

Arx 144

ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր Д О К Л А Д Ы

LXXXII, № 3
1986

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհմ. գիտ. փհեմ-
ծու (պատ. ֆուրաուդաւ), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ք. ՅԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐԻԲԵՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ՔԱՆԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԱՐՋՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի անդա-
մ), Վ. Գ. ՄԻՒՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր.
անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ս. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր.
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԺԱՅԵՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս, Վ. Ք. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН АрмССР (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН
АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,
академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-
ДЖЯН, академик АН АрмССР.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

52

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ռ. Ս. Նախապետյան—Սահմանային թեորեմներ թույլ կախյալ պատահական մեծու- թյունների համար	99
Տ. Է. Փիլիպոսյան—Հարթ իրացնելի հիպերգրաֆների մասին	102
Ա. Վ. Կարաբեգով—C(X)-ի պոլինոմիալ ընդլայնումների մասին	107
Գ. Ա. Կարաբուլյան—Ջուզամիտոսիայան համակարգերի և լրիվ օրթոնորմավորված հա- մակարգերով Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի տարամիտոսիայան մասին	112
Ս. Ս. Մարտիրոսյան—Շատ օգտվողներով զուգարակ կապուղու համար միարժեքորեն ապակողավորվող բազիսային կոդերի նոր կոնստրուկցիա	116

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Կ. Սահակյան—Անհամասեռ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար վեկտորա- կան ալիբային հավասարումը արոհվում է անկախ սկալյար հավասարումների	121
---	-----

ՍՈՂՔԻ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆ. Մ. Փոլադյան—Ուղղանկյուն ուղղահայաց հատվածքով բաղադրյալ շրջանային օղակի սեկտորի ոչ-գծային սողքը ոլորման դեպքում	125
--	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Է. Ա. Հակոբյան, Հ. Հ. Մարկոսյան—Կապված վիճակների առաջացումը պլազմայում շարժվող լիցքավորված մասնիկների միջև	130
---	-----

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Հովհաննիսյան, Կ. Ս. Հայրապետյան, Ա. Վ. Ղուկասյան, Ֆ. Ս. Քիմոյան— Ստի- րոլով հազեցված կալիումի պերսուլֆատի ջրային լուծույթում մոնոմերային ռադիկալների հարուցման քիմիզմը	134
--	-----

ԿՆՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Հ. Գ. Խաչատրյան—Էկզիզոնի տիտրի փոփոխությունը լուսապարբերական ազդանշան- ների կուտակման ընթացքում կաղամբի բվիկի (Barathra brassicae L. (Noctuidae, Lepidoptera) մոտ	137
---	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ք. Վ. Ղազարյան, Վ. Յ. Վանցյան, Ա. Ս. Տիրայան—Մի քանի արգելակիչների ազդե- ցությունը միզածորանի դանդաղ ալիքների ակտիվության վրա	140
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

<i>Б. С. Нахпетян</i> —К предельным теоремам для зависимых случайных величин.	99
<i>Т. Э. Пилипосян</i> —О планарно реализуемых гиперграфах	102
<i>А. В. Карабегов</i> —О полиномиальных расширениях $C(X)$	107
<i>Г. А. Карагулян</i> —О подсистемах сходимости и о расходимости двойных рядов Фурье по полным ортонормированным системам	112
<i>С. С. Мартиросян</i> —Новая конструкция базисных однозначно декодируемых кодов для суммирующего канала со многими пользователями	116

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>С. Г. Саакян</i> —Неоднородные упругие среды, для которых векторное волновое уравнение разделяется на независимые скалярные уравнения	121
--	-----

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

<i>Ф. М. Поладян</i> —Нелинейная ползучесть составного сектора кругового кольца с прямоугольным поперечным сечением при кручении	125
--	-----

ФИЗИКА

<i>Э. А. Акопян, Г. Г. Матевосян</i> —Образование связанных состояний быстрыми заряженными частицами, движущимися в плазме	130
--	-----

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>А. А. Оганесян, К. С. Айрапетян, А. В. Гукасян, Ф. С. Киноян</i> —О химизме реакции инициирования мономерных радикалов в водном растворе персульфата калия, насыщенном стиролом	134
--	-----

БИОЛОГИЯ

<i>А. Г. Хачатрян</i> —Изменение титра экдизона при накоплении фотопериодических сигналов у капустной совки <i>Barathra brassicae</i> L. (Noctuidae, Lepidoptera)	137
---	-----

ФИЗИОЛОГИЯ

<i>К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, А. С. Тираян</i> —О влиянии некоторых ингибиторов на медленноволновую активность гладкомышечных клеток мочеочника.	140
--	-----

CONTENTS

P.

MATHEMATICS

- B. S. Nahapetian*—Limit theorems for weakly dependent random variables 99
T. E. Pillposian—On the planary realized hypergraphs 102
A. V. Karabegov—On polynomial extensions of $C(X)$ 107
G. A. Karagulian—On the convergence subsystems and on divergence of the double Fourier series by complete orthonormal systems 112
S. S. Martirosian—New construction of basic uniquely — decodable codes for multiple — access adder channel. 116

THEORY OF ELASTICITY

- S. G. Sahakian*—The inhomogeneous elastic media for which the vector wave equation is separated into independent scalar equations 121

THEORY OF CREEP

- F. M. Poladian*—The non-linear creep of the circular ring section with a rectangular cross section under torsion 125

PHYSICS

- E. A. Hakopian, H. H. Matevosian*—Formation of boundary states by fast charged particles in plasma 130

PHYSICAL CHEMISTRY

- A. A. Hovhanesian, K. S. Halrapetian, A. V. Gukasian, P. S. Kinoyan*—On chemism of reactions of initiation of monomer radicals in aqueous solution of potassium persulphate saturated by styrene 134

BIOLOGY

- H. G. Khatchatrian*—Changes of ecdysone titre by accumulation of photoperiodic signals in *Barathra brassicae* L. (Noctuidae, Lepidoptera) 137

PHYSIOLOGY

- K. V. Kasarian, V. Ts. Vansian, A. S. Tirayan*—The influence of some inhibitors on the slow wave activity of smooth muscle cells of the ureters . 140

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 21.02.86 г. Подписано к печати 11.06.86 г. ВФ 07346.

Бумага № 2, 70×108^{1/16}. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет, изд. 3.1 л. Тираж 455. Заказ 145. Издат. 6771.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 376310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

К предельным теоремам для зависимых случайных величин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 11/XI 1984)

В настоящей заметке мы приведем две теоремы относительно асимптотической нормальности сумм зависимых случайных величин.

Пусть ξ_t , $t \in Z^1$, стационарный случайный процесс, принимающий значения в R^1 . Говорят, что данный процесс удовлетворяет условию сильного перемешивания (с. п.), если неравенство

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \alpha(n), \quad (1)$$

где $n \in N$, $\alpha(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, выполнено для всех $A \in m_{-\sigma}^0$, $B \in m_n^{+\sigma}$, $n \in N$. Здесь m_a^b — σ -алгебра, порожденная случайными величинами ξ_t , $a < t < b$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Говорят также, что для данного процесса справедлива центральная предельная теорема (ц. п. т.), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall x, x \in R^1,$$

где $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, M и D — символы математического ожидания и дисперсии, соответственно.

Всюду в дальнейшем будут рассматриваться случайные процессы, для которых $M\xi_t = 0$, $t \in Z^1$, $DS_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Для случайных процессов, удовлетворяющих условию сильного перемешивания (1), хорошо известны следующие две теоремы Ибрагимова (см. (1), с. 440):

Теорема 1 (Ибрагимов). Пусть стационарный случайный процесс ξ_t , $t \in Z^1$ удовлетворяет условию с. п. (1) и $M|\xi_0|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty, \text{ то } \sigma^2 = M\xi_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_0\xi_n < \infty,$$

и если, кроме того, $\sigma \neq 0$, то для процесса справедлива ц. п. т.

Теорема 2. (Ибрагимов). Пусть стационарный случайный процесс ξ_t , $t \in Z^1$ удовлетворяет условию с. п. (1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) < \infty.$$

Пусть, кроме того, $|\xi_n| < C < \infty$ с вероятностью 1. Тогда $\sigma^2 = M\xi_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_0 \xi_n < \infty$, и если $\sigma \neq 0$, то для процесса справедлива ц. п. т.

В связи с этими теоремами Ибрагимова Давыдовым ⁽³⁾ были построены примеры стационарных случайных процессов, удовлетворяющие одному из нижеследующих условий а), б), в):

$$\text{а) } M|\xi_0|^{2+\delta-\varepsilon} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty, \varepsilon > 0, \delta > 0, 2+\delta-\varepsilon > 0;$$

$$\text{б) } M|\xi_0|^{2+\delta} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}+\varepsilon} < \infty, \varepsilon > 0, \delta > 0;$$

$$\text{в) } |\xi_n| < C < \infty \text{ с вероятностью 1, } \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n))^{1+\varepsilon} < \infty, \varepsilon > 0,$$

но для которых ц. п. т. не выполняется.

Необходимо отметить, что все примеры Давыдова характеризуются тем, что для них не выполнено свойство правильного роста дисперсии суммы случайных величин S_n , т. е. не имеет места представление $DS_n = nh(n)$, где $h(n)$ медленно меняющаяся функция натурального аргумента, которое является необходимым условием справедливости ц. п. т. Отметим также, что правильный рост дисперсии суммы случайных величин из условий теорем Ибрагимова следует. Из вышесказанного ясно, что имеет смысл ставить задачу отыскания условий справедливости ц. п. т. в классе стационарных случайных процессов, которые удовлетворяют условию с. п. и для которых $DS_n = nh(n)$. Всюду в дальнейшем $h(n)$ — медленно меняющаяся функция натурального аргумента продолжается на всю вещественную ось. В этом направлении нами получены следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть стационарный случайный процесс $\xi_t, t \in Z^1$, удовлетворяет условию с. п. (1), $M\xi_0^2 < \infty, DS_n = nh(n)$. Тогда для справедливости ц. п. т. необходимо и достаточно, чтобы последовательность $S_n(DS_n)^{-\frac{1}{2}}$ была бы равномерно интегрируемой *.

Здесь отметим интересный результат Херндорфа ⁽³⁾. Оказывается, что для любой числовой последовательности $\varepsilon_n > 0, n \in N$, всегда можно построить ортогональный стационарный процесс

$$\xi_t, t \in Z^1, M\xi_0 = 0, M\xi_0^2 < \infty, DS_n = \sigma^2 n, \sigma^2 > 0,$$

удовлетворяющий условию с. п. с $\alpha(n) \leq \varepsilon_n$, но для которого ц. п. т. не выполняется. С этим результатом интересно сопоставить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\xi_t, t \in Z^1$, стационарный случайный процесс, удовлетворяющий условию с. п. (1), $M\xi_0^2 < \infty, DS_n = nh(n)$. Тог-

* Последовательность случайных величин $\xi_n, n \in N$ называется равномерно интегрируемой, если $\int |\xi_n| P(d\omega) \rightarrow 0$ при $C \rightarrow \infty$ равномерно по n .
 $|\xi_n| > C$

да любая сходящаяся к невырожденному распределению подпоследовательность последовательности $S_n(DS_n)^{-\frac{1}{2}}$ асимптотически гауссова с дисперсией β такой, что $0 < \beta \leq 1$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Р. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Սահմանային թեորեմներ թույլ կախյալ պատահական մեծությունների համար

Աշխատանքում բերվում են նոր թեորեմներ ուժեղ խառնուրդին բավարարող ստացիոնար պատահական պրոցեսների համար կենտրոնական սահմանային պրոբլեմի վերաբերյալ: Ստացված են պարզ անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ: Հատուկ նշենք, որ ի տարբերություն հայտնի պայմանների, ստացված թեորեմներում խառնուրդի գործակիցը կարող է ձգտել զրոյի կամայական արագությամբ:

Մասնավորապես տեղի ունի հետևյալ արդյունքը՝

Թեորեմ. Դիցուք ξ_t , $t \in Z^1$, ստացիոնար պատահական պրոցես է, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq a(n), \quad n \in N, \quad a(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$A \in m_{-\infty}^0, \quad B \in m_n^{+\infty}, \quad M\xi_t = 0, \quad DS_n = nh(n), \quad m_a^b,$$

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

հանրահաշիվ է, ծնված է՝ պատահական մեծություններով, $a \leq t \leq b$: Ապա որպեսզի կենտրոնական սահմանային թեորեմը լինի բավարարված, անհրաժեշտ է և բավարար ξ_t , $t \in Z^1$, պատահական մեծությունների հավասարաչափ ինտեգրելիությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1965. ² Ю. А. Давыдов, Теория вероятности и ее применения, т. 17, № 2 (1973). ³ N. Heyvndorf, Ann. Prob., № 3, 11 (1983).

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Т. Э. Пилипосян

О планарно реализуемых гиперграфах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 30/XI 1984)

Пусть на множестве вершин* X заданы гиперграф $H=(X, \mathcal{E})$ и граф $G=(X, U)$ со множествами ребер $\mathcal{E}$ и U соответственно. Скажем, что граф G является реализацией гиперграфа H , если для любого ребра $E \in \mathcal{E}$ подграф $\langle E \rangle_G$, порожденный множеством вершин $E \subseteq X$, является связным. Гиперграф, имеющий планарную реализацию, назовем планарно реализуемым (или планарным⁽³⁾).

Ясно, что любой граф (если его рассмотреть как гиперграф) сам является для себя реализацией и, следовательно, непланарный граф не может быть планарно реализуемым. В частности $K_{3,3}$, имеющий девять ребер, не является планарно реализуемым.

Наша цель найти то наименьшее целое число q , при котором все гиперграфы с не более чем q ребрами являются планарно реализуемыми. Из вышесказанного следует, что $q < 9$. Известно⁽³⁾, что $q \geq 6$. Мы покажем, что $q=8$, т. е. докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякий гиперграф с не более чем восьмью ребрами является планарно реализуемым.

Прежде чем доказать теорему, введем несколько обозначений и докажем вспомогательные утверждения.

Для множества $A \subset X$ через H_A обозначим подгиперграф гиперграфа $H=(X, \mathcal{E})$, порожденный теми его ребрами, которые не инцидентны вершинам из A . Количество ребер гиперграфа H , инцидентных вершине $x \in X$, обозначим через $d_H(x)$ и назовем степенью вершины x в H . Наибольшую из степеней вершин гиперграфа H обозначим через $\Delta(H)$. Гиперграф назовем интервальным, если его можно реализовать простой цепью.

Утверждение 1. Если гиперграф имеет три ребра и два из них между собой не смежны, то он является интервальным. Если каждая компонента гиперграфа содержит не более двух ребер, то он является интервальным.

Утверждение 2. Если в гиперграфе можно выделить одну или две вершины таким образом, чтобы подгиперграф, порожденный остальными (не инцидентными выделенным вершинам) ребрами, стал интервальным, то гиперграф планарно реализуем.

Доказательство. Действительно, планарную реализацию та-

* Все не приведенные здесь определения можно найти в (1) и (2).

кого гиперграфа можно построить, соединив каждую из выделенных вершин с вершинами, которые смежны с ней в гиперграфе, и построив соответствующую простую цепь на множестве вершин интервального подгиперграфа (рис. 1).

Доказательство теоремы. Пусть H гиперграф с 8 ребрами E_i , где $i \in \overline{1, 8}$ и $X = \bigcup_{i=1}^8 E_i$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) $\Delta(H) \geq 4$; 2) $\Delta(H) = 3$; 3) $\Delta(H) = 2$.

Случай 1. $\Delta(H) \geq 4$. Пусть $d_H(x) = \Delta(H)$, где $x \in X$. Если $\Delta(H_{\{x\}}) \leq 1$, то $H_{\{x\}}$ является интервальным и, следовательно, H — планарно реализуемым (рис. 1, б). Если $\Delta(H_{\{x\}}) \geq 2$ и $d_{H_{\{x\}}}(y) = \Delta(H_{\{x\}})$, то $H_{\{x,y\}}$ имеет не более двух ребер и является интервальным. Значит H планарно реализуем (рис. 1, а).

