

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ ДОКЛАДЫ

LXXXI, № 4

1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. գիտ. թեկնածու (պատմ. ֆառապատ), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐԻԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ՔԱՎԱՏԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատմ. խմբագրի տնօրէն), Վ. Գ. ՄԵՒՔԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Մ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Յ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Դ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. նաւ (ոթ սեկրետար), Յ. Դ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Դ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ԴԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Յ. Օ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ (զամ. ոթ. ռեդակտոր), Յ. Դ. ՄԽԻԴԱՐՅԱՆ, շլ. -կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Դ. Տ. ՏԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԴՅԱՆ, շլ. -կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ԴԱԼԱԼՅԱՆ, շլ. -կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Մ. Լ. ԴԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Յ. Յ. ՖԱՆԱՐԴՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ,



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԲՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Վ. Սաբաֆյան—Մարկովյան պրոցեսներ և եզրային խնդիրներ համակարգերի մի դասի համար	147
Ս. Ս. Ղազարյան—Ինտեգրալ անհավասարությունների մի մաքսիմալ ֆունկցիայի համար	151
Կ. Վ. Սադաթյան—Փոփոխական ինֆորմացիայով դիրքային խաղեր	155
Ա. Ա. Գալստյան, Ա. Է. Երամենկո—Ամբողջ ֆունկցիաների միակության ընդհանրացված բազմությունների մասին	159
Հ. Լ. Բալադյան—Ֆուրյեի—Հաարի մոտավոր գործակիցներով շարքերի կայուն զու-մարման մեթոդների մասին	162
Ժ. Գ. Նիկողոսյան—Գրաֆներում ամենաներկար ցիկլերի մասին	166

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Լ. Մ. Վադանյան, Մ. Գ. Ստեփանյան, Ռ. Գ. Թադևոսյան—Հարթ խնդիրը սեպածև սիրույթների համար	171
---	-----

ՀԻԳՐՈՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ջ. Ս. Թորոսյան—Նուրբ-շերտային կենտրոնախույզ բաժանման կրիտիկական ուժերը	176
--	-----

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ա. Ղ. Իսսիֆյան—Էլեկտրամագնիսական օսցիլյատորում կատարվող անդարձելի պրոցեսների մասին	181
--	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ս. Մկրտչյան, Վ. Հ. Ջալիլյան—Զառագայթման տարածման էֆեկտները ռեզո-նանսային միջավայրում փոքր հեռավորության դեպքում և դրանց կապը տարրական պրոցեսների հետ	186
---	-----

ԱԳՐՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Աբրահամյան, Ա. Շ. Գալստյան—Հողի հումուսաթթվների տարբեր ֆրակցիաների ֆերմենտների ակտիվությունը	190
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>В. В. Сарафян</i> —Марковские процессы и краевые задачи для одного класса систем	147
<i>С. С. Казарян</i> —Интегральные неравенства для одной максимальной функции	151
<i>К. В. Сагателян</i> —Позиционные игры с переменной информацией	155
<i>А. А. Гольдберг, А. Е. Еременко</i> —Об обобщенных множествах единственности для целых функций	159
<i>Г. Л. Баядян</i> —О методах устойчивого суммирования рядов Фурье—Хаара с приближенными коэффициентами	162
<i>Ж. Г. Никогосян</i> —О длиннейших циклах в графах	166
МЕХАНИКА	
<i>Л. М. Варданян, М. Г. Степанян, Р. Г. Тадевосян</i> —Плоская задача для клиновидных областей	171
ГИДРОМЕХАНИКА	
<i>Дж. С. Торосян</i> —Критический режим тонкослойного центрифугирования	176
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	
<i>А. Г. Носифьян</i> —О необратимых процессах в электромагнитном осцилляторе	181
ФИЗИКА	
<i>В. Е. Мкртчян, В. О. Чалгыкян</i> —Эффекты прохождения излучения на малых длинах и их связь с элементарными процессами на отдельном атоме	186
АГРОХИМИЯ	
<i>С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян</i> —Активность ферментов различных фракций гумусовых кислот почвы	190

CONTENTS

MATHEMATICS

P.

- V. V. Sarafian*—Markov processes and boundary problems for one class of systems. 147
- S. S. Kazarian*—Integral inequalities for a maximal function 151
- K. V. Sagatelian*—The games in extensive form with variable information 155
- A. A. Goldberg, A. E. Eremenko*—On the generalized sets of uniqueness for entire functions. 159
- H. L. Bayadian*—On the methods of stable summation of Fourier—Haar series with approximate coefficients. 162
- G. G. Niroghossian*—On longest circuits in graphs. 166

MECHANICS

- L. M. Vardanian, M. G. Stepanian, R. G. Tadevosian*—Plane problem for the wedge-shaped regions 171

HYDROMECHANICS

- J. S. Torosian*—The critical conditions of the thin-layered centrifugation. 176

ELECTRODYNAMICS

- A. G. Iosifian*—On the nonequilibrium processes in the electromagnetic oscillator. 181

PHYSICS

- V. E. Mkrtchian, V. O. Chaltiklan*—Small distance propagation effects and their connection to elementary processes with a single atom. . . . 186

AGRICULTURAL CHEMISTRY

- S. A. Abrahamian, A. Sh. Galstian*—The enzymatic activity of various fractions of soil humous acids. 190

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 28.10.1985 г. Подписано к печати 13.02. 1986 г. ВФ 07219.

Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-пзд. 3,36 л. Тираж 430. Заказ 750. Издат. 6663.

Адр. ред.: 375019, Еревай, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. В. Сарафян

Марковские процессы и краевые задачи
для одного класса систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 6/III 1984)

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$L_k u(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r a_k^{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^r b_k^i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i},$$

$$x \in R^r; \quad k = 1, 2; \quad \sum_{i,j=1}^r a_k^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 > 0.$$

Коэффициенты $a_k^{ij}(x)$, $b_k^i(x)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми и ограниченными в R^r вместе со своими производными.

Пусть $c_{ij}(x)$, $x \in R^r$, $i, j \in \{1, 2\}$ ограниченные вместе с первыми и вторыми производными функциями; $c_{12}(x) \geq 0$, $c_{21}(x) \geq 0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = L_1 u_1(t, x) + c_{11}(x) u_1(t, x) + c_{12}(x) u_2(t, x); \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = L_2 u_2(t, x) + c_{21}(x) u_1(t, x) + c_{22}(x) u_2(t, x). \end{cases} \quad (1)$$

С системой (1) связано марковское семейство $Z_t^{x,i} = (X_t^{x,i}, v_t^{x,i})$ на фазовом пространстве $R^r \times \{1, 2\}$ и соответствующий марковский процесс $Z_t = (X_t, v_t, P_{x,t})$. Определение и свойства марковских семейств и процессов можно найти у Е. Б. Дынкина ⁽¹⁾ или А. Д. Вентцеля ⁽²⁾.

Чтобы построить семейство $Z_t^{x,i}$ (по семейству процесс строится автоматически), рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\tau_k\}$ на вероятностном пространстве (Ω^1, F^1, P^1) , имеющих показательное распределение с параметром 1:

$$P^1\{\tau_k > t\} = e^{-t}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим далее последовательность независимых марковских семейств $\{X_{1,n}^x(t)\}$, каждое из которых соответствует оператору L_1 , и независимую от этой последовательности последовательность марковских семейств $\{X_{2,n}^x(t)\}$, соответствующую оператору L_2 . Последовательности $\{X_{1,n}^x(t)\}$, $\{X_{2,n}^x(t)\}$, $x \in R^r$ можно, например, построить как решения стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_{k,n}^x(t) = \sigma_k(X_{k,n}^x(t)) d\tilde{w}_t^{k,n} + b_k(X_{k,n}^x(t)) dt,$$

$$X_{k,n}^x(0) = X, \quad x \in R^r, \quad k=1, 2; \quad n=1, 2, \dots$$

Здесь $\tilde{w}_t^{1,n}$ и $\tilde{w}_t^{2,n}$ — независимые r -мерные винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве

$$(\Omega^2, F^2, P^2); \quad \sigma_k(x) \cdot \sigma_k^*(x) = (a^k(x)),$$

$b_k(x) = (b_k^1(x), b_k^2(x), \dots, b_k^r(x))$. Матрицы $\sigma_k(x)$ выбираются так, чтобы их элементы удовлетворяли условию Липшица.

Построим теперь семейство $(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$, $x \in R^r$, $i=1, 2$. Пусть для определенности $i=1$. Положим $\nu_{\tau_1}^{x,1} = 1$, $X_{\tau_1}^{x,1} = X_{1,1}^x(t)$ при $0 \leq t < \tau_1$, где случайная величина τ_1 определяется из уравнения

$$\int_0^{\tau_1} c_{12}(X_{1,1}^x(s)) ds = \bar{\tau}_1.$$

Далее положим $\nu_{\tau_1+t}^{x,1} = 2$, $X_{\tau_1+t}^{x,1} = X_{2,1}^{x,1}(t)$ при $0 \leq t < \tau_2$, где τ_2 определяется из уравнения

$$\int_0^{\tau_2} c_{21}(X_{2,1}^{\nu_{\tau_1}^{x,1}}(s)) ds = \bar{\tau}_2.$$

Далее по индукции

$$\nu_{\tau_1+\dots+\tau_n+t}^{x,1} = \begin{cases} 1, & \text{при } n=2k \\ 2, & \text{при } n=2k+1 \end{cases};$$

$$X_{\tau_1+\dots+\tau_n+t}^{x,1} = \begin{cases} X_{1,k+1}^{x,1}(\dots+\tau_n(t)), & \text{при } n=2 \cdot k \\ X_{2,k+1}^{x,1}(\dots+\tau_n(t)), & \text{при } n=2k+1 \end{cases}$$

при $t \in [0, \tau_{n+1})$, где τ_{n+1} — корень уравнения

$$\int_0^{\tau_{n+1}} c_{12}(X_{1,k+1}^{x,1}(\dots+\tau_n(s))) ds = \bar{\tau}_{n+1},$$

если $n=2k$, и уравнения

$$\int_0^{\tau_{n+1}} c_{21}(X_{2,k+1}^{x,1}(\dots+\tau_n(s))) ds = \bar{\tau}_{n+1},$$

если $n=2k+1$.

Так как $\sum_{i=1}^n \bar{\tau}_i \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1, то этими равенствами $X_t^{x,1}$ и $\nu_t^{x,1}$ определены для всех $t \geq 0$. Аналогично определяются случайные функции $X_t^{x,2}$ и $\nu_t^{x,2}$. Верна следующая

Теорема 1. Случайные функции $(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$, $x \in R^r$, $i=1, 2$, образуют строго марковское семейство в фазовом пространстве $R^r \times \{1, 2\}$. Инфинитезимальный оператор A семейства $(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$

на функциях $f(x, k)$, имеющих равномерно-непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядка по $x \in R^r$, определен и

$$Af(x, k) = L_k f(x, k) + c_{ki}(x)[f(x, i) - f(x, k)], \quad k \neq i, \quad i, k = 1, 2.$$

Перейдем теперь к вероятностному представлению решений для систем вида (1) и близких к ним.

Сначала рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальными условиями

$$u_1(0, x) = g_1(x), \quad u_2(0, x) = g_2(x). \quad (2)$$

Здесь $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — ограниченные непрерывные функции.

Теорема 2. Если решение задачи Коши для системы (1) с начальными условиями (2) существует, то оно представимо в виде

$$u_k(t, x) = M g_{i, x, k}(X_t^{x, k}) \exp \left\{ \int_0^t c_{i, x, k}(X_s^{x, k}) ds \right\},$$

где $c_l(x) = c_{ll}(x) + c_{lj}(x)$, $i, j = 1, 2$, $l \neq j$. Рассмотрим теперь задачу Дирихле

$$\begin{cases} L_1 u_1(x) + c_{11}(x) u_1(x) + c_{12}(x) u_2(x) = 0 \\ L_2 u_2(x) + c_{21}(x) u_1(x) + c_{22}(x) u_2(x) = 0 \\ x \in D \subset R^r, \quad u_1(x)/\partial D = \Psi_1(x), \quad u_2(x)/\partial D = \Psi_2(x) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь D — ограниченная область в R^r с гладкой границей ∂D ; $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ — непрерывные функции.

Теорема 3. Предположим, что $c_i(x) \leq 0$, $i = 1, 2$, и операторы L_1 и L_2 не вырождаются в $D \cup \partial D$. Тогда решение задачи (3) допускает представление

$$u_k(x) = M \Psi_{i, x, k}(X_\tau^{x, k}) \exp \left\{ \int_0^\tau c_{i, x, k}(X_s^{x, k}) ds \right\},$$

где $x \in D$, $k = 1, 2$; $\tau = \tau^{x, k} = \inf \{t : X_t^{x, k} \notin D\}$ — момент первого выхода из D для процесса $X_t^{x, k}$.

Ереванский государственный университет

Վ. Վ. ՍԱՐԱՅԱՆ

Մաթեմատիկական սյուրոբյաների և եզրային խնդիրներ
համակարգերի մի դասի համար

Դիտարկենք դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = L_1 u_1(t, x) + c_{11}(x) u_1(t, x) + c_{12}(x) u_2(t, x)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = L_2 u_2(t, x) + c_{21}(x) u_1(t, x) + c_{22}(x) u_2(t, x)$$

որտեղ՝

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r a_k^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^r b_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$x \in R^r, \quad k=1, 2, \quad \sum_{i,j=1}^r a_k^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 > 0.$$

Այս համակարգի Կոշու խնդրի և համապատասխան ստացիոնար խնդիրների ուսումնասիրման համար կառուցվում է $(X_t^{x,l}, \gamma_t^{x,l})$ մարկովյան ընտանիքը և նրան համապատասխանող $Z_t = (X_t, \gamma_t, P_{x,l})$ մարկովյան պրոցեսը:

Z_t մարկովյան պրոցեսի համար տեղի ունի Իտոյի բանաձևի ընդհանրացումը (2), որի օգնությամբ հաշվվում է $(X_t^{x,l}, \gamma_t^{x,l})$ ընտանիքի ինֆինիտեսիմալ օպերատորը և կառուցվում է Կոշու և Դիրիխլեի խնդիրների լուծումների հավանականային ներկայացումները (թեորեմ 2, 3):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963. ² А. Д. Вентцель, Курс теории случайных процессов, Наука, М., 1975.

УДК 517.444

МАТЕМАТИКА

С. С. Казарян

Интегральные неравенства для одной максимальной функции

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/III 1984)

Впервые весовые оценки изучались в работах Г. Харди и Д. Литтлвуда ⁽¹⁾, К. И. Бабенко ⁽²⁾, И. Стейна ⁽³⁾ и др. Они рассматривали неравенства для классических операторов со степенными весами $\omega(x) = |x|^a$.

Полная характеристика весов, при которых справедливы интегральные неравенства для максимальной функции Харди—Литтлвуда, получена в 1972 г. Б. Макенхауптом ⁽⁴⁾, доказавшим следующий результат.

Теорема А. Пусть $\omega(x)$ вес в R^n и $1 < p < \infty$. Тогда следующие условия равносильны:

(а) $\omega(x) \in A_p$:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq D$$

для произвольного куба $Q \subset R^n$.

(б) Для оператора $M(f, x)$ выполняется оценка сильного типа

$$\int_{R^n} |M(f, x)|^p \omega(x) dx \leq C_p \int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x) dx,$$

$$\text{где } M(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad x \in R^n.$$

Приведем определения и обозначения, которые необходимы для изложения дальнейших результатов.

Всюду ниже $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ функция Юнга ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$

при $\tau > 0$, не убывает и непрерывна справа, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = +\infty$).

Мы предполагаем, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$, которое эквивалентно более общему условию $\Phi(At) \leq D\Phi(t)$. Предположим также, что дополнительная к $\Phi(t)$ функция $\Psi(t) =$

$$= \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau, \text{ где } \varphi^{-1}(\tau) = \sup\{s : \varphi(s) \leq \tau\}, \text{ тоже удовлетворяет } \Delta_2 \text{ усло-}$$

вию (см. ⁽⁵⁾, с. 22).

Весовое пространство Орлича L_{ω}^{Φ} , где $\omega(x) \geq 0$ локально интегрируемая функция в R^n , есть пространство таких функций $u(x)$, что $\left| \int_{R^n} u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$ для любой $v(x)$ с $\int_{R^n} \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty$, L_{ω}^{Φ} — банахово пространство относительно нормы Орлича (для весовых функций все рассуждения аналогичны обычному случаю (см. (5), с. 83)).

$$\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} = \sup_{\int_{R^n} \Psi(v(x))\omega(x)dx \leq 1} \left| \int_{R^n} f(x)v(x)\omega(x)dx \right|.$$

Как и в обычном случае (см. (5), с. 97), эта норма эквивалентна следующей норме Люксембурга:

$$\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} = \inf \left\{ \alpha : \int_{R^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)\omega(x)dx = 1 \right\},$$

причем имеют место неравенства

$$\|f\|_{L_{\omega}^{(\Phi)}} \leq \|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} \leq 2\|f\|_{L_{\omega}^{(\Phi)}}.$$

Для произвольного куба $Q \subset R^n$ будем обозначать через $L_{\omega}^{\Phi}(Q)$ пространство таких функций $u(x)$, что $\left| \int_Q u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$ для любой $v(x)$ с $\int_Q \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty$.

