

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXXXII, № 4

1986

Խմբագրական կոլեգիա

Գ Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անլե. գիտ. թեկե-
ծու (պատ. Բորոսպոլ), է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ք. ԲԱՐՍԵՍՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի անդա-
մ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ.
անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ս. Մ. ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ.
անդամ Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМВАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН АрмССР (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН
АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,
академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-
ДЖЯН, академик АН АрмССР.



Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Մ. Մառախրոսյան, Կ. Ռ. Հովեսյան—Անկյունային տիրույթներում Մ. Մ. Զրրաշյանի <i>z-քվադրանդիտիկ դասերի վերաբերյալ</i>	147
Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ—Վիճեք—Հոպֆի հատված օպերատորների դետերմինանտների ասիմպտոտիկան մի սինգուլյար դեպքում	151
Ի. Մ. Գևորգյան, Յ. Ա. Շամոյան—Շրջանում անալիտիկ և նրա եզրի մոտ ած թույլատրող ֆունկցիաների տարածություններում թույլ հակադարձելիության մասին	156
Գ. Ա. Կառազուլյան—Որոշ դասի օրթոնորմավորված համակարգերից ոչ պայմանական զուգամիտության ենթահամակարգ ընտրելու մասին	160

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Օ. Մ. Սապոնշյան—Անվերջ շերտի համար բիհարմոնիկ պրոբլեմի մի լուծման մասին	163
-------------------------------------------------------------------------	-----

ՇԻՆՍԻՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ի. Ե. Խաչիյան, Վ. Ա. Համբարձումյան, Մ. Գ. Մելիումյան—Հիմքի դինամիկական կոշտության էքսպերիմենտալ որոշման և սկյամիկ ազդեցությունների հաշվարկումաներում նրա հաշվառման եղանակը	170
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ս. Կուզանյան, Ա. Գ. Պետրոսյան, Տ. Ի. Ռուտաևա, Կ. Լ. Հովհաննիսյան—Գունավորման կենտրոնները Z^{3+} իոններով ալյումինային և սկանդիում պարունակող նոնաքարերում	175
Յ. Պ. Սաֆարյան, Գ. Գ. Դեմիրխանյան—էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ուղղանսային էլեկտրոն-ֆոնոնային փոխանցումը խառնուրդային իոնների միջև, որոնց սպեկտրը բաշխման ֆունկցիաների մաքսիմումները շնչ համընկնում	180

ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ն. Հայրապետյան, Ռ. Ա. Բեգլարյան, Խ. Վ. Գրիգորյան, Խ. Վ. Ստամբուլյան, Ռ. Ա. Հաբոսյանյան, Լ. Ե. Գրիգորյան—Ջրի տեսակարար էլեկտրահաղորդականության և խիտույթի նյարդային բջի օսմոտիկ հատկությունների վրա մագնիսական դաշտի ազդեցության մեխանիզմի մասին	184
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

ԲՈՒՅՍՆԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Տ. Ս. Գանիելյան, Ա. Վ. Առուստամյան—Լույսի ինտենսիվության ազդեցությունը ծառերի, թփերի և խոտարույտերի արմատներում աուքսինների և ինհիբիտորների ակտիվության վրա	188
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- В. М. Мартиросян, К. Р. Овесян*—К теории α -квазианалитических классов М. М. Джрбашяна в угловых областях 147
- Л. В. Микаелян*—Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера—Хопфа в некотором сингулярном случае 151
- И. М. Геворкян, Ф. А. Шамоян*—О слабой обратимости в пространствах аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы 156
- Г. А. Карагулян*—О выделении подсистем безусловной сходимости из ортонормированных систем некоторого класса 160

МЕХАНИКА

- О. М. Сапонджян*—Об одном решении бигармонической проблемы для бесконечной полосы 165

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Э. Е. Хачиян, В. А. Амбарцумян, М. Г. Мелкумян*—Методика экспериментального определения динамической жесткости основания и ее учет при расчетах на сейсмические воздействия 170

ФИЗИКА

- А. С. Кузаян, А. Г. Петросян, Т. И. Бутаева, К. Л. Ованесян*—Центры окраски в алюминиевых и скандийсодержащих гранатах с ионами Zr^{3+} 175
- Ф. П. Сафарян, Г. Г. Демирханян*—Резонансная электрон-фононная передача энергии электронного возбуждения между ионами, максимумы функций спектрального распределения которых не совпадают 180

БИОФИЗИКА

- С. Н. Айрапетян, Р. А. Бегларян, Х. В. Григорян, Х. В. Стамболцян, Р. С. Арутюнян, Л. Е. Григорян*—О механизме действия магнитного поля на удельную электропроводность воды и осмотические свойства нервной клетки улитки 184

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- Б. О. Казарян, Т. С. Даниелян, А. В. Арустамян*—О влиянии интенсивности света на активность ауксинов и ингибиторов в корнях древесных, кустарниковых и травянистых растений 188

CONTENTS

	P.
MATHEMATICS	
<i>V. M. Martirosian, K. R. Hovsejian</i> —On the theory of M. M. Dzirbashian's α -quasianalytic classes in angular domains.	144
<i>L. V. Mikaelian</i> —Asymptotics of determinants of restricted Wiener-Hopf operators in a singular case.	151
<i>I. M. Gevorgian, F. A. Shamoyan</i> —On weak reversion in the spaces of analytic functions in the disc permitting the growth near its boundary.	156
<i>G. A. Karagullian</i> —On the selection of unconditional convergent subsystem from the orthonormal systems of any class	160
MECHANICS	
<i>O. M. Sapondjian</i> —About a solution of the biharmonic problem of an infinite strip	165
STRUCTURAL MECHANICS	
<i>E. E. Khachlian, V. A. Ambarzumian, M. G. Melkumian</i> —Method of experimental determination of the base dynamic rigidity and its application in seismic influence computations	170
PHYSICS	
<i>A. S. Kuzanlian, A. G. Petrosian, T. I. Butaeva, K. L. Ovaneslian</i> —Color centers in aluminum and scandium containing garnets with Zr^{3+} ions	175
<i>F. P. Safarian, G. G. Demirkhantian</i> —Resonant electron-phonon transfer of electronic excitation energy between impurity ions the maximum of spectral distribution functions which do not coincide	180
BIOPHYSICS	
<i>S. N. Ayrapetian, R. A. Beglarian, Kh. V. Grigorian, Kh. V. Stamboltsian, R. C. Harutyunian, L. E. Grigorian</i> —The action mechanism of magnetic field on the specific electrical conductivity of water and osmotic properties of helix neurons.	184
PLANT PHYSIOLOGY	
<i>V. H. Kazarian, T. S. Daniellian, A. V. Arustamian</i> —The influence of light intensity on the auxins and activity of inhibitors in the roots of woody, shrubby and grassy plants	188

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯИ Л А

Сдано в набор 31.03.86 г. Подписано к печати 23.07.86 г. ВФ 06811.

Бумага № 2, 70×108^{1/16}. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет, изд. 3.35 л. Тираж 455. Заказ 250. Издат. 6806.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. 1, т. 27-97-238

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 517.548

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян, К. Р. Овесян

**К теории α -квазианалитических классов М. М. Джрбашяна
 в угловых областях**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/XI 1984)

1 (а). Как хорошо известно, полное решение проблемы Ж. Адамара о квазианалитических классах дается теоремой Данжуа—Карлемана (1-5). М. М. Джрбашяном (6) была поставлена проблема расширения понятия квазианалитичности, сводящаяся при $\gamma=1$ к классической проблеме Ж. Адамара и заключающаяся в следующем.

Пусть $\{M_n\}_n^+$ — последовательность положительных чисел и $T(r) = \sup\{r^n/M_n : n \geq 1\}$. Для заданного значения $\gamma > 0$ какими должны быть подклассы $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{M_n\}$ на данном промежутке $J \subset (-\infty, +\infty)$ и простейшие функционалы $L_n^\gamma f (n=0, 1, \dots)$, чтобы лишь при условии

$$\int \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty \tag{1}$$

для любой функции $f \in C_\gamma\{M_n\}$ из равенств

$$L_n^\gamma f = 0 \quad (n=0, 1, \dots) \tag{2}$$

следовало тождество $f(x) \equiv 0, x \in J$?

В исследованиях М. М. Джрбашяна (6-9) был открыт метод, позволивший дать полное решение этой проблемы.

После введения более удобного параметра $\alpha = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ ($-1 < \alpha < 1$) соответствующие классы единственности были названы α -квазианалитическими.

(б). В работе М. М. Джрбашяна и Г. С. Кочаряна (10) была рассмотрена задача, аналогичная проблеме (1)–(2), для определенных классов функций, аналитических в угловых областях вида $\Delta_\gamma = \{z : |\text{Arg} z| < \pi/(2\gamma)\} (\gamma > 0)$, лежащих на римановой поверхности G_∞ функции $\text{Ln} z$.

Для значений параметров $0 \leq \alpha < 1$ и $\gamma > 0$ в работе (10) были введены классы $C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$ функций f , голоморфных в Δ_γ и таких, что $\forall \gamma_1 > \gamma$

$$\sup_{\Delta_{\gamma_1}} \{(1+|z|^{2m})|f^{(n)}(z)|\} < +\infty \quad (n, m=0, 1, \dots), \tag{3}$$

а также их следующие подклассы:

1) $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ функций $f \in C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$, для которых

$$\sup_{\Delta_\gamma} \{(1+|z|^\alpha) |f^{(n)}(z)|\} \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots); \quad (4)$$

2) $C_\alpha^* \{\Delta_\gamma; M_n\}$ функций $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, для которых

$$\sup_{\Delta_\gamma} |D_\infty^{\alpha/\rho} f(z)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad 1/\rho = 1-\alpha, \quad (5)$$

где константы $A = A(f) > 0$, $B = B(f) > 0$ не зависят от n .

При этом ⁽¹⁰⁾ для функций $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, если $0 \leq x < 1$, то

$$\begin{aligned} D_\infty^{0/\rho} f(z) &\equiv f(z), \quad D_\infty^{\alpha/\rho} f(z) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_z^{\alpha(e^{i\Delta_\gamma} z)} (\zeta - z)^{\alpha n - 1} f^{(n)}(\zeta) d\zeta \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

В работе ⁽¹⁰⁾ единственность функций связывалась со значениями функционалов

$$D_\infty^{\alpha/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \frac{e^{i\alpha n \theta}}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} f^{(n)}(r e^{i\theta}) r^{\alpha n - 1} \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma}, n \geq 0 \right) \quad (7)$$

и были установлены следующие теоремы.

Теорема А. 1°. Для того чтобы класс $C_\alpha \{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, т. е. чтобы для любой функции $f \in C_\alpha \{\Delta_\gamma; M_n\}$ из равенств

$$D_\infty^{\alpha/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = 0 \quad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma}; n = 0, 1, \dots \right) \quad (8)$$

следовало тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, достаточно условие

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+(1-\alpha)x}} dr = +\infty, \quad x = \left\{ 1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma} \right\}^{-1}. \quad (9)$$

2°. Если интеграл (9) сходится, то существует нетривиальная функция $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, удовлетворяющая условиям (8) и такая, что

$$\sup_{\Delta_\gamma} |f^{(n)}(z)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10)$$

Теорема Б. Для того чтобы класс $C_\alpha^* \{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, необходимо и достаточно условие

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+x}} dr = +\infty. \quad (11)$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ обе эти теоремы переходят в следующую теорему Р. Б. Салинаса ⁽¹¹⁾.

Теорема В. 1°. Пусть $f(z)$ ограничена и аналитична в Δ_γ , удовлетворяет условиям (10) и

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Тогда $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, если

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma/(1+\gamma)}} dr = +\infty. \quad (13)$$

2°. *Обратно, если интеграл (13) конечен, то существует ограниченная и аналитическая в Δ_γ функция $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям (10) и (12).*

2(a). Отметим теперь, что без всякого изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в исследовании М. М. Джрбашяна (9) и примененного в дальнейшем в работах (10, 12, 13), можно предельно расширить ранее введенные классы $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ и $C_\alpha^*\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq z < 1$, $\gamma > 0$) с тем, чтобы они были непосредственно ассоциированы с функционалами единственности (7). В предлагаемой работе мы формулируем критерии $(\alpha; \gamma)$ -единственности соответствующих классов и полученные результаты распространяем также на значения параметра $-1 < \alpha < 0$. При этом устраняется также расхождение между необходимой и достаточной частями теоремы А.

(б). Пусть $-1 < \alpha < 1$ и $1/\rho = 1 - \alpha$. Для значений $0 \leq \alpha < 1$ определим операторы $D_\alpha^{n/\rho}$ по формулам (6), а если $-1 < \alpha < 0$ и $n \geq 1$, положим

$$D_\alpha^{n/\rho} f(z) = \frac{1}{\Gamma[(1+\alpha)n]} \int_z^{\alpha(e^{i\lambda \arg z})} (\zeta - z)^{(1+\alpha)n-1} f^{(2n)}(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

Очевидно, что при $-1 < \alpha < 0$, $n \geq 1$ и $|\theta| < \pi/(2\gamma)$

$$D_\alpha^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \frac{e^{i(1+\alpha)n\theta}}{\Gamma[(1+\alpha)n]} \int_0^\infty f^{(2n)}(re^{i\theta}) r^{(1+\alpha)n-1} dr. \quad (15)$$

Обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) класс ограниченных и аналитических в Δ_γ функций $f(z)$, для которых интегралы (7) или (15) абсолютно сходятся (соответственно при $0 < \alpha < 1$ и $-1 < \alpha < 0$).

Через $\tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обозначим класс функций $f \in \tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$, для которых выполняются условия (10).

Теорема 1. *Для того чтобы класс $\tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, т. е. чтобы для любой функции $f \in \tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ из равенств*

$$D_\alpha^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = 0 \quad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma}; n = 0, 1, 2, \dots \right) \quad (16)$$

вытекало тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, необходимо и достаточно условие (9).

Теперь обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, $\gamma > 0$) класс функций $f(z) \in \tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$ таких, что:

1) если $0 < \alpha < 1$, то $\forall \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/(2\gamma)$)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{2n}}{R^{2n}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} |f^{(2n)}(Re^{i\theta})| d\theta = 0; \quad (17)$$

2) если $-1 < \alpha < 0$, то $\forall \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/(2\gamma)$)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{(1+\alpha)n} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} |f^{(2n)}(Re^{i\theta})| d\theta = 0. \quad (18)$$

При $\alpha = 0$ полагаем $\tilde{C}_0^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\} = C_0^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$, т. е. $C_0^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ — это класс ограниченных и аналитических в Δ_γ функций.

Наконец, обозначим через $C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) класс функций $f \in C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$, удовлетворяющих условиям (5).

Теорема 2. Для того чтобы класс $C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, необходимо и достаточно условие (11).

