена.

Более наглядно различия между жизненными формами демонстрируют «средние» кривые (рис. 2). Примечательно прежде всего то, что

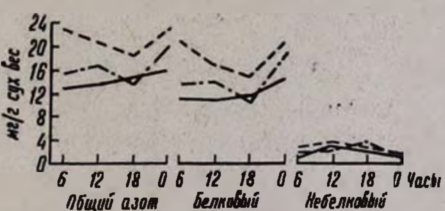


Рис. 2. Кривые по средним данным суточного хода изменения форм азота в листьях древесных (—), кустарниковых (—.—) и травянистых (— — —) растений

количество исследуемых форм азота в листьях во все часы суток у травянистых форм гораздо больше, чем у деревьев. Кустарники занимают промежуточное положение.

Аналогичные различия обнаружены нами и в содержании свободных аминокислот в листьях (рис. 3). Изучение суточной динамики содержания этих соединений показало, что исследуемые объекты не различаются по характеру кривых содержания аминокислот. В листьях всех видов наблюдается одновершинный ход кривых. У всех растений количество аминокислот возрастает днем. При этом в каждой жизненной форме встречаются виды с максимумом содержания аминокислот в листьях в 12 (слива, груша, ожина, шиповник, черноголовник, манжетка) или 18ч (черемуха, яблоня, вишня, пузыреплодник, таволга, земляника, лапчатка). У всех подопытных объектов обнаружены количественные различия, что хорошо видно на «средних» кривых (рис. 4).

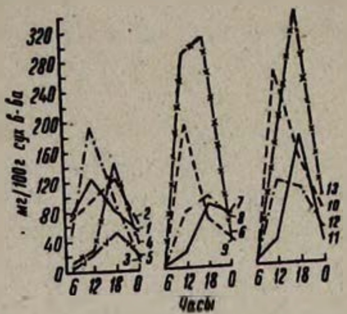


Рис. 3. Суточный ход количественного изменения аминокислот в листьях древесных, кустарниковых и травянистых растений: *1*—слива, *2*—черемуха; *3*—яблоня; *4*—вишня; *5*—груша; *6*—шиповник; *7*—пузыреплодник; *8*—таволга; *9*—ожина; *10*—черноголовник; *11*—лапчатка; *12*—манжетка; *13*—земляника

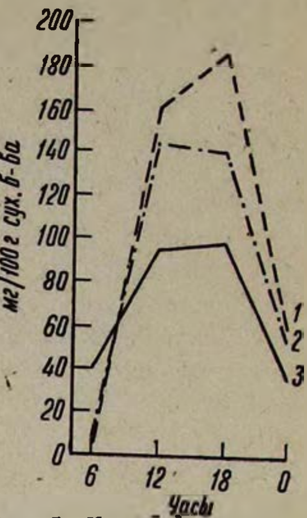


Рис. 5. Кривые (по средним данным) суточного хода количественного изменения аминокислот в листьях травянистых (*1*), кустарниковых (*2*) и древесных (*3*) растений

Наибольшее количество аминокислот ($НСР_{05}$=45,26 мг/100 г сух. веса, $F_ф=14,82$, $F_{05}=3,23$) выявленно у травянистых форм, наименьшее у древесных.

Таким образом приведенные данные показывают, что в процессе длительной эволюции основных жизненных форм розоцветных происходили глубокие изменения в активности азотного обмена листьев в течение суток. При этом эволюционные преобразования растений, сопровождающиеся сокращением корне-листового расстояния и повышением уровня функциональной связи между листьями и корнями, привели к активации азотного обмена в листьях. Это выражалось в том, что у эволюционно более продвинутых форм (травянистых) выработалась способность к энергичному суточному поглощению и к наибольшему дневному синтезу белков и аминокислот в листьях и к более активной передаче их другим органам. В данном случае общая активность синтетической деятельности листьев травянистых форм следует рассматривать как один из физиологических показателей эволюционной их продвинутости по сравнению с кустарниками и древесными формами.