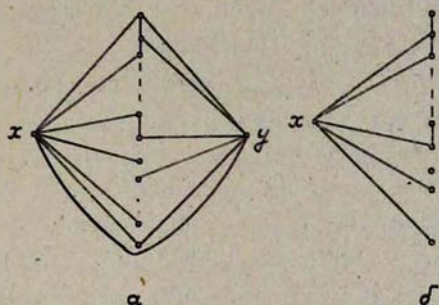


Рис. 1

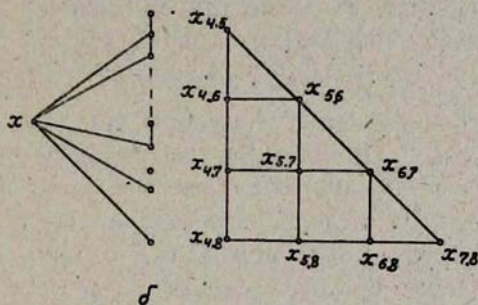


Рис. 2

Случай 2. $\Delta(H_{\{x\}}) = 3$. Здесь возможны несколько подслучаев. (2.1). В H можно выделить вершину x , где $d_H(x) = \Delta(H)$, таким образом, чтобы $\Delta(H_{\{x\}}) = 3$.

Доказательство планарно реализуемости H в этом случае аналогично доказательству случая 1.

(2.2). Для любой вершины x с максимальной степенью в H $\Delta(H_{\{x\}}) = 2$, и этот x можно выбрать таким образом, чтобы среди пяти ребер гиперграфа $H_{\{x\}}$ нашлась хотя бы одна пара несмежных.

Пусть x уже выбрали и в $H_{\{x\}}$ несмежными являются ребра E и F .

Если среди остальных ребер K, L, M гиперграфа $H_{\{x\}}$ имеются смежные, то возьмем любую вершину y , инцидентную двум из них. Тогда из трех ребер $H_{\{x,y\}}$ два неинцидентны (именно E и F) и, согласно утверждению 1, $H_{\{x,y\}}$ является интервальным. По утверждению 2 H планарно реализуем.

(2.3). Для любой вершины x с максимальной степенью в H $\Delta(H_{\{x\}}) = 2$, и произвольные два из пяти ребер гиперграфа $H_{\{x\}}$ смежны.

Пусть x — некоторая такая вершина. Без ограничения общности предположим, что она инцидентна с ребрами E_1, E_2, E_3 . Возможны два случая.

(2.3.1). Существуют числа i_0, j_0 , где $4 \leq i_0 < j_0 \leq 8$, такие, что для любого $k \in \overline{1, 3}$ $E_{i_0} \cap E_{j_0} \cap E_k = \emptyset$.

Перенумеруем ребра H таким образом, чтобы $i_0=5$, $j_0=7$. Выберем из множеств $E_i \cap E_j$, где $i, j \in \overline{4, 8}$, по одному элементу $x_{i,j}$ и построим граф $\bar{G}$ (рис. 2). Дополним $\bar{G}$ до реализации G для H , указав плоскую укладку графа G .

Все вершины множества $E_i \cap E_j$, где $i, j \in \overline{4, 8}$, соединим с вершиной $x_{i,j}$ и разместим во внешней грани графа $\bar{G}$ около вершины $x_{i,j}$, кроме вершин множества $E_5 \cap E_7$, которые разместим в одной из смежных $x_{5,7}$ граней (например в треугольнике $x_{5,8}$, $x_{5,7}$, $x_{6,7}$). Кроме того, все неразмещенные на плоскости вершины, инцидентные с одним из ребер E_4 и E_8 , разместим во внешней грани $\bar{G}$ около вершины $x_{4,8}$ и подсоединим с ней. Неразмещенные вершины, инцидентные с E_l , где $l=5, 6, 7$, разместим около вершины $x_{4,l}$ (также во внешней грани $\bar{G}$) и соединим с $x_{4,l}$. Вершину x и все остальные неразмещенные вершины H разместим во внешней грани $\bar{G}$ и x подсоединим со всеми вершинами множества $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Поскольку $E_5 \cap E_7 \cap E_l = \emptyset$, $l \in \overline{1, 3}$, то все вершины множества $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ лежат во внешней грани $\bar{G}$, и полученный граф G будет плоским. G будет также реализацией для H . Действительно, подграфы $\langle E_l \rangle_G$, где $l=1, 2, 3$, связаны, поскольку они содержат остовную звезду с центром x . Подграф $\langle E_4 \rangle_G$ связан, поскольку его вершины либо принадлежат цепи $x_{4,5}$, $x_{4,6}$, $x_{4,7}$, $x_{4,8}$, либо смежны в G с одной из ее вершин. То же самое имеет место и для множества E_5 и цепи $x_{4,5}$, $x_{5,6}$, $x_{5,7}$, $x_{5,8}$, множества E_6 и цепи $x_{4,6}$, $x_{5,6}$, $x_{6,7}$, $x_{6,8}$, множества E_7 и цепи $x_{4,7}$, $x_{5,7}$, $x_{6,7}$, $x_{7,8}$, множества E_8 и цепи $x_{4,8}$, $x_{5,8}$, $x_{6,8}$, $x_{7,8}$.

(2.3.2). Для любых i, j , где $4 \leq i < j \leq 8$, существует $k \in \overline{1, 3}$ такое, что $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$.

Сначала докажем, что этот k один-единственный для всех пар i, j , т. е. существует $k \in \overline{1, 3}$ такое, что для любых чисел i, j, p , где $4 \leq i < j \leq 8$ и $k \in \overline{1, 3}$, множество $E_i \cap E_j \cap E_p$ пусто при $p \neq k$, и непусто при $p = k$.

Заметим, что не могут существовать шесть попарно различных индексов i, j, r, m, n, p таких, что $E_i \cap E_j \cap E_r \neq \emptyset$ и $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$, поскольку имело бы место (2.1) (для вершины $u \in E_i \cap E_j \cap E_r$ имели бы $\Delta(H) = 3$, $\Delta(H_{(x)}) = 3$). На этом и основано доказательство единственности k .

Пусть для $i, j \in \overline{4, 8}$ и $k \in \overline{1, 3}$, $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$, и пусть $m, n \in \overline{4, 8}$, $p \in \overline{1, 3}$. Докажем, что $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $p = k$.

Предположим обратное, т. е. $k \neq p$, но $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$. Случай $n = i$ и $m = j$ исключается, поскольку тогда для отличных от i и j чисел l и t , где $4 \leq l < t \leq 8$, множество $E_l \cap E_t$ не может пересекаться ни с одним из множеств E_1, E_2, E_3 (так как $E_l \cap E_j$ пересекается с двумя из них), что соответствует (2.3.1). Предположим, что из чисел m, n, i, j два совпадают, например $n = i$, $m \neq j$. Тогда для остальных (отличных от m, i, j) чисел l и t множества $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ множество $E_l \cap E_t$ также не может пересекаться ни с одним из мно-

жеств E_1, E_2, E_3 (поскольку $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset, E_i \cap E_m \cap E_p \neq \emptyset$, то при $E_i \cap E_j \cap E_d \neq \emptyset$, где $d \in \overline{1, 3}$, имел бы место случай 2), что соответствует (2.3.1). Аналогичным образом получим противоречие при $i \neq n, j \neq m$. Полученные противоречия показывают, что $k=p$.

Без ограничения общности предположим, что $k=1$, т. е. $E_i \cap E_j \cap E_1 \neq \emptyset$, а $E_i \cap E_j \cap E_2 = E_i \cap E_j \cap E_3 = \emptyset$ при всех $4 \leq i < j \leq 8$. Из всех множеств $E_i \cap E_j \cap E_1$ выберем по одной вершине $x_{i,j}$ и построим граф $\tilde{G}$ (рис. 2). Все остальные построения сделаем таким же образом, как и в случае 2.3.1, с той лишь разницей, что вершину x не будем соединять с вершинами множества $E_5 \cap E_7 \cap E_1$ (они лежат во внешней грани $\tilde{G}$). Полученный граф G плоский, кроме того он является реализацией для H . Связность подграфов $\langle E_i \rangle_G$, где $i \in \overline{2, 8}$, доказывается так же, как и в (2.3.1). Связность подграфа $\langle E_1 \rangle_G$ следует из того, что все вершины, принадлежащие E_1 , в G смежны либо с x , либо с одной из вершин $x_{i,j}$, которые, в свою очередь, принадлежат E_1 и все, кроме $x_{5,7}$, смежны с вершиной x .

Случай 3. $\Delta(H)=2$.

(3.1). В H можно выбрать четыре вершины x, y, z, u таким образом, чтобы каждое ребро было инцидентно хотя бы одному из них.

Граф G построим, соединив каждую из вершин x, y, z, u со смежными с ней в H вершинами. В полученном графе степени всех вершин, кроме x, y, z, u , не больше двух, поскольку в H каждая вершина инцидентна не более чем двум ребрам. По теореме Понтрягина—Куратовского этот граф планарен, поскольку он не может содержать подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5 (в $K_{3,3}$ имеются 6 вершин степени больше двух, в K_5 — 5, а в G — 4).

(3.2). В H можно выбрать три вершины x, y, z таким образом, чтобы им были инцидентны 6 ребер гиперграфа H , но как бы ни выбрали эти вершины, остальные два ребра гиперграфа H не будут смежными.

Из этих (остальных) двух ребер выберем по одной вершине u и v . Реализацию для H построим, соединив ребром каждую из вершин x, y, z, u, v со смежными с ней в H вершинами. В полученном графе могут быть только 5 вершин степени больше двух. Значит он не может содержать подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$. Докажем, что он не может содержать и подграфа, гомеоморфного K_5 . Действительно, в гомеоморфном K_5 подграфе любую пару из пяти вершин K_5 можно соединять цепью, которая не проходит ни через одну из остальных трех вершин, т. е. проходит только через вершины степени два. В нашем же случае цепь, соединяющая вершины u и v , должна проходить через одну из вершин x, y, z , поскольку ребра гиперграфа, из которых выбраны u и v , не смежны в H и не существует вершины w , которая была бы смежна в графе и с u , и с v .

(3.3). В гиперграфе H можно выбрать пару вершин x, y таким образом, чтобы $d_H(x) = \Delta(H) = 2, d_{H_{\{x\}}}(y) = 2 = \Delta(H_{\{x\}})$, но как бы ни выбрали эти вершины x и $y, \Delta(H_{\{x,y\}}) = 1$.

Теперь, как и в (3.4), когда как бы ни выбрали вершину x , для которой $d_H(x) = \Delta(H) = 2$, для гиперграфа H_x $\Delta(H_x) = 1$, планарно реализуемость гиперграфа H следует из утверждений 1 и 2.

Теорема доказана.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Հարթ իրացնելի հիպերգրաֆների մասին

Դիցուք G գրաֆը և H հիպերգրաֆն ունեն գագաթների նույն բազմությունը: Կասենք, որ G հանդիսանում է H իրացում, եթե H -ի ցանկացած կողին պատկանող գագաթների բազմությունը G -ում ծնում է կապակցված ենթագրաֆ: Հարթ իրացում ունեցող գրաֆը կոչվում է հարթ իրացնելի:

Պարզ է, որ ամեն մի գրաֆ (եթե այն դիտարկենք նաև որպես հիպերգրաֆ) ինքն իրեն համար հանդիսանում է իրացում: Հետևաբար ոչ հարթ գրաֆը չի կարող լինել հարթ իրացնելի: Մասնավորապես, ինքը կող ունեցող $K_{3,3}$ գրաֆը հարթ իրացնելի չէ: Մեր նպատակն է գտնել այն ամենափոքր q ամբողջ թիվը, որ q -ից ոչ ավելի թվով կողեր ունեցող ցանկացած հիպերգրաֆ լինի հարթ իրացնելի: Վերը նշվածից հետևում է, որ $q < 9$: ⁽¹⁾-ում ցույց է տրված, որ $q \geq 6$: Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ $q = 8$, այսինքն, ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Ութից ոչ ավելի կողեր ունեցող ցանկացած հիպերգրաֆ իրացնելի է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Փ. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² C. Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970. ³ А. А. Волошина, В. З. Фейнберг, ДАН БССР, т. 28, № 4 (1984).

УДК 517.986.225

МАТЕМАТИКА

А. В. Карабегов

О полиномиальных расширениях $C(X)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/II 1985)

0°. Пусть A и B — коммутативные унитарные банаховы алгебры. Будем говорить, что B является полиномиальным расширением алгебры A , если существует сохраняющий единицу инъективный изометрический гомоморфизм Φ из A в B такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & B \\ I \downarrow & & \downarrow \Psi \\ & A[x_1, \dots, x_n] & \end{array} \quad (1)$$

коммутативна, где I — естественное вложение A в алгебру полиномов над A от n неизвестных $x_1, \dots, x_n$, а Ψ — некоторый эпиморфизм ⁽¹⁾.

Отметим, что если B является полиномиальным расширением алгебры A , многие свойства алгебры B можно описать через известные свойства алгебры A (например, пространство максимальных идеалов, границу Шилова и пр.). Поэтому если A и B — две унитарные банаховы алгебры, естественно поставить вопрос, является ли B полиномиальным расширением алгебры A .

В данной работе дается ответ на этот вопрос в случае, когда $A = C(X)$, $B = C(Y)$, где $C(X)$ и $C(Y)$ — банаховы алгебры всех непрерывных функций на компактах X и Y соответственно.

1°. Пусть задан непрерывный инъективный гомоморфизм Φ алгебры $C(X)$ в алгебру $C(Y)$. Тогда определено двойственное отображение $\pi: Y \rightarrow X$, сюръективное и такое, что $\Phi f = f \circ \pi$ для $f \in C(X)$.

Введем, следуя Линдбергу ⁽²⁾, следующее

Определение. Окрестность $V \subset Y$ называется регулярной, если для любого $x \in X$ $\text{card}(V \cap \pi^{-1}(x)) \leq 1$, и сильно регулярной, если ее замыкание лежит в некоторой большей регулярной окрестности.

Заметим, что не всякая регулярная окрестность сильно регулярна.

Будем называть сюръекцию π регулярной, если у каждой точки $y \in Y$ есть регулярная окрестность.

Лемма 1. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ регулярна. Тогда существует конечный набор функций из $C(Y)$, разделяющих для каждого $x \in X$ точки множества $\pi^{-1}(x)$.

Лемма 2. Пусть непрерывная сюръекция $\pi: Y \rightarrow X$ регулярна и выбраны функции $f_1, \dots, f_m$ из $C(Y)$, разделяющие, в совокупнос-

ти, для каждого $x \in X$ точки множества $\pi^{-1}(x)$. Тогда всякую функцию $f \in C(Y)$ можно представить в виде полинома от $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$.

Доказательство. Пусть $V \subset Y$ сильно регулярная окрестность. Тогда любая функция f , непрерывная на $\bar{V}$, представима в виде $f = g \circ \pi$ на $\bar{V}$, где g — непрерывная функция на X . Действительно, рассмотрим компакт $\bar{V} \subset W$, где W — регулярная окрестность. Отображение $\pi: \bar{V} \rightarrow \pi(\bar{V})$ — непрерывное, биективное отображение компактов, следовательно, это гомеоморфизм. Отображение $\tau: \pi(\bar{V}) \rightarrow \bar{V}$ позволяет определить функцию $f \circ \tau$, непрерывную на $\pi(\bar{V})$. Продолжим ее по непрерывности на весь компакт X . Полученная функция g искома.

Поскольку сюръекция π регулярна, существует конечное покрытие компакта Y регулярными окрестностями. Для любой точки $x \in X$ имеем $\text{card} \pi^{-1}(x) \leq N$, где N — число элементов покрытия, поскольку различные точки прообраза $\pi^{-1}(x)$ покрыты различными регулярными окрестностями.