Авторы искренне признательны академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и ценные указания.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Վ. Ռ. ՀՈՎԵՍՅԱՆ

Անկյունային տիրույթներում $V. V. \text{Ջրբաշյանի } \alpha\text{-վազիանալիտիկ գրասերի վերաբերյալ}$

Տվյալ հոդվածում մենք ցույց ենք տալիս, որ չփոխելով ինդքի մեթոդը ամբողջությամբ, որն առաջարկվել էր ⁽⁶⁾ հետազոտությունում, կարելի է հնարավորին չափ ընդլայնել ⁽¹⁰⁾-ում ներմուծված $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ և $C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$) դասերն այնպես, որ նրանք անմիջականորեն կապվեն միակուսթյան (7) ֆունկցիոնալների հետ: Ցույց ենք տալիս, որ (9) և (11) պայմանները համապատասխան դասերի $(\alpha; \gamma)$ -միակուսթյան հալտանիչներ են, և ստացված արդյունքները տարածում ենք նաև $-1 < \alpha < 0$ դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. Hadamard, C. R. Seances Soc. Math. France, v. 40 p. 28—29 (1912). ² A. Denjoy, C. R. Acad. Sc, Paris, v. 173 p. 1329—1331 (1921). ³ T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Gauthier-Villars, Paris, 1926. ⁴ A. Ostrowski, Acta Math., v. 53, p. 181—266 (1930). ⁵ С. Мандельбродт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955. ⁶ М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 3, № 3 (1968); Amer. Math. Soc. Transl., (2), v. 110 (1977). ⁷ М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 18, с. 427—448 (1954). ⁸ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 95, с. 1133—1136 (1954); Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 19, № 1 (1955). ⁹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ¹⁰ М. М. Джрбашян, Г. С. Кочарян, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 37, № 1 (1973). ¹¹ R. B. Sallnas, Rev. Acad. Sc. Madrid, v. 49 (1955). ¹² А. А. Китбалян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 10, № 3 (1975). ¹³ М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 17, № 4 (1982).

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

**Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера—Хопфа
 в некотором сингулярном случае**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/II 1985)

Пусть $D_n(\mu)$ —теплицевый детерминант, образованный коэффициентами Фурье функции

$$\mu(\theta) = \mu_1(\theta) \prod_{k=1}^n |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^{2\alpha_k} \quad (\mu_1(\theta) \neq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)).$$

В (1) А. Ленардом была выдвинута гипотеза, что в этом сингулярном случае верна асимптотическая формула

$$D_n(\mu) \sim C(\mu) n^{\sum \alpha_k^2} [G(\mu)]^{n+1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $C(\mu)$ некоторая постоянная, а $G(\mu)$ —среднее геометрическое функции $\mu(\theta)$. Верность этой гипотезы доказана для $\alpha_k > -1/2$ Х. Уидомом в (2) и распространена на более широкий класс показателей α_k Е. Бейсор (3). В обеих работах найдена также постоянная $C(\mu)$.

В недавней совместной работе (4) Х. Уидома и Е. Бейсор рассмотрен другой сингулярный случай, когда $\mu(\theta)$ имеет конечное число точек разрыва, и найден континуальный аналог этого случая. В этой работе, в частности, сказано, что исследования работ (2, 3), наверно, имеют свои континуальные аналоги, но сложная техника этих работ и отсутствие простых случаев, когда детерминант Фредгольма соответствующего интегрального оператора можно точно подсчитать, делают нахождение этих аналогов сложным. Настоящая заметка посвящена исследованию некоторых простых случаев и установлению одного неравенства в более общем случае, которое является аналогом результата А. Ленарда из работы (1).

1. Обозначим через R Винеровскую алгебру, т. е. алгебру функций, допускающих представление

$$f(\lambda) = f(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где $f(\infty)$ —постоянная, а $\hat{f}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Если в этом представлении $\hat{f}(t) = 0$ при $t < 0$ ($t > 0$), то скажем, что $f(\lambda) \in R^+(R^-)$. Скажем, что $\sigma(\lambda) \in R$ допускает каноническую факторизацию, если $\sigma(\lambda) = \sigma_+(\lambda) \sigma_-(\lambda)$,

где $\sigma_+, \sigma_+^{-1} \in R^+$ и $\sigma_-, \sigma_-^{-1} \in R^-$. Пусть P_r проектор из $L_2(0, \infty)$ на $L_2(0, r)$ и $(Q_r f)(t) = (P_r f)(r-t)$. Для

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(t) e^{i\lambda t} dt \in R$$

обозначим через $\bar{\sigma}(\lambda) = \sigma(-\lambda)$, а через $T(\sigma)$ и $H(\sigma)$ операторы, действующие в $L_2(0, \infty)$ по формулам

$$(T(\sigma)f)(t) = f(t) + \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds, \quad (H(\sigma)f)(t) = \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t+s)f(s)ds.$$

Пусть $T_r(\sigma) = P_r T(\sigma) P_r$, которую мы будем рассматривать в $L_2(0, r)$. Обозначим через $D_r(\sigma)$ детерминант Фредгольма оператора $T_r(\sigma)$. Континуальным аналогом теоремы Г. Сегё о теплицевых детерминантах принято называть следующее асимптотическое соотношение:

$$D_r(\sigma) \sim [G(\sigma)]^r E(\sigma) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1)$$

где $G(\sigma) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \sigma(\lambda) d\lambda\right\}$, $E(\sigma) := \exp\left\{\int_0^{\infty} t(\log \sigma)^{\sim}(t)(\log \sigma)^{\sim}(-t) dt\right\}$,

$$\log \sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\log \sigma)^{\sim}(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Нам понадобится еще следующее равенство (см. (3)):

$$T_r(\tau_1 \tau_2) = T_r(\tau_1) T_r(\tau_2) + P_r H(\tau_1) H(\bar{\tau}_2) P_r + Q_r H(\bar{\tau}_1) H(\tau_2) Q_r, \quad (2)$$

являющееся аналогом соответствующего равенства для теплицевых операторов, впервые обнаруженного Х. Уидомом.

Скажем, что $\sigma(\lambda)$ несингулярная, если для $\sigma(\lambda)$ верно соотношение (1).

2. Имеет место следующее

Предложение 1. Операторы $T_r(\sigma_a)$ ($0 < r < \infty$) с символом

$$\sigma_a(\lambda) = |\sigma_a^+(\lambda)|^2 = \left| \frac{\lambda - a}{\lambda - a + i} \right|^2 = 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} e^{-|t|} e^{i\lambda t} dt \quad (\text{Im } a = 0)$$

обратимы в пространствах $L_2(0, r)$ и

$$([T_r(\sigma_a)]^{-1}f)(t) = f(t) - \int_0^t \Gamma_r^a(t, s) f(s) ds, \quad \text{где}$$

$$\Gamma_r^a(t, s) = e^{-iat} \left| \frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - \min\{t, s\} \right| e^{ias}.$$

Пусть $[T_r(\sigma)]^{-1} := T_r^{-1}(\sigma) = I - \Gamma_r(\sigma)$ и $\Gamma_r(t, s, \sigma)$ ядро оператора $\Gamma_r(\sigma)$, тогда, как показал Н. И. Ахизер (6), имеет место равенство

$$D_r(\sigma) = \exp \left\{ \int_0^r \Gamma_r(t, t, \sigma) dt \right\}.$$

Отсюда и из предложения 1 сразу следует

Предложение 2. $D_r(\sigma_a) = e^{-r(1+r/2)}$.

Пусть $\sigma(\lambda) = \sigma_a(\lambda)\tau(\lambda) = \sigma_a(\lambda) \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t) e^{\lambda t} dt \right)$, тогда из равенства

(2) получим

$$T_r(\sigma) = T_r(\tau) T_r(\sigma_a) - 1/2(\cdot, P_r \varphi_1) P_r \psi_1 - 1/2(\cdot, Q_r \varphi_2) Q_r \psi_2, \quad (3)$$

где
$$\varphi_1(t) = e^{-t} e^{-iat}, \quad \varphi_2(t) = e^{-t} e^{iat}, \quad (4)$$

$$\psi_1(t) = \int_0^{\infty} \hat{\tau}(t+s) e^{ias} e^{-s} ds, \quad \psi_2(t) = \int_0^{\infty} \hat{\tau}(-t-s) e^{-ias} e^{-s} ds.$$

Здесь (\cdot, \cdot) скалярное произведение в $L_2(0, \infty)$.

Теорема 1. Если $\sigma(\lambda) = \sigma_a(\lambda)\tau(\lambda)$, $\tau(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию $\tau(\lambda) = \tau_+(\lambda)\tau_-(\lambda)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(\sigma)}{D_r(\sigma_a) D_r(\tau)} = \frac{\tau_+(a+i)\tau_-(a-i)}{\tau(a)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что операторы $T_r(\tau)$ обратимы в пространствах $L_p(0, r)$ ($p \geq 1$) начиная с некоторого $r \geq r_0$ и $T_r^{-1}(\tau) \rightarrow T^{-1}(\tau)$ в сильном смысле (см. (1)). Из представления (3) и предложения 1 следует

$$\frac{D_r(\sigma)}{D_r(\sigma_a) D_r(\tau)} = \det \begin{vmatrix} 1 - a_{11}(r, \tau) & -a_{12}(r, \tau) \\ -a_{21}(r, \tau) & 1 - a_{22}(r, \tau) \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где

$$a_{11}(r, \tau) = \frac{1}{2} (T_r^{-1}(\tau)\psi_1, T_r^{-1}(\sigma_a)\varphi_1) = \int_0^r \frac{1+r-t}{r+2} e^{iat} (T_r^{-1}(\tau)\psi_1)(t) dt,$$

$$a_{12}(r, \tau) = \frac{1}{2} (T_r^{-1}(\tau)\psi_1, T_r^{-1}(\sigma_a)Q_r\varphi_2) = e^{-iar} \int_0^r e^{iat} \frac{t+1}{r+2} (T_r^{-1}(\tau)\psi_1)(t) dt,$$

$$a_{21}(r, \tau) = \frac{1}{2} (T_r^{-1}(\bar{\tau})\psi_2, T_r^{-1}(\bar{\sigma}_a)Q_r\varphi_1) = e^{iar} \int_0^r e^{-iat} \frac{t+1}{r+2} (T_r^{-1}(\bar{\tau})\psi_2)(t) dt,$$

$$a_{22}(r, \tau) = \frac{1}{2} (T_r^{-1}(\bar{\tau})\psi_2, T_r^{-1}(\bar{\sigma}_a)\varphi_2) = \int_0^r \frac{1+r-t}{r+2} e^{-iat} (T_r^{-1}(\bar{\tau})\psi_2)(t) dt.$$

После несложного подсчета получим $\lim_{r \rightarrow \infty} a_{12}(r, \tau) = \lim_{r \rightarrow \infty} a_{21}(r, \tau) = 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a_{11}(r, \tau) = \frac{\tau_+(a) - \tau_+(a+i)}{\tau_+(a)}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a_{22}(r, \tau) = \frac{\tau_-(a) - \tau_-(a-i)}{\tau_-(a)}.$$

Следствие. При условиях теоремы 1, если $\tau(\lambda)$ несингулярная, то

$$D_r(\sigma) \sim \left(1 + \frac{r}{2}\right) [G(\sigma)]^r E(\tau) \frac{\tau_+(a+i)\tau_-(a-i)}{\tau_+(a)} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Доказательство очевидно, если учитывать предложение 2 и то, что $G(\sigma) = G(\sigma_a)G(\tau)$, $G(\sigma_a) = e^{-1}$.

Подставляя в равенство (5) вместо $\tau(\lambda) = \sigma_b(\lambda)$ $b \neq a$ и $\tau(\lambda) = \sigma_a(\lambda)$, можно получить следующие предложения.

Предложение 3. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(\sigma_a \sigma_b)}{D_r(\sigma_a) D_r(\sigma_b)} = \left| \frac{\sigma_b^+(a+i)}{\sigma_b^+(a)} \right|^2.$$

Предложение 4. При $r \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$D_r(\sigma_a^2) \sim 1/12 [G(\sigma_a)]^r \left(\frac{r}{2}\right)^4.$$

Предложение 3 показывает, что условие $\tau(\lambda) \neq 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$) не является необходимым в теореме 1, но $\tau(a) \neq 0$ необходимо, что видно из предложения 4.

3. Рассмотрим более общий случай. Пусть

$$\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^n [\sigma_{aj}(\lambda)]^{\alpha_j} \tau(\lambda), \quad (\operatorname{Im} a_j = 0, \alpha_j > 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)) \quad (6)$$

$\tau(\lambda) \in R$, $\tau(\lambda) > 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$), $\tau(\lambda)$ несингулярная. Для $0 < \varepsilon < 1/2$ обозначим через

$$\sigma_\varepsilon(\lambda) = \prod_{j=1}^n [\sigma_{aj}(\lambda + i\varepsilon)]^{\alpha_j} \tau(\lambda).$$

Очевидно, что при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ $\sigma_\varepsilon(\lambda) > \sigma(\lambda)$, откуда следует, что самосопряженные операторы $T_r(\sigma_\varepsilon)$ и $T_r(\sigma)$ удовлетворяют неравенству $T_r(\sigma) < T_r(\sigma_\varepsilon)$, что в свою очередь приведет к соотношению $D_r(\sigma) < D_r(\sigma_\varepsilon)$. Следовательно,

$$D_r(\sigma) < [G(\sigma_\varepsilon)]^r \frac{D_r(\sigma_\varepsilon)}{[G(\sigma_\varepsilon)]^r} \leq G^r(\sigma_\varepsilon) \frac{D_{r+t}(\sigma_\varepsilon)}{G^{r+t}(\sigma_\varepsilon)}$$

для любого $t > 0$, так как в этом случае отношение D_r/G^r монотонно неубывающее. Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ и учитывая несингулярность $\sigma_\varepsilon(\lambda)$, получим

$$D_r(\sigma) < G^r(\sigma_\varepsilon) E(\sigma_\varepsilon).$$

Проведя соответствующие вычисления и оценивая правую часть этого неравенства подходящим образом, можно получить оценку

$$D_r(\sigma) < G^r(\tau) e^{-\sum \alpha_j r} e^{2ar} \prod_{j=1}^n \left| \frac{\tau_+(a_j - (1-\varepsilon)i)}{\tau_+(a_j + i\varepsilon)} \right|^{2\alpha_j} \times \\ \times \left(\frac{1}{4(1-\varepsilon)\varepsilon} \right)^{\sum \alpha_j^2} \prod_{l < j} \left| \frac{\sigma_{al}^+(a_j + i)}{\sigma_{aj}^+(a_l)} \right|^{2\alpha_l \alpha_j} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} \right)^{\sum \alpha_l \alpha_j}.$$

Подставляя в это неравенство вместо σ определенное значение, можно утверждать, что справедлива

Теорема 2. Если $\sigma(i)$ допускает представление (6), где $\tau(i) \in \mathbb{R}$, $\tau(i) > 0$ ($-\infty < i < \infty$) и $\tau(i)$ несингулярная, то верно неравенство

$$D_r(\sigma) < C[G(\sigma)]^r \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{\sum \alpha_j^2},$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от τ , a_i , α_i ($i = 1, \dots, n$).

Эта теорема является континуальным аналогом теоремы А. Ленарда из работы (1). Соответствующую гипотезу можно сформулировать так.

Гипотеза. Если $\sigma(i)$ допускает представление (6), где $\tau(i)$ несингулярная, и допускает каноническую факторизацию $\tau(i) = \tau_+(i)\tau_-(i)$,

то

$$D_r(\sigma) \sim C[G(\sigma)]^r r^{\sum \alpha_j^2} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Для постоянной C можно указать следующий вид:

$$C = c \prod_{j=1}^n \left(\frac{\tau_+(a_j+i)\tau_-(a_j-i)}{\tau(a_j)} \right)^{\alpha_j} \prod_{i < j} \left| \frac{\sigma_{a_i}(a_j+i)}{\sigma_{a_i}(a_j)} \right|^{2\alpha_i \alpha_j},$$

где c зависит только от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

1. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼԻՍՅԱՆ

Վիճակը — շուրջի հատված օպերատորների դետերմինանտների ասիմպտոտիկան մի սինգուլյար դեպքում

Հոդվածում ուսումնասիրված է Վիճակը — շուրջի հատված օպերատորի Ֆրեդհոլմի դետերմինանտի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ այդ օպերատորի սիմվոլն ունի որոշակի տեսքի զրո իրական առանցքի սրև կետում: Ստացված է դետերմինանտի վերահիշյալ դետերմինանտի համար, երբ սիմվոլն ունի վերջավոր թվով զրոներ կամայական պատիկություններով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ A. Lenard, Pacific J. of math., v. 42, № 1 (1972). ² H. Widom, Amer. J. of math., v. 95, № 2 (1973). ³ E. Basor, Trans. of Amer. math. soc., v. 239, p. 33—65 (1978). ⁴ E. Basor, H. Widom, J. of func. anal., v. 50 № 3 (1983). ⁵ Л. В. Микаелян, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 3 (1979). ⁶ Н. И. Ахизер, Укр. мат. журн., т. 16, № 4 (1964). ⁷ И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, Наука, М., 1973.