Институт ботаники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Ծառային, թփային և խոտային բույսերի տերևներում ազոտային նյութափոխանակության մասին

Վերցված է Վարդազգիների ընտանիքին պատկանող 5 ծառային և 4-ական թփային և խոտային միևնույն հզորության և բարձրության բույսեր 0,6,12 և 18 ժամերի տերևներում որոշվել է ազոտի տարբեր ձևերի պարունակությունը։ Ցույց է տրված, որ էվոլյուցիայի ընթացքում ծառերից դեպի խոտային ձևերը ակտիվանում է օրվա ընթացքում բույսերի կողմից ազոտի կլանումը և նյութափոխանակությունը տերևներում։

Եզրակացություն է արվում այն մասին, որ խոտային ձևերի սինթետիկ գործունեության ընդհանուր ակտիվությունը պետք է դիտել որպես նրանց էվոլյուցիոն առաջխաղացման ֆիզիոլոգիական ցուցանիշներից մեկը թփերի կամ ծառերի համեմատությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. И. Размаев,* Физнология растений, т. 14, в. 3(1967). [2] *А. М. Алексеев, Н. А. Гусев, Т. М. Белкович,* Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер. биол. наук, в. 8(1963). [3] *С. М. Вартапетян, Ш. Ф. Онохина,* ДАН СССР, т. 145, № 6 (1962). [4] *А. В. Благовещенский,* Биохимическая эволюция цветковых растений, Наука, М., 1966. [5] *В. О. Казарян,* Старение высших растений, Наука, М., 1969. [6] *А. Н. Белозерский, Н. И. Проскуряков,* Практическое руководство по биохимии растений, Советская наука, М., 1951. [7] *Л. С. Маркосян,* Изв. АН АрмССР. Сер. биол. и с.-х. наук, т. II, в. 2 (1958). [8] *Б. А. Доспехов,* Планирование полевого опыта и статистическая обработка его данных, Колос, М., 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 617-001.4-002.3-085.355:577.152.344.015.2:615.8

ФИЗИОЛОГИЯ

Л. А. Матинян, Х. О. Нагапетян, С. С. Амирян, В. С. Мирзоян, Ш. В. Григорян, С. Р. Мкртчян

Физиологические характеристики диадинамофореза папаина

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 3/VIII 1985)

В настоящее время, помимо существующих методов воздействия на репаративные процессы поврежденных тканей, большое внимание уделяется применению энзимных препаратов животного, микробного и растительного происхождения как в отдельности, так и в различных сочетаниях [1—10,12], в том числе и с физическими факторами [9—11]. Из растительных энзимов в последние годы широко применяются препараты растения Carica papaya—папаин, химопапаин, лекозим, лекопаин [12]. Одним из действенных методов, ускоряющих процесс некролиза и очищение раны без хирургического вмешательства, является использование протеолитических ферментов, которые, вызывая некролиз и отторжение нежизнеспособных тканей, вместе с этим не оказывают повреждающего влияния на здоровые ткани и делают антибактериальную терапию более эффективной [13].

Из физических факторов в последнее время широко разрабатываются и применяются методики фореза лекарственных препаратов, в том числе и ферментных, с помощью диадинамических токов (ДДТ) [9]. По данным литературы [14], лекарства, введенные при помощи ДДТ, депонируются в коже и в течение 2—20 дней равномерно поступают в патологически измененную ткань, обеспечивая постоянную и достаточную их концентрацию в зоне повреждения.

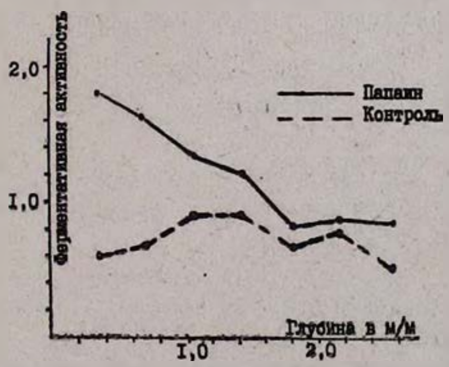
Биохимические исследования показали, что папаин обладает широким диапазоном действия на различные белковые субстраты, и оптимальное значение его водородного показателя лежит в пределах pH 4—10 [15].

Учитывая вышеуказанные свойства папаина, а также то, что в литературе отсутствуют работы по его применению с ДДТ, в наших исследованиях была поставлена задача: провести физико-химические исследования по изучению влияния ДДТ на фармакологическую активность папаина и на глубину его проникновения через верхние слои кожи у интактных животных.