Пусть $\pi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Возьмем две различные точки из $\pi^{-1}(x)$, скажем, y_1 и y_2 . Среди функций $f_1, \dots, f_m$ найдется функция f_k такая, что $f_k(y_1) \neq f_k(y_2)$. Выберем сильно регулярную окрестность V_1 точки y_1 и функцию $g \in C(X)$ такую, что $f = g \circ \pi$ на $\bar{V}_1$. Поэтому $(f_k - g \circ \pi)(y_1) = 0$ и, следовательно, $(f_k - g \circ \pi)(y_2) \neq 0$. Найдется сильно регулярная окрестность V_2 точки y_2 такая, что $f_k - g \circ \pi$ не обращается в ноль на $\bar{V}_2$. Тогда можно выбрать не обращающуюся в ноль функцию $h \in C(X)$ такую, что $h \circ \pi = f_k - g \circ \pi$ на $\bar{V}_2$. Тогда функция $f_{12} = \frac{1}{h \circ \pi} (f_k - g \circ \pi)$ обращается в ноль на V_1 , в единицу на V_2 и является линейным многочленом от f_k с коэффициентами из $C(X)$. Рассматривая соответствующие функции f_{ij} для всех пар $y_i, y_j \in \pi^{-1}(x)$, легко построить $n = \text{card} \pi^{-1}(x)$ окрестностей $W_1 \ni y_1, \dots, W_n \ni y_n$ и n полиномов $p_1, \dots, p_n$ от функций $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$ таких, что $p_i(f_1, \dots, f_m)(y) = \delta_{ij}$ при $y \in W_j$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Построим теперь окрестность U точки $x \in X$ такую, что

$$\pi^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^n (W_j \cap \pi^{-1}(U)). \quad (2)$$

Поскольку $Y \setminus \bigcup_{j=1}^n W_j$ — компакт в Y , то $\pi(Y \setminus \bigcup_{j=1}^n W_j)$ — компакт в X , не содержащий точку $x \in X$, следовательно, найдется окрестность U точки x , не пересекающаяся с этим компактом. Окрестность U удовлетворяет условию (2).

Для каждой точки $x \in X$ проведем вышеописанную конструкцию и покроем X соответствующими окрестностями U_x . Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_s$ и построим подчиненное ему разбиение единицы $\varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Пусть $f \in C(Y)$. Тогда $f = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \circ \pi) \cdot f$. Покажем, что каждое из слагаемых $(\varphi_i \circ \pi) \cdot f$ представимо в виде полинома от $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$. Пусть $U = U_i$, $\text{supp } \varphi_i \subset U$. Выберем функции $g_1, \dots, g_n$ из $C(X)$ такие, что $f = g_i \circ \pi$ на $W_i \cap \pi^{-1}(U)$. Тогда $f = \sum_{i=1}^n p_i(f_1, \dots, f_m) \cdot (g_i \circ \pi)$ на $\pi^{-1}(U)$. Но тогда на всем Y имеем

$$(\varphi_i \circ \pi) \cdot f = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \circ \pi)(g_i \circ \pi) p_i(f_1, \dots, f_m). \text{ Лемма доказана.}$$

Лемма 3. Пусть выбраны функции $f_1, \dots, f_m$ из $C(Y)$ и существует точка $y_0 \in Y$, не обладающая регулярной окрестностью. Тогда найдется функция $f \in C(Y)$, не представимая в виде полинома от $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$.

Доказательство. Если найдутся точки $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ и $f_i(y_1) \neq f_i(y_2)$ для всех $i = 1, \dots, m$, достаточно выбрать функцию f , разделяющую точки y_1 и y_2 . Далее будем считать, что функции $f_1, \dots, f_m$ разделяют в совокупности точки множества $\pi^{-1}(x)$ для каждого данного $x \in X$.

Переходя, если необходимо, к функциям $f_i(y) - f_i(y_0)$, считаем, что $f_i(y) = 0$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Будем строить индукцией по n тройки окрестностей U_n, V_n, W_n , удовлетворяющих следующим требованиям:

- 1) U_n, V_n, W_n попарно не пересекаются;
- 2) $U_n \supset V_{n+1} \cup W_{n+1}$;
- 3) $\sup_i |f_i(y)| < \frac{1}{n}$ при $y \in U_n$.
- 4) существуют такие $y_n \in V_n, z_n \in W_n$, что $\pi(y_n) = \pi(z_n)$.

В качестве U_n надо брать окрестность точки y_0 , удовлетворяющую условию 3. Поскольку y_0 не обладает регулярной окрестностью, найдутся точки $y_{n+1}, z_{n+1} \in U_n$ такие, что $\pi(y_{n+1}) = \pi(z_{n+1})$, $y_{n+1} \neq z_{n+1}$.

Рассмотрим компакт $K = \overline{\{y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots\}}$. Заметим, что точки y_n, z_n дискретны в относительной топологии K . Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \sup_i |f_i(y_n) - f_i(z_n)|$. Согласно предположению, сделанному в начале доказательства, функции f_i разделяют точки прообраза $\pi^{-1}(x)$ для каждого $x \in X$, поэтому $a_n > 0$. Из условий 2—4 следует, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю. Определим функцию f на K следующим образом: $f(y_n) = \sqrt{a_n}$, $f = 0$ в остальных точках K . В дискретных точках y_n, z_n функция f непрерывна. Пусть $y \in K \setminus \{y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots\}$. Тогда $f(y) = 0$ и найдется окрестность V точки y такая, что $y_k \notin V$ при $k < n$. Поэтому для всех $z \in V$ имеем $f(z) < \frac{1}{n}$ и, следовательно, f непрерывна на K . Продолжим функцию f на весь компакт Y по непрерывности. Предполо-

жим, что нашелся полином p с коэффициентами из $C(X)$ такой, что $f = p(f_1, \dots, f_m)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{a_n} &= f(y_n) - f(z_n) = p(f_1, \dots, f_m)(y_n) - p(f_1, \dots, f_m)(z_n) = \\ &= (f_1(y_n) - f_1(z_n))Q_1(y_n, z_n) + \dots + (f_m(y_n) - f_m(z_n))Q_m(y_n, z_n),\end{aligned}$$

где $Q_i(y, z) = q_i(f_1(y), \dots, f_m(y), f_1(z), \dots, f_m(z))$ и q_i — многочлен с коэффициентами из $C(X)$.

Поскольку $Q_i(y, z)$ ограничена на $Y \times Y$, имеет место оценка $\sqrt{a_n} = |(f_1(y_n) - f_1(z_n))Q_1(y_n, z_n) + \dots + (f_m(y_n) - f_m(z_n))Q_m(y_n, z_n)| < C a_n$. Но поскольку $a_n > 0$ для всех n и $\{a_n\}$ сходится к нулю, при больших n оценка не выполняется, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

2°. Из лемм 1—3 немедленно следует

Теорема 4. *Алгебра $C(Y)$ является полиномиальным расширением алгебры $C(X)$ тогда и только тогда, когда существует регулярное отображение π из Y в X .*

Пусть B — коммутативная банахова алгебра, являющаяся полиномиальным расширением алгебры $C(X)$. Пусть M_B — пространство максимальных идеалов алгебры B , π — естественная сюръекция M_B на X , двойственная вложению Φ из диаграммы (1) и $\hat{B}$ — преобразование Гельфанда алгебры B .

Теорема 5. *Преобразование Гельфанда $\hat{B}$ алгебры B совпадает с алгеброй $C(M_B)$ всех непрерывных функций на M_B тогда и только тогда, когда сюръекция π регулярна.*

Воспользовавшись теоремой 5 и результатами Линдберга. (3,3), можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть B является расширением Аренса—Гофмана (4) алгебры $C(X)$, ассоциированным с полиномом $\alpha(t)$. Для того чтобы $\hat{B} = C(M_B)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0 \in X$ нашлась бы такая ее окрестность U , что*

$$\alpha(t)(x) = \prod (t - \lambda_i(x))^{m_i} \quad (3)$$

для $x \in U$ и некоторых непрерывных на U функций $\lambda_i(x)$ таких, что $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$ для всех $x \in U$ и всех $i \neq j$.

Отметим, что если хотя бы один из показателей m_i в формуле (3) больше единицы, то алгебра B будет иметь нетривиальный радикал.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Пример. Существует такая полупростая банахова алгебра B , что $M_B = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 — компакты, $X_1 \cap X_2$ состоит из одной точки, $\hat{B}|_{X_1} = C(X_1)$, $\hat{B}|_{X_2} = C(X_2)$, причем $\hat{B} \neq C(M_B)$.

Автор выражает глубокую признательность С. А. Григоряну за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

$C(X)$ -ի պոլինոմիալ ընդլայնումների մասին

Դիցուք A -ն և B -ն կոմուտատիվ ունիտալ բանախական հանրահաշիվներ են: Ասենք, որ B -ն A հանրահաշիվի պոլինոմիալ ընդլայնումն է, եթե գոյություն ունի միավորը պահպանող ինյեկտիվ Φ հոմոմորֆիզմ A -ից B ալեպես, որ՝

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & B \\ I \downarrow & & \downarrow \Psi \\ & A[x_1, \dots, x_n] & \end{array}$$

դիագրաման կոմուտատիվ է, որտեղ I -ն A հանրահաշիվի բնական ներդրումն է A -ից գործակիցներով $x_1, \dots, x_n$ անհայտից կախված բազմանդամների հանրահաշիվի մեջ, իսկ Ψ -ն որևէ էպիմորֆիզմ է:

Դիցուք $C(X)$ և $C(Y)$ X և Y կոմպակտի վրա բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների բանախական հանրահաշիվներ են: Ամեն մի $C(X)$ -ը $C(Y)$ -ի մեջ հոմոմորֆ ներդրմանը համապատասխանում է $\pi: Y \rightarrow X$ սլուրեկցիա:

π սլուրեկցիան կանվանենք *ռեզուլյար*, եթե $y \in Y$ ցանկացած կետը ունի ալեպիսի V շրջակայք, որ $\text{card } V \cap \pi^{-1}(x) \leq 1$ ցանկացած $x \in X$ համար:

Թեև որեւէ $C(Y)$ հանրահաշիվը կլինի $C(X)$ հանրահաշիվի պոլինոմիալ ընդլայնում այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\pi: Y \rightarrow X$ ռեզուլյար սլուրեկցիա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. А. Григорян, УМН, т. 39, вып. 1 (235) (1984). ² J. A. Lindberg, Trans. Amer. Math. Soc., v. 112, № 2 (1964). ³ J. A. Lindberg, Pacific J. Math., v. 14 (1964). ⁴ R. Arens, K. Hoffman, Proc. Amer. Math. Soc., v. 7 (1956). ⁵ Дж. Л. Келли, Общая топология, Наука, М., (1981).

УДК 517.518.3

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карагулян

О подсистемах сходимости и о расходимости двойных рядов Фурье по полным ортонормированным системам

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 14/V 1985)

Известна следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо друг от друга Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем (см. ^(1,2)):

Теорема А. Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, существуют номера $n_1 < n_2 < \dots$ такие, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости. (ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если всякий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ сходится почти всюду).

По этому поводу в работе ⁽³⁾ Г. Беннетом был поставлен следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k/r_k = 0$?

В работе ⁽⁴⁾ Б. С. Кашиным дан положительный ответ на этот вопрос. В ней сформулирована следующая

Теорема В. Из произвольной ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k < R_k$ ($k=1, 2, \dots$), где

$$R_1 = 3, R_{k+1} = (R_k)! \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1)$$

В той же работе ⁽⁴⁾ В. С. Кашин поставил следующий вопрос: можно ли в формулировке теоремы В последовательность (1) заменить на последовательность $k^{1+\varepsilon}$ ($k=1, 2, \dots$) для любого $\varepsilon > 0$?

В настоящей работе усилен результат теоремы В. Точнее, справедлива следующая

Теорема 1. Для любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$ и любого $\beta > 0$ существует подсистема сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с условием $n_1 = 1, 2^{(\beta+2)(k-1)\log_2(k-1)} < n_k \leq 2^{(2+\beta)k\log_2 k}$ ($k \geq 2$).

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах:

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$, $x \in (0, 1)$, конечная ОНС и $\{E_l\}_{l=1}^m$ семейство измеримых множеств из $(0, 1)$. Тогда существует целое число $1 \leq k \leq n$ такое, что

$$\frac{1}{\mu(E_p)} \left| \int_{E_p} \varphi_k(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{m}{n \cdot \min_{1 \leq l \leq m} \mu(E_l)}}, \quad p=1, 2, \dots, m.$$

Лемма 2. Пусть ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, и семейства множеств из $(0, 1)$ $\{E_i^{(n)}; i \in Q^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $Q^{(n)} (n \geq 1)$ есть множество индексов i , удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \mu\left(\bigcup_{i \in Q^{(n)}} E_i^{(n)}\right) = 1, \mu(E_i^{(n)}) > 0, i \in Q^{(n)}, n = 1, 2, \dots;$$

$$2) E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)} = \emptyset \text{ при } i \neq j, i, j \in Q^{(n)} (n = 1, 2, \dots);$$

$$3) \text{ если } E_i^{(n)} \cap E_j^{(m)} \neq \emptyset (n \geq m), \text{ то } E_i^{(n)} \subset E_j^{(m)};$$

4) для любого $n = 1, 2, \dots$ существует подмножество индексов $Q^{(n)} \subset Q^{(n)}$ такое, что $\sum_{i \in Q^{(n)}} [1 - \mu(\bigcup_{i \in Q^{(n)}} E_i^{(n)})] < \infty$, и

$$\frac{1}{\mu(E_i^{(n)})} \left| \int_{E_i^{(n)}} \varphi_n(t) dt \right| < \gamma_n \text{ при } 1 \leq k \leq n-1, i \in Q^{(k)}, n \geq 2, \text{ где } \gamma_n (n \geq 2) \text{ та-}$$

кие числа, что $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n < \infty$;

5) для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\mu(E_{i^{(n)}(x)}^{(n)})} \int_{E_{i^{(n)}(x)}^{(n)}} \varphi_k(t) dt - \varphi_k(x) \right| = 0 \text{ при п. в. } x \in (0, 1), \text{ где } E_{i^{(n)}(x)}^{(n)} \text{ — то}$$

множество из семейства $\{E_i^{(n)}; i \in Q^{(n)}\}$, которое содержит в себе точку x (очевидно, что для п. в. $x \in (0, 1)$, при любом $n \geq 1$ такое множество существует, это следует из 1) и 2));

6) для любой точки x из множества $E = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \in Q^{(k)}} E_i^{(k)}$ существует зависящее от x постоянное $c(x)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{\mu(E_{i^{(n)}(x)}^{(n)})} \int_{E_{i^{(n)}(x)}^{(n)}} \varphi_k(t) dt - \varphi_k(x) \right|^2 < c(x) (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой сходимости.

Лемма 3. Для любых чисел $n = 1, 2, \dots$, $k \leq n$ и $a > \frac{1}{2}$ существует семейство полуоткрытых интервалов $\{\Delta_i^{(n)}(k); i \in Z\}$ (Z — множество целых чисел), удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \bigcup_{i \in Z} \Delta_i^{(n)}(k) = R^1 \text{ при любых } n \geq k \geq 1 (R^1 = (-\infty, +\infty));$$

$$2) \Delta_i^{(n)}(k) \cap \Delta_j^{(n)}(k) = \emptyset \text{ при } i \neq j (n \geq k \geq 1);$$

$$3) \text{ если } n \geq m \geq k \text{ и } \Delta_i^{(n)}(k) \cap \Delta_j^{(m)}(k) \neq \emptyset, \text{ то } \Delta_i^{(n)}(k) \subset \Delta_j^{(m)}(k);$$

4) для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{i \in Z} d(\Delta_i^{(n)}(k))] = 0$, где $d(\Delta_i^{(n)}(k))$ — длина интервала $\Delta_i^{(n)}(k)$.

5) для любых $n \geq k \geq 1$ существуют конечные подмножества целых чисел $G^{(n)}(k)$ такие, что $[-k^2, k^2] = \bigcup_{i \in G^{(n)}(k)} \Delta_i^{(n)}(k) (n \geq k \geq 1)$

и $\max_{k \in G^{(n)}(k)} d(\Delta^{(n)}(k)) \leq \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \quad (n \geq k \geq 1)$, где $[k^a]$ — целая часть k^a .