Если $\omega=1$, то получаем обычное пространство Орлича.

Нам понадобится следующая функция: $S_{\Phi}(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}$.

Для нее справедливы соотношения (см. (6), с. 260)

$$p_0^* = \sup_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda};$$

$$p_1^* = \inf_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}.$$

p_0^* и p_1^* называются нижним и верхним индексами функции $\Phi(t)$. Из работы (7) следует, что если q_0^* и q_1^* нижний и верхний индексы дополнительной к функции Юнга $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$, то $\frac{1}{p_0^*} + \frac{1}{q_1^*} = 1$ соответственно $\frac{1}{q_0^*} + \frac{1}{p_1^*} = 1$.

Р. Керман и А. Торчинский (8) распространили результаты Б. Макенхаупта на классы Орлича.

Теорема Б. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и ее дополнительная функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) Имеет место неравенство

$$\int_{R^n} \Phi(M(f, x)) \omega(x) dx \leq C_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x)) \omega(x) dx,$$

где константа C_Φ не зависит от функции f .

(б) Локально интегрируемая, неотрицательная функция $\omega(x)$ принадлежит классу A_Φ :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^\varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\omega(x)} \right) dx \right) \leq D_\Phi,$$

для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$.

(в) $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p_0^*}$, где p_0^* нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$.

Для любой локально интегрируемой функции $\omega(x)$ введем связанную с ней максимальную функцию следующим образом:

$$H_\omega(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |\omega(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{\omega(t)} \right| dt.$$

Легко увидеть, что непрерывность оператора $M(f, x)$ в весовом пространстве L_ω^p , $p \geq 1$ эквивалентна непрерывности оператора $H_\omega(f, x)$ в пространстве L^p , где $\omega(x) = |\omega(x)|^p$. Но в пространстве Орлича подобные результаты уже невозможно непосредственно вывести друг из друга. Отметим, что интегральные неравенства для $H_\omega(f, x)$ при некоторых условиях, налагаемых на функцию $\omega(x)$, рассматривались Ю. Ченом⁽⁸⁾. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Пусть p_0^* , p_1^* нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и соответственно q_0^* , q_1^* нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) Локально интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q \omega \|_{L_\Phi} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_\Psi} \leq D_\Phi.$$

(б) $\omega(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}$ и $B_{p_1^*}$, т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$ справедливы соответственно неравенства

$$\frac{1}{|Q|} \| \chi_Q \omega \|_{L_{p_0^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_{q_1^*}} \leq D_{p_0^*}, \quad \frac{1}{|Q|} \| \chi_Q \omega \|_{L_{p_1^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_{q_0^*}} \leq D_{p_1^*}.$$

(в) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\| H_\omega(f, x) \|_{L_\Phi} \leq C_\Phi \| f \|_{L_\Psi}.$$

(г) Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{R^n} \Phi(H_\omega(f, x)) dx \leq C'_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x)) dx.$$

(д) Существует некоторая константа $D_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\varepsilon |\varpi(x)|) dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon |\varpi(x)|}\right) dx \right) \leq D_\Phi.$$

(е) Выполняются неравенства

$$\|H_\varpi(f, x)\|_{L^{p_0^*}} \leq C_{p_0^*} \|f\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_\varpi(f, x)\|_{L^{p_1^*}} \leq C_{p_1^*} \|f\|_{L^{p_1^*}}.$$

Легко видеть, что теорема 1 обобщает теорему А. Б. Макенхаупта.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук
Армянской ССР

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ինտեգրալ անհավասարություններ մի մախիմալ
ֆունկցիայի համար

1972 թ. Բ. Մակենհաուպթի ⁽¹⁾ կողմից ստացվել էր այն կշիռների լրիվ բնութագրերը, որոնց դեպքում Հարդի-Լիթլվուդի մաքսիմալ ֆունկցիայի համար L^p ($1 < p < \infty$) տարածությունն նորմով տեղի ունեն ինտեգրալ անհավասարություններ:

Ի. Կերմանը և Ա. Տորչինսկին ⁽²⁾ տարածեցին Բ. Մակենհաուպթի արդյունքները Օրլիչի դասերի վրա:

Մեր կողմից կամայական լոկալ ինտեգրալի $\varpi(x)$ ֆունկցիայի համար սահմանվում է մաքսիմալ ֆունկցիա հետևյալ կերպ.

$$H_\varpi(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |\varpi(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{\varpi(t)} \right| dt$$

և տրվում է $\varpi(x)$ -երի լրիվ բնութագրերը, որոնց դեպքում Օրլիչի դասերի վրա մասնավորաբար տեղի ունեն հետևյալ տիպի ինտեգրալ անհավասարություններ

$$\int_{R^n} \Phi(H_\varpi(f, x)) dx \leq C_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x)) dx:$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Acta Math., v. 54 (1930). ² К. И. Бабенко, ДАН СССР, т. 62, с. 157—160 (1948). ³ И. М. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М. Мир, 1973. ⁴ B. Muckenhoupt, Trans Amer. Math. Soc., v. 155 (1972). ⁵ А. М. Красносельский, Я. Б. Рунцкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958. ⁶ Е. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962. ⁷ D. Boyd, Canad. J. Math., v. 21 (1969). ⁸ R. Kerman, A. Torchinsky, Studia Math., v. 71 (1982). ⁹ Y. Chen, Math. Ann., v. 140 (1960).

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

К. В. Сагателян

Позиционные игры с переменной информацией

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 14/III 1984)

Математическая модель позиционной игры, определенная впервые Дж. фон Нейманом ⁽¹⁾, уточненная и расширенная впоследствии Г. Куном ⁽²⁾, Р. Ауманом ⁽³⁾ и другими авторами, содержит информационную структуру в качестве одного из основных компонентов игры. Однако во многих приложениях выбор той или иной информационной структуры может зависеть от игрока (лица, принимающего решение). Так, во многих экономических и военных задачах вопрос выбора той или иной системы разведки, связи или структуры и объема памяти управляющей ЭВМ приводит к рассмотрению различных информационных структур в рамках одной игры. В данной работе рассматриваются позиционные игры, в которых информационная структура является составной частью не игры, а стратегии игрока.

Определение. Позиционной игрой с переменной информацией называется система

$$G = \langle I, N, \{X_i\}_{i \in N}, \{\sigma_i\}_{i \in I}, \{H^i\}_{i \in I} \rangle,$$

где $I = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество игроков; $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество ходов в игре; $X_i, i = \overline{1, n}$ — множество альтернатив на i -том шаге; $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_m = N, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, i \neq j$ — разбиение множества ходов на множества личных ходов игроков в игре; $H^i: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow R^1$ — функция выигрыша i -того игрока.

Множества $X_i, i = \overline{1, n}$ предполагаются конечными или счетными с дискретной измеримой структурой либо изоморфными единичному отрезку с σ -алгеброй борелевских множеств. Отображение $H^i, i = \overline{1, n}$ предполагается измеримым отображением.

Определение. Информационной структурой игрока $i \in I$ назовем пару $w^i = \langle U^i, g^i \rangle$, где

$$U^i = \{U_j^i\}_{j \in N}, g^i = \{g_j^i\}_{j \in N},$$

$$g_j^i: \prod_{k < j} X_k \rightarrow U_j^i, i \in I, j \in N.$$

Измеримые пространства $U_j^i, i \in I, j \in N$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и пространства альтернатив $X_i, i = \overline{1, n}$, а отображения $g_j^i, i \in I, j \in N$ предполагаются измеримыми отображениями.

Определение. Стратегией игрока i в игре G называется пара $s^i = \langle w^i, s^i \rangle$, где $w^i = \langle U^i, g^i \rangle$ — информационная структура

игрока i , а $s^i = \{s_j^i\}_{j \in J_i}$ — конечный набор измеримых случайных функций

$$s_j^i: \Omega \times U_j^i \rightarrow X_j, \quad j \in J_i, \quad i \in N.$$

Здесь (Ω, A, P) — фиксированное пространство выборов.

Для каждой ситуации $c = (c^1, \dots, c^m)$, $c^i = (U^i, g^i, s^i)$, определим векторную случайную величину $v_c^i(\omega) = (v_c^1, v_c^2, \dots, v_c^n)$, где

$$v_c^j(\omega) = s_j^i(\omega, g_j^i(v_c^1, \dots, v_c^{i-1})), \quad \text{если } j \in J_i, \quad i \in I.$$

Каждая ситуация c в игре G индуцирует вероятностную меру μ_c на произведении измеримых пространств $X = \prod_{j \in N} X_j$ следующим образом:

$$\mu_c = P v_c^{-1}.$$

Выигрыш игрока i в ситуации c определяется как обычно:

$$H^i(c) = \int_X H^i d\mu_c.$$

По аналогии с моделью Р. Аумана ⁽¹⁾ определим подыгру с фиксированной информационной структурой.

Определение. Для данной игры $G = \langle I, N, \{x_j\}_{j \in N}, \{J_i\}_{i \in I}, \{H^i\}_{i \in I} \rangle$ подыгрой G_w с фиксированной информационной структурой $w = (w^1, \dots, w^m)$, $w^i = \langle U^i, g^i \rangle$ называется система $G_w = \langle I, N, \{X_j\}_{j \in N}, \{J_i\}_{i \in I}, \{g_j^i\}_{i \in I, j \in J_i}, \{U_j^i\}_{i \in I, j \in J_i}, \{H^i\}_{i \in I} \rangle$.

Стратегия игрока i в подыгре G_w определяется так же, как и в ⁽³⁾, а именно: стратегией называется конечный набор измеримых случайных функций $s^i = \{s_j^i\}_{j \in J_i}$, $s_j^i: \Omega \times U_j^i \rightarrow X_j$, $j \in J_i$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через W^i множество всех информационных структур игрока i в игре G . Для каждого $w^i = \langle U^i, g^i \rangle$ обозначим через S_w^i множество всех случайных функций, заданных на информационной структуре w^i , т. е. $S_w^i = \{s^i: s^i = \{s_j^i\}_{j \in J_i}\}$, где $s_j^i: \Omega \times U_j^i \rightarrow X_j$, $j \in J_i$.

Положим, далее, для $w = (w^1, w^2, \dots, w^m)$ $S_w = \prod_{i \in I} S_w^i = \prod_{w \in W} S_w$, $W = \prod_{i \in I} W^i$.

Определение. Для данной игры G и для каждой фиксированной $s \in S$ информационной подыгрой G_s называется бескоалиционная игра в нормальной форме: $G_s = \langle I, \{W^i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle$, где функция выигрыша $h_i(w)$ определяется следующим образом: $h_i(w) = H_i(c)$, где $c = \langle w, s_w \rangle$, $s_w \in S_w$, $s_w \subset s$.

Пусть $S_w^0 \subset S_w$ — множество всех ситуаций равновесия в игре G_w , $S^0 = \prod_{w \in W} S_w^0$.

Теорема 1. Для того, чтобы ситуация $\bar{c} = (\bar{c}^1, \dots, \bar{c}^m)$, $\bar{c}^i = \langle \bar{w}^i, \bar{s}^i \rangle$ была ситуацией равновесия в игре G , необходимо и достаточно, чтобы $\bar{s} = (\bar{s}^1, \dots, \bar{s}^m)$ была ситуацией равновесия в игре G_w , а $\bar{w}$ — ситуацией равновесия в игре G_s , для которой $s \in S^0$, $s \supset \bar{s}$.

Далее будут рассматриваться только антагонистические позиционные игры, т. е. такие игры G , для которых $I = \{1, 2\}$, $H^1 = -H^2$.

Для данной антагонистической игры G обозначим через $v(w^1, w^2)$ значение подыгры G_{w^1, w^2} . Далее будет предполагаться, что значения подыгр G_{w^1, w^2} существуют при всех $w^1 \in W^1$, $w^2 \in W^2$.

Теорема 2. Для того чтобы стратегия $\bar{s}^i = \langle \bar{w}^i, \bar{s}^i \rangle$ была оптимальной стратегией игрока i , $i=1, 2$, в игре G , необходимо и достаточно, чтобы $\bar{s}^i$ была оптимальна в подыгре $G_{\bar{w}^i, \bar{w}^i}$, а $\bar{w}^i$ — оптимальна в игре $\bar{G}$,

$$\bar{G} = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) \rangle.$$

При этом значение игры $\bar{G}$ равно значению игры G .

Аналогично ⁽⁴⁾ введем понятие уточнения информационной структуры игрока.

Определение. Информационную структуру $\bar{w}^i \in W^i$ назовем уточнением информационной структуры $w^i \in W^i$, $i=1, 2$, в игре G , если

$$1) \bar{U}_j \subseteq U_j, j=1, n;$$

2) для любых $(x'_1, \dots, x'_{j-1}), (x''_1, \dots, x''_{j-1})$, $j=1, n$, из $\bar{g}^j(x'_1, \dots, x'_{j-1}) = \bar{g}^j(x''_1, \dots, x''_{j-1})$ следует, что $\bar{g}^j(x'_1, \dots, x'_{j-1}) = \bar{g}^j(x''_1, \dots, x''_{j-1})$.

Теорема 3. Пусть $\bar{w}^i$ является уточнением w^i , $i=1, 2$. Тогда для любых $w^1 \in W^1$, $w^2 \in W^2$

$$v(\bar{w}^1, w^2) \geq v(w^1, w^2),$$

$$v(w^1, \bar{w}^2) \leq v(w^1, w^2).$$

Теорема 4. Пусть $\bar{w}^i$ является уточнением w^i ; $i=1, 2$, $w^1 \in W^1$ и $w^2 \in W^2$ — произвольные информационные структуры. Тогда, если у первого игрока существует чистая оптимальная стратегия в подыгре $G_{\bar{w}^1, w^2}$, то у него существует чистая оптимальная стратегия и в подыгре G_{w^1, w^2} и

$$v(\bar{w}^1, w^2) = v(w^1, w^2).$$

Если у второго игрока существует чистая оптимальная стратегия в подыгре $G_{w^1, \bar{w}^2}$, то у него существует чистая оптимальная стратегия и в подыгре G_{w^1, w^2} и

$$v(w^1, \bar{w}^2) = v(w^1, w^2).$$

Как отмечалось выше, выбор той или иной информационной структуры в игре означает выбор системы связи или разведки в реальных задачах. Однако этот выбор в реальных условиях связан с определенными затратами. Чем совершеннее система связи или разведки, тем больше затраты на ее создание и обслуживание. Поэтому естественно ввести в модель игры плату за информацию. Пусть $\alpha_i(w^i)$ — плата за выбор информационной структуры $w^i \in W^i$, $i=1, 2$.

Если ввести в модель антагонистической игры функцию платы за информацию, игра перестанет быть антагонистической. Однако это обстоятельство не влияет на стратегические особенности игры. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы стратегия $\langle \bar{w}^i, \bar{s}^i \rangle$ игрока i , $i=1, 2$, была оптимальна в игре G , необходимо и достаточно,

чтобы $\bar{s}^1$ была оптимальна в подыгре $G_{\bar{w}^1, \bar{w}^2}$, а $\bar{w}^1$ — оптимальна в антагонистической игре

$$\bar{G} = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) - \alpha_1(w^1) + \alpha_2(w^2) \rangle.$$

С точки зрения приложений особый интерес представляет случай, когда функция платы одного из игроков неизвестна. В этих случаях можно предполагать, что она равна нулю.

Теорема 6. В играх

$$G^1 = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) - \alpha_1(w^1) \rangle,$$

$$G^2 = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) + \alpha_2(w^2) \rangle$$

всегда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

Փոփոխական ինֆորմացիայով դիրքային խաղեր

Դիտարկվում են դիրքային խաղեր, որոնց ինֆորմացիոն կառուցվածքը խաղացողի ստրատեգիայի բաղադրիչն է: Ապացուցվում է, որ այդպիսի խաղերի լուծումը բերվում է ավելի պարզ կառուցվածքի խաղերի լուծումների:

Անտագոնիստական խաղերի դեպքում բերվում են խաղի լուծման մի քանի հատկություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Дж фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, Наука, М., 1970. ² Г. У. Кун, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967. ³ Р. Дж. Ауман, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967. ⁴ Н. Дэлки, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967.

УДК 517.534

МАТЕМАТИКА

А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко

Об обобщенных множествах единственности для целых функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 19/III 1984)

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется обобщенным множеством единственности (о. м. е.), если для любых целых функций f и g из $f(E) = g(E)$ вытекает, что $f = g$. Это понятие ввели Г. Даймонд, К. Померанце и Л. Рубел ⁽¹⁾ (о. м. е. — неточный перевод их термина „set of range uniqueness“). В ⁽¹⁾ получен ряд условий, достаточных для того, чтобы счетное множество с единственной предельной точкой в $z=0$ было или не было о. м. е. Э. Томас ⁽²⁾ решил ряд проблем, поставленных в ⁽¹⁾, построив пример области и пример кривой, которые являются о. м. е. Здесь указаны некоторые классы областей и кривых, не являющихся о. м. е. В частности, будет решена одна проблема из ⁽¹⁾. В конце приведен пример бесконечно гладкой жордановой кривой, являющейся о. м. е.

