

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXXXI, № 5

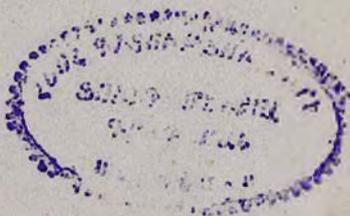
1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, անիտ. գիտ. բնիկե-  
ծու (պատ. բարձրագույն), է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ք. ԲԱՐՍԵՍՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱՎԱԼՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄ-  
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ  
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի անու-  
կայ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ.  
անդամ, Գ. Ս. ՍԱԼՍԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-  
դեմիկոս, Մ. Մ. ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ.  
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ  
ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ  
ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.  
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.  
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик  
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик  
АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-  
демик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН,  
академик АН АрмССР (зам. отв. редак-  
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН  
АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН  
АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр.  
АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.  
АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,  
академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-  
ДЖЯН, академик АН АрмССР.



**Բ Ո Վ Ա Ն Կ Ե Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն**

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

Վ. Մ. Յուլին—Սիմետրիայի ուսարածական խմբով բաղմուխյան վրա տրված ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը	195
Վ. Ս. Ջալալյան, Ի. Թ. Բաղդասարյան—Գիրիխլեյի ախտի վերջավոր ինտեգրալով ֆունկցիաների աճի մասին	200
Վ. Վ. Ասատրյան—Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի ռեզոլյարիզացիայի մի մեթոդի մասին	205

**Մեխանիկա**

Ս. Հ. Սարգսյան—Իրկայնական սեղմող ուժերով, երկայնական մազնիսական դաշտում անիզոտրոպ սալի տատանումների խնդրի մասին	209
---	-----

**ՀԻՊԻՐՈՄԵՔԱՆԵԿԱ**

Ջ. Ա. Թոբոսյան—Նուրբ-շերտային կենտրոնախույս բաժանման դեպքում հեղուկի բաշխման հետազոտությունը վերադիրների հավաքածուի մեջ	213
---	-----

**ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ Մեխանիկա**

Ս. Ռ. Մեսյան—Կավային գետնահողերի կողային ճնշման և ուռելու ճնշումների որոշման մասին	218
--	-----

**Ֆիզիկա**

Մ. Ն. Ներսիսյան, Պ. Ս. Պոդոսյան, Լ. Վ. Սահակյան—Ճառագայթումը ոչ գծային միջավայրի սահմանից տարրերային հանախականության գեներացիայի դեպքում	223
--	-----

**Ֆիզիոլոգիա**

Ժ. Ի. չակաբյան, Ռ. Ա. Ջալալյան, Ա. Ս. Աղաբալյան, Ա. Ա. Ջաբրիլյան, Կ. Ռ. Ֆրանգուլյան, Ն. Վ. Հայրապետյան—Թռչունների վիրուսային հիվանդության դեմ վակցինացիայի ժամանակ հակամարմինազոլացման խթանման մասին	228
Բովանդակություն LXXXI հատորի	231

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>В. М. Фомин</i> —Интегральное представление функции, заданной на множестве с пространственной группой симметрии . . . . .	195
<i>В. С. Захарян, Д. Т. Багдасарян</i> —О росте функций с конечным интегралом типа Дирихле . . . . .	200
<i>В. В. Асатрян</i> —Об одном методе регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений . . . . .	205

### МЕХАНИКА

<i>С. О. Саркисян</i> —К задаче о колебании анизотропной пластинки с продольными сжимающими усилиями в продольном магнитном поле . . . . .	209
--	-----

### ГИДРОМЕХАНИКА

<i>Дж. С. Торосян</i> —Исследование распределения жидкости по комплекту вставок при тонкослойном центрифугировании . . . . .	213
--	-----

### МЕХАНИКА ГРУНТОВ

<i>С. Р. Месчян</i> —Об определении бокового давления и давлений набухания глинистых грунтов . . . . .	218
--	-----

### ФИЗИКА

<i>М. Н. Нерсисян, П. С. Погосян, Л. В. Саакян</i> —Излучение от нелинейной границы при генерации разностной частоты . . . . .	223
--	-----

### ФИЗИОЛОГИЯ

<i>Ж. И. Акопян, Р. А. Захарян, А. С. Агабалян, А. А. Чарчоглян, К. Ш. Франгулян, Н. В. Айрапетян</i> —О стимуляции антителообразования при вакцинации против вирусной болезни птиц . . . . .	228
Содержание LXXXI тома . . . . .	231

F107C  
 1985

C O N T E N T S

MATHEMATICS	P.
<i>V. M. Fomin</i> —On integral representation of the function defined at the set with the space-group symmetry . . . . .	195
<i>V. S. Zakharian, D. T. Bagdasarjan</i> —On the growth of functions with a finite integral of the Dirichlet type. . . . .	200
<i>V. V. Asatrian</i> —About a method of regularization of the systems of singular integral equations . . . . .	205
<b>MECHANICS</b>	
<i>S. O. Sarkissian</i> —On the problem of anisotropic plate vibration with longitudinal compression forces in longitudinal magnetic field . . . . .	209
<b>HYDROMECHANICS</b>	
<i>J. S. Torossian</i> —Investigation of liquid distribution according to the specified number of insertions in thin-layered centrifugation. . . . .	213
<b>SOIL MECHANICS</b>	
<i>S. R. Meschlan</i> —On the determination of lateral pressure and swelling pressure of clayey soils . . . . .	218
<b>PHYSICS</b>	
<i>M. N. Nerstian, P. S. Poghosian, L. V. Sahakian</i> —Nonlinear border radiation at differential frequency generation . . . . .	223
<b>PHYSIOLOGY</b>	
<i>Zh. I. Akopian, R. A. Zacharian, A. S. Agabalian, A. A. Charchoghlan, K. Sh. Phrangullan, N. V. Airapetian</i> —Stimulation of antibody formation by vaccine against bird viral diseases . . . . .	228
Contents of LXXXI volume . . . . .	231

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 26.11.1985 г. Подписано к печати 10.03.1986 г. ВФ 07246.

Бумага № 1, 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-пзд. 3.26 л. Тираж 430. Заказ 842. Издат. 6698.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,  
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.45:539.3

В. М. Фомин

**Интегральное представление функции, заданной на множестве с пространственной группой симметрии**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 31/V 1984)

Решение задач статики и динамики линейных упругих систем допускает существенные упрощения при наличии симметрии у таких систем (1-3). Основопологающим является тот факт, что приложенная нагрузка может быть представлена в виде линейной комбинации составляющих, преобразующихся по неприводимым представлениям группы симметрии. Аппарат подобного разложения, разработанный в (4) для систем с пространственной группой симметрии, относится к важному специальному случаю исходной функции, так называемому случаю усеченной симметрии. Для систем, инвариантных относительно группы трансляций, соответствующий алгоритм был предложен в работе (5).

В настоящей статье излагается алгоритм разложения, пригодный для групп симметрии и функций более общего вида.

1<sup>0</sup>. Рассмотрим множество  $\Pi$  точек трехмерного вещественного линейного пространства  $R_3$ , инвариантное относительно пространственной группы  $G$ . Будем называть основным параллелепипед, настроенный на основных векторах  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  подгруппы  $G_T$  трансляций группы  $G$ , а элементарным симплексом — замыкание наименьшей по включению односвязной части этого параллелепипеда, действуя на которую преобразованиями из максимальной точечной подгруппы  $H \subset G$ , можно покрыть весь параллелепипед. Выберем один из элементарных симплексов в качестве основного и присвоим основному параллелепипеду символ  $S_{000}$ , а основному элементарному симплексу символ  $S_{000i}$ . Система элементарных симплексов  $S_{m_1 m_2 m_3} = t_{m_1 m_2 m_3} h_n S_{000i} (m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; h_n \in H, n = 1, 2, \dots, N)$  образует покрытие множества  $\Pi$ . Через  $t_{m_1 m_2 m_3}$  обозначена трансляция на вектор  $m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3$ . Предполагается, что  $h_n$  — тождественное преобразование и что порядок группы  $H$  равен  $N$ . Заметим попутно, что все рассуждения, проведенные для трехмерного случая, легко переносятся на случай пространства  $R_n$  с любым  $n$ .

Введем функции  $\Psi_n(x_{000j}) (j, n = 1, 2, \dots, N)$ , определенные на основном параллелепипеде  $S_{000}$ , следующим образом:

$$\Psi_n(x_{000j}) = \delta_{jn} \quad (j, n = 1, 2, \dots, N; x_{000j} \in S_{000i}).$$

Разложим каждую из этих функций на составляющие, преобразующиеся по неэквивалентным неприводимым представлениям точечной груп-

пы некоторого вектора  $\vec{k} \in \Omega$  ( $\Omega$  — зона Бриллюэна <sup>(6)</sup>)

$$\Psi_n(x_{00j}) = \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{l_\mu} \Psi_{n\mu}(x_{00j}, \vec{k}) \quad (j, n = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\Psi_{n\mu}(x_{00j}, \vec{k}) = \frac{I_\mu}{N_k} \sum_{\alpha \in H_k} \tau_{\nu\alpha}^{(\mu)}(k^{-1}) \Delta \Psi_n(x_{00j}).$$

В этих формулах  $M$  — число неэквивалентных неприводимых представлений группы  $H_k$ ,  $l_\mu$  — размерность  $\mu$ -го неприводимого представления, этой группы,  $\tau_{\nu\alpha}^{(\mu)}$  — элемент матрицы этого представления,  $N_k$  — порядок группы  $H_k$ .

Из теории представлений пространственных групп следует, что функции

$$\begin{aligned} \Phi_{n\nu j}(x_{m_1 m_2 m_3}, \vec{k}) &= \Psi_{g(j)n, \nu}(x_{00j}, g(j)\vec{k}) \exp[-i g(j)\vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3}] \\ (\nu = 1, 2, \dots, l_j; j = 1, 2, \dots, L; x_{m_1 m_2 m_3} &= l_{m_1} a_1 + l_{m_2} a_2 + l_{m_3} a_3) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\vec{a}_{m_1 m_2 m_3} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3$$

при фиксированных  $n$ ,  $\vec{k}$  и  $\mu$  преобразуются по неприводимому представлению группы  $\Omega$ . В формуле (1) через  $g(j)$  ( $j = 1, 2, \dots, L$ ) обозначены элементы группы  $H$ , участвующие в разложении ее на левые смежные классы по подгруппе  $H_k$ . Заметим, что любая функция, заданная на основном параллелепипеде, может быть представлена в следующем виде:

$$F(x_{00j}) = \sum_{n=1}^N F(x_{00n}) \Psi_n(x_{00j}) \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

а, следовательно,

$$F(x_{00j}) = \sum_{n=1}^N F(x_{00n}) \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{l_\mu} \Psi_{n\mu}(x_{00j}, \vec{k}) \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

2°. Рассмотрим множество ограниченных функций, определенных на множестве  $\Pi$ . Ряд

$$\begin{aligned} F(x_{00n}, x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m_1, m_2, m_3 = -\infty}^{\infty} f(x_{m_1 m_2 m_3}) \exp[i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)] \\ (x_{m_1 m_2 m_3} &= l_{m_1} a_1 + l_{m_2} a_2 + l_{m_3} a_3, x_{00n} \in S_{00n}) \end{aligned} \quad (3)$$

сходится в  $S'$  к периодической обобщенной функции с 3-периодом  $(2\pi, 2\pi, 2\pi)$  <sup>(6)</sup>. Ее можно рассматривать как обобщенную функцию на кубе  $\Gamma\{-\infty \leq x_1, x_2, x_3 \leq \infty\}$  с отождествленными противоположными гранями. В качестве основных принимаются здесь бесконечно-дифференцируемые функции на  $\Gamma$ . Тогда

$$f(x_{m_1 m_2 m_3}) = \frac{1}{(2\pi)^3} (F, \exp[-i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)]). \quad (4)$$

Заметим, что (4) может быть записано так:

$$f(x_{m_1 m_2 m_3}) = \frac{1}{V} (F \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3})). \quad (5)$$

Здесь функция  $F$  рассматривается как обобщенная на зоне Бриллюэна  $\Omega$ . Приняты следующие обозначения:  $\vec{a}_{m_1 m_2 m_3} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3$ ,  $\vec{k} = \frac{1}{2\pi} (x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3)$  ( $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  — основные векторы обратной решетки,  $\vec{a}_m \cdot \vec{b}_n = \delta_{mn}$ ;  $m, n = 1, 2, 3$ ),  $V$  — объем зоны Бриллюэна.

Обозначим через  $\Delta$  множество ограниченных функций на  $\Pi$ , для которых соответствующее дискретное преобразование Фурье (3) имеет следующий вид:

$$F(x_0, \vec{k}) = F_0(x_0, \vec{k}) + \sum_{p=1}^{p_1} F_1(x_p, \vec{k}_p) \lambda(\vec{k} - \vec{k}_p) + \sum_{p=1}^{p_2} F_2(x_p, \vec{k}) \delta\Gamma_p \quad (6)$$

$$(x_0 = x_{000n}, n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь  $F_0(x_0, \vec{k})$  — кусочно-непрерывная функция, определенная всюду в  $\Omega$ , за исключением конечного числа точек, кусочно-гладких поверхностей и линий, интеграл от которой по области  $\Omega - U_\varepsilon$  ( $U_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность вышеуказанных точек, поверхностей и линий) стремится к конечному пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $F_2(x_0, \vec{k})$  — кусочно-непрерывная функция, заданная на кусочно-гладких поверхностях и линиях  $\Gamma_p$  ( $p = 1, 2, \dots, p_2$ );  $\lambda(\vec{k})$  — дельта-функция,  $\delta\Gamma_p$  — обобщенная функция на  $\Omega$ , действующая по правилу

$$(F(x_0, \vec{k}) \delta\Gamma_p, \varphi) = \int_{\Gamma_p} F(x_0, \vec{k}) \varphi(\vec{k}) d\Gamma_p.$$

Подставив (6) в (5), получим

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x), \quad (7)$$

где

$$f_0(x) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} F_0(x_0, \vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3}) d\Omega_{\vec{k}}, \quad (8)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{p_1} F_1(x_p, \vec{k}_p) \exp(-i\vec{k}_p \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3}),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_p} F_2(x_0, \vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3}) d\Gamma_p$$

$$(x_0 = x_{000n}, x = x_{m_1 m_2 m_3}, n = 1, 2, \dots, N).$$

Заметим, что (8) может быть записано так;

$$f_0(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \int_{\Omega_p} F_0(x_0, \vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1 m_2 m_3}) d\Omega_{\vec{k}}.$$

Здесь через  $\Omega_p$  обозначен основной элементарный симплекс зоны

Бриллюэна. Остальные элементарные симплексы могут быть получены так:

$$\Omega_p = h_p \Omega_1 \quad (h_p \in H). \quad (9)$$

Поэтому

$$f_0(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \int_{\Omega_1} F_0(x_0, h_p \vec{k}) \exp(-ih_p \vec{k} \cdot \vec{a}_{m_1, m_2, m_3}) d\Omega_{\vec{k}}.$$

Воспользовавшись разложением (2) и учитывая (1), будем иметь

$$f_0(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \int_{\Omega_1} F_0(x_0, h_p \vec{k}) \Phi_{n_1, l_p}(x, \vec{k}) d\Omega_{\vec{k}}, \quad (10)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{p_1} \sum_{n=1}^N F_1(x_0, \vec{k}_p) \sum_{r=1}^{N_p} \sum_{s=1}^{L_p} \Phi_{n, l_p}(x, \vec{k}_p), \quad (11)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{p_2} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_p} F_2(x_0, \vec{k}) \sum_{s=1}^M \sum_{v=1}^{L_p} \Phi_{n, l_p}(x, \vec{k}) d\Gamma_p \quad (12)$$

( $x = x_{m_1, m_2, m_3}$ ,  $x_0 = x_{000n}$ ;  $n, j = 1, 2, \dots, N$ ;  $m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

Здесь  $l_{p,r}$  — размерность  $r$ -го неприводимого представления точечной группы вектора  $\vec{k}_p$ ,  $M_p$  — число неэквивалентных неприводимых представлений этой группы. При выводе (10) учтено, что функция  $F_0(x, \vec{k})$  суммируема в  $\Omega$  и множество векторов с нетривиальными точечными группами имеет меру нуль.

