

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXXI, № 2

1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհ. գիտ. քննա-
ծու (պատ. ֆուրապուր), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ք. ԲԱՐԱՏՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԻՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ՓԱՍԼՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ քաղ. տնտես. վ. շ. ՀԱՄԱՐԱՆՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագր. տնտե-
կու), Վ. Գ. ՄԵՆՔԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քաղ.
տնտես. Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ծ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քաղ.
տնտես. Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԺԱՅԵՆԻՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН АрмССР (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН
АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.
АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,
академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-
ДЖЯН, академик АН АрмССР.



Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Տ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Է. Ա. Միրզախանյան—Հիբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի դասին պատկանող զծային սահմանափակ օպերատորների մասին	51
Ա. Ա. Սահակյան—Սահմանափակ Δ -վարիացիայի ֆունկցիաների մասին	54
Վ. Կ. Օհանյան—Հարթության վրա պոտանոնյան պրոցեսի կետերով առաջացած եռանկյունիների ձևերի մասին	59
Ս. Ա. Հայրապետյան—Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման գոյությունը բազմանդամային ածույ ֆունկցիոնալների դասում	64
Մ. Կ. Կյուրեղյան—Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների վերածկիությունը և անվերջանալի բազմանդամների սինթեզը	69
Ա. Վ. Կարաբեգով—Հիբերտ-Շմիդտի օպերատորների pq - և qp -սիմվոլների կոնստրուկցիան	74

ՀԻԳԻՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ն. Ն. Վերիգին, Վ. Ս. Սարգսյան—Գյուղատնտեսական կուլտուրաների ստորերկրյա ոռոգիչների մասին	77
---	----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ա. Ավետիսյան, Վ. Վ. Մինասյան, Ն. Խ. Նազարյան—ԻԱԳ:ՈԺ լազերի էրկրորդ հարմոնիկ ճառագայթումով զրգոված կարրոմիդ ավելացրած ոռոգամին 6Ժ-ի ջրային լուծույթների լյումինեսցենցիայի սպեկտրալ բնութագրերի հետազոտումը	82
--	----

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ս. Շ. Տեր-Ղազարյան—Կալնաթիվային բակտերիաների էկոլոգիան կախված բարձրակարգ բույսերի ֆլորայից	85
--	----

ԲՈՒՅՍԱՆԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Ի. Ա. Ղազարյան, Լ. Ա. Մեացականյան—Բույսերի տրամատներում և տերևներում ֆիզիոլոգիական ակտիվ նյութերի պարունակության վրա լույսի ինտենսիվության ու որակի ազդեցության մասին	89
---	----

ՄԻՋԱՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ա. Վարդիկյան—Երկրաչափ թիվիների նոր տեսակ <i>Semiothisa Hübner</i> սեռից (Lepidoptera, Geometridae) հայկական ՍՍՀ-ից	94
---	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян—О линейных ограниченных операторах, принадлежащих одному классу непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства	51
А. А. Саакян—О функциях ограниченной Λ -вариации	54
В. К. Оганян—О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости	59
С. А. Айрапетян—О существовании решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе функционалов полиномиального роста	64
М. К. Кюрегян—Разложение полиномов и синтез неприводимых полиномов над конечными полями	69
А. В. Карабегов—Конструкция q - и q -символов операторов Гильберта-Шмидта	74

ГИДРОДИНАМИКА

Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян—О действии подземных оросителей сельскохозяйственных культур	77
--	----

ФИЗИКА

В. А. Аветисян, В. В. Минасян, Е. Х. Назарян—Исследование спектральных характеристик люминесценции водных растворов родамина 6Ж с добавкой карбамида при возбуждении излучением второй гармоники ИАГ: Nd лазера	82
---	----

МИКРОБИОЛОГИЯ

С. Ш. Тер-Казарьян—Экология молочнокислых бактерий в связи с флорой высших растений	85
---	----

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. О. Казарян, И. А. Казарян, Л. А. Мнацаканян—О влиянии интенсивности и качества света на содержание физиологически активных веществ в листьях и корнях растений	89
---	----

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. А. Вардиакян—Новый вид пяденицы из рода <i>Semiothisa</i> Hübner (Lepidoptera, Geometridae) из Армянской ССР	94
---	----

CONTENTS

MATHEMATICS

P.

- E. A. Mirzakhanian*—On linear bounded operators belongind to a class of continuous maps of subsets of Hibbert space 51
- A. A. Sahakian*—On the functions of Λ -bounded variation 54
- V. K. Ohanian*—On triangle shapes formed by points of a Poisson process in the plane. 59
- S. A. Hairapetian*—On the existence of the solution of nonhomogenous differential equations with constant coefficients in the class of functionals of the polynomial growth. 64
- M. K. Kourehian*—Decomposition of polynomials and the synthesis of irreducible polynomials over finite fields. 69
- A. Karabegov*—Construction of pq - and qp -symbols of Hilbert—Shmidt operators 74

HYDRODYNAMICS

- N. N. Verighin, V. S. Sarkisian*—Operation of underground irrigation systems 77

PHYSICS

- V. A. Avetisian, V. V. Minassian, Y. Ch. Nazurian*—The investigation of spectral characteristics of luminescence of water solutions of rhodamin 6G with addition of carhamid in case of excitation by second harmonic radiation of YAG:Nd laser 82

MICROBIOLOGY

- S. Sh. Ter-Kazarian*—The ecology of lactic acid bacteria in relation to the flora of higher plants. 85

PLANT PHYSIOLOGY

- V. O. Kazarian, I. A. Kazarian, L. A. Mnatsakanian*—On the influence of intensivity and quality of the light on the contents of physiological active substances in plant leaves and roots 89

ENTOMOLOGY

- A. S. Vardikian*—A new Geometrid — species of the genus *Semiothisa* Hübner (Lepidoptera, Geometridae) from Armentan SSR. 94

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 17.06.1985 г. Подписано к печати 21.11.1985 г. ВФ 06891

Бумага № 2, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-изд. л. 3,28, Тираж 430. Заказ 491. Издат. 6605.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эмнадзин.

Э. А. Мирзаханиян

О линейных ограниченных операторах, принадлежащих одному классу непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1983)

В статье приводятся некоторые результаты исследования линейных ограниченных операторов, принадлежащих введенному В. Г. Болтянским классу K_0 непрерывных отображений $f: M \rightarrow H$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H . Определение и доказательства ряда основных свойств класса K_0 содержатся в (1). Ряд других свойств отображений класса K_0 содержится в (2,3).

Приведем (упрощенное) определение класса K_0 .

Пусть G — открытое подмножество пространства H и $f: G \rightarrow H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0 , если выполнены следующие условия:

1) f локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всякой точки $x_0 \in G$ существуют такие $r > 0$ и $c > 0$, что при $x, y \in G$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - x_0\| < r$ выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|;$$

2) для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\epsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H , конечномерное подпространство $L \subset H$ и действительное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L , то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \epsilon \|x - y\|.$$

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\epsilon > 0$. В этом случае число λ однозначно определяется точкой $x_0 \in G$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_{x_0}(x)$, заданная на G , непрерывна и единственна; она называется терминальной производной отображения f .

Пусть теперь M — произвольное подмножество пространства H и $f: M \rightarrow H$ — непрерывное отображение; будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0 , если существует открытое в H подмножество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \rightarrow H$ такое, что $g \in K_0$ и $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Приведем теперь ряд свойств линейных ограниченных операторов $f: H \rightarrow H$, принадлежащих классу K_0 .

Предложение 1. Терминальная производная $\lambda_f(x)$ линейного ограниченного оператора $f: H \rightarrow H$, принадлежащего классу K_0 , является постоянной функцией на всем H .

Общее значение постоянной функции $\lambda_f(x)$ будем называть терминальным числом линейного ограниченного оператора f и обозначать символом λ_f .

Предложение 2. Пусть $f: H \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, принадлежащий классу K_0 , тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $|\lambda_f| \leq \|f\|$;
- 2) если f инъективен и обратный оператор f^{-1} ограничен, то $|\lambda_f| = \|f\|$;
- 3) если оператор f биективен, то обратный оператор f^{-1} принадлежит классу K_0 , причем $\lambda_{f^{-1}} = \frac{1}{\lambda_f}$.

Следствие 1. Линейный гомеоморфизм пространства H на себя, принадлежащий классу K_0 , является K_0 -гомеоморфизмом, т. е. гомеоморфизмом в классе K_0 .

Замечание 1. Множество всех линейных K_0 -гомеоморфизмов является подгруппой группы всех K_0 -гомеоморфизмов пространства H .

Предложение 3. Всякий конечномерный линейный ограниченный оператор $f: H \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 и его терминальное число λ_f равно нулю.

Следствие 2. Для того чтобы линейный ограниченный оператор $f: H \rightarrow H$ принадлежал классу K_0 , необходимо и достаточно, чтобы композиция $q \circ f$ или $f \circ q$ принадлежала классу K_0 для некоторого ортогонального проектора $q: H \rightarrow M$ пространства H на замкнутое подпространство M конечного дефекта относительно H .

Предложение 4. Пусть $f: H \rightarrow H$ такой линейный ограниченный оператор, для которого выполнено условие: для всякого $\varepsilon > 0$ существует линейный ограниченный оператор $f_\varepsilon: H \rightarrow H$, принадлежащий классу K_0 и удовлетворяющий соотношению $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Тогда оператор f принадлежит классу K_0 .

Следствие 3. Множество всех линейных ограниченных операторов $f: H \rightarrow H$, принадлежащих классу K_0 , замкнуто в пространстве всех линейных ограниченных операторов пространства H в себя с равномерной метрикой $\rho(fg) = \|f - g\|$.

Предложение 5. Пусть линейный ограниченный оператор $f: H \rightarrow H$ является пределом (по норме) последовательности линейных ограниченных операторов $f_n: H \rightarrow H$, принадлежащих классу K_0 , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Тогда

- 1) $f \in K_0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{f_n} = \lambda_f$.

Следствие 4. Всякий линейный вполне непрерывный опера-

тор $f: H \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 и его терминальное число λ_f равно нулю. Более того, если $g: H \rightarrow H$ произвольный линейный ограниченный оператор, то операторы $g \circ f$ и $f \circ g$ принадлежат K_0 и $\lambda_{g \circ f} = \lambda_{f \circ g} = 0$.

Предложение 6. Пусть $f: H \rightarrow H$ — унитарный оператор, принадлежащий классу K_0 , а $g: H \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор. Тогда если композиция $h = g \circ f: H \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_h \neq 0$, то оператор $g \in K_0$ и $|\lambda_g| = |\lambda_h|$.

Замечание 2. Предыдущее предложение остается справедливым, если линейный ограниченный оператор g заменить любым отображением $g: H \rightarrow H$, локально удовлетворяющим условию Липшица.

Предложение 7. Пусть $f: H \rightarrow H$ — унитарный оператор и $g: H \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, принадлежащий классу K_0 , причем $|\lambda_g| = 1$. Тогда если композиция $h = g \circ f: H \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 , то и оператор $f \in K_0$ и $|\lambda_f| = |\lambda_h|$.

Следствие 5. Если композиция двух унитарных операторов $f, g: H \rightarrow H$ и один из этих операторов принадлежит K_0 , то и другой оператор принадлежит классу K_0 .

Замечание 3. Утверждение предложения 7 остается справедливым, если в нем оператор g заменить любым отображением $g: H \rightarrow H$, принадлежащим классу K_0 и удовлетворяющим условию $|\lambda_g(x)| = 1$ для каждой точки $x \in H$.

Ереванский государственный
университет

Է. Ա. ՄԻՐՉԱԽԱՆՅԱՆ

Հիբրետյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի դասին պատկանող գծային սահմանափակ օպերատորների մասին

Հոդվածում րերվում են իրական սեպարարել H հիբրետյան տարածության և ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված K_0 դասին պատկանող գծային օպերատորների հետազոտման մի քանի արդյունքներ:

Մասնավորապես պարզվում է, որ յուրաքանչյուր գծային լիովին անընդհատ $f: H \rightarrow H$ օպերատոր պատկանում է K_0 դասին, ընդ որում f օպերատորի λ_f թերմինալ թիվը հավասար է զրոյի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Г. Болтянский, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 2 (1974). ² В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). ³ Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 5 (1980). ⁴ Դ. А. Лустерник, В. Н. Соболев, Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.

УДК 517.518.24

МАТЕМАТИКА

А. А. Саакян

О функциях ограниченной Λ -вариации

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 9/II 1984)

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность чисел такая, что

$$1 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \quad (1)$$

Скажем, что функция $f(x)$ имеет ограниченную Λ -вариацию на отрезке $[a, b]$ ($f \in \Lambda BV$), если

$$V_{\Lambda}(f, [a, b]) = \sup \sum_n \frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{\lambda_n} < \infty, \quad (2)$$

где $\sup$ берется по всевозможным наборам непересекающихся интервалов $(a_n, b_n) \subset (a, b)$ (см. (1)). Через $V_{\Omega\Lambda}(f, [a, b])$ обозначим $\sup$ в (2) при дополнительном условии, что $b_n \leq a_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, или $b_{n+1} \leq a_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, а через $\Omega\Lambda BV$ (функции ограниченной упорядоченной Λ -вариации) — пространство функции $f(x)$ с $V_{\Omega\Lambda}(f, [a, b]) < \infty$. В частности, когда $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \dots$ вместо ΛBV и $\Omega\Lambda BV$ пишут HBV (функции ограниченной гармонической вариации) и $OHNV$ соответственно.

Д. Ватерман (см. (1)) доказал, что если функция $f \in C(0, 2\pi)$ $f(0) = f(2\pi)$ принадлежит HBV , то $f \in UGW$, где UGW — пространство функций $f(x)$, которых ряд Фурье по тригонометрической системе суперпозиции $f \circ \tau(x)$ равномерно сходится на $[0, 2\pi]$ при любом гомеоморфизме $\tau(x)$ отрезка $[0, 2\pi]$, и поставил вопрос (см. (2-4)): справедливо ли обратное включение $UGW \subset HBV$? Было неизвестно также (см. (2) и (5)), справедливо ли равенство

$$\Lambda BV = \Omega\Lambda BV? \quad (3)$$

В работе (6) доказано, что непрерывная, 2π -периодическая функция $f \in UGW$ тогда и только тогда, когда

$$V_{\Omega\Lambda}(f, [x, y]) \rightarrow 0 \text{ при } |x - y| \rightarrow 0. \quad (4)$$

В частности, $UGW \subset OHNV$. К. Белна (см. (7)) доказал, что ответ на вопрос (3) в случае, когда $\Lambda = H$, отрицателен, более того, существует непрерывная 2π -периодическая функция $f \in OHNV \setminus UGW$ (см. также (4)).