6) для любых $n \geq k \geq 1$ существуют конечные подмножества целых чисел $L^{(n)}(k)$ такие, что $[-[n^{\frac{1}{2}+a}], [n^{\frac{1}{2}+a}]] = \bigcup_{l \in L^{(n)}(k)} \Delta^{(n)}(k) \quad (n \geq k \geq 1)$; $L^{(n)}(k) \supset G^{(n)}(k) \quad (n \geq k \geq 1)$; $|L^{(n)}(k)| \leq 4n^{2a} \quad (n \geq k \geq 1)$, где через $|L^{(n)}(k)|$ обозначается количество элементов множества $L^{(n)}(k)$.

Рассматривается также вопрос о расходимости рядов Фурье по полным двойным ортонормированным системам $\{\varphi_i(x)\varphi_j(y)\}_{i,j=1}^\infty$.

Верна следующая

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty, x \in (0, 1)$ полная ОНС ограниченных функций. Тогда существует функция $f(x, y) \in L^1((0, 1) \times (0, 1))$ такая, что ее ряд Фурье по двойной системе $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^\infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}(f) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \quad \left(b_{ij}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds \right)$$

расходится почти всюду (по Прингсхейму).

Для доказательства теоремы 2 используется известный факт о том, что двойной ряд Фурье по системе Хаара может п. в. расходиться (см. например (5)).

Верна следующая, более общая теорема:

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ полная ОНС на $(0, 1)$ ограниченных функций и $g(x, y) \in L^1((0, 1) \times (0, 1))$ такова, что ее ряд Фурье по двойной системе Хаара расходится п. в. Тогда существует функция $f(x, y)$ равноизмеримая с $g(x, y)$ (т. е. $\mu(\{(x, y); f(x, y) > \lambda\}) = \mu(\{(x, y); g(x, y) > \lambda\})$) такая, что расходится п. в. ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}(f) \varphi_i(x) \varphi_j(y)$.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊՈՒՅԱՆ

Հուլիսամիսին համակարգերի և լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերով
Հուլիսի կոդիչի շարքերի տարամիտության մասին

Ձևակերպվում են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Յուրաքանչյուր $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ օրթոնորմավորված համակարգի համար գոյություն ունի նրա այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ զուգամիտության ենթահամակարգ, որի համար

$$n_1 = 1, 2^{(\beta+2)(k-1)\log_2(k-1)} < n_k \leq 2^{(\beta+2)k\log_2 k} (\beta > 0, k = 2, 3, \dots):$$

Թեորեմ 2. Եթե $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ սահմանափակ ֆունկցիաներից կազմը-
ված լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ է, ապա գոյություն ունի
 $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ կրկնակի համակարգով Ֆուրյեի շարք, որը ապամիտում
է համարյա ամենուրեք ուղղանկյան գումարներով:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. Menchoff, Bull. de la Soc. Math. de Franch, v. 64, 3—4, p. 147—170 (1936). ² J. Marcinkiewicz, Studia Math., v. 6, p. 39—45 (1936). ³ G. Bennett, in: Notes in Banach spaces (edited by H. E. Lacey)—Austin University of Texas Press, 1980. ⁴ Б. С. Кашин, УМН, т. 40, № 2, с. 181—182 (1985). ⁵ О. П. Дзегнадзе, Со-
общ. АН ГССР, т. 34, № 2, с. 277—282 (1964).

УДК 621.391.15

МАТЕМАТИКА

С. С. Мартirosян

**Новая конструкция базисных однозначно декодируемых кодов
для суммирующего канала со многими пользователями**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 29/VIII 1985)

Модель суммирующего канала связи со многими пользователями можно представить следующим образом.

T статистически-независимых источников (пользователей), используя соответственно блочные двоичные коды $C_1, C_2, \dots, C_T$ длины n , передают информацию через общий канал связи, сохраняя при этом синхронизацию по словам и по битам.

Пусть $x_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$, ..., $x_T = (x_1^{(T)}, x_2^{(T)}, \dots, x_n^{(T)})$ кодовые векторы соответственно кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$, подлежащих передаче. Тогда на выходе канала получается вектор $E(x_1, x_2, \dots, x_T) = \left(\sum_{i=1}^T x_1^{(i)}, \sum_{i=1}^T x_2^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^T x_n^{(i)} \right)$, где $\sum_{i=1}^T x_i^{(i)}$ означает обычную сумму двоичных компонентов $x_i^{(i)}$. Систему кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$ назовем однозначно декодируемой, если для двух различных множеств $(x_1, x_2, \dots, x_T)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_T)$, где $x_i, x'_i \in C_i$, имеет место $E(x_1, x_2, \dots, x_T) \neq E(x'_1, x'_2, \dots, x'_T)$.

Скорость передачи l -ого пользователя определяется как величина $R_l = \frac{\log_2 |C_l|}{n}$, где $|C_l|$ — число векторов кода C_l .

Скорость передачи всей системы определяется как сумма скоростей всех пользователей $R = \sum_{i=1}^T R_i$.

Проблема в общем случае заключается в построении однозначно декодируемой системы кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$ так, чтобы суммарная скорость была максимальной. В ⁽¹⁻³⁾ рассмотрена эта задача при $T=2$.

В ^(4,5) Чангом и Велдоном рассмотрена задача при условии $|C_l|=2$, при всех $1 \leq l \leq T$. Такие коды называются базисными. В этом случае скорость передачи каждого пользователя одинакова и равна $\frac{\log_2 2}{n} = \frac{1}{n}$. Следовательно максимизация суммарной скорости при заданном T равносильна минимизации n . В настоящей работе дается новая конструкция построения базисных кодов, что позволяет увеличивать скорость передачи.

Пусть $C_l = \{x_i y_i\} = \{(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}), (y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \dots, y_n^{(l)})\}$, так назы-

ваемая разностная матрица $\tilde{D}$ определяется следующим образом: $\tilde{D}=(d_{ij})$, где $d_{ij}=(x_i^{(j)}-y_j^{(i)})$, $d_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, $i \in \overline{1, T}$, $j \in \overline{1, n}$. Из этого определения вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $m=(m_1, m_2, \dots, m_T)$ вектор с $m_i \in \{0, 1, -1\}$. Тогда $C_1, C_2, \dots, C_T$ является однозначно декодируемым кодом с T пользователями, если условие $m\tilde{D}=0^N$ имеет место тогда и только тогда, когда $m=0^T$, где 0^N означает N -мерный нулевой вектор.

Для длины кода, равной n , обозначим через $\tilde{D}_n$ разностную матрицу однозначно декодируемого кода с $C_1, C_2, \dots, C_T$ $\tilde{D}_n=(d_1^n, d_2^n, \dots, d_n^n)$, а через T_n —число пользователей.

Теорема 2. Если $\tilde{D}_u$ и $\tilde{D}_v$ разностные матрицы однозначно декодируемых базисных кодов соответственно для длин u и v ($u \leq v$), то матрица

$$\tilde{D}_{u+v} = \left| \begin{array}{c|c|c} -\tilde{D}_v^u & \tilde{D}_v & \\ \hline \tilde{D}_u & \tilde{D}_u & \tilde{A} \\ \hline \tilde{I}_u & \tilde{O}_u & \tilde{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} -d_1^v-d_2^v \dots d_u^v & d_1^v d_2^v \dots d_v^v & \\ \hline d_1^u d_2^u \dots d_u^u & d_1^u d_2^u \dots d_u^u & \tilde{A} \\ \hline e_1 e_2 \dots e_u & 0 \ 0 \dots 0 & \tilde{B} \end{array} \right|, \quad (1)$$

где $\tilde{D}_v^u$ состоит из u первых столбцов матрицы $\tilde{D}_v$; $\tilde{I}_u$ —единичная матрица размера $u \times u$; $\tilde{O}_u$ —нулевая матрица размера $u \times u$; $\tilde{A}, \tilde{B}$ произвольные матрицы с элементами из $\{0, 1, -1\}$, является разностной матрицей для однозначно декодируемого кода длины $u+v$.

Доказательство. Пусть $m=(m_1, m_2, m_3) = (m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1T_u}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2T_u}, m_{31}, m_{32}, \dots, m_{3u})$, $m_{ij} \in \{0, 1, -1\}$. Составим произведение $m\tilde{D}_{u+v}$ и наложим условие

$$m\tilde{D}_{u+v} = \tilde{O}_{u+v} \quad (2)$$

Рассмотрим (2) как систему $u+v$ уравнений относительно компонентов вектора m и докажем, что эта система при ограничении $m_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ имеет единственное решение — нулевое. Тем самым будет выполняться условие теоремы 1, а значит и теоремы 2.

Суммируя l -ое уравнение системы (2) с уравнением $u+l$ для всех $1 \leq l \leq u$, получим систему

$$\begin{aligned} 2m_2 d_1^u + m_2 e_1 &= 0, \\ 2m_2 d_2^u + m_2 e_1 &= 0, \\ &\vdots \\ 2m_2 d_u^u + m_2 e_u &= 0 \end{aligned}$$

или, так как $m_2 e_l = m_{3l}$,

$$\begin{aligned} 2m_2 d_1^u + m_{31} &= 0, \\ 2m_2 d_2^u + m_{32} &= 0, \\ &\vdots \\ 2m_2 d_u^u + m_{3u} &= 0, \end{aligned}$$

откуда ввиду ограничения $m_i \in \{0, 1, -1\}$ $m_{s1} = 0$ для всех $1 \leq i \leq u$ или $m_s = O^u$, следовательно $m_s \bar{D}_u = O^u$, откуда $m_s = O^{T_u}$ ввиду теоремы 1.

Тогда система 2 примет вид $m_1(-\bar{D}_u \bar{D}_v) = O^{u+v}$, откуда $m_1 \bar{D}_v = O^v$, следовательно (теорема 1) $m_1 = O^{T_u}$. Таким образом окончательно получаем $m = O^{T_u + T_v + u}$.

Теорема 2 позволяет построить D_u , имея $D_{u_1}, D_{u_2}, \dots, D_{u_s}$, где $u = u_1 + u_2 + \dots + u_s$, при любом s .

Представим n в виде $n = \sum_{k=0}^s n_k 2^k$, $s = [\log_2 n]$, $n_k \in \{0, 1\}$. Обозначим через $n^{(j)} = \sum_{k=0}^j n_k 2^k$.

Применяя теорему 2 для длин $u = n_j n^{(j)}$, $v = \sum_{r=j+1}^s n_r 2^r$ (очевидно $u \leq v$), последовательно взяв j равным $s-1, s-2, \dots, 1, 0$, построение $\bar{D}_n$ сводится к построению $\bar{D}_{2^s}, \bar{D}_{2^{s-1}}, \dots, \bar{D}_{2^0}$.

Число пользователей в этом случае можно получить последовательно согласно соотношению $T_{u+v} = T_u + T_v + u$, т. е.

$$\begin{aligned} T_n &= T_{2^s} + T_{n^{(s-1)}} + n^{(s-1)} = T_{2^s} + n_{s-1} T_{2^{s-1}} + T_{n^{(s-2)}} + n_{s-1} n^{(s-1)} + n^{(s-2)} = \\ &= T_{2^s} + n_{s-1} T_{2^{s-1}} + \dots + n_0 T_{2^0} + n_{s-1} n^{(s-1)} + n_{s-2} n^{(s-2)} + \dots + n_0 = \\ &= \sum_{k=0}^s n_k T_{2^k} + \sum_{l=0}^{s-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k \end{aligned}$$

или, так как $T_{2^k} = (k+2)2^{k-1}$ (см. (4)), это получается также из теоремы 2), то

$$T_n = \sum_{k=0}^s n_k (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{s-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k. \quad (3)$$

Обозначим через T'_n число пользователей кода длины n , построенного в работе (5). Если n представить в виде $n = 2^l - j$, $0 < j < 2^{l-1}$, то оно выражается следующей формулой:

$$T'_n = (l+1)2^{l-1} - j - \sum_{k=0}^{l-2} j_k (k+2)2^{k-1}, \quad (4)$$

где $j-1 = \sum_{k=0}^{l-2} j_k 2^k$, $j_k \in \{0, 1\}$

Лемма 1. $T_n \geq T'_n$.

Доказательство. Если $n = 2^l - j$, то $s = l-1$, а $n_k = 1 - j_k$. Обозначим через $\alpha = \max_{\substack{n_r \neq 0 \\ r < l-1}} r$. Тогда формулу (3) можно видоизменить

следующим образом:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{2^l - j} = \sum_{k=0}^{l-1} (1 - j_k) (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{l-2} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} (k+2)2^{k-1} - \sum_{k=0}^{l-1} j_k (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{l-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k + \sum_{k=0}^{l-2} n_k 2^k = \end{aligned}$$

или

$$T_n = (l+1)2^{l-1} - \sum_{k=0}^{l-1} j_k(k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{n-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k + 2^{l-1} - 2^{l-1} \dots \quad (5)$$

Вычитая из (5) (4), получим

$$T_n - T'_n = \sum_{l=0}^{n-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k \geq 0. \quad (6)$$

Из (6) также получается следующее.

Следствие. Если в двоичном представлении числа имеется больше двух единиц, то $T_n > T'_n$.

Для практического построения разностной матрицы $\tilde{D}_n$ удобнее будет пользоваться следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Тогда, если числа $T_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ и $T_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ для соответствующих матриц $\tilde{D}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$, $\tilde{D}_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ выражаются формулой (4), то число T_n для матрицы $\tilde{D}_n$, полученной из $\tilde{D}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ и $\tilde{D}_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ согласно теореме 2, также выражается формулой (4).

Доказательство. Доказательство следует из соотношения

$$T_n = T_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + T_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

и из того факта, что для четного n , если $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^l n_k 2^k$, $n_k \in \{0, 1\}$, $n = \sum_{k=1}^{l+1} n_k 2^k$, и для нечетного $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$, если $\frac{n-1}{2} = \sum_{k=0}^l n_{k-1} 2^k$, $n_k \in \{0, 1\}$, $n = 1 + \sum_{k=1}^{l+1} n_{k-1} 2^k$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Շատ օգտվողներով գումարող կապուղու համար միարժեքորեն
ապակոդավորվող բազիսային կոդերի նոր կոնստրուկցիա

Հոդվածում տրվում է T օգտվողներով գումարող կապուղու համար միար-
ժեքորեն ապակոդավորվող երկուական կոդերի կառուցման նոր մեթոդ, որը
թույլ է տալիս մեծացնել հաղորդման արագությունը համեմատած (4) և (5)
աշխատանքներում կառուցված կոդերի: Դիտարկված մեթոդի հիմքում ընկած
է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե $\tilde{D}_u$ և $\tilde{D}_v$ հանգիստում են համապատասխանաբար
u և v ($u \leq v$) երկարությունների համար միարժեքորեն ապակոդավորվող

կոգերի տարրերական մատրիցաներ, ապա (1) մատրիցան ճանգիւսանում է $\mu + \nu$ երկարության ճամար միարժեքորեն ապակոգավորվող կոգի տարրերություն մատրիցա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ T. Kasami, S. Lin, V. Wel e. a., IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-29, № 1, p. 114—130 (1983). ² E. S. Weldon, Inform and control, № 36. p. 256—274 (1978). ³ G. H. Khachatryan, Problems of Control and Information Theory. v. 11 (4), p. 319—324 (1982). ⁴ S. C. Chang, E. J. Weldon, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-25, № 6, p. 684—691 (1979). ⁵ S. C. Chang, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-30, № 2, p. 411—415 (1984).