Таким образом, справедлива

*Теорема. Произвольная функция из  $\Delta$  имеет дискретно-континуальное разложение (7), (10) — (12) по функциям (1), преобразующимся по неприводимым представлениям группы  $G$ .*

*Замечание.* Пусть множество точек  $\vec{k}_p$  в формуле (6) инвариантно относительно преобразований  $h \in H$ . Разбивая суммирование по  $p$  в формуле (11) на ряд суммирований по точкам  $\vec{k}_p$ , расположенным в пределах одного элементарного симплекса  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и учитывая (9), будем иметь

$$f_1(x) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_p \in \Omega_j} \sum_{\mu=1}^{M_p} \sum_{v=1}^{l_{p,\mu}} \sum_{r=1}^{L_p} \sum_{n=1}^N F_1(x_{0,0,0,z(q)n}, g(q)\vec{k}_p) \Phi_{n, l_p}(x, \vec{k}_p).$$

Здесь  $L_p$  — число левых смежных классов в разложении группы  $H$  по точечной группе вектора  $\vec{k}_p$ .

Одесский инженерно-строительный институт

Սիմետրիայի տարածական խմբով բազմության վրա տրված  
ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը

Սիմետրիկ առաձգական համակարգերի ստատիկայի և դինամիկայի խնդիրների լուծումներն էական պարզեցումներ են թույլ տալիս: Հիմնականն է հանդիսանում այն փաստը, որ կիրառված բեռնվածքը որպես սիմետրիկ բազմության վրա տրված ֆունկցիա, կարելի է ներկայացնել ըստ բազմության սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացումների ձևափոխվող բազմադրիչների գծային կոմբինացիայի տեսքով:

Սիմետրիայի տարածական խմբով բազմության վրա տրված սահմանափակ ֆունկցիայի համար առաջարկված է Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության վրա հիմնված ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս ֆունկցիան ներկայացնել ըստ սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացումների ձևափոխվող ֆունկցիաների դիսկրետ-կոնտինուալ վերլուծությունով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. М. Фомин, в сб.: Распределенное управление процессами в сплошных средах, вып. 6, 1969. <sup>2</sup> В. М. Фомин, в сб.: Сложные системы управления, 1976. <sup>3</sup> М. Л. Бурныкин, ПММ, т. 39, вып. 3 (1975). <sup>4</sup> М. Л. Бурныкин, ДАН УССР, Сер. А, № 7 (1975). <sup>5</sup> Б. М. Нуллер, М. Б. Рывкин, Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, т. 136 (1980). <sup>6</sup> В. С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, Наука, М., 1979. <sup>7</sup> И. Г. Каплан, Симметрия многоэлектронных систем, Наука, М., 1969. <sup>8</sup> Г. Я. Любимский, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, М., 1958.

УДК 517.518.235

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, Д. Т. Багдасарян

**О росте функций с конечным интегралом типа Дирихле**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/VI 1984)

Пусть  $U = \{|z| < 1\}$  единичный круг. Для аналитических в  $U$  функций  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  обозначим

$$\overline{M}(r, f) = \sum_{n=0}^\infty |a_n| r^n; \quad M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (0 < r < 1).$$

Обозначим через  $\Omega^0$  класс функций  $\varphi(t)$ , для которых  $\varphi(t) \uparrow +\infty$  при  $t \rightarrow 0$  и  $\int_0^\infty \varphi(x) dx < +\infty$ , а через  $\Omega_0$  класс функций  $h(t) \geq 0$ , которые монотонно стремятся к нулю при  $t \downarrow 0$ , и для них существует производная функция  $h'(t) = H(t)$ , для которой

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{tH(t)} = C \quad (\neq 0, \infty) \quad (1)$$

и  $H(x) \uparrow +\infty$  при  $x \downarrow 0$ .

Ясно, что если  $h(t) \in \Omega_0$ , то  $h'(x) = H(x) \in \Omega^0$ .

Далее обозначим через  $D_n$  класс функций  $f$ , аналитических в  $U$ , таких, что при  $h(x) \in \Omega_0$

$$S_h(f) = \int \int_U h(1-r) |f'(re^{i\varphi})|^p r dr d\varphi < +\infty. \quad (2)$$

Ясно, что если  $h(t) \in \Omega^0$ , то  $D_h \subset D_1$ , а если  $h(t) \in \Omega_0$ , то  $D_h \supset D_1$ , где  $D_1$  класс функций  $D_h: h(t) = \text{const}$ .

Приведем несколько вспомогательных результатов

Лемма 1. Если  $\omega(x) \in \Omega^0$  и

$$\Phi_{\alpha, \beta}(n) = \int_0^1 \omega(1-x) x^{\alpha n + \beta} dx,$$

где  $n \geq 1$  целое,  $1 \leq \alpha < +\infty$ ,  $-1 \leq \beta < +\infty$ , то

$$\Phi_{\alpha, \beta}(n) = O \left( \int_0^{\frac{1}{n}} \omega(x) dx \right).$$

Доказательство можно найти в работе (1)

Лемма 2. Пусть  $h(x) \in \Omega_0$ ,  $0 \leq p \leq 1$  и

$$G_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\left[ h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p}. \quad (3)$$

Тогда при  $\rho \rightarrow 1$  имеет место оценка

$$G_p(\rho) = O\left( \frac{1}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p} \right). \quad (4)$$

Доказательство. В силу (3) можно предполагать, что не-

$$\text{равенство } 0 < C_1 \leq \frac{nh\left(\frac{1}{n}\right)}{H\left(\frac{1}{n}\right)} \leq C_2 < +\infty$$

имеет место начиная с  $n=1$ , что не влияет на последующие рассуждения.

$$\text{Имеем } G_p(\rho) \leq \sum_{n < \frac{1}{1-\rho}} \frac{\rho^n}{\left[ h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p} + C \sum_{n > \frac{1}{1-\rho}} \frac{n^p \rho^n}{\left[ H\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

$$\text{но легко усмотреть, что } \Sigma_1 \leq \frac{1}{[h(1-\rho)]^p} \sum_{n < \frac{1}{1-\rho}} \rho^n < \frac{1}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{C_2}{[H(1-\rho)]^p} \sum_{n > \frac{1}{1-\rho}} n^p \rho^n < \frac{C_2}{[H(1-\rho)]^p} \sum_1 n^p \rho^n \sim \\ &\sim \frac{C_2}{(1-\rho)^{1+p} [H(1-\rho)]^p} \leq \frac{C}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$G_p(\rho) \geq \sum_{n > \frac{1}{1-\rho}} \frac{\rho^n}{\left[ h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p} \geq \frac{1}{[h(1-\rho)]^p} \sum_{N+1}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p},$$

$$\text{где } N \text{ удовлетворяет условию } N \leq \frac{1}{1-\rho}, \quad N+1 > \frac{1}{1-\rho}.$$

Отсюда для  $\rho^{N+1}$  получаем следующее неравенство:  $\rho^{N+1} > \rho^{\frac{1}{1-\rho}+1}$ , и, так как  $\lim_{\rho \rightarrow 1} \rho^{\frac{2-p}{1-p}} = e^{-1}$ , то при  $\rho$ , достаточно близких к 1, имеем  $\rho^N > \frac{1}{2e}$ .

$$\text{Следствие. Обозначим } Q_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1-p} \left[ H\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p}.$$

При  $\rho \rightarrow 1-0$  имеет место

$$Q_p(\rho) = O\left( \int_0^{\rho} \frac{dt}{(1-t)[h(1-t)]^p} \right); \quad (5)$$

в частном случае при  $p=1$  получается

$$Q_1(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)} = 0 \left( \int_0^{\rho} \frac{dt}{(1-t)h(1-t)} \right). \quad (6)$$

Пусть  $f(z) = \sum a_n z^n$  аналитична в  $U$  и  $h(x) \in \mathcal{Q}_0$ . Тогда

$$S_h(f) = \sum |a_n|^2 n^2 \int_0^1 h(1-\rho) \rho^{2n-1} d\rho = \sum |a_n|^2 \frac{n}{2} \int_0^1 H(1-\rho) \rho^{2n} d\rho.$$

Так как  $H(1-\rho) \in \Omega^3$ , то согласно лемме 1

$$\int_0^1 H(1-\rho) \rho^{2n} d\rho = 0 \left( h\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

и следовательно

$$S_h(f) = C \sum |a_n|^2 n h\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

**Теорема 1°.** Пусть  $f(z) \in D_h$ ,  $h(x) \in \mathcal{Q}_0$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1} \overline{M}(r, f) [Q_1(r^2)]^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad (8)$$

где

$$Q_1(r) = 0 \left( \int_0^{\rho} \frac{dt}{(1-t)h(1-t)} \right).$$

**Доказательство.** Напишем  $\overline{M}(r, f)$  в следующем виде:

$$\overline{M}(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^K |a_n| r^n + \sum_{n=K+1}^{\infty} \left[ n h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{1}{2}} |a_n| \left[ n h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} r^n.$$

Применяя теперь неравенство Шварца, получим

$$\begin{aligned} \overline{M}(r, f) &\leq \sum_{n=0}^K |a_n| \cdot r^n + \left( \sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n|^2 n h\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} \left[ n h\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{-1} r^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^K |a_n| \cdot r^n + \left( \sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n|^2 n h\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} [Q_1(r^2)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Откуда следует

$$\limsup_{r \rightarrow 1-0} \overline{M}(r, f) [Q_1(r^2)]^{-\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n|^2 n h\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как левая сторона неравенства не зависит от  $K$ , то отсюда вытекает доказательство теоремы.

Докажем теперь, что в теореме 1 величина  $\frac{1}{2}$  наилучшее возможное значение.

**Теорема 2.** Для любой константы  $p$ , удовлетворяющей условию  $0 < p < \frac{1}{2}$ , в  $U$  существует функция  $\varphi \in D_h$  при  $h \in \mathcal{Q}_0$ , такая,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \inf M(r, \varphi) [Q_1(r^2)]^{-p} \geq 1. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть  $\varphi(z) = Q_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1-p} \left[ H\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p}$ .

Сперва докажем, что  $Q_p(z) \in D_n$ . Из (1) имеем, что при  $x$ , достаточно

$$\text{близких к нулю, } \frac{C_1}{x} < \frac{h'(x)}{h(x)};$$

интегрируя по  $x$  в интервале  $(x, x_0)$ , где  $x_0$  фиксировано, а  $x$  достаточно близко к 0, получим  $h(x) < Mx^{C_1}$ ; отсюда, так как  $h'(x) = H(x) \uparrow +\infty$  при  $x \downarrow 0$ , получаем  $h(x) = H(\bar{x})x < Mx^{C_1}$ ,  $0 < \bar{x} < x$ .

$$\text{Следовательно } H(x)x < H(\bar{x})x < Mx^{C_1}; H(x) < \frac{M}{x^{1-C_1}},$$

где  $C_1, M$  — некоторые постоянные, и в силу того, что  $H(x) \uparrow +\infty$  при  $x \downarrow 0$ ,  $0 < C_1 < 1$ .

Имеем

$$S_n(\varphi) = C \sum_1^{\infty} \left[ H\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{1-2p} \frac{1}{n^{2-2p}} < C_2 \sum_1^{\infty} \frac{n^{(1-2p)(1-C_1)}}{n^{2-2p}} < +\infty.$$

Теперь докажем, что имеет место (10).

Из равенства (5) имеем

$$M(r, Q_p) = \sum \frac{r^n}{n^{1-p} \left[ H\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p} = 0 \left( \int_0^r \frac{dt}{(1-t)[H(1-t)]^p} \right).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} M(r, \varphi) [Q_1(r^2)]^p &\geq C \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^r \frac{dt}{(1-t)[h(1-t)]^p} \cdot \left( \int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(1-t)} \right)^{-p} = \\ &= \frac{C}{p} \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ h(1-r) \int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(1-t)} \right\}^{1-p} \geq \frac{C}{p} \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{h(1-r)}{C_1(1-r)H(1-r)} \right\}^{1-p} = \\ &= A (\neq 0, \infty), \end{aligned}$$

отсюда и следует (10).

Замечание. Оценки (8) и (10) при  $h(t) = \text{const}$  совпадают с результатами Коулинга (3) и Ямасита (3), а при  $h(t) = t^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) — с соответствующим результатом (4).

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Դ. Ք. ԲԱՂԴԱՍՏՐՅԱՆ

Դիֆֆուզիայի ախտի վերջավոր ինտեգրալով ֆունկցիաների աճի մասին

Քող  $U = \{ |z| < 1 \}$ -ը լինի միավոր շրջանը:  $U$ -ում աճալիտիկ  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ֆունկցիայի համար նշանակենք  $\bar{M}(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ :  $D_n$ -ով նշանա-

Կենք  $U$ -ում անալիտիկ այն ֆունկցիաների դասը, որոնց համար  $S_n(f) =$   
 $= \int \int_U h(1-r) |f'(re^{i\varphi})|^2 r dr d\varphi < +\infty$ , որտեղ  $h(t)$ -ն բավարարում է որոշա-  
 կի պայմանների: Հոդվածում  $D_h$ -դասի ֆունկցիաների համար ստացված  
 է հետևյալ գնահատականը՝  $\lim \overline{M}(r, f) [Q_1(r)]^{-1} = 0$ , որտեղ  $Q_1(r) =$   
 $= 0 \left( \int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(1-t)} \right)$ : Ապացուցված է, որ այդ գնահատականում  $\frac{1}{2}$  մեծու-  
 թյունը լավագույն հնարավոր արժեքն է:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Ց Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 34, с. 1262—1339 (1970). <sup>2</sup> *V. Cowling*, Amer. math. monthly, v. 66, 119—120 (1959). <sup>3</sup> *S. Yamashita*, Amer. math. monthly, v. 87, № 7 (1980). <sup>4</sup> *В. С. Захарян*, ДАН АрмССР, т. 79, № 2 (1984).

УДК 517.968.23

МАТЕМАТИКА

В. В. Асатрян

Об одном методе регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 7/VII 1984)

В своей известной теореме эквивалентности <sup>(1)</sup> И. Н. Векуа достиг регуляризации одного сингулярного интегрального уравнения с помощью характеристического оператора. Методы, примененные в <sup>(1)</sup> для одного уравнения, нельзя непосредственно применить для систем сингулярных интегральных уравнений, так как условия разрешимости и единственности решения систем сингулярных интегральных уравнений непосредственно через коэффициенты системы не определяются.

В работе <sup>(2)</sup> Н. П. Векуа достиг регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений с использованием задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций и оценкой частных индексов, представляющей определенные трудности.

Ниже дается новый метод регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений, при котором сперва решается однородная система, затем с помощью решений однородной системы регуляризуется неоднородная система.