В настоящей статье доказывается следующая

Теорема. Для произвольной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

вида (1) существует функция $f \in C(0, 1)$ с $f(0)=f(1)$ такая, что
 а) $f \in OABV \setminus ABV$; б) $V_{0A}(f, |x, y|) \rightarrow 0$ при $|x-y| \rightarrow 0$.

Следствие (см. (4)). $UGW \setminus HBV \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме, которая является обобщением леммы из работы (7).

Лемма. Для произвольной последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ вида (1) и любых чисел $\varepsilon \in (0, 1)$, $M, N=1, 2, \dots$ существуют числа $1 \geq A_{N+1} \geq A_{N+2} \geq \dots \geq A_{N+S} > 0$ такие, что

$$1) \sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_n} \geq 1; \quad \sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_{n-N}} \leq 2$$

$$2) \sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_{N+s+1-n}} \leq \varepsilon, \quad s=1, 2, \dots, S; \quad 3) \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{A_n}{\lambda_{n-N}} \leq \varepsilon.$$

Доказательство леммы. Построим по индукции последовательности чисел $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ и номеров $\{N_k\}_{k=0}^\infty$ такие, что

$$1 \geq \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots, \quad N=N_0 < N_1 < \dots, \quad N_1 > 2N+M \quad \text{и} \quad (5)$$

$$\alpha) \sum_{n=1}^{N_{k-1}} \frac{1}{\lambda_{N_k-N_{k-1}+n}} \leq \varepsilon \cdot 2^{-k}; \quad \beta) \theta_k \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\varepsilon}{8};$$

$$\gamma) \theta_k \sum_{n=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad k=1, 2, \dots$$

Положим $N_0=N$ и выберем число $N_1 > 2N+M$ так, чтобы $A = \sum_{n=N+1}^{N_1} \frac{1}{\lambda_n} > N_0$. Очевидно, что при $k=1$ условия $\alpha)$ – $\gamma)$ выполняются с $\theta_1 = \varepsilon/8A$. Предположим, что построены числа $\theta_i, N_i, i=1, 2, \dots, k-1$; построим θ_k и N_k . Учитывая (1), выберем число $N_k > N_{k-1}$ так чтобы имели место $\alpha)$ и неравенство

$$B = \theta_{k-1} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_n} > 1.$$

Положим $\theta_k = \theta_{k-1} \varepsilon/8B$. Выполнение условий $\beta)$ и $\gamma)$ вытекает из определения θ_k и из индукционного предположения.

Последовательности $\{\theta_k\}$ и $\{N_k\}$ со свойствами (5) и $\alpha)$ – $\gamma)$ построены. Положим

$$A_n = \theta_k \quad \text{при} \quad N_{k-1} < n \leq N_k, \quad k=1, 2, \dots, k_0; \quad k_0 = \left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil + 1; \quad S = N_{k_0} - N \quad (6)$$

и проверим выполнение условий 1)–3). Согласно (6) и $\beta)$

$$\sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \theta_k \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\varepsilon}{8} \cdot k_0 \geq 1.$$

Учитывая монотонность A_n , из $\gamma)$, (6) и (7) находим, что

$$\sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_{n-N}} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\theta_1}{\lambda_{n-N}} + \sum_{n=2N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_{n-N}} \leq$$

$$\leq \theta_1 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} + \sum_{n=N+1}^{N+S} \frac{A_n}{\lambda_n} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} k_0 \leq 2.$$

Докажем условие 2). Пусть $s=1, 2, \dots, S$, а число $k=0, 1, \dots, k_0-1$ такое, что $N_k < N+s \leq N_{k+1}$. Тогда из α), γ) и (6) мы получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{N+s} \frac{A_n}{\lambda_{N+s+1-n}} &= \sum_{i=1}^k \theta_i \sum_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{N+s+1-n}} + \theta_{k+1} \sum_{n=N_{k+1}}^{N+s} \frac{1}{\lambda_{N+s+1-n}} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \sum_{n=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{N_{i+1}-N_i+n}} + \theta_k \sum_{n=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_n} + \theta_{k+1} \sum_{n=1}^{N_{k+1}} \frac{1}{\lambda_n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, согласно (5) и γ)

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{A_n}{\lambda_{n-N}} = \theta_1 \sum_{n=1}^M \frac{1}{\lambda_n} \leq \theta_1 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\lambda_n} \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Построим по индукции последовательности натуральных $\{N_k, M_k\}_{k=0}^{\infty}$ и неотрицательных $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ чисел такие, что для любого $k=1, 2, \dots$ выполняются условия 1)–3) с

$$N=N_{k-1}, S=N_k-N_{k-1}, M=M_{k-1}, \varepsilon=2^{-k}, \quad (8)$$

а также неравенство

$$\sum_{n=1}^{N_k} \frac{A_n}{\lambda_{M_k+n}} \leq 2^{-k}. \quad (9)$$

Положим $N_0=0, N_1=1, M_0=0, A_1=1/2$. При $k=1$ выполнение условий 1)–3) (с условием (8)) и (9) очевидно. Предположим теперь, что построены числа $N_i, M_i, i=0, 1, \dots, k-1$ и $A_n, n=1, 2, \dots, N_{k-1}$. Для построения чисел N_k, M_k и $A_n, N_{k-1} < n \leq N_k$ применим лемму для $N=N_{k-1}, M=M_{k-1}, \varepsilon=2^{-k}$ и положим $N_k=N_{k-1}+S$, затем, учитывая, что $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (см. (1)), найдем число $M_k > M_{k-1}$ так, чтобы выполнялось (9).

Теперь построим функцию $f(x)$, удовлетворяющую требованиям теоремы. Для $k=1, 2, \dots$ выберем интервалы $\Delta_n=(\alpha_n, \beta_n), n=N_{k-1}+1, \dots, N_k$ такие, что

$$\frac{1}{k+1} = \alpha_{N_{k-1}+1} < \beta_{N_{k-1}+1} < \alpha_{N_{k-1}+2} < \dots < \beta_{N_k} < \frac{1}{k},$$

и положим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0, 1, \alpha_n, n=1, 2, \dots \\ \frac{A_n}{k} & \text{при } x=\beta_n, N_{k-1} < n \leq N_k, k=1, 2, \dots \\ \text{линейна на отрезках } [\alpha_n, \beta_n], N_{k-1} < n \leq N_k, \\ [\beta_n, \alpha_{n+1}], N_{k-1} < n < N_k \text{ и на } \left[\beta_{N_k}, \frac{1}{k}\right], k=1, 2, \dots \end{cases}$$

Согласно 1) (с условием (8)), мы имеем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{A_n}{\lambda_n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

следовательно $f \notin BV$. Так как для любого $\delta \in (0, 1)$ функция $f(x)$ аб-

солютно непрерывна на отрезке $[2, 1]$, то теорема будет доказана, если мы докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{\phi_k} \left(f, \left[0, \frac{1}{k} \right] \right) = 0. \quad (10)$$

Фиксируем $k_0 = 1, 2, \dots$ и оценим $V_{\phi_k} \left(f, \left[0, \frac{1}{k_0} \right] \right)$. Легко видеть, что для этого достаточно рассмотреть суммы вида

$$I = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{f(\Delta_{n_i})}{i_i}; \quad \Delta_{n_i} \subset \left(0, \frac{1}{k_0} \right), \quad (f(\Delta_{n_i}) = f(\beta_{n_i}) - f(\alpha_{n_i})),$$

где $\beta_{n_{i+1}} < \alpha_{n_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$, или $\alpha_{n_{i+1}} > \beta_{n_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$. Пусть

$$\Omega_k = \left\{ i : \Delta_{n_i} \subset \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right) \right\}$$

и T_k — число элементов Ω_k , $k = k_0, k_0 + 1, \dots$. Рассмотрим два случая:

А) $\beta_{n_{i+1}} < \alpha_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$. Тогда, учитывая неравенство 1) (с условием (8)) и монотонность чисел A_n при $N_{k-1} < n \leq N_k$, получим

$$I = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{i \in \Omega_k} \frac{f(\Delta_{n_i})}{i_i} < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k-1+T_k} \frac{A_n}{i_{N_{k-1}+T_k+1-n}} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-k_0+1}.$$

Б) $\alpha_{n_{i+1}} > \beta_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, i_0 - 1$. Если для всех $k \geq k_0$ число $T_k \leq M_{k-1}$, то из 3) (с условием (8)) находим, что

$$I < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{T_k} \frac{A_{N_{k-1}+n}}{i_n} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot 2^{-k} \leq 2^{-k_0+1}.$$

Предположим теперь, что $T_k > M_{k-1}$ для некоторого номера $k \geq k_0$, и пусть k' — наибольший среди таких номеров. Тогда согласно 1) (с условием (8)) и (9)

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=k_0}^{k'-1} \frac{1}{k} \sum_{i \in \Omega_k} \frac{A_{n_i}}{i_i} + \frac{1}{k'} \sum_{i \in \Omega_{k'}} \frac{A_{n_i}}{i_i} + \sum_{k=k'+1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i \in \Omega_k} \frac{A_{n_i}}{i_i} \leq \\ &< \sum_{k=k_0}^{k'-1} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N_k} \frac{A_n}{i_{M_{k-1}+n}} + \frac{1}{k'} \sum_{n=N_{k'-1}+1}^{N_{k'}} \frac{A_n}{i_{N_{k'-1}}} + \\ &+ \sum_{k=k'+1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{M_{k-1}} \frac{A_{N_{k-1}+n}}{i_n} \leq \sum_{k=k_0}^{k'-1} 2^{-k} + \frac{2}{k'} + \sum_{k=k'+1}^{\infty} 2^{-k} \leq 2^{-k_0+1} + \frac{2}{k_0}. \end{aligned}$$

Равенство (10), а следовательно, и теорема доказаны.

Սանճանագրական Λ -վարիացիայի ֆունկցիաների մասին

Աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Կամայական $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ նաջորդականության համար գոյություն ունի անընդմեա ֆունկցիա $f(x) \in C(0, 1)$, $f(0) = (1)$ անպիսին, որ
 ա) $f \in O\Lambda BV \setminus \Lambda BV$; բ) $V_{O\Lambda}(f, [x, y]) \rightarrow 0$, երբ $|x - y| \rightarrow 0$.

Հետևանք. $UGW \setminus HBV \neq \emptyset$, որտեղ UGW -ն անպիսի $f \in C(0, 2\pi)$ ֆունկցիաների տարածությունն է, որոնց համար $f \circ \tau(x)$ սուպերպոզիցիայի ծուրլի շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $[0, 2\pi]$ հատվածի վրա $[0, 2\pi]$ հատվածի կամայական $\tau(x)$ համեմորֆիզմի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ D. Waterman, Studia Math., v. 44, № 2 (1972). ² D. Waterman, Studia Math., v. 57, № 1 (1976). ³ D. Waterman, Real analysis Exchange, v. 5, № 1 (1979—80). ⁴ D. Waterman, Proc. Amer. Math. Soc., v. 80, № 3 (1980). ⁵ D. Waterman, Real analysis Exchange, v. 4 (1978—79). ⁶ A. Baernstein, D. Waterman, Indiana Univ. Math. J., v. 22, № 6 (1972). ⁷ C. Belna, Proc. Amer. Math. Soc., v. 80, № 3 (1980).

УДК [514.112.3:514.757]-519.212.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Оганян

О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 13/II 1984)

В задачах статистического исследования форм случайных треугольников (шейпов), образованных точками реализаций точечных процессов на плоскости, требуется иметь подходящие стандартные распределения вероятностей в пространстве шейпов. Одно такое распределение предложено в (1). Его можно использовать при проверке статистической гипотезы о том, что наблюдаемые шейпы соответствуют шейпам пуассоновского точечного процесса, управляемого плоской мерой Лебега. Это распределение получаем при факторизации меры $dQ_1 \cdot dQ_2 \cdot dQ_3$ (dQ_i — плоские меры Лебега, $i=1, 2, 3$) с выделением кинематической меры dK и меры $h^3 \cdot dh$ в пространстве периметров:

$$dQ_1 \cdot dQ_2 \cdot dQ_3 = dK \cdot h^3 \cdot dh \cdot d\sigma,$$

где $d\sigma$ некоторая мера в пространстве шейпов.

Обозначим через ξ_i , $i=1, 2, 3$, внутренние углы треугольника. Зафиксируем отрезок τ и через его концы проведем две прямые под углами x и y . За исключением случая параллельных прямых эта конструкция определяет треугольник. Имеем (рис. 1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x, \quad \xi_2 = y, \quad \text{если } x + y < \pi; \\ \xi_1 &= \pi - x, \quad \xi_2 = \pi - y, \quad \text{если } x + y > \pi. \end{aligned}$$

Форма треугольника задается с помощью углов x и y , а пространство шейпов Ω можно отождествить с квадратом $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

В (1) показано, что элемент меры $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)}{(\sin x + \sin y + \sin(x+y))^4} dx \cdot dy. \quad (1)$$

В работе (2) была поставлена задача нахождения совместной интегральной функции распределения углов ξ_1, ξ_2, ξ_3 , соответствующая плотности (1). Отметим также, что мера (1) рассматривалась в работе (3), где было найдено значение ее интеграла по всему пространству Ω :

$$\sigma(\Omega) = \frac{\pi}{21}.$$

Основной целью настоящей заметки является нахождение совместного распределения ξ_1, ξ_2, ξ_3 углов случайного треугольника (см. формулу (2)). В частности, выписаны распределения минимального, максимального углов, одномерное маргинальное распределение, для

последнего проверено, что $M\xi_l = \frac{\pi}{3}$, $l = 1, 2, 3$. (M — знак математического ожидания). В конце заметки приводятся численные значения распределений $P(\xi_l > x)$, $P(\min_{l=1,2,3} \xi_l > x)$, $P(\max_{l=1,2,3} \xi_l < x)$.

Аналогичная задача для другой меры на Ω рассматривалась в (4).

Определим вероятность P в пространстве Ω с помощью соотношения $dP = \frac{21}{\pi} d\sigma$. Найдём совместное распределение углов треугольника. Обозначим через $\xi_l > a_l$ событие, состоящее в том, что l -тый угол больше a_l , $l = 1, 2, 3$. Легко убедиться, что

$$P(\xi_1 > a_1 \cap \xi_2 > a_2 \cap \xi_3 > a_3) = \frac{42}{\pi} \int_{a_1}^{\pi - a_1 - a_2} dy \int_{a_1}^{\pi - a_1 - a_2 - y - a_2} \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)}{(\sin x + \sin y + \sin(x+y))^4} dx$$

(область интегрирования показана на рис. 2).