Очевидно, что справедлива

Лемма. Если E — о. м. е., а f — целая функция, $\neq \text{const}$, то $f(E)$ — о. м. е.

Следствие 1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, L — целая линейная функция. Множества E и $L(E)$ являются или не являются о. м. е. одновременно

Теорема 1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — множество, содержащее неограниченную последовательность внутренних точек. Тогда E не является о. м. е.

Из условий теоремы следует существование кругов $K_n = \{z : |z - z_n| \leq r_n\}$, $K_n \subset E$, $|z_n| + r_n < |z_{n+1}| - r_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Соединим точку $a_n \in K_n$, $|a_n| = |z_n| + r_n$, с точкой $b_{n+1} \in K_{n+1}$, $|b_{n+1}| = |z_{n+1}| - r_{n+1}$, жордановой кривой $l_n \subset \{z : |a_n| \leq |z| \leq |b_{n+1}|\}$. Обозначим через K замкнутое связное множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{K_n \cup l_n\}$. На K зададим функцию f следующим образом: $f(z) = (n+1)(z - z_n)/r_n$ при $z \in K_n$, $n = 1, 2, \dots$, f непрерывна на K . Тогда f непрерывна на K и аналитична на множестве внутренних точек K . Очевидно, что K удовлетворяет условию известной теоремы М. В. Келдыша (⁽³⁾, с. 69, теорема 1.3), в силу которой существует целая функция G такая, что $|f(z) - G(z)| < 1$ при $z \in K$. По теореме Руше $G(K_n) \supset \{w : |w| < n-1\}$. Поэтому $G(K) = \mathbb{C}$ и $G(E) = \mathbb{C}$. Так как $-G(E) = \mathbb{C}$, то E не является о. м. е.

Незначительная модификация одного из примеров Э. Томаса ⁽²⁾ показывает, что существует жорданова кривая, уходящая к ∞ , являющаяся о. м. е. С этим фактом контрастирует

Следствие 2. Каждая неограниченная область не является о. м. е.

Джонстон ⁽⁴⁾ показал, что любая треугольная область не является о. м. е. Это дает ответ на один из вопросов проблемы 3 в ⁽¹⁾. Для полного решения проблемы 3 необходима еще следующая теорема.

Теорема 2. Любой треугольный контур не является о. м. е.

В силу следствия 1, не уменьшая общности, можем считать, что вершины треугольника расположены в точках $A=a+ih$, $B=-\pi-ih$, $C=\pi-ih$, где $h>0$, $-\infty<a<\infty$. Будем различать два случая: 1) для всех целых k выполняется $a \neq 2k\pi$; 2) для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $a=2k\pi$. Положим $L(z)=-z-(\pi-a)$. Тогда в первом случае $\sin L(z) = -\sin((\pi-a)+z) = \sin z$. Но, как нетрудно проверить, $\sin L(\Delta ABC) = \sin(\Delta ABC)$. Действительно, $L(A)=B$, $L(B)=A$, $L([AB])=[AB]$. Поэтому $\sin L([AB]) = \sin([AB])$. Далее $L(C)=A-2\pi$, $L(A)=C-2\pi$, $L([AC])=[AC]-2\pi$. Поэтому $\sin L([AC]) = \sin([AC])$. Наконец, нетрудно убедиться, что и $\sin L([BC])$, и $\sin([BC])$ являются эллипсами с вершинами в точках $\pm ish$, $\pm ch$. Во втором случае $\sin 2L(z) = -\sin(2(\pi-a)+2z) = -\sin 2z$. Рассуждая, как в первом случае, нетрудно убедиться, что $\sin 2L(\Delta ABC) = \sin 2(\Delta ABC)$.

Пусть путь Γ может быть задан параметризацией $z=z(t)$, $a \leq t \leq b$, где $z(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, $z'(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда путь называется бесконечно гладким, а $C=z([a, b])$ называется бесконечно гладкой кривой (или носителем пути, или следом пути). Если требовать, чтобы $z(t)$ была аналитической функцией на $[a, b]$, $z'(t) \neq 0$, то путь и кривая называются правильными аналитическими.

В ⁽²⁾ кривая, являющаяся о. м. е., имеет всюду плотное множество угловых точек. В ⁽⁴⁾ показано, что о. м. е. может быть и гладкая кривая. Ниже строится пример бесконечно гладкой кривой с тем же свойством.

Теорема 3. Существует бесконечно гладкая жорданова или замкнутая жорданова кривая, являющаяся о. м. е.

Обозначим $x_n = 1/n!$. Определим на $[x_{2n}, x_{2n-1}]$ функцию $\psi_n(t) = \eta_n \exp\{(t-x_{2n})(t-x_{2n-1})\}^{-1}$, где $\eta_n > 0$ выбрано столь малым, что на $[x_{2n}, x_{2n-1}]$ выполняется $|\psi_n(t)| < 1/n$, $|\psi'_n(t)| < 1/n$, ..., $|\psi_n^{(n)}(t)| < 1/n$.

Определим $\psi(t) = \psi_n(t)$ при $x_{2n} \leq t \leq x_{2n-1}$, $\psi(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{2n}, x_{2n-1}]$. Нетрудно убедиться, что ψ — бесконечно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, $\psi(0) = \psi'(0) = \dots = 0$. Возьмем путь Γ , задаваемый отображением $z = t + i\psi(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Покажем, что соответствующая бесконечно гладкая жорданова кривая C является о. м. е. Пусть f — целая функция, $K = f(C)$. Можно показать, что K является кусочно-жордановой кривой. Легко видеть, что последовательность $|f(x_j) - f(0)|$ строго монотонно убывает при $j \geq N$, N — достаточно большое число. Следовательно, точки $f(x_j)$ попарно различны при $j \geq N$. Назовем точку $w_0 \in K$ особой, если при любом $\delta > 0$ множество $K \cap \{w : |w - w_0| < \delta\}$ нельзя покрыть конечным числом правильных аналитических кривых. Множество W особых точек отличается от множества $\{f(x_j) : j \geq N\}$ самое большее на конечное множество. Занумеруем

точки множества $\{w_j\} = W \setminus \{f(0)\}$ так, чтобы выполнялось $|w_j - f(0)| \geq |w_j - f(0)| \geq \dots$. Легко видеть, что $f(x_j) = w_j + k_1$ для всех $j \geq j_0 \geq N$ и некоторого $k_1 \in Z$.

Пусть теперь g — другая целая функция. Повторяя то же рассуждение, получим, что $g(x_j) = w_j + k_2$ для всех достаточно больших j и некоторого $k_2 \in Z$. Отсюда следует, что $f(0) = g(0)$ и $f(x_j) = g(x_{j+k})$ при всех достаточно больших j и некоторого фиксированного целого k . Пусть $f(z) - f(0) = (1 + o(1))az^p$, $z \rightarrow 0$, $a \neq 0$, $p \in N$;

$$g(z) - g(0) = (1 + o(1))bz^q, \quad z \rightarrow 0, \quad b \neq 0, \quad q \in N.$$

Тогда из $f(x_j) = g(x_{j+k})$ следует

$$a\{(j+k)!\}^p = (1 + o(1))b\{j!\}^q, \quad j \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Прологарифмировав (1) и заметив, что $\ln((j+k)!) \sim \ln(j!)$, $j \rightarrow \infty$, получим, что $p = q$. Тогда (1) возможно лишь при $k = 0$. Из $f(x_j) = g(x_j)$ по классической теореме единственности получаем, что $f = g$, следовательно, C есть о. м. е. Кривая C_1 — образ C при отображении $z \mapsto \exp 2\pi iz$ есть замкнутая бесконечно гладкая жорданова кривая. Она является о. м. е. в силу леммы.

Львовский государственный университет.

Физико-технический институт низких температур Академии наук
Украинской ССР

Ա. Ա. ԳՈՒԴԻՆԵՐԳ, Ա. Է. ՆՐՅՈՄՅԵՆԿՈ

Ամբողջ ֆունկցիաների միակության ընդհանրացված բազմությունների մասին

Կոմպլեքս C հարթության մեջ ընկած E բազմությունը անվանվում է միակության ընդհանրացված բազմություն, եթե կամայական երկու f և g ֆունկցիաների համար $f(E) = g(E)$ հավասարությունից հետևում է, որ f ու g ֆունկցիաները նույնաբար համընկնում են:

Ներկա աշխատանքում կառուցվել են մի շարք բազմությունների օրինակներ, որոնք հանդիսանում են միակության ընդհանրացված բազմությունների: Կառուցվել են նաև բազմությունների օրինակներ, որոնք չեն հանդիսանում միակության ընդհանրացված բազմությունների: Մասնավորապես աշխատանքում ապացուցվում է, որ կամայական եռանկյուն կոնտուրը չի հանդիսանում միակության ընդհանրացված բազմություն: Դրանով տրվում է Կ. Դայմոնդի, Կ. Պոմիրանցի և Լ. Ռուբելի ⁽¹⁾ մի հարցի պատասխանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ H. G. Diamond, C. Pomerance, L. Rubel, Math. Z., Bd. 176, №3 (1981). ² E. Thomas, Illinois J. Math., v. 27, №1 (1983). ³ С. Н. Мергелян, УМН, т. 7, №2 (1952). ⁴ E. H. Johnston, Math. Z., Bd. 184 (1983).



УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Баядян

О методах устойчивого суммирования рядов Фурье—Хаара с приближенными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 10/V 1984)

Задача суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами по некоторой полной ортонормированной системе функций является некорректно поставленной (¹).

А. Н. Тихоновым предложен метод регуляризованного суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами. Доказана устойчивость и сходимости метода, а также непрерывность функции, аппроксимирующей непрерывную функцию (^{1,2}). Известны различные обобщения этих результатов (³⁻⁵), которые не распространяются на систему Хаара. В частности, в случае системы Хаара предложенный в (²) метод не обеспечивает непрерывность аппроксимирующей функции. В самом деле, пусть функция $f(t) \in C_{[0,1]}$ представлена своим рядом Фурье—Хаара

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t). \quad (1)$$

Если числа $\{c_k\}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - a_k)^2 \leq \delta^2, \quad \delta > 0, \quad (2)$$

то как приближение $f(t)$, согласно (²), берется сумма

$$f_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{1 + \alpha k^\lambda} \chi_k(t), \quad (3)$$

где $\alpha = \alpha(\delta)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda > 1$.

Для $f(t) \in C_{[0,1]}$ известно (⁶), что $a_k = o(k^{-\frac{1}{2}})$, а при $a_k = o(k^{-\frac{3}{2}})$ $f(t) = \text{const}$ (⁷). Откуда следует, что $f_\delta(t)$ не обязана быть непрерывной, хотя бы потому, что ее коэффициенты могут иметь порядок выше $k^{-\frac{3}{2}}$ и не только при $\lambda > 1$.

В данной работе доказана теорема об обобщенном методе суммирования рядов Фурье—Хаара. Получены оценки погрешности для различных классов функций при суммировании методом Тихонова.

Введем несколько обозначений.

Обозначим через $\varphi(x)$ неотрицательную монотонно убывающую функцию. Пусть $\varphi(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$, $C = \int_0^{\infty} \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}} dx < \infty$ (ср. (⁴)).

Средними $(\varphi; (k_1, \dots, k_n))$ называются функции

$$\sigma_n(t, f) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} \varphi(\gamma k_1) \dots \varphi(\gamma k_n) \gamma_{k_1}(t) \dots \gamma_{k_n}(t),$$

где $f(t)$ определена на n -мерном единичном кубе K^n . $\{\gamma_k(t)\}$ — система функций Хаара ⁽⁶⁾. Через $S_p(A)$, $1 \leq p < \infty$, обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) представимы рядом Хаара $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(t)$;

$$2) A_p(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |a_m|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A,$$

где $A = \text{const}$, $A \geq 0$, $k = 2^{m-1} + j$, $m = 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, 2^{m-1}$, и пусть $S_p = \bigcup_{A \geq 0} S_p(A)$.

В многомерном случае классы S_p определяются аналогично ⁽⁸⁾.

Сформулируем теорему об обобщенном методе средних $(\varphi; (k_1, \dots, k_n))$ суммирования рядов Фурье—Хаара с приближенными коэффициентами.

Теорема 1. Пусть $f(t) \in L_{K^n}^2$, $\alpha = \alpha(\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta \alpha^{-\frac{n}{2}}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда если $\sigma_n(t_0, f) \rightarrow f(t_0)$, $t \in K^n$, то $\sigma_n(t_0, f_\delta) \rightarrow f(t_0)$, причем из равномерной сходимости $\sigma_n(t, f)$ на K^n следует равномерная сходимость $\sigma_n(t, f_\delta)$ на K^n .

Замечание 1. Легко заметить, что если $f(t)$ любая функция из $L_{K^n}^2$ с коэффициентами $\{a_k\}$, $\sigma_n(t_0, f) \rightarrow f(t_0)$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, но не выполняется условие $\delta \alpha^{-\frac{n}{2}}(\delta) \rightarrow 0$, то найдется функция $f_\delta(t)$ с коэффициентами $\{c_k\}$ такая, что хотя выполняется (2), но $\sigma_n(t_0, f_\delta) \not\rightarrow f(t_0)$.

Замечание 2. Пусть $f(t) \in S_p$, $f_\delta(t) \in L_{K^n}^2$, $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$ есть соответственно их коэффициенты Фурье—Хаара. Тогда при выполнении (2) $\sigma_n(t, f_\delta)$ сходится к $f(t)$ равномерно на K^n .

Примеры реализации метода $\varphi(x)$.

1. Метод Тихонова. В этом случае

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x)^\lambda} = \frac{1}{(1+\alpha k)^\lambda} \text{ или } \varphi(x) = \frac{1}{1+x^\lambda}; \lambda > \frac{1}{4}.$$

2. Метод нормальных средних Рисса. Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1-x)^\lambda & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{при } x \geq 1, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

3. Метод средних Пуассона—Абея. Здесь функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = e^{-x} = e^{-\alpha k}.$$

Прежде чем перейти к оценке погрешности суммирования рядов Фурье—Хаара функций различных классов с приближенными коэффициентами методом Тихонова, введем несколько обозначений.

Обозначим через $\mu(f, k)$ остаточный член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \gamma_k(t)|$, че-

рез $\mu(a, k)$ — остаточный член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, через $\omega(h, f)$ — модуль непрерывности $f(t)$, через $[a]$ — целую часть числа a .

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in S_p$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$. Тогда найдутся постоянные B , c_1 , c_2 такие, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f - f_n| \leq B n^{1-\varepsilon} + c_1 \delta + c_2 \delta n^{-\frac{1}{2\lambda-1}} + \mu(f, [n^{-\frac{1}{2\lambda-1}}]). \quad (4)$$

Теорема 3. Пусть $f(t) \in C_{[0, 1]}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\lambda > \frac{1}{2}$. Тогда найдутся постоянные c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 такие, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f - f_n| \leq c_1 \mu(a, [n^{-2\varepsilon}]) + \delta(c_2 + c_3 n^{-\frac{1}{2\lambda-1}}) + c_4 n^{1-2\varepsilon} + c_5 \omega(n^{2\varepsilon}, f). \quad (5)$$

Замечание 3. В обеих теоремах

- 1) $f_n(t) \in S_p$;
- 2) правая часть неравенства равномерно стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, $\delta = o(n^{-\frac{1}{2\lambda-1}})$.

Следствие 1. Пусть $f(t) \in L_{[0, 1]}^p$, $\lambda > \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда ряд (3) аппроксимирует функцию $f(t)$ в любой точке непрерывности с некоторой точностью $\delta(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\delta = o(n^{-\frac{1}{2\lambda-1}})$.

Следствие 2. Пусть $f(t) \in C_{[0, 1]}$, тогда найдутся такие постоянные a_1 , c_1 , что

$$1) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{k=1}^n C_k \chi_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \right| \leq a_1 \delta n^{\frac{1}{2}} + c_1 \omega\left(\frac{1}{n}, f\right); \quad (6)$$

- 2) правая часть (6) равномерно стремится к нулю, если $\delta \rightarrow 0$ быстрее $n^{-\frac{1}{2}}$.

Следствие 3. Пусть $f(t) \in C_{[0, 1]}$, $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$, тогда найдутся такие постоянные b , c_1 , c_2 , c_3 , что

$$1) \sup_{t \in [0, 1]} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{[n^{-2\varepsilon}]} \frac{c_k}{1 + \alpha k^{\lambda}} \chi_k(t) \right| \leq b n^{1-2\varepsilon} + \delta(c_2 + c_3 n^{-\frac{1}{2\lambda-1}}) + c_1 \omega(n^{2\varepsilon}, f); \quad (7)$$

- 2) правая часть (7) равномерно стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$ и $\delta = o(n^{-\frac{1}{2\lambda-1}})$.