Пусть  $L$ —совокупность конечного числа простых, гладких, замкнутых контуров, не имеющих общих точек. Рассмотрим нормальную систему сингулярных интегральных уравнений, написанную в виде векторно-матричного уравнения

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad (1)$$

где  $t_0, t$ —аффиксы точек на линии  $L$ ,  $f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ —заданный  $n$ -мерный вектор, а  $A(t)$ ,  $K(t_0, t)$ —квадратные матрицы  $n$ -го порядка с компонентами, принадлежащими классу Гельдера  $H$  при  $t, t_0 \in L$ . Решение  $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  уравнения (1) отыскивается в классе  $H$ .

Начнем с однородного уравнения

$$K\varphi = 0, \quad (2)$$

где  $K$ —сингулярный оператор (1). Применяя к обеим частям уравнения (2) оператор  $K'$ , союзный с оператором  $K$ , получим уравнение Фредгольма

$$K'K\varphi = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что уравнение (3) содержит все решения уравнения

(2), но обратное неверно. Найдем все решения уравнения (2), если известны все решения уравнения (3).

Пусть  $\omega^1(t), \omega^2(t), \dots, \omega^l(t)$  — полная система линейно-независимых решений уравнения (3). Тогда любое решение уравнения (3) представляется в виде

$$\varphi = C_1 \omega^1 + C_2 \omega^2 + \dots + C_l \omega^l, \quad (4)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_l$  — произвольные постоянные.

Выберем эти постоянные так, чтобы  $\varphi$  явилось решением уравнения (2), т. е. чтобы выполнялось условие

$$C_1 \theta^1 + C_2 \theta^2 + \dots + C_l \theta^l = 0, \quad (5)$$

где  $\theta^l = K \omega^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, l$ .

Пусть  $p$  векторов из  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^l$  линейно-независимы ( $p \leq l$ ). Общность не нарушится, если предполагать, что линейно-независимы первые  $p$  векторов  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p$ . Тогда векторы  $\theta^{p+1}, \theta^{p+2}, \dots, \theta^l$  можно выразить линейно через  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p$ .

$$\text{Пусть} \quad \theta^{p+k} = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} \theta^j, \quad k = 1, 2, \dots, l-p,$$

где  $\alpha_{kj}$  — некоторые постоянные.

Подставляя выражения  $\theta^{p+k}$  в (5) и учитывая линейную независимость  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p$ , получим выражения постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_p$  через  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_l$

$$C_j = - \sum_{k=1}^{l-p} \alpha_{kj} C_{p+k}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Подставляя выражения  $C_1, C_2, \dots, C_p$  в (4) и сгруппировав, получим общее решение однородного уравнения (2)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l-p} \left( \omega^{p+k} - \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} \omega^j \right) C_{p+k},$$

где  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_l$  — произвольные постоянные, а функции, стоящие в скобках, линейно-независимы.

Очевидно, что число линейно-независимых решений уравнения (2) равно  $l-p$ .

Для дальнейшего важна следующая

**Лемма 1.** Для произвольной вектор-функции  $\varphi(t) \in H$  существуют вектор-функция  $\psi(t) \in H$  и постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$  такие, чтобы

$$\varphi = K' \psi + C_1 \psi^1 + C_2 \psi^2 + \dots + C_n \psi^n, \quad (6)$$

где  $\psi^i(t) = \overline{\varphi^i(t)} t_s'$ , причем  $\varphi^i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — полная система линейно-независимых решений уравнения (2). (Черта над функцией — знак комплексно сопряженной величины.)

Так как  $t_s' \neq 0$ , то система функций  $\psi^i(t)$  также линейно-независима. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого  $\varphi(t) \in H$  можно подобрать постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$  так, чтобы уравнение

$$K'\psi = \varphi - (C_1\psi^1 + C_2\psi^2 + \dots + C_n\psi^n) \quad (7)$$

имело решение.

Условия разрешимости уравнения (7) можно преобразовать к виду

$$\sum_{l=1}^n C_l(\psi^l, \psi^l) = (\varphi, \psi^l), \quad l=1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где через  $(\dots)$  обозначено скалярное произведение. Определитель системы (8) есть известный определитель Грама и отличен от нуля. Поэтому система (8) относительно коэффициентов  $C_1, C_2, \dots, C_n$  имеет решение. Лемма доказана.

Перейдем теперь к нахождению частного решения неоднородного уравнения

$$K\varphi = f. \quad (9)$$

По лемме 1 решение  $\varphi(t)$  уравнения (9) можно отыскивать в виде (6). Подставляя  $\varphi(t)$  из (6) в (9), для определения  $\psi(t)$  и постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  получим уравнение

$$KK'\psi = f - \sum_{l=1}^n C_l K\psi^l, \quad (10)$$

которое есть уравнение Фредгольма относительно  $\psi(t)$  при заданных  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ . Уравнение (10) имеет решение относительно  $\psi(t)$  тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_L \left[ f(t) - \sum_{l=1}^n C_l h^l(t) \right] \omega^j(t) dt = 0, \quad j=1, 2, \dots, l, \quad (11)$$

где  $h^l(t) = K\psi^l(t)$ , а  $\omega^1(t), \omega^2(t), \dots, \omega^l(t)$  — полная система линейно-независимых решений уравнения (3).

Систему (11) можно привести к матричному виду

$$DC = B, \quad (12)$$

где  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  — неизвестный вектор. Если ранг матрицы  $D$  равен  $r$ , то условия разрешимости системы (12) примут вид

$$\int_L \mu^m(t) f(t) dt = 0, \quad m=1, 2, \dots, l-r, \quad (13)$$

где  $\mu^1(t), \mu^2(t), \dots, \mu^{l-r}(t)$  — вполне определенные линейно-независимые вектор-функции, которые выражаются через функции

$$\omega^1(t), \omega^2(t), \dots, \omega^l(t) \text{ и } h^1(t), h^2(t), \dots, h^n(t).$$

Ясно, что условия (13) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (9).

Пусть выполнены эти условия и пусть в уравнении (10)  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  есть частное решение системы (12). Тогда уравнение (10) имеет решение относительно  $\psi(t)$  и функция  $\varphi(t)$ , определенная из (6), является частным решением уравнения (9). Общее решение уравнения (1) равно сумме общего решения однородного уравнения (2) и частного решения уравнения (9).

Следовательно, решение уравнения (1) сводится к решению урав-

нения Фредгольма и нахождению частного решения системы линейных алгебраических уравнений.

Исходя из вышесказанных рассуждений приходим к выводу, что изложенный метод регуляризации применим и для других типов операторов  $K$ , для которых сопряженный оператор  $K^*$  обладает следующими двумя свойствами:

- 1) операторы  $K^*K$  и  $KK^*$  — фредгольмовы;
- 2) операторы  $K$  и  $K^*$  нормально разрешимы, т. е. для разрешимости уравнений  $K\varphi=f$  и  $K^*\psi=g$  необходимо и достаточно, чтобы правые части были ортогональны ко всем решениям соответствующих сопряженных однородных уравнений.

В частности этот метод регуляризации можно применить для сингулярных интегральных и псевдодифференциальных уравнений в  $n$ -мерном пространстве с отличным от нуля символом.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасыцу, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Кироваканский филиал  
Ереванского политехнического института  
им. К. Маркса

Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի  
նեգուլյարիզացիայի մի մեթոդի մասին

*Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների նորմալ համակարգերի համար տրվում է նեգուլյարիզացիայի մի մեթոդ, որը կիրառելի է նաև  $n$ -չափանի տարածության մեջ ոչ զրոյական սիմվոլով սինգուլյար ինտեգրալ և փսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար:*

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. Наука, М., 1968.
- <sup>2</sup> Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений. Наука, М., 1970.

УДК 539.3.534.1

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

**К задаче о колебании анизотропной пластинки с продольными сжимающими усилиями в продольном магнитном поле**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 5/III 1985)

В работе (1) указано дальнейшее направление развития определенных классов задач колебаний анизотропных пластин и оболочек, имеющих анизотропную проводимость, в магнитном поле. Основываясь на гипотезах магнитоупругости тонких тел (2), в (3) выведена разрешающая система уравнений для неортотропной пластинки с анизотропной электропроводностью. В (4) исследованы параметрические колебания пластинки-полосы в продольном магнитном поле. В работе (5) при помощи асимптотического метода интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости получены асимптотически точные в целом двумерные уравнения магнитоупругости для тонких анизотропных (ортотропных) оболочек, имеющих анизотропную электропроводимость.

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи колебаний анизотропных (ортотропных) пластин с продольными сжимающими усилиями в продольном магнитном поле. Выявляется влияние анизотропной электропроводности на характер колебаний пластинки. Численные исследования поставленных задач показывают, что если краевые сжимающие усилия являются критическими (в смысле устойчивости), то можно найти такой диапазон изменения напряженности магнитного поля, при котором движение пластинки относительно сжатого состояния будет устойчивым. Меняя численные значения электропроводности в трех главных направлениях, можно обнаружить такие случаи, когда пластинка колеблется относительно начально сжатого состояния с достаточно большими частотами. Более того, соответствующим образом определяя диапазон изменения напряженности внешнего магнитного поля, можно достичь того, что продольные сжимающие усилия могут превышать критические значения на 10—30%, сохраняя вышеотмеченные свойства движения относительно начально сжатого состояния.

1. Рассматривается колебание сжатой в продольном направлении усилиями  $P_0$  ортотропной пластинки-полосы толщиной  $2h$ , длиной  $2l$ , с конечной электропроводностью  $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , находящейся в продольном постоянном магнитном поле напряженностью  $H_x$ .

Используя результаты работы (5), изучение магнитоупругих колебаний пластинки-полосы (цилиндрический изгиб) приводится к реше-

нию следующей системы интегродифференциальных уравнений с ядром Коши:

$$D_1 \frac{d^4 w^*}{dx_0^4} + 2\rho h \omega^2 w^* + P_0 \frac{d^2 w^*}{dx_0^2} + \frac{2\sigma_2 h}{c^2} H_x^2 \omega w +$$

$$+ \frac{2\sigma_3 h}{c} H_x E_y^* - \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\sigma_2 \sigma_3}{c^3} H_x \left( \omega E_y^* + \frac{1}{c} H_x \omega^2 w^* \right) = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{dE_y^*}{dx} = \frac{1}{\pi} h \int_{-l}^l \frac{1}{x-x_0} \left[ -\frac{d^2 E_y^*}{dx_0^2} + \frac{4\pi\sigma_2}{c} \left( E_y^* + \frac{1}{c} H_x \omega w^* \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{16\pi^2}{3} \cdot \frac{\sigma_2^2 h^2}{c^3} \left( \omega E_y^* + \frac{1}{c} H_x \omega^2 w^* \right) \right] dx_0; \quad -\infty < x < \infty, \quad -l < x_0 < l,$$

где  $w^*$  — нормальное перемещение пластинки;  $E_y^*$  — напряженность возбуждаемого электрического поля;  $\omega$  — частота колебания пластинки.

Для упругой части задачи принимается, что края пластинки шарнирно оперты.

Для решения систем уравнений (1.1) принимается метод Бубнова—Галеркина совершенно аналогичным образом, как это делается в работе (6). Поступая аналогичным образом, как в (6), для определения безразмерной частоты колебания  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  ( $\omega_0$  — частота колебания пластинки-полосы при отсутствии магнитного поля и продольных сжимающих усилий) получаем алгебраическое уравнение четвертой степени. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

$H_x$ , эрг/см	$\sigma_2 = \sigma_3 =$ $= 4 \cdot 10^{17}$ , $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{16}$ , $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{17}$ , $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{15}$ , $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{17}$ , $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{17}$ , $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{16}$ , $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{17}$ , $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{15}$ , $c^{-1}$
	$\text{Im} \Omega$	$\text{Im} \Omega$	$\text{Im} \Omega$	$\text{Im} \Omega$	$\text{Im} \Omega$
$3 \cdot 10^2$	0	0	0	0	0
$6 \cdot 10^2$	0	0,5	0	0	0
$9 \cdot 10^2$	0,2	1,1	0	0	0
$3 \cdot 10^3$	1,1	3,7	10,5	0,2	0
$6 \cdot 10^3$	2,1	7,5	23,4	0,6	0
$8 \cdot 10^3$	2,5	10,0	31,6	0,9	0,1
$1 \cdot 10^4$	2,2	12,4	39,7	1,2	0,2
$1,2 \cdot 10^4$	0	14,7	47,8	1,4	0,3

Механические и геометрические характеристики пластинки-полосы следующие:  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $\rho = 6$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $\nu_2 = 0,1$ ,  $h = 0,5$  см,  $s = \frac{h}{l} = 0,01$ ,  $\frac{P_0}{P_{кр}} = 1,1$ .

Как видно из приведенной таблицы, существуют интервалы для  $H_x$ , когда начальное неустойчивое движение становится устойчивым. При этом, если увеличить проводимость в поперечном направлении и уменьшать проводимость в продольных направлениях, относительная частота колебания резко возрастает. В обратном случае относитель-

ная частота колебания имеет малые значения и возрастает очень медленно. Аналогичные явления имеют место, когда  $\frac{P_0}{P_{кр}} = 1, 2, \frac{P_0}{P_{кр}} = 1, 3$ .

2. Рассмотрим колебание прямоугольной пластинки толщиной  $2h$ , с продольными размерами  $a$  и  $b$ , находящейся в продольном постоянном магнитном поле напряженностью  $H_x$ . Пластика в продольном направлении  $x$  сжата усилиями  $P_0$ . Материал пластинки ортотропный, имеющий также анизотропную электропроводимость  $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Изучение магнитоупругих колебаний прямоугольной пластинки приводится к решению следующей системы интегродифференциальных уравнений (6):

$$\begin{aligned}
 E_y^*(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[ -\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial E_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial E_x^*}{\partial y_0} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{4\pi\sigma_2}{c} \left( E_y^* + \frac{H_x}{c} \omega w^* \right) - \frac{16\pi^2}{3} \cdot \frac{\sigma_2^2 h^2}{c^3} \left( \omega E_y^* + \frac{1}{c} H_x \omega^2 w^* \right) \right] dx_0 dy_0; \\
 E_x^*(x, y) = & \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[ -\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{\partial E_y^*}{\partial x_0} - \right. \right. \quad (2.1) \\
 & \left. \left. - \frac{\partial E_x^*}{\partial y_0} \right) - \frac{4\pi\sigma_1}{c} E_x^* + \frac{16\pi^2}{3} \cdot \frac{\sigma_1^2 h^2}{c^3} \omega E_x^* \right] dx_0 dy_0; \\
 & D_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x_0^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} + D_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial y_0^4} + P_0 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_0^2} + 2\rho h \omega^2 w^* + \\
 & + \frac{2\sigma_3 h}{c^2} H_x^2 \omega w^* + \frac{2\sigma_3 h}{c} H_x E_y^* - \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2 h^3}{c^3} H_x \left( \omega E_y^* + \frac{1}{c} H_x \omega^2 w^* \right) = 0 \\
 & -\infty < x, y < \infty; \quad -a \leq x_0 \leq a; \quad -b \leq y_0 \leq b,
 \end{aligned}$$

где  $D_1, D_2, D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k$  — жесткости ортотропной пластинки (7).

Отметим, что в работе (5) в уравнениях моментов всю правую часть необходимо отбросить ввиду того, что указанные члены имеют более высокую асимптотическую точность, чем  $O(\varepsilon^{2-2r})$ . В работе (5) ошибочно указанные члены были удержаны.