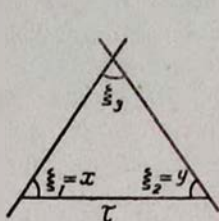


Рис. 1

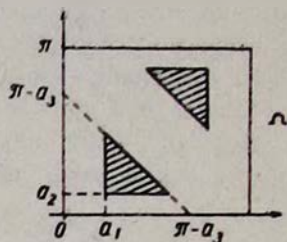
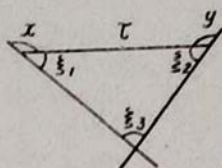


Рис. 2

Этот интеграл можно посчитать с помощью следующего преобразования подынтегральной функции

$$\frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)}{(\sin x + \sin y + \sin(x+y))^4} = \frac{1}{32} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} \times \\ \times \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right)^3}$$

и заменой переменной $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = u$.

Получаем

$$P(\xi_1 > a_1 \cap \xi_2 > a_2 \cap \xi_3 > a_3) = \frac{21}{4 \cdot \pi} \int_{\operatorname{tg} \frac{a_1}{2}}^{\operatorname{Ctg} \frac{a_1 + a_2}{2}} u(1+u^2) du \cdot \int_{\operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}^{\frac{1-u \cdot \operatorname{tg} \frac{a_1}{2}}{u + \operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}} z(1+z^2) \cdot \frac{1-u \cdot z}{(u+z)^3} dz.$$

Во внутреннем интеграле интегрируется дробно-рациональная функция от z , ее первообразная легко находится. После подстановки пределов интегрирования мы получаем снова дробно-рациональные

функции от u , а также интеграл вида $\int P(u) \cdot \ln \frac{(u + \operatorname{tg} \frac{a_1}{2})(u + \operatorname{tg} \frac{a_2}{2})}{1 + u^2} du$, где $P(u)$ — многочлен 6-ой степени от u . Последний интеграл вычисляется с помощью интегрирования по частям.

Результат имеет вид:

$$P(\xi_1 > a_1 \cap \xi_2 > a_2 \cap \xi_3 > a_3) = 1 - \frac{21}{\pi} \sum_{i=1}^3 a_i - \frac{21}{\pi} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{3}{14} b_i^7 + \frac{1}{2} b_i^5 + \frac{1}{3} b_i^3 \right) \cdot \ln \frac{(b_i + b_s)(b_i + b_l)}{1 + b_i^2} + \frac{21}{\pi} \left[\sum_{i < j} b_i b_j - 1 \right] \cdot [B_5(b_1, b_2, b_3) + B_3(b_1, b_2, b_3) + (2) + B_1(b_1, b_2, b_3)] - \frac{21}{\pi} \left[\sum_{i < j} b_i \cdot b_j - 1 \right]^3 \cdot \sum_{i < j} \frac{b_i \cdot b_j}{b_i + b_j}; \quad \text{при } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 a_i \leq \pi.$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^3 \{\xi_i > a_i\}\right) = 0, \text{ если } \exists_i a_i < 0, \text{ или } a_i \geq 0, \text{ но } \sum_{i=1}^3 a_i > \pi, \text{ где } b_i = \operatorname{tg} \frac{a_i}{2}, i = 1, 2, 3, s \neq i, s \neq l, l \neq i, B_k(x_1, x_2, x_3) \text{ — симметричные полиномы } k\text{-ой степени, } k = 1, 3, 5, B_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l+m+n=k} c_{lmn} x_1^l x_2^m x_3^n, \text{ которые определяются заданием коэффициентов } c_{lmn}:$$

$$c_{500} = \frac{3}{14}, \quad c_{410} = -\frac{3}{28}, \quad c_{320} = \frac{1}{14}, \quad c_{221} = \frac{27}{56}, \quad c_{311} = \frac{1}{28},$$

$$c_{300} = \frac{11}{28}, \quad c_{210} = -\frac{5}{28}, \quad c_{111} = -\frac{37}{56}, \quad c_{100} = \frac{13}{84}.$$

Из формулы (2) следует (при $a_1 = a_2 = a_3 = x$), что

$$P(\min_{i=1,2,3} \xi_i > x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]; \\ 0, & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\varphi(x) = 1 - \frac{3x}{\pi} - \frac{21}{\pi} \left(\frac{9}{14} b^7 + \frac{3}{2} b^5 + b^3 \right) \cdot \ln \frac{4b^2}{1+b^2} + \frac{3}{16 \cdot \pi} (99b^7 + 159 \cdot b^5 + + 29b^3 - 31 \cdot b); \quad b = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Также из формулы (2) после некоторых преобразований следует, что

$$P(\max_{i=1,2,3} \xi_i < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ \varphi(x), & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ 1 - 3 \cdot P(\xi_i > x), & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad (4)$$

$$P(\xi_i > x) = 1 - \frac{x}{\pi} - \frac{21}{\pi} \left(\frac{3}{14} b^7 + \frac{1}{2} b^5 + \frac{1}{3} b^3 \right) \cdot \ln \frac{b^2}{1-b^2} -$$

$$-\frac{3}{\pi}\left(\frac{3}{2}b^5+\frac{11}{4}b^3+\frac{13}{12}b\right); \quad x \in [0, \pi]. \quad (5)$$

Наконец, покажем, что $M\xi_i = \frac{\pi}{3}$. Интегрируя (5), получаем

$$M\xi_i = \int_0^{\pi} P(\xi_i > x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+z)}{z(1+z)} dz.$$

Вычислим последний интеграл, сделав замену переменных $\ln(1+z) = t$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+z)}{z(1+z)} dz = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^t + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, $M\xi_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, что можно было бы предвидеть,

так как $\sum_{i=1}^3 \xi_i = \pi$ и ξ_i одинаково распределены. Приведем таблицы значений $P(\xi_i > x)$, $P(\min_{i=1,2,3} \xi_i > x)$ и $P(\max_{i=1,2,3} \xi_i < x)$ для некоторых значений x :

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$P(\xi_i > x)$	1	0,7957	0,7606	0,7366	0,7089	0,6324	0,5778	0,5055	0,4063

$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
0,3644	0,3266	0,2923	0,2610	0,2055	0,1572	0,1143	0,0868	0,0661	0

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$x > \frac{\pi}{3}$
$P(\min_{i=1,2,3} \xi_i > x)$	1	0,6489	0,5936	0,4327	0,3779	0,2394	0,1536	0,05895	0

x	$x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$P(\max_{i=1,2,3} \xi_i < x)$	0	0,0146	0,0584	0,1289	0,2169	0,3835	0,5285	0,657	0,7396	0,8017	1

Ереванский государственный университет

**Հարթության վրա պոտասոնյան պրոցեսի կետերով առաջացած
եռանկյունիների ձևերի մասին**

Հարթության վրա կետային պրոցեսների իրագործումների կետերով առաջացած պատահական եռանկյունների ձևերի (շեյպեր) վիճակագրական ուսումնասիրության խնդիրներում անհրաժեշտ է շեյպերի տարածության մեջ ունենալ հավանականությունների հարմար ստանդարտ բաշխումներ: Այդպիսի մի բաշխում առաջարկվել է ⁽¹⁾-ում: Այն կարելի է օգտագործել հետևյալ հիպոթեզը ստուգելիս՝ դիտվող շեյպերը համապատասխանում են հարթ լեբեգի չափով դեկավարվող պոտասոնյան կետային պրոցեսի շեյպերին:

Նշանակենք ξ_i -ով $i=1, 2, 3$ եռանկյան ներքին անկյունները:

Այս հոդվածի հիմնական նպատակն է գտնել ξ_1, ξ_2, ξ_3 անկյունների համատեղ բաշխումը (տես (2) բանաձևը): Մասնավորապես, գուրս են դրվել փոքրագույն և մեծագույն անկյունների բաշխումները (տես (3) ու (4) բանաձևերը) և միաչափ մարդիմալ բաշխումը ((5) բանաձևը): Հոդվածի վերջում բերվում են $P(\xi_i > x)$, $P(\min_{i=1,2,3} \xi_i > x)$ և $P(\max_{i=1,2,3} \xi_i < x)$ բաշխումների

թվային արժեքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ R. V. Ambartsumian, in: Teubner Texte zur Mathematik, v. 65 (1984). ² R. V. Ambartsumian, Swed. Univ. of Agr. Sc. Umea, p. 35-41, 1982. ³ D. G. Kendall, Bull. London Math. Soc., 1983. ⁴ H. S. Sukiasian in: Teubner zur Mathematik, v. 65 (1984).

УДК 517.982.4

МАТЕМАТИКА

С. А. Айрапетян

О существовании решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе функционалов полиномиального роста

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 11/VII 1984)

1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$D_t^m u + \sum_{l=1}^m P_l(tD_x) D_t^{m-l} u = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^n. \quad (1)$$

где $P_l(tD_x)$ — некоторые многочлены от $tD_x = \left(t \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, t \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, а $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Пусть S — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстроубывающих функций переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ в R^n , а S' — пространство линейных непрерывных функционалов на S .

Будем пользоваться следующими обозначениями: $S'_{j,N}$ — класс функционалов $U(t)$, зависящих от t как от параметра, принадлежащих при каждом $t \geq 0$ пространству S' вместе с производными по t до порядка m и удовлетворяющих оценкам

$$|D_t^l \langle U(t), \varphi \rangle| \leq C(1+t^N) \sup_{x \in R^n} \left[(1+|x|^p) \sum_{|k| \leq j} |D^k \varphi(x)| \right] \quad (2)$$

при некоторых положительных постоянных C и p , $t \geq 0$, $l = 0, 1, \dots, m$, где $\langle U(t), \varphi \rangle$ значение функционала $U(t)$ на функции $\varphi \in S$, k — мультииндекс, $S'_j = \bigcup_{N=1}^{\infty} S'_{j,N}$, M — класс бесконечно дифференцируемых в полупространстве $t \geq 0$, $x \in R^n$ функций $u(t, x)$, удовлетворяющих оценкам

$$|D_t^l D_x^k u(t, x)| \leq C_{l,k} (1+t+|x|)^{\alpha}, \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \quad (3)$$

где $C_{l,k}$ и α — некоторые постоянные, зависящие от функций $u(t, x)$, α не зависит от l и k .

$F^{-1}S'_{j,N}$ и $F^{-1}S'_j$ — классы функционалов, двойственных к классам $S'_{j,N}$ и S'_j , соответственно, в смысле преобразования Фурье по переменным $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^m + \sum_{l=1}^m P_l(\sigma) \lambda^{m-l} = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R^n. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) расположим в порядке возрастания их действительных частей

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leq \operatorname{Re} \lambda_2(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_m(\sigma), \quad \sigma \in R^n. \quad (5)$$

Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_r(\sigma) \leq 0 \text{ и } \operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) \geq 0, \quad \sigma \in R^n, \quad (6)$$

причем $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$, где r — постоянное целое число, не зависящее от σ .

Задача типа Коши для уравнения (1) исследуется в следующей постановке: при заданном $f(t) \in F^{-1}S'_{j_0, N_0}$ найти решение $u(t)$ уравнения (1), принадлежащее классу $F^{-1}S'_j$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$D_l^i u(t)|_{t=0} = 0, \quad l=0, 1, \dots, r-1. \quad (7)$$

Корректные постановки общих краевых задач для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, рассматриваемые в различных пространствах функционалов, изучены в работах (1-3). В частности, в работе (2) изучена задача (1), (7) в классах $F^{-1}S'_j$ в том случае, когда в уравнении (1) $f(t, x) = 0$, а начальные условия (7) неоднородны.

2. Изложим основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Если $f(t)$ функционал из класса $F^{-1}S'_{j_0, N_0}$, то задача (1), (7) имеет решение в любом классе $F^{-1}S'_j$, при $j \geq j_1$, где j_1 определяется постоянными j_0, N_0 и коэффициентами уравнения.

Теорема 2. Если функционал $f(t)$ обычная функция из класса M , то существует решение задачи (1), (7), принадлежащее этому же классу.

В работе указывается также метод построения решений этих задач.

Рассмотрим следующие полиномы относительно λ :

$$L^-(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1(\sigma)) \dots (\lambda - \lambda_r(\sigma)) \equiv \lambda^r + a_1(\sigma) \lambda^{r-1} + \dots + a_r(\sigma); \quad (8)$$

$$L^+(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_{r+1}(\sigma)) \dots (\lambda - \lambda_m(\sigma)) \equiv \lambda^{m-r} + a_{r+1}(\sigma) \lambda^{m-r-1} + \dots + a_m(\sigma) \quad (9)$$

и соответствующие им задачи Коши:

$$y^{(r)} + a_1(\sigma) y^{(r-1)} + \dots + a_r(\sigma) y = 0, \quad t > 0; \quad (10)$$

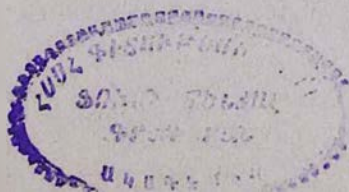
$$y^{(p)}|_{t=0} = a_p^-, \quad p = 0, 1, \dots, r-1; \quad (11)$$

$$z^{(m-r)} + a_{r+1}(\sigma) z^{m-r-1} + \dots + a_m(\sigma) z = 0, \quad t < 0; \quad (12)$$

$$z^{(p)}|_{t=0} = a_p^+, \quad p = 0, 1, \dots, m-r-1, \quad (13)$$

где a_p^+ и a_p^- — постоянные, не зависящие от σ . Здесь производные берутся по t , а σ входит как параметр, $y = y(t, \sigma)$ и $z = z(t, \sigma)$ ищутся в классе обычных функций.

В работе (2) доказано, что решение $y(t, \sigma)$ задачи (10), (11) удовлетворяет оценкам



$$|D_l^m D_0^k y(t, \sigma)| \leq C_{lk} (1 + t^{m_{lk}}) (1 + |\sigma|^{n_{lk}}) |\sigma|^{-a|k|}, \quad t \geq 0 \quad (14)$$

при некоторых положительных постоянных a , C_{lk} , m_{lk} и n_{lk} , где $l = 0, 1, \dots, k$ — произвольный мультииндекс. Аналогично, для решения задачи (12), (13) можно получить следующую оценку:

$$|D_l^m D_0^k z(t, \sigma)| \leq C_{lk} (1 + t^{m_{lk}}) (1 + |\sigma|^{n_{lk}}) |\sigma|^{-a|k|} e^{l \operatorname{Re} \sigma} r_{+1}(\sigma), \quad t \leq 0. \quad (15)$$

Доказывается, что имеют место оценки

$$\operatorname{Re} \sigma_{r+1}(\sigma) \geq a|\sigma|^\beta, \quad \text{при } |\sigma| \leq e, \quad \text{и } \operatorname{Re} \sigma_{r+1}(\sigma) \geq b|\sigma|^\gamma, \quad \text{при } |\sigma| \geq E, \quad (16)$$

где a , b , β , γ , e и E положительные постоянные.