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. Саакян

Неоднородные упругие среды, для которых векторное волновое уравнение разделяется на независимые скалярные уравнения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 27/IX 1985)

Предположим, что коэффициенты Ламе λ , μ и плотность ρ упругой среды в цилиндрической системе координат (r, θ, z) зависят только от переменной z . Тогда вектор перемещения $(^1)$

$$\vec{u} = \psi_1(z) \text{grad} \Phi_1(r, z, t) + \psi_2(z) \text{rot rot} [\Phi_2(r, z, t) \hat{l}_z] + \text{rot} [\Phi_3(r, z, t) \hat{l}_z], \quad (1)$$

при условии определения $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ из соотношений:

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = K, \quad (\xi p_2)' + \xi p_2^2 = K, \quad K' = p_r K,$$

$$p_1 + p_2 + p_r = 0, \quad p_1 + \gamma p_2 + 2p_\mu = 0; \quad (2)$$

$$p_1 = \psi_1' / \psi_1, \quad p_2 = \psi_2' / \psi_2, \quad p_r = \rho' / \rho, \quad p_\mu = \mu' / \mu, \quad (3)$$

разделяет известное векторное уравнение упругости

$$\xi \text{grad div} \vec{u} - \mu \text{rot rot} \vec{u} + \text{grad} \lambda \cdot \text{div} \vec{u} + \text{grad} \mu \times \text{rot} \vec{u} + \\ + 2 \text{grad} \mu \cdot \text{grad} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4)$$

на независимые скалярные уравнения для обобщенных потенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$L_1[\Phi_1] \equiv \Delta \Phi_1 + (2p_1 + p_r) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma^{-1} (p_1' + p_1^2 + p_1 p_\mu) \Phi_1 - v_1^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$L_2[\Phi_2] \equiv \Delta \Phi_2 + [(\gamma + 1)p_2 + 2p_\mu] \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + [(\gamma p_2)' + \gamma p_2^2 + \gamma p_2 p_\mu] \Phi_2 - v_2^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$L_3[\Phi_3] \equiv \Delta \Phi_3 + p_\mu \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - v_3^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где $\hat{l}_z$ — орт по оси z , $\xi = \lambda + 2\mu$, $\gamma = \xi / \mu$, $v_1^2 = \xi / \rho$, $v_2^2 = \mu / \rho$, $v_3 = v_2$.

Покажем, что существуют слоисто-неоднородные изотропные упругие среды, для которых возможно разделение векторного уравнения упругости на независимые скалярные уравнения.

Из условия (2) следует:

$$p_1' + p_\mu p_1 + p_1^2 = C \mu^{-1} p, \quad (6)$$

$$p_2' + \gamma p_\mu p_2 + p_2 = C \gamma^{-1} \mu^{-1} p. \quad (7)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0, \quad (8)$$

$$p_1 + \gamma p_2 + p_3 = 0, \quad (9)$$

где C — произвольная постоянная.

Эквивалентными преобразованиями уравнения (6) и (7) при $\gamma = \text{const}$ приводятся к виду:

$$(p_1 + \gamma p_2)' + p_\mu(p_1 + \gamma p_2) + p_1^2 + \gamma p_2^2 = 2C\mu^{-1}p, \quad (10)$$

$$(p_1 - p_2)' + p_\mu(p_1 - p_2) + p_1^2 - p_2^2 = C\mu^{-1}p(1 - \gamma^{-1}). \quad (11)$$

Из уравнений (9) и (10) имеем:

$$p_1 = -2(\gamma + 1)^{-1}[p_\mu \pm \gamma \Omega], \quad (12)$$

$$p_2 = -2(\gamma + 1)^{-1}[p_\mu \mp \Omega], \quad (13)$$

$$2\gamma\Omega^2 = (\gamma + 1)p_\mu' + (\gamma - 1)p_\mu^2 + (\gamma + 1)C\mu^{-1}p. \quad (14)$$

Подставляя в уравнения (8) и (11) выражения (12) и (13), получим

$$(\gamma + 1)p_\mu = 4p_\mu \pm 2(\gamma - 1)\Omega, \quad (15)$$

$$(\gamma + 1)\Omega' + (\gamma - 3)p_\mu\Omega \mp 2(\gamma - 1)\Omega^2 - \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} C\mu^{-1}p = 0. \quad (16)$$

Если $C = 0$, то из уравнений (14) и (16) для определения Ω и p_μ получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma + 1)\Omega' + (\gamma - 3)p_\mu\Omega \mp 2(\gamma - 1)\Omega^2 &= 0, \\ (\gamma + 1)p_\mu' + (\gamma - 1)p_\mu^2 - 2\gamma\Omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы (17) представим в виде

$$\Omega = \frac{A}{z}, \quad p_\mu = \frac{B}{z}, \quad (18)$$

где A и B постоянные.

В результате получим следующую алгебраическую систему для определения A и B :

$$\begin{aligned} A[\gamma + 1 - (\gamma - 3)B \pm 2(\gamma - 1)A] &= 0, \\ (\gamma - 1)B^2 - (\gamma + 1)B - 2\gamma A^2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (19) имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} \text{I) } A = 0, B = 0; \quad \text{II) } A = 0, B = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \\ \text{III) } A = \mp \frac{1}{\gamma - 2}, B = \frac{\gamma}{\gamma - 2}; \quad \text{IV) } A = \mp 1, B = -1. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим эти случаи.

I случай: $\Omega = 0, p_\mu = 0$. По формулам (12), (13) и (15) получим $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0$. Из соотношений (3) следует:

$$\psi_1 = \psi_{10}, \quad \psi_2 = \psi_{20}; \quad \mu = \mu_0, \quad \xi = \gamma\mu_0, \quad \rho = \rho_0. \quad (21)$$

Следовательно, среда однородная и имеет место известное разделение векторного волнового уравнения на независимые скалярные уравнения для потенциалов Гельмгольца.

II случай: $\Omega=0$, $p_\mu = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{z}$. Тогда $p_1 = -\frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{z}$, $p_2 = -\frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{z}$, $p_r = \frac{4}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{z}$. Интегрируя уравнения (3), имеем:

$$\psi_1 = \psi_{10} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \psi_2 = \psi_{20} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}; \quad (22)$$

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \xi = \gamma\mu, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{4}{\gamma-1}}. \quad (23)$$

III случай: $\Omega = \mp \frac{1}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{z}$, $p_\mu = \frac{\gamma}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{z}$. Величины $p_1=0$, $p_2 = -\frac{2}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{z}$, $p_r = \frac{2}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{z}$. При этом

$$\psi_1 = \psi_{10}, \quad \psi_2 = \psi_{20} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{2}{\gamma-2}}; \quad (24)$$

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}, \quad \xi = \gamma\mu, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}}. \quad (25)$$

IV случай: $\Omega = \mp \frac{1}{z}$, $p_\mu = -\frac{1}{z}$. Величины $p_1 = \frac{2}{z}$, $p_2 = 0$, $p_r = -\frac{2}{z}$. Из соотношений (3) при любых значениях γ получим:

$$\psi_1 = \psi_{10} \left(\frac{z}{z_0} \right)^2, \quad \psi_2 = \psi_{20}; \quad (26)$$

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-1}, \quad \xi = \gamma\mu, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-2}. \quad (27)$$

В случаях II—IV упругая среда неоднородная, векторное уравнение разделяется на независимые скалярные уравнения. Аналогичные результаты получены в работе (2) другим путем.

Если $C \neq 0$, то после интегрирования уравнения (15) имеем

$$\mu^{-1}\rho = \mu_0^{-1}\rho_0 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}} \exp \left[\pm \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{z_0}^z \Omega dz \right]. \quad (28)$$

Подставляя значение $\mu^{-1}\rho$ в уравнения (14) и (16), получим следующую систему интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & (\gamma+1)\Omega' + (\gamma-3)\rho_\mu\Omega + 2(\gamma-1)\Omega^2 + \\ & \pm \frac{\gamma^2-1}{2\gamma} \mu_0^{\frac{4}{\gamma+1}} \rho_0 C \mu^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}} \exp \left[\pm \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{z_0}^z \Omega dz \right] = 0, \\ & (\gamma+1)\rho'_\mu + (\gamma-1)\rho_\mu^2 - 2\gamma\Omega^2 + \\ & + (\gamma+1)\mu_0^{\frac{4}{\gamma+1}} \rho_0 C \mu^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}} \exp \left[\pm \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{z_0}^z \Omega dz \right] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Представим решение системы (29) в виде

$$\Omega = \frac{D}{z}, \quad p_r = \frac{E}{z}, \quad (30)$$

где D и E постоянные.

Постоянные C , D и E определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \pm 2(\gamma-1)D - (\gamma-3)E + 2(\gamma+1) = 0, \\ & \mp \frac{\gamma^2-1}{2\gamma} \frac{\rho_0 z_0^2}{\mu_0} C + (\gamma+1)D \pm 2(\gamma-1)D^2 - (\gamma-3)E = 0, \\ & (\gamma+1) \frac{\rho_0 z_0^2}{\mu_0} C + 2\gamma D^2 + (\gamma+1)E - (\gamma-1)E^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение системы (31) соответствует двум случаям неоднородных упругих сред.

1. При значении $C = \frac{2\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \frac{\mu_0}{\rho_0 z_0^2}$, $D = \mp \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, $E=0$, имеем:

$$\psi_1 = \psi_{10} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \psi_2 = \psi_{20} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}; \quad (32)$$

$$\mu = \mu_0, \quad \xi = \gamma \mu_0, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-2}. \quad (33)$$

2. При значении $C = \frac{2\gamma}{\gamma-2} \frac{\mu_0}{\rho_0 z_0^2}$, $D = \mp \frac{\gamma-1}{\gamma-2}$, $E = \frac{2}{\gamma-2}$, получим:

$$\psi_1 = \psi_{10} \left(\frac{z}{z_0} \right)^2, \quad \psi_2 = \psi_{20} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}}; \quad (34)$$

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}}, \quad \xi = \gamma \mu, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2(\gamma-3)}{\gamma-2}}. \quad (35)$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Անհամասնառ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհվում է անկախ սկալյար հավասարումների

Աշխատանքում դիտարկվում են անհամասնառ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար հնարավոր է առաձգականության տեսության վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհել իրարից անկախ սկալյար հավասարումների:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Г. Саакян, ДАН СССР т. 269, № 3 (1983). ² J. F. Hook, J. Acoust. Soc. Am., v. 33, p. 302—313 (1961).

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ф. М. Поладян

Нелинейная ползучесть составного сектора кругового кольца с прямоугольным поперечным сечением при кручении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 13/XI 1985)

Рассматривается задача о кручении составного сектора кругового кольца (кривой стержень), поперечное сечение которого состоит из N различных областей, материалы которых обладают свойством нелинейной наследственной ползучести ⁽¹⁾, с различными мерами ползучести и модуля мгновенного сдвига.

Пусть рассматриваемый сектор кругового кольца с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R —радиус сектора кольца), приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

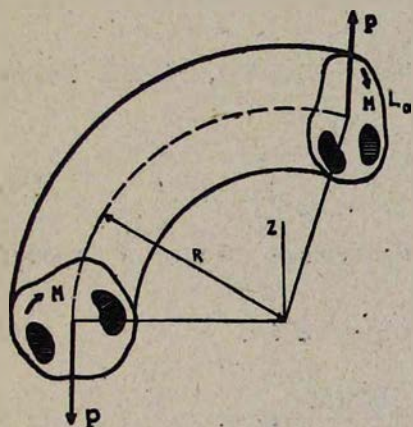


Рис. 1. Составной сектор кругового кольца, находящийся под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов $M=PR$, приложенных на торцевых сечениях

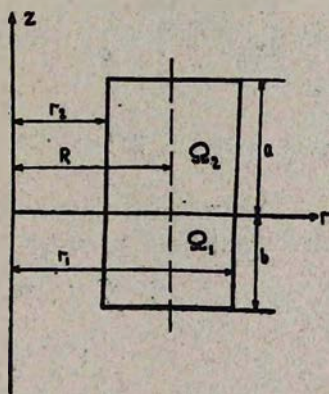


Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого составного сектора кругового кольца

Пластическое кручение однородных кривых стержней из упрочняющегося материала исследовано в ^(2,3). Кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести исследовано в ^(4,5), а составного сектора кругового кольца с круговым поперечным сечением при ползучести рассмотрено в ⁽⁶⁾.

1. Принимаем, что в области Ω_m между компонентами деформации ползучести и напряжениями имеют место соотношения Н. Х. Арутюняна ⁽¹⁾:

$$2G_m \varepsilon_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)} - \int_{\tau_1}^t s_{ij}^{(m)} f_m[\sigma_0^{(m)}(\tau)] K_m(t, \tau) d\tau \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad (1.1)$$

где $G_m = E_m/3$, E_m принимается постоянным, $s_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} - \delta_{ij} \sigma^{(m)}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma^{(m)}$ — среднее давление, $f_m[\sigma_0^{(m)}(t)]$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, $\sigma_0^{(m)}(t)$ — интенсивность тензора напряжений в области Ω_m , $K_m(t, \tau) = 3G_m \frac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C_m(t, \tau)$ — мера ползучести в области Ω_m .

Аналогично (7) получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\varepsilon_{r\theta}^{(m)}}{r} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varepsilon_{rz}^{(m)}}{r} \right] = \frac{D(t)}{r^3} \quad (m=1, 2, \dots, N). \quad (1.2)$$

В каждой области Ω_m , вводя функцию напряжений $\sigma_0^{(m)} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}$, $\sigma_{r\theta}^{(m)} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r}$ ($m=1, 2, \dots, N$), при помощи соотношений (1.1) и (1.2) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right) - \int_{\tau_1}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right] \right\} K_m(t, \tau) d\tau = -\frac{D(t)G_m}{r^3} \quad (m=1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\sigma_0^{(m)} = \sigma_0^{(m)}(t) = r^{-3} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right)^2}. \quad (1.4)$$

Аналогично (8.7) можно получить контурные условия и условия на линиях контакта L_{lk} :

$$\Phi = C_0(t) \text{ на } L_0, \quad \Phi_l = \Phi_k + C_{lk}^*(t) \text{ на } L_{lk}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} - 3 \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} f_l[\sigma_0^{(l)}] \frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = \frac{1}{G_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - 3 \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} f_k[\sigma_0^{(k)}] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \text{ на } L_{lk}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где n — нормаль к L_{lk} , $C_0(t)$ и $C_{lk}^*(t)$ произвольные функции от t .

Крутящий момент определяется аналогичной формулой (8).

2. Рассмотрим случай, когда поперечное сечение состоит из двух прямоугольных областей (рис. 2). Пусть в области Ω_1 материал обладает свойством нелинейной ползучести, а в области Ω_2 справедлив закон Гука. На основании вышеизложенного функция Φ_1 в области Ω_1 удовлетворяет уравнению (1.3), а функция Φ_2 в области Ω_2 уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) = - \frac{D(t) G_1}{r^2}. \quad (2.1)$$

Полагая $f_1[\sigma_0^{(1)}] = 1 + \lambda[\sigma_0^{(1)}]^2$, решение уравнений (1.3) и (2.1) ищем в виде

$$\Phi_l(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_{ln}(r, z, t) \quad (l=1, 2). \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.3) и (1.4), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений относительно $\Phi_{ln}(r, z, t)$.

Функции $\Phi_{ln}(r, z, t)$ представим в виде рядов $(8,9)$

$$\Phi_{ln}(r, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{lk}^n(z, t) W_2(\mu_k r), \quad (l=1, 2). \quad (2.3)$$

$$\text{Здесь } W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k r_2)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k r_2)} \quad (n=1, 2, \dots),$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента n -го порядка соответственно первого и второго рода, а $\{\mu_k\}$ — корни уравнения $W_2(\mu r_2) = 0$. Функции $W_l(x)$ удовлетворяют тем же рекуррентным формулам, что и функции $J_n(x)$, $Y_n(x)$.