На границах пластинки  $x = \pm a$  и  $y = \pm b$  для упругой части задачи принимается шарнирное опирание.

Для решения систем уравнений (2.1) принимается метод Бубнова—Галеркина совершенно аналогичным образом, как это делается в работе (8). Поступая аналогичным образом, как в (8), для определения безразмерной частоты колебания  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  ( $\omega_0$  — частота колебания прямоугольной пластинки при отсутствии магнитного поля и продольных сжимающих усилий), получаем алгебраическое уравнение шестой степени.

Результаты численных вычислений приведены в табл. 2.

Вычисления, приведенные в таблице, соответствуют следующим значениям:  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $E_2 = 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $G = 1, 2 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,

Таблица 2

$H_x,$ арстед	$\sigma_2 = \sigma_3 =$ $= 4 \cdot 10^{17},$ $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{16},$ $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{17},$ $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{15},$ $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{17},$ $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{17},$ $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{16},$ $c^{-1}$	$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{17},$ $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{15},$ $c^{-1}$
	$1m\Omega$	$1m\Omega$	$1m\Omega$	$1m\Omega$	$1m\Omega$
$3 \cdot 10^2$	0	0	0	0	0
$6 \cdot 10^2$	0,1	0	0	0	0
$9 \cdot 10^2$	0,2	0,5	0	0,05	0
$3 \cdot 10^3$	0,05	1,9	5,1	0,2	0,01
$4 \cdot 10^3$	0	2,3	6,5	0,2	0,04
$6 \cdot 10^3$	0	1,5	12,4	0,1	0,06
$8 \cdot 10^3$	0	0	14,5	0	0,06

$$\nu_1 = 0,2, \nu_2 = 0,1, \rho = 6\text{г/см}^3, \sigma_1 = \sigma_2, k = \frac{a}{b} = 1, \varepsilon = \frac{h}{a} = 0,01, h = 0,5\text{ см,}$$

$$\frac{P_0}{P_{кр}} = 1.$$

Как видно из табл. 2, аналогичные явления, о которых говорилось выше для задачи 1, имеют место также для прямоугольной пластинки.

Ленинканский филиал  
Ереванского политехнического института  
им. К. Маркса

#### Ս. Հ. ՍԱՐԿՍՅԱՆ

Երկայնական սեղմող ուժերով, երկայնական մագնիսական դաշտում անիզոտրոպ սալի տատանումների խնդրի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ սալի տատանումների խնդիրը, երբ այն սեղմված է երկայնական ուժերով և գտնվում է երկայնական մագնիսական դաշտում:

Ենթադրվում է, որ սալի նյութը օրթոտրոպ է և ունի անիզոտրոպ հաղորդականություն:

Բերված թվային տվյալները ցույց են տալիս, որ գոյություն ունեն մագնիսական դաշտի լարվածության փոփոխման այնպիսի ինտերվալներ, որ սալը իր վրա կրելով կրիտիկական արժեքին հավասար կամ նրան գերազանցող ուժեր, կարող է կայուն շարժումներ կատարել սկզբնական սեղմված վիճակի շուրջը:

Ուսումնասիրված է անիզոտրոպ հաղորդականության ազդեցությունը նշված երևույթի վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> S. A. Ambartsumyan, Colloques internationaux du CNRS № 295—Comportement mécanique des Solides anisotropes. p. 663—673. <sup>2</sup> С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М., Наука, 1977. <sup>3</sup> В. С. Саркисян, М. М. Минасян, Механика. Межвузовский сб. науч. тр., Изд. ЕГУ, вып. 2, 1982. <sup>4</sup> Г. Е. Багдасарян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 28, № 5 (1975). <sup>5</sup> С. О. Саркисян, Мат. II Всесоюз. науч.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван, 1984, Изд. ЕГУ, т. 3, 1984. <sup>6</sup> С. О. Саркисян, Механика. Межвуз. сб. науч. тр., изд. ЕГУ, вып. 3, 1984. <sup>7</sup> В. С. Саркисян, Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела, Изд. ЕГУ, 1976. <sup>8</sup> В. А. Барханаджян, С. О. Саркисян, Мат. II Всесоюз. науч.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван, 1984, Изд. ЕГУ, т. I, 1984.

УДК 66.067.52:637.232.152

ГИДРОМЕХАНИКА

Дж. С. Торосян

**Исследование распределения жидкости по комплекту вставок при тонкослойном центрифугировании**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 6/II 1985)

Распределение разделяемой жидкой гетерогенной системы по высоте пакета вставок при тонкослойном центрифугировании имеет важное значение при конструировании сепаратора с оптимальными параметрами, а также при моделировании процесса разделения (1).

До настоящего времени при исследовании распределения жидкости по высоте пакета вставок волновые процессы, неизбежно возникающие при этом, не принимались во внимание. Это обуславливается тем, что разделению подвергают жидкую гетерогенную систему, и в связи с наличием неоднородной плотности состава компонентов разделяемых систем неизбежно возникает волновое движение (2-5).

Рассмотрим внутренние волны в шламовом пространстве центробежного сепаратора при периферийном питании комплекта вставок жидкой гетерогенной системой.

Пусть ротор центробежного сепаратора вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Обозначим внутренний радиус ротора  $R_2$ , наибольший радиус пакета вставок  $R_1$ , радиус невозмущенной поверхности раздела между двумя жидкостями  $R_0$ , плотности жидкостей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , причем  $\rho_2 > \rho_1$ . Рассмотрим случай, когда жидкости различной плотности определенных объемов находятся в шламовом пространстве центробежного тарельчатого сепаратора. Тогда уравнение возмущенной поверхности раздела двух жидкостей с различными плотностями записывают в виде (2,3)

$$\xi = R_0 + a \sin(n\theta - \sigma t), \quad (1)$$

где  $a$  и  $n$  — постоянные величины;  $\theta$  — полярный угол;  $t$  — время;  $\sigma$  — круговая частота.

Рассмотрим потенциальное и безвихревое движение идеальной жидкости. В этом случае потенциалы для легкой  $\varphi_1$  и тяжелой  $\varphi_2$  жидкостей запишем в виде

$$\varphi_1 = [c_1 J_n(\chi r) + c_2 Y_n(\chi r)] \cos(n\theta - \sigma t), \quad (2)$$

$$\varphi_2 = [c_3 J_n(\chi r) + c_4 Y_n(\chi r)] \cos(n\theta - \sigma t), \quad (3)$$

где  $c_1 + c_4$  — произвольные постоянные;  $J_n(\chi r)$  и  $Y_n(\chi r)$  — бесселевы функции первого и второго родов порядка  $n$ ;  $r$  — радиус рассматриваемого слоя жидкости в шламовом пространстве;  $\chi$  — величина, определяемая равенством (4)

$$\chi = [(\sigma^2 - 4\omega^2)/(R_0 l \omega^2)]^{0.5}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — высота шламового пространства.

Рассмотрим линеаризованную задачу (4,5); тогда пренебрегая величиной  $a^2 \sin^2(n\theta - \sigma t)$  в связи с тем, что  $a \ll R_0$ , на основании уравнения (1) имеем

$$r^2 = \xi^2 \approx R_0^2 + 2aR_0 \sin(n\theta - \sigma t). \quad (5)$$

В этом случае на основании выражений (2), (3) и (5) уравнения гидромеханики запишем в виде (2,4,5):

$$p_1 = -\rho_1 \sigma [c_1 J_n(\chi r) + c_2 Y_n(\chi r)] \sin(n\theta - \sigma t) + \rho_1 \omega^2 R_0^2 / 2 + \rho_1 R_0 a \omega^2 \sin(n\theta - \sigma t) + \text{const}; \quad (6)$$

$$p_2 = -\rho_2 \sigma [c_3 J_n(\chi r) + c_4 Y_n(\chi r)] \sin(n\theta - \sigma t) + \rho_2 \omega^2 R_0^2 / 2 + \rho_2 R_0 a \omega^2 \sin(n\theta - \sigma t) + \text{const}, \quad (7)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давление жидкости на рассматриваемом радиусе для легкой и тяжелой жидкостей;  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частичек легкой и тяжелой жидкостей.

Рассмотрим физические условия на поверхности раздела рассматриваемых жидкостей плотностью  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в шламовом пространстве центробежного тарельчатого сепаратора, которое представим в виде (4,5)

$$p_1 = p_2 \quad \text{и} \quad \xi_1 = \xi_2, \quad (8)$$

а граничные условия в виде (2,3)

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0 \quad (9); \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0 \quad (10); \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (11)$$

Получим дисперсионное соотношение

$$\sigma^2 = R_0 \omega^2 \chi (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 F_1 - \rho_2 F_2), \quad (12)$$

где

$$F_1 = \frac{J_n(\chi R_0) Y_n'(\chi R_1) - Y_n(\chi R_0) J_n'(\chi R_1)}{J_n'(\chi R_0) Y_n(\chi R_1) - Y_n'(\chi R_0) J_n(\chi R_1)}; \quad (13)$$

$$F_2 = \frac{J_n(\chi R_0) Y_n'(\chi R_2) - Y_n(\chi R_0) J_n'(\chi R_2)}{J_n'(\chi R_0) Y_n(\chi R_2) - Y_n'(\chi R_0) J_n(\chi R_2)}. \quad (14)$$

Соотношение (12) связывает конструктивно-механические параметры ротора центробежного тарельчатого сепаратора с физическими свойствами жидкостей. При этом круговая частота  $\sigma$  существенно зависит от напряженности поля центробежных сил инерции  $\omega^2 R_0$ , радиусов заполнения шламового пространства  $R_2$  и  $R_1$  и постоянной величины  $\chi$ . Как следует из дисперсионного соотношения (12), при определенных параметрах  $\sigma$  принимает комплексное значение, которому соответствует потеря устойчивости слоя поверхности раздела жидкостей с различной плотностью в шламовом пространстве центробежного тарельчатого сепаратора. Этому условию соответствует такая критическая высота пакета вставок, при которой еще наблюдается линейная связь между производительностью центробежного тарельчатого сепаратора

ротора' и количеством межвставочных пространств (высота пакета вставок).

Экспериментальные исследования процесса тонкослойного сепарирования показывают, что при определенном количестве межвставочных пространств наступает критическое состояние потока жидкости, питающей пакет вставок ротора центробежного тарельчатого сепаратора. На рис. 1 изображены результаты экспериментальных данных, полученные при разделении суспензии азокрасителя бордо «Ж» с исходной массовой концентрацией дисперсной фазы 0,13% на сепараторе ОТ—ОР—230, ротор которого снабжали различными пакетами, отличающимися наибольшим диаметром тарелок (при наименьшем диаметре тарелок 0,066 м расстояние между тарелками  $0,5 \cdot 10^{-3}$  м), м: 0,1; 0,12; 0,15. Угловую скорость вращения ротора поддерживали постоянной—950 рад/с. Отношение диаметра шламового пространства к наибольшему диаметру вставок во всех опытах составляло 1,16. В каждой серии экспериментов изменяли производительность сепаратора. Анализ полученных экспериментальных данных показывает, что при достижении определенного количества межвставочных пространств прямо пропорциональная связь  $Q=f(z)$  ( $Q$ —производительность сепаратора;  $z$ —количество межвставочных пространств) резко нарушается и дальнейшее увеличение  $z$  не приводит к повышению величины  $Q$ . В качестве примера на рис. 2 показана зависимость производительности сепаратора  $Q$  от количества межвставочных пространств  $z$  при различных качествах разделения.

Условие, при котором нарушается равномерная загрузка межвставочных пространств центробежных сепараторов при тонкослойном центрифугировании жидкой гетерогенной системы, определяется из дисперсионного соотношения (12). Подставляя значение величины  $\chi$  из выражения (4) в равенство (12), имеем

$$R_0 l \omega^2 \sigma^4 - \lambda^2 \sigma^2 + 4 \omega^2 \lambda^2 = 0, \quad (15)$$

где 
$$\lambda = R_0 \omega^2 (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 F_1 - \rho_2 F_2). \quad (16)$$

Из биквадратного уравнения (15) получаем

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2 \pm (\lambda^4 - 16 \omega^4 R_0 l \lambda^2)^{0,5}}{2 R_0 l \omega^2}. \quad (17)$$

Из уравнения (17) следует, что при значениях

$$16 \omega^4 R_0 l \lambda^2 - \lambda^4 > 0 \quad (18)$$

волновое движение слоя жидкости в шламовом пространстве ротора центробежного сепаратора, который питает пакет вставок жидкой гетерогенной системой, теряет устойчивость<sup>(8)</sup>. Это обстоятельство выражается в том, что начиная с определенной высоты, считая с места поступления жидкости в шламовое пространство ротора сепаратора, межвставочные пространства будут недогруженными, т. е. не участвуют практически в процессе тонкослойного сепарирования. Из неравенства (18) получаем

$$l > \frac{R_0}{16} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 F_1 - \rho_2 F_2} \right)^2. \quad (19)$$

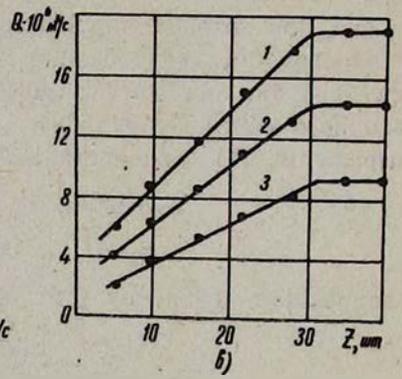
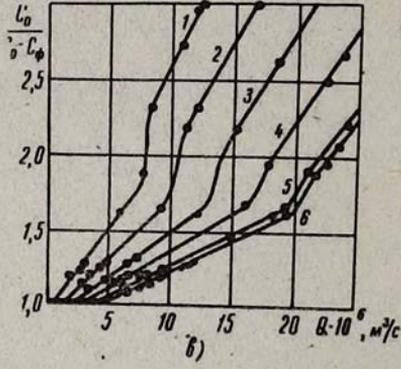
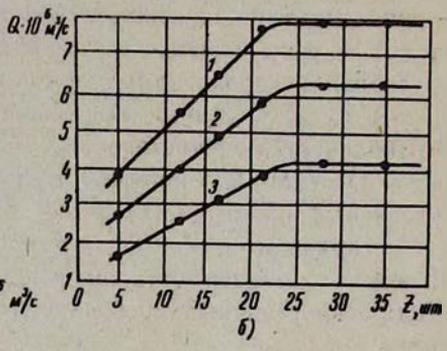
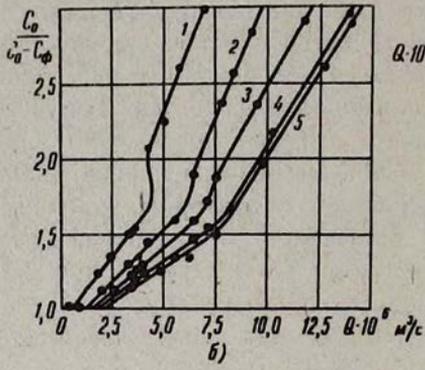
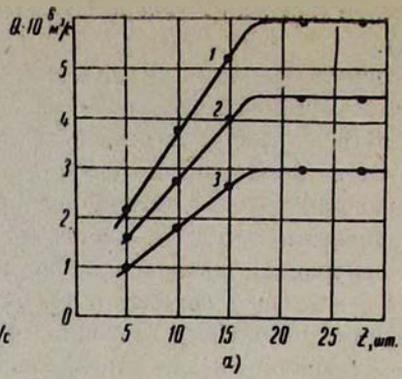
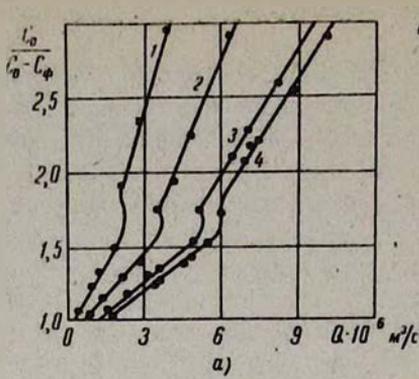