3. Переходим к нахождению решения задачи (1), (7). Преобразование Фурье по x приводит эту задачу к эквивалентной задаче

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)V = \frac{d^m}{dt^m} V + \sum_{l=1}^m P_l(\sigma) \frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}} V = g(t), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$\frac{d^l}{dt^l} V|_{t=0} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, r-1, \quad (18)$$

где $V(t)$ и $g(t)$ — преобразования Фурье решений $u(t)$ и свободного члена $f(t)$, соответственно, $f(t) \in S'_{j_0, N_0}$, а $V(t)$ ищется из S'_j .

Пусть $h(\sigma)$ функция из класса $C^\infty(R^n)$, удовлетворяющая условиям

$$h(\sigma) = 0, \quad \text{при } |\sigma| \leq 1 \quad \text{и} \quad h(\sigma) = 1, \quad \text{при } |\sigma| \geq 2.$$

Обозначим через $v(t, \sigma)$ и $w(t, \sigma)$ решения уравнений (10) и (12), соответственно, с начальными условиями

$$\frac{d^l v(0, \sigma)}{dt^l} = \begin{cases} 0, & \text{при } l = 0, 1, \dots, r-2 \\ 1, & \text{при } l = r-1 \end{cases}, \quad \frac{d^l w(0, \sigma)}{dt^l} = \begin{cases} 0, & \text{при } l = 0, 1, \dots, m-r-2 \\ 1, & \text{при } l = m-r-1. \end{cases}$$

Определим функционалы $V_\nu(t)$ на функциях $\varphi \in S$ следующим образом:

$$\langle V_\nu(t), \varphi \rangle = - \int_0^t \int_0^\tau \langle g(\tau + \theta), v(t - \tau, \sigma) w(-\theta, \sigma) h(\nu \sigma) \varphi(\sigma) \rangle d\theta d\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Пусть m_{lk} , α , β постоянные, входящие в оценки (14) — (16),

$$\alpha' = \max\{1, \alpha\}, \quad m_j = \max\{m_{lk}; \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad |k| \leq j\}, \quad \hat{j} = \alpha' j + \beta(N_0 + m_j).$$

Пусть, далее, $S_j\{0\}$ — класс функций из S , равных нулю вместе с производными до порядка j в точке нуль. Тогда верна

Лемма 1. Если $g(t) \in S'_{j_0, N_0}$ и $\varphi \in S_{\hat{j}}\{0\}$ при $j \geq \hat{j}_0$, то последовательности функций (19) и их производных до порядка m имеют пределы при $\nu \rightarrow \infty$ для каждого $t \geq 0$, причем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{d^l}{dt^l} \langle V_\nu(t), \varphi \rangle \right| \leq C(1 + t^\alpha) \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^\beta) \sum_{|k| \leq j} D^k \varphi(\sigma)], \quad l = \overline{0, m}.$$

Из леммы 1 вытекает существование линейного непрерывного функционала $V_0(t)$ над $S_{\hat{j}}\{0\}$ такого, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{d^l}{dt^l} \langle V_v(t), \varphi \rangle = \frac{d^l}{dt^l} \langle V_0(t), \varphi \rangle, \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\}, \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

Учитывая обозначения (8) и (9), уравнение (17) можно переписать в форме $L^+\left(\frac{d}{dt}\right)L^-\left(\frac{d}{dt}\right)V = g(t)$. Тогда легко видеть, что функционалы $V_v(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\langle L\left(\frac{d}{dt}\right)V_v(t), \varphi \right\rangle = \langle g(t), h(v\sigma)\varphi(\sigma) \rangle, \quad \varphi \in S, \quad v = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом уравнении к пределу при $v \rightarrow \infty$, получим

$$\left\langle L\left(\frac{d}{dt}\right)V_0(t), \varphi \right\rangle = \langle g(t), \varphi \rangle, \quad \varphi \in S_j \setminus \{0\}. \quad (20)$$

Пусть функция $\varphi \in S$, тогда ее можно представить в форме

$$\varphi(\sigma) = \beta(\sigma) \sum_{|k| \leq j} D^k \varphi(\sigma) \sigma^k / k! + \varphi_j(\sigma),$$

где $\beta(\sigma)$ — функция из C^∞ , равная 1 при $|\sigma| \leq \delta$ и 0 при $|\sigma| \geq 2\delta$, а $\varphi_j \in S_j \setminus \{0\}$.

Решение $V(t)$ задачи (17)–(18) будем искать в виде

$$\langle V(t), \varphi \rangle = \sum_{|k| \leq j} C_k(t) D^k \varphi(0) + \langle V_0(t), \varphi_l \rangle, \quad (21)$$

где функции $c_k(t)$ вместе со своими производными до порядка m при $t \rightarrow \infty$ растут не быстрее полинома. Подставляя $\langle V(t), \varphi \rangle$ из (21) в уравнение (17) и в начальные условия (18) и учитывая уравнение (20), для определения функций $c_k(t)$ получим задачу, разрешимость которой доказана в работе (1) (с. 291).

4. Пусть теперь $f(t, x)$ функция из класса M , удовлетворяющая оценке (3). Вначале доказывается, что уравнение (1) со свободным членом $\Delta_x^\mu f(t, x)$ имеет решение в классе M , удовлетворяющее начальным условиям (7), где μ достаточно большое натуральное число, а Δ_x — оператор Лапласа в R^n по x .

Производя преобразование Фурье в этом уравнении, получим уравнение (17) со свободным членом $|\sigma|^{2\mu} g(t)$, где $g(t) = F[f(t, x)]$. Так как функция $f(t, x)$ удовлетворяет оценке (3), то $g(t) \in S'_{j_0, N_0}$ при некотором N_0 и при $j_0 = \alpha + n + 1$. Отсюда следует, что функционалы $V_v(t)$, $v = 1, 2, \dots$, заданные на S равенством

$$\langle V_v(t), \varphi \rangle = - \int_0^t \int_0^\infty \langle g(\tau + \theta), |\sigma|^{2\mu} v(t - \tau, \sigma) \omega(-\theta, \sigma) h(v\sigma) \varphi(\sigma) \rangle d\theta d\tau, \quad (22)$$

определены корректно и принадлежат S'_{j_0} . За счет выбора большого μ можно достичь того, чтобы $|\sigma|^{2\mu} \varphi$ принадлежала $S_j \setminus \{0\}$ при достаточно большом j для всех функций $\varphi \in S$, так что предельный функционал $V_0(t)$ определен на всем S , принадлежит S'_j и является обобщенным решением задачи (17), (18) (со свободным членом $|\sigma|^{2\mu} g(t)$). Имеет место следующая

Лемма 2. Если $f(t, x) \in M$, $g(t) = F[f(t, x)]$ и μ — достаточно большое натуральное число, то обратные преобразования Фурье функционалов $V_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots$ из (22) и их предела $V_0(t)$ являются обычными функциями из класса M .

Пусть $V_0(t)$ функционал, фигурирующий в последней лемме, $u_0(t, x) = F^{-1}[V_0(t)]$ и $w_0(t, x)$ функция из M , удовлетворяющая уравнению

$$(-\Delta_x)^\mu w_0(t, x) = u_0(t, x). \quad (23)$$

Доказательство теоремы 2 получается из леммы 2 и уравнения (23).

Замечание. Результаты работы остаются верными, если в условиях (6) строгое неравенство $\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma) > 0$ нарушается в конечном числе точек $\sigma \in R^n$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ս. Ա. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Հաստատուն գործակիցներով անհամառոն դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման գոյությունը բազմանդամային անով ֆունկցիոնալների դասում

Առկա տանքում դիտարկվում է հաստատուն գործակիցներով (1) դիֆերենցիալ հավասարումը $t > 0$, $x \in R^n$ կիսատարածությունում:

Ենթադրվում է, որ (4) բնութագրիչ հավասարման արմատները բազմաբարձր են (5) և (6) պայմաններին, ընդ որում $\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ միայն վերջավոր թվով կետերում: Այս պայմաններում ապացուցվում են.

Թե որ եւ 1: Եթե $f(t) \in F^{-1}S'_{j_0, N_0}$, ապա (1) (7) խնդիրը ունի լուծում յուրաքանչյուր $F^{-1}S'_j$ դասից, երբ $j \geq j_1$, որտեղ j_1 -ը որոշվում է j_0 , N_0 թվերով ու հավասարման գործակիցներով:

Թե որ եւ 2: Եթե $f(t) \in M$, ապա (1) (7) խնդիրը ունի լուծում նույն դասից:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. Е. Шилов, Математический анализ. Второй спец. курс., Наука, М., 1965.
² Н. Е. Товмасын, Дифференциальные уравнения, т. 18, № 1 (1982). ³ В. П. Паламодов, Изв. АН СССР. Математика, т. 24, 1960. ⁴ Е. А. Горин, УМН, т. 16, № 1 (1961).

УДК 512.62

МАТЕМАТИКА

М. К. Кюреган

**Разложение полиномов и синтез неприводимых полиномов
 над конечными полями**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Р. Варшамовым 3/II 1985)

Как известно, для всякого простого p и натурального числа s существует с точностью до изоморфизма единственное поле Галуа $GF(q)$ порядка $q=p^s$.

В настоящей работе приводятся некоторые результаты относительно возможности построения неприводимых полиномов; если полином неприводим над полем $GF(q)$, то какой вид имеет его разложение над полем $GF(q^m)$.

В работе рассматриваются только нормированные полиномы, т. е. полиномы, старший коэффициент которых равен единице.

Пусть $f(x) = \sum_{u=0}^n a_u x^u$ — неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n . Известно, что все корни полинома $f(x)$ принадлежат полю $GF(q^k)$, где $n \setminus k$ и $GF(q^n)$ — минимальное поле, содержащее все корни полинома $f(x)$.

Кроме того, если α — корень полинома $f(x)$ в расширении поля $GF(q)$, то $\alpha, \alpha^q, \dots, \alpha^{q^{n-1}}$ образуют совокупность всех корней $f(x)$ ⁽²⁾.

Пусть β — любой элемент расширения $GF(q)$. Полином $g(x)$, наименьшей степени над полем $GF(q)$, такой, что $g(\beta)=0$, называется минимальным полиномом или минимальной функцией для β . Ясно, что минимальная функция $g(x)$ для любого элемента β является неприводимым многочленом над полем $GF(q)$ ⁽¹⁾.

Элементы поля, минимальные многочлены которых равны, называются сопряженными. Значит, элементы $\alpha, \alpha^q, \dots, \alpha^{q^{n-1}}$ являются сопряженными.

Будем говорить, что β является собственным элементом расширения поля $GF(q)$ степени m , если $\beta \in GF(q^m)$ и $\beta \notin GF(q^d)$, где d — любой собственный делитель m . В этом случае пишется $\deg(\beta)=m$.

Теперь приведем некоторые результаты.

Теорема 1. Если $(m, n)=d$ и $f(x)$ — неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n , то разложение полинома $f(x)$ над полем $GF(q^m)$ содержит d различных неприводимых над полем $GF(q^m)$ полиномов степени n/d , все коэффициенты которых принадлежат полю $GF(q^d)$ и которые имеют хотя бы один коэффициент b_u такой, что $\deg(b_u)=d$.

Пусть дан произвольный полином $g(x) = \sum_{u=0}^n b_u x^u$ степени k с коэффициентами из поля $GF(q^m)$. Обозначим

$$g^{(q^l)}(x) = \sum_{u=0}^n b_u^{q^l} x^u.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n , а $g(x)$ — простой делитель степени n/d полинома $f(x)$ над полем $GF(q^m)$, где $(n, m) = d$. Тогда полиномы $g^{(q^l)}(x)$, где $0 \leq l < d$, неприводимы над полем $GF(q^m)$ и $f(x) = \prod_{l=0}^{d-1} g^{(q^l)}(x)$ над полем $GF(q^m)$.

Доказательство. В самом деле, пусть $f(x)$ — неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени n . Тогда согласно теореме 1, если $(m, n) = d$, то разложение полинома $f(x)$ над полем $GF(q^m)$ содержит d различных неприводимых над полем $GF(q^m)$ полиномов степени n/d , все коэффициенты которых принадлежат $GF(q^d)$ и которые имеют хотя бы один коэффициент b_u такой, что $\deg(b_u) = d$, т. е.

$$f(x) = \prod_{j=1}^d f_j(x). \quad (1)$$

Как уже отмечалось выше, поле $GF(q^n)$ содержит все корни полинома $f(x)$, и если α — произвольный корень $f(x)$, то элементы $\alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{n-1}}$ также являются его корнями и все они различные, так как $f(x)$ неприводим над полем $GF(q)$. По этой же причине, так как согласно теореме 1 $f_j(x)$ — различные неприводимые над полем $GF(q^d)$ полиномы степени n/d , все корни полиномов $f_j(x)$ принадлежат $GF(q^n)$ и они различные. Вследствие того, что $f_j(x)$ — различные полиномы (неприводимые) над полем $GF(q^m)$, и согласно соотношению (1) множества корней полиномов $f(x)$ и $f_j(x)$ совпадают.

Допустим, α — корень полинома $f(x)$, являющийся одновременно корнем полинома $g(x)$. Общность доказательства теоремы не нарушится, если предположить, что $f_1(x) = g(x)$. Ясно, что $\alpha, \alpha^{q^d}, \alpha^{q^{2d}}, \dots, \alpha^{q^{(\frac{n}{d}-1)d}}$ являются корнями полинома $f_1(x)$. Теперь нетрудно убедиться в том, что $\alpha, \alpha^q, \dots, \alpha^{q^{d-1}}$ корни различных многочленов, входящих в разложение $f(x)$. Так как их количество равно d , то в разложении (1) каждый полином $f_j(x)$ имеет корень из множества $\alpha, \alpha^q, \dots, \alpha^{q^{d-1}}$.

Допустим, α^{q^i} , где $0 \leq i < d$, является корнем многочлена $f_{l+1}(x)$ и покажем, что α^{q^i} является корнем полинома $g^{(q^l)}(x)$. Действительно,

$$g^{(q^l)}(\alpha^{q^i}) = \sum_{u=0}^n b_u^{q^l} (\alpha^{q^i})^u.$$

Отсюда в силу тождества Галуа имеем

$$g^{(q^l)}(a^{q^l}) = \left(\sum_{u=0}^n b_u a^u \right)^{q^l} = (g(a))^{q^l} = 0.$$

Но, так как $f_{i+1}(x)$ является минимальным полиномом a^{q^l} , то $f_{i+1}(x) \setminus g^{(q^l)}(x)$. Учитывая, что $st(f_{i+1}(x)) = st(g^{(q^l)}(x))$, и нормированность $f_{i+1}(x)$ и $g^{(q^l)}(x)$, получим $f_{i+1}(x) = g^{(q^l)}(x)$. Значит, $g^{(q^l)}(x)$ — неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином, и этот полином делит $f(x)$ над полем $GF(q^m)$. Тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 3. Пусть $g(x)$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином степени n , все коэффициенты которого принадлежат полю $GF(q^d)$, где $d \nmid m$, и который имеет хотя бы один коэффициент $\deg(a_u) = d$. Тогда полиномы вида $g^{(q^i)}(x)$, где $1 \leq i < d$, неприводимы над полем $GF(q^m)$.