УДК 517.553

МАТЕМАТИКА

И. М. Геворкян, Ф. А. Шамоян

О слабой обратимости в пространствах аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/II 1985)

1. Пусть D открытый единичный круг на комплексной плоскости C . И пусть $\mathcal{H}(D)$ пространство всех аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Предположим, далее, что X —линейное подпространство пространства $\mathcal{H}(D)$, причем X удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $zX \subset X$, б) $\mathcal{P} \subset X$, где \mathcal{P} —множество всех многочленов от z .

Функция $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in D$, называется слабо обратимой в пространстве X (см. (1)), если существует последовательность многочленов $\{p_n\}_1^\infty$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X .

Понятие слабой обратимости возникло под влиянием работы М. В. Келдыша (2), в которой было установлено, что функция $s(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$ слабо необратима в пространстве

$$L_a^2(D) = \left\{ f \in \mathcal{H}(D) : \|f\|_{L_a^2(D)}^2 = \int_D |f(z)|^2 dm_2(z) < +\infty \right\},$$

где $m_2(z)$ плоская мера Лебега.

Отметим также работу М. М. Джрбашяна (3), где наряду с другими результатами было установлено параметрическое представление тех функций g из $L_a^2(D)$, для которых возможна аппроксимация

$$\inf_{p \in \mathcal{P}} \|ps(z) - g\|_{L_a^2(D)} = 0.$$

В работах А. Бёрлинга (4) и Н. К. Никольского (5) было установлено (при довольно жестких ограничениях на регулярность роста φ), что для слабой обратимости функции $s(z)$ в пространстве

$$L_a^2(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{H}(D) : \int_D |f(z)|^2 \exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\} dm_2(z) = \|f\|_{L_a^2(\varphi)}^2 < +\infty \right\}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$.

В первой части этой заметки мы решаем следующую задачу: пусть φ —монотонно растущая мажоранта на $(0, +\infty)$. При каких ус-

ловиях на φ можно утверждать, что функция $s(z)$ слабо обратима в пространствах

$$A_p^{\varphi} = \left\{ f \in \mathcal{H}(D) : \|f\|_{A_p^{\varphi}}^p = \int_D |f(z)|^p \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{1}{|1-z|} \right) \right\} dm_2(z) < +\infty \right\}.$$

Указанная задача возникает естественным образом, поскольку $s(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus 1$, $s(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus 1$ и довольно сильно стремится к нулю при приближении z к 1 по радиусу единичного круга. Оказывается справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \text{где } \omega(t) > 0, \omega(t) \uparrow +\infty, t \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Тогда:

1. Следующие утверждения равносильны:

а) функция $s(z)$ слабо обратима в пространстве $A_{p_0}^{\varphi}$ при некотором $1 \leq p_0 < +\infty$;

б) $s(z)$ слабо обратима в A_p^{φ} при всех $1 \leq p < +\infty$;

$$\text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = +\infty. \quad (2)$$

2. Если выполняется (2), то каждая функция $f \in A_p^{\varphi}$ вида

$$f(z) = Q(z)s^{\beta}(z), \quad z \in D, \quad \beta \geq 0, \quad (3)$$

где Q — внешняя функция, слабо обратима в пространстве A_p^{φ} , $1 \leq p < +\infty$.

Имсет место аналог теоремы 1 и в равномерной метрике. Пусть φ — мажоранта из теоремы 1; положим

$$A_{\varphi}(D) = \left\{ f \in \mathcal{H}(D) : f \in C(\overline{D} \setminus 1), |f(z)| \exp \left[-\varphi \left(\frac{1}{|1-z|} \right) \right] \rightarrow 0, \right.$$

$$\left. z \rightarrow 1, \|f\|_{A_{\varphi}(D)} = \sup_{z \in D} |f(z)| \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{1}{|1-z|} \right) \right\} \right\}.$$

Теорема 2. Пусть φ удовлетворяет условию (1).

Тогда

1. Следующие два утверждения равносильны:

а) функция $s(z)$ слабо обратима в пространстве $A_{\varphi}(D)$;

$$\text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = +\infty.$$

2. Если выполняется б), то каждая функция $f \in A_{\varphi}(D)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \overline{D} \setminus 1$ вида (3) слабо обратима в пространстве $A_p(D)$.

В дальнейшем X_{φ} будет обозначать одно из следующих пространств: A_p^{φ} , $1 \leq p < +\infty$, $A_{\varphi}(D)$.

Следствие. Пусть $f \in C(\bar{D} \setminus 1) \cap X_\varphi$, $f(z) \neq 0$, $z \in \bar{D} \setminus 1$. Предположим, далее, что существует мажоранта ψ такая, что

$$|f(z)| \leq \exp \left\{ c r \psi \left(\frac{1}{|1-z|} \right) \right\}, \quad z \in D.$$

При этом $\int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < +\infty$. Тогда функция f слабо обратима в пространстве X_φ , если φ удовлетворяет условию (2).

Теперь приведем результаты, относящиеся к функциям, допускающим более сильный рост при приближении к граничной точке, из которых следует, что условие (2) приводит к другому условию (см. (4)).

Теорема 3. Пусть $s_\alpha(z) = \exp \left\{ \frac{c}{(1-z)^\alpha} \right\}$, где c — вещественное число, и пусть $\varphi(r) = |c|r^\alpha + \psi(r^\alpha)$, ψ — выпуклая функция. Тогда, если

$$\alpha \geq 2 \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^{3/2}} dt = +\infty, \quad (4)$$

то $s_\alpha(z)$ слабо обратима в пространстве $A_\varphi(D)$, если же $\alpha \geq 4$, то условие (4) является также необходимым для слабой обратимости функции $s_\alpha(z)$ в $A_\varphi(D)$.

В заключение мы сформулируем одно утверждение, в котором участвуют мажоранты произвольного роста.

Пусть $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ — монотонно растущие мажоранты на $(0, +\infty)$, причем $\varphi_1(r) \leq \varphi_2(r)$, $r \in (0, +\infty)$. Каким еще условиям должны удовлетворять φ_1 и φ_2 , чтобы каждая функция $f \in A_{\varphi_1}(D)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \bar{D} \setminus 1$, была слабо обратимой в пространстве $A_{\varphi_2}(D)$.

Аналогичная задача для других пространств голоморфных функций рассматривалась в работах (5, 6).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\varphi_1(x) = \int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt$ удовлетворяет условиям

(1) и предположим, что функция $\frac{\varphi_2(v(e^r))}{\varphi_1(v(e^r))}$ выпуклая, где $v(t)$ — обратная к функции $\omega(t)$.

Тогда если

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(v(t))}{\varphi_1(v(t))} \frac{dt}{t^2} = +\infty,$$

то каждая функция $f \in \mathcal{H}(\bar{D} \setminus 1) \cap A_{\varphi_1}(D)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \bar{D} \setminus 1$, слабо обратима в пространстве $A_{\varphi_2}(D)$.

Доказательство вышеуказанных теорем проводится по следующей схеме. Пусть f — одна из вышеуказанных функций и пусть $E(f)$ — замыкание множества $\mathcal{P}f$ в пространстве $X_\varphi(X_{\varphi_1})$. Предположим, что $\Phi \in X_\varphi^*$ — линейный непрерывный функционал, ортогональный к $E(f)$.

Поскольку $f(z) \neq 0$, $z \in D$, то можно рассмотреть функцию $e(t) =$

$=\Phi(f')$, где t изменяется в определенной области. Используя результаты М. М. Джрбашяна (¹), легко доказать, что

$$e^{(n)}(1)=0, \quad n=1, 2, \dots \quad (5)$$

Теперь, исходя из условий вышеуказанных теорем, устанавливается, что функция $e(t)$ принадлежит классу квазианалитических функций. Поэтому из (5) вытекает, что $e(0)=0$, т. е. $1 \in E(f)$.

Для установления необходимости приведенных условий используется специальный вид указанных функций.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Մ. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ, Տ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Շրջանում անալիտիկ և նրա եզրի մոտ ան բալլաստեղ ֆունկցիաների տարածություններում բալլ հակադարձելիության մասին

'Իրցութ ֆ-ն մոնոտոն աճող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա ($\varphi(x) > 0$): Նշանակենք $A_\varphi^p (1 \leq p < +\infty)$ շրջանում անալիտիկ արժեքի ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար

$$\|f\|_{A_\varphi^p}^p = \int_D |f(z)|^p e^{-z\left(\frac{1}{1-z}\right)} dm_2(z) < \infty,$$

որտեղ $m_2(z)$ -ը D -ի բերքի մակերեսային չափն է D -միավոր շրջանում:

Հոդվածում ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ φ -մաս-
ժ որանալի վրա, որոնց դեպքում

$$s_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{c}{(1-z)^\alpha}\right\}, \quad (z \in D)$$

ֆունկցիաների տիպի ֆունկցիաները հանդիսանում են թույլ հակադարձելի $A_\varphi^p (1 \leq p < +\infty)$ տարածություններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H. S. Shapiro, Mich. Math. Journal, v. 11, p. 161—165 (1964). ² М. В. Келдыш, Мат. сб., т. 16 (58), с. 1—20 (1945). ³ М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 12, с. 555—568 (1948). ⁴ A. Beurling, Acta Math., v. 112, № 3—4 (1964). ⁵ Н. К. Никольский, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974). ⁶ Ф. А. Шалоян, ДАН. АрмССР, т. 74, № 3 (1982). ⁷ М. М. Джрбашян, Мат. сб. т. 36 (78), № 3 (1955).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карагулян

О выделении подсистем безусловной сходимости из ортонормированных систем некоторого класса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалайном 25/Х 1985)

Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве $E \subset (0, 1)$, является системой сходимости, если все ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right) \quad (1)$$

сходятся почти всюду (п. в.). И соответственно системой безусловной сходимости, если они сходятся п. в. при любой перестановке членов.

Известен следующий результат, установленный Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем в 1936 г.

Теорема А^(1,2). Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, существует ее подсистема сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

В 1974 г. Комлош усилил этот результат, доказав, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подсистему безусловной сходимости (см. ⁽³⁾).

Вопрос о выделении подсистем сходимости с некоторыми свойствами плотности впервые был рассмотрен Б. С. Кашиным в ⁽⁴⁾. Им установлена следующая

Теорема Б⁽⁴⁾. Из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k < R_k$, где $R_1 = 3$, $R_{k+1} = (R_k)!$ ($k = 1, 2, \dots$).

В той же работе Б. С. Кашиным был поставлен вопрос: можно ли в теореме Б оценку $n_k < R_k$ заменить на $n_k < k^{1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$)?

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. Пусть ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, удовлетворяет условию $|\varphi_n(x)| < f(x)$, $n = 1, 2, \dots$, где $f(x)$ п. в. конечная измеримая функция. Тогда для любого $\delta > 0$ из нее можно выделить подсистему безусловной сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с условием $n_k < k^{4+\delta}$ ($k = 1, 2, \dots$)

Лемма 1. Если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ является ОНС на $(0, 1)$ и f_1, f_2, \dots, f_m некоторые функции из $L^2(0, 1)$ такие, что $\|f_i\|_2 \leq M$, $i = 1, 2, \dots, m$, то найдется такой номер k ($1 \leq k \leq n$), что

$$\sum_{i=1}^m \left| \int_0^1 \varphi_k f_i \right|^2 \leq M^2 \frac{m}{n}. \quad (2)$$

Доказательство. В силу ортонормированности $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ имеем $\sum_{k=1}^n \left| \int_0^1 \varphi_k f_i \right|^2 \leq \|f_i\|_2^2 \leq M^2$ для любого $i=1, 2, \dots, m$. Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \left| \int_0^1 \varphi_k f_i \right|^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \left| \int_0^1 \varphi_k f_i \right|^2 \right) \leq m M^2.$$

Тогда легко убедиться, что существует такое $1 \leq k \leq n$, чтобы выполнялось (2).

Лемма 1 доказана. Для доказательства следующей леммы используется метод Комлоша из работы (5).

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ система некоторых функций, определенных на множестве $E \subset (0, 1)$ и удовлетворяющих условиям

$$\int_E |\varphi_k(x)|^4 dx < C_1, \quad k=1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\text{и} \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} \left| \int_E \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} \right|^2 < C_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 некоторые постоянные. Тогда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является системой безусловной сходимости на E .

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^4 &= a_1 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} + \\ &+ a_2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \varphi_i^2 \right)^2 + a_3 \sum_{i=1}^n a_i^4 \varphi_i^4 + a_4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^3 \varphi_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) + \\ &+ a_5 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \varphi_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

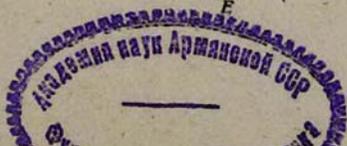
где $a_k, k=1, 2, \dots, 5$ некоторые абсолютные постоянные. Обозначив через S_k ($1 \leq k \leq 5$) множитель, стоящий перед a_k в (5), будем иметь

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^4 = \sum_{k=1}^5 a_k \int_E S_k \leq \sum_{k=1}^5 |a_k| \max_{1 \leq k \leq 5} \left| \int_E S_k \right|. \quad (6)$$

Используя (4) и неравенства Гельдера, имеем

$$\left| \int_E S_1 \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} a_{i_1}^2 a_{i_2}^2 a_{i_3}^2 a_{i_4}^2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} \left| \int_E \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} \right|^2 \leq C_2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2.$$

$$\text{Обозначив} \quad S = \max_{1 \leq k \leq 5} \left| \int_E S_k \right|, \quad (7)$$



имеем (см. (6))
$$\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^4 \leq \sum_{k=1}^5 |\alpha_k| S. \quad (9)$$

Если S равно одному из чисел $|\int_E S_2|$, $|\int_E S_3|$, $|\int_E S_4|$ и $|\int_E S_5|$ (см. (8)) (очевидно, это зависит от чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$), то, как установлено при доказательстве одной теоремы из работы (5),

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^4 \leq C_3 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2,$$

где C_3 некоторая постоянная, зависящая только от системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Если же $S = |\int_E S_1|$, то аналогичное неравенство с константой $C_2 \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$ (см. (4)) следует из (7). В итоге получим (см. (9))

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^4 \leq C_4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \quad \left(C_4 = \max \left\{ C_3, C_2 \sum_{k=1}^5 |\alpha_k| \right\} \right).$$

Из последнего неравенства, дословно повторяя известную конструкцию Эрдёша (см. напр. (6), с. 322), можно убедиться, что $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является системой безусловной сходимости.

Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы. Обозначая $E_n = \{x, n-1 \leq f(x) < n\}$, $n=1, 2, \dots$ где $f(x)$ есть функция из теоремы, имеем

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n \right) = 1, \quad E_n \cap E_m = \emptyset \quad \text{при } n \neq m, \quad (10)$$

$$|\varphi_k(x)| < n \quad \text{при } k=1, 2, \dots \text{ и } x \in E_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (11)$$

По индукции определим номера n_k , $k=1, 2, \dots$, такие, чтобы выполнялись следующие условия

$$1) \quad n_{k-1} < n_k, \quad k=2, 3, \dots; \quad (12)$$

$$2) \quad n_k < k^{4+\delta}, \quad k=1, 2, \dots; \quad (13)$$

3) n_k есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\lfloor h^{\delta/\beta} \rfloor} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < k-1} \left| \int_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_{n_k} \right|^2 \leq \frac{1}{k^{1+\beta/\alpha}} \quad (k > 3). \quad (14)$$

Определим $n_1=1$, $n_2=2$ и $n_3=3$. Предположим, что уже определены номера n_k , $k=1, 2, \dots, p$ ($p \geq 3$), удовлетворяющие условиям (12), (13) и (14). Применим лемму 1 к ОНС $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\lfloor (p+\delta)^{4+\delta} \rfloor} \setminus \{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^p$ и к функциям

$\chi_{E_n} \cdot \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}}$, $n=1, 2, \dots, \lfloor (p+1)^{\delta/\beta} \rfloor$, $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p$, количество которых равно $\lfloor (p+1)^{\delta/\beta} \rfloor \cdot p(p-1)(p-2)/6$, и $L^2(0, 1)$ нормы которых ограничены числом $\lfloor (p+1)^{\delta/\beta} \rfloor$ (см. (11)). Тогда можно определить такое натуральное число t , что

$$t \in \{1, 2, \dots, \lfloor (p+1)^{4+\delta} \rfloor\} \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_p\}, \quad (15)$$

$$\sum_{n-1}^{[(p+1)^{2/3}]^2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p} \left| \int_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_i \right|^2 \leq$$

$$\leq [(p+1)^{2/3}]^2 \cdot \frac{[(p+1)^{2/3}] \cdot p(p-1)(p-2)}{6([(p+1)^{4/3}] - p)} \leq \frac{1}{(p+1)^{1+2/3}}. \quad (16)$$

Обозначим через n_{p+1} наименьшее из таких t . Тогда из (15) и (16) следуют, соответственно, условия (13) и (14) при $k=p+1$.

Для завершения индукции осталось показать, что $n_p < n_{p+1}$. Если предположить, что $n_p > n_{p+1}$, то в силу того, что по предположению индукции n_p есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию (14), имеем

$$\sum_{n-1}^{[p^{2/3}]^2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < p-1} \left| \int_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_{n+1} \right|^2 > \frac{1}{p^{1+2/3}}$$

и тем более

$$\sum_{n-1}^{[(p+1)^{2/3}]^2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p} \left| \int_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_{n+1} \right|^2 > \frac{1}{p^{1+2/3}} > \frac{1}{(p+1)^{1+2/3}}.$$

Это значит, что при $t = n_{p+1} < n_p$ (16) не выполняется. Следовательно $n_{p+1} > n_p$.

Итак, мы построили номера n_k , $k=1, 2, \dots$ с условиями (12), (13) и (14).

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости. Используя (14), легко убедиться, что

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \dots} \left| \int_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_{n_{i_4}} \right|^2 < \infty \quad (17)$$

при любом $n=1, 2, \dots$. На множестве E_n $L^4(E_n)$ нормы функций $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничены числом n . Тогда имея в виду (17), из леммы 2 получим, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости на $(0, 1)$ (при любом $n \geq 1$). Тогда в силу (10) $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости на $(0, 1)$.

Теорема доказана.

Близкий к теореме 1 результат, формулировку которого нам сообщил Б. С. Кашин, получен Агаевым (?). Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема В. Если ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^{4+\delta} dx < M, \quad n=1, 2, \dots \quad (\delta > 0),$$

то из нее можно выделить подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с $n_k < k^{3+\delta}$, являющуюся $S_{4+\delta}$ -системой.

Автор благодарит чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա ՎԱՐՍՉՈՒՅԱԼ

Որոշ դասի օրոնորմավորված համակարգերից ոչ պայմանական զուգամիտմիջյան ենթահամակարգ ընտրելու մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են $|\varphi_n(x)| < f(x)$, $n=1, 2, \dots$ պայմանին բավարարող $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմավորված համակարգեր, որտեղ $f(x)$ համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիա է:

Այդ տիպի համակարգերի համար ապացուցվում է, որ գոյություն ունի նրա այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահամակարգ, որը ոչ պայմանական զուգամիտության սիստեմ է և որի համար $n_k < k^{1+\delta}$, որտեղ $\delta > 0$ նախապես տրված թիվ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. Menchoff, Buul de la soc. Math. de France, 3—4, 64 (1936). ² J. Marcinkiewicz, Studia Math., 6, 1936. ³ J. Komlos, Arciv for Math., 1, v. 12 (1974). ⁴ Б. С. Кашин, УМН, т. № 2, 1985. ⁵ J. Komlos, Studia Sci. Math Hungar, 7, 1972. ⁶ Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Наука, М., 1984. ⁷ Agayev, Annals, Math, № 4, 1985.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР О. М. Сапонджян

**Об одном решении бигармонической проблемы
 для бесконечной полосы**

(Представлено 21/XI 1985)

Под бигармонической проблемой подразумеваются задачи плоской теории упругости и задача изгиба пластинки, заделанной по контуру. Для бесконечной полосы ряд таких задач решен методом применения интеграла Фурье (1). Однако этот метод не применим тогда, когда в контурных условиях задачи участвуют заданные функции, обращающиеся в бесконечность в бесконечно удаленных точках полосы.

В настоящей работе разработан новый метод решения задачи бесконечной полосы. Сущность его заключается в следующем: область единичного круга конформно отображается известной функцией на область полосы, однако используется не ряд этой функции, который расходится для бесконечно удаленных точек полосы, а ряд отношения отображающей функции и ее производной, который сходится для всех точек полосы. Далее, применяя аппарат интеграла типа Коши, решение задачи приводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которые для случаев первой основной задачи плоской теории упругости и задачи изгиба пластинки регулярны, а для случаев второй основной задачи плоской теории упругости вполне регулярны.

Контурное условие бигармонической проблемы имеет вид (2)

$$k_0 \varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\Psi_1(t)} = f_1 + i f_2, \quad (1)$$

где k_0 — постоянное число, принимающее разные значения для указанных задач, t — аффикс произвольной точки контура, f_1 и f_2 — заданные на контуре функции, имеющие различные значения для отмеченных задач.

Для решения задачи бесконечной полосы применим метод конформного отображения. Область единичного круга отображается на область полосы шириной $2b$ с помощью соотношения

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2b}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \quad (2)$$

При этом $z=0$ соответствует произвольно фиксированной точке продольной оси симметрии полосы, а $\zeta=0$ — центру единичного круга.

Обозначив

$$\varphi_1(z) = \varphi(\zeta), \quad \Psi_1(z) = \Psi(\zeta), \quad (3)$$

условие (1) приводим к известному виду

$$k_0 \varphi(\eta) + \frac{\omega(\eta)}{\omega'(\eta)} \overline{\varphi'(\eta)} + \overline{\Psi'(\eta)} = f_1 + i f_2, \quad (4)$$

где η —аффикс окружности γ единичного круга.
Согласно (2)

$$\omega'(\zeta) = \frac{4b}{\pi(1-\zeta^2)}, \quad \overline{\omega'(\zeta)} = \frac{4b}{\pi(1-\bar{\zeta}^2)}. \quad (5)$$

Учитывая, что $\bar{\eta}\eta = 1$, из (4) с учетом (5) получим

$$k_0 \varphi(\eta) - \frac{1}{2\eta^2} (1-\eta^2) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \overline{\varphi'(\eta)} + \overline{\Psi'(\eta)} = f_1 + i f_2. \quad (6)$$

В этом равенстве функция $-\frac{1}{2\eta^2} (1-\eta^2) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$, заменяющая функцию $\omega(\eta)/\overline{\omega'(\eta)}$, непрерывна для всех точек окружности γ и, следовательно, для всех точек контуров полосы.

На окружности γ

$$(1-\eta^2) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} = 2 \left(\eta - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{2k+1}}{4k^2-1} \right). \quad (7)$$

Внеся это выражение в (6), получим

$$k_0 \varphi(\eta) - \left(\frac{1}{\eta} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1} \right) \overline{\varphi'(\eta)} + \overline{\Psi'(\eta)} = f_1 + i f_2. \quad (8)$$

Для определения из этого уравнения функции $\varphi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ применим аппарат интеграла типа Коши. Учитывая при этом свойства этого интеграла, находим

$$k_0 \varphi(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\varphi'(\eta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}}{\eta-\zeta} d\eta + \overline{\Psi'(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1 + i f_2}{\eta-\zeta} d\eta. \quad (9)$$

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ в области единичного круга разлагаются в ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k. \quad (10)$$

Учитывая (10), из (9) получаем

$$k_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k \eta^{-k+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}}{\eta-\zeta} d\eta + \bar{b}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k, \quad (11)$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (f_1 + i f_2) \eta^{-k-1} d\eta. \quad (12)$$

Далее, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k \eta^{-k+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1} + O\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

из (11) находим

$$k_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1} + \bar{b}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tau^n.$$

Отсюда вытекает:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\bar{a}_{2k}}{4k^2-1} + \bar{b}_0 = A_0, \quad (13)$$

$$k_0 a_{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1} = A_{2n-1}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$k_0 a_{2n} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1} = A_{2n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (15)$$

Исследуем теперь вопрос о решимости бесконечных систем уравнений (14) и (15). При этом для простоты будем рассматривать случай симметричного нагружения полосы относительно оси x . Тогда $\bar{a}_n = a_n$.

Введя обозначения

$$X_{2n} = 2na_{2n}, \quad X_{2n-1} = (2n-1)a_{2n-1}, \quad (16)$$

уравнения (14) и (15) приведем к виду:

$$X_{2n} + \frac{4n}{k_0 + \frac{4n}{16n^2-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{X_{2k}}{4(k+n)^2-1} = \frac{2nA_{2n}}{k_0 + \frac{4n}{16n^2-1}}, \quad (17)$$

$$X_{2n-1} + \frac{2(2n-1)}{k_0 + \frac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{X_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1} = \frac{(2n-1)A_{2n-1}}{k_0 + \frac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}}. \quad (18)$$

Условиями вполне регулярности этих уравнений являются ⁽³⁾:

$$\left| k_0 + \frac{4n}{16n^2-1} \right| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{4(k+n)^2-1} < 1, \quad (19)$$

$$\left| k_0 + \frac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \right| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{4(k+n-1)^2-1} < 1.$$

Если при $n \rightarrow \infty$ неравенства в (19) заменятся равенствами, то тогда (19) будут являться условиями регулярности.

$$\text{Учитывая далее равенства } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{4(k+n)^2-1} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{16n^2-1},$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4(k+n-1)^2-1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{(4n-1)(4n-3)},$$

условия (19) приводим к окончательному виду:

$$\frac{4n}{2(2n+1)} \left| k_0 + \frac{1 - \frac{2(2n+1)}{16n^2-1}}{\frac{4n}{16n^2-1}} \right| < 1,$$

$$\frac{1 - \frac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}}{\left| k_0 + \frac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \right|} < 1. \quad (20)$$

Напомним, что: 1) $k_0=1$ соответствует случаям первой основной задачи плоской теории упругости и задачи изгиба заделанной по контуру пластинки; 2) $k_0=-(3-4\nu)$, где ν —коэффициент Пуассона, имеет место в случае плоского напряженного состояния, когда на контуре заданы смещения; 3) $k_0=-(3-\nu)/(1+\nu)$ соответствует случаю плоской деформации, когда на контуре заданы также смещения.

Легко проверить, что при указанных значениях k_0 условия (20) соблюдаются, при этом в первом случае (20) являются условиями регулярности, во втором случае при $0 < \nu < 0,5$ и в третьем случае при $0 < \nu < 0,5$ (20) являются условиями вполне регулярности. Если в случае регулярности уравнений (17) и (18) свободные члены будут иметь порядок не ниже $1/n$, а в случае вполне регулярности указанные члены ограничены в совокупности, то тогда уравнения (17) и (18) будут иметь решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений (*).

Этим завершается задача определения функции $\varphi(\zeta)$.

Полагая известной функцию $\varphi(\zeta)$, из (4) определяем функцию $\Psi(\zeta)$:

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1 - if_2}{\eta - \zeta} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\eta)}{\omega'(\eta)} \varphi'(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \zeta}. \quad (21)$$

При этом согласно (2) и (5) $\frac{\omega(\eta)}{\omega'(\eta)} = -\eta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^{-2k+1}}{4k^2-1}$.

Таким образом поставленная задача теоретически решена.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ Բնագիտության օր. Գ. ՍԱՊՈՆՉՅԱՆ

Անվերջ շերտի համար բիհարմոնիկ պրոբլեմի մի լուծման մասին

Բիհարմոնիկ պրոբլեմ անվանումը վերաբերվում է առաձգականության տեսության հարի խնդրին և եզրագծով ամրակցված սալի դեպքին: Անվերջ շերտի համար ալգաիսի մի շարք խնդրները լուծվել են Ֆուրիեի ինտեգրալի

օգնութեամբ: Սակայն այդ մեթոդը կիրառելի չի լինում, երբ խնդրի եզրային պայմաններում մասնակցում են ֆունկցիաներ, որոնք եզրագծի անվերջ հեռու կետերում ձգտում են անսահմանության: Ներկա հոդվածում մշակված է նոր եղանակ անվերջ շերտի վերաբերյալ խնդիրների լուծման համար, որը զերծ է այդ թերությունից: Ընդհանուր ձևով խնդիրը լուծվում է կոնֆորմ արտապատկերման եղանակով:

Որոշելիք ֆունկցիաների (Թեյլորի շարքերի) գործակիցների համար ստացվել են անվերջ սիստեմի հավասարումներ, որոնք լրիվ ռեզուլյար են հարթ խնդրի դեպքում, երբ եզրային պայմանները տրված են լինում տեղափոխումների միջոցով, իսկ երբ այդ պայմանները տրված են լինում լարումների միջոցով, ինչպես նաև եզրագծով ամրակցված սույի դեպքում, այդ հավասարումները լինում են ռեզուլյար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ П. Ф. Панкович, Теория упругости. Л.—М., 1939. ² Н. И. Мусхелишвили, Изв. АН СССР. Механика, с. 374, 185, 1954. ³ Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, Л.—М., 1949.

УДК 624.131.5

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. Хачиян, В. А. Амбарцумян, М. Г. Мелкумян

Методика экспериментального определения динамической жесткости основания и ее учет при расчетах на сейсмические воздействия

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 18/XII 1985)

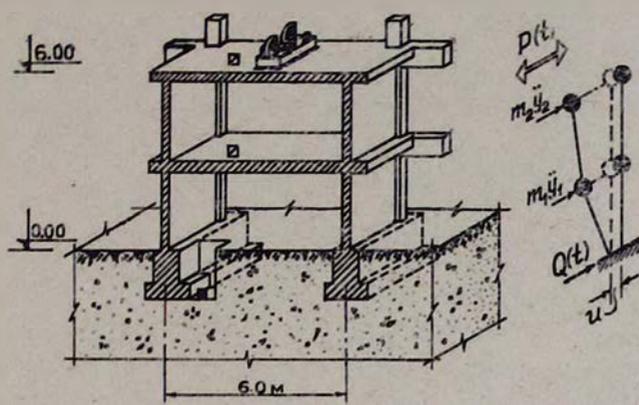
При расчете зданий и сооружений на сейсмические воздействия необходимо учитывать их взаимодействие с грунтом, что связано с определением горизонтальной динамической жесткости основания при колебаниях грунта. Под горизонтальной динамической жесткостью основания здесь подразумевается величина динамически приложенной на уровне подошвы фундамента горизонтальной силы, вызывающей единичное смещение основания. Обычно горизонтальная жесткость основания определяется теоретически с использованием решения динамической контактной задачи теории упругости. При этом значительно упрощается действительная картина взаимодействия фундамента сооружения с грунтом, не учитывается заглубленность и сложная геометрия фундамента, неоднородность и пластическое деформирование грунта. Действительная динамическая жесткость основания зданий может быть определена натурным экспериментом.