Замечание 4. Для функций класса Липшица $H_{\alpha'}(L)$, $0 < \alpha' \leq 1$, $L > 0$, оценку (7) можно записать в виде

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{[n^{-2\varepsilon}]} \frac{c_k}{1 + \alpha k^{\lambda}} \chi_k(t) \right| \leq b n^{1-2\varepsilon} + \delta(c_2 + c_3 n^{-\frac{1}{2\lambda-1}}) + \frac{1}{\alpha' + 1} L h^{\alpha'}(k'),$$

где $k' = 2^m$, если $k = 2^m + j$, $j = 1, 2, \dots, 2^m - 1$, $m = 1, 2, \dots$, $k' = 2^{m+1}$, если $k = 2^{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $h(k')$ — длина отрезка постоянства k' -ой функции Хаара.

В заключение отметим, что основные результаты работы, сформулированные для функций одного переменного, легко переносятся на двумерный случай.

Автор благодарен С. С. Агаяну за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

2. Լ. ԲԱՅԱԴՅԱՆ

Ֆուրյե—Հաարի մոտավոր գործակիցներով շարքերի կայուն
գումարման մեթոդների մասին

Ոչխատանքում բերված է թեորեմ Ֆուրյե—Հաարի մոտավոր գործակիցներով շարքերի կայուն գումարման ընդհանրացված մեթոդի մասին:

Դիցուք $\varphi(x)$ -ը ոչ բացասական մոնոտոն նվազող ֆունկցիա է: Թող

$$\varphi(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0, \quad C = \int_0^{\infty} \varphi(x) x^{-1/2} dx < \infty:$$

$(\varphi; (k_1, \dots, k_n))$ միջինների կանվաններ հետևյալ ֆունկցիաները

$$\sigma_n(t, f) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} \varphi(x_{k_1}) \dots \varphi(x_{k_n}) \gamma_{k_1}(t) \dots \gamma_{k_n}(t),$$

որտեղ՝ t -ն պատկանում է K^n -ին, n -չափանի միավոր խորանարդին:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Դիցուք $f(t) \in L_{K^n}^2$, $z = z(\delta)$ մոնոտոն ձգտում է զրոյի և $\delta \alpha^{-n/2}(\delta) \rightarrow 0$, երբ $\delta \rightarrow 0$: Սրե $\sigma_n(t_0, f) \rightarrow f(t_0)$, $t_0 \in K^n$, ապա $\sigma_n(t_0, f_n) \rightarrow f(t_0)$:

Ընդ որում $\sigma_n(t, f)$ -ի հավասարաչափ զուգամիտությունից K^n -ի վրա, հետևում է $\sigma_n(t, f_0)$ -ի հավասարաչափ զուգամիտությունը K^n -ի վրա:

$\varphi(x)$ մեթոդի մասնավոր օրինակներն են Տիխոնովի, Ռիսսի նորմալ միջինների և Պուասսոն—Աբելի միջինների մեթոդները:

Անընդհատ, S_p դասի, Լիպշիցի դասի ֆունկցիաների համար ստացված են Տիխոնովի մեթոդով գումարման սխալի գնահատականներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Н. Тихонов, ДАН СССР, т. 156, № 2 (1964). ² А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректно поставленных задач, Наука, М., 1979. ³ Т. И. Фурлетов, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 3 (1971). ⁴ Н. М. Круковский, Вестн. Моск. ун-та, № 3, 1973. ⁵ Б. Алиев, ДАН ТаджССР, т. 21, № 4 (1978). ⁶ П. Л. Улянов, Мат. сб., т. 63, № 3 (1964). ⁷ Б. И. Голубов, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 28, № 6 (1964). ⁸ И. М. Соболев, Многомерные квадратные формулы и функции Хаара, Наука, М., 1969.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

О длиннейших циклах в графах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/V 1984)

В настоящем сообщении предлагается новый метод построения длинных циклов, в основе которого лежит понятие фрагмента.

Пусть G — конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $X(G)$. Все недостающие определения и обозначения можно найти в работе (1). Через v , δ , k , α и h обозначим соответственно число вершин, минимальную степень вершин, вершинную связность, вершинное число независимости и длину максимального цикла графа G . Пусть $N(z)$ означает множество вершин графа G , смежных с вершиной $z \in V(G)$. Для подмножества $W \subseteq V(G)$ введем обозначения

$$N(W) = \left(\bigcup_{z \in W} N(z) \right) \setminus W, \quad \bar{W} = V(G) \setminus (W \cup N(W)).$$

Определение фрагмента. Подмножество $W \subseteq V(G)$ называется *фрагментом графа G относительно S* , если S — минимальный вершинный разрез графа G , $N(W) = S$ и $\bar{W} \neq \emptyset$. Фрагмент, который не содержит другого фрагмента в качестве собственного подмножества, называется *концевым*.

Определение множества $\Omega(\bar{W})$. Пусть W — фрагмент графа G относительно S . Через $\Omega(\bar{W})$ обозначим множество всевозможных семейств $(P_1^+, P_2^+, \dots, P_n^+)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- a1) $P_i^+ = x_1^i x_2^i \dots x_{n(i)}^i$ — простые цепи графа G попарно без общих вершин, $i = 1, 2, \dots, n$;
- a2) $x_1^i \in S$, $x_{n(i)}^i \in S$, $V(P_i^+) \subseteq \bar{W} \cup S$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- a3) для любого $(Q_1^+, Q_2^+, \dots, Q_m^+) \in \Omega(\bar{W})$ имеет место

$$\sum_{i=1}^m |V(Q_i^+)| \leq \sum_{i=1}^n |V(P_i^+)|.$$

Определение семейства $(L_1^-, L_2^-, \dots, L_n^-)$. Пусть W — фрагмент графа G относительно S . Для любого $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$ через $(L_1^-, L_2^-, \dots, L_n^-)$ обозначим семейство цепей, которые удовлетворяют следующим условиям:

- b1) $V(L_i^-) \subseteq W \cup S$, $i = 1, 2, \dots, n$;

62) множество вершин $\bigcup_{i=1}^n (V(L_i^-) \cup V(L_i^+))$ и множество ребер

$\bigcup_{i=1}^n (X(L_i^-) \cup X(L_i^+))$ определяют простой цикл графа G ;

63) для любого семейства $(Q_1^-, Q_2^-, \dots, Q_n^-)$, которое удовлетворяет условиям 61, 62, имеет место

$$\sum_{i=1}^n |V(Q_i^-)| \leq \sum_{i=1}^n |V(L_i^-)|.$$

Определение цепи L_0^- . Пусть W —концевой фрагмент графа G относительно $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $(L_1^+) \in \Omega(\bar{W})$ и $v \in S \setminus V(L_1^+)$. Если $V(L_1^-) \cap S = \{v_1, v_2\}$, то через L_0^- будем обозначать цепь максимальной длины, которая соединяет вершины v_1, v_2 , проходит через вершину v и полностью лежит в подграфе $\langle \{v_1, v_2, v\} \cup W \rangle$.

Определение цикла C^* . Пусть W —концевой фрагмент графа G относительно S . Выберем $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+)$ из множества $\Omega(\bar{W})$ так, чтобы цикл C^0 , который определяется множеством

вершин $\bigcup_{i=1}^n (V(L_i^+) \cup V(L_i^-))$ и множеством ребер $\bigcup_{i=1}^n (X(L_i^+) \cup X(L_i^-))$,

имел наибольшую возможную длину. Через C^* обозначим максимальный цикл графа G , удовлетворяющий условию $V(C^0) \subseteq V(C^*)$.

Пусть H —маршрут графа G , $r(r \geq 2)$ —целое число и пусть $Z_i \subseteq V(H)$, $i = 1, 2, \dots, m$ ($m \geq 2$). Через $d_H(\xi, \eta)$ обозначим расстояние вершин ξ и η в маршруте H .

Определение (H, r) -схемы. $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ назовем (H, r) -схемой, если неравенство $d_H(\xi, \eta) \geq r$ имеет место для любых $\xi \in Z_i, \eta \in Z_j$ ($\xi \neq \eta$) и i, j ($i \neq j$), а неравенство $d_H(\xi, \eta) \geq 2$ имеет место для любых $\xi, \eta \in Z_i$ ($\xi \neq \eta$), $i = \overline{1, m}$. Если множества $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ имеют систему различных представителей, то (H, r) -схема называется нетривиальной.

Лемма 1. Пусть W —фрагмент графа G относительно S , $k(G) = k$ —четное число, L —множество, состоящее из $k/2$ независимых (без общих вершин) ребер типа xu , $x \in S$, $u \in S$ и пусть $bc \in L$, $\{ac, bd\} \subseteq X(G)$, $\{a, d\} \subseteq W$. Если граф $\langle S \cup W \rangle - \{a, b, c\}$ имеет цикл C , который проходит через все ребра множества $L \setminus \{bc\}$, то $\langle S \cup W \rangle$ имеет цикл, который проходит через все ребра множества L .

В случае $d \in V(C)$ доказательство леммы 1 основано на принципах, описанных в работе (2). В случае $d \notin V(C)$ лемму 1 можно доказать совершенно идентично доказательству теоремы 1 из статьи (2).

Лемма 2. Если любой фрагмент графа G содержит не менее $(k+1)/2$ вершин, то для любого концевого фрагмента W и для любой вершины $v \in W$ имеет место $k(G-v) = k$.

Доказательство леммы 2 можно найти в работе (4), хотя там было сформулировано более слабое утверждение.

С помощью лемм 1 и 2 доказываем следующую

Лемма 3. Пусть W —концевой фрагмент 2-связного графа G относительно S , а L —множество независимых ребер типа xu ,

$x \in S, y \in S$. Если любой фрагмент графа G имеет не менее $(k+1)$ вершин, то $\langle W \cup V(L) \rangle$ имеет цикл, который проходит через все ребра множества L .

Следующие 5 лемм позволяют оценить $|\bigcup_{i=1}^n V(L_i^+)|$ и $|\bigcup_{i=1}^n V(L_i^-)|$.

Лемма 4. Пусть W —фрагмент графа G и $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$. Если $|\bar{W}| \leq 3\delta - k - 4$, то либо $\bar{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V(L_i^+)$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$.

Лемма 5. Пусть W —фрагмент графа G и $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$. Если $|\bar{W}| \geq 3\delta - k - 3$, то либо $\bar{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V(L_i^+)$, либо $|\bigcup_{i=1}^n V(L_i^+)| \geq 3\delta - 5$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 3$.

Лемма 6. Пусть W —концевой фрагмент графа G относительно S и $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$. Если $|W| \leq 3\delta - 3k$, то либо любой компонент связности графа $\langle W \setminus \bigcup_{i=1}^n V(L_i^-) \rangle$ содержит не более одной вершины, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами, либо $k \leq 2$.

Лемма 7. Пусть W —концевой фрагмент графа G относительно S , $|W| \geq 3\delta - 3k + 1$ и $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$. Если $S \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n V(L_i^+)$, то либо любой компонент связности графа $\langle W \setminus V^- \rangle$ содержит не более одной вершины, либо любой компонент связности графа $\langle W \setminus V(L_0^-) \rangle$ содержит не более одной вершины, либо $|V^-| \geq 3\delta - 3k + f - 1$, где $V^- = \bigcup_{i=1}^n V(L_i^-)$, $f = |V^- \cap S|$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами, либо $k \leq 2$.

Лемма 8. Если W —концевой фрагмент графа G относительно S , $|W| \geq 3\delta - 3k + 1$ и $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+) \in \Omega(\bar{W})$, то либо $|V^-| \geq 3\delta - 3k + f - 1$, либо $|V^-| \geq 2\delta - 2k + f + 1$, где $V^- = \bigcup_{i=1}^n V(L_i^-)$, $f = |V^- \cap S|$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами, либо $k \leq 2$.

Для доказательства лемм 4—8 важную роль играют следующие три леммы.

Лемма 9. Если P является n -вершинной ($n \geq 2$) простой цепью, $r \geq 2$ —целое число, (Z_1, Z_2) —нетривиальная (P, r) -схема, то $n \geq \min\{2(|Z_1| + |Z_2|) + r - 5, r(|Z_1| + |Z_2| - 2)/2 + 1\}$.

Лемма 10. Если P является n -вершинной простой цепью, $r \geq 2$ —целое число, (Z_1, Z_2, Z_3) —нетривиальная (P, r) -схема и $|Z_1| = 1$, то $n \geq \min\left\{2 \sum_{i=1}^3 |Z_i| + 2r - 11, r\left(\sum_{i=1}^3 |Z_i| - 3\right)/2 + 1\right\}$.

Лемма 11. Если P является n -вершинной простой цепью, $r \geq 2$ —целое число, (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) —нетривиальная (P, r) -схема и $|Z_1| = |Z_2| = 1$, то $n \geq \min\left\{2 \sum_{i=1}^4 |Z_i| + 3r - 17, r\left(\sum_{i=1}^4 |Z_i| - 4\right)/2 + 1\right\}$.

В свою очередь доказательства лемм 9.10 и 11 опираются на идеи Нэш-Вильямса ⁽⁴⁾, лемма 1).

С помощью лемм 4—8 доказываются следующие четыре теоремы, где фактически оценивается длина цикла C^* .

Теорема 1. Если W —концевой фрагмент графа G и $|W| \leq 3\delta - k - 4$, $|W| \leq 3\delta - 3k$, то либо G —гамильтонов, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами.

Теорема 2. Если W —концевой фрагмент графа G и $|W| \geq 3\delta - k - 3$, $|W| \geq 3\delta - 3k + 1$, то либо $h \geq \min\{6\delta - 3k - 6, 6\delta - 4k - 2, 5\delta - 2k - 4\}$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 3$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами.

Теорема 3. Если W —концевой фрагмент графа G и $|W| \geq 3\delta - k - 3$, $|W| \leq 3\delta - 3k$, то либо G —гамильтонов, либо $h \geq 4\delta - k - 4$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 3$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами.

Теорема 4. Если W —концевой фрагмент графа G и $|W| \leq 3\delta - k - 4$, $|W| \geq 3\delta - 3k + 1$, $|\bar{W}| \geq |W|$, то либо G —гамильтонов, либо $h \geq 4\delta - 2k$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 3$, либо G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами.

Теорема 5. Если граф G содержит фрагмент с не более $k/2$ вершинами, то либо G —гамильтонов, либо $h \geq 4\delta - 3k/2 - 2$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$.

Теорема 5 опирается на следующий факт: теоремы Нэш-Вильямса ⁽⁵⁾ и Фосса ⁽⁶⁾ вместе утверждают, что любой граф G либо гамильтонов, либо $h \geq 3\delta - 3$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$.

Следующая теорема доказывается с помощью теорем 1—4.

Теорема 6 (основная). Если граф G удовлетворяет условию $\delta < (v + 2k)/4$, то либо $h \geq 4\delta - 2k$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 3$.

Среди результатов, известных в литературе, следует отметить:

Если граф G удовлетворяет условию $\delta \geq v/2$, то G —гамильтонов. Если же $\delta < v/2$, то либо $h \geq 2\delta$, либо $k \leq 1$ ⁽⁷⁾. Если $\delta \geq (v + 2)/3$, то либо G —гамильтонов, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 1$ ⁽⁸⁾. Если же $\delta < (v + 2)/3$, то либо $h \geq 3\delta - 3$, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$ ⁽⁹⁾. Если $\delta \geq (v + k)/3$, то либо G —гамильтонов, либо $k \leq 1$. Если же $\delta < (v + k)/3$, то либо $h \geq 3\delta - k$, либо $k \leq 2$ ⁽⁹⁾. Если $\delta \geq (v + 2k)/4$, то либо G —гамильтонов, либо $\alpha \geq \delta + 1$, либо $k \leq 2$ ⁽⁷⁾.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

Ժ. Դ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Դրաֆներում ամենաերկար ցիկլերի մասին

Դիցուք v -ն G գրաֆի գագաթների քանակն է, δ -ն՝ գագաթների նվազագույն աստիճանը, k -ն՝ գագաթային կապակցվածությունը, α -ն՝ գագաթային անկախություն թիվը և h -ը՝ ամենաերկար ցիկլի երկարությունը: Աշ-

խատանքի հիմնական արդյունքը կայանում է հետևյալում՝
 Թեոռեմ: Եթե G գրաֆը բավարարում է

$$\delta < \frac{v+2k}{4}$$

պայմանին, ապա կամ $k \geq 4\delta - 2k$ կամ $\alpha \geq \delta + 1$ կամ $k \leq 3$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Փ. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² D. R. Woodall, J. Combin. Theory, v. 22, № 3 (1977). ³ R. Hagkvist, C. Thomassen, Discrete Math., v. 41, № 1 (1982).
⁴ H. J. Veldman, Discrete Math., v. 44, № 1 (1983). ⁵ C. St. J. A. Nash-Williams
 Studies in Pure Mathematics, Academic Press, London, 1971. ⁶ H.-J. Voss, Beitrage.
 zur Graphen theorie and deren Anwendungen, Vorgetr. auf dem int. Kollokvium,
 Oberhof (DDR), 1977. ⁷ Ж. Г. Никогосян, ДАН АрмССР, т. 78, № 1 (1984). ⁸ G.
 A. Dirac, Proc. London Math. Soc., Ser. 3, № 2 (1952). ⁹ Ж. Г. Никогосян, ДАН
 АрмССР, т. 72, № 2 (1981).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. М. Варданян, М. Г. Степанян, Р. Г. Тадевосян

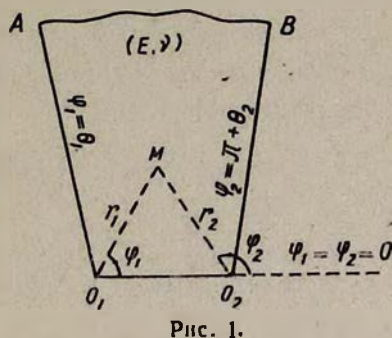
Плоская задача для клиновидных областей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 21/II 1985)

1°. Приводится решение плоской задачи теории упругости для бесконечного усеченного клина (рисунок), когда одна полубесконечная сторона жестко закреплена ($U_2 = V_2 = 0$), на другой заданы внешние нагрузки ($\sigma_\varphi^{(1)} = f_1$, $\tau_{r\varphi}^{(1)} = g_1$), а на конечной части границы тела задается одно из следующих условий: 1) напряжения ($\sigma_\varphi = f$, $\tau_{r\varphi} = g$); 2) симметрии ($\tau_{r\varphi} = 0$, $V_\varphi = 0$); 3) кососимметрии ($\sigma_\varphi = 0$, $U_r = 0$).