Доказательство. Ясно, что $g(x)$ неприводим над полем $GF(q^d)$. Допустим, что полином $g(x)$ принадлежит показателю e и a является произвольным корнем $g(x)$ в некотором расширении поля $GF(q^d)$. Тогда e является порядком a . Как известно, $e \nmid q^{dn} - 1$ и $e \nmid q^h - 1$, если $k < dn$ ⁽¹⁾. Используя этот факт, докажем, что существует неприводимый над полем $GF(q)$ полином $f(x)$ степени dn , который делится на $g(x)$ над полем $GF(q^d)$. Действительно, согласно теореме Дедекинда полином $x^{q^{dn}-1} - 1$ имеет над полем $GF(q)$ следующее разложение:

$$x^{q^{dn}-1} - 1 = \prod_{v \mid dn} J_v(x),$$

где $J_v(x)$ — произведение всевозможных неприводимых над полем $GF(q)$ полиномов степени v ⁽¹⁾. Следовательно, так как $e \nmid q^{dn} - 1$, то получим

$$\prod_{v \mid dn} J_v(a) = a^{q^{dn}-1} - 1 = 0. \quad (2)$$

Если одновременно с формулой (2) учесть также сепарабельность $x^{q^{dn}-1} - 1$ над полем $GF(q)$ ⁽²⁾, то станет ясно, что существует единственный неприводимый над полем $GF(q)$ полином $f(x)$ такой, что $f(a) = 0$, следовательно, $g(x) \setminus f(x)$ над полем $GF(q^d)$. Покажем, что $st(f(x)) = dn$. Действительно, если предположить, что $st(f(x)) = k < dn$, то, так как $f(a) = 0$, $e \nmid q^k - 1$, что невозможно. Теперь, используя теорему 2, получим, что полиномы $g^{(q^i)}(x)$ неприводимы над полем $GF(q^d)$.

Теорема 4. Пусть $g(x)$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином степени n , все коэффициенты которого принадлежат $GF(q^d)$ и который имеет хотя бы один коэффициент a_u такой, что $\deg(a_u) = d$, где $d \nmid m$. Тогда полином вида $f(x) = \prod_{i=0}^{d-1} g^{(q^i)}(x)$ неприводим над полем $GF(q)$.

Доказательство. Пусть полином $g(x)$ принадлежит показателю e . Как известно, количество неприводимых над полем $GF(q^m)$

полиномов степени n , принадлежащих показателю e , равно $\frac{\varphi(e)}{n}$, где

$\varphi(e)$ — функция Эйлера. Как доказано выше, если существует неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином степени n , все коэффициенты которого принадлежат $GF(q^d)$, и существует хотя бы один коэффициент a_u такой, что $\deg(a_u) = d$, то если этот полином принадлежит показателю e , то существует неприводимый над полем $GF(q)$ полином степени nd . Как известно, из существования одного полинома степени nd , принадлежащего показателю e и неприводимого над полем $GF(q)$, следует существование $\frac{\varphi(e)}{dn}$ таких же полиномов.

Используя теорему 1 и учитывая, что разложения над полем $GF(q)$ полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не могут иметь общего множителя, получим следующее: разложение над полем $GF(q^d)$ всевозможных неприводимых над полем $GF(q)$ полиномов степени nd и принадлежащих показателю e содержат ровно $\frac{d\varphi(e)}{nd} = \frac{\varphi(e)}{n}$ различных неприводимых над полем $GF(q^d)$ полиномов степени n , принадлежащих показателю e . Теперь ясно, что для любого неприводимого над полем $GF(q^m)$ полинома $g(x)$ степени n , все коэффициенты которого принадлежат $GF(q^d)$ и который имеет хотя бы один коэффициент a_u такой, что $\deg(a_u) = d$, имеется неприводимый над полем $GF(q)$ полином $f(x)$ степени nd , который делится на полином $g(x)$ над полем $GF(q^m)$. Следовательно, согласно теореме 2 получим $f(x) = \prod_{i=0}^{d-1} g^{(q^i)}(x)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если $f(x)$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином степени n , принадлежащий показателю e , все коэффициенты которого принадлежат полю $GF(q^d)$, где $d \nmid m$, и который имеет хотя бы один коэффициент $\deg(a_u) = d$, тогда $f^{(q^i)}(x)$ неприводимый над полем $GF(q^m)$ полином степени n для любого $0 \leq i < d$, принадлежащий показателю e , а $F(x) = \prod_{i=0}^{d-1} f^{(q^i)}(x)$ — неприводимый над полем $GF(q)$ и принадлежащий показателю e .

Следствие 2. Если $f(x)$ — произвольный неприводимый над полем $GF(q^m)$ и примитивный над полем $GF(q^d)$ полином степени n , все коэффициенты которого принадлежат полю $GF(q^d)$, где $d \nmid m$, то $f^{(q^i)}(x)$, где $0 \leq i < m$, примитивен над полем $GF(q^d)$, а $F(x) = \prod_{i=0}^{d-1} f^{(q^i)}(x)$ — примитивный над полем $GF(q)$ полином степени dm .

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность Р. Р. Варшамову за полезные советы в процессе работы над статьей.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

**Վերջավոր դաշտերի վրա բազմանդամների վերածելիությունը և
անվերածելի բազմանդամների սինթեզը**

Աշխատանքում ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հնարավոր-
ություն են տալիս անվերածելի բազմանդամներ կառուցել բացահայտ տես-
քով՝ Գալուայի կամայական դաշտի վրա: Բացի այդ, ստացված է Գալուայի
 $GF(q)$ դաշտի վրա անվերածելի բազմանդամների վերածելիության տեսքը
 $GF(q^m)$ դաշտի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Альберт. Кибернетический сборник. Новая серия, вып. 3, Мир, М., 1966.
² Р. Р. Варшамов, К математической теории кодов, докт. дис., ИАТ АН СССР, 1966.

УДК 517.986.9

МАТЕМАТИКА

А. В. Карабегов

Конструкция rq - и qr -символов операторов Гильберта-Шмидта

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 3/Х 1985)

В настоящей работе приводится конструкция символов операторов Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространстве, обобщающая конструкцию классических qr - и pq -символов (см. (1)).

1. Пусть (X, dx) , (Y, dy) — пространства с мерой, $L_2(X, dx)$, $L_2(Y, dy)$ — соответствующие комплексные гильбертовы пространства, $\eta(E)$, $\theta(F)$ — характеристические функции измеримых подмножеств $E \subset X$, $F \subset Y$. Операторы умножения на $\eta(E)$ в $L_2(X, dx)$ и на $\theta(F)$ в $L_2(Y, dy)$ обозначим соответственно $P(E)$ и $Q(F)$.

Предположим, что существует изометрический изоморфизм $U: L_2(Y, dy) \rightarrow L_2(X, dx)$. Подмножество $E \times F$ пространства $\Omega = X \times Y$ назовем допустимым, если $P(E)UQ(F)$ — оператор Гильберта-Шмидта. Предположим также, что подмножества пространства $(\Omega, dxdy)$, пересекающие каждое допустимое подмножество по множеству меры 0, сами имеют нулевую меру.

Определение. Измеримая функция V на пространстве Ω называется регулярным ядром U , если для каждого допустимого подмножества $E \times F$ функция $\eta(E)V\theta(F)$ будет ядром интегрального оператора Гильберта-Шмидта $P(E)UQ(F)$.

2. Пусть $d\mu = |V|^2 dxdy$ — мера на Ω . Оператор умножения на функцию V изометрично отображает $L_2(\Omega, d\mu)$ в $L_2(\Omega, dxdy)$, причем он обратим тогда и только тогда, когда V почти всюду по мере $dxdy$ отлична от нуля. Пусть $\bar{U}$ обозначает отображение, комплексно-сопряженное U , т. е. для $f \in L_2(Y, dy)$, $\bar{U}f = \overline{Uf}$. Канонический изоморфизм гильбертовых пространств $L_2(X \times Y, dxdy) \cong L_2(X, dx) \otimes L_2(Y, dy)$ позволяет определить изометрический изоморфизм $1 \otimes \bar{U}: L_2(X \times Y, dxdy) \rightarrow L_2(X \times X, dxdx)$. Обозначим через H пространство операторов Гильберта-Шмидта в $L_2(X, dx)$, наделенное канонической структурой гильбертова пространства. Пусть W — отображение, ставящее в соответствие функции $k \in L_2(X \times X, dxdx)$ оператор Гильберта-Шмидта $K \in H$ с ядром k . Определим теперь отображения $C, D: L_2(\Omega, d\mu) \rightarrow H$ следующим образом: для $h \in L_2(\Omega, d\mu)$ $Ch = W(1 \otimes \bar{U})(Vh)$, $Dh = (C\bar{h})^*$, где черта и звездочка обозначают соответственно комплексное и эрмитово сопряжение.

Определение. pq -символом (qr -символом) оператора $K \in H$ называется такая функция $h \in L_2(\Omega, d\mu)$, что $K = Ch$ (соответственно, $K = Dh$).

Лемма 1. *Отображения $C, D: L_2(\Omega, d\mu) \rightarrow H$ — изометрические, причем следующие условия эквивалентны: (1) Отображение C обратимо. (2) Отображение D обратимо. (3) Функция V почти всюду по мере $dxdu$ отлична от нуля.*

Доказательство. Отображения, входящие в определение C , являются изометриями. Все они обратимы, за исключением оператора умножения на V , обратимость которого эквивалентна (3).

В случае, когда выполнены условия леммы 1, определен унитарный оператор $I = C^{-1}D$ в пространстве $L_2(\Omega, d\mu)$.

Теорема 2. *Оператор I в $L_2(\Omega, d\mu)$ обладает регулярным ядром, равным $V(x_1, y_2)V(x_2, y_1)/V(x_1, y_1)V(x_2, y_2)$.*

Основным моментом доказательства является проверка того факта, что если $E_1 \times F_1$ и $E_2 \times F_2$ — допустимые подмножества Ω для оператора U , то $E_1 \times F_2 \times E_2 \times F_1$ — допустимое подмножество $\Omega \times \Omega$ для оператора I .

Если отображения C, D обратимы, можно, пользуясь любым из них, перенести из H в $L_2(\Omega, d\mu)$ структуру инволютивной банаховой алгебры операторов Гильберта — Шмидта. При этом в обоих случаях инволюция в $L_2(\Omega, d\mu)$ выражается через оператор I и комплексное сопряжение: если $K = Ch$, то $K^* = C\bar{I}h$; если $K = Dh$, то $K^* = D\bar{I}h$.

3. Пусть группа G действует справа на пространствах X, Y преобразованиями, сохраняющими классы эквивалентности мер dx, dy . Группа G действует на Ω как на произведении G -пространств. Пусть далее заданы унитарные представления S и T группы G в пространствах $L_2(X, dx)$ и $L_2(Y, dy)$:

$$S_g \varphi(x) = a(x, g) \sqrt{\frac{dxg}{dx}} \varphi(xg), \quad T_g \psi(y) = b(y, g) \sqrt{\frac{dyg}{dy}} \psi(yg).$$

Здесь $g \in G$, $\varphi \in L_2(X, dx)$, $\psi \in L_2(Y, dy)$, а $a(x, g)$ и $b(y, g)$ — одномерные унитарные коциклы группы G (см. (2)). Предположим теперь, что U — сплетающий оператор для представлений S и T , т. е. $S_g V = U T_g$ для всякого $g \in G$.

Лемма 3. *Пусть $E \times F$ — допустимое подмножество Ω . Тогда $Eg \times Fg$ — также допустимое.*

Доказательство. Легко видеть, что $S_g^{-1} P(E) S_g = P(Eg)$, $T_g^{-1} Q(F) T_g = Q(Fg)$. Учитывая, что U — сплетающий, получаем, что $P(Eg) U Q(Fg) = S_g^{-1} P(E) U Q(F) T_g$, но оператор в правой части равенства гильберт-шмидтов.

Лемма 4. *Пусть $k(x, y)$ — ядро оператора Гильберта — Шмидта K , действующего из $L_2(Y, dy)$ в $L_2(X, dx)$. Тогда ядро оператора $S_g K T_g^{-1}$ равно*

$$k(xg, yg) a(x, g) \overline{b(y, g)} \sqrt{\frac{dxg}{dx}} \sqrt{\frac{dyg}{dy}}.$$

Утверждение леммы проверяется непосредственно.

Теорема 5. *Регулярное ядро V оператора U удовлетворяет соотношению*

$$V(x, y) = V(xg, yg)a(x, g)\overline{b(y, g)}\sqrt{\frac{dxg}{dx}}\sqrt{\frac{dyg}{dy}}.$$

Доказательство теоремы получается применением леммы 4 к тождеству $P(E)UQ(F) = S_g P(Eg)UQ(Fg)T_g^{-1}$.

Следствие. $d\mu = |V|^2 dx dy - G$ -инвариантная мера на Ω .

Следствие. В случае, когда оператор I определен, его регулярное ядро G -инвариантно.

Пусть G действует в $L_2(\Omega, d\mu)$ сдвигами, а на операторы Гильберта—Шмидта из H —сопряжением операторами S_g .

Теорема 6. *Отображения $C, D: L_2(\Omega, d\mu) \rightarrow H$ эквивариантны относительно действия G в $L_2(\Omega, d\mu)$ и в H .*

Доказательство. Пусть k —ядро оператора $K \in H$, тогда $k^g = (S_g \otimes \bar{S}_g)k$ —ядро оператора $K^g = S_g K S_g^{-1}$. Поэтому если $K = Ch$, то $k = (1 \otimes \bar{U})(Vh)$, а $k^g = (S_g \otimes \bar{S}_g \bar{U})(Vh)$. Поскольку U —сплетающий, получаем $k^g = (S_g \otimes \bar{U} \bar{T}_g)(Vh)$. Из теоремы 5 немедленно следует, что $(S_g \otimes \bar{T}_g)(Vh) = Vh^g$, где $h^g(x, y) = h(xg, yg)$, откуда $K^g = Ch^g$. Эквивариантность отображения D доказывается аналогично. Далее мы будем предполагать, что условия леммы 1 выполнены.

Следствие. Оператор I инвариантен относительно действия G в $L_2(\Omega, d\mu)$.

Следствие. Умножение и инволюция в $L_2(\Omega, d\mu)$, перенесенные из алгебры операторов Гильберта—Шмидта, инвариантны относительно действия G .

Теорема 7. *Представления $S \otimes S^*$ и $T \otimes T^*$ группы G унитарно эквивалентны представлению G сдвигами в $L_2(\Omega, d\mu)$. Унитарную эквивалентность осуществляют отображения C и D .*

Описанная в работе конструкция применима к операторам Гильберта—Шмидта, действующим в пространствах представлений основных унитарных серий полупростых групп Ли, а также линейных алгебраических групп над локальными полями (см., например, (3)).