Для изучения фармакологической активности папаина под воздействием ДДТ использовали камеру Улащика [16]. Эта камера состоит из трех ячеек, изготовленных из инертного материала (тефлон) и разделенных мембранами. В наших исследованиях в качестве мембран была использована хроматографическая бумага. Перед опытом камеру тщательно промывали дистиллированной водой. Центральную ячейку камеры заполняли свежеприготовленным 0,5%-ным раствором папаина (на физиологическом растворе), а две боковые—физиологическим раствором (без папаина). Энзимативную активность папаина определяли на гемоглобине, модифицированном пиридоксаль-5-фосфатом ([17]). Этот метод весьма чувствителен и позволяет измерять наличие папаина в пределах 0,01 мкг. В пробах, взятых из всех трех камер, определяли активность папаина. Установлено, что папаин под воздействием ДДТ в течение 30-минутной экспозиции не разрушается, а его перенос через мембрану резко возрастает. Количественные исследования выявили наибольшую концентрацию папаина в жидкости боковых ячеек камеры при использовании ДДТ, модулированных короткими периодами с изменением полярности через 5 мин (всего 10 мин) при силе тока 5 мА.

Приведенные данные послужили основанием для проведения экспериментальных исследований на животных с целью изучения глубины проникновения папаина в толщу кожи под воздействием ДДТ.

Для решения этой задачи у 10 взрослых морских свинок (весом 500—600 г) в межлопаточной области после освобождения кожи от волосяного покрова накладывали две специальные лекарственные прокладки, смоченные в 0,5%-ном растворе свежеприготовленного папаина. Расстояние между прокладками составляло около 25—30 мм. На прокладки помещали свинцовые пластиночные электроды, которые закрепляли резиновыми бинтами. Затем при помощи отечественного аппарата СНИМ-I подавали ток силой 5 мА, модулированный короткими периодами с изменением полярности через 5 мин (всего 10 мин). Критерием для выбора такой модели диадинамофореза (ДДФ) папаина служили вышеприведенные данные по количественному исследованию папаина. Сразу после ДДФ папаина животные наркотизировались (нембутал—40 мг/кг), после чего из зоны воздействия папаина брали кусочки кожи одинакового размера (около 100 $мм^2$) и на замораживающем микротоме изготавливали срезы толщиной 0,35 мм (всего удалось получить от 6 до 8 срезов). Затем в экстрагированной жидкости каждого среза определяли энзимативную активность папаина по вышеуказанной методике. В качестве контроля измеряли энзимативную ак-



Ферментативная активность папаина в коже морских свинок на различной глубине по сравнению с контролем (средние данные 20 экспериментов)

тивность экстрагированной жидкости срезов кожи, взятых от интактных животных.

Проведенные исследования показали, что папаин под воздействием ДДТ хорошо проникает в толщу кожи интактных морских свинок, и достаточное его количество обнаруживается даже на глубине до 2 мм и более (рисунок). Кроме того, при сопоставлении кривых, приведенных на рисунке, можно убедиться, что энзимативная активность жидкости, экстрагированной из срезов кожи, сделанных после папаин-диадинамофореза, почти в 1,8—2 раза выше, чем активность жидкости, экстрагированной из контрольных срезов (без введения папаина). Наличие энзимативной активности папаина удалось определить и спустя 24 ч после папаин-диадинамофореза.

На основании полученных данных можно утверждать, что папаин, введенный с помощью ДДТ, депонируется в толще кожи на глубине до 1,5—2 мм и более, сохраняя свою активность. Эти данные согласуются с результатами Улащика ([16]), по которым лекарства, введенные с помощью ДДТ, депонируются и в течение 2—20 дней поступают в участок поражения.

Преимуществами данного метода являются простота, общедоступность, возможность создания наибольшей концентрации папаина непосредственно в патологическом очаге, отсутствие побочных явлений, экономичность. При ДДФ папаин более продолжительное время может находиться в поврежденных тканях и сохранять свою активность, чем при других способах введения. Помимо указанного, вероятно, применение сочетания папаина и ДДТ усиливает их эффективность, так как оно может действовать как особое физико-фармакологическое сочетание.

Институт физиологии им. акад. Л. А. Орбели Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ՄԱՏԻՆՅԱՆ, Խ. Հ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ, Ս. Ս. ԱՄԻՐՅԱՆ, Վ. Ս. ՄԻՐՁՈՅԱՆ, Շ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ս. Ռ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Պապաին–դիադինամոֆորեզի ֆիզիոլոգիական բնութագիրը

Ֆիզիկաքիմիական հետազոտությունների օգնությամբ ուսումնասիրվել է դիադինամիկ հոսանքների ազդեցությունը պապաինի ֆարմակոլոգիական ակտիվության վրա։