Рис. 1. Зависимость  $c_0/(c_0 - c_{ф}) = f(Q)$  ( $c_0$  и  $c_{ф}$  — содержание дисперсной фазы до и после разделения;  $Q$  — производительность аппарата;  $a$  — наибольший диаметр вставок 0,1 м при количестве вставок: 1—5; 2—10; 3—15; 4—22;  $b$  — наибольший диаметр вставок 0,12 м при количестве вставок: 1—5; 2—12; 3—16; 4—21; 5—28 и 35;  $v$  — наибольший диаметр вставок 0,15 м при количестве вставок: 1—5; 2—10; 3—16; 4—22; 5—28; 6—35 и 40

Рис. 2. Зависимость  $Q = f(z)$  при  $c_0/(c_0 - c_{ф})$ : 1—1,6; 2—1,4; 3—1,2 для вставок с наибольшим диаметром, м:  $a$ —0,1;  $b$ —0,12;  $v$ —0,15

Из выражения (19) следует, что если неравенство имеет место, т. е. если межвставочные пространства расположены в роторе сепаратора выше отметки, определяемой величиной  $l$  по высоте пакета вставок, то вышележащие межвставочные пространства не будут участво-

вать в процессе тонкослойного сепарирования, следовательно, эти межвставочные пространства не должны учитываться при моделировании процесса. На основании экспериментальных данных по сепарированию высокодисперсных суспензий азопигментов на центробежных сепараторах различными геометрическими размерами пакета вставок установлено (наименьший диаметр тарелок у всех пакетов составлял 0,066 м), что отношение длины вдоль пакета тарелок  $l$  к среднему радиусу слоя питающей пакет жидкости  $R_0$  составляет примерно

$$l/R_0 \approx 0,61; 0,66; 0,75 \quad (20)$$

для пакетов с наибольшим диаметром тарелок, соответственно, м: 0,1; 0,12 и 0,15.

Ленинakanский государственный  
педагогический институт  
им. М. Налбандяна

## Ջ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

**Նուրբ-շերտային կենտրոնախույս բաժանման դեպքում հեղուկի  
բաշխման հետազոտությունը վերադիրների հավաքածուի մեջ**

*Ուսումնասիրված են ներքին ալիքները կենտրոնախույս զատիչ մեքենայի շլամային տարածությունում: Ստացված է կենտրոնախույս մեքենայի ոտտորում եղած վերադիրների հավաքածուն սնող հեղուկի անկայուն շարժման առաջացման պայմանը, որն արտահայտվում է միջափսհային տարածություններով հեղուկի բաշխման հավասարաչափության խախտմամբ:*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. И. Соколов, Центрифугирование, Химия, М., 1976. <sup>2</sup> Д. С. Торосян, в кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, Изд-во АН АрмССР, 1984. <sup>3</sup> Д. С. Торосян, Изв. АН АрмССР. Физика, т. 19, вып. 1 (1984). <sup>4</sup> Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости, Наука, М., 1977. <sup>5</sup> Г. Ламб, Гидродинамика, ОГИЗ, М.—Л., 1947. <sup>6</sup> Д. Джозеф, Устойчивость движений жидкости, Мир, М., 1981.

УДК 624.131.376:624.131.221

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

**Об определении бокового давления и давлений набухания  
глинистых грунтов**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 22/XI 1984)

В работе <sup>(1)</sup> приведено описание нового прибора и методики определения на нем анизотропии давления набухания глинистых грунтов. Авторы этой работы совершенно справедливо отмечают, что обычные стабилметры непригодны для этой цели. Однако следует отметить, что использованный в <sup>(1)</sup> прибор для замера бокового давления грунта не безупречен. Его основным недостатком является то, что практически невозможно полностью дегазировать воду, которая воспринимает боковое давление грунта в гидравлической камере стабилметра.

Для замера бокового давления глинистых грунтов можно успешно воспользоваться тензометрическими кольцами <sup>(2)</sup>. В данной статье приведены результаты испытаний двух глин, выполненных с целью определения бокового давления, коэффициента бокового давления и давления их набухания при дополнительном увлажнении в двух взаимно перпендикулярных направлениях образца при помощи тензометрических колец.

Принципиальная схема определения бокового давления и давлений набухания глинистых грунтов методом компенсации деформаций в двух взаимно перпендикулярных направлениях образца приведена на рис. 1. Основным узлом установки замера бокового давления и давлений набухания грунтов является рабочий стакан прибора кручения сплошных образцов без возможности бокового расширения М-5 <sup>(2)</sup>, где боковые защитные кольца заменены одним сплошным протарированным тензометрическим кольцом высотой 30 мм, с толщиной стенки 0,3 мм, изготовленным из латуни, а нижний и верхний рифленые и перфорированные штампы заменены гладкими перфорированными штампами. Как и на приборе М-5, вертикальная нагрузка на образец грунта создается винтовым приводом и контролируется динамометром. Этим динамометром замеряется также давление набухания грунта в вертикальном направлении при отсутствии деформации набухания—компенсации деформации набухания винтовым приводом. Замер бокового давления образца от действия вертикального уплотняющего давления и набухания при дополнительном увлажнении осуществляется тензометрическим кольцом и тензометрическим мостом ЦТМ-3.

Испытаны два различных очень плотных глинистых грунта природного сложения и твердого состояния, отобранные из основания будущего ускорительно-накопительного комплекса в г. Протвино (табл. 1).

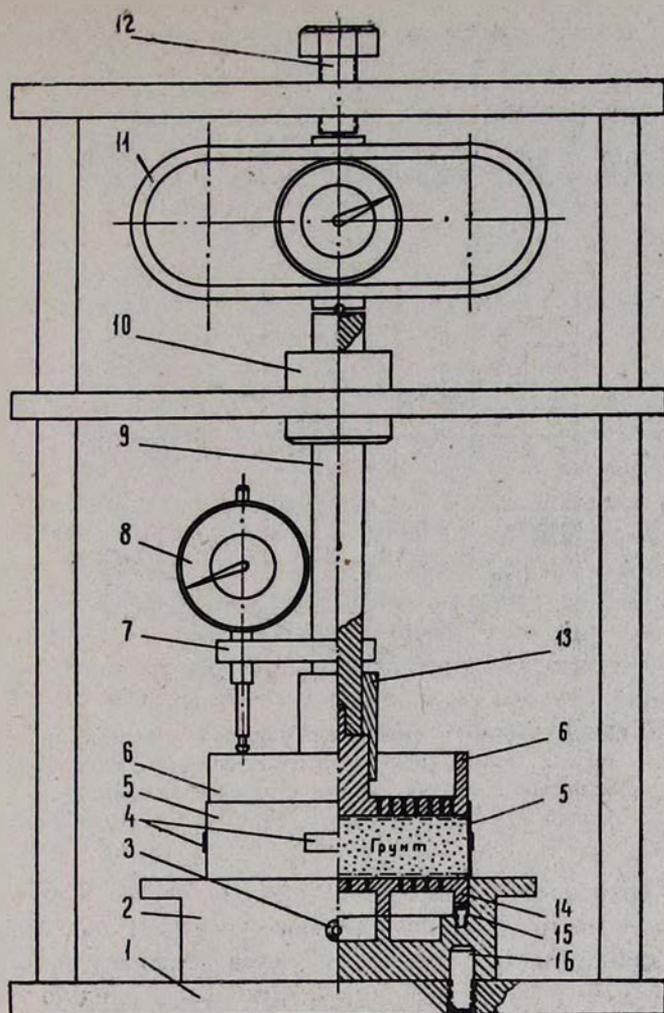


Рис. 1. Схема установки для определения бокового давления и давлений набухания глинистых грунтов: 1—двухъярусная рама; 2—рабочий стакан прибора М-5; 3—штуцер для подачи воды в днище стакана; 4—датчики омического сопротивления (тензорезисторы); 5—тензометрическое кольцо; 6—верхний перфорированный штамп-фильтр; 7—держатель мессуры; 8—мессура; 9—шток; 10—направляющий штока; 11—динамометр; 12—винтовой привод; 13—насадка верхнего штампа—направляющий штока; 14—нижний перфорированный штамп-фильтр; 15, 16—стопорные (установочные) шпильки.

Испытанием образцов диаметром 101 мм и высотой 24 мм определены боковые давления и коэффициенты бокового давления грунтов при сохранении их природного сложения и влажности. Вертикальные уплотняющие давления  $\sigma_1$  прикладывались к образцам ступенями, возрастающими по 0,05 МПа с интервалом один час. В процессе опытов замерялись деформации уплотнения  $\epsilon_1$  и изменяемость во времени бокового давления образцов  $\sigma_2$ .

На рис. 2 изображены графики изменяемости бокового давления

Данные о физических свойствах испытанных грунтов

№ грунта	$\rho_s$ , г/см <sup>3</sup>	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$w$	$e$	$S_r$	$w_L$	$w_p$	$J_p$	$J_L$
40—82	2,82	2,07	0,19	0,62	0,86	0,77	0,48	0,29	-1,03
42—82	2,75	1,96	0,29	0,81	0,98	0,65	0,39	0,27	-0,38

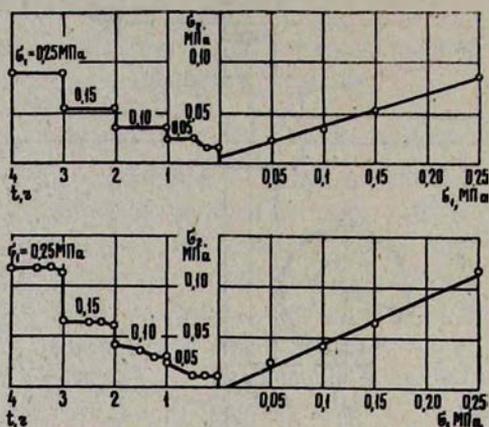


Рис. 2. Графики изменяемости бокового давления грунтов  $\sigma_2$  во времени при ступенчатом росте уплотняющего давления  $\sigma_1$  и диаграммы зависимости  $\sigma_2=f(\sigma_1)$ : а—грунт № 40—82; б—грунт № 42—82

испытанных грунтов во времени от действия ступеней уплотняющего давления  $\sigma_1$ , а построенные на их основе графики зависимости между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в правых частях тех же рисунков показаны сплошными линиями. Зависимости  $\sigma_2=f(\sigma_1)$  аппроксимированы следующим соотношением <sup>(3)</sup>:

$$\sigma_2 = \xi \cdot \sigma_1 + C, \quad (1)$$

где  $\xi$ —коэффициент бокового давления грунта;  $C$ —параметр, определяемый из опыта (табл. 2).

Таблица 2

## Результаты испытания грунтов

№ грунта	Коэффициент бокового давления $\xi$	$C$	$\sigma_{s,0,z}$	$\sigma_{s,0,y}$	$\lambda = \frac{\sigma_{s,0,y}}{\sigma_{s,0,z}}$
40—82	0,33	0,005	0,25	0,217	0,87
42—82	0,48	-0,0042	0,168	0,159	0,95

Вычисленные по экспериментальным данным коэффициенты бокового давления  $\xi$  испытанных грунтов полностью характеризуют их высокую плотность и твердое состояние. Они полностью согласуются с данными, полученными другими исследователями <sup>(4)</sup>. Вместе с тем

следует отметить, что полученные нами коэффициенты бокового давления грунтов несколько заниженные, поскольку они не соответствуют полной стабилизации роста бокового давления во времени. Для достижения полной стабилизации роста бокового давления  $\sigma_2$  во времени следовало бы существенно увеличить интервал приложения уплотняющих давлений  $\sigma_1$ —растянуть наблюдения за ростом  $\sigma_2$ . Очевидно, что это привело бы к возрастанию бокового давления и коэффициента бокового давления.

Осуществлено определение давлений набухания рассмотренных грунтов в двух взаимно перпендикулярных направлениях по методу компенсации деформации объема (набухания) (2). Для этого помещенные в тензометрические кольца образцы грунтов (рис. 1) замачивали (водонасыщали) как восходящим потоком воды, подаваемой к ним через нижние перфорированные штампы приборов, так и нисходящим потоком воды, подаваемой через верхние перфорированные штампы. В первом случае вода наливалась в днище рабочего стакана прибора через штуцер 3 (рис. 1), во втором—в углубление верхнего штампа.

Давление свободного набухания образцов в вертикальном направлении  $\sigma_{s,o,z}$  замеряли динамометром при нулевом положении стрелки мессуры (индикатора часового типа), а боковое давление набухания  $\sigma_{s,o,y}$ —тензометрическим кольцом и тензометрическим мостом ЦТМ-3. На рис. 3 показаны графики изменяемости во времени давления набухания испытанных грунтов в двух взаимно перпендикулярных направ-

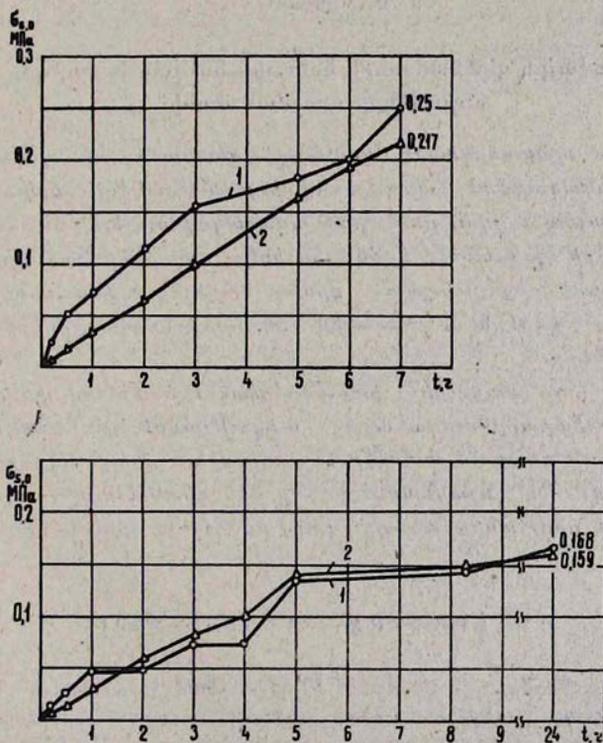


Рис. 3. Графики изменяемости давлений набухания грунтов в двух взаимно перпендикулярных направлениях: а—грунт № 40—82; б—грунт № 42—82; 1— $\sigma_{s,o,z}$ ; 2— $\sigma_{s,o,y}$ .

лениях. Конечные значения этих давлений, а также коэффициенты их анизотропии  $\lambda = \sigma_{s,0,y} / \sigma_{s,0,z}$  приведены в табл. 2.

Как видно на рис. 3, давления набухания в двух взаимно перпендикулярных направлениях образцов грунта № 40—82 вначале значительно отличаются друг от друга, однако по мере увеличения времени водонасыщения их расхождение постепенно уменьшается и при  $t=7$  ч составляет всего 13%. Это значит, что грунт № 40—82 обладает небольшой анизотропией давления набухания. Из этого же рисунка видно, что грунт № 42—82 в отношении давления набухания практически является изотропным материалом. Последнее обстоятельство полностью подтверждает целесообразность замера бокового давления грунтов вообще, бокового давления набухания в частности, при помощи тензометрических колец. Конечно, это не значит, что другие методы, в частности описанный в (1), непригодны для этой цели. Для большой достоверности данных о боковом давлении грунтов они должны быть получены различными методами.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Г. В. Маркосяну за оказанную им помощь при выполнении настоящей работы.