Аналогичные задачи рассматривались в работах (1-7). Следуя этим работам, решение бигармонического уравнения представим в виде суммы интегралов Меллина

$$F = \sum_{n=1}^2 F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^2 \int_{L_n} \Phi_n(s, \bar{\varphi}) r_n^{1-s} ds;$$



$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = A_n(s) \cos(s-1) \bar{\varphi}_n + B_n \sin(s-1) \bar{\varphi}_n + C_n \cos(s+1) \bar{\varphi}_n + \\ + D_n \sin(s+1) \bar{\varphi}_n, \quad (1.1)$$

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi, \quad \bar{\varphi}_2 = \varphi_2 - \pi, \quad 0 < \varphi_1 \leq \theta_1, \quad \theta_2 \leq \varphi_2 - \pi < 0, \quad \theta_1 - \theta_2 \geq \pi.$$

Рассмотрим задачу 1. Представляя функции f и g в виде

$$f = f^{(1)} + f^{(2)}, \quad g = g^{(1)} + g^{(2)} \quad (1.2)$$

и требуя, чтобы условия на отрезке $O_1 O_2$ удовлетворялись в виде

$$\sigma_\varphi^{(n)} = f^{(n)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(n)} = g^{(n)} \quad (n = 1, 2), \quad (1.3)$$

получим соотношения

$$\xi(\xi-1)(A_n + C_n) = a^\xi \tilde{f}^{(n)}(\xi), \quad \xi[(\xi-1)B_n + (\xi+1)D_n] = a^\xi \tilde{g}^{(n)}(\xi), \quad (1.4)$$

где функции $\tilde{f}^{(n)}(\xi)$ и $\tilde{g}^{(n)}(\xi)$ имеют вид

$$\tilde{f}^{(n)}(\xi) = a^{-\xi} \int_0^a f^{(n)}(r_n) r_n^\xi dr_n, \quad \tilde{g}^{(n)}(\xi) = a^{-\xi} \int_0^a g^{(n)}(r_n) r_n^\xi dr_n. \quad (1.5)$$

Удовлетворив теперь остальным граничным условиям, после ряда преобразований получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений ($n+p=3$, $n=1,2$):

$$\begin{aligned} X_n(s) + \int_{L_p} [K_p^{(1)}(s, \xi) X_p(\xi) + K_p^{(2)}(s, \xi) Y_p(\xi)] d\xi &= F_n(s); \\ Y_n(s) + \int_{L_p} [K_p^{(3)}(s, \xi) X_p(\xi) + K_p^{(4)}(s, \xi) Y_p(\xi)] d\xi &= G_n(s); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$K_p^{(j)}(s, \xi) = \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \Delta_p(\xi)} k_p^{(j)}(s, \xi) \quad (j=1+4), \quad (1.7)$$

где $B(s+1, \xi-s)$ —эйлерова «бета-функция», $k_p^{(j)}(s, \xi)$ —регулярные функции, имеющие вид:

$$\begin{aligned} k_1^{(1)}(s, \xi) &= \alpha_1^-(\xi, \Theta_1) \bar{\alpha}_2^+(s, \varepsilon_1) + \beta_1^+(\xi, \Theta_1) \bar{\beta}_2^-(s, \varepsilon_2); \\ k_1^{(2)} &= -\beta_1^- \bar{\alpha}_1^+ + \alpha_1^+ \bar{\beta}_1^-, \quad k_1^{(3)} = \alpha_1^- \bar{\beta}_2^+ - \beta_1^+ \bar{\alpha}_2^-, \quad k_1^{(4)} = -\beta_1^- \bar{\beta}_2^+ - \alpha_1^+ \bar{\alpha}_2^-; \\ k_2^{(1)}(s, \xi) &= \bar{\alpha}_2^-(\xi, \Theta_2) \alpha_1^+(s, \varepsilon_1) + \bar{\beta}_2^+(\xi, \Theta_2) \beta_1^-(s, \varepsilon_2); \\ k_2^{(2)} &= \bar{\beta}_2^- \alpha_1^+ - \bar{\alpha}_2^+ \beta_1^-, \quad k_2^{(3)} = -\bar{\alpha}_2^- \beta_1^+ + \bar{\beta}_2^+ \alpha_1^-, \quad k_2^{(4)} = -\bar{\beta}_1^- \beta_1^+ - \bar{\alpha}_2^+ \alpha_1^-. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Свободные члены системы (1.6) выражаются через внешние нагрузки следующим образом:

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \tilde{f}_n(s) - \int_{L_n} [\tilde{f}^{(p)}(\xi) F_p^{(1)}(s, \xi) + \tilde{g}^{(p)}(\xi) F_p^{(2)}(s, \xi)] d\xi; \\ G_n(s) &= \tilde{g}_n(s) - \int_{L_n} [\tilde{f}^{(p)}(\xi) F_p^{(3)}(s, \xi) + \tilde{g}^{(p)}(\xi) F_p^{(4)}(s, \xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n$ преобразования Меллина функций f_n , g_n ,

$$F_p^{(j)}(s, \xi) = \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \Delta_p(\xi)} f_p^{(j)}(s, \xi) \quad (j=1+4); \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(s, \xi) &= s_2^-(\xi, \Theta_2) \alpha_1^+(s, \varepsilon_1) - c_2^+(\xi, \Theta_2) \beta_1^-(s, \varepsilon_1); \\ f_1^{(2)} &= c_2^- \alpha_1^+ + s_2^+ \beta_1^-; \quad f_1^{(3)} = -s_2^- \beta_1^+ + c_2^+ \alpha_1^-; \quad f_1^{(4)} = -c_2^- \beta_1^+ + s_2^+ \alpha_1^-; \\ f_2^{(1)}(s, \xi) &= s_1^-(\xi, \Theta_1) \bar{\alpha}_2^+(s, \varepsilon_2) + c_1^+(\xi, \Theta_1) \bar{\beta}_2^-(s, \varepsilon_2); \\ f_2^{(2)} &= c_1^- \bar{\alpha}_2^+ + s_1^+ \bar{\beta}_2^-; \quad f_2^{(3)} = -s_1^- \bar{\beta}_2^+ + c_1^+ \bar{\alpha}_2^-; \quad f_2^{(4)} = -c_1^- \bar{\beta}_2^+ + s_1^+ \bar{\alpha}_2^-, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\varepsilon_n = (-1)^n \beta_n$, $|\Theta_n| + \beta_n = \pi$, $0 \leq |\beta_n| < \pi$.

Неизвестные функции $A_n(s)$, $B_n(s)$, $C_n(s)$, $D_n(s)$ определяются через новые неизвестные $X_n(s)$ и $Y_n(s)$ формулами

$$\begin{aligned} C_1(\xi) \xi \Delta_1(\xi, \Theta_1) &= \alpha^\xi [X_1(\xi) \alpha_1^-(\xi, \Theta_1) - Y_1 \beta_1^- + \tilde{f}^{(1)} s_1^- + \tilde{g}^{(1)} c_1^-]; \\ D_1(\xi) \xi \Delta_1(\xi, \Theta_1) &= \alpha^\xi [X_1(\xi) \beta_1^+(\xi, \Theta_1) + Y_1 \alpha_1^+ + \tilde{f}^{(1)} c_1^+ + \tilde{g}^{(1)} s_1^+]; \\ C_2(\xi) \xi \Delta_2(\xi, \Theta_2) &= \alpha^\xi [X_2(\xi) \bar{\alpha}_2^-(\xi, \Theta_2) + Y_2 \bar{\beta}_2^- + \tilde{f}^{(2)} s_2^- + \tilde{g}^{(2)} c_2^-]; \\ D_2(\xi) \xi \Delta_2(\xi, \Theta_2) &= \alpha^\xi [-X_2(\xi) \bar{\beta}_2^+(\xi, \Theta_2) + Y_2 \alpha_2^+ + \tilde{f}^{(2)} c_2^+ + \tilde{g}^{(2)} s_2^+]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\xi, \Theta_1) &= 4(\sin^2 \xi \Theta_1 - \xi^2 \sin^2 \Theta_1); \\ \Delta_2(\xi, \Theta_2) &= 4[(1+\nu)[\nu \sin^2 \xi \Theta_2 - \xi^2(1+\nu) \sin^2 \Theta_2] + 4]; \\ s_1^\pm(\xi, \Theta_1) &= -2(\sin^2 \xi \Theta_1 \mp \xi \sin^2 \Theta_1), \quad c_1^\pm(\xi, \Theta_1) = \mp(\sin 2\xi \Theta_1 \pm \xi \sin 2\Theta_1); \\ s_2^\pm(\xi, \Theta_2) &= \pm(1+\nu)[(1+\nu)(\sin 2\xi \Theta_2 \pm \xi \sin 2\Theta_2) \mp 4 \sin 2\xi \Theta_2]; \\ c_2^\pm(\xi, \Theta_2) &= \pm 2(1+\nu)[(1+\nu)(\sin^2 \xi \Theta_2 \mp \xi \sin^2 \Theta_2) + 2 \cos 2\xi \Theta_2]; \\ x_n^\pm(\xi, \Theta_n) &= x_n^\pm + \bar{\epsilon}_0 \cos(\xi+1)\Theta_n, \quad \beta_n^\pm(\xi, \Theta_n) = \beta_n^\pm - \bar{\epsilon}_0 \sin(\xi+1)\Theta_n; \\ \alpha_n^\pm(\xi, \Theta_n) &= (1 \mp \xi)[\cos(\xi-1)\Theta_n - \cos(\xi+1)\Theta_n], \quad \bar{\epsilon}_0 = 4/(1+\nu); \\ \beta_n^\pm(\xi, \Theta_n) &= (1 \pm \xi) \sin(\xi+1)\Theta_n + (1 \mp \xi) \sin(\xi-1)\Theta_n \quad (n=1, 2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

В работах (1,2,5) показано, что система сингулярных интегральных уравнений (1.6) путем исключения некоторых неизвестных сводится к двум независимым системам регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, содержащих каждое по два уравнения. Если же неизвестные функции представить в виде ряда по полиномам Чебышева—Эрмита

$$X_n(s) = \Gamma(1+s) \sum_{q=0}^{\infty} x_n^{(q)} \tilde{H}_q(s), \quad Y_n(s) = \Gamma(1+s) \sum_{q=0}^{\infty} Y_n^{(q)} \tilde{H}_q(s), \quad (1.15)$$

где $\Gamma(x)$ — «гамма функция», а

$$\tilde{H}_q(s) = \frac{\bar{H}_q(s)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}, \quad \bar{H}_q(s) = i^q H_q\left(\frac{s-c}{i}\right), \quad s = c + iy, \quad (1.16)$$

$H_q(s)$ — многочлены Чебышева—Эрмита, то интегральные уравнения (1.6) сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}x_n^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{n1}^{(q,l)} x_p^{(q)} + A_{n2}^{(q,l)} y^{(q)}] &= F_{n,l} \quad (n+p=3; \quad n=1, 2; \quad l=0, 1, 2 \dots); \\ y_n^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{p3}^{(q,l)} x_p^{(q)} + A_{p4}^{(q,l)} y_p^{(q)}] &= G_{n,l}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$A_{n1}^{(q,l)} = (-1)^{l+1} \int_{L_n} \int_{L_p} \tilde{H}_l(s) \tilde{H}_q(\xi) \exp(s-c)^2 \Gamma(\xi-s) k_p^{(l)}(s, \xi) \frac{ds d\xi}{2\pi \Delta_p(\xi)};$$

$$F_{n,l} = (-1)^{l+1} l \int_{L_n} F_n(s) \tilde{H}_l(s) \Gamma^{-1}(1+s) \exp(s-c)^2 ds;$$

$$G_{n,l} = (-1)^{l+1} l \int_{L_n} G_n(s) \tilde{H}_l(s) \Gamma^{-1}(1+s) \exp(s-c)^2 ds. \quad (1.18)$$

Вопросы разрешимости системы (1.17) исследованы в работах (1,2,5).

2⁰. Если в рассматриваемой задаче на конечной части границы тела удовлетворяются условия симметрии (задача 2) или кососимметрии (задача 3), то опять приходим к решению интегральных уравнений

(1.6) с ядрами (1.7), где регулярные функции имеют теперь вид

$$k_n^{(1)}(s, \xi) = M_n^\pm(s, \xi), \quad k_n^{(2)} = N_n^\pm, \quad k_n^{(3)} = P_n^\pm, \quad k_n^{(4)} = Q_n^\pm, \quad (2.1)$$

а неизвестные функции A_n, B_n, C_n, D_n определяются через новые неизвестные X_n и Y_n формулами

$$\begin{aligned} (1+\nu)^{p-1} \left\{ \frac{A_n(\xi)}{B_n(\xi)} \right\} \xi \Delta_n(\xi) &= a^\xi \left\{ \left[\frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{2+(-1)^{n2}}{(\xi-1)(1+\nu)} \right] X_n(\xi) \begin{Bmatrix} \sin(\xi+1)\Theta_n \\ \cos(\xi+1)\Theta_n \end{Bmatrix} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm (-1)^p \left[1 + \frac{2+(-1)^{n2}}{(\xi-1)(1+\nu)} \right] Y_n(\xi) \begin{Bmatrix} \cos(\xi+1)\Theta_n \\ \sin(\xi+1)\Theta_n \end{Bmatrix} \right\}; \\ (1+\nu)^{p-1} \left\{ \frac{C_n(\xi)}{D_n(\xi)} \right\} \xi \Delta_n(\xi) &= -a^\xi \left\{ X_n(\xi) \begin{Bmatrix} \sin(\xi-1)\Theta_n \\ \cos(\xi-1)\Theta_n \end{Bmatrix} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm (-1)^p Y_n(\xi) \begin{Bmatrix} \cos(\xi-1)\Theta_n \\ \sin(\xi-1)\Theta_n \end{Bmatrix} \right\}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Delta_1 = \sin 2\xi \Theta_1 \pm \xi \sin 2\Theta_1, \quad \Delta_2 = (\nu-3) \sin 2\Theta_2 \pm (1+\nu) \xi \sin 2\Theta_2. \quad (2.3)$$

В выражениях (2.1)–(2.3) верхние индексы и строки относятся к задаче 2, нижние — 3.

$$M_n^\pm = \delta^\pm [\beta_n^\pm(\xi, \Theta_n) \cos(s-1)\varepsilon_p - \alpha_p^\pm(s, \varepsilon_p) \sin(\xi-1)\Theta_n - \delta_0 \cos s_p \sin \xi_n];$$

$$N_n^\pm = \pm \delta^\mp [\alpha_n^\pm \cos(s-1)\varepsilon_p - \beta_p^\pm \cos(\xi-1)\Theta_n - \delta_0 \cos s_p \cos \xi_n];$$

$$P_n^\pm = -\delta^\pm [\beta_n^\pm \sin(s-1)\varepsilon_p - \beta_p^\pm \sin(\xi-1)\Theta_n + (-1)^n \delta_0 \sin s_p \sin \xi_n];$$

$$Q_n^\pm = \pm [\alpha_n^\pm \sin(s-1)\varepsilon_p + (-1)^p \beta_p^\pm \cos(\xi-1)\Theta_n + (-1)^n \delta_0 \sin s_p \cos \xi_n],$$

$$S_p = [s + (-1)^p] \varepsilon_p, \quad \xi_n = [\xi + (-1)^n] \Theta_n, \quad \delta^\pm = \begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^p \end{Bmatrix} \quad (n+p=3). \quad (2.4)$$

Кроме того, в случае симметрии $B_n=0, D_n=0$, а в случае косимметрии $A_n=0, C_n=0$.

Свободные члены интегральных уравнений (1.6) для этих случаев выражаются только первыми слагаемыми формул (1.9), где надо положить $\tilde{f}_2(s) = \tilde{g}_2(s) = 0$.