Пользуясь (1.5)–(1.6) и (2.2)–(2.3), получим граничные условия для функции

$$a_{lk}^n(-b, t) = a_{2k}^n(a, t) = 0, \quad a_{1k}^n(0, t) = a_{2k}^n(0, t), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{G_2} \frac{\partial a_{2k}^n(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial a_{1k}^n(z, t)}{\partial z} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial a_{1k}^n(z, \tau)}{\partial z} K_1(t, \tau) d\tau + \\ &+ F_k^n(z, t) \text{ при } z=0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $F_k^0(z, t) = 0$, а при $n \geq 1$, $F_k^n(z, t) =$

$$= \frac{1}{\omega_k^*} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{r_1}^{\tau_2} \omega_l \frac{\partial \Phi_{1, n-1-j}}{\partial z} K_1(t, \tau) d\tau \Big] r W_2(\mu_k r) dr,$$

$$\omega_k^* = 0,5 \{ [r_2 W_1(\mu_k r_2)]^2 - [r_1 W_1(\mu_k r_1)]^2 \},$$

$$\omega_n = r^{-4} \sum_{k=0}^4 \text{grad} \Phi_{1k} \cdot \text{grad} \Phi_{1, n-k}.$$

Коэффициенты $a_{lk}^n(z, t)$, удовлетворяющие условиям (2.4)–(2.5), определяются следующими формулами:

$$a_{1k}^n(z, t) = \left\{ \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2 \text{ch} \mu_k b} + \text{th} \mu_k b \left[h_k^n(z, t) + \right. \right.$$

$$\left. + \nu_k \int_{\tau_1}^t h_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \text{ch} \mu_k z + \left[h_k^n(z, t) + \right.$$

$$\left. + \nu_k \int_{\tau_1}^t h_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \text{sh} \mu_k z - \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2};$$

$$\begin{aligned}
a_{2k}^n(z, t) = & \left\{ \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2 \operatorname{ch} \mu_k b} - \frac{1}{\mu_k^2} [C_{1k}^n(z, t) - C_{2k}^n(t)] + \right. \\
& + \operatorname{th} \mu_k b \left[h_k^n(z, t) + \nu_k \int_{\tau_1}^t h_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \operatorname{ch} \mu_k z + \left\{ m_k^n(z, t) + \right. \\
& \left. + n_k \left[h_k^n(z, t) + \nu_k \int_{\tau_1}^t h_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \right\} \operatorname{sh} \mu_k z - \frac{C_{2k}^n(t)}{\mu_k^2}, \\
\text{где } C_{1k}^n(z, t) = & (\omega_k^*)^{-1} \int_{r_1}^{r_2} Q_n(r, z, t) r^{-1} W_2(\mu_k r) dr, \\
C_{2k}^n(t) = & (\omega_k^*)^{-1} D(t) G_2 \int_{r_1}^{r_2} r^{-1} W_2(\mu_k r) dr, \quad C_{2k}^n(t) = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \\
h_k^n(z, t) = & \frac{G_1 m_k^n(z, t) - G_2 F_k^n(z, t)}{G_2 - n_k G_1}, \quad \nu_k = \frac{G_2}{G_2 - n_k G_1}, \quad n_k = -\frac{\operatorname{th} \mu_k b}{\operatorname{th} \mu_k a}, \\
m_k^n(z, t) = & \frac{C_{2k}^n(t)}{\mu_k^2 \operatorname{sh} \mu_k a} + \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh} \mu_k a} [C_{1k}^n(z, t) - C_{2k}^n(t)] \operatorname{ch} \mu_k a - \\
& - \frac{C_{1k}^n(z, t) \operatorname{ch} \mu_k a}{\mu_k^2 \operatorname{sh} \mu_k a \operatorname{ch} \mu_k b}, \quad Q_0(t) = G_1 \left[D(t) + \int_{\tau_1}^t D(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \right], \\
Q_n(r, z, t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^t N_1(t, \tau) [\operatorname{grad} \Phi_{1n} \operatorname{grad} \Phi_{1, n-1-k} - \omega_k Q_{n-1-k}] d\tau \\
& (n=1, 2, \dots), \\
N_1(t, \tau) = & K_1(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t R_1(t, \xi) K_1(\xi, \tau) d\xi,
\end{aligned}$$

$R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$. Для меры ползуучести $C_1(t, \tau) = (C_{01} + A_{11}\tau^{-1})[1 - e^{-\tau_1(t-\tau)}] R_1(t, \tau)$ определяется так, как в (9).

Аналогично (4,5) доказывается существование решения задачи.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

3. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Ուղղանկյուն ուղղանալաց հատվածով բաղադրյալ շրջանային
օղակի սեկտորի ոչ-գծային սողի ոլորման դեպքում

Ուսումնասիրվում է ժառանգական, տարբեր ոչ-գային սողի հատկու-
թյունների ունեցող նյութերից կազմված շրջանային օղակի սեկտորի ոլորման
խնդիրը:

Օգտվելով գլանային կոորդինատների համակարգից, խնդիրը բերվում է

յուրաքանչյուր տիրույթում ոչ-գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը եզրային պայմաններով:

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն ուղղահայաց հատույթի այն դեպքը, երբ բաժանման գիծը ղուգահեռ է բևեռային առանցքին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
² М. А. Задоян, ДАН СССР, т. 223, № 2 (1975). ³ М. А. Задоян, Изв. АН СССР. МТТ № 1, 1977. ⁴ М. А. Задоян, Ф. М. Поладян, ДАН АрмССР, т. 71, № 3 (1980).
⁵ Ф. М. Поладян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 34, № 2 (1981). ⁶ М. А. Задоян, Ф. М. Поладян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 36, № 5 (1983). ⁷ Ф. М. Поладян, ДАН АрмССР, т. 75, № 2 (1982). ⁸ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963. ⁹ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, М. ИЛ, 1949.

УДК 533.951

ФИЗИКА

Э. А. Акопян, Г. Г. Матевосян

Образование связанных состояний быстрыми заряженными частицами, движущимися в плазме

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 15/XII 1984)

1. За последнее десятилетие накоплен большой экспериментальный материал о взаимодействии пучков быстрых молекулярных ионов с веществом (см. обзоры ^(1,2) и цитированную там литературу).

Наблюдалась следующая картина: при измерениях под углом в нуль градусов число ускорившихся (по сравнению с энергией до влета в фольгу) протонов было меньше числа замедлившихся (в некоторых экспериментах почти в два раза). Указанный факт говорит об отличии потенциала взаимодействия заряженных частиц при движении их внутри фольги от кулоновского или вообще какого-либо сферически симметрического. Наличие в потенциале несимметричной части, получившей название кильватерного потенциала, позволяет объяснить особенности рассеяния пучков молекулярных ионов в тонких фольгах.

В настоящей работе получены выражения для кильватерного потенциала, создаваемого в плазме быстрыми заряженными частицами, и показано, что под действием кильватерного потенциала одноименно заряженные частицы могут образовать связанные состояния.

2. Рассмотрим бесконечную однородную изотропную среду, в которой движутся две заряженные частицы с массами m_1, m_2 и зарядами q_1, q_2 , скорости движения которых меньше световой ⁽³⁾. Будем считать, что движение частиц мало изменяет диэлектрические свойства среды, которую будем описывать функцией диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega, \vec{k})$. Уравнения, описывающие движения частиц и электрического поля, имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= q_1 \vec{E}(\vec{r}_1, t), \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= q_2 \vec{E}(\vec{r}_2, t); \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \{q_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + q_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ — радиус-векторы первой и второй частицы, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ — вектор напряженности электрического поля в среде, $\vec{D}$ — вектор индукции. Предположим, что движения частиц мало отличаются от равномерно-прямолинейного;

$$\vec{r}_1 = \vec{u}_1 t + \vec{a}_1 + \delta \vec{r}_1; \quad \vec{r}_2 = \vec{u}_2 t + \vec{a}_2 + \delta \vec{r}_2; \quad \frac{|\delta \vec{r}|}{|\vec{u} t + \vec{a}|} \ll 1. \quad (2)$$

Пренебрегая в последнем уравнении неизвестными, но малыми величинами $\delta \vec{r}_1$ и $\delta \vec{r}_2$, получим выражения, определяющие потенциал и электрическое поле в среде при движении в ней двух заряженных частиц (3):

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{q_1 \exp i \vec{k}(\vec{r} - \vec{u}_1 t - \vec{a}_1)}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}_1, \vec{k})} + \frac{q_2 \exp i \vec{k}(\vec{r} - \vec{u}_2 t - \vec{a}_2)}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}_2, \vec{k})} \right\}; \quad (4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -i \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{k^3} \left\{ \frac{q_1 \exp i \vec{k}(\vec{r} - \vec{u}_1 t - \vec{a}_1)}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}_1, \vec{k})} + \frac{q_2 \exp i \vec{k}(\vec{r} - \vec{u}_2 t - \vec{a}_2)}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}_2, \vec{k})} \right\}.$$

3. Рассмотрим случай, когда заряженные частицы движутся в плазме с максвелловским распределением числа частиц по скоростям. В качестве функции диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \vec{k})$ будем пользоваться асимптотическими выражениями для электронной диэлектрической проницаемости (4). А именно, будем считать, что

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k^2 r_{де}^2} & \text{при } \frac{\omega}{k v_{те}} < 1 \\ 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} & \text{при } \frac{\omega}{k v_{те}} \geq 1 \end{cases}, \quad (5)$$

где $r_{де}$ — дебаевский радиус электронов плазмы, ω_L — ленгмюровская частота, $v_{те}$ — тепловая скорость электронов плазмы. Пусть скорости поступательного движения частиц равны $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$. Обозначим через z проекцию вектора $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ на направление вектора $\vec{u}$ и через ρ проекцию вектора $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ на направление, перпендикулярное $\vec{u}$. В случае, когда угол ориентации частиц по отношению к направлению скорости $\vec{u}$ мал ($z \gg \rho \lambda$, где $\lambda = u/v_{те}$), из формул (4) с учетом соотношений (5) получаются следующие выражения для значений векторов напряженности в точке нахождения первой ($\vec{E}_1$) и второй ($\vec{E}_2$) частиц:

$$\vec{E}_1 = -i \frac{4\pi q_1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{k^3} \frac{1}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}, \vec{k})} - q_1 \frac{\partial \psi_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}; \quad (6)$$

$$\vec{E}_2 = -i \frac{4\pi q_2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{k^3} \frac{1}{\varepsilon(\vec{k} \vec{u}, \vec{k})} + q_2 \frac{\partial \psi_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)},$$

где функции ψ_1 и ψ_2 определяются следующими выражениями:

$$\psi_1 = -\frac{q_2}{z} [1 - e^{-z/\lambda r_{де}} \text{ch}(\rho/r_{де})] + \frac{q_2}{\sqrt{z^2 + \rho^2}};$$

$$\psi_2 = \frac{q_1}{q_2} \psi_1 - \frac{2q_1}{\lambda r_{де}} \sin\left(\frac{z}{\lambda r_{де}}\right) \left[K_0\left(\frac{\rho}{\lambda r_{де}}\right) + \text{ci}\left(\frac{\rho}{\lambda r_{де}}\right) \right], \quad (7)$$

где ch — косинус гиперболический, K_0 — функция Макдональда, cl — интегральный косинус. Умножая первое уравнение из (1) на $1/m_1$, второе на $1/m_2$ и вычитая их друг из друга, получим уравнение, описывающее небольшие изменения радиус-вектора относительно расположения частиц относительно начального значения $\vec{r}_0$:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -i \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left(\frac{q_1^2}{m_1} - \frac{q_2^2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{k^3} \frac{1}{\varepsilon(\vec{k}u, \vec{k})} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left\{ \frac{q_1}{m_1} \psi_1 + \frac{q_2}{m_2} \psi_2 \right\}. \quad (8)$$

Положим для простоты в уравнении (8) $m_1 = m_2 = m$; $q_1 = q_2$ и запишем его в проекциях:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{q_1 q_2}{m} \left\{ \frac{2z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{2}{z^2} [1 - e^{-z/\lambda r_{де}} \text{ch}(\rho/r_{де})] + \frac{2}{z \lambda r_{де}} e^{-z/\lambda r_{де}} \cdot \text{ch}(\rho/r_{де}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\lambda^2 r_{де}^2} \cos\left(\frac{z}{\lambda r_{де}}\right) \left[K_0\left(\frac{\rho}{\lambda r_{де}}\right) + \text{cl}\left(\frac{\rho}{r_{де}}\right) \right] \right\}; \\ \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= \frac{q_1 q_2}{m} \left\{ \frac{2}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{2}{z r_{де}} e^{-z/\lambda r_{де}} \text{sh}(\rho/r_{де}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\lambda r_{де}} \sin\left(\frac{z}{\lambda r_{де}}\right) \left[-\frac{1}{\lambda r_{де}} K_1\left(\frac{\rho}{\lambda r_{де}}\right) + \frac{1}{\rho} + \frac{\cos(\rho/r_{де}) - 1}{\rho} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть начальные значения $z(0) = z_0$ и $\rho(0) = 0$ определяются условиями

$$z_0 = \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \lambda r_{де}; \quad n > 1; \quad \rho_0 \ll r_{де}, \quad (10)$$

что соответствует случаю, когда расстояние между частицами большое и угол ориентации частиц относительно вектора скорости $\vec{u}$ мал ($z \gg \rho \lambda$). Будем искать решения системы уравнений (9) в виде

$$z = z_0 + \delta z; \quad \rho = \delta \rho; \quad \left| \frac{\delta z}{z_0} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\delta \rho}{r_{де}} \right| \ll 1. \quad (11)$$

Вследствие условий (10) можно пренебречь первыми двумя слагаемыми в правых частях уравнений (9). Раскладывая оставшиеся члены в ряд по степеням малых параметров $\frac{\delta z}{\lambda r_{де}}$ и $\frac{\delta \rho}{r_{де}}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= \frac{2q_1 q_2}{m \lambda^2 r_{де}^2} \ln 2 \lambda [-(-1)^n (\delta z / \lambda r_{де})], \\ \frac{d^2 \delta \rho}{dt^2} &= \frac{2q_1 q_2}{m \lambda r_{де}} \cdot (-\delta \rho / r_{де}) \cdot (-1)^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Решения системы уравнений (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta z &= A_1 e^{i\Omega_z t} + A_2 e^{-i\Omega_z t}; \\ \delta \rho &= B_1 e^{i\Omega_\rho t} + B_2 e^{-i\Omega_\rho t}, \end{aligned} \quad (13)$$

где величины Ω_z и Ω_ρ равны

$$\Omega_1^2 = (-1)^n \frac{2q_1 q_2}{m \cdot 3 r_{de}^3} \ln 2; \quad \Omega_2^2 = (-1)^n \frac{q_1 q_2}{m \cdot r_{de}^3} \quad (14)$$

Соотношения (13), (14) определяют состояния устойчивого (при $(-1)^n q_1 q_2 > 0$) и неустойчивого (при $(-1)^n q_1 q_2 < 0$) положений равновесия системы двух заряженных частиц, движущихся в плазме.

Таким образом, частицы с одинаковым знаком заряда могут образовать связанные состояния под действием кильватерного потенциала. Состояния эти возникают на больших расстояниях между частицами, когда силы кулоновского отталкивания между частицами малы.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՀԱՎՈՐՅԱՆ, Հ. Հ. ՄԱՔԵՎՈՍՅԱՆ

Կապված վիճակների առաջացումը պլազմայում շարժվող լիցքավորված մասնիկների միջև

Բարակ թաղանթների միջով մոլեկուլյար իոնների անցման առանձնահատկությունների ուսումնասիրության փորձերի ժամանակ նկատված է, որ փոխազդեցության պոտենցիալի տեսքը խիստ տարբերվում է սֆերիկ սիմետրիկություն ունեցող կոլոնյան կամ Դեբայի պոտենցիալից: Այս երևույթը պայմանավորված է լիցքի թողած բարդ հետքով:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրված է պլազմայում շարժվող երկու լիցքավորված մասնիկների փոխազդեցության պոտենցիալը, որը գրականության մեջ հայտնի է «նավահետքային պոտենցիալ» անվան տակ: Ստացված են այդ պոտենցիալի ճշտված արտահայտությունները և ցույց է տրված, որ նավահետքային պոտենցիալի ազդեցության տակ նույն նշանի լիցք ունեցող մասնիկները կարող են գտնվել կապված վիճակներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ J. Remillieux, Nuclear Inst. and Methods, v. 170, 31 (1980). ² D. S. Gemmell, Nuclear Inst. and Methods, v. 170, 41 (1980). ³ E. A. Acoptan, G. G. Matevosian, Proc. of XVI ICPIG, p. 42. Duesseldorf, Fed. Rep. Germany (1983). ⁴ В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.