Институт механики Академии наук  
Армянской ССР

Ս. Ռ. ՄԵՍԳԵԱՆ

### Կավային գետնաճղերի կողային ճնշման և ուռչելու ճնշումների որոշման մասին

Հոգվածում պատկերված է կավային գետնաճղերի կողային ճնշման և լրացուցիչ խոնավացման պատճառով փորձանմուշների երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց ուղղութիւններով առաջացող ուռչելու ճնշումների որոշման փորձասարքի սխեման: Բերված են երկու տարբեր կավային գետնաճղերի փորձարկումներից ստացված դրանց կողային և խտացնող ճնշումների առնչութիւնների կորերն ու կողային ճնշման գործակիցների հաշվարկների արդյունքները:

Պարզված է, որ լրացուցիչ խոնավացման պատճառով փորձանմուշների երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց ուղղութիւններով առաջացող ուռչելու ճնշումները մի դեպքում տարբեր են, իսկ մյուս դեպքում գործնականորեն չեն տարբերվում: Դա նշանակում է, որ մի գետնաճղը ուռչելու ճնշումի նկատմամբ ունի որոշ անիզոտրոպություն, իսկ մյուս գետնաճղն իզոտրոպ է:

### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> С. А. Лапицкий, А. И. Вайтекунене, Ю. Б. Осипов, Инженерная геология, № 5, 1984. <sup>2</sup> С. Р. Месчян, Экспериментальная реология глинистых грунтов, Недра, М., 1985. <sup>3</sup> Н. А. Цытович, Механика грунтов, Госстройиздат, М.-Л., 1951. <sup>4</sup> Н. Д. Красников, Динамические свойства грунтов и методы их определения, Стройиздат, Л., 1970.

УДК 621.378.325

ФИЗИКА

М. Н. Нерсисян, П. С. Погосян, Л. В. Саакян

### Излучение от нелинейной границы при генерации разностной частоты

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 18/III 1985)

Работа В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка о переходном излучении<sup>(1)</sup> явилась толчком для изучения процессов, происходящих на границе двух сред. После ее появления прошло более сорока лет, однако исследования в этом направлении все еще продолжают. В настоящее время накоплено большое количество как экспериментальных, так и теоретических работ. Мы ограничимся ссылкой только на некоторые обзорные статьи и монографии имеющие отношение к нашей работе.

Первая экспериментальная работа по переходному излучению появилась в 1959 г.<sup>(2)</sup> Результаты исследования дифракционного излучения приводятся в<sup>(3)</sup>. Излучению электромагнитных волн, при мгновенном изменении состояния излучающей системы, посвящена работа<sup>(4)</sup>, а при плавном изменении параметров—<sup>(5)</sup>. Основные вопросы физики переходного излучения и переходного рассеяния рассматриваются в<sup>(6)</sup>. В монографиях<sup>(7,8)</sup> большое место уделено переходному и резонансному излучению.

Такой, далеко не полный, перечень литературы указывает на большое внимание исследователей к процессам, происходящим на границе двух сред, как при прохождении через нее заряженных частиц и моментов, так и при изменении параметров среды во времени и в пространстве.

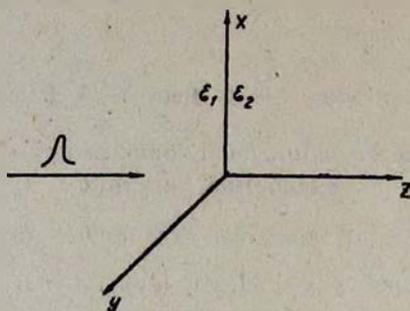
При прохождении лазерных импульсов через нелинейную среду возникает излучение, аналогичное излучению при мгновенном изменении параметров сплошной среды. Это обусловлено тем, что под воздействием лазерного излучения образуется нелинейная граница.

Экспериментальное исследование такого процесса излучения реально и не только может представлять интерес для физики, но и найдут ряд практических приложений. Несмотря на это, указанное явление изучено недостаточно. Такой режим легко осуществить при генерации разностной частоты, так как в этом случае поперечные размеры возбуждающего лазера можно делать порядка даже меньше длины волны излучения.

Особый интерес представляет случай, когда разностное излучение возникает за счет биения спектральных компонент лазера с синхронизацией мод.

В настоящей работе приводятся результаты исследований характерных особенностей излучения от нелинейной границы в случае, когда оно возбуждается с помощью коротких лазерных импульсов.

Для простоты рассмотрим нормальное падение лазерного излучения на плоскую границу раздела между линейным и нелинейным диэлектриком. Обе среды будем считать изотропными с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  соответственно (см. рисунок).



Задачу будем решать в приближении заданного поля. Из уравнения Максвелла для напряженности электрического поля разностного излучения в нелинейной среде получается следующее уравнение:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_2 \vec{E} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{NL}, \quad (1)$$

где  $\vec{P}^{NL}$  — вектор нелинейной поляризации.

В линейной среде поле описывается однородными волновыми уравнениями. Используя уравнение  $\text{div } \vec{D} = 0$ , уравнение (1) можно написать в следующем виде:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_2 \vec{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{NL} - \frac{4\pi}{\epsilon_2} \text{grad div } \vec{P}^{NL}. \quad (2)$$

Нелинейную поляризацию зададим по формуле

$$\vec{P}^{NL} = \vec{\Phi}(x, y) f\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad (3)$$

где  $v$  — скорость распространения волны нелинейной поляризации, а  $\vec{\Phi}(x, y)$  определяется поперечным распределением возбуждающего импульса.

Разлагая  $\vec{E}$  и  $\vec{P}^{NL}$  в трехкратный интеграл Фурье (по времени и поперечным координатам), получаем:

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{q, \omega}(z) e^{-i\vec{q}\vec{r} - i\omega t} d\vec{q} d\omega, \quad (4)$$

$$\vec{P}^{NL} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\Phi}_q f_\omega e^{i\frac{\omega}{v}z} \cdot e^{i\vec{q}\vec{r} - i\omega t} d\vec{q} d\omega, \quad (5)$$

где  $\vec{q}$  — поперечная компонента волнового вектора.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (1) для поперечной и про-

дольной компонент  $\vec{E}_{q,\omega}$ , соответственно получаем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \vec{E}_{q,\omega}^\perp}{dz^2} + k_{2z} \vec{E}_{q,\omega}^\perp = -\frac{4\pi}{\epsilon_2} \left[ k_2^2 \vec{\Phi}_q - \vec{q}(\vec{\Phi}_q \vec{q}) \right] f_\omega e^{i\frac{\omega}{v}z}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 E_{q,\omega}^z}{dz^2} + k_{2z} E_{q,\omega}^z = \frac{4\pi}{\epsilon_2} (\vec{\Phi}_q \vec{q}) f_\omega \frac{\omega}{v} e^{i\frac{\omega}{v}z}, \quad (7)$$

где  $k_{1z}^2 = k_1^2 - q^2$ ,  $k_2^2 = \frac{\epsilon_2 \omega^2}{c^2}$ .

Из уравнений (6) и (7) получим

$$\vec{E}_{2,q,\omega}^\perp = \vec{a}_2 e^{ik_{2z}z} - \frac{4\pi}{\epsilon_2} \left[ k_2^2 \vec{\Phi}_q - \vec{q}(\vec{\Phi}_q \vec{q}) \right] f_\omega \frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{k_{2z}^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}, \quad (8)$$

$$E_{2,q,\omega}^z = b_2 e^{ik_{2z}z} + \frac{4\pi}{\epsilon_2} (\vec{\Phi}_q \vec{q}) f_\omega \frac{\omega}{v} \frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{k_{2z}^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}. \quad (9)$$

Решение однородного уравнения (для  $z < 0$ ) напомним в виде:

$$\vec{E}_{1,q,\omega}^\perp = \vec{a}_1 e^{-ik_{1z}z}, \quad (10)$$

$$E_{1,q,\omega}^z = b_1 e^{-ik_{1z}z}, \quad (11)$$

где  $k_{1z}^2 = k_1^2 - q^2$ ,  $k_1^2 = \frac{\epsilon_1 \omega^2}{c^2}$ . Коэффициенты  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  определяются из граничных условий.

В дальнейшем мы будем рассматривать излучение назад, поэтому выпишем выражения только для коэффициентов  $\vec{a}_1$  и  $b_1$ :

$$\vec{a}_1 = -\frac{4\pi f_\omega \left[ (q^2 + k_{1z} k_{2z}) \vec{\Phi}_q - \vec{q}(\vec{\Phi}_q \vec{q}) \right]}{\left( k_{2z} + \frac{\omega}{v} \right) (\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z})} \quad (12)$$

$$b_1 = -\frac{4\pi f_\omega (\vec{\Phi}_q \vec{q}) k_{2z}}{\left( k_{2z} + \frac{\omega}{v} \right) (\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z})}. \quad (13)$$

Для энергии излучения можно получить следующее выражение (см. например (8)):

$$W = 2\pi^2 c \int_{-\infty}^{+\infty} (|\vec{a}_1|^2 + |b_1|^2) \sqrt{\epsilon_2 - \frac{q^2 c^2}{\omega^2}} dq^2 d\omega \quad (14)$$

Чтобы не запрощать формулы, положим  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ , так как разница в диэлектрических проницаемостях качественно не меняет полученные результаты. Для определенности предположим также, что

форма импульса и сечение нелинейной поляризации имеют гауссовый вид:

$$\vec{P}^{NL} = \vec{\Phi}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}} e^{-\left(t-\frac{z}{v}\right)^2 \frac{1}{\tau^2}}. \quad (15)$$

Учитывая (15) и переходя к сферическим координатам, выражение (14) можно написать в следующем виде:

$$W = \frac{1}{16\pi^2 c^3} \int \sqrt{\varepsilon} (\omega')^2 P^2 e^{-\frac{k^2 a^2 \sin^2 \theta}{2}} e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{2}} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) d\Omega d\omega, \quad (16)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла. Введены следующие обозначения:

$$\omega'(\theta) = \frac{\omega \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta}, \quad P = \frac{\Phi_0 \pi a^2 \sqrt{\pi} v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17)$$

Первое выражение (17) показывает доплеровский сдвиг частоты излучения. Второе выражение (17) представляет собой полный дипольный момент объема импульса с учетом лорентцевого сокращения его длины.

Появление  $\sin^2 \varphi$  в выражении (16) обусловлено тем, что направление  $\vec{P}^{NL}$  фиксировано. Если провести интегрирование выражения (16) по  $\varphi$ , то вместо множителя  $(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)$  получим:  $\pi(1 + \cos^2 \theta)$ . Это указывает на то, что излучение от нелинейной границы аналогично синхротронному излучению.

Анализ углового спектра энергии показывает, что он имеет максимум при  $\theta=0$  и  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{\tau}$ . После интегрирования по углу  $\varphi$  максимальное значение углового спектра  $U(\theta, \omega)$  определяется выражением

$$U_{\max} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{11\pi c^3} \left( \frac{\Phi_0 \pi a^2 \sqrt{\pi} v}{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon}} \right)^2. \quad (18)$$

Полуширина углового спектра в зависимости от  $\theta$  и  $\omega$  соответственно выражается формулами:

$$\Delta\theta \approx \frac{\tau c}{\sqrt{\varepsilon} a} \ln 2, \quad \Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}. \quad (19)$$

Формула (19) справедлива при условии  $\tau c \ll \sqrt{\varepsilon} a$ , т. е. длина импульса значительно меньше поперечного размера импульса в среде.

Полученные выражения можно использовать для определения длительности импульсов и их поперечных размеров, что особенно интересно для фемтосекундных возбуждающих импульсов.

Авторы признательны академику АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну за ценные обсуждения.

Ереванский государственный университет

**Ճառագայթումը ոչ գծային միջավայրի սահմանից տարբերային  
հանախականության գեներացիայի դեպքում:**

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են ոչ գծային միջավայրի սահմանից տարբերային հանախականության ճառագայթման առանձնահատկությունները, երբ սահմանը գրգռվում է կարճ լազերային իմպուլսների միջոցով: Տրված դաշտերի մոտավորությամբ լուծված է հոաշափ խնդիրը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ ճառագայթման էներգիայի համար: Ցույց է տրված ստացված արդյունքների օգնությամբ գրգռող լազերային իմպուլսի տևողության և լայնական կտրվածքի շափման հնարավորությունը:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

- <sup>1</sup> В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, т. 16, с. 15 (1946). <sup>2</sup> И. М. Франк, УФН, т. 75, с. 231 (1961). <sup>3</sup> Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, т. 68, с. 209 (1966); т. 94 (1968). <sup>4</sup> Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов, В. Е. Рок, УФН, т. 126, вып. 2, (1978). <sup>5</sup> Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов, В. Е. Рок, УФН, т. 136, вып. 3, (1982). <sup>6а</sup> В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, УФН, т. 126, вып. 4, (1978), т. 131, с. 83 (1980); б) В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, Переходное излучение и переходное рассеяние, Наука, М., 1984. <sup>7</sup> М. Л. Тер-Микаелян, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Изд. АН Арм. ССР, Ереван 1969. <sup>8</sup> В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, Наука, М., 1981.

УДК 598.617:616.988.7:576.809.7

ФИЗИОЛОГИЯ

Ж. И. Акопян, Р. А. Захарян, А. С. Агабалян, А. А. Чарчоглян,  
К. Ш. Франгулян, Н. В. Айрапетян**О стимуляции антителообразования при вакцинации против  
вирусной болезни птиц**

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 16/II 1984)

В последние годы накоплен значительный экспериментальный материал об иммуномодулирующих функциях экзогенных нуклеиновых кислот (<sup>1-3</sup>). Показано усиление антибактериальной, антивирусной невосприимчивости, стимулирование иммунного ответа и иммуногенеза препаратами нуклеината натрия (НН) (<sup>4-6</sup>), однако механизм такой стимуляции до сих пор окончательно не выяснен.

В настоящее время большой интерес как в медицинской, так и ветеринарной практике представляют работы по выявлению эффективности препарата НН в качестве иммуномодулятора при сочетанном использовании с вакциной для стимуляции процесса антителообразования при применении вакцины с относительно слабым образованием поствакцинального иммунитета.

В данной работе представлены некоторые результаты исследований влияния официального препарата НН, используемого нами в относительно стабильной форме кальциевого преципитата НН (Са-НК).

Эксперименты проводили на десятидневных цыплятах. Предварительно было проверено наличие материнского иммунитета при помощи реакции задержки гемагглютинации (РЗГА). Определение уровня антител в сыворотке крови цыплят по РЗГА показало, что материнские антитела не препятствуют созданию поствакцинального активного иммунитета. Цыплят внутримышечно заражали эпизоотическим штаммом «Т» вирусной болезни с множественностью  $10^4 LD_{50}/мл$ . Для вакцинации птиц использовали вакцину из штамма «Ла-Сота» (серия № 142). Вакцинацию проводили закапыванием в ноздри цыплят 2 капель вакцины. Препарат НН использовали в виде кальциевой формы. Концентрация кальция в растворе нуклеиновой кислоты во всех случаях была равна 125 мМ.