Переходим к вычислению напряжений. Для простоты приводим выражение нормального напряжения σ_φ точек отрезка $O_1O_2(\Gamma_1 + \Gamma_2 - n)$ для задачи 2:

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} s(s-1) [A_p(s) + C_p(s)] r_p^{-s-1} ds. \quad (2.5)$$

Подставляя сюда выражения A_p, C_p из (2.2) и принимая, что корни Δ_m простые, после применения теории вычетов формулу (2.5) представим в виде

$$\sigma_\varphi = \sum_{m=1}^2 \left[\sum_{(\operatorname{Re} \xi_{mn} < 0)} d_n^{(m)} \left(\frac{a}{r_m} \right)^{\xi_{mn}+1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m)} \left(\frac{a}{r_m} \right)^{-n+1} \right]. \quad (2.6)$$

Здесь

$$d_n^{(1)} = \frac{\Gamma(1+\xi_{1n})}{(1+\nu)\Delta_1(\xi_{1n})} [\tilde{x}(\xi_{1n}) \beta_1^+(\xi_{1n}, \Theta_1) + \tilde{y}(\xi_{1n}) \alpha_1^+(\xi_{1n}, \Theta_1)];$$

$$d_n^{(0)} = \frac{\Gamma(1+\xi_{2n})}{\Delta_2(\xi_{2n})} [\bar{x}_2(\xi_{2n})\bar{y}_2^-(\xi_{2n}, \Theta_2) - \bar{y}_2(\xi_{2n})\bar{x}_2^-(\xi_{2n}, \Theta_2)];$$

$$c_n^{(1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+s)} \cdot \frac{n}{(n-1)!\Delta_1(-n)} [\bar{x}_1(-n)\bar{y}_1^+(-n, \Theta_1) + \bar{y}_1(-n)\bar{x}_1^+(-n, \Theta_1);$$

$$c_n^{(2)} = (-1)^{n+1} \frac{n}{(n-1)!\Delta_2(-n)} [\bar{x}_2(-n)\bar{y}_2^+(-n, \Theta_2) - \bar{y}_2(-n)\bar{x}_2^+(-n, \Theta_2)];$$

$$\bar{x}_n(s) = X_n(s)/\Gamma(1+s), \quad \bar{y}_n(s) = Y_n(s)/\Gamma(1+s), \quad (2.7)$$

где ξ_{mn} — корни целой функции Δ_m , для которых ($\text{Re} \xi_{mn} < 0$). Наличие вторых слагаемых в (2.6) обусловлено тем, что неизвестные функции X_n и Y_n имеют простые полюсы в точках $\xi = -n$ ($n = 1, 2, \dots$). При этом коэффициенты $c_n^{(m)}$ можно вычислить как по формулам (2.7), так и через линейные комбинации $d_n^{(m)}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Մ. Գ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Ռ. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Հաղթ խնդիրը սեպածն տիրույթների համար

Հոդվածում բերվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը անվերջ, հատած սեպի համար, երբ եզրային ճառագայթներից մեկը ամրակցված է, մյուսի վրա ազդում է կամայական արտաքին բեռ, իսկ վերջավոր հատվածի վրա տրված հետևյալ երեք պայմաններից մեկը՝ 1. $\sigma_\varphi = f$, $\tau_{r\varphi} = g$; 2. $\tau_{r\varphi} = 0$, $V_\varphi = 0$; 3. $\sigma_\varphi = 0$, $U_r = 0$: Խնդիրը բերվում է ֆրեդհոլմի ռեզուլյար հավասարումների կամ ռեզուլյար անվերջ սիստեմների լուծմանը: Բերվում են լարումների համար բանաձևեր՝ անշատված եզակիության ներքո:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. А. Баблюян, ДАН АрмССР, т. 65, № 5 (1977). ² Л. А. Баблюян, Н. О. Гулка-
нян, ДАН АрмССР, т. 62, № 3 (1976). ³ В. Т. Гринченко, Равновесие и установившие-
ся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. ⁴ Б. М.
Нуллер, ПММ, т. 36, вып. 1 (1972). ⁵ Р. Г. Тадевосян, Изв. АН АрмССР, Механика,
т. 36, № 6 (1983). ⁶ А. Ф. Улитко, Метод собственных векторных функций в прост-
ранственных задачах теории упругости, Наукова думка, Киев, 1979. ⁷ Я. С. Уфлянд.
Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Л., 1967.

УДК 66.067.52:637.232.152

ГИДРОМЕХАНИКА

Дж. С. Торосян

Критический режим тонкослойного центрифугирования

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Савяном 6/II 1985)

При определенных параметрах режима тонкослойного центрифугирования жидких гетерогенных систем в межтарелочных пространствах сепаратора возникает неустойчивое состояние, при котором резко нарушается ход процесса (^{1,2}). В качестве примера на рис. 1 и 2 приведены результаты разделения натурального молока и подсырной сыво-

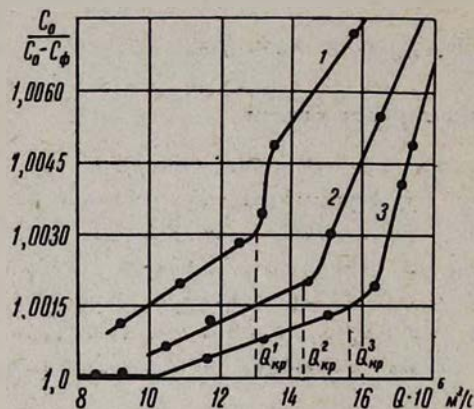


Рис. 1. Зависимость $c_0/(c_0 - c_\phi) = f(Q)$ (c_0 и c_ϕ — содержание жира до и после сепарирования, Q — производительность аппарата), полученная при разделении натурального молока на фракции при $c_0 = 4,2\%$, температуре процесса 293°K и угловой скорости вращения ротора, рад/с: 1—1005; 2—1120; 3—1204

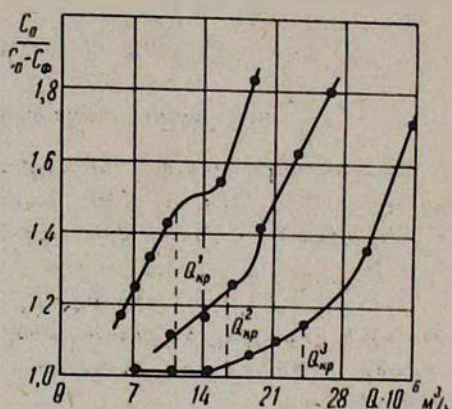


Рис. 2. Зависимость $c_0/(c_0 - c_\phi) = f(Q)$, полученная при разделении подсырной сыворотки на фракции при $c_0 = 0,2\%$, температуре процесса 293°K и угловой скорости вращения ротора, рад/с: 1—628; 2—837; 3—1256

ротки на сепараторе «Сатурн». Ниже расчет критического режима процесса тонкослойного сепарирования производится на основании учета волнового движения жидкости в межтарелочном пространстве центробежного тарельчатого сепаратора. Учет волнового движения жидкости в роторе центробежного тарельчатого сепаратора не только даст возможность вести исследования по-новому, но и объясняет многие факты, до сих пор не имеющие какого-либо обоснования.

Рассмотрим поверхностные волны в межтарелочном пространстве центробежного тарельчатого сепаратора, считая при этом, что амплитуда волны — малая величина по сравнению с ее длиной (³⁻⁵). Записываем уравнение нестационарного движения жидкости в виде (⁵⁻⁸)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p/\rho + \vec{F}_u + \vec{F}_k + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{v}$ —скорость жидкости; t —время; $\vec{F}_u$ и $\vec{F}_k$ —центробежная и кориолисова силы инерции, отнесенные к единичной массе; ρ —плотность жидкости; p —давление; ν —кинематическая вязкость жидкости; Δ и ∇ —операторы Лапласа и Гамильтона.

Тогда уравнение (1) в направлении r представим в виде

$$\partial v_r / \partial t = -\partial p / (\rho \partial r) + \omega^2 r \sin^2 \alpha + 2\omega v_\theta \sin \alpha + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (3)$$

где ω —угловая скорость вращения ротора сепаратора; α —угол наклона образующей тарелки к вертикали; v_r и v_θ —компоненты скорости жидкости в направлении r и θ ; r —расстояние от вершины конуса до рассматриваемой точки; θ —угловая координата.

Уравнение неразрывности (2) представим в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (4)$$

Значение величины компонентов скорости жидкости v_r и v_θ определим с помощью функции тока Ψ и потенциала скорости φ (при этом $\Delta \varphi = 0$)⁽⁵⁻⁸⁾.

На основании (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^0}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \theta} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \omega^2 r \sin^2 \alpha + 2\omega v_\theta \sin \alpha + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r^0}{\partial r} - \frac{v_r^0}{r^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения (5) вытекает равенство

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} \right). \quad (6)$$

Уравнение возмущенной поверхности жидкости в произвольный момент времени t определяется координатами r и θ , т. е. $r = \xi(r, \theta, t)$. Заменим значение r в уравнении (6) на величину ξ , представляющую собой радиус возмущенной поверхности жидкости в межтарелочном пространстве центробежного тарельчатого сепаратора, и решение уравнения (6) представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 \exp[i(n\xi - \sigma t)], \quad (7)$$

где Ψ_0 —амплитудное значение функции Ψ ; n —волновое число; ξ —радиус возмущенной поверхности жидкости в межтарелочном пространстве сепаратора; σ —круговая частота; t —время. Из уравнения (7) имеем

$$\nu n^2 - i\sigma - in\nu/\xi + \nu/\xi^2 = 0. \quad (8)$$

В условиях тонкослойного сепарирования величинами ν/ξ и ν/ξ^2 в уравнении (8) можно пренебречь ввиду их малости. Тогда получим

значение скорости жидкости в межтарелочном пространстве центробежного сепаратора

$$u = u_0 \exp[-(\sigma/(2\nu))^{0.5z}] \exp[(\sigma/(2\nu))^{0.5z} - \sigma t]. \quad (9)$$

где u_0 —амплитуда волны.

Из уравнения (9) следует, что волна в радиальном направлении затухает по экспоненциальному закону. Следуя (5), назовем величину $z = (2\nu/\sigma)^{0.5}$ «глубиной проникновения волны», которая численно равна расстоянию, на котором амплитуда волны уменьшается в «e» раз. Для определенности примем, что круговая частота σ примерно равна угловой скорости вращения ротора центробежного тарельчатого сепаратора ω (3,4).

Величина «глубины проникновения» волнового движения жидкости в межтарелочном пространстве центробежного тарельчатого сепаратора, когда амплитуда волны уменьшается в «e» раз, определится по формуле

$$\delta = (2\nu/\omega)^{0.5}, \quad (10)$$

где δ —расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в «e» раз; ν —кинематическая вязкость жидкости; ω —угловая скорость вращения ротора сепаратора. Получим критериальную зависимость для расчета режима потери устойчивости процесса тонкослойного сепарирования на основании выражения (10). Для этого записываем значение числа Рейнольдса для слоя жидкости, где амплитуда волнового движения уменьшается в «e» раз, в виде (9)

$$Re_\delta = v\delta/\nu, \quad (11)$$

где v —средняя скорость движения жидкой гетерогенной системы по межтарелочному пространству при потере устойчивости процесса.

Комбинируя физические параметры текущей по межтарелочным пространствам жидкой гетерогенной системы с механическими факторами ротора центробежного тарельчатого сепаратора, из выражений (10) и (11) получим

$$Re_\delta = (2ReR_0\Gamma^{-1})^{0.5}, \quad (12)$$

где $Re = v\delta/\nu$; $R_0 = v/\omega R$; $\Gamma = h/R$ —критерии Рейнольдса, Россби и геометрического подобия; h —расстояние между тарелками по нормали; R —средний радиус тарелки.

Аналогичным образом, комбинируя физические параметры разделяемой жидкой гетерогенной системы и механические факторы ротора центробежного тарельчатого сепаратора, на основании выражений (10) и (11) можно получить

$$Re_\delta = (2R_0^2 E^{-1} \Gamma^{-1})^{0.5}, \quad (13)$$

где $E = \omega h^2/\nu$ —критерий Экмана.

На основании выражений (12) и (13) имеем

$$R_0 = Re E \Gamma. \quad (14)$$

Критериальное уравнение (14), определяющее критический режим

процесса тонкослойного сепарирования, получило экспериментальное подтверждение (1).

При этом, как следует из уравнения (14), при изменении угловой скорости вращения ротора центробежного тарельчатого сепаратора между критериями Рейнольдса и Экмана существует обратно пропорциональная зависимость (рис. 3), в то время как критерий Россби остается неизменным. При изменении количества межтарелочных пространств и геометрических размеров тарелок (при постоянной угловой скорости вращения ротора сепаратора) зависимость между критериями Рейнольдса и Россби прямо пропорциональная (рис. 4). В

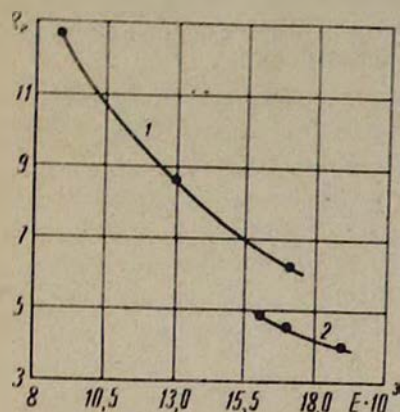


Рис. 3. Зависимость $Re=f(E)$ при разделении: 1—подсырной сыворотки; 2—натурального молока

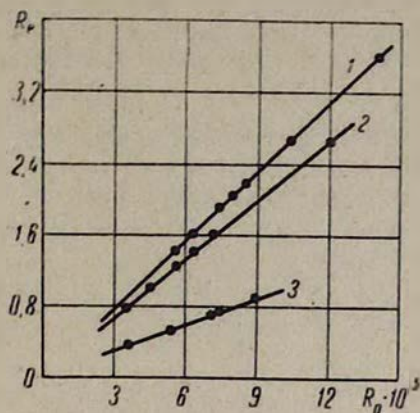


Рис. 4. Зависимость $Re=f(R_0)$, полученная на сепараторе ОТ-ОР-230 при разделении суспензии азопигмента бордо „Ж“ с $c_0=0,13\%$ (масс.) при различных количествах межтарелочных пространств при наибольшем диаметре пакета тарелок, м: 1—0,15; 2—0,12; 3—0,1

этом случае критерий Экмана сохраняет постоянное значение. С помощью критериального уравнения (14), описывающего процесс потери устойчивости процесса сепарирования жидкой гетерогенной системы в межтарелочных пространствах центробежного тарельчатого сепаратора, можно определить наибольшую производительность аппарата, при которой возникает критический режим разделения, когда качественно и резко ухудшаются результаты разделения.

Лешнаканский государственный
педагогический институт
им. М. Налбандяна

2. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Նուրբ-շերտային կենտրոնախույզ բաժանման կրիտիկական ռեժիմը

Ուսումնասիրված է կենտրոնախույզ ավսեային զատիչ մեքենաների միջ-
ավսեային տարածութիւններում մածուցիկ հեղուկի ալիքային շարժումը:

Ստացված է Հափանիշային հավասարում, որը հնարավորություն է ստեղծում որոշել նուրբ-շերտային կենտրոնախույզ բաժանման պրոցեսի կրիտիկական ռեժիմի պարամետրերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. С. Торосян, Изв. АН АрмССР. Техн. науки. т. 35, № 4 (1982). ² Д. С. Торосян, ДАН АрмССР, т. 75, № 1 (1982). ³ Д. С. Торосян, в кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформированных сред, Изд-во АН АрмССР, 1984. ⁴ Д. С. Торосян, ДАН АрмССР, т. 79, № 4 (1984). ⁵ Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, Механика сплошных сред, ГИИТЛ, М., 1953. ⁶ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. I, Физматгиз, М., 1963. ⁷ Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости, Наука, М., 1977. ⁸ Дж. Лайтхилл, Волны в жидкостях, Мир, М., 1981. ⁹ В. И. Соколов, Центрифугирование, Химия, М., 1976.

УДК 621-539-53.10.45+537+538

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Иосифьян

О необратимых процессах в электромагнитном
осцилляторе

(Представлено 21/XII 1984)

Проблема необратимых явлений в электромагнитных процессах была поставлена в начале нашего столетия Л. Планком в свете выдвинутой им идеи о возможности формулирования первого и второго законов для физических процессов электромагнитного осциллятора по аналогии с первым и вторым законами термодинамики. Физическая гипотеза формулировки таких законов исходила из теории, трактующей явления излучения света и тепла как электромагнитные процессы, происходящие в ансамбле возбужденных идеальных электромагнитных осцилляторов ⁽¹⁾.

Исследуя процессы излучения и поглощения электромагнитными осцилляторами энергии в некотором замкнутом объеме с отражательными стенками, Планк из обобщения опыта экспериментальных исследований спектральных характеристик теплового излучения вывел значение средней энергии (W) и „энтропии“ (S) ⁽¹⁾:

$$W = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dW}; \quad S = f\left(\frac{W}{\nu}\right) (S \text{ по Вину,}) \quad (2)$$

где значения h , ν , T , k общезвестны, S —электромагнитная энтропия Планка.