В настоящей статье предложена методика, позволяющая экспериментальным путем определить динамическую жесткость основания и его диссипативные характеристики для конкретных зданий, возведенных в данных грунтовых условиях. Сущность ее заключается в следующем. Исходя из приведенного выше определения горизонтальной динамической жесткости основания необходимо на уровне фундамента здания создать соответствующую динамическую нагрузку с заданной частотой и амплитудой. Такой нагрузкой может служить суммарная инерционная горизонтальная сила, возникающая на уровне фундамента здания при его колебаниях. Последние предлагается возбуждать с помощью вибрационной машины инерционного действия, закрепленной на перекрытии верхнего этажа. При работе вибромашины на уровнях всех этажей здания возникнут сосредоточенные инерционные силы, суммарная величина которых Q на уровне фундамента будет уравновешиваться с динамической реакцией R основания, приложенной к фундаменту в противоположном направлении. Очевидно, что при абсолютно жестком основании фундамент не будет иметь смещение при колебаниях здания. Если же грунт основания обладает свойством податливости, то фундамент сместится относительно первоначального положения вертикальной оси здания на некоторую величину u . Значение u будет зависеть от свойств грунта основания, конструкции фундамента, веса здания, частоты колебания вибратора и веса его дебалансов. Та-

ким образом, записывая во время работы вибромашины ускорения всех этажей \ddot{y}_k и смещения основания u и учитывая то, что массы m_k всех этажей нам известны, легко можно определить величину динамической нагрузки на уровне фундамента, а следовательно и жесткость основания для данной конструкции фундамента по формуле*

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k}{u} = \frac{Q}{u}. \quad (1)$$

Предлагаемая методика была апробирована при динамических испытаниях двухэтажного фрагмента каркасного здания, возведенного из типовых конструкций заводского изготовления (рис. 1). Ускорения этажей и перемещение на уровне подошвы фундамента регистрировали



■ — сейсмометр, регистрирующий перемещение
 з — сейсмометры, регистрирующие ускорения

Рис. 1. Двухэтажный фрагмент каркасного здания и его расчетная схема

сейсмоприемниками соответственно ОСП и СМ-3 в резонансном режиме (начальная частота колебания—11 Гц) при различных весах дебалансов на валах вибратора. Полученные результаты и вычисленная по ним динамическая жесткость основания приведены в таблице.

Поперечная динамическая нагрузка Q , кН	Смещение фундамента u , мм	Вычисленная динамическая жесткость основания C , кН/мм
200,0	0,015	13333
238,5	0,018	13250
290,6	0,027	10763
348,8	0,034	10259

Приведенные в таблице значения C соответствуют амплитудным величинам инерционных сил Q и смещениям u . Поскольку при испытаниях записывается их изменение во времени, то это позволяет также,

* При этом возмущающей силой вибратора пренебрегается, так как она существенно мала по сравнению с поперечной инерционной силой на уровне первого этажа здания.

пользуясь работой (1), построить график динамической зависимости между реакцией R основания и его смещением u , т. е. динамическую петлю гистерезиса грунта основания при данном уровне загрузки, следующим образом. Выделяя на записях смещения основания $u(t)$ и ускорений этажей $\ddot{y}_1(t)$ и $\ddot{y}_2(t)$ отрезок осциллограммы, соответствующий одному полному циклу колебаний, производят их табулирование с определенным шагом (рис. 2, а—б). Далее на каждом шаге t_j суммированием инерционных сил $m_1\ddot{y}_1(t_j)$ и $m_2\ddot{y}_2(t_j)$ вычисляют значение поперечной силы $Q(t_j)$ и строят график ее изменения на том же

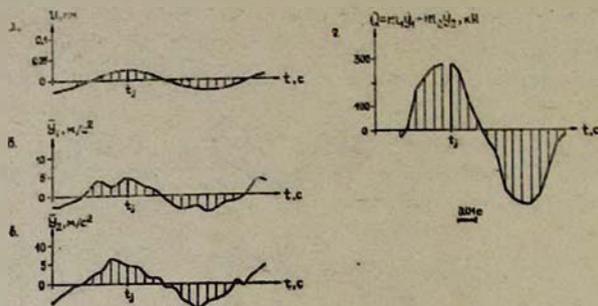


Рис. 2. Отрезки осциллограмм смещения основания (а), ускорений первого (б) и второго (в) этажей и изменение во времени поперечной силы на уровне подошвы фундамента (г), вычисленной по (б) и (в)

отрезке времени (рис. 2, г). Таким образом каждому моменту времени t_j будут соответствовать определенные значения $Q(t_j)$ и $u(t_j)$, что позволяет, исключая время t , построить графическую зависимость $Q(u)$. На рис. 2 показаны записи, соответствующие одному из этапов нагружения, при котором амплитудное значение Q было равно 290,6 кН. На рис. 3 изображены построенные вышеуказанным способом динамические петли гистерезиса грунта основания при различных уровнях нагружения (см. таблицу). Как видно из таблицы, динамическая жесткость основания существенно зависит от уровня его нагружения. Сравним экспериментально полученные значения C с теоретическими. Начальное значение жесткости C , полученное аналитическим решением плоской контактной задачи, при малых частотах имеет вид (2)

$$C = 2\pi c_1^2 \rho (1 - \beta_1^2) h - \frac{\pi b^2}{4} \rho (1 + \beta_1^2) \omega_0^2 h, \quad \beta_1 = c_2/c_1, \quad (2)$$

где c_1 , c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн в грунте; ρ — плотность грунта; ω_0 — круговая частота колебаний фундамента; $2b$, h — размеры в плане сплошного фундамента. Испытанный фрагмент имел два ленточных железобетонных фундамента с размерами $1,4 \times 7,4$ м, которые при расчете заменяются эквивалентным фундаментом размерами $2b = 7,4$ м, $h = 2,8$ м. Грунт основания крупнообломочный с базальтовыми включениями: $c_2 = 800$ м/с, $\beta_1 = 0,577$, $\rho = 1,6$ кН · с²/м⁴. Вычисленное по формуле (2) значение C составило $C = 11950$ кН/мм, что на 10% отличается от экспериментального значения, полученного при начальном низком уровне нагружения. В

данном случае динамическая жесткость основания определялась по первой форме колебаний сооружения. Аналогичным образом динамическая жесткость может быть определена и при любой форме колебаний сооружения, т. е. при другой частоте (скорости) приложения нагрузки.

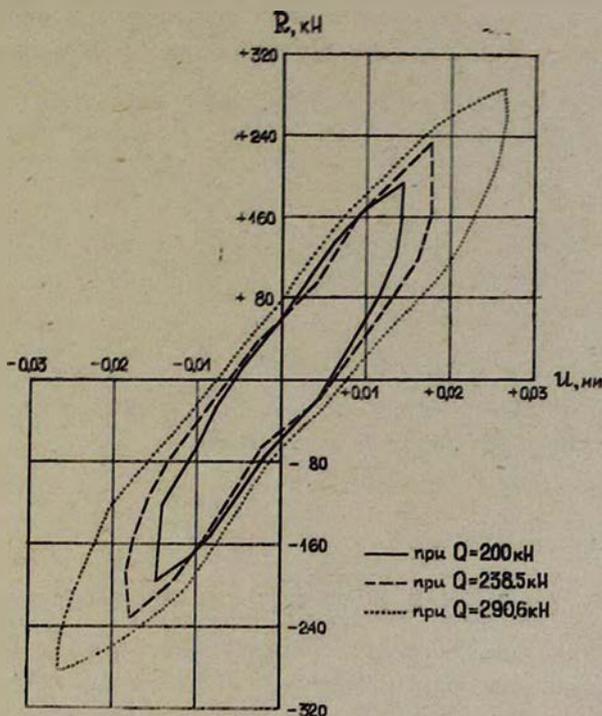


Рис. 3. Динамические петли гистерезиса грунта основания при различных уровнях нагружения

Экспериментально полученные значения жесткости основания предлагается применять при решении задачи взаимодействия сооружения с грунтом в следующей постановке. Допустим, что имеется сейсмограмма свободной поверхности грунта $y_0(t)$. Если бы на данном месте находилось рассматриваемое сооружение, то сейсмограмму колебаний фундамента при землетрясении $y(t)$ можно было бы определить из следующего уравнения:

$$y_0(t) - y(t) = y_1(t), \quad (3)$$

$y_1(t)$ — перемещение грунта, возникающее от сейсмических сил, действующих на сооружение. Это перемещение можно представить в виде

$$y_1(t) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_{1j}}{C_j} = \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{C_j} \omega_j \int_0^t \ddot{y}(\xi) e^{-\frac{\alpha \omega_j}{2}(t-\xi)} \sin \omega_j(t-\xi) d\xi, \quad (4)$$

$$M_j = \left(\sum_{i=1}^n m_i X_{1i} \right)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i X_{1i}^2 \right)^{-1},$$

где Q_{1j} — сейсмическая поперечная сила I этажа, соответствующая

УДК 535.34;535.651;548.55

А. С. Кузьян, А. Г. Петросян, Т. И. Бутаева, К. Л. Ованесян

Центры окраски в алюминиевых и скандийсодержащих гранатах с ионами Zr^{3+}

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/XI 1985)

Кислородсодержащие материалы с ионами лантаноидов и элементами группы железа занимают одно из центральных мест в физике активированных кристаллов. На основе этих соединений созданы десятки монокристаллов, обнаруживающих эффект стимулированного излучения (СИ) ⁽¹⁾. Среди элементов с электронными конфигурациями d^2s^2 и d^5s в последние годы интенсивно исследуются ионы Ti^{3+} и Cr^{3+} , которые позволяют получать перестраиваемое СИ ⁽²⁻⁴⁾. Ионы Zr^{3+} (d^1) в оксидных монокристаллах изучены в значительно меньшей степени. В ⁽⁵⁾ обнаружено, что введение ионов Zr в иттрий-алюминиевый гранат ($Y_3Al_5O_{12}$) приводит к появлению в кристаллах интенсивных полос поглощения в сине-зеленой области оптического спектра. По данным структурных измерений, спектров оптического поглощения и ЭПР ⁽⁶⁾ обнаружено, что ионы Zr^{3+} замещают в решетке граната узлы с додекаэдрической координацией. Восьмерное по кислороду окружение ионов циркония встречается, например, в цирконе ($ZrSiO_4$) ⁽⁷⁾ и в гранате $\{Ca_{2,5}Zr_{0,5}\}[Zr_2](Ga_3)O_{12}$ ⁽⁸⁾, однако характерным для ионов циркония является шестерное окружение, которое реализуется в большинстве минералов циркония и в соединениях со структурой граната ^(9,10).

В настоящей работе, являющейся продолжением ^(5,6), исследованы свойства ионов Zr^{3+} в алюминиевых и скандийсодержащих редкоземельных гранатах.

Монокристаллы $RE_3Al_5O_{12}$ ($RE=Y, Dy, Ho, Er, Lu$) и $RE_3Sc_2Al_3O_{12}$ ($RE=Y, Gd$) с ионами циркония выращивали из расплава модифицированным методом Бриджмена ⁽¹¹⁾. В ряде случаев в кристаллы вводили компенсаторные ионы Ca^{2+} или Mg^{2+} .

Спектры оптического поглощения снимали при 300°K на спектрофотометре СФ—8 в области 0,2—1 мкм ($d=3-5$ мм).

Цветовые характеристики (цветовые координаты x и y , длины волн преобладающего цветового тона λ , чистота цвета ρ) рассчитывали методом избранных ординат ⁽¹²⁾ на образцах толщиной 1 мм.

Параметры элементарных ячеек (a_0) кристаллов измеряли порошковым методом (ошибка измерения $\leq 1 \cdot 10^{-3}$ Å).

Во всех исследованных кристаллах, содержащих наряду с цирконием ионы Ca^{2+} или Mg^{2+} , полосы поглощения в видимой области не наблюдались. Оптические спектры кристаллов $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ ^(5,6)

характеризуются поглощением в области 0,35—0,7 мкм, связанным с полосами на 0,4, 0,5 и 0,69 мкм (рис. 1а). Максимальное поглощение наиболее интенсивной полосы соответствует длине волны $\lambda_{\max} \approx 0,5$ мкм. В интенсивно окрашенных кристаллах полоса поглощения на 0,69 мкм

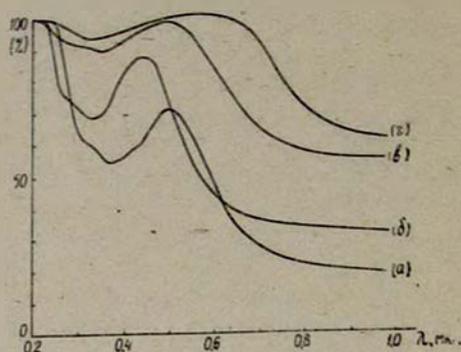


Рис. 1. Спектры оптического поглощения гранатов, активированных цирконием: а— $Y_3Al_5O_{12}$, б— $Lu_3Al_5O_{12}$, в— $Y_3Sc_2Al_3O_{12}$, г— $Gd_3Sc_2Al_3O_{12}$

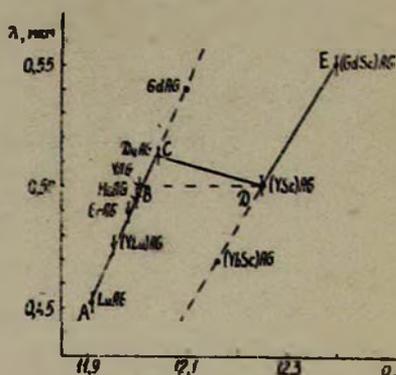


Рис. 2. Зависимость длины волны максимума полосы поглощения λ_{\max} цирконийсодержащих гранатов от параметра элементарной ячейки a_0

не разрешается. Поглощение на 0,32 мкм, наблюдаемое в этих кристаллах, свойственно и гранатам $Y_3Al_5O_{12}-Nd^{3+}$ (12). На рис. 1, б—г показаны спектры поглощения гранатов $Lu_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ (б), $Y_3Sc_2Al_3O_{12}-Zr^{3+}$ (в) и $Gd_3Sc_2Al_3O_{12}-Zr^{3+}$ (г). Наиболее интенсивная полоса поглощения в кристаллах $Lu_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$, по сравнению с $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$, смещена в коротковолновую область ($\lambda_{\max} \approx 0,45$ мкм). В скандийсодержащих гранатах по сравнению с алюминиевыми полосы поглощения ионов Yr^{3+} уширены, что по всей видимости связано с неупорядоченными искажениями додекаэдров в этих кристаллах (в кристаллах $Y_3Sc_2Al_3O_{12}$ нами наблюдалось уширение спектральных линий и ионов Er^{3+} и Nd^{3+}). Максимумы полос поглощения расположены на $\lambda_{\max} \approx 0,56$ мкм ($Gd_3Sc_2Al_3O_{12}-Zr^{3+}$) и $\lambda_{\max} \approx 0,5$ мкм ($Y_3Sc_2Al_3O_{12}-Zr^{3+}$). В кристаллах $Dy_3Al_5O_{12}$, $Er_3Al_5O_{12}$ и $Ho_3Al_5O_{12}$ происходит наложение полос ионов Zr^{3+} и полос поглощения, обусловленных ионами Dy^{3+} , Er^{3+} и Ho^{3+} .