Подопытные птицы были разделены на три группы по 100 в каждой; контрольную группу составили 50 голов. Первая группа получала препарат Са-НК по 5 мг/мл внутримышечно. Через три дня после введения препарата вся группа была вакцинирована, а еще через три дня повторно получила препарат Са-НК в той же концентрации. Вторая группа получала вакцину и препарат Са-НК в тех же концентрациях одновременно. Спустя три дня этой группе повторно вводили Са-НК в

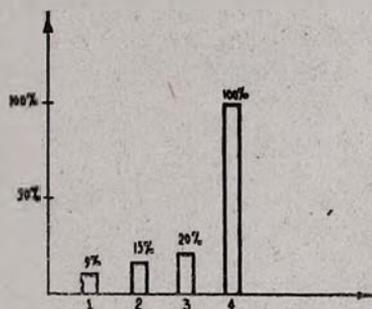
концентрации 5 мг/мл. Третья группа получала только вакцину по обычной схеме. По истечении 10 дней после вакцинации у первых трех групп брали кровь для определения титра антител в сыворотке.

Результаты проведенных экспериментов показали, что у птиц первой группы отмечалось выраженное нарастание титра антител, значение которого достигало 1:1024. У второй группы максимальное значение титра антител составляло 1:256. В третьей экспериментальной группе титр антител колебался в пределах разведения сыворотки от 1:4 до 1:64 (таблица). Эти данные позволяют предположить, что препарат Са-НК, введенный птицам до вакцинирования, значительно усиливает действие примененной вакцины.

Сравнительная характеристика  
препарата Са-НК—вакцина против вирусной болезни птиц

№ группы	Количество голов	Введение препарата Са-НК	Титр антител в разведениях	Количество павших цыплят, %
1	95	До и после вакцины	1:1024	10
2	95	Одновременно с вакциной	1:256	14
3	95	Только вакцина	1:64	20
4	50	Контроль	—	50

Согласно принятой инструкции через 15 дней после вакцинации было проведено контрольное заражение подопытных цыплят всех трех групп эпизоотическим штаммом «Т» вируса. Вирус вводили цыплятам внутримышечно по 0,2 мл и наблюдали за выживаемостью птиц (рисунок). Из представленных данных видно, что в контрольной группе отмечается 100%-ная гибель подопытных птиц. В третьей группе, получавшей только вакцину, падеж составляет 20%, что примерно соответствует падежу вакцинированной птицы в птицеводческих хозяйствах. Несколько ниже был падеж птицы во второй группе, где цыплятам одновременно вводили вакцину и препарат Са-НК. Самый низкий падеж птиц наблюдался в первой группе, которая до вакцинирования получала препарат Са-НК.



Падеж цыплят после контрольного заражения вирусом. По оси ординат—падеж цыплят в процентах; по оси абсцисс—время введения препарата Са-НК

При сравнении результатов действия изучаемых препаратов видна четкая корреляция между титрами антител и выживаемостью птиц во всех группах, что свидетельствует о стимулирующем влиянии препарата Са-НК на действие вакцины против вирусной болезни птиц. Из полученных результатов можно сделать заключение, что время введения препарата Са-НК играет существенную роль в регуляции уровня антителообразования в крови подопытных птиц. Использование препарата НК в виде кальциевой соли в качестве стимулятора привело к повышению титра образования антител и ускорению их формирования.

Таким образом, полученные данные свидетельствуют о целесообразности использования в практике Са-НК вакцины для проведения мер экстренной профилактики.

Институт экспериментальной биологии Академии наук Армянской ССР  
Институт ботаники Академии наук Армянской ССР  
Армянский научно-исследовательский институт ветеринарии Министерства сельского хозяйства Армянской ССР

Փ. Ի. ՀԱԿՈՔՅԱՆ, Ռ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ա. Ս. ԱՂԱՔԱՅԱՆ,  
Ա. Ա. ԶԱՐԶՕՂԻՅԱՆ, Կ. Ռ. ՅՐԱՆԿՈՒՆՅԱՆ, Ն. Վ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Քոչուրենցի վիրուսային հիվանդության դեմ վակցինացիայի  
ժամանակ հակամարմինազոյացման խթանման մասին

Ուսումնասիրված է  $Ca^{2+}$ -նուկլեինաթթվային ( $Ca^{2+}$  ՆՔ) կոմպլեքսի  
խթանող ազդեցությունը «Լա-Սոտա» վակցինայի ազդեցության վրա հա-  
վերի վիրուսային հիվանդության ժամանակ:  $Ca^{2+}$  ՆՔ ներարկվել է հա-  
վերին մինչ վակցինացիան, որն էլ զգալիորեն ուժեղացրել է օգտագործվող  
վակցինայի ազդեցությունը: Հավերի անկումը, համեմատած զուտ վակցինայի  
օգտագործման հետ պակասել է 50%:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ի Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ ՈՒ Ն

<sup>1</sup> А. М. Белоус, В. П. Годин, Е. Я. Панков, в кн.: Экзогенные нуклеиновые кислоты и восстановительные процессы, Медицина, М., 1974. <sup>2</sup> А. М. Земсков, В. М. Земсков, А. В. Петров и др., Иммунология, т. 12, 75—79 (1981). <sup>3</sup> А. М. Земсков, В. М. Земсков, В. Г. Передерий, ИМЭИ, т. 9, 9—13 (1982). <sup>4</sup> А. М. Земсков, В. П. Земсков, В. Г. Передерий и др., Антибиотики, т. 9, 64—70 (1982). <sup>5</sup> А. Н. Фомина, С. С. Григорян, О. В. Зайцева и др., Антибиотики, т. 26, 28—32 (1980). <sup>6</sup> В. Д. Соловьев, Т. А. Бектемиров, в кн.: Интерфероны в теории и практике медицины, Медицина М., 1981.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Ք Յ ՈՒ Ն LXXXI հատորի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Գ. Գ. Էմին—Մոդուլները և խիստ ուղիղները . . . . .	62
Ռ. Ի. Հովսեփյան—Ֆունկցիայի մոնոտոնությունն ապահովող որոշ նոր պայմանների մասին . . . . .	3
Ս. Հ. Գալպյան—Համասեռ բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևը . . . . .	7
Է. Ա. Միրզախանյան—Հիբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի դասին պատկանող գծային սահմանափակ օպերատորների մասին . . . . .	12
Ա. Ա. Սահակյան—Սահմանափակ $\Lambda$ -վարիացիայի ֆունկցիաների մասին . . . . .	51
Վ. Կ. Օհանյան—Հարթության վրա պուստոսյան պրոցեսի կետերով առաջացած եռանկյունիների ձևերի մասին . . . . .	54
Ս. Ա. Հայրապետյան—Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման գոյությունը բազմանդամային աճով ֆունկցիոնալների դասում . . . . .	59
Մ. Կ. Կյուրեղյան—Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների վերածնությունը և անվերծանելի բազմանդամների սինթեզը . . . . .	64
Ա. Վ. Կարաբեգով—Հիբերտ-Շմիդտի օպերատորների $p$ - և $q$ -սիմվոլների կոնստրուկցիան . . . . .	69
Պ. Ա. Առուշանյան — Քառակուսի մատրիցային գործակիցներով համակարգերի բերումը կանոնական տեսքի . . . . .	74
Ա. Ս. Հատրաքյան, Ն. Կ. Խաչատրյան — Գրաֆի համիլտոնության հետազոտումը դազաթների շրջակայքերի օգնությամբ . . . . .	99
Ռ. Գ. Բարաշանյան, Վ. Ս. Ռաբիճովիչ — Ինտեգրալ-տարբերակային հավասարումների համակարգը կիսատանցքի վրա . . . . .	103
Ա. Ա. Գոլդբերգ, Ա. Է. Նոյմենկո—Ամբողջ ֆունկցիաների միակուսյան ընդհանրացված բազմությունների մասին . . . . .	107
Վ. Վ. Սաբաթյան—Մարկովյան պրոցեսներ և եզրային խնդիրներ համակարգերի մի դասի համար . . . . .	147
Ս. Ս. Ղազարյան—Ինտեգրալ անհավասարությունների մի մաքսիմալ ֆունկցիայի համար . . . . .	151
Կ. Վ. Սաղաթեյան—Փոփոխական ինֆորմացիայով դիրքային խաղեր . . . . .	155
Ա. Ա. Գոլդբերգ, Ա. Է. Նոյմենկո—Ամբողջ ֆունկցիաների միակուսյան ընդհանրացված բազմությունների մասին . . . . .	159
Հ. Լ. Բայալյան—Ֆուրյե—Հաարի մոտավոր գործակիցներով շարքերի կայուն գումարման մեթոդների մասին . . . . .	162
Ժ. Գ. Նիկոլոսյան—Գրաֆներում ամենաերկար ցիկլների մասին . . . . .	166
Վ. Մ. Յոմին—Սիմետրիայի տարածական խմբով բազմությունների վրա տրված ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը . . . . .	195
Վ. Ս. Զաֆարյան, Դ. Թ. Բազադարյան—Գիրիխայի տիպի վերջավոր ինտեգրալով ֆունկցիաների աճի մասին . . . . .	200
Վ. Վ. Ասատրյան—Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի ռեզուլյարիզացիայի մի մեթոդի մասին . . . . .	205

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ն. Ս. Մելիքյան—Օրացուցային պլանավորման խնդիրը տեխնոլոգիական ցանցերում . . . . .	17
---	----

ՄեհԱՆԻԿԱ	
Ս. Հ. Սարգսյան—Ուղղանկյուն սալի և թեք թաղանթի երկայնական մազնիսական դաշտում տատանումների խնդիրների մասին . . . . .	26

Լ. Մ. Վարդանյան, Մ. Գ. Ստեփանյան, Ռ. Կ. Քաղևայան—Հարթ խնդիրը սեպածև տիրույթների համար	171
Ս. Հ. Սարգսյան—Երկայնական սեղմող ուժերով, երկայնական մագնիսական դաշտում անիզոտրոպ սալի տատանումների խնդրի մասին	209

**ԳՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵՆԱՆԻԿԱ**

Է. Ե. Խաչիյան, Ա. Գ. Արովյան — Երկրաշարժի ակտիվությունների հիման վրա կառուցվածքների և շենքերի վրա սեյսմիկ ազդեցության էքսպերիմենտալ ընդօրինակման եղանակի մասին	112
--	-----

**ՀԻՊՐՈՄԵՆԱՆԻԿԱ**

Ջ. Ս. Քոռոսյան—Նուրբ-շերտային կենտրոնախույս բաժանման կրիտիկական ուժով	176
Ջ. Ս. Քոռոսյան—Նուրբ-շերտային կենտրոնախույս բաժանման դեպքում հեղուկի բաշխման հետազոտությանը վերադրված ճիշտության հավաքածուի մեջ	213
<b>ԿՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ՄԵՆԱՆԻԿԱ</b>	
Ս. Ռ. Մեռյան—Կավային գետնահողերի կողային ճնշման և ուռչելու ճնշումների որոշման մասին	218

**ԷԼԵԿՏՐՈՒՆԱՄԻԿԱ**

Ռ. Հ. Քարխանյան, Վ. Ռ. Սիմոնյան—Մակերևութային էլեկտրամագնիսական ալիքները գիրոտրոպ բյուրեղներում	31
Ա. Ղ. Իսախանյան—էլեկտրամագնիսական օսցիլյատորում կատարվող անդամների պրոցեսների մասին	181

**ՀԻՊՐՈՒՆԱՄԻԿԱ**

Ն. Ն. Վերիգին, Վ. Ա. Սարգսյան—Գյուղատնտեսական կուլտուրաների ստորերկրյա ոռոգիչների մասին	77
---	----

**ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ**

Ն. Ա. Մառխիսին, Ն. Ա. Նիկոլայայան—Եզրագծի վրա անկյունային կետերով կտրվածքների պարունակող անվերջ տիրույթներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների հաշվումը	21
Բ. Լ. Աբրահամյան — Կիսատարածության մեջ առաձգական ալիքների տարածման մի խնդրի մասին	118

**ՖԻԶԻԿԱ**

Վ. Ն. Հայրապետյան, Ցու. Ն. Հայրապետյան—Դիֆուզիայի գործակիցի վարքը ամասնիկների հապաղվող ամպի եզրին	35
Ռ. Հ. Քարխանյան—Թերմոէլեկտրամագնիսական ալիքները անիզոտրոպ կիսահաղորդիչներում	40
Վ. Ա. Ավետիսյան, Վ. Վ. Միկեսյան, Ե. Խ. Նազարյան—ԻԱԳ:Ուլտրա-կարմիր երկրորդ հարմոնիկ ճառագայթումով գրգռված կարբոմիդ ամվալցրած ոռոգամին ԵԹ-ի շրային լուծույթների լյումինեսցենցիայի սպեկտրալ բնութագրերի հետազոտումը	82
<b>Վ. Մ. Ավազյան, Ի. Ա. Սարգսյան</b> — Կոսպետով կոմպենսացված սիլիցիումի ֆոտոհաղորդականության ինֆրակարմիր մարումը	123
Ռ. Բ. Կոստանյան, Տ. Վ. Սաճանյան — Լյուտեցիում-ալյումինային նոնաքարում էրբիումի մակարդակների կյանքի տեղության ուսումնասիրումը	128
Վ. Ե. Մկրտչյան, Վ. Հ. Գալսիկյան—Ճառագայթման տարածման էֆեկտները ուռչունանսային միջավայրում փոքր հեռավորության դեպքում և դրանց կապը տարրական պրոցեսների հետ	186
Մ. Ն. Ներսիսյան, Պ. Ս. Պոլոսյան, Լ. Վ. Սաճանյան—Ճառագայթումը ոչ գծային միջավայրի սահմանից տարբերային հաճախականության գեներացիայի դեպքում	223

**ՕՐԿԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ**

Ա. Ք. Բաբայան, Ա. Խ. Գյուլեգորյան, Ն. Պ. Զուրիկեա, Տ. Ա. Սաճանյան—1-դիմեթիլֆենացիլամոնիում-2-բուտեն բրոմիդի 4-րդ դիրքում գտնվող տեղակալիչի	232
--	-----

րնուլթի ազդեցությունը 1,4-պոկման և ստիվենսյան 3,2-վերախմբավորման ունակցիաների մրցակցության վրա . . . . . 131

**ԱԳՐՈՔԻՄԻԱ**

Ա. Ա. Աբրահամյան, Ա. Շ. Գալստյան—Շողի համուսնաթիթների տարբեր ֆրակցիաների ֆերմենտների ակտիվությունը . . . . . 190

**ՄԻԿՐՈՐԻՈԼՈԳԻԱ**

Ս. Շ. Տեր-Ղազարյան—Կաթնաթթվային բակտերիաների էկոլոգիան կախված բարձրակարգ բույսերի ֆլորայից . . . . . 85

**ԲՈՒՑՍԵՐԻ ՖԻՋԻՈԼՈԳԻԱ**

Վ. Հ. Ղազարյան, Ի. Ա. Ղազարյան, Լ. Ա. Մնացականյան—Բույսերի արմատներում և տերևներում ֆիզիոլոգիական ակտիվ նյութերի պարունակության վրա լուսի ինտենսիվության ու որակի ազդեցության մասին . . . . . 89

**ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

Ս. Ա. Վարդիկյան—Երկրաչափ թիթեռների նոր տեսակներ Eupithecia Curt. սեռից Հայաստանից . . . . . 45