В уравнениях (1) и (2) Планк рассматривал h как параметр, определяющий величину элементарной области вероятности в виде универсальной постоянной с размерностью: энергия $\times$ время (в системе МКСАВ) в форме

$$\iint dq dp = h \quad (\text{Дж} \cdot \text{с}), \quad (3)$$

где q (AC)—координата, а p (BC)—динамический импульс в фазовом пространстве (q, p).

Однако в дальнейшем теоретически ⁽²⁾ и экспериментально ⁽³⁾ была установлена взаимосвязь между куперовской парой электронов «2с» (А. С.), флюксонидом « Φ » (В. С.) и постоянной Планка:

$$h = 2e\varphi. \quad (3a)$$

С другой стороны, теоретически ⁽⁴⁾ была установлена связь постоянной Планка (h) с параметрами электромагнитного поля классической электродинамики.

Для «вмороженного» максимального магнитного потокосцепления в контуре $2e \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = nh$ (Дж · с); $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\psi_m = \oint \mathbf{A}_m d\mathbf{l} \quad \mathbf{B}_m = \text{rot} \mathbf{A}_m \quad \text{div} \mathbf{A}_m = 0. \quad (4)$$

а для кванта $\mathbf{A} = \psi_m \times \mathbf{Q}_m$.

Для «вмороженного» максимального электрического потокосцепления в контуре $\oint \mathbf{K} d\mathbf{l}^* = mh$ (Дж · с); $m = 1, 2, 3 \dots$

$$\mathbf{Q}_m = \oint \mathbf{K} d\mathbf{l}^* \quad \mathbf{D}_m^* = \text{rot} \mathbf{K} \quad \text{div} \mathbf{K}_m = 0. \quad (5)$$

Параметры, входящие в (4) и (5) для LC контура, были рассмотрены в работе (4) с использованием принципа разбения единого процесса электромагнитного поля идеального осциллятора (LC) на два пространственно-временных процесса — магнитно-индукционный (r, t) и электроиндукционный (r', t'), связанных с двумя физически различными методами ввода и вывода энергии в контур с учетом математической классификации физических величин Максвелла.

Для магнитно-индукционных явлений (5):

в Лагранжево-Максвелловском пространстве

$$\begin{aligned} \Theta &= -\frac{d\psi}{dt}; \quad t = \frac{dq}{dt}; \quad \delta W = \Theta \delta q \quad (\text{Дж}); \\ \delta H_h &= \psi \delta q \quad (\text{Дж} \cdot \text{с}); \end{aligned} \quad (6)$$

в Максвелловском пространстве

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} ds; \\ i &= \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} ds + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds; \quad \int \mathbf{D} ds = \int \rho_e dO \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho_e. \end{aligned} \quad (7)$$

Для электроиндукционных явлений (6):

в Лагранжевом инверсном сопряженном обобщенном пространстве

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{dQ}{dt'}; \quad v = \frac{d\Phi}{dt'}; \quad \delta W^* = \theta \delta \Phi \quad (\text{Дж}); \\ \delta H_h^* &= Q \delta \Phi \quad (\text{Дж} \cdot \text{с}); \end{aligned} \quad (8)$$

в полево инверсно-сопряженном пространстве автора

$$\begin{aligned} \theta &= \oint \mathbf{H}^* d\mathbf{l}^* = -\frac{d}{dt'} \int \mathbf{D}^* ds^*; \quad (\text{А}) \\ v &= \oint \mathbf{E}^* d\mathbf{l}^* = \int \mathbf{x} ds^* + \int \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} ds^*; \quad (9) \\ \int \mathbf{B}^* ds &= \int \rho_m dO; \quad \text{div} \mathbf{B}^* = \rho_m. \quad (\text{Б}) \end{aligned}$$

Векторы без звездочек относятся к правовращающей системе отсчета, а со звездочками — к левовращающей (инверсно-сопряженной) системе отсчета.

В работе (6) при анализе процессов энергообмена в LC -контуре

был введен параметр плотность «Действия» $\left(\frac{\text{энергия} \times \text{время}}{\text{м}^3} \right)$ для механически фиксированного LC-контура

$$\rho^h = \rho_e^h + \rho_\phi^h \text{ (Дж} \cdot \text{с/м}^3\text{)}; \rho_e^h = \frac{A_m D_m}{2}; \rho_\phi^h = \frac{K_m B_m^*}{2}, \quad (10)$$

где A_m, D_m, K_m, B_m^* — амплитудные значения полей и потенциалов в двух инверсно-сопряженных системах дифференциальных уравнений электромагнитодинамики, вытекающие из уравнения (7) и (9) при свертке контура для характеристики точечных событий в электромагнитном поле.

Фазовое пространство (r, t) электрона „e“ (4)

$$E = - \frac{\partial A}{\partial t} - [\mathbf{B} \times \mathbf{U}] - \text{grad } \varphi \quad (\text{В/м});$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{А/м}); \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (\text{Вс/м}^2); \quad (11)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Ас/м}^3); \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \simeq N e \mathbf{v} \quad (\text{А/м}^2).$$

Фазовое пространство (r', t') флюксоида „Ф“ (4)

$$\mathbf{H}^* = - \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} - [\mathbf{D}^* \times \mathbf{U}^*] - \text{grad } \varphi^* \quad (\text{А/м});$$

$$\text{rot} \mathbf{E}^* = \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} \quad (\text{В/м}^2); \quad \mathbf{D}^* = \text{rot} \mathbf{K} \quad (\text{Ас/м}^2); \quad (12)$$

$$\text{div} \mathbf{B}^* = \rho_m \quad (\text{Вс/м}^3); \quad \mathbf{x} = \rho_m \mathbf{v} \simeq M \varphi \mathbf{v}.$$

Интегральные выражения $H_h^e = \int \psi dq, H_h^Q = \int Q d\varphi$ (Дж/с) могут образовывать соответствующие гамильтонианы (время не варьируется), характеризующие процессы в LC-контуре при различных способах энергообмена.

Если теперь составить уравнение „Действия“ H_h^e в фазовом пространстве „Ф“ в форме $H^e = \int \psi dq = \pi \psi_m q_m$ при условии, когда активное магнитное потокосцепление $\psi_m = \sqrt{2L_f W_0} q_m = \sqrt{2C W_0}$, то $H_h^e = W_0 \nu$; $\nu^{-1} = 2\pi \sqrt{L_f C}$.

С другой стороны, $\pi \psi_m q_m = \pi \int A_m d\mathbf{l} \cdot \int \mathbf{D}_m d\mathbf{s}_m = \pi \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{s} A_m(\omega) D(\omega) = \rho^h V_0$, где $\pi \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{s} = V_0$ и $\rho_\psi^h = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \pi \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{s} \cdot A(\omega) D(\omega)}{\Delta V}$ в некотором эквивалентном сопряженном объеме V_0 .

Аналогично в фазовом пространстве $H_h^Q = \int Q d\varphi = \pi Q_m \varphi_m$ при условии, когда активное электрическое потокосцепление $Q_m = \sqrt{2C_f W_0^*}$, $\varphi_m = \sqrt{2L W_0^*}$, то $H^Q = \frac{W_0^*}{\nu}$; $\nu^{-1} = 2\pi \sqrt{L C_f}$; с другой стороны, $\pi Q_m \varphi_m = \pi \int K_m d\mathbf{l} \int B_m^* d\mathbf{s} \approx \pi K_m(\omega) B_m^*(\omega) \int d\mathbf{l} \int d\mathbf{s}^*$, где $\pi \int d\mathbf{l}^* \int d\mathbf{s}^* = V_0^*$ и $\rho_Q^h = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta [\int d\mathbf{l}^* \int d\mathbf{s}^* \cdot \pi K_m(\omega) B_m^*(\omega)]}{\Delta V}$ в некотором эквивалентном сопряженном объеме.

Тогда можно утверждать, что в реальном LC -контуре в целом будет действовать сумма действия в виде $H=H^*+H^Q$; полагая, что $V_0^*=V_0=V$, для LC -контура получим следующие соотношения: $H^h=H^Q+H^*=\frac{W_0^*}{\nu^Q}+\frac{W_0}{\nu^*}$; при $\nu^Q=\nu^*$

$$2W_0/\nu V=A_m(\omega)D_m(\omega)+K(\omega)B^*(\omega) \text{ и } \rho^h=\frac{A(\omega)D(\omega)+K(\omega)B^*(\omega)}{2}=\rho_Q^h+\rho_\varphi^h. \quad (13)$$

Таким образом, состояние всей системы (LC) при фиксированной энергии (W) определяется параметрами ρ^h

$$V_0(M^3), \quad \nu(1/c) \quad (\text{Дж} \cdot \text{см}^{-3}), \quad (14)$$

а уравнение состояния электромагнитного поля в конечном объеме осциллятора имеет вид

$$f(\rho^h, V, \nu)=0. \quad (15)$$

Это соотношение аналогично уравнению состояния в термодинамике: $f(P, V, T)=0$.

Теперь мы можем рассматривать процессы в LC -контуре при постоянных: *плотностях действия* $\rho^h=\text{const}$ — *изопланковый*, *объемах* $V=\text{const}$ — *изообъемный*, *частотах* $\nu=\text{const}$ — *изочастотный*.

При этом вводится понятие «уравнения состояния» в виде

$$\rho^h=f(V, \nu); \quad V=f(\rho^h, \nu); \quad \nu=f(\rho^h, V) \text{ и т. д.} \quad (16)$$

Однако по физическому смыслу уравнения (15) резко отличаются от термодинамических.

Если термодинамика описывает статистически неупорядоченные, с соударением частиц, вероятностные процессы, подчиняющиеся уравнению сохранения энергии

$$\delta Q_T=dU_T+dA_T=dU_T+pdV, \quad (17)$$

где dA отражает «работу» теплоносителя, и второму началу термодинамики

$$\delta S_T \geq \frac{\delta Q_T}{T}, \quad (18)$$

то электромагнитодинамика параметрами ρ^h, V, ν (16) описывает *квазистатистические*, упорядоченные процессы в фазовом пространстве $[\psi, Q]$ (4) и (5) с квантованными магнитными и электрическими потокоцеплениями. При этом сохраняется «Действие», математическое выражение которого представляется в виде

$$\delta H^h=dH_h+\delta A_h=dH_h+pdV \quad (19)$$

(δK — «работа» носителя поля в *энерговременных обменных процессах* механически фиксированного (LC)-контура).

В этом же пространстве выполняется закон, характеризующий направление изменения процесса, описываемый уравнением

$$\delta S \geq \frac{\delta H}{\nu} \quad (\text{Дж} \cdot \text{с})^{-1} \quad (20)$$

вместо уравнения электромагнитной энтропии Планка (²). Можно показать, что в пространстве существования вещество—поле (19) сохраняется. Сохраняется также энергия, математической формой которой является уравнение

$$\operatorname{div} U + \frac{d\phi^h}{d\tau} = 0 \quad (\text{Дж/м}^3), \quad (21)$$

где U —некоторый вектор, действующий по нормали к поверхности, охватывающей LC -контур.

В (21) производная $\frac{d\phi^h}{d\tau}$ по „местному“ времени выражает плотность энергии в эквивалентном объеме энергообмена. Действительно, в системе электромагнитного осциллятора в части пространства, ограниченного при квазистатическом состоянии максимальным значением замороженного магнитного и максимальным значением электрического поля, можно ввести два параметра времени: текущее t с ($t = \int dt$) и параметрическое τ (он входит в соотношение, связывающее поля и потенциалы) при $T = \int_0^T d\tau = 2\pi\sqrt{LC}$.

Дифференцируя по τ выражение для $A_m K_m$ в ρ^h , получим выражение для плотности энергии

$$\frac{d\rho^h}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} (A_m D_m + K_m B^*) = \frac{ED + B^* H^*}{2} \quad \text{Дж/м}^3.$$

Таким образом, уравнения сохранения «Действия» (19) отражают обратимые и необратимые процессы, протекающие в электромагнитном осцилляторе, в то время как уравнение (20) характеризует направление изменения энергетических обменных процессов, в том числе процессов излучения, поглощения, преобразования в соответствии с изложенными в работе (⁹) физическими принципами изучения и распространения электромагнитной энергии и действия (¹).

СКБ НКГСПС

Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Ղ. ԻՍՈԻԶՅԱՆ

Լիկելադամագրիսական օսցիլյատորում կատարվող անդադնելի պրոցեսների մասին

Էլեկտրամագնիսական օսցիլյատորում տեղի ունեցող անդադնելի պրոցեսների համար դուրս եկն բերված «Դործողության» պահպանման, ինչպես նաև էներգաթափանկալին պրոցեսների փոփոխման ուղղությունը նկարագրող հավասարումներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Планк, Избранные труды, Наука М., 1975. ² А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 20, 33 (1955). ³ В. Бунке, Сверхпроводимость, Мир, М., 1975. ⁴ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 42, 49 (1972). ⁵ Д. К. Максвелл, Избранные произведения, ГИТЛ, М., 1938; М., 1936; Статьи и речи, Наука, М., 1978. ⁶ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 41, 33 (1970). ⁷ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 71, 95 (1980). ⁸ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 57, 83 (1978). ⁹ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 49, 67 (1974).

УДК 539.1

ФИЗИКА

В. Е. Мкртчян, В. О. Чалтыкян

Эффекты прохождения излучения на малых длинах и их связь с элементарными процессами на отдельном атоме

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 31/X 1984)

При распространении волн в нелинейной резонансной среде имеют место различные явления, среди которых особое место занимают преобразование частоты и генерация новых частот. Подобные явления могут быть объяснены путем рассмотрения элементарных процессов на одном атоме. Количественное же описание явлений распространения в общем случае невозможно свести к вычислению элементарных вероятностей на отдельном атоме из-за наличия эффектов накопления и интерференции амплитуд вероятностей различных процессов.

Однако при рассмотрении указанных эффектов на малых расстояниях, когда эффекты накопления еще несущественны, возможно результаты по прохождению связать с вероятностями элементарных актов на отдельном атоме, а также выяснить роль конкуренции различных процессов.

Такой подход может оказаться полезным при изучении сложных атомных систем, когда точное решение уравнений прохождения либо невозможно, либо громоздко, в то время как вероятности элементарных процессов могут быть вычислены достаточно просто.

В настоящей работе мы проиллюстрируем вышесказанное на примере двухуровневой системы в поле резонансного излучения. Частоту перехода атома обозначим через ω_0 , матричный элемент дипольного момента атомного перехода через $\vec{d}$, а электромагнитное поле будем описывать классическим вектором напряженности

$$\vec{E}(x, t) = \vec{\epsilon}_0(x)e^{-i\omega(t-x/c)} + \sum_k \vec{\epsilon}(\omega_k, x)e^{-i\omega_k(t-x/c)} + \text{к. с.}, \quad (1)$$

принимая за направление распространения в среде ось x . Будем считать, что поля $\epsilon(\omega_k, x)$ (слабое поле) и $\epsilon_0(x)$ (поле накачки) удовлетворяют условию $|\epsilon(\omega_k, x)| \ll |\epsilon_0(x)|$. Вычислим средний дипольный момент основного состояния системы в резонансном по полю накачки приближении, ограничиваясь линейными членами по слабому полю. Подставляя найденную таким образом поляризацию среды в укороченные уравнения Максвелла, получим уравнения для амплитуд $\epsilon_0(x)$ и $\epsilon(\omega_k, x)$ (в действительности функции $\epsilon_0(x)$ и $\epsilon(\omega_k, x)$ зависят в общем случае также и от переменной $t-x/c$; этой зависимостью мы пренебрегаем при вычислении поляризации среды):

$$\frac{\partial \varepsilon_0(x)}{\partial x} = i \frac{2\pi\omega_0 N |d|^2}{\hbar c \Omega} \varepsilon_0(x); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(\omega_k, x)}{\partial x} = i \frac{2\pi\omega_0 N}{c} \left\{ \chi^{(1)}(\omega_k, x) \varepsilon(\omega_k, x) + \chi^{(3)}(2\omega - \omega_k, x) \varepsilon_0^2(x) \varepsilon^*(2\omega - \omega_k, x) \right\},$$

где N — плотность числа атомов среды, $\Omega = (\Delta^2 + 4|d\varepsilon_0|^2/\hbar^2)^{1/2}$ — обобщенная частота Раби, $\Delta = \omega_0 - \omega$, $|\Delta| \ll \omega$, — расстройка резонанса с полем накачки, а функции $\chi^{(1)}, \chi^{(3)}(\omega_k, x)$ определяются выражениями

$$\chi^{(1)}(\omega_k, x) = \frac{|d|^2}{4\hbar} \left(\frac{(1 + \Delta/\Omega)^2}{\omega + \Omega - \omega_k - i0} - \frac{(1 - \Delta/\Omega)^2}{\omega - \Omega - \omega_k - i0} \right);$$

$$\chi^{(3)}(\omega_k, x) = \frac{|d|^4}{\hbar^3 \Omega^2} \cdot \left(\frac{1}{\omega - \Omega - \omega_k + i0} - \frac{1}{\omega + \Omega - \omega_k + i0} \right). \quad (3)$$

Бесконечно малые мнимые добавки в знаменателях функций (3) обусловлены включением взаимодействия с полем при $t \rightarrow -\infty$.