Рассмотрение спектров поглощения показывает, что смещение полос наиболее существенно при замене ионов RE^{3+} в узлах решетки граната с восьмерным кислородным окружением. На рис. 2 изображена зависимость длины волны наиболее интенсивной полосы поглощения ионов Zr^{3+} для алюминиевых и скандийсодержащих гранатов от параметра элементарной ячейки (a_0). Точки, соответствующие алюминиевым гранатам, в которых меняется редкоземельный элемент (Lu, Er, Y, Dy и Ho) в додекаэдрических узлах „с“, располагаются на прямой АВ, что свидетельствует о равномерном изменении силы кристаллического поля с увеличением размера редкоземельного катиона. При замене ионов Al^{3+} на Sc^{3+} в октаэдрических узлах „а“ кристалла $Y_3Al_5O_{12}$ параметр элементарной ячейки увеличивается на величину $\Delta a_0 = 0,24$ А, а длина волны максимума поглощения практи-

чески не изменяется (отрезок *ВД*). Увеличение a_0 в скандийсодержащих гранатах при замене ионов Y^{3+} на Gd^{3+} в узлах „с“ приводит к смещению полосы поглощения ионов Zr^{3+} в длинноволновую область спектра (прямая *ДЕ*). Наклон прямых *АС* и *ДЕ* не одинаков, что свидетельствует о некотором влиянии октаэдрического катиона на расположение уровней иона Zr^{3+} , но, очевидно, в изученных рядах двух гранатовых систем решающую роль в сдвиге полосы поглощения Zr^{3+} играет изменение додекаэдрического элемента. Изменения силы кристаллического поля (расчеты проводили в предположении, что ионы Zr^{3+} незначительно изменяют размеры додекаэдра при изоморфном замещении узла „с“) в пределах точности эксперимента соответствуют зависимости $Dq \sim R^{-5}$, определяемой теорией кристаллического поля.

На рис. 2 пунктиром продолжены прямые *АС* и *ЕД*, по которым можно рассчитать ожидаемые сдвиги полосы поглощения Zr^{3+} для других членов соответствующих рядов гранатов. Значения a_0 для гранатов $(Y_3Al_5O_{12}$ и $Yb_3Sc_2Al_3O_{12}$ взяты из работ (14,15).

Как уже указывалось, кристаллам $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ свойственно поглощение в сине-зеленой области, обуславливающее окрашивание в красный цвет. Редкоземельно-алюминиевые гранаты с ионами Zr^{3+} также имеют окраску красной гаммы цветов (5). В таблице приведены результаты определения цветовых координат x и y , длин волн преобладающего цветового тона λ и чистоты цвета p некоторых алюминиевых и скандийсодержащих кристаллов. Сюда же для сравнения включены данные по природным гранатам красной гаммы, взятые из (16). Данные таблицы показывают, что окраска кристаллов $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ в зависимости от концентрации ионов Zr^{3+} меняется от розовой до красной. В кристаллах $Dy_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$, $Ho_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ и $Er_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ изменение окраски при сравнении с $Y_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ обуславливается сдвигом полосы поглощения ионов Zr^{3+} , а также наложением собственных полос поглощения соответствующих матриц, обусловленного ионами Dy^{3+} , Ho^{3+} и Er^{3+} . В ряде случаев изменение в кристаллах концентрации центров окраски приводит к изменению цвета в достаточно широких пределах. Например, окраска $Lu_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ меняется от желтой до оранжевой, окраска $Dy_3Al_5O_{12}-Zr^{3+}$ от розовой до красно-оранжевой и т. д.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. В алюминиевых и скандийсодержащих гранатах редкоземельных элементов ионы Zr^{3+} образуют идентичные центры окраски, локализованные в додекаэдрических узлах решетки. Сдвиг полос поглощения ионов Zr^{3+} наблюдается при замене катионов матрицы в восьмерном кислородном окружении. С уменьшением ионного радиуса катиона полосы сдвигаются в коротковолновую область спектра. При замене октаэдрических ионов Al^{3+} на ионы Sc^{3+} сдвиг полос поглощения ионов Zr^{3+} незначителен; в этих кристаллах полосы поглощения уширены предположительно из-за неоднородности кристаллического поля в додекаэдрических узлах.

По своим цветовым характеристикам алюминиевые и скандийсо-

Цветовые характеристики гранатов, активированных ионами циркония

Матрица	Цветовые характеристик				Окраска кристаллов
	x	y	λ	ρ	
$Y_3Al_5O_{12}$	0,34	0,33	590	0,09	Розовая
	0,49	0,35	600	0,52	—
	0,55	0,34	610	0,63	Красная
$Dy_3Al_5O_{12}$	0,47	0,32	625	0,38	Розовая
	0,67	0,33	615	0,95	Красно-оранжевая
$Ho_3Al_5O_{12}$	0,41	0,36	590	0,35	Оранжево-розовая
$Er_3Al_5O_{12}$	0,46	0,35	598	0,48	—
$Lu_3Al_5O_{12}$	0,42	0,43	577	0,61	Желтая
$Gd_3Sc_2Al_3O_{12}$	0,6	0,39	596	0,97	Оранжевая
$Y_3Sc_2Al_3O_{12}$	0,23	0,09	566	0,71	Синеваго-пурпурная
	0,51	0,32	610	0,55	Розовая
Природные гранаты					
Альмандины	0,35—	0,27—	590—	0,15—	—
	—0,46	—0,35	—700	—0,5	—
Пиропы	0,3—	0,21—	580—	0,1—	Розовая, красная,
	—0,6	—0,4	—700	—0,76	красно-оранжевая,
Гессониты	0,35—	0,33—	580—	0,14—	Желто-оранжевая,
	—0,55	—0,4	—595	—0,83	оранжевая

держачие гранаты, активированные ионами Zr^{3+} , охватывают практически весь диапазон красной гаммы цветов и позволяют достигать соответствия цвету природных гранатов альмандин, пироп и гессонит.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ԿՈՒՋԱՆՅԱՆ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Տ. Ի. ԲՈՒՏԱՆԿՎԱ, Կ. Լ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Գունավորման կենտրոնները Zr^{3+} իոններով ալյումինային
և սկանդիում պարունակող նոնաֆարերում

Ներկա աշխատանքում հետազոտված են Zr^{3+} իոնի հատկությունները ալյումինային և սկանդիում պարունակող նոնաֆարերում: Այդ միաբյուրեղները աճեցվել են հալույթից Բրիջմենի եղանակով: Հետազոտված են օպտիկական կլանման սպեկտրները 0,2—1 մկմ տիրույթում, որոշված են (α_0) էլեմենտար բջջի շափսերը և բյուրեղների գունային բնութագրերը: Ցույց է տրված, որ ալյումինային և սկանդիում պարունակող հազվագյուտ հողերի նոնաֆարերում Zr^{3+} իոնները ստեղծում են նույնատիպ գունավորման կենտրոններ, որոնք տեղակայված են ցանցի դողեկաէլրիկ հանգույցներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Каминский, Лазерные кристаллы, Наука, М., 1975. ² P. Moulton, Optics News, Nov/Dec, 1982. ³ Б. К. Севастьянов, Х. С. Багдасаров, Е. А. Федорова и др., Тезисы доклад. XII Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике, Москва, 1985. ⁴ J. C. Wolling, O. G. Peterson, H. P. Janssen, IEEE, J. Quant. Electron, v. QE—16, № 12, p. 1302—1305 (1980). ⁵ Патент США № 4, 525, 460 от 25 июля 1985, с приоритетом от 26 февраля 1982 г., Авторы изобр. А. Г. Петросян, Х. С. Багдасаров, А. С. Кузаян, К. Л. Ованесян, Т. И. Бутаева. ⁶ Г. А. Асатрян, А. С. Куза-

нии, А. Г. Петросян и др., ФТТ, т. 27, № 11 (1985). ⁷ Геохимия, минералогия и генетические типы месторождений редких элементов, т. 2. Минералы редких элементов, под ред. К. А. Власова, Наука, М., 1964. ⁸ Б. В. Миль, Г. М. Забнепровский, В. В. Бакакин, Изв. АН СССР. Неорганические материалы, т. 2, № 10 (1966). ⁹ D. Mateika, R. Laurien, Ch. Rusche, J. of Crystal Growth, v. 56, № 3, 1982. ¹⁰ S. Geller, Z. Kristallogr., Bd. 125, 1-6 (1967). ¹¹ Современная кристаллография (ред. Б. К. Вайнштейн), т. 3, Наука, М., 1980. ¹² Д. Джодд, Г. Вышецкий, Цвет в науке и технике, Мир, М., 1978. ¹³ W. F. Krupke, IEEE, J. Quant. Electron. QE-7, № 4 (1971). ¹⁴ C. D. Brandle, R. L. Barns, J. of Crystal Growth, v. 20, № 1 (1973). ¹⁵ T. Manabe, K. Egashira, Mat. Res. Bull., v. 6, 1971. ¹⁶ А. И. Платонов, М. Н. Таран, В. С. Балицкий, Природа окраски самоцветов. Недра, М., 1984.

УДК 535.341

ФИЗИКА

Ф. П. Сафарян, Г. Г. Демирханян

**Резонансная электрон-фононная передача энергии
 электронного возбуждения между ионами, максимумы
 функций спектрального распределения которых не совпадают**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 2/XI 1985)

1. Как известно, в теории резонансной передачи энергии электронного возбуждения, развитой Ферстером, Декстером и Галанциным⁽¹⁻³⁾, вероятность передачи выражается через интеграл перекрытия спектров излучения донора и поглощения акцептора. При этом считается, что донорный и акцепторный ионы связаны кулоновским взаимодействием. В⁽⁴⁻⁷⁾ показано, что к эффективной передаче может привести также электрон-фононное взаимодействие (ЭФВ) примесных ионов с колебаниями решетки. Причем если величина передаваемой энергии намного больше максимальной энергии фононов ($\epsilon \gg \hbar\omega_m$), то передача осуществляется путем обмена виртуальными фононами между донором и акцептором. В^(6,7) вычислена вероятность такой передачи в случае точного резонанса между электронными переходами, происходящими в доноре и акцепторе. В данной статье вычисляется вероятность передачи для случая, когда условие точного резонанса нарушено, однако имеется некоторое перекрытие спектральных функций рассматриваемых электронных переходов. Подчеркнем, что эта передача не является нерезонансной (по терминологии, принятой в литературе), поскольку, как известно, процессы нерезонансной передачи не зависят от интеграла перекрытия спектральных функций и происходят с поглощением (или испусканием) реального фонона решетки, приводя, тем самым, к совершенно иным температурным зависимостям⁽⁸⁻¹⁰⁾.

2. Допустим, что в момент времени $t=0$ возбужден первый примесный ион (донор) в электронном состоянии λ' с энергией $\epsilon_{\lambda'}$. Требуется найти вероятность того, что в момент времени $t > 0$ возбужденным окажется второй примесный ион (акцептор) в электронном состоянии μ' с энергией $\epsilon_{\mu'}$, а донорный ион перейдет в свое основное состояние λ . В результате энергия электронного возбуждения $\epsilon_{\lambda'}$ донора передается акцептору. При этом будем предполагать, что $\epsilon_{\lambda'} - \epsilon_{\mu'} = \hbar\Delta \neq 0$ ($\epsilon_{\nu\nu'} = \epsilon_{\nu} - \epsilon_{\nu'}$, ϵ_{ν} — собственное значение энергии примесного иона в состоянии ν).

В представлении чисел заполнения волновая функция системы в момент времени $t=0$ имеет вид $|O\rangle = \frac{a_{\mu}^+ a_{\lambda} |n_{\lambda} \cdot n_{\lambda} n_{\mu'} \cdot n_{\mu} \nu_a\rangle}{\sqrt{n_{\lambda}(n_{\mu} + 1)}}$, а в мо-

мент времени $t > 0$ $|t\rangle = \frac{a_{\mu'}^+ a_{\lambda'} |n_{\lambda} \cdot n_{\lambda} n_{\mu'} \cdot n_{\mu} \nu_a\rangle}{\sqrt{n_{\lambda'}(n_{\mu'} + 1)}}$, где $a_{\nu}(a_{\nu}^+)$ — электрон-

ние операторы уничтожения (рождения) в состоянии ν , $n_\nu(v_\nu)$ — числа заполнения электронных (фононных) состояний, $|n_\lambda, n_\mu, n_\nu, \dots, n_\nu, \dots\rangle$ — волновая функция основного состояния.

Вероятность перехода системы из состояния $|O\rangle$ в $|t\rangle$ за единицу времени равна

$$W = \frac{d}{dt} |\langle t|O\rangle|^2 = \frac{d}{dt} \frac{|\langle a_\lambda^\dagger a_\mu(t); a_\lambda^\dagger a_\mu(0)\rangle|^2}{n_\lambda n_\mu (n_\lambda + 1)(n_\mu + 1)}, \quad (1)$$

где $\langle \dots \rangle = \langle n_\lambda, n_\mu, n_\nu, \dots, n_\lambda, n_\mu, n_\nu, \dots \rangle$ означает как квантовомеханическое, так и статистическое усреднение по каноническому ансамблю Гиббса. От временной корреляционной функции $\langle a_\lambda^\dagger a_\mu(t); a_\lambda^\dagger a_\mu(0)\rangle$ можно перейти к фурье-образу соответствующей функции Грина $\langle\langle a_\lambda^\dagger a_\mu | a_\lambda^\dagger a_\mu \rangle\rangle_E$ (11), сводя тем самым вычисление вероятности (1) к вычислению функции $\langle\langle a_\lambda^\dagger a_\mu | a_\lambda^\dagger a_\mu \rangle\rangle_E$. Последнее можно осуществить, имея в основе гамильтониан ЭФВ типа гамильтониана Фрелиха, методом, описанным, например, в (7). Тогда для искомой функции Грина получим

$$\langle\langle a_\lambda^\dagger a_\mu | a_\lambda^\dagger a_\mu \rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi} \frac{(n_\lambda - n_\mu) A(E)}{(E + \varepsilon_{\lambda, \mu'}) (E + \varepsilon_{\lambda, \mu})}, \quad (2)$$

$$\text{где } A(E) = \sum_{\alpha} B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda) B_{\alpha}^{(1)}(\mu', \mu) \left[\frac{v_{\alpha}}{E + \varepsilon_{\lambda, \mu'} + \hbar\omega_{\alpha}} + \frac{1 + v_{\alpha}}{E + \varepsilon_{\lambda, \mu} - \hbar\omega_{\alpha}} + \frac{v_{\alpha}}{E + \varepsilon_{\lambda, \mu'} + \hbar\omega_{\alpha}} + \frac{1 + v_{\alpha}}{E + \varepsilon_{\lambda, \mu} - \hbar\omega_{\alpha}} \right], \quad (3)$$

$B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \nu')$ — коэффициенты ЭФВ первого порядка, связывающие электронные состояния ν и ν' .

А для вероятности передачи получим следующее выражение:

$$W = 2\pi N |A(E_m)|^2 \delta(\varepsilon_{\lambda, \lambda} - \varepsilon_{\mu', \mu}), \quad (4)$$

где вместо $A(E_m)$ подставлено значение $A(E)$ (3), найденное в максимуме спектрального распределения $E_m = -\varepsilon_{\lambda, \mu'}$:

$$A(E_m) = \frac{\hbar}{\varepsilon_{\lambda, \lambda} \varepsilon_{\mu', \mu}} \sum_{\alpha} B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda) B_{\alpha}^{(1)}(\mu', \mu) [2\omega_{\alpha} + \Delta(2v_{\alpha} + 1)], \quad (5)$$

$$\text{где } N = \frac{n_{\lambda\mu} n_{\lambda'\mu'} (n_{\lambda} - n_{\mu})^2}{n_{\lambda} n_{\lambda'} (n_{\mu} + 1)(n_{\mu'} + 1)} \quad (n_{\nu, \nu'} = [\exp(\varepsilon_{\nu, \nu'}/kT) + 1]^{-1}).$$

Если считать, что электронные уровни имеют конечную ширину, то формулу (4) необходимо два раза проинтегрировать по функциям спектрального распределения $g_{\lambda, \lambda}(E)$ и $g_{\mu', \mu}(E)$, соответствующим переходам $\lambda' \rightarrow \lambda$ и $\mu \rightarrow \mu'$ (1,3). После чего, как нетрудно видеть, для вероятности W получится то же выражение (4), в котором, однако, вместо δ -функции будет стоять интеграл перекрытия $S = \int g_{\lambda, \lambda}(E) g_{\mu', \mu}(E) dE$.