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ԿԱՐԱՔԵԳՈՎ

Հիբերտ-Շմիդտի օպերատորների pq - և qr -սիմվոլների կոսետրոկցիան

Աշխատանքում բերված է մի կոնստրուկցիա, որը թույլ է տալիս հիբերտյան տարածությունում կամայական Հիբերտ-Շմիդտի օպերատորին համապատասխանեցնել քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիա, չափով օժտված տարածության վրա:

Հստ էության այդ կոնստրուկցիան հանդիսանում է դասական pq - և qr -սիմվոլների ընդհանրացումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ф. А. Березин, УФН, т. 132, вып. 3 (1980). ² А. А. Кириллов, Элементы теории представлений, М., Наука, 1978. ³ В. Ф. Молчанов, Функциональный анализ и его приложения, т. 14, вып. 2 (1980).

УДК 631.674.4

ГИДРОДИНАМИКА

Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян

О действии подземных оросителей сельскохозяйственных культур

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Аслапяном 6/II 1984)

Оптимальная организация орошения земель требует разработки методов и технических средств для рационального регулирования водного и воздушного режима почв.

При орошении напуском по бороздам и полосам происходят избыточное увлажнение почв в периоды поливов и значительная утечка поливных вод в грунтовый поток, а в межполивные периоды может иметь место недостаток влаги в почвах. Кроме того, при таких способах орошения отсутствуют возможности регулирования воздушного режима почв и, в частности, создания повышенной аэрации, необходимой в отдельные периоды развития сельскохозяйственных растений.

Более рационально орошение дождеванием с регулированием интенсивности поливов в пределах от струйного, отвечающего естественному дождю высокой интенсивности, до капельного, соответствующего дозированному увлажнению адекватно потребности растений. Однако и в этом случае наблюдаются потери поливной воды вследствие фильтрации ее в грунтовый поток. Вместе с тем управление потоками воды и особенно воздуха в почве остается затрудненным.

Из-за утечек поливных вод все эти способы полива в той или иной мере требуют устройства дренажа для предотвращения чрезмерного подъема грунтовых вод.

Недостатки существующих методов полива земель устраняются при осуществлении поливов через подземные дырчатые трубы, в которые нагнетается поливная вода или водо-воздушная эмульсия; вместе с тем открываются возможности управления степенью и режимом увлажнения и аэрирования. В этом случае в зависимости от давления в трубах, частоты нагнетания, его продолжительности и содержания воздуха в воде, в почвах и подпочвенных грунтах могут быть созданы различные режимы влажности и аэрирования, наиболее благоприятные для сельскохозяйственных культур и почв разного типа. В таких условиях потери воды за счет фильтрации могут быть сведены к минимуму. Кроме того, улучшаются условия подачи и распределения в почве минеральных и диспергированных органических удобрений, введенных в поливную воду. Наконец, при такой системе поливов подземные дырчатые трубы и траншеи для них могут быть использованы одновременно для орошения дренажа и промывки земель. В частности, при промывке засоленных почв через такие трубы сокращаются утечки промывной воды в грунтовый поток и уменьшается опасность повышения

минерализации подпочвенных грунтов зоны аэрации и грунтовых вод за счет соленой промывной воды.

Представляет принципиальное и практическое значение рассмотрение условий фильтрации из подземных трубчатых оросителей. Ввиду небольших давлений в этих оросителях деформацией воды можно пренебречь, и тогда фильтрация из них будет описываться уравнением Лапласа вида

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где h — напор; x, y — координаты.

Рассмотрим систему параллельных друг другу горизонтальных оросителей, размещенных выше уровня грунтовых вод. В этих условиях будут иметь место 4 различных стадии фильтрации: 1) образование зоны насыщения грунтов вблизи трубчатых оросителей выше уровня грунтовых вод (рис. 1, а); 2) водонасыщение грунтов и подъем грун-

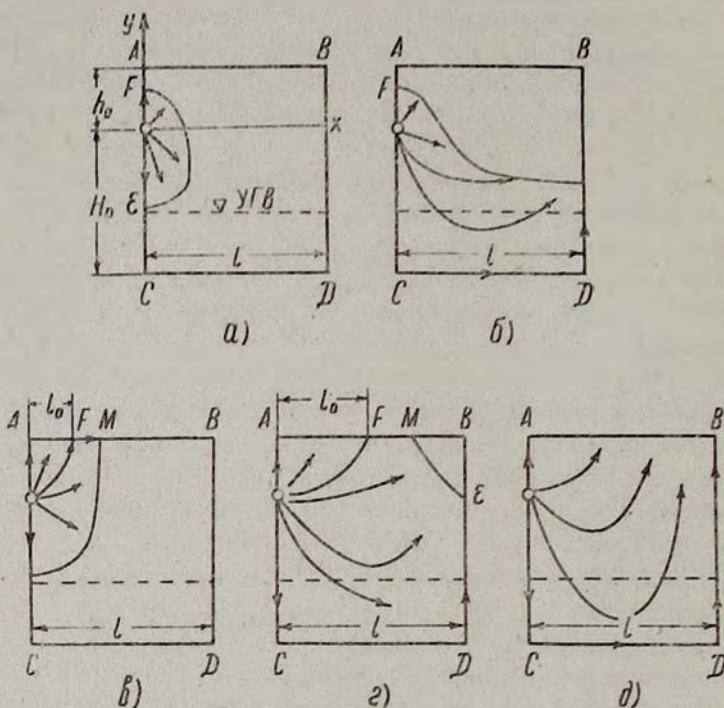


Рис. 1

товых вод вблизи оросителей (рис. 1, б); 3) высачивание поливных вод на части поверхности почвы над оросителями при продолжающемся водонасыщении грунтов между ними (рис. 1, в, г); 4) высачивание поливных вод на всей поверхности поля между оросителями.

В течение первых трех стадий фильтрационный поток имеет свободную поверхность, и режим его является неустановившимся. Кроме того, во вторую стадию на поверхности поля могут существовать горизонтальные линии капиллярного тока воды (рис. 1, в, г, линия $F M$). Таким образом, в общем случае фильтрационный поток из системы оросителей, параллельных друг другу труб, ограничен свободной поверхностью, вертикальными линиями тока на оси оросителей и в серз-

дипе между лини, горизонтальной линией постоянного напора в плоскости высачивания и горизонтальной линией капиллярного тока. Граничные условия на свободной поверхности будут:

$$h = z = -h_k; \quad v_x = \mu \frac{\partial h}{\partial t} = -k \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v_y = \mu \frac{\partial y}{\partial t} = -k \frac{\partial h}{\partial y} + \epsilon/\mu, \quad (2)$$

где k —коэффициент фильтрации; μ —дефицит насыщения грунта; v_x и v_y —составляющие скорости фильтрации; t —время; ϵ —инфильтрация или испарение на свободной поверхности; h_k —высота капиллярного вакуума почвы.

Дифференцируя (2) по t , получим (1)

$$v_x^2 + v_y^2 + v_y(k + \epsilon) = k\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3)$$

Если здесь пренебречь квадратами скоростей, то

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{k + \epsilon}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\epsilon}{\mu} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия на вертикальных и горизонтальных непроницаемых границах, являющихся линиями тока, соответственно будут:

$$v_x = -k \frac{\partial h(x_m, y, t)}{\partial x} = 0 \quad (x_m = 0; l), \quad (5)$$

$$v_y = -k \frac{\partial h(x, -H_0, t)}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Здесь v_x и v_y —компоненты скорости фильтрации вдоль осей x и y ; l —половина расстояния между оросителями; H_0 —высота центра оросителей над водоупором; l_0 —половина ширины горизонтальной плоскости высачивания поливной воды на поверхность поля.

Случай $x_m = 0$ соответствует вертикали AC , проходящей через центр оросителя и являющейся осью симметрии фильтрационного потока (рис. 1, β — δ), а случай $x_m = l$ соответствует вертикали BD , проходящей через середину расстояния между оросителями (рис. 1, β , z , δ).

На горизонтальной линии равного напора AF , возникающей в третью стадию (рис. 1, β , z), и на горизонтальной линии равного напора AB , появляющейся в четвертую стадию (рис. 1, δ), граничное условие будет:

$$v_x = -k \frac{\partial h(h_0, x, t)}{\partial x} = 0; \text{ или } h(h_0, x, t) = h_0 + h_1, \quad (7)$$

где h_0 —глубина оросителя от поверхности земли; h_1 —глубина воды, просочившейся на поверхность земли. Обычно величина h_1 очень мала и можно считать, что $h_1 = 0$. По окончании нагнетания в дырчатые трубы и снятия избыточного напора в подземных оросителях эта вода поступает обратно в почву. Таким образом, зона высачивания (выше плоскости AF) играет роль дополнительной регулирующей емкости поливной воды.

На наружной поверхности дырчатой трубы-оросителя (или его

антифильтра) могут приниматься условия 1-го или 2-го рода, а именно:

$$h(r_0, t) = H_r = \text{const}, \quad (8)$$

$$2\pi kr \left. \frac{\partial h(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \text{const} = q, \quad q = \frac{Q}{L}, \quad (9)$$

где H_r — напор; Q — расход оросителя; r_0 — радиус дырчатой трубы или трубы вместе с антифильтром; L — длина оросителя. Наконец, на линии выхода капиллярных вод FM (рис. 1, а, з) принимается:

$$v_y = k \frac{\partial h(x, h_0, t)}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

В точке F , принадлежащей линии выхода капиллярных вод и горизонтальной плоскости равного напора, $h(-l_0, h_0, t) = h_0$. В точке M напор $h = h_0 - h_k$, где h_k — высота капиллярного вакуума грунта. Линия выхода капиллярных вод и условия на них впервые введены в работе (2).

Помимо приведенных выше граничных условий на всех внешних границах потока, для 2 и 3 стадий необходимы начальные условия. Для каждой из этих стадий начальные условия определяются распределением напора $h(x, y)$ в конце предыдущей стадии.

Так, для второй стадии в качестве начального условия принимается распределение напоров в потоке в момент, когда точка D (рис. 1, а) опустится до уровня грунтовых вод (пунктир на рис. 1); для третьей стадии за начальное условие принимается распределение напора в потоке в момент, когда точка F (рис. 1, а, б) поднимается до поверхности земли.

Для первой стадии начальное условие не ставится, так как при $t=0$ область фильтрации воды из оросителя отсутствует. Для четвертой стадии это условие также не ставится, поскольку рассматривается жесткий режим фильтрации.

При описанных здесь краевых условиях задача о действии подземного оросителя в зоне аэрации грунтов имеет единственное решение.

Для 1-й, 2-й и 3-й стадий, когда фильтрация является неустановившейся и характеризуется наличием свободной поверхности, движущейся вверх по направлению к поверхности поля, решение задачи находится на ЭВМ.

Для 4-й стадии, когда свободная поверхность отсутствует и фильтрация может считаться установившейся, возможно как численное, так и аналитическое решение задачи.

В результате этих решений находятся дебит оросителя Q (при заданном напоре в нем H_r) или напор в оросителе H_r (при заданном дебите Q), ширина зоны высачивания l_0 и длина зоны капиллярности $l - l_0$, а при стационарном режиме $l = l_s$. Эти данные позволяют выбрать оптимальное расстояние между оросителями и наилучший режим их действия.

Если действует одиночная дрена, то охарактеризованные выше стадии фильтрации сохраняются. Однако при этом в третью стадию вертикальная линия тока BD в середине между дренами отсутствует,

а кривая свободной поверхности уходит вправо на бесконечность (рис. 1, б, г), причем со временем она перемещается.

Аналогичные задачи возникают при нагнетании растворителя в рудную залежь с целью извлечения из нее металла.

При этом растворитель может подаваться в дырчатую трубу большой длины (линейный источник) или в скважину с открытым забоем (точечный источник). В последнем случае для одного точечного источника задача является двумерной и осесимметричной, а для нескольких точечных источников она будет трехмерной.

Тогда в основном уравнении (1) добавляется слагаемое $\partial^2 h / \partial z^2$, а в левую часть граничного условия (2) дополнительно входит слагаемое $v_z^2 (v_z = -k \partial h / \partial z)$.

Соответственно, изменяются (8) и (9), которые ставятся на сферической поверхности $r = r_0 = \text{const}$.

Особый интерес представляет рассмотрение аналогичных задач для фильтрации в условиях частичного насыщения пор грунта, имеющей место при так называемом капельном орошении.

В этом случае может быть использована математическая модель двухфазной фильтрации влаги в почве, учитывающая гравитационную фильтрацию свободной влаги, диффузию связанной влаги и массообмен между этими фазами (3).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
ВНИИВООДГЕО

Ն. Ն. ՎԵՐԻԳԻՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Գյուղատնտեսական կուլտուրաների ստորերկրյա ռոռգիչների մասին

Հողվածում բերվում են ստորերկրյա ռոռգիչների հաշվարկման համար անհրաժեշտ դիֆերենցիալ հավասարումները և սահմանային պայմանները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշել ռոռգիչների միջև հեռավորությունը, տեղադրման խորությունը, անհրաժեշտ ճնշումը և այլ բնութագրեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод. Гостехтеоретиздат, М., 1952. ² Н. Н. Веригин, ДАН СССР, т. 66, № 4 (1949). ³ Н. Н. Веригин, ДАН СССР, т. 89, № 2 (1953).

УДК 621.373.826

ФИЗИКА

В. А. Аветисян, В. В. Минасян, Е. Х. Назарян

Исследование спектральных характеристик люминесценции водных растворов родамина 6Ж с добавкой карбамида при возбуждении излучением второй гармоники ИАГ: Nd лазера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 25/1 1985)

Развитие перестраиваемых по частоте лазеров в значительной степени связано с созданием новых эффективных сред на основе красителей (^{1,2}). Особый интерес представляют водные растворы родамина 6Ж, имеющие широкий спектр люминесценции в видимом диапазоне. Вода имеет больший коэффициент теплопроводности, чем другие эффективные растворители, например, спирты, поэтому можно надеяться, что водный раствор Р6Ж можно использовать для получения непрерывной генерации без прокачки раствора. Однако эта задача затруднена тем обстоятельством, что при растворении в воде краситель образует и агрегаты-ассоциаты из нескольких молекул родамина, чаще — димеры. Спектр поглощения ассоциатов частично перекрывает спектр люминесценции активных молекул родамина в зеленой области, поэтому квантовый выход люминесценции водного раствора сравнительно мал — 0,4. Это обстоятельство делает необходимым исследование характеристик люминесценции с добавлением в раствор веществ — дезагрегатов, способствующих распаду ассоциатов (³).