УДК 641.64.182.4/6

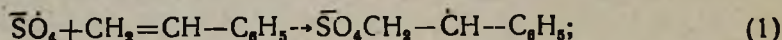
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. А. Оганесян, К. С. Айрапетян, А. В. Гукасян, Ф. С. Киноян

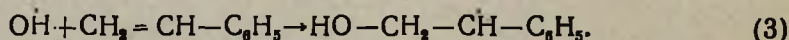
О химизме реакции иницирования мономерных радикалов
 в водном растворе персульфата калия, насыщенном стиролом

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Г. Мацюкном 23/7 1985)

Как известно (¹⁻⁴), безэмульгаторная полимеризация стирола в двухфазной системе мономер—водный раствор персульфата калия приводит к образованию стабильной полимерной дисперсии с узким распределением дисперсных частиц. Одной из зон радикальных реакций в этой системе является водная фаза (ВФ), насыщенная стиролом. В настоящей работе исследован химизм иницирования мономерных радикалов в этой зоне полимеризации. Речь идет об установлении возможной конкуренции между реакциями сульфат ион радикалов с молекулами стирола и воды (⁵):



Между этими реакциями она возникает из-за малой растворимости стирола в воде ($4 \cdot 10^{-3}$ моль/л). По этой же причине в ВФ сильно ограничена реакция роста цепи, и если при реакции (1) образуются алкилароматические сульфаты, то продуктами олигомеризации, иницированной гидроксильными радикалами, будут являться ароматические спирты:



Расчет временного режима радикальных процессов в ВФ указывает на большую вероятность реакции квадратичного обрыва между мономерными и первичными радикалами. Для расчетов выбраны следующие значения констант элементарных актов роста и обрыва кинетических цепей: $k_p = 125$ л/моль · с и $k_o = 3 \cdot 10^7$ л/моль · с (⁶). Согласно этим расчетам время жизни мономерных радикалов составляет примерно 2 с:

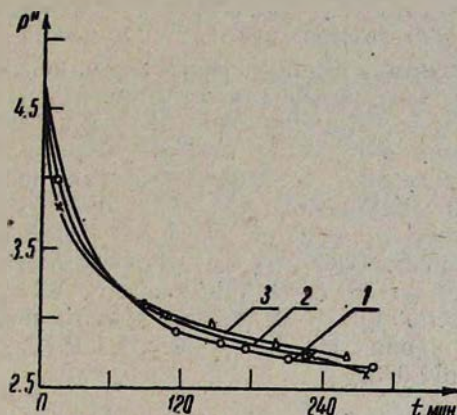
$$t = (k_o k_i C)^{-1/2} \approx 2 \text{ с},$$

где $C = 10^{-2}$ моль/л (концентрация персульфата), k_i —константа его термического распада, $k_i = 10^{-6}$ с⁻¹ (⁷). За это время радикал успевает присоединять максимум одну мономерную молекулу $tk_p M \approx 1$, где M —растворимость стирола в воде. При наличии реакции (2) рН ВФ должен падать и одновременно должен выделяться кислород:



Эти факторы могут привести к накоплению в системе разных по природе продуктов окисления мономерных радикалов и продуктов их обрыва.

На рисунке показаны результаты измерения рН ВФ по ходу полимеризации (кривые 1 и 2). Параллельно измерялся рН чистого раствора персульфата калия (кривая 3). Как видно из рисунка, в пределах воспроизводимости ход изменения рН в ВФ как в статическом (кривая 1), так и в динамическом (кривая 2) условиях иден-

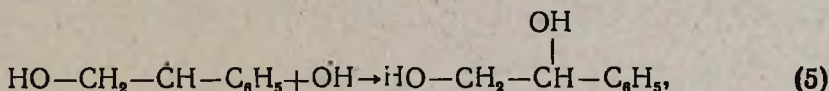


Изменение рН во времени в статической (1) и динамической (2) двухфазной системе стирол—водный раствор $K_2S_2O_8$ и в чистом водном растворе $K_2S_2O_8$ (3). Концентрация $K_2S_2O_8$ 10^{-2} моль/л, $T=50^\circ$

тичен изменению рН чистого раствора персульфата калия.

В ИК спектрах полимеров имелись поглощения на волнах $3300\text{--}3500\text{ см}^{-1}$ и 1685 см^{-1} , характерные соответственно для гидроксильных и сопряженных с ароматическим ядром карбонильных групп. Эти результаты и ход изменения рН в процессе полимеризации свидетельствуют в пользу протекания реакции (2) и о реакциях окисления концевых гидроксильных групп в полимерных молекулах.

Из сделанных выше расчетов следует, что в ВФ с большой вероятностью образуется фенилэтилгликоль



который в кислой среде может легко окисляться до бензальдегида^(8,9). Для проверки этого предположения после выделения полимера ВФ эстрагировали эфиром и полученный экстракт подвергали хроматографическому анализу. Сравнение хроматограмм полученного экстракта и подготовленного эфирного раствора бензальдегида подтвердило сделанное предположение. Более того, при сравнительно высоких концентрациях персульфата ($>1,5\%$) и при проведении процесса в атмосферных условиях реакции полимеризации в ВФ почти подавляются и в основном синтезируется бензальдегид. В последнем случае в ИК спектрах полимеров обнаруживается также характерное поглощение

для перокси группы (890 см^{-1}), свидетельствующее о протекании реакции окисления стирольного радикала (^{10,11}).

Из полученных результатов следует, что гомогенный механизм полимеризации стирола в водном растворе персульфата калия (³) маловероятен и что генерация олигомерных радикалов и полимеров обусловлена гетерогенностью системы и процессами полимеризации, протекающими на межфазной границе мономер—вода (¹²).

Полимеризацию проводили в ампулах при 50°. Свежеперегнанный под вакуумом стирол и бидистиллят освобождали от кислорода воздуха многократным замораживанием, продувкой азотом и размораживанием под вакуумом. $\text{K}_2\text{S}_2\text{O}_8$ марки х. ч. перекристаллизовывали методом изотермического испарения воды при 30°.

После завершения полимеризации (когда избыток мономера полностью превращается в полимер) ампулы вскрывали. Полимер из латекса выделяли с помощью центрифугирования, после чего тщательно промывали водой и высушивали под вакуумом. ВФ была подвергнута хроматографическому анализу на ГЖХ ЛХМ—80-1 с катарометрами на набивных колонках ($2000 \times 3\text{ мм}$), наполненных 5% апиезона М, 15% апиезона Л, 15% ПЭГА на хроматоне NAW и 5% ПЭГ 20000 на инертоне. Скорость газоносителя (гелий) 45 мл/мин. ИК спектры полимеров сняты на приборах UR-20 и Specord UR-75, рН латексов измерены на рН-метре рН-673.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Ս. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա. Վ. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ, Յ. Ս. ՔԻՆՈՅԱՆ

Ստիռոլով հագեցված կալիումի պերսուլֆատի ջրային լուծույթում մոնոմերային ռադիկալների հաբուցման բիմիդմբ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ կալիումի պերսուլֆատի ջրային լուծույթ-ստիրոլ համակարգի ջրային ֆազում ընթացող ռադիկալային ռեակցիաների հետևանքով հիմնականում առաջանում են ցածրմոլեկուլյար արոմատիկ սպիրտների օքսիդացման արգասիքներ: Ստացված արդյունքները հերքում են այն տեսակետը, ըստ որի նշված համակարգում էմուլգատորի բացակայության պայմաններում պոլիմերային դիսպերս մասնիկները գոլանում են ջրային ֆազում ստիրոլի հոմոգեն միխանիզմով պոլիմերվելու հետևանքով և խոսում են այդ պրոցեսի միջֆազային շերտում ընթանալու օգտին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Kotera, K. Furusawa, J. Takeda, Koll.—Zeltschr. u. Zeltschr. Polymere, v. 239, p. 677 (1970). ² A. Kotera, K. Furusawa, K. Kudo, Koll.—Zeltschr. u. Zeltschr. Polymere, v. 240, p. 837 (1970). ³ F. Hansen, J. Ugelstad, I. Polymer Sci, Polymer Chem. Ed., v. 16, p. 1953 (1978). ⁴ A. A. Оганесян, В. Г. Бояджян, А. В. Гукасян и др., ДАН СССР, т. 281, №5, с. 1145 (1985). ⁵ J. W. Vanderhoff, H. J. van den Hul, Brit. Polymer J., 2, 120 (1970). ⁶ M. S. Matheson, E. E. Auer, E. B. Bevilacqua, I., Am. Chem. Soc., v. 73, p. 1700 (1951). ⁷ J. M. Kolthoff, J. K. Miller, J. Am. Chem. Soc., v. 73, p. 3055 (1951). ⁸ П. Карпер, Курс органической химии, Изд. хим. лит., Л., 1962. ⁹ А. Е. Чучибабин, Основные начала органической химии, Изд. хим. лит., М., 1963. ¹⁰ F. A. Bovey, J. M. Kolthoff, I. Am. Chem. Soc., v. 69, p. 2143 (1947). ¹¹ A. A. Miller, F. R. Mayo, J. Am. Chem. Soc., v. 78, p. 1017 (1956). ¹² А. В. Гукасян, Г. С. Арутюнян, Г. А. Манукян и др., Арм. хим. журн., т. 38, № 6 (1985).

УДК 595.786.591.542:591.147

БИОЛОГИЯ

А. Г. Хачатрян

Изменение титра экдизона при накоплении фотопериодических сигналов у капустной совки *Barathra brassicae* L. (Noctuidae, Lepidoptera)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 12/VI 1985)

Исходя из имеющихся в литературе точек зрения на механизмы фотопериодической реакции (ФПР) насекомых ⁽¹⁻³⁾ можно представить себе два типа реакции эндокринной системы на количество короткодневных стимулов (КД) при индукции куколочной диапаузы.

1. Пороговый, качественный тип (рис. 1, а), при котором количество КД в пределах зоны активного развития или зоны диапаузы не влияет на состояние эндокринной системы. Эндокринная система реагирует лишь на то, больше ли сумма коротких дней или меньше, чем критическое число воздействий. Если сумма КД-стимулов оказывается больше критической, эндокринная система инактивируется и возникает диапауза. В случае же, если эта сумма меньше критической, эндокринная система, регулирующая тип развития, активируется.

2. Градуальный, количественный тип регуляции (рис. 1, б), при котором эндокринная система реагирует на абсолютное число КД-воздействий. По мере их увеличения активность эндокринной системы градуально снижается, и при пересечении ею некоего порогового уровня возникает диапауза.

К одним из основных гормонов насекомых, участвующих в регуляции сезонного развития, относится экдизон—гормон линьки. На основании многих экспериментальных данных, в основном полученных Вильямсом ⁽⁴⁻⁹⁾ на ряде видов с куколочной диапаузой, широко распрос-

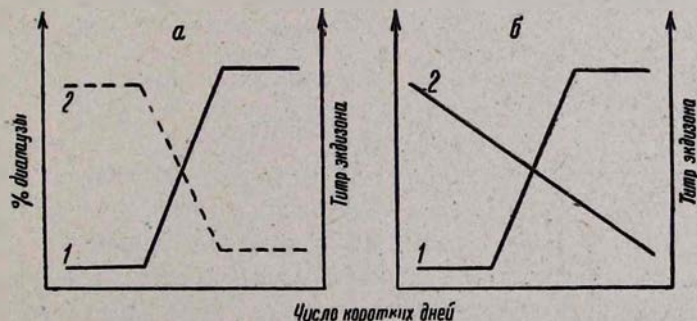


Рис. 1. Схематическое изображение двух предполагаемых типов реакций эндокринной системы на количество КД-стимулов при индукции куколочной диапаузы у насекомых: а—пороговый, качественный; б—градуальный, количественный

транено мнение о том, что феномен куколочной диапаузы связан с гормональным дефицитом—отсутствием в организме насекомого экдизона. Иными словами, экдизонсинтезирующая система (ЭСС) является ключевой при регуляции куколочной диапаузы. В связи с этим представляло интерес выяснить, по какому типу реагирует ЭСС капустной совки при накоплении КД-стимулов и формировании состояния зимней диапаузы. Для характеристики зависимости реакции насекомых от количества фотопериодических воздействий, полученных ими на фоточувствительной стадии и необходимых для индукции диапаузы, существует понятие «пакет фотопериодической информации» (10). Фоточувствительной для капустной совки является гусеничная стадия. Пакет фотопериодической информации составлен лишь КД-воздействиями, и у белгородской популяции, с которой мы работали, 14—16 КД вызывают критическую ситуацию, характеризующуюся возникновением диапаузы у 50% особей в выборке (11).

В нашем опыте гусениц содержали в стабильных фотопериодических условиях при 20-часовом освещении и температуре 20°. В процессе развития гусениц через различные интервалы времени переносили в КД-режим. Таким образом гусеницы получали разное количество индуктивных фотопериодов, т. е. варианты опыта отличались количеством КД-воздействий (0, 4, 8, 12 и 16 КД). На десятый день после окуливания для определения нативных концентраций гормона фиксировали куколок. Активно развивающихся и диапаузирующих особей различали по визуально наблюдаемым признакам. Титр гормона определяли по методу Карлсона (12, 13).

Результаты исследований показаны на рис. 2. В случаях, когда гусеницы получали различное число КД-воздействий, недостаточное для

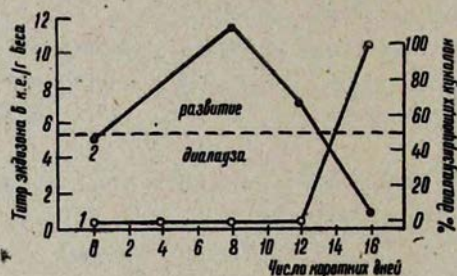


Рис. 2. Зависимость диапаузы (1) и титра экдизона (2) у куколок капустной совки от количества КД-воздействий на гусеничной стадии развития. Пунктиром показан критический уровень диапаузы

того, чтобы индуцировать диапаузу, наблюдаются некоторые количественные изменения концентрации экдизона. Средний уровень содержания гормона у этой группы насекомых 5 каллифора единиц (к. е.). У диапаузирующих куколок отмечен наиболее низкий титр экдизона (1 к. е.); резко отличающийся от такового у активно развивающихся куколок.

Результаты статистической обработки показали, что различия между соседними точками в группе куколок, детерминированных на активное развитие, не являются достоверными ($p > 0,05$), в то время как каж-

для из этих точек достоверно отличается от таковой для диапаузирующих куколок ($p < 0,01$). С нашей точки зрения, обнаруженные для категории активно развивающихся куколок различия в титре экдизона носят случайный характер и не имеют функциональной нагрузки. Но даже если и придавать этим изменениям значение, следует отметить, что направленность изменений титра экдизона обратна той, которую следовало ожидать по градуальной гипотезе, и хорошо согласуется с представлениями о пороговом типе суммации КД-стимулов на эндокринном уровне при индукции куколочной диапаузы капустной совки.

Институт зоологии Академии наук
Армянской ССР

Հ. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Էկդիզոնի տիտրի փոփոխությունը լուսապարբերական ազդանշանների կուտակման ընթացքում կաղամբի բվիկի (*Barathra brassicae* L. (Noctuidae, Lepidoptera) մոտ

Կաղամբի բվիկի հարսնյակային դիապաուզայի ինդուկցիայի ժամանակ լուսապարբերական ինֆորմացիայի կուտակման հետ կապված էնդոկրին պրոցեսների դինամիկայի ուսումնասիրության համար կատարվել է էկդիզոնի նատիվ խտացումների որոշում Կարլսոնի մեթոդիկայի միջոցով: Հայտնաբերված է էկդիզոնի տիտրի երկու մակարդակ, որոնք համապատասխանաբար բնորոշ են դիապաուզայի և ակտիվ զարգացման վիճակների համար: Փորձերի միջոցով ստացված էկդիզոնի տիտրի փոփոխությունների ուղղվածությունը շեմքային բնույթ է կրում: Ուսումնասիրության արդյունքները ցույց են տալիս, որ հարսնյակների դիապաուզայի ինդուկցիայի ժամանակ էնդոկրին օղակի ակտիվության լուսապարբերական կարգավորման հիմնական մեխանիզմը որակական է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Заславский, в кн.: Фотопериодизм животных и растений, Наука, Л., 1976
- ² В. А. Масленникова, С. И. Черныш, ДАН СССР, т. 213, № 2, с. 480—482 (1973).
- ³ В. П. Тыщенко, Физиология фотопериодизма насекомых. Тр. ВЭО, т. 59, Л. (1977). ⁴ С. М. Williams, Biol. Bull., v. 90, p. 234—243 (1946). ⁵ С. М. Williams, Biol. bull., v. 93, p. 89—98 (1947). ⁶ С. М. Williams, Biol. Bull., v. 103, p. 120—133 (1952). ⁷ С. М. Williams, Biol. Bull., v. 110, p. 201—218 (1956). ⁸ С. М. Williams, Biol. Bull., v. 134, p. 344—355 (1968). ⁹ С. М. Williams, Symp. Soc. Exp. Biol., v. 23, p. 285—300. (1969). ¹⁰ Н. И. Горышин, Г. Ф. Тыщенко, в кн.: Проблемы фотопериодизма и диапаузы насекомых, Изд. ЛГУ, Л., 1972. ¹¹ Н. И. Горышин, Г. Ф. Тыщенко, Энтомол. обозр., т. 52, с. 249—255 (1973). ¹² С. И. Черныш, Вестн. ЛГУ, т. 3, с. 140—142 (1976). ¹³ P. Karlson, Naturwissenschaften, v. 25, № 29, p. 445—453 (1966).