Если в качестве функций $g_{\lambda, \lambda}(E)$ и $g_{\mu', \mu}(E)$ выбрать лоренцевский контур линий (с полуширинами Γ_1 и Γ_2 , соответственно), максимумы которых сдвинуты друг от друга на величину Δ , то в частном случае миграции энергии по одинаковым примесным уровням ($\Gamma_1 = \Gamma_2$) получим известное выражение (2)

$$S = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (\Delta/2)^2} \quad (6)$$

Выражение (4) в отличие от случая точного резонанса ($\Delta=0$) содержит дополнительное слагаемое $\Delta(2v_x+1)$, которое вместе с выражением (6) определяет температурную зависимость вероятности передачи. Если отвлечься от сложной задачи получения правильной концентрационной зависимости вероятности передачи ^(3,6), требующей знания истинной функции фононного распределения кристалла, то для приближенной оценки относительного вклада дополнительного члена $\Delta(2v_x+1)$ в величину вероятности передачи можно воспользоваться приближением Дебая для колебаний решетки. Тогда, если учесть, что $B_x^{(n)}(v, v') \sim \frac{k}{\sqrt{\omega_x}} \sim \sqrt{\omega_x}$ (k — волновой вектор фонона), то

для величины W/W_0 (где W_0 определяется формулой (4) без учета члена $\Delta(2v_x+1)$) нетрудно получить

$$\frac{W}{W_0} = \left[1 + \frac{5\Delta}{8\omega_D} \left[1 + \frac{8T}{3T_D} D_3\left(\frac{T_D}{T}\right) \right] \right]^2, \quad (7)$$

где T_D и ω_D — температура и частота Дебая кристалла, $D_3(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3 dt}{e^t - 1}$ — функция Дебая.

Из (7) видно, что при $T \gg T_D$ величина $D_3\left(\frac{T_D}{T}\right) \sim 1$ и $\frac{W}{W_0} = \left[1 + \frac{5\Delta}{8\omega_D} \left(1 + \frac{8T}{3T_D} \right) \right]^2$, при $T \ll T_D$ величина $D_3\left(\frac{T_D}{T}\right) \sim 0$ и $\frac{W}{W_0} = \left[1 + \frac{5\Delta}{8\omega_D} \right]^2$, а при температурах $T \sim T_D$ получаем $\frac{W}{W_0} = \left[1 + 1,8 \frac{\Delta}{\omega_D} \right]^2$.

Так как для многих лазерных кристаллов $(\Delta/\omega_D) \sim 0,1 \div 1$, то можно ожидать существенного вклада второго слагаемого в (4), которое, как уже отмечалось, приводит к другой (отличной от обычно рассматриваемой в литературе) температурной зависимости вероятности резонансной передачи энергии.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Յ. Պ. ՍԱՅԱՐՅԱՆ, Գ. Գ. ԴԵՄԻՐԵԱՆՅԱՆ

Էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ռեզոնանսային էլեկտրոն-ֆոնոնային փոխանցումը խառնուրդային իոնների միջև, որոնց սպեկտրալ բաշխման ֆունկցիաների մախիմումները շեմ համընկնում

Հաշվված է բյուրեղներում խառնուրդային իոնների միջև էներգիայի փոխանցման հավանականությունը այն դեպքում, երբ դոնորի ճառագայթման և ակցեպտորի կլանման սպեկտրների մաքսիմումները շեղված են մեկը մյուսի նկատմամբ Δ մեծությամբ: Ենթադրվում է, որ էներգիայի այդպիսի փոխանցումը առաջանում է շնորհիվ իոնների միջև առաջացող էլեկտրոն-ֆոնոնա-

յին փոխազդեցության: Տեղափոխման հավանականության համար ստացված է բանաձևը, որն ունի ըստ Δ - ω փոքր պարամետրի վերլուծության տեսք: Ընդ որում այդ արտահայտության առաջին անդամը համընկնում է ճշգրիտ ռեզոնանսի դեպքում ստացված բանաձևի հետ, որը իրավունք է տալիս ենթադրելու, որ անկախ Δ շեղման մեծության, քանակական հաշվարկներում միշտ կարելի է մոտավոր հիմք ընդունել մաքուր ռեզոնանսային դեպքին համապատասխանող բանաձևը: Ինչ վերաբերվում է վերլուծության հաշորդ անդամին (որը համեմատական է Δ/ω -ին), ապա որոշ համակարգերում այն կարող է զգալիորեն փոխել ինչպես անցման հավանականության մեծությունը, այնպես էլ նրա շերմաստիճանային կախումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Th. Förster, Ann. Physik, v. 2, 55 (1948); Zs. Naturf, 4a, 321 (1949); Discussion Paraday Soc., v. 27, 7 (1959). ² D. L. Dexter, J. Chem. Phys., v. 21, 836 (1953). ³ М. Д. Галачин, Тр. ФИАН СССР, т. 5, 339 (1950); т. 12, 3 (1960). ⁴ R. Orbach, M. Tachiki, Phys. Rev., v. 158, 524 (1967). ⁵ Փ. Մ. Տաֆարյան, Գ. Գ. Դեմիրխանյան, ЖЭТФ, т. 86, 2170 (1984). ⁶ F. P. Safaryun, G. G. Demirkhanyan, Sol. State Commun., v. 56, 187 (1985). ⁷ Փ. Մ. Տաֆարյան, Изв. АН Арм. ССР. Физика, т. 16, 295 (1981). ⁸ L. F. Johnson, L. G. Van Ullert, J. J. Rubin et al., Phys. Rev., v. 133, A 494 (1964). ⁹ R. Orbach, Optical properties of ions in crystals. N. Y. Interscience Publisher Inc., 1967. ¹⁰ Փ. Մ. Տաֆարյան, ДАН Арм. ССР, т. 71, 28 (1980). ¹¹ В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функции Грина в статистической механике, Ф — М., М., 1961.

УДК 577.252.5:577.354

БИОФИЗИКА

С. Н. Айрапетян, Р. А. Бегларян, Х. В. Григорян,
Х. В. Стамболцян, Р. С. Арутюнян, Л. Е. Григорян**О механизме действия магнитного поля на удельную
электропроводность воды и осмотические свойства нервной
клетки улитки**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Б. В. Фанарджяном 18/XI 1985)

В последние годы внимание исследователей все больше привлекает чувствительность биообъектов к действию магнитного поля (МП). Магниточувствительностью обладают все биообъекты начиная с одноклеточных и кончая многоклеточными организмами (1). Однако до настоящего времени молекулярные механизмы, лежащие в основе магниточувствительности биообъектов, остаются загадочными.

Очевидным представляется тот факт, что наиболее чувствительными к действию МП оказываются те вещества, которые в своей структуре содержат неспаренные электроны, спин которых подвержен действию МП. Таким веществом является вода, которая составляет основную часть (60—80%) внутриклеточной и внеклеточной сред и в которой разыгрываются основные жизненные процессы клетки.

Наряду с этим, как показано предыдущими нашими работами, транспорт воды через клеточную мембрану, который регулируется работой электрогенного натриевого насоса (2), существенным образом меняет функциональную активность мембраны как путем изменения поверхности мембраны (3), так и непосредственно активацией и инактивацией ионных каналов, ответственных за генерацию потенциалов действия в возбудимых клетках.

Из вышесказанного следует, что исследование механизмов действия МП на физико-химические свойства воды, с одной стороны, и влияния омагниченной воды на осмотические свойства клетки, с другой стороны, приблизит нас к пониманию нитимных механизмов, лежащих в основе магниторецепции живых организмов. О механизме действия МП на физико-химические свойства воды судили по изменению удельной электропроводности воды (УЭ) под действием МП. Магнитную обработку воды проводили при напряженности МП 6000—7500 Эрстед способом пропускания воды (со скоростью 1,5 м/с) через полиэтиленовую трубку, помещенную в соленоид магнита. Удельную электропроводность воды определяли по общепринятой методике (4), применяя ток с частотой 3000 Гц. Непрерывную регистрацию объема клетки осуществляли методикой, описанной ранее (5).

Известно, что под действием МП возрастают вязкость, плотность и поверхностное натяжение воды (6). Как видно из таблицы, при дей-

Удельная электропроводность воды и водных растворов при контрольных (без магнитного поля) и экспериментальных (магнитное поле напряженностью 6000—7500 Эрстед) условиях

Вещество	Удельная электропроводность, $10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$	
	Контроль	Опыт
Деионизированная вода	0,27	5,76
Дистиллированная вода	0,32	4,32
Питьевая вода	0,37	1,86
Тяжелая вода	0,26	0,38
Раствор Ришера	55,42	231,26
Раствор хлористого калия—5%	89,56	91,34
Раствор хлористого калия—0,001%	72,74	88,52
Раствор хлористого натрия—5%	83,22	86,43
Раствор хлористого натрия—0,001%	70,32	86,73

ствии МП существенным образом увеличивается также электропроводность воды. Для выяснения механизма действия МП на УЭ воды было исследовано действие МП на УЭ моно- и бидистиллированной, питьевой воды, электролитов (растворы хлористого натрия и калия) и тяжелой воды. Оказалось, что действию МП наиболее подвержена УЭ деионизированной и бидистиллированной воды и по мере увеличения содержания ионов в водных растворах их УЭ становится менее чувствительной к действию МП. При 5%-ном растворе KCl и NaCl УЭ раствора становится почти нечувствительной к действию МП. Интересно отметить, что длительность сохранения эффекта МП на УЭ раствора также зависит от концентрации в нем ионов: повышенная электропроводность бидистиллированной воды после ее омагничивания может сохраняться днями, тогда как у электролитов исчезает через 10—15 мин при 22° (для обычной питьевой воды и физиологического раствора). Этот процесс намного быстрее протекает у электролитов при вариации температуры среды. УЭ тяжелой воды в значительной степени менее чувствительна к действию МП, чем УЭ обычной воды (см. таблицу).

Известно, что электропроводность воды обусловлена наличием в ней H_3O^+ и OH^- ионов (4). Следовательно, приведенные выше данные о том, что под действием МП увеличивается УЭ воды, свидетельствуют об увеличении количества отмеченных ионов в воде. Наряду с этим также показано, что молекулы воды благодаря своим дипольным свойствам, водородным связям связаны с соседними молекулами и среднее расстояние между атомами кислорода варьирует в пределах от 0,276 до 0,305 нм в зависимости от температуры (5, 6). По мере увеличения этого расстояния увеличивается степень диссоциации молекул воды (7), следовательно и ее УЭ. В случае же тяжелой воды расстояние между кислородными атомами (0 0) составляет всего 0,240 нм и протон практически оказывается в центре; следовательно степень диссоциации воды минимальная (7).

Потенцирующий эффект МП на УЭ воды, по-видимому, можно объяснить следующим образом: методом оптической спектроскопии и рентгеноструктурного анализа установлено, что валентный угол связи Н—О—Н составляет 104,5°, тогда как для Д—О—Д—90°. Такое различие объясняется отталкиванием кулоновскими взаимодействиями атомов во-

дорода и стремлением неспаренных электронов атома кислорода оттолкнуть спаренные электроны. Поскольку спин неспаренных электронов подвержен действию МП и оба неспаренных электрона в атоме кислорода имеют одинаковые (синглетные) направления, то при действии МП можно ожидать увеличения валентного угла, что и приводит как к увеличению степени диссоциации молекул воды, так и к изменению ее нативной структуры. Подтверждением этого предположения могут служить данные относительно малоэффективности МП на УЭ тяжелой воды и электролитов, так как в случае тяжелой воды спиновые взаимодействия оказываются малоэффективными из-за высокой массы дейтерия, а в случае растворов электролитов, по-видимому, взаимодействие ионов с молекулами воды настолько сильнее, что под действием МП изменение спин-спинового взаимодействия существенным образом не может изменять структуру воды, как это имеет место при случае чистой воды. Очевидно, что вышеуказанный вывод можно рассматривать лишь как рабочую гипотезу для более детальных исследований.

Поскольку структура воды существенным образом определяет скорость многих жизненных процессов клетки, то естественно предположить, что в основе механизма действия МП на разные биологические и биохимические процессы клетки существенную роль может играть именно изменение структуры воды под действием МП.

Предыдущими нашими работами было показано, что число функционально активных белковых молекул (ионные каналы, ферменты и хеморецепторы), обуславливающих функциональную активность мембраны, в значительной мере зависит от поверхности мембраны, а последняя определяется осмотическими градиентами на мембране ($8-10$). Так как под действием МП происходит изменение структуры воды, то можно ожидать и соответственного изменения проницаемости мембран для воды. Для проверки данного предположения в следующей серии наших экспериментов мы исследовали действие омагниченной воды на объем изолированного нейрона виноградной улитки. Как видно из рисунка, под действием омагниченного физиологического раствора об-



Рис. 1. Действие омагниченного физиологического раствора на объем нейрона улитки *Helix*.

ратимым образом увеличивается объем нервной клетки улитки. Следовательно, на основе вышеприведенных данных можно думать, что увеличение объема нейрона под действием омагниченной воды сопровождается увеличением числа функционально активных белковых молекул на мембране, т. е. имеет место увеличение ферментативных, хеморецептивных и возбудимых свойств клетки.

Таким образом, сопоставление полученных в настоящей работе данных об увеличении электропроводности воды и набухании клеток под действием МП с предыдущими данными об объем-зависим-

мости функциональной активности клеток позволяет прийти к заключению о том, что обнаруженные факты могут играть существенную роль в определении магниточувствительности живых организмов. Очевидно, что этот вывод может быть окончательным только после детального исследования действия МП на хемореспонсивные, возбудимые и ферментативные свойства мембраны.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР
Ереванский зоотехническо-ветеринарный институт
Ереванский государственный университет

Ս. Ն. ՀԱՆՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ի. Ս. ԲԵՊԱՐՅԱՆ, Խ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ,
Խ. Վ. ՍՏԱՄԲՈՒԼՅԱՆ, Ի. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Լ. Ե. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ջրի տեսակարար էլեկտրահաղորդականության և խխունջի նյարդային բջջի օսմոտիկ հատկությունների վրա մագնիսական դաշտի ազդեցության մեխանիզմի մասին

Ուսումնասիրված են ջրի էլեկտրահաղորդականության և խխունջի առանձնացված նյարդային բջջի ծավալի կախվածությունը մագնիսական դաշտից:

Ջրի և տարրեր ջրային լուծույթների, ինչպես նաև ծանր ջրի էլեկտրահաղորդականության փոփոխությունը չափելու համար դրանք ենթարկվել են 6000—7000 էրստեղ լարվածությամբ մագնիսական դաշտի ազդեցությանը: Պարզվել է, որ մագնիսական դաշտի ազդեցությանն առավել ենթակա են կլորինակի թորված ջուրը և ապախոնացված ջուրը:

Նյարդային բջջի օսմոտիկ հատկությունների կախվածությունը մագնիսական դաշտից որոշվել է Ռինդերի լուծույթը նախապես նույն լարվածության մագնիսական դաշտում պահելով և հետո այդ լուծույթի ազդեցությունը բջջի ծավալի վրա գրանցելով: Այդ փորձը ցույց է տալիս, որ բջջը այդ պայմաններում ուղռում է:

Սույն ուսումնասիրությունը թույլ է տալիս եզրակացնել, որ հայտնաբերված փաստերը կարող են կարևոր դեր խաղալ կենդանի օրգանիզմների մագնիսազգայնությունը որոշելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. L. Gould, Ann. Rev. Physiol., v. 46, p. 585—98 (1984). ² С. Н. Айрапетян, М. А. Сулейманян, Биофизика, т. 24, с. 263 (1979). ³ S. N. Ayrapetyan, Adv. physiol. Sci., v. 23, с. 67—82 (1980). ⁴ Л. И. Герасимов и др., в кн.: Курс физической химии, Химия, М., 1966. ⁵ С. Н. Айрапетян, Х. В. Стамболцян, ДАН СССР, т. 278, p. 1238—1240 (1984). ⁶ И. А. Клазсен, в кн.: Омагничивание водных систем, Химия, М., 1982. ⁷ Ч. Коулсон, в кн.: Валентность. Мир, М., 1965. ⁸ S. N. Ayrapetyan, М. А. Сулейманян, Comp. Biochem. Physiol., v. 64A, p. 571—575 (1979). ⁹ S. N. Ayrapetyan, V. L. Arvanou, Comp. Biochem. Physiol., v. 64A, p. 601—604 (1979). ¹⁰ С. Н. Айрапетян, Г. Е. Рычков, ДАН СССР, т. 285, № 6, с. 1464—1467 (1985).