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамики спектров люминесценции водных растворов Р6Ж с добавкой карбамида $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$. Исследовались растворы с концентрацией (С) Р6Ж от 0,01 до 3 ммоль/л, а содержание (К) карбамида менялось от 0 до 50% вес. ед. раствора. Люминесценция возникала в результате однофотонного резонансного возбуждения на переходе $S_0 \rightarrow S_1$ молекул родамина лазерным излучением. В работе использовалась генерируемая в нелинейном кристалле КДР вторая гармоника (длина волны $\lambda = 530$ нм) ИАГ: Nd лазера, работающего в режиме свободной генерации с частотой выстрелов 12,5 Гц. Излучение второй гармоники отделяли при помощи светофильтра СЗС-22 и после фокусировки линзой с фокусным расстоянием $f = 33$ см направляли на кювету с исследуемым раствором. Длительность каждого импульса генерации составляла $\sim 10^{-5}$ с, а его интенсивность на входе в кювету $\sim 0,5$ кВт/см². Спектр люминесценции раствора, наблюдаемый под углом 90° к направлению лазерного излучения, фотографировали на пленку Ф-130 при помощи спектрографа ИСП-51 с камерой УФН-89. Время экспозиции каждого кадра выбирали равным 30 с. Фотометрирование пленки проводили при помощи автоматического микрофотометра ИФО-451. Для коррекции

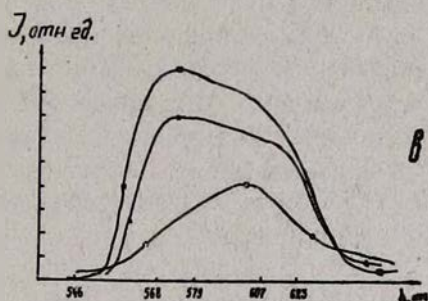
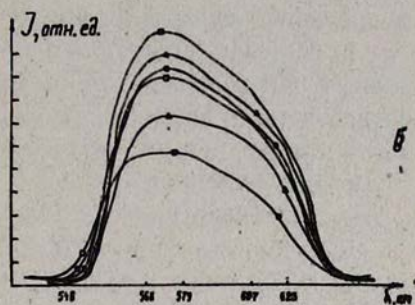
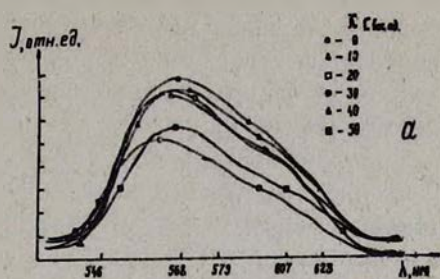
измерений были получены кривые почернений пленки Ф-130. Для правильного определения дисперсии на экране спектрографа были сфотографированы и известные спектры паров ртути.

Результаты проведенных измерений показаны на рисунке. При малых концентрациях родамина ($C \leq 0,03$ ммоль/л; рис. а) спектральная интенсивность люминесценции возрастает до двух раз с добавлением в раствор карбамида в количестве до 30% вес. ед., а дальнейшее его увеличение в растворе приводит к спаду интенсивности люминесценции. Для растворов с концентрацией родамина $C \geq 0,3$ ммоль/л добавка карбамида в раствор вплоть до 50% вес. ед. усиливает интенсивность люминесценции (рис. б).

При концентрациях родамина в воде $C \geq 1$ ммоль/л (в условиях $K=0$) начинает сильно сказываться явление концентрационного тушения люминесценции раствора, что приводит к резкому спаду интенсивности в зеленой области спектра и соответственно к сдвигу спектрального пика в красную область. Добавление карбамида в такой раствор вплоть до $K=50\%$ вес. ед. помимо постепенного роста интенсивности люминесценции приводит к смещению спектрального пика излучения обратно в зеленую область, где усиление составляет 1 порядок (рис. в). Как видно из приведенных результатов, добавка карбамида может значительно уве-

личить интенсивность люминесценции водных растворов Р6Ж. Это, по-видимому, связано с тем, что полярные молекулы карбамида оказывают на ассоциаты из молекул Р6Ж дезагрегирующее воздействие. Существенно, что оптимальное количество карбамида, обеспечивающее максимальную интенсивность люминесценции (максимальную дезагрегацию), для растворов различной концентрации родамина различно.

Для растворов с $C=0,03$ ммоль/л оптимальное содержание карбамида $K=30\%$ вес. ед. Спад интенсивности люминесценции при увеличении K от 30 до 50% вес. ед. для $C=0,03$ ммоль/л можно объяснить тем, что в условиях максимальной дезагрегации дополнительно введенные в раствор молекулы карбамида связываются не с молекулами ро-



Спектральная интенсивность люминесценции раствора в зависимости от содержания карбамида K для концентраций родамина $C=0,03$ (а), $0,3$ (б), и 1 (в) ммоль/л

дамина, а с молекулами воды, которые, несомненно, ранее способствовали растворению Р6Ж. Таким образом, для растворенных молекул родамина появляется возможность снова образовывать агрегаты, что и приводит к спаду интенсивности люминесценции. Этот механизм в определенной степени подтверждается опытом: скорость растворения родамина в растворе вода плюс карбамид (50% вес. ед.) на несколько порядков меньше, чем при его растворении в «чистой» воде.

Можно оценить, что для раствора $C=0,03$ ммоль/л максимальное усиление люминесценции при $K=30\%$ вес. ед. соответствует случаю, когда на одну молекулу родамина в воде приходится $2 \cdot 10^6$ молекул карбамида. Если считать это соотношение оптимальным, то для растворов с большей концентрацией Р6Ж достижение максимальной интенсивности люминесценции потребует, конечно, увеличения содержания K . При $K=50\%$ вес. ед. в растворе $C=0,3$ ммоль/л обеспечивается лишь $4 \cdot 10^4$ молекул карбамида на одну молекулу родамина. Поэтому интенсивность люминесценции и соответственно процесс дезагрегации для раствора $C=0,3$ ммоль/л растет с увеличением содержания карбамида до $K=50\%$ вес. ед. (рис. б). Дальнейшее увеличение карбамида возможно только при нагревании раствора.

В заключение отметим, что результаты данной работы могут быть использованы при создании перестраиваемых по частоте, а также интенсивно исследуемых в последнее время фемтосекундных лазеров на красителе (⁴).

Авторы благодарны академику АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну за большую помощь в создании лаборатории по лазерным исследованиям. Мы также благодарны Б. М. Мамиконяну и Э. М. Казаряну за поддержку в нашей работе.

Лепинаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Վ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Վ. Վ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Ե. Խ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

ԻԱԳ: Nd լազերի երկուրդ հաճմունիկ ճառագայթումով գրգռված կարբամիդ ավելացրած ռոդամին 6ժ-ի ջրային լուծույթների լյումինեսցենցիայի սպեկտրալ բնութագրերի հետազոտումը

Հետազոտված է 0,01—3 մմոլ/լ կոնցենտրացիայով Ռ6ժ ջրային լուծույթների լյումինեսցենցիոն սպեկտրների դինամիկան: Փորձով հաստատված է լուծույթի լյումինեսցենցիոն սպեկտրում ինտենսիվության ուժեղացում 2-10 անգամ և գտնված է կարբոմիդի համապատասխան օպտիմալ պարունակությունը: Ստացված արդյունքները կարելի է օգտագործել ներկանյութերի վրա հիմնված վերադասավորվող հաճախականությամբ լազերներ ստեղծելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Лазеры на красителях. Под. ред. Ф. П. Шефера. Мир, М., 1976. ² В. И. Барауля и др., Квантовая электроника, т. 8, с. 669 (1981). ³ А. А. Викторов, А. П. Савинкин, В. Б. Цареградский, Квантовая электроника, т. 10, с. 1720 (1983). ⁴ Ж. К. Дилс и др., Квантовая электроника, т. 10, с. 2398 (1983).

ՀԴԿ [579.873:21+579.862.1]:574

МИКРОБИОЛОГИЯ

С. Ш. Тер-Каварьян

Экология молочнокислых бактерий в связи с флорой высших растений

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Африкяном 30/VIII 1984)

Отмечалось ⁽¹⁾, что молочнокислые бактерии в своих исторических судьбах тесно связаны с высшими растениями. Предположение о том, что распространенность бактерий связана с их способностью сбраживать углеводы, не подтверждено ⁽²⁾. Как представляется, данная связь может быть изучена на материале по молочнокислым бактериям республики с привлечением данных о «частоте встречаемости» отдельных видов (количество штаммов данного вида, выраженное в процентах от общего количества выделенных штаммов).

Использованы методы выделения и идентификации, приведенные в наших предыдущих работах ⁽³⁻⁵⁾.

Результаты идентификации более 700 штаммов представлены в таблице, в которой материал распределен по источникам выделения (молоко, yogurt, сыры, эпифиты), по родам и под родам. Род лактобацилл включает подроды термобактерий, стрептобактерий и бетабактерий, род стрептококков—подроды стрептококков, энтерококков, виродострептококков, лактострептококков ⁽⁶⁾. Для сравнения в таблице приведены соответствующие данные по флоре молочнокислых бактерий СССР, которые являются извлечением из ранее опубликованной нами сводки ⁽⁷⁾.

Сопоставление видового состава исследованных источников Армянской ССР с таковым СССР свидетельствует о том, что в молоке вместо термобактерий представлены стрептобактерии (вместо молочной лактобациллы—растительная, ксилотная и сырная), вместо молочного—фекальный стрептококк; в yogurt (к которому относится мацун) вместо болгарской—швейцарская лактобацилла, вместо молочного—фекальный стрептококк и вместо термофильного—бычий. В сырах соотношение швейцарская/молочная лактобациллы сдвинуто в пользу молочной, но наибольшее значение приобрела сырная, вместо сырной представлена растительная лактобацилла, вместо молочного—фекальный стрептококк, соотношение термофильный/бычий стрептококки сдвинуто в сторону бычьего. На растениях растительная лактобацилла получает наибольшее распространение, вместо дельбрюковской представлена сырная лактобацилла, вместо молочного—фекальный стрептококк.

Виды, имеющие преимущественное распространение в микрофлоре республики, обладают некоторыми особенностями в отношении сбра-

Частота встречаемости молочнокислых бактерий в молочных продуктах и эпифитной микрофлоре СССР и АрмССР

Род, подрод	Вид	М о л о к о		Ю г у р т		С ы р		Э п и ф и т ы	
		СССР	АрмССР	СССР	АрмССР	СССР	АрмССР	СССР	АрмССР
Lactobacillus (Thermobacterium)	L. acidophilus			4,3	0,0				
	L. bulgaricus			34,9	2,2	0,0	1,8		
	L. delbrueckii							3,1	0,0
	L. helveticus			0,0	18,9	5,6	1,8		
	L. lactis	0,7	0,0	8,7	0,0	2,8	14,1		
(Streptobacterium)	L. salivarius					0,0	34,0	0,0	3,2
	L. plantarum	0,0	8,6			2,8	19,5	31,3	48,4
	L. casei	0,0	2,2			25,0	0,0	0,2	0,0
(Bifidobacterium)	L. xylosum	0,0	4,1						
	L. brevis					5,6	0,0	6,3	0,0
Streptococcus (Streptococcus)	L. fermentum			0,0	4,4	1,4	0,0	6,3	0,0
	Str. dysgalactiae	2,0	0,0						
(Enterococcus)	Str. faecalis	20,7	59,0	0,0	50,0	5,6	18,8	3,6	48,4
	Str. avium	0,0	4,1						
(Vibrio)	Str. uberis	0,0	2,6						
	Str. bovis	4,6	2,2	0,0	23,3	4,2	3,6		
(Lactostreptococcus)	Str. thermophilus			15,8	0,0	2,8	0,0	0,4	0,0
	Str. lactis	70,9	7,1	33,6	0,0	34,7	2,5	46,0	0,0
Leuconostoc	Str. cremoris	1,1	2,6	2,5	1,1	4,2	3,6	4,5	0,0
	L. dextranicum					5,6	0,0		
	L. paramesenteroides	0,0	7,5						

Примечание. В скобках приведены названия подродов.

живания углеводов. Так, растительная лактобацилла отличается от молочной дополнительным сбраживанием амигдалина, арабинозы, маннита, мелибиозы, рафинозы, сорбита; фекальный стрептококк от молочного—сбраживанием сорбита, трегалозы, маннита; швейцарская лактобацилла от болгарской—сбраживанием мальтозы и трегалозы; бычий стрептококк от термофильного—сбраживанием маннита, сорбита, трегалозы, арабинозы, мальтозы, рафинозы; молочная лактобацилла от швейцарской—сбраживанием фруктозы, маннозы, трегалозы, слюнная лактобацилла от швейцарской—сбраживанием фруктозы, маннита, маннозы, рафинозы, сорбита; растительная лактобацилла от сырной—сбраживанием арабинозы, мальтозы, мелибиозы, рафинозы; слюнная лактобацилла от дельбрюковской—сбраживанием мальтозы, маннита, мелибиозы, рафинозы, сорбита, трегалозы.

Таким образом, во флоре Армянской ССР, по сравнению с флорой СССР, более распространены виды молочнокислых бактерий, сбраживающие большее количество углеводов.

Флора Армении, входящая в ирано-туранскую флористическую область армено-иранской провинции (^{8 9}), относится к южной флоре, наиболее богатой видами растений. Так, если флора севера и центра страны включает 1000—1500 видов, то флора Кавказа—3000—3500 видов (¹⁰). Ассортимент углеводов в южных растениях (особенно плодовых) отличается разнообразием.

Таким образом, своеобразие флоры молочнокислых бактерий республики обусловлено спецификой флоры высших растений Армении: богатство этой флоры является источником значительного разнообразия углеводов, и распространение в регионе получают те виды молочнокислых бактерий, которые сбраживают наибольшее количество углеводов.

Опубликованный в настоящем сообщении инвентарный список видов изучаемой группы бактерий, как представляется, может быть положен в основу флоры молочнокислых бактерий республики.