Ինտակտ ծովախոզուկների մոտ հետազոտվել է դիադինամիկ հոսանքների ազդեցությունը պապաինի դեպի մաշկի խորանիստ շերտերը թափանցելիության հարցը։ Ապացուցված է, որ պապաինը դիադինամիկ հոսանքների ազդեցության պայմաններում (30 րոպե տևողությամբ) չի քայքայվում, իսկ նրա տեղաշարժը կիսաթափանցիկ թաղանթի միջով խիստ աճում է։ Քանակական հետազոտությունների օգնությամբ պարզվել է, որ պապաինի ամենաբարձր կոնցենտրացիան հետազոտվող հեղուկներում նկատվում է այնպիսի դիադինամիկ հոսանքների ազդեցության պայմաններում, որոնք մոդուլացվում են կարճ շրջանով, բևեռի փոփոխմամբ 5 րոպեն մեկ անգամ (ընդամենը 10 րոպե)։

Փորձնական հետազոտությունները, որոնք կատարվել են ծովախոզուկների

վրա, ցույց են տվել, որ դիադինամիկ հոսանքների ազդեցության տակ պապաինը հեշտությամբ թափանցում է դեպի մաշկի խորանիստ շերտերը։ Վերջինիս առկայությունը մաշկի մեջ 1,5—2 մմ խորության վրա հայտնաբերվել է նույնիսկ պապաին-դիադինամոֆորեզից 24 ժամ հետո։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И .Стручков,* Тр. XXIX Всесоюзн. съезда хирургов, Здоров'я, Киев, 1975. [2] *А. К. Мендель, В. А. Волынский,* там же. [3] *А. А. Заремба,* там же. [4] *Н. Е. Махсон, С. Т. Ветриле* и др., Сб. докл. симп. «Применение протеолитических энзимов растения карика папая (лекозим, лекопаин) в широкой медицинской практике», М., 1978. [5] *В. М. Мельникова, А. И. Гладштейн, У. А. Гюльмагомедов,* там же. [6] *В. М. Удод, В. Т. Сторожук,* Хирургия, № 5 (1981). [7] *Н. П. Иванова, Л. А. Болховитинова,* сб. докл. симп. «Применение протеолитических энзимов растения карика папая (лекозим, лекопаин) в широкой медицинской практике», М., 1978. [8] *Х. О. Нагапетян, Р. В. Багдасарян, Л. А. Матинян* и др., Журн. экспер. и клинич. мед. АН АрмССР, т. XXIV, № 4 (1984). [9] *В. И. Стручков, П. И. Толстых, Ш. В. Чомахидзе* и др., Советская медицина, № 3 (1979). [10] *В. М. Удод, П. К. Андрюнь, С. И. Маркелов* и др., Здравоохранение Казахстана, № 4 (1980). [11] *В. Ф. Постников, В. П. Кирилюк, Л. П. Яременко* и др., Вестн. хирургии, № 6 (1983). [12] Сб. симп. «Применение протеолитических энзимов растения карика папая (лекозим, лекопаин) в широкой медицинской практике», М., 1978. [13] *М. Н. Павлова, Т. И. Погожева, О. Н. Поляков,* сб. симп. «Применение протеолитических энзимов растения карика папая (лекозим, лекопаин) в широкой медицинской практике», М., 1978. [14] *В. С. Улащик, И. К. Данусевич,* Фармакологические основы электро- и фонофореза, Наука и техника, Минск, 1975. [15] *Д. Миливоевич,* сб. симп. «Применение протеолитических энзимов растения карика папая (лекозим, лекопаин) в широкой медицинской практике», М., 1978. [16] *В. С. Улащик,* Вопр. курортологии, физиотерапии и лечебной физкультуры, № 3 (1976). [17] *T. N. Akopyan, N. A. Barchudaryzn, A. A. Arutunyan* e. a., J. Neurol Ressearch, № 4 (1979). [18] *E. L. Smith, J. R. Kimmel,* J Biol. Chem., v. 207 (1954).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ LXXXII հատորի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ՄԵՏԱՂԱԾՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՏԵԿՏՈՆԻԿԱ

ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՅՈՒՍՎԱԾԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

ԲԺՇԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ LXXXII тома

CONTENTS of LXXXII volume

MECHANICS

STRUCTURAL MECHANICS

GEOMECHANICS

HYDRODYNAMICS

THEORY OF ELASTICITY

THEORY OF CREEP

PHYSICS

GEOPHYSICS

BIOPHYSICS

PHYSICAL CHEMISTRY