УДК 581.192

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР В. О. Казарян,
Т. С. Даниелян, А. В. Арустамян

**О влиянии интенсивности света на активность ауксинов и
ингибиторов в корнях древесных, кустарниковых и
травянистых растений**

(Представлено 16/VII 1985)

Жизнедеятельность высших растений, обусловленная в первую очередь функциональной активностью листьев и корней, осуществляется таким образом, что различные метаболические процессы одной полярной системы протекают с участием продуктов обмена другой^(1,2). При подобной функциональной зависимости любые изменения, происходящие в надземных органах, не могут не сказаться на жизнедеятельности корней. Так, например, установлено, что различные фотопериоды, воспринимаемые листовой поверхностью, через трофические и гормональные каналы влияют на жизнедеятельность корневой системы однолетников^(3,4). При этом корреляция между надземными и подземными органами осуществляется путем подчинения хода физиолого-биохимических процессов корней аналогичным процессам, протекающим в листьях. Такая интегрированная реакция растительных организмов на световой режим находится в прямой зависимости от уровня их корне-листового обмена. Последнее положение было продемонстрировано нами⁽⁵⁾ на некоторых растительных объектах—представителях основных жизненных форм.

Показано, что реакция корневой системы у древесных, кустарниковых и травянистых растений на изменение продолжительности дня не одинакова, и их чувствительность постепенно усиливается от древесных к травам. Последние будучи эволюционно более подвинутой формой характеризуются ускоренным корне-листовым обменом, и при таких условиях даже кратковременное изменение светового режима должно привести к более глубоким изменениям в метаболизме корней. Для экспериментального подтверждения этого предположения нами в 1984—1985 гг. была проведена серия экспериментов по сравнительному изучению влияния света различной интенсивности на гормональный баланс корневой системы древесных, кустарниковых и травянистых форм, результаты которых излагаются ниже.

Объектами исследований служили следующие растения: древесные—клен ясенелистный (*Acer negundo* L.), дуб летний (*Quercus robur* L.), конский каштан обыкновенный (*Aesculus hippocastanus* L.), вяз гладкий (*Ulmus laevis* (Pall.)); кустарниковые — дерен южный (*Cornus austalis* C. A. Mey), хеномелес японский (*Chaenomeles japo-*
188

nlca (Thumb). Lindl.), сирень обыкновенная (*Syringa vulgaris* L.), шиповник обыкновенный (*Rosa canina* L.); травянистые растения — полынь (*Artemisia vulgaris* L.), тысячелистник (*Achillea millefolium*), шток-роза (*Alcea rugosa*).

Для опытов использовались отобранные на территории Ботанического сада и пересаженные затем в 5-литровые вазоны примерно одновозрастные сеянцы деревьев и кустарников, имеющие вегетативную мощность, сходную с однолетними травянистыми формами. Все растения после месячного выращивания в вазонах делились на 2 группы, содержащие по 18—20 растений каждого объекта. Одна служила контролем и продолжала вегетировать в условиях солнечного света с интенсивностью 40 000 лк на уровне основной массы поверхности листьев ($\sim 200\text{--}220 \text{ Вт/м}^2$), другая опытная группа на 3 суток переносилась с сильного света на слабый—в вегетационную камеру с контролируемой температурой ($25\text{--}26^\circ$) и интенсивностью света 10 000 лк ($\sim 40 \text{ Вт/м}^2$), создаваемую люминисцентными лампами типа ЛД—40 и ЛБ—40. Длина светового дня для обеих групп растений равнялась 16 ч. По истечении 3 суток в лиофильно высушенных корнях растений проводили определение активности эндогенных ауксинов и ингибиторов по методу Кефели и Турецкой⁽⁶⁾ на тонкослойных силикагелевых пластинках (Silufol—254 UV) в растворителе изопропанол—аммиак—вода (10:1:1). Тест-объектом служила пшеница сорта Безостая-1.

На рис. 1 представлены данные по активности стимуляторов и ингибиторов роста в корнях древесных растений, из которых следует,

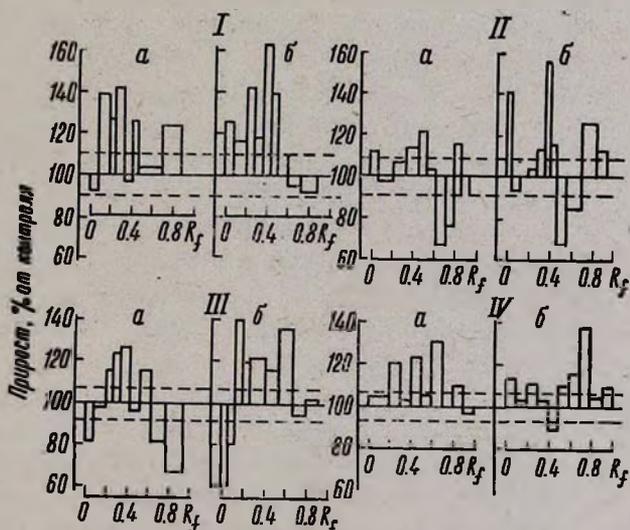


Рис. 1. Активность ауксинов и ингибиторов в корнях дуба (I), вяза (II), клена (III) и каштана (IV) при различной интенсивности света: а—10 000; б—40 000 лк

что кратковременное воздействие на них света слабой интенсивности не вызывает значительных изменений в гормональном балансе корней. В корнях дуба, клена и вяза в условиях слабой светообеспеченности наблюдается возрастание (на 1—2 соединения) числа ауксиноподобных веществ, однако их общая суммарная активность как у

контрольных, так и у опытных растений различалась незначительно. Изменения ингибиторного баланса корней древесных растений при различной интенсивности света также были не очевидны.

У кустарниковых растений (рис. 2), получавших свет слабой интенсивности в течение 3 суток, в корнях обнаружилось возрастание

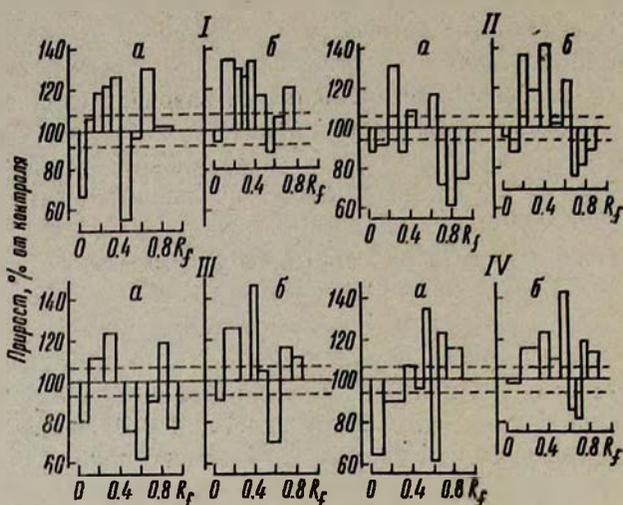


Рис. 2. Активность ауксинов и ингибиторов в корнях дерена (I), шиповника (II), сирени (III) и хеномелеса (IV) при различной интенсивности света: а—10 000; б—40 000 лк

числа и суммарной активности соединений, проявляющих стимуляторную активность на биотесте. Например, в корнях дерена в контрольном варианте таких соединений было 3, а в опытном варианте—5 при заметном увеличении их стимуляторной активности (в 1,85 раза). Одновременно в корнях сирени, дерена и хеномелеса в тех же условиях найдены ингибиторные соединения, которые в контрольных вариантах были или малоактивны, или вообще не обнаруживались. Таким образом, стимуляторно-ингибиторный баланс корней тех кустарниковых растений, которые хотя бы кратковременно получали свет слабой интенсивности, значительно отличается от такового контрольных вариантов.

Роль ауксинов в росте корня остается до сих пор еще малоизученной проблемой. Торрей еще в 1956 г. писал: «Совершенно необходимо получить наконец ясные, неоспоримые данные, которые доказали бы или, наоборот, опровергли прямое участие эндогенного ауксина в регулировании роста корней» (7). Характерно, что для роста корней даже в изолированной культуре практически не требуется ауксинов (8,9). Тиманн (10) предположил, что корни обладают более низким порогом чувствительности к ауксину, чем стебли, и что естественное содержание ауксина превышает в них оптимум для роста.

Таким образом трудно провести какую-либо параллель между содержанием в корнях стимуляторов ауксиновой природы и их ростом в условиях различной интенсивности света, хотя из литературных дан-

ных известно, что затенение уменьшает рост корней и соотношение между массами корней и листьев (11–13). Кристалкине и сотр. (14) на травянистых светолюбивых растениях показали, что при перемещении их с интенсивного (естественного) освещения на слабый свет уже через 1–3 суток ослабляется темп прироста органов, в том числе и корней. Подобное явление для корней травянистых выявлено в наших экспериментах: за три дня падение сухого веса корней составляло 14,9–18,8%. В условиях низкой светообеспеченности, наоборот, происходит возрастание листовой поверхности на 32,7–39,3%. Вследствие указанных изменений в условиях недостатка света уменьшилась корнеобеспеченность листьев.

Указанные морфологические изменения у травянистых форм протекали на фоне следующих изменений гормонального баланса корней (рис. 3). Пребывание полыни, шток-розы и тысячелистника в усло-

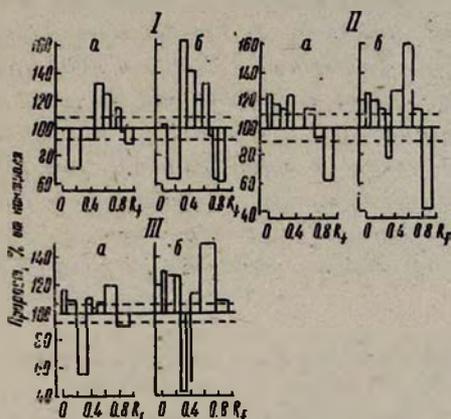


Рис. 3. Активность ауксинов и ингибиторов в корнях полыни (I), тысячелистника (II) и шток-розы (III) при различной интенсивности света: а—10 000; б—40 000 лк

виях слабой интенсивности света вызывало резкое увеличение суммарной активности ауксиноподобных соединений в корнях при одновременном, хотя и не очень значительном, повышении в них активности ингибиторных соединений. Тенденция изменения стимуляторно-ингибиторного баланса в корнях травянистых видов была такой же, как и у кустарников, однако различия между опытными и контрольными вариантами у первых были гораздо более выраженными. Так, например, суммарная активность стимуляторных соединений в корнях тысячелистника в условиях низкой интенсивности света возросла в 1,82 раза, полыни—в 2,17 раза, шток-розы—2,55 раза. Следовательно у травянистых видов уровень ауксин-ингибиторного баланса корней гораздо в большей степени зависит от внешних световых условий, чем у кустарниковых и тем более древесных форм. Иными словами, процесс адаптации травянистых видов к тому или иному уровню напряженности света происходит значительно быстрее и активнее, причем эти растения реагируют на этот фактор как целостная система, изменяя соотношение ауксинов и ингибиторов как в корнях, так и в листьях. Все это служит предпосылкой не только для ускорения генеративного развития, но и

для повышения уровня корне-лиственной интеграции. Таким образом, эволюция жизненных форм от древесных гигантов до карликовых трав осуществляется путем возрастания интеграции корне-лиственного обмена, что и способствует возникновению и закреплению адаптивных реакций к неблагоприятным факторам среды (15).

Институт ботаники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Տ. Ս. ԴԱՆԵԼԻԱՆ, Ա. Վ. ԱՌՈՒՍԱՄՅԱՆ

Լույսի ինտենսիվության ազդեցությունը ծառերի, բլիների և խոտաբույսերի արմատներում աուգսինների և ինհիբիտորների ակտիվության վրա

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է աուգսինների և ինհիբիտորների ակտիվությունը տարբեր կենսաձևերի 11 ներկայացուցիչների արմատներում լույսի ինտենսիվության փոփոխման (10000 և 4000 լյուքս) պայմաններում: Լույսի ցածր ինտենսիվության պայմաններում բոլոր ուսումնասիրված բույսերի արմատներում ալելացել է աուգսինների թիվը և ակտիվությունը, ըստ որում խոտաբույսերի մոտ շատ ալելի ցայտուն, քան թփերի և ծառերի մոտ: Եզրակացվում է, որ խոտաբույսերի ադապտացիան լույսի տարբեր լարվածության մակարդակին կատարվում է ալելի արագ ու ակտիվ, և այդ բույսերը որպես ամրոցչական սիստեմ արձագանքում են լուսային գործոնի նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. О. Казарян, Старение высших растений, Наука, М., 1969. ² О. Н. Кулаева, Цитокинины, их структура и функция, Наука, М., 1973. ³ Т. С. Даниелян, Функциональная активность корней в связи со световым режимом и возрастом листьев, канд. дис., Ереван, 1978. ⁴ Г. М. Мовсесян, Влияние длины дня и возраста листьев на активность ауксинов и ингибиторов в корнях, канд. дис., Ереван, 1978. ⁵ В. О. Казарян, Т. С. Даниелян, А. В. Арустамян, Биол. журн. Армении, т. 38, № 6 (1985) ⁶ В. И. Кефели, Р. Х. Турецкая, в кн.: Методы определения регуляторов роста и гербицидов, Наука, М., 1966. ⁷ J. G. Torrey, Ann. Rev. Plant Physiol., v. 7 (1956). ⁸ H. E. Street, S. M. McGregor, J. M. Sussex, J. Exper. Bot., v. 5 (1954). ⁹ А. М. Смирнов, Рост и метаболизм изолированных корней в стерильной культуре, Наука, М., 1970. ¹⁰ K. V. Thimann, Am. J. Bot., v. 24 (1937). ¹¹ S. D. Richardson, Landbouwkund. Tijdschr. v. 68, № 9 (1956). ¹² H. Lyr, G. Hoffman, K. Dohse, Flora, v. 152, № 2, (1963). ¹³ K. T. Logan, G. Krotkov, Physiol. plantarum, v. 22, № 1 (1968). ¹⁴ С. Х. Кристкалне, Г. Д. Губарь, А. К. Витола и др., в кн.: Адаптация физиолого-биохимических систем растения к перемене освещения, Зинатне, Рига, 1977. ¹⁵ Ю. Л. Цельникер, Физиологические основы теневыносливости древесных растений, Наука, М., 1978.