Ս. Ա. Վարդիկյան—Երկրաչափ թիթեռների նոր տեսակ Semiothisa Hübner սեռից (Lepidoptera, Geometridae) Հայկական ՄՍՀ-ից . . . . . 94

Վ. Գ. Խոլիե, Մ. Ա. Մարչանյան — Չրխկան բզեզների Cardiophorus Eschz սեռի նոր տեսակներ Անդրկովկասից և ՍՍՀՄ-ի եվրոպական մասից (Coleoptera, Elateridae) . . . . . 134

**ՖԻՋԻՈԼՈԳԻԱ**

Ն. Ա. Մեցոյան — Ուղեղիկի միջանկյան կորիզի միակողմանի քայքայումից հետո կոմպենսատոր վերականգնման վերականուցումների հարցը . . . . . 139

Ժ. Ի. Հակոբյան, Ռ. Ա. Զաբարյան, Ա. Ս. Աղաբալյան, Ա. Ա. Զարչոզյան, Կ. Ռ. Ֆրանգուլյան, Ն. Վ. Հայրապետյան—Թռչունների վերուսային հիվանդության դեմ վակցինացիայի ժամանակ հակամարմինազոլցման խթանման մասին . . . . . 228

## СОДЕРЖАНИЕ LXXXI тома

	Стр.
<b>МАТЕМАТИКА</b>	
Г. Г. Эмин—Модули и строгие радикалы . . . . .	3
Р. И. Овсепян—О некоторых новых условиях, обеспечивающих монотонность функций . . . . .	7
С. Г. Далалян—Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов . . . . .	12
Э. А. Мирзаханян—О линейных ограниченных операторах, принадлежащих одному классу непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства . . . . .	51
А. А. Саакян—О функциях ограниченной $\Delta$ -вариации . . . . .	54
В. К. Оганян—О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости . . . . .	59
С. А. Айрапетян—О существовании решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе функционалов полиномиального роста . . . . .	64
М. К. Кюрегян—Разложение полиномов и синтез неприводимых полиномов над конечными полями . . . . .	69
А. В. Карабеггов—Конструкция $qr$ - и $qr$ -символов операторов Гильберта-Шмидта . . . . .	74
Э. А. Арушанян—Приведение к каноническому виду ОКР-систем с квадратными матричными коэффициентами . . . . .	99
А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян—Исследование гамильтоновости графа с помощью окрестностей вершин . . . . .	103
Р. Г. Бабаджанян, В. С. Рабинович—Система интегрально-разностных уравнений на полупрямой . . . . .	107
В. В. Сарафян—Марковские процессы и краевые задачи для одного класса систем . . . . .	147
С. С. Казарян—Интегральные неравенства для одной максимальной функции . . . . .	151
К. В. Сагателян—Позиционные игры с переменной информацией . . . . .	155
А. А. Гольдберг, А. Е. Еременко—Об обобщенных множествах единственности для целых функций . . . . .	159
Г. Л. Баядян—О методах устойчивого суммирования рядов Фурье—Хаара с приближенными коэффициентами . . . . .	162
Ж. Г. Никогосян—О длиннейших циклах в графах . . . . .	166
В. М. Фомин—Интегральное представление функции, заданной на множестве с пространственной группой симметрии . . . . .	195
В. С. Захарян, Д. Т. Багдасарян—О росте функций с конечным интегралом типа Дирихле . . . . .	200
В. В. Асатрян—Об одном методе регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений . . . . .	205
<b>ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА</b>	
Н. А. Меликян—Задача календарного планирования на технологических сетях . . . . .	17
<b>МЕХАНИКА</b>	
С. О. Саркисян—К задачам о колебании прямоугольной пластинки и пологой обложки в продольном магнитном поле . . . . .	26
Л. М. Варданян, М. Г. Степанян, Р. Г. Тадевосян—Плоская задача для клиновидных областей . . . . .	171

*С. О. Саркисян*—К задаче о колебании анизотропной пластинки с продольными сжимающими усилиями в продольном магнитном поле. . . . . 209

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Э. Е. Хачиян, А. Г. Абовян*—Об одном способе экспериментального воспроизведения сейсмического воздействия на здания и сооружения по акселерограмме землетрясения . . . . . 112

## ГИДРОМЕХАНИКА

*Дж. С. Торосян*—Критический режим тонкослойного центрифугирования . 176

*Дж. С. Торосян*—Исследование распределения жидкости по комплекту вставок при тонкослойном центрифугировании . . . . . 213

## МЕХАНИКА ГРУНТОВ

*С. Р. Месчян*—Об определении бокового давления и давлений набухания глинистых грунтов . . . . . 218

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Р. Г. Тарханян, В. Р. Симонян*—Поверхностные электромагнитные волны в гиротропных кристаллах . . . . . 31

*А. Г. Иосифьян*—О необратимых процессах в электромагнитном осцилляторе 181

## ГИДРОДИНАМИКА

*Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян*—О действии подземных оросителей сельскохозяйственных культур . . . . . 77

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Н. А. Матехин, Н. А. Никольская*—Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в бесконечных областях, содержащих вырезы с угловыми точками границы . . . . . 21

*Б. Л. Абрамян*—Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве . . . . . 118

## ФИЗИКА

*В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян*—Поведение коэффициента диффузии на «краю расплывающегося облака частиц» . . . . . 35

*Р. Г. Тарханян*—Термоэлектромагнитные волны в анизотропных полупроводниках . . . . . 40

*В. А. Аветисян, В. В. Минасян, Е. Х. Назарян*—Исследование спектральных характеристик люминесценции водных растворов родамина 6Ж с добавкой карбамида при возбуждении излучением второй гармоники ИАГ: Nd лазера . 82

*Г. М. Авакьянц, И. А. Саркисян*—Инфракрасное гашение в образцах кремния с примесью кобальта . . . . . 123

*Р. Б. Қостанян, Т. В. Санамян*—Исследование времени жизни уровней эрбия в лютеций-алюминиевом гранате . . . . . 128

*В. Е. Мкртчян, В. О. Чалтыкян*—Эффекты прохождения излучения на малых длинах и их связь с элементарными процессами на отдельном атоме . 186

*М. Н. Нерсисян, П. С. Погосян, Л. В. Саакян*—Излучение от нелинейной границы при генерации разностной частоты . . . . . 223

## ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

*А. Т. Бабаян, А. Х. Гюльназарян, Н. П. Чуркина, Т. А. Саакян*—Влияние природы заместителя в 4-положении 1-диметилфенацетилламмоний-2-бутенбромида на конкуренцию реакций 1,4-отщепления и 3,2-перегруппировки Стивенса . 131

## АГРОХИМИЯ

*С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян*—Активность ферментов различных фракций гумусовых кислот почвы . . . . . 190

## МИКРОБИОЛОГИЯ

- С. Ш. Тер-Казарян*—Экология молочнокислых бактерий в связи с флорой высших растений . . . . . 85

## ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. О. Казарян, И. А. Казарян, Л. А. Мнацаканян*—О влиянии интенсивности и качества света на содержание физиологически активных веществ в листьях и корнях растений . . . . . 89

## ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. А. Вардикян*—Новые виды пядениц из рода *Eupithecia* Curt. (Lepidoptera, Geometridae) из Армении . . . . . 45

- С. А. Вардикян*—Новый вид пяденицы из рода *Semiothisa* Hübner (Lepidoptera, Geometridae) из Армянской ССР . . . . . 94

- В. Г. Долин, М. А. Марджанян*—Новые виды жуков-щелкунов рода *Cardiophorus* Eschtz фауны европейской части СССР и Закавказья (Coleoptera, Elateridae) . . . . . 134

## ФИЗИОЛОГИЯ

- Н. А. Мецоян*—К вопросу о компенсаторно-восстановительных перестройках после одностороннего разрушения промежуточного ядра мозжечка . . . . . 139

- Ж. И. Акопян, Р. А. Захарян, А. С. Агабалян, А. А. Чарголян, К. Ш. Франгулян, Н. В. Айрапетян*—О стимуляции антителообразования при вакцинации против вирусной болезни птиц . . . . . 228

CONTENTS of LXXXI volume

MATHEMATICS

	P.
<i>G. G. Emin</i> —Modules And Strict Radicals . . . . .	3
<i>R. I. Ovsepián</i> —On some new conditions providing the monotonicity of functions . . . . .	7
<i>S. H. Dalatán</i> —Discriminant form of the finite family of the homogeneous polynomials . . . . .	12
<i>E. A. Mirzakhánian</i> —On linear bounded operators belonging to a class of continuous maps of subsets of Hilbert space . . . . .	51
<i>A. A. Sahakian</i> —On the functions of $\Delta$ -bounded variation . . . . .	54
<i>V. K. Ohánian</i> —On triangle shapes formed by points of a Poisson process in the plane. . . . .	59
<i>S. A. Hairapétian</i> —On the existence of the solution of nonhomogenous differential equations with constant coefficients in the class of functionals of the polynomial growth. . . . .	64
<i>M. K. Koureglian</i> —Decomposition of polynomials and the synthesis of irreducible polynomials over finite fields. . . . .	69
<i>A. Karabégov</i> —Construction of $pq$ - and $qp$ -symbols of Hilbert—Shmidt operators . . . . .	74
<i>Z. A. Arushánian</i> —The rendering of OKP-systems to the canonical form with quadratic matrix coefficients. . . . .	99
<i>A. S. Hasratian, N. K. Khachatrian</i> —An investigation of Hamiltonian of graphs by means of the neighborhoods of vertices . . . . .	103
<i>R. G. Babadzánian, V. S. Rabinovitch</i> —The system of integral-difference equation on the half-line. . . . .	107
<i>V. V. Sarafian</i> —Markov processes and boundary problems for one class of systems. . . . .	147
<i>S. S. Kazarian</i> —Integral inequalities for a maximal function . . . . .	151
<i>K. V. Sagatellán</i> —The games in extensive form with variable information . . . . .	155
<i>A. A. Goldberg, A. E. Eremenko</i> —On the generalized sets of uniqueness for entire functions. . . . .	159
<i>H. L. Bayadian</i> —On the methods of stable summation of Fourier—Haar series with approximate coefficients. . . . .	162
<i>G. G. Nlcoghossian</i> —On longest circuits in graphs . . . . .	166
<i>V. M. Fomin</i> —On integral representation of the function defined at the set with the space-group symmetry . . . . .	195
<i>V. S. Zakharian, D. T. Bagdasarian</i> —On the growth of functions with a finite integral of the Dirichlet type . . . . .	200
<i>V. V. Asatrián</i> —About a method of regularisation of the systems of singular integral equations . . . . .	205

APPLIED MATHEMATICS

<i>N. A. Melikán</i> —The task of calendar planning on the technology nets	17
--	----

MECHANICS.

<i>S. O. Sarkisian</i> —On the problem of vibration of orthogonal plates and inclined shells on longitudinal magnetic fields . . . . .	26
--	----

<i>L. M. Vardanian, M. G. Stepanian, R. G. Tadevosian</i> —Plane problem for the wedge-shaped regions . . . . .	171
<i>S. O. Sarkisian</i> —On the problem of anisotropic plate vibration with longitudinal compression forces in longitudinal magnetic field . . . . .	209

STRUCTURAL MECHANICS

<i>E. E. Khachlan, A. G. Abovian</i> —The method of experimental reproduction of seismic action on buildings and structures based on earthquake accelerograms . . . . .	112
---	-----

HYDROMECHANICS

<i>J. S. Torossian</i> —The critical conditions of the thin-layered centrifugation. . . . .	176
<i>J. S. Torossian</i> —Investigation of liquid distribution according to the specified number of insertions in thin-layered centrifugation . . . . .	213

SOIL MECHANICS

<i>S. R. Meschian</i> —On the determination of lateral pressure and swelling pressure of clayey soils . . . . .	218
---	-----

ELECTRODYNAMICS

<i>R. G. Tarkhanian, V. R. Simonian</i> —Surface electromagnetic waves in gyrotropic crystals . . . . .	31
<i>A. G. Iosifian</i> —On the nonequilibrium processes in the electromagnetic oscillator. . . . .	181

HYDRODYNAMICS

<i>N. N. Verighin, V. S. Sarkisian</i> —Operation of underground irrigation systems . . . . .	77
---	----

THEORY OF ELASTICITY

<i>N. A. Matshin, N. A. Nikolskaya</i> —Stress intensity factor computation in infinite domains with corner points of a board. . . . .	21
<i>B. L. Abramian</i> —On the problem of propagation of elastic waves in the semi-space. . . . .	118

PHYSICS

<i>V. N. Hatripetian, U. N. Hatripetian</i> —The behaviour of the diffusion coefficient "on the edge of the breaking particle cloud". . . . .	35
<i>R. G. Tarkhanian</i> —Thermoelectromagnetic waves in anisotropic semiconductors . . . . .	40
<i>V. A. Avetisian, V. V. Mnassian, Y. Ch. Nazarian</i> —The investigation of spectral characteristics of luminescence of water solutions of rhodamin 6G with addition of carbamid in case of excitation by second harmonic radiation of YAG:Nd lazer . . . . .	82
<i>G. M. Avakiants, I. A. Sarkisian</i> —Infra-red extinguishing in silicon samples with cobalt admixture. . . . .	123
<i>R. B. Kostanian, T. V. Sanamlan</i> —Lifetime measurement Erblum ion levels in lutetium-aluminum garnet. . . . .	128
<i>V. E. Mkrtchian, V. O. Chaltikian</i> —Small distance propagation effects and their connection to elementary processes with a single atom. . . . .	186
<i>M. N. Nerstian, P. S. Poghostan, L. V. Sahakian</i> —Nonlinear border radiation at the differential frequency generation . . . . .	223

ORGANIC CHEMISTRY

<i>A. T. Babayan, A. Kh. Gyulnazarian, N. P. Churkina, T. A. Sahakian</i> —The influence of substituent in 4-position of 1-dimethylphenacilammonium-2-	
--	--

butenbromide on competition of the 1,4-cleavage and 3,2<sup>o</sup>Stevens rearrangement reactions. . . . . 131

**AGRICULTURAL CHEMISTRY**

*S. A. Abrahamian, A. Sh. Galstian*—The enzymatic activity of various fractions of soil humous acids. . . . . 190

**MICROBIOLOGY**

*S. Sh. Ter-Kazarian*—The ecology of lactic acid bacteria in relation to the flora of higher plants. . . . . 85

**PLANT PHYSIOLOGY**

*V. O. Kazarian, I. A. Kazarian, L. A. Mnatsakantian*—On the influence of intensity and quality of the light on the contents of physiological active substances in plant leaves and roots. . . . . 89

**ENTOMOLOGY**

*S. A. Vardkian*—New Geometrid species of the genus *Eupithecia* Curt. (Lepidoptera, Geometridae) of Armenia. . . . . 45

*A. S. Vardikian*—A new Geometrid — species of the genus *Semiothisa* Hübner (Lepidoptera, Geometridae) from Armenian SSR. . . . . 94

*W. G. Dolin, M. A. Mardjanian*—New species of clickbeetles of the genus *cardiophorus* Eschz from the European part of the USSR and Transcaucasus (Coleoptera, Elateridae) . . . . . 134

**PHYSIOLOGY**

*N. A. Methsoyan*—The problem of compensator-rehabilitatory reorganization after unilateral lesion of the nucleus *interpositus* of the cerebellum. . . . . 139

*Zh. I. Akopian, R. A. Zacharian, A. S. Agaballan, A. A. Charchoglian, K. Sh. Phrangullian, N. V. Alrapetian*—Stimulation of antibody formation by vaccine against bird viral diseases . . . . . 228