Уравнение для $\varepsilon(2\omega - \omega_k, x)$ получается из второго уравнения (2) заменой ω_k на „зеркальную“ частоту $2\omega - \omega_k$.

Первое уравнение (2) показывает, что интенсивность накачки при прохождении не меняется в сделанном приближении (потому что $\chi^{(1)}, \chi^{(3)}$ от x не зависят). Второе уравнение вместе с уравнением для $\varepsilon(2\omega - \omega_k, x)$ описывает параметрические эффекты; при этом функция $\chi^{(3)}(\omega_k)$ описывает связь слабого поля на частоте ω_k с полем на „зеркальной“ частоте.

Уравнения (2) получены другим путем и решены в работе (1). Они приводят к усилению слабого поля в области частот

$$|\omega - \omega_k| < \frac{2}{\hbar} |d\varepsilon_0|, \quad (4)$$

что качественно объясняется в (1) процессом испускания двух фотонов атомом в поле накачки. Выражения для вероятностей таких процессов получены в (2), где показано также, что параметрическое возникновение в среде излучения на «зеркальной» частоте обусловлено спонтанно-вынужденным испусканием двух фотонов.

Для установления количественной связи эффектов прохождения с вероятностями решим уравнения (2) для слабых полей приближенно, ограничиваясь членами порядка x^2 . Получим

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\omega_k, x)|^2 &= [1 - \alpha(\omega_k)x + (1/2)x^2(\omega_k)x^2] |\varepsilon(\omega_k, 0)|^2 + \\ &+ \frac{4\pi^2\omega^2 N^2}{c^2} x^2 |\varepsilon_0(0)|^4 \{ \text{Re}(\chi^{(3)}(2\omega - \omega_k) \chi^{(3)*}(\omega_k)) |\varepsilon(\omega_k, 0)|^2 + \\ &+ |\chi^{(3)}(2\omega - \omega_k)|^2 |\varepsilon(2\omega - \omega_k, 0)|^2 \} - \\ &- \frac{4\pi\omega N}{c} x \text{Im} \left\{ \left[1 + \frac{x}{2} \left(i\Delta k - \frac{x(2\omega - \omega_k) + 3\alpha(\omega_k)}{2} \right) \right] \chi^{(3)}(2\omega - \omega_k) \times \right. \\ &\left. \varepsilon_0^2(0) \varepsilon^*(\omega_k, 0) \varepsilon^*(2\omega - \omega_k, 0) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражении (5) введены обозначения

$$\alpha(\omega_k) = \frac{4\pi N \omega}{c} \operatorname{Im} \chi^{(1)}(\omega_k); \quad \Delta k = \frac{\omega}{c} [2n_0(\omega) - n(\omega_k) - n(2\omega - \omega_k)];$$

$$n(\omega_k) = 1 + 2\pi N \operatorname{Re} \chi^{(1)}(\omega_k); \quad n_0(\omega) = 1 + 2\pi N \frac{|d|^2}{\hbar \Omega}. \quad (6)$$

Величину $|\varepsilon(2\omega - \omega_k, x)|^2$ можно получить из (5) заменой $\omega_k \rightarrow 2\omega - \omega_k$. Коэффициент поглощения $\alpha(\omega_k)$ выражается через полученные в (3) поперечники процессов первого порядка на атоме в резонансном поле накачки—поглощения на частоте $\omega + \Omega$ и испускания на частоте $\omega - \Omega$:

$$\alpha(\omega_k) = N(\sigma_p - \sigma_T).$$

Рассмотрим теперь выражение (5) вдали от полюсов функций (3):

$$|\varepsilon(\omega_k, x)|^2 = |\varepsilon(\omega_k, 0)|^2 + \frac{3\pi^2 \hbar c}{\omega} N^2 x^2 (W + W') -$$

$$- \frac{4\pi \omega N}{c} x \chi^{(3)}(2\omega - \omega_k) |\varepsilon_0(0)|^2 |\varepsilon(\omega - \omega_k, 0)| |\varepsilon(2\omega - \omega_k, 0)| \times$$

$$\times \left(\sin \delta + \frac{\Delta k x}{2} \cos \delta \right), \quad (7)$$

где $\delta = 2\varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2$, а $\varphi_{0,1,2}$ — фазы комплексных амплитуд напряженности $\varepsilon_0(0)$, $\varepsilon(\omega_k, 0)$, $\varepsilon(2\omega - \omega_k, 0)$ соответственно; величина

$$W = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^2} |\chi^{(3)}(\omega_k)|^2 |\varepsilon_0(0)|^4 |\varepsilon(\omega_k, 0)|^2 \quad (8)$$

есть вероятность испускания двух фотонов атомом в поле накачки, спонтанного по фотону частоты $2\omega - \omega_k$ и вынужденного по ω_k . Вероятность W' отличается от (8) заменой $\omega_k \rightarrow 2\omega - \omega_k$.

Как видно из (7), прохождение излучения на некоторой частоте ω_k при малых длинах в среде определяется граничными условиями при $x=0$ и фазовыми соотношениями между падающими на среду волнами. Второе слагаемое в (7) определяет параметрическое усиление, пропорциональное $(Nx)^2$. Как видим, оно возникает в результате спонтанно-вынужденных процессов испускания двух фотонов. Количественная связь между усилением и вероятностью элементарного акта следует из (7): интенсивность на частоте $2\omega - \omega_k$, если на входе имеется монохроматическая слабая волна на частоте ω_k ($\varepsilon(\omega_k, 0) \neq 0$, $\varepsilon(2\omega - \omega_k, 0) = 0$), равна

$$|\varepsilon(2\omega - \omega_k, x)|^2 = \frac{3\pi^2 \hbar c}{\omega} (Nx)^2 W. \quad (9)$$

В случае, если слабое излучение представляет собой сплошной фон, независимый от излучения накачки и симметричный относительно частоты последней ($|\varepsilon(\omega_k, 0)| = |\varepsilon(2\omega - \omega_k, 0)|$), то необходимо усреднить (7) по случайной разности фаз δ , что приводит к выражению

$$|z(\omega_k, x)|^2 = |z(\omega_k, 0)|^2 + \frac{6\pi^2 c \hbar}{\omega} (Nx)^2 W'. \quad (10)$$

Если слабое поле представляет собой крылья спектра накачки, то учет когерентных свойств последней может существенно менять результат из-за вклада последнего члена в (7). Так, в случае $\tilde{\omega} = 2\pi$ (n — целое число) и при условии $|z(\omega_k, 0)| = |z(2\omega - \omega_k, 0)|$ имеем

$$|z(\omega_k, x)|^2 = |z(\omega_k, 0)|^2 + \frac{12\pi^2 \hbar c}{\omega} (Nx)^2 W' \left(1 - \frac{(\omega - \omega_k)^2 \hbar^2}{4|d\varepsilon_0(0)|^2} \right), \quad (11)$$

т. е. усиление в этом случае имеет место лишь в области (4).

В случае же $\tilde{\omega} \neq 2\pi n$ основным в (7) является член, линейный по x . Последний может приводить либо к усилению либо к ослаблению, в зависимости от знака $\sin \tilde{\omega}$ и от области частот.

Выражаем благодарность академику АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну за стимулирующие обсуждения.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Վ. Զ. ԶԱԼԻՆՅԱՆ

Հառադայթման տարածման էֆեկտները ռեզոնանսային
միջավայրում փոփոխականության դեպքում և դրանց կապը
տարրական պրոցեսների հետ

Դիտարկվում է հառադայթման տարածումը երկմակարդակ ատոմների միջավայրում, որը գտնվում է ուժեղ, ատոմների անցմանը ռեզոնանսային հառադայթման դաշտում: Ցույց է տրված պարամետրական էֆեկտների կապը առանձին ատոմի կողմից երկֆոտոն առաքման պրոցեսների հավանականությունների հետ և դիտարկված է ընկնող ալիքների միջև փոխային առընչությունների ազդեցությունը անցնող հառադայթման ուժեղացման վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. М. Арутюнян, Е. Г. Канецян, В. О. Чалтыкян, ЖЭТФ, т. 59, 195 (1970).
- ² Г. Ю. Крючков, В. Е. Мкртчян, М. Л. Тер-Микаелян и др., ЖЭТФ, т. 88, 30 (1985).
- ³ М. Л. Тер-Микаелян, А. О. Меликян, ЖЭТФ, т. 58, 285 (1970).

УДК 631.445:631.465

АГРОХИМИЯ

С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян

Активность ферментов различных фракций гумусовых кислот почвы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. К. Африкьяном 1/III 1985)

Ранее нами установлено, что основными носителями при иммобилизации внеклеточных ферментов в почве являются гумусовые вещества—гуминовые—ГК и фульвокислоты—ФК (^{1,2}). Поскольку гумусовые кислоты по формам связи с минеральной частью почвы подразделяются на различные фракции, то выявление закономерностей иммобилизации ферментов ими представляет определенный интерес.

Исследования проводили на каштановой карбонатной почве (А 0—16 см), среднесуглинистой, с содержанием гумуса 3,4%, pH 8,0, суммой обменных катионов 32,8 мэкв. Для выделения различных фракций гумусовых кислот взяли две навески почвы. Из первой навески обработкой 0,2 М раствором моноэтаноламина выделяли свободные и связанные с подвижными полуторными оксидами (R_2O_3) гуминовые кислоты и фульвокислоты (фракция 1). Вторую навеску подвергали декальцированию обработкой 0,1 н раствором серной кислоты. В кислотной вытяжке определяли свободные и связанные с подвижными R_2O_3 фульвокислоты (фракция 1а). Затем декальцированную почву обрабатывали 0,2 М раствором моноэтаноламина с целью выделения фракции гумусовых кислот, связанной с кальцием (фракция 2). Остаток почвы после выделения фракции 2 гумусовых кислот заливали 0,02 н раствором моноэтаноламина и нагревали на кипящей водяной бане в течение 6 ч для выделения гумусовых кислот, связанных с глинистыми минералами и устойчивыми R_2O_3 (фракция 3). При нагревании на водяной бане температура щелочной вытяжки не превышала 60°, поэтому тепловой инактивации ферментов не происходило (³).

Активность ферментов изучали в определенном объеме вытяжки различных фракций с учетом содержания в них препаратов гуминовых кислот и фульвокислот модифицированными нами методами (⁴), а также в негидролизуемых коллоидах и остатке почвы, выделенных методом получения чистых препаратов ГК и ФК (⁵). Активность инвертазы выражали в мг глюкозы на 1 г препарата, каталазы—см³ O₂ за мин на 1 г, амидаз—мг NH₃ на 1 г, нуклеотидаз—мг Р на 100 г препарата.

Исследования показали, что вторая фракция гуминовых кислот и фульвокислот обладает более высокой активностью инвертазы, чем первая и третья (таблица). В первой фракции ГК обнаружено 29,6% активности инвертазы, во второй—59,3, в третьей—4,1, а во фракциях ФК—19,9, 51,0 и 15,8% соответственно.

Негидролизуемые коллоиды и остаток почвы, по сравнению с ГК и ФК, обладают низкой активностью инвертазы, что согласуется с полученными нами ранее данными и свидетельствует о том, что основными носителями внеклеточных ферментов в почве являются гумусовые вещества.

Каталаза в отличие от инвертазы больше иммобилизуется первой фракцией гуминовых кислот и фульвокислот, чем второй. Ее активность в этой фракции составляет 40,9—53,5%. Следует отметить, что активность каталазы значительна также во фракции 1а фульвокислот (свободные и связанные с подвижными R_2O_3). По-видимому, каталаза больше иммобилизуется наиболее лабильными подвижными гумусовыми веществами почвы. Негидролизуемые коллоиды и остаток почвы не обладают активностью каталазы. Приведенные в таблице данные свидетельствуют о том, что каталаза полностью иммобилизована в гумусовых препаратах, причем препараты фульвокислот более активны, чем гуминовых кислот.

Активность ферментов различных фракций гумусовых кислот, выделенных из каштановой почвы

Препарат	Ф р а к ц и и															
	1а	1	2	3	1а	1	2	3	1а	1	2	3	1а	1	2	3
	Инвертаза				Каталаза				Уреаза				Глутаминаза			
ГК		12,8	25,6	4,8		32,6	18,3	10,0		12,1	9,6	5,8		20,4	30,6	41,3
ФК	3,2	4,8	12,3	3,8	20,1	40,0	28,3	9,4	3,2	5,2	7,0	3,1	7,1	19,4	36,2	49,3
Коллоиды		2,4	4,7	3,8		0,0	0,0	0,0		0,5	0,7	0,3		5,2	6,4	5,4
Остаток почвы		2,5	3,0	2,1		0,0	0,0	0,0		0,4	0,4	0,3		2,4	1,3	1,0
	Фосфатаза				АТФаза				АДФаза				АМФаза			
ГК		8,9	25,4	0,0		14,7	7,2	0,0		13,4	4,7	1,0		15,7	4,9	0,0
ФК	1,5	3,2	4,2	0,0	1,0	3,2	1,8	0,0	1,0	3,2	1,0	0,0	0,4	1,0	0,4	0,0
Коллоиды		0,2	0,1	0,0		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0
Остаток почвы		0,2	0,2	0,0		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0

Из амидаз высокую активность в свободной, связанной с подвижными R_2O_3 (1) и кальцием (2) фракциях гуминовых кислот и фульвокислот проявляет уреаза (таблица). В гуминовых кислотах первой фракции обнаруживается 44% ее активности, второй—34,9, в фульвокислотах—28,1 и 37,8% соответственно. Третья фракция гуминовых кислот и фульвокислот обладает сравнительно меньшей активностью уреазы (16,7—21,1%). Глутаминаза, наоборот, имеет высокую активность в третьей фракции гуминовых кислот и фульвокислот, связанной с глинистыми минералами и устойчивыми R_2O_3 (44,0—44,7%). Первая и вторая фракции ГК и ФК обладают меньшей активностью глутаминазы. Это, очевидно, обусловлено особенностями азотного режима каш-

тановых почв, а также необходимостью сохранения определенной части фермента в более прочной связи с третьей фракцией гуминовых кислот и фульвокислот.

Опыты показали, что первая и вторая фракции гуминовых кислот и фульвокислот обладают высокой активностью фосфатазы и нуклеотидаз—АТФазы, АДФазы и АМФазы (таблица). Третья фракция гумусовых кислот не обладает активностью указанных ферментов. Лишь очень низкая активность АДФазы обнаруживается в третьей фракции гуминовых кислот. Высокая активность фосфатазы и нуклеотидаз в первой и второй фракциях гуминовых кислот и фульвокислот, очевидно, обусловлена тем, что значительная часть фосфора в почве находится в органической форме и сосредоточена в этих фракциях. Поэтому при саморегуляции фосфорного режима почв иммобилизация и накопление фосфатаз и нуклеотидаз происходят в первой и второй фракциях гуминовых кислот и фульвокислот. Негидролизующие коллоиды и остаток почвы имеют очень низкую активность фосфатазы. Активность нуклеотидаз в них не обнаруживается. Следовательно, носителями фосфатаз и нуклеотидаз при их иммобилизации почвой являются гумусовые кислоты.

Таким образом, установлено, что при иммобилизации внеклеточных ферментов почвой происходит их закономерное распределение по различным фракциям гумусовых кислот. Это свидетельствует о согласованном механизме регуляции в почве процесса иммобилизации ферментов, которые осуществляют многочисленные реакции обмена веществ, приводящие к формированию плодородия.

Научно-исследовательский институт почвоведения
и агрохимии МСХ Армянской ССР

Ա. Ա. ՄԱՐԴԱՀԱՄԵԱՆ, Ա. Շ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Հողի հումուսաթթուների տարբեր ֆրակցիաների ֆերմենտների ակտիվությունը

Ուսումնասիրված է շագանակագույն հողի հումինաթթուների և ֆուլվոթթուների տարբեր ֆրակցիաների կողմից արտաբջջային ֆերմենտների իմունիդացումը: Այս նպատակով հողից անջատվել է հումինաթթվի երեք՝ ֆուլվոթթվի շորս ֆրակցիաներ: Ֆերմենտային ակտիվության որոշումից պարզվել է, որ գոյություն ունի նրանց օրինաչափ տարաբաշխումը ըստ առանձին ֆրակցիաների: Հողի կողմից առանձին խումբ ֆերմենտների իմունիդացումը նրանց տալիս է բարձր կայունություն:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян, ДАН АрмССР, т. 73, № 5 (1981). ² С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян, Докл. ВАСХНИЛ, № 5, 1982. ³ Д. С. Орлов, Л. А. Гришина, Практикум по химии гумуса, изд. МГУ, 1981. ⁴ С. А. Абрамян, А. Ш. Галстян, Биол. журн. Армении, т. 36, № 8 (1983). ⁵ М. М. Кеменова, Органическое вещество почвы, Наука, М., 1963.