УДК 612.73+612.171

ФИЗИОЛОГИЯ

К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, А. С. Тираян

**О влиянии некоторых ингибиторов на медленноволновую
активность гладкомышечных клеток мочеточника**

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 18/VII 1985)

В гладкомышечной ткани наряду с быстрой пейсмейкеровой активностью, выражающейся в виде потенциалов действия, отмечается также медленная спонтанная активность, представляющая собой медленноволновые изменения мембранного потенциала. Ввиду миогенной природы данной активности, начинающейся в продольных мышечных слоях (^{1,2}) и распространяющейся электротонически в циркулярные слои (^{1,3}) особый интерес представляет исследование ионных механизмов, лежащих в основе этих флюктуаций. В ряде работ было продемонстрировано достаточно тесное сопряжение между генерацией медленных волн (МВ) и метаболизмом (^{2,4-6}). При этом если некоторые авторы связывают указанные флюктуации потенциала с включением или выключением $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -помпы (⁵), то другие исследователи наряду с $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -активируемой аденозинтрифосфатазой (АТФаза) не менее важную роль отводят и другим факторам (ионам кальция регулируемой калиевой проводимости, хлорной проводимости (^{7,8})).

В настоящей работе мы попытались показать роль некоторых мембранных механизмов, связанных с метаболическими процессами в ритмогенезе, не изученными с точки зрения медленноволновой активности, локализованной в узкой зоне пеллоуретерального соустья мочеточника.

Работа выполнена на 20 взрослых кошках (массой 3,5—4 кг) в условиях острого опыта.

Во всех экспериментах проводилась денервация мочеточника путем перерезки корешков чревного и тазового нервов на месте их выхода из спинного мозга у соответствующего межпозвоночного отверстия.

Внутриартериальная перфузия мочеточника проводилась введением стеклянных канюль в почечную артерию и почечную вену непосредственно у почки соответственно для подачи и оттока растворов. Скорость подачи перфузирующих растворов была постоянной и контролировалась артериальным давлением (110—120 мм рт. ст.).

Применяемый нормальный раствор Кребса имел следующий состав: NaCl —120,4; KCl —5,9; NaHCO_3 —15,5; MgCl_2 —1,2; NaHPO_4 —1,2; глюкоза—11,5; CaCl_2 —2,5 мМ на литр дистиллированной воды. В бескальциевом растворе KCl замещался NaCl . Оуабайн и арсенат натрия в необходимых концентрациях непосредственно добавлялись в перфузирующий раствор Кребса. Температура растворов была около 36°.

Для регистрации биоэлектрической активности пейсмекеровой области мочеточника монополярный серебряный шариковый электрод диаметром кончика 0,5 мм вводили в участок пиелоуретерального соустья. Индифферентный электрод устанавливали в толще паренхимы почки ближе к активному электроду.

По ходу эксперимента поддерживались необходимые условия подогрева брюшной полости и его периодического орошения вазелиновым маслом с целью предотвращения высыхания органа.

При исследовании медленноволновой активности мочеточника были зарегистрированы в основном МВ синусоидальной формы, в некоторых экспериментах были отмечены прогибы на фоне деполяризации (рис. 1, 1, 2, 1, 3, 1). Возможно, отмеченное отклонение волны от синусоидальности является, как отмечено некоторыми авторами ⁽⁵⁾, причиной наложения на нее электротонически распространяющихся волн из соседних смежных клеток.

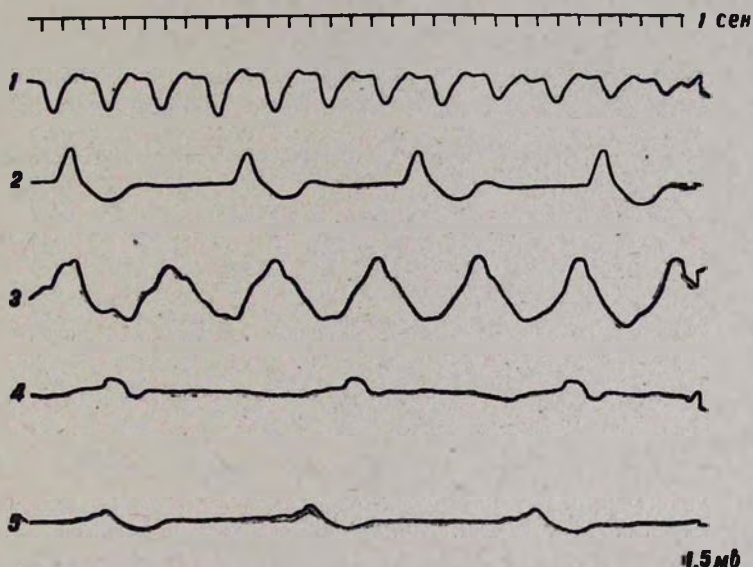


Рис. 1. Влияние оубаина на медленноволновую активность мочеточника. 1—активность, зарегистрированная до включения перфузии; 2—перфузирующий раствор Кребса; 3—добавление оубаина в раствор Кребса (первые 10 мин); 4—раствор Кребса с оубаином (через 15 мин); 5—нормальный раствор Кребса. Калибровка: 1,5 мв, отметка времени 1 с

Включение же перфузирующего раствора Кребса во всех препаратах растягивало волну во времени, изменяя также и амплитуду (рис. 1, 2, 2, 2, 3, 2). Если частота и амплитуда активности до перфузии были соответственно 18—20 кол/мин и 4,5—5 мв, то при переключении на раствор Кребса эти показатели изменились до 7—7,5 кол/мин и 7—8 мв.

Поддерживая в тестирующем растворе лишь ионный состав крови и исходя из поставленной задачи, мы не учитывали другие ее компоненты, которые, видимо, играют определенную регуляторную роль в пейсмекеровой активности, следствием чего и может быть изменение характеристик МВ.

Как известно, одним из специфических ингибиторов перекачивания

ионов через $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -насос является сердечный гликозид строфантин-Г (оубаин). Для изучения взаимосвязи между медленноволновой активностью и работой помпы в раствор Кребса добавляли оубаин $10^{-5} - 10^{-6}$ М). При этом в течение 4—5 мин наблюдалось учащение и урегулирование ритма; подобная картина сохранялась около 8—10 мин. На 15—18-ой мин действия ингибитора замечалось постепенное подавление активности (рис. 1, 3, 4). Последующее удаление оубаина приводило к восстановлению ритмики, как правило, за 8—10 мин (рис. 1, 5).

Аналогичные результаты были получены при блокаде работы $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -насоса путем удаления ионов калия из перфузирующего раствора Кребса. Сразу же наблюдалось кратковременное (в течение 2—3 мин) учащение ритмики, продолжающееся в течение 40—50 мин, а затем ингибирование активности с сохранением очень редких низкоамплитудных волн (рис. 2, 3, 4). Смена же бескалийного раствора на раствор Кребса приводила к полной стойкой блокаде активности, и ритмогенез восстанавливался лишь в течение 50—60 мин (рис. 2, 5). Видимо, в данном результате немаловажную роль играет резкая гиперполяризация мембраны вследствие включения работы помпы в актив-

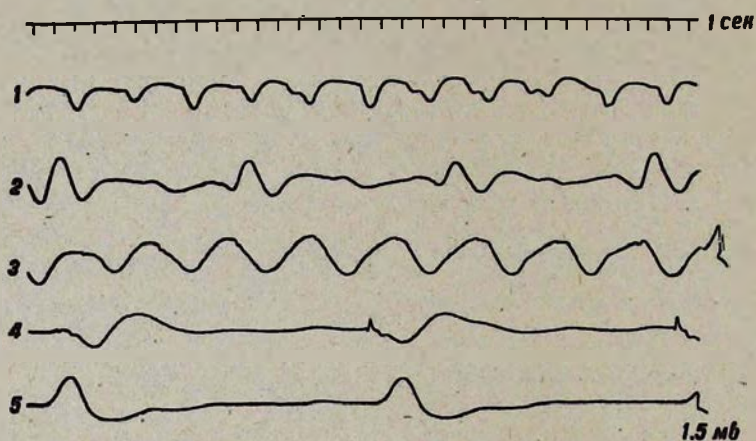


Рис. 2. Влияние бескалийной среды на медленноволновую активность мочеочника. 1—активность, зарегистрированная до включения перфузии; 2—перфузирующий раствор Кребса; 3—включение бескалийного раствора (через 2—3 мин); 4—бескалийный раствор (через 40—50 мин); 5—нормальный раствор Кребса. Калибровка: 1,5 мВ, отметка времени 1 с

ном режиме выброса ионов натрия. Растяжение времени ингибирования помпы в бескалийном растворе по сравнению с оубаином, видимо, связано с присутствием в межклеточной среде остаточного калия и долгой его отмывкой перфузирующим раствором.

Наличие электрогенного $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -насоса в гладкомышечных клетках доказано рядом экспериментальных исследований (^{6, 9-11}). В этой связи выдвигаются возможные модификации зависимости колебаний мембранного потенциала от активности помп. Так, медленноволновая активность тощей кишки кошки объясняется циклическими изменениями входящего в клетку ионного тока и электрогенным выбросом ионов натрия (^{4,12}). Согласно же данным Коннора и соавторов (⁵) амплиту-

да МВ находится в пределах электрогенной возможности насоса и поэтому полностью обеспечивается им.

Однако принимая во внимание изменения ионных концентраций при блокаде натриевого насоса, по-видимому, подавление МВ не следует связывать лишь с $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -активируемой АТФазой. Так, согласно определенным данным (¹³), в гладкомышечных клетках мочеточника допускается наличие $\text{Na}^+ - \text{Ca}^{2+}$ -обменного механизма. Ввиду существенного участия ионов Ca^{2+} в функционировании МВ определенная роль может быть отведена Ca^{2+} -помпе, наличие которой допускается в гладкой мышце (^{7,14}).

Однако обсуждаемые возможности никак не могут отрицать непосредственной роли $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -помпы в создании медленноволновой активности, о чем свидетельствуют наши результаты наряду с литературными данными.

В качестве ингибитора в работе был использован также арсенат натрия (5 мМ), блокирующий наряду с $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -помпой и другие метаболические процессы, протекающие с затратой аденозинтрифосфата. Результаты опытов представлены на рис. 3. Была получена картина, аналогичная ингибированию $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -помпы. Однако наблюдалось

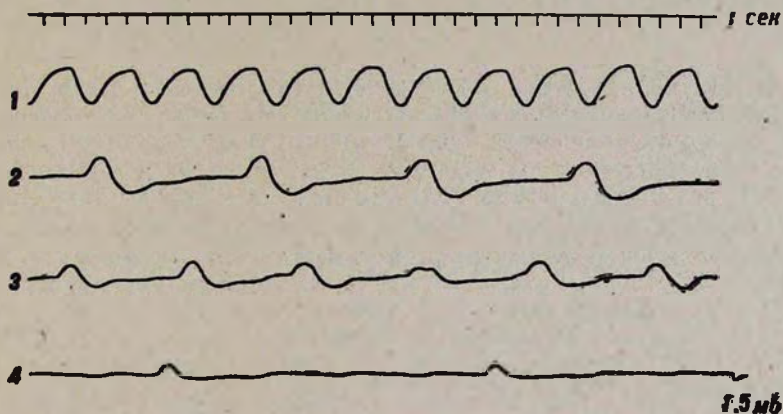


Рис. 3. Влияние арсената натрия на медленноволновую активность мочеточника. 1—активность, зарегистрированная до включения перфузии; 2—перфузирующий раствор Кребса; 3—добавление арсената натрия в раствор Кребса (через 1—2 мин); 4—арсенат натрия в растворе Кребса (через 5—6 мин). Калибровка: 1,5 мВ, отметка времени 1 с

полное исчезновение активности и за более короткое время (5—6 мин). Эти результаты косвенно могут служить основанием для предположения о наличии и других метаболически зависимых механизмов, контролирующих миогенную активность гладких мышц. Данные предположения представляются весьма сложными и требуют дальнейшего тщательного исследования.

Исходя из вышеизложенного, а также данных литературы (^{4-6,12}) полученные результаты могут служить доказательством того, что в ритмогенезе пейсмекеровой зоны мочеточника определяющая роль принадлежит ионным механизмам, связанным с метаболическими процесса-

ми. Имеется основание полагать, что указанные механизмы функционируют наряду с другими нонными факторами, контролирующими многогенную активность.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Բ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Ց. ՎԱՆՑՅԱՆ, Ա. Ս. ՏԻՐԱՅԱՆ

Մի ֆանի արգելակիչների ազդեցությունը միզածորանի
դանդաղ ավիֆների ակտիվության վրա

Ներերակային պերֆուզիայի մեթոդով ուսումնասիրվել է մի քանի իոնային պրոցեսներում արգելակիչների դերը միզածորանի հարթ մկանների ազդեցության վրա:

Ցույց է տրված մեմբրանային մեխանիզմների որոշիչ դերը, կապված նյութափոխանակության պրոցեսների հետ, այլ իոնային գործոնների հետ միասին, որոնք միզածորանի պելոմեկերային ղոնայի միոգեն ակտիվության ռիթմոգենների մեջ ունեն հսկող դեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ M. Kodajashi, T. Nagai, C. L. Prosser, Am. J. Physiol., v. 211, p. 1281—1291 (1966). ² A. Bortoff, Am. J. Physiol., v. 201, p. 203—208 (1961). ³ C. Connor, C. L. Prosser, Am. J. Physiol., v. 226, p. 1212—1219 (1974). ⁴ D. D. Job, Am. J. Physiol., v. 217, p. 1534—1541 (1969). ⁵ J. A. Connor, C. L. Prosser, W. A. Weems, J. Physiol., v. 240, p. 671—701 (1974). ⁶ T. Y. El-Sharkawy, E. E. Daniel, Am. J. Physiol., v. 229, p. 1277—1286 (1975). ⁷ T. Tomita, H. Watanabe, Phil. Trans. R. Soc., v. 265, p. 73—85 (1973). ⁸ T. Y. El-Sharkawy, E. E. Daniel, Am. J. Physiol., v. 229, p. 1287—1298 (1975). ⁹ К. В. Казарян, А. С. Тиран, ДАН АрмССР, т. 79, с. 223—226 (1984). ¹⁰ G. S. Taylor, M. Paton, E. E. Daniel, J. Gen. Physiol., v. 56, p. 360—375 (1970). ¹¹ R. Casteels, G. Droogmans, H. Hendrickx, J. Physiol., v. 228, p. 733—748 (1973). ¹² J. Liu, C. L. Prosser, D. D. Job, Am. J. Physiol., v. 217, p. 1542—1547 (1969). ¹³ Aickin, C. Clare, A. F. Brading, Th. V. Burdyga, J. Physiol., v. 347, p. 411—431 (1984). ¹⁴ R. Casteels, C. van Breemen, Pflügers Arch., v. 359, p. 197—207 (1975).