Ереванский зооветеринарный институт

Ս. Շ. ՏԵՐ-ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Կարճաթթվային բակտերիաների էկոլոգիան կախված բաժնեակարգ բույսերի ֆլորայից

Օգտագործված «տարածվածության հաճախականություն» հասկացողությունը բնորոշում է տեսակը, որպես տվյալ տեսակի շտամի քանակ, արտահայտված տոկոսով, տվյալ բնակավայրի մեկ կամ մի քանի լաբորատորիաների կողմից իդենտիֆիկացված բակտերիաների խմբի ընդհանուր քանակի համեմատությամբ:

Համեմատվում են կարճաթթվային բակտերիաների տարածվածության հաճախականությունը առանձին էկոլոգիական խոռոչներում՝ (կաթ, յուղուրտ, պանիր, բույսերի մասերեսներ) ՍՍՀՄ գրականության տվյալները և ՀՍՍՀ բակտոֆլորան (հետազոտության տվյալները):

Ապացուցված է, որ հանրապետությունում տարածված տեսակները, խը-

մորում են այն ածխաջրերը, որոնցով հարուստ են տեղի բարձրակարգ բույսերը: Հանրապետութունում տարածված լակտոբացիլալինների և ստրեպտոկոկալինների հրատարակվող գույքացուցակը կարող է հիմք հանդիսանալ հանրապետութունում գտնվող կաթնաթթվային բակտերիաների ֆլորայի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *Е. И. Квасников, О. А. Нестеренко*, Молочнокислые бактерии и пути их использования, Наука, М., 1975.
- ² *Л. В. Калакуцкий, Г. М. Зенова*, Успехи микробиологии, вып. 19 (1982).
- ³ *С. Ш. Тер-Казарьян, П. С. Тер-Симонян*, ДАН АрмССР, т. 43, № 4 (1966).
- ⁴ *С. Ш. Тер-Казарьян, П. С. Тер-Симонян*, Биол. журн. Армении, т. 21, № 1 (1968).
- ⁵ *З. Х. Диланян, С. Ш. Тер-Казарьян, П. С. Тер-Симонян*, Научн. докл. высш. школы. Биол. науки, вып. 1 (1969).
- ⁶ *С. Ш. Тер-Казарьян*, там же, вып. 3 (1975).
- ⁷ *С. Ш. Тер-Казарьян*, в кн.: Проект международного кодекса номенклатуры бактерий, Айастан, Ереван, 1974.
- ⁸ *А. Л. Тахтаджян*, в кн.: Жизнь растений. Т. 1, Просвещение, М., 1974.
- ⁹ Флора Армении. Т. 1. Ред. А. Л. Тахтаджян, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1954.
- ¹⁰ *С. Ю. Липиц*, Литературные источники по флоре СССР, Наука, Л., 1975.

УДК 581.143.27

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР В. О. Казарян, И. А. Казарян, Л. А. Мнацаканян

О влиянии интенсивности и качества света на содержание физиологически активных веществ в листьях и корнях растений

(Представлено 8/X 1984)

Свет различной интенсивности оказывает дифференцированное влияние на синтез и содержание ауксинов в различных органах растений (1). Повышение освещения подавляет синтез ауксинов и стимулирует образование ингибиторов (2, 3); количество гиббереллина уменьшается по мере увеличения освещенности (4). Аалогичные данные получены в отношении ИУК и гиббереллиноподобных веществ для хвои сосны (5).

Качество света по-разному влияет на эти показатели. Красный свет в отличие от синего привел к подавлению образования свободных ауксинов у колеоптилей злаков и увеличению содержания гиббереллинов (6), тогда как синие лучи в отличие от естественного света стимулировали синтез как цитокининов, так и абсцизовой кислоты (7).

Свет непосредственно воспринимается листьями и клетками верхушечной меристемы, являющимися одновременно очагами синтеза физиологически активных веществ. Однако некоторые из них синтезируются и в корнях, которые в естественных условиях не подвергаются воздействию света. Тем не менее они будучи связанными через трофические и гормональные каналы сами также подвергаются коррелированному морфо-физиологическому изменению. В указанной интеграции, кроме трофических соединений, несомненно принимают активное участие и гормональные вещества. Учитывая, что интенсивность и качество света, воспринимаемые листьями, оказывают существенное влияние на рост корней посредством физиологически активных соединений, мы вправе полагать, что указанные воздействия должны вызывать соответствующие сдвиги и в гормональном обмене корней. Для выявления природы подобного коррелятивного воздействия нами в вегетационные сезоны 1983 и 1984 гг. были предприняты некоторые опыты, результаты которых излагаются ниже.

Объектами служили растения подсолнечника сорта Гигант, выращенные в 5-литровых глиняных вазонах с садовой почвой. Для создания дифференцированной интенсивности света растения по группам помещались в большие фанерные ящики, накрытые различным числом слоев марли. Интенсивность ФАР на уровне листьев в разных вариантах составляла 30—40 тыс., 3—4 тыс. и 300—400 люкс. Для получения красного и синего света использовались соответствующие светофильтры и лампы. Для получения синих лучей использовались ртутные лампы

(ДРТ-2) и синяя полиэтиленовая пленка с максимумом поглощения в зоне 450 мкм, для получения красного монохроматического света—зеркальные лампы накаливания в 500 Вт и красная пленка с максимумом поглощения в зоне 660 мкм.

Длинноволновая часть спектра выше 660 мкм поглощалась слоем раствора CuSO_4 толщиной в 5 см во избежание перегрева растений ⁽⁸⁾. Контролем служили растения, выращенные в условиях естественного света. Интенсивность красного и синего цвета выравнивалась и переводилась в единицы физиологически активной реакции по таблице Н. Ф. Клешнина ⁽⁹⁾ в эрг/см в 1 люкс. После 15-дневной экспозиции листья и корни были зафиксированы для анализов. Содержание ауксиноподобных соединений и ингибиторов определяли по методу В. И. Кефели и Р. Х. Турецкой ⁽¹⁰⁾.

Полученные данные по влиянию интенсивности света показывают, что в условиях естественного освещения активность стимуляторов роста в листьях максимальная, а ингибиторов—небольшая (рис. 1). По мере ослабления интенсивности света активность ауксинов уменьша-

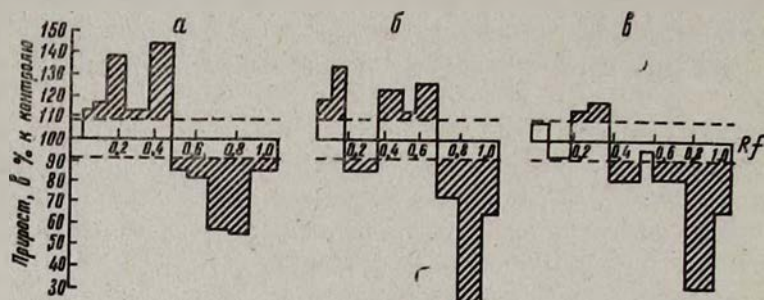


Рис. 1. Гистограмма физиологически активных веществ в листьях подсолнечника, получившего свет разной интенсивности:

а—30—40 тыс. люкс; б—3—4 тыс. люкс; в—300—400 люкс

ется, а ингибиторов увеличивается. Некоторые авторы ⁽¹¹⁾ считают, что терпеновые ингибиторы нечувствительны к свету, однако, как видно из приведенной гистограммы, по мере снижения интенсивности освещения в листьях обнаруживаются ингибиторы большой активности с Rf 0,8—0,9 в зоне, характерной для абсцизовой кислоты.

В корнях картина гистограммы физиологически активных соединений изменяется (рис. 2). В отличие от листьев здесь наблюдаются качественные сдвиги в составе стимуляторов и ингибиторов. Кроме то-

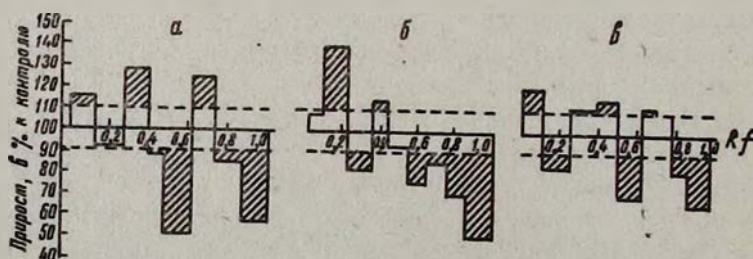


Рис. 2. Гистограмма физиологически активных веществ в корнях подсолнечника, получившего свет разной интенсивности:

а—30—40 тыс. люкс; б—3—4 тыс. люкс; в—300—400 люкс

то, динамика уменьшения активности стимуляторов по мере понижения интенсивности света по сравнению с ингибиторами становится более наглядной.

Эти показатели согласуются с динамикой роста корней и листьев в условиях света различной интенсивности. Н. А. Максимов с сотр., исследуя особенности роста корней и надземных органов, показали, что в условиях света высокой интенсивности рост корней существенно усиливается (¹²). Одновременно выявлено, что по мере ухудшения условий освещения на каждую единицу поверхности листьев приходится меньшая масса активных корней, т. е. растение стремится увеличить общую листовую поверхность для повышения общей фотосинтетической продуктивности. В результате корни остаются недоразвитыми (¹³). Подобная физиологическая перестройка, как следует из изложенных выше данных, приводит к более заметному изменению активности стимуляторов, по сравнению с ингибиторами в полярных органах, по мере ослабления интенсивности света.

Столь же примечательными оказались данные по изменению динамики физиологически активных соединений в листьях (рис. 3) и корнях (рис. 4) под влиянием света разного качества.

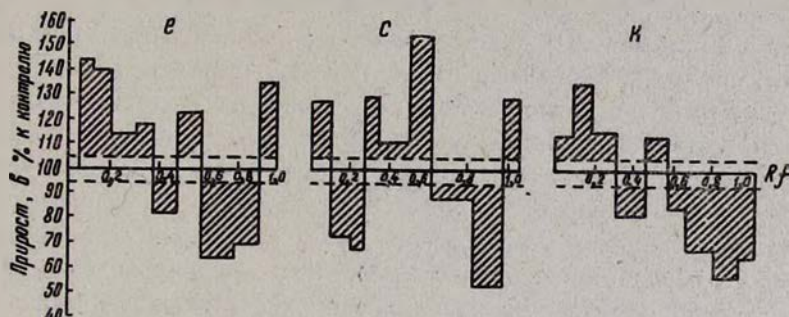


Рис. 3. Гистограмма физиологически активных веществ в листьях подсолнечника, получившего свет разного качества: е—естественный; с—синий; к—красный

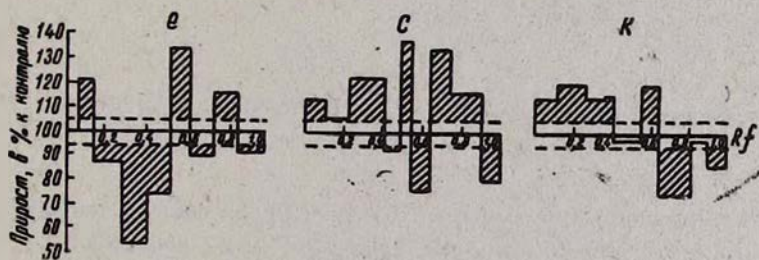


Рис. 4. Гистограмма физиологически активных веществ в корнях подсолнечника, получившего свет разного качества: е—естественный; с—синий; к—красный

Наблюдения показали, что свет различного качества дифференцированно воздействует на листья подсолнечника. На синем свете они оказались более крупными и жесткими, а в условиях красного—несколько пожелтевшими. Такие изменения листьев под действием красного света Н. П. Воскресенская (¹⁴) связывает с нарушением белкового синтеза.

Полученная гистограмма активности ауксиноподобных и ингибиторных соединений в листьях (рис. 3) иллюстрирует проявление существенной разницы под действием естественного, синего и красного света.

В условиях синего света существенно повышалась активность стимуляторов как в корнях (рис. 4), так и в листьях (рис. 3). Именно этим можно объяснить повышение корнеобеспеченности листьев в условиях синего света (¹⁵). Однако при этом в листьях обнаруживается и больше ингибиторов (рис. 3). Красный свет, хотя в отношении фотосинтетической продуктивности более активен, чем синий, тем не менее, как видим из приведенных гистограмм, меньше способствует синтезу физиологически активных веществ, в первую очередь в корнях. Под его действием существенно усиливается синтез ингибиторов в листьях.

По данным, полученным в нашей лаборатории (¹⁶), в условиях красного света в корнях увеличивалось содержание триптофана. Видимо, этим можно объяснить уменьшение содержания ауксинов, когда нарушение в их синтезе происходит на уровне триптофана. При этом следует учесть, что только под действием красного света в корнях отмечалось появление ингибитора с Rf пара-кумаровой кислоты (0,70—0,79), известной как кофактор ИУК-оксидазы (³).

Таким образом, изложенные выше данные наглядно показывают, что свет, воспринимаемый через листья, оказывает непосредственное влияние на разнообразные метаболические процессы, в том числе и на синтез физиологически активных веществ, которые свою регуляторную функцию осуществляют в корневой системе, влияя, с одной стороны, на рост, с другой—на метаболические процессы. В данном случае влияние интенсивности и качества света на растение через гормональные каналы передается корням, в соответствии с массой и физиологической активностью листьев, проявляющих свою жизнедеятельность, и таким образом интегрируется корне-лиственное взаимоотношение.

Институт ботаники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ի. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ,
Լ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Բույսերի արմատներում և տերևներում ֆիզիոլոգիական ակտիվ
նյութերի պարունակության վրա լույսի ինտենսիվության ու
ոռակի ազդեցության մասին

Լույսը, ընկալվելով տերևների կողմից, անմիջականորեն ազդում է նրանցում մետաբոլիկ պրոցեսների, այդ թվում և ֆիզիոլոգիական ակտիվ նյութերի սինթեզի վրա: Լույսի ինտենսիվության և ոռակի ազդեցությունը բույսերի վրա հորմոնների միջոցով հաղորդվում է արմատներին, որոնք էլ ցուցաբերում են համապատասխան կենսագործունեություն՝ կախված տերևների մասսայից և ֆիզիոլոգիական ակտիվությունից: Այսպիսով, հորմոնալ ճանապարհով իրականացվում է արմատ-տերևային փոխհարաբերության ինտեգրացումը:

- ¹ H. E. Street, Nature, v. 188 (1962). ² W. S. Hillman, A. W. Galston, Plant Physiol., v. 32 (1957). ³ В. И. Кефели, Природные ингибиторы роста и фитогормоны, Наука, М., 1974. ⁴ Н. Н. Протасова, В. И. Кефели, Э. М. Коф и др. в кн.: Теоретические основы фотосинтетической активности, М., Наука, 1972. ⁵ Л. Н. Меньйло, Тезисы докл. 6-ой Всес. конф. по фотоэнергетике раст., Львов, 1980. ⁶ А. И. Дурандин, Бюл. Главного Бот. сада. в. 83 (1972). ⁷ K. H. Köhler, Dörfler Marianna, H. Göring, Biol. plantar., v. 22, №2 (1980). ⁸ Н. П. Воскресенская, Фотосинтез и спектральный состав света, М., Наука, 1965. ⁹ А. Ф. Клешнин, Растение и свет, М., Изд. АН СССР, 1954. ¹⁰ Р. Х. Турецкая, В. И. Кефели, Методы определения регуляторов роста и гербицидов в растениях, М., 1969. ¹¹ H. Kende, S. Kays, Naturwissenschaft., v. 58 (1971). ¹² Н. А. Максимов, Е. В. Лебединцева, Т. А. Красносельская-Максимова, Изв. Главного Бот. сада РСФСР, т. 23, в. 1 (1924). ¹³ П. А. Хуршудян, Г. С. Авакян, ДАН АрмССР, т. 46, №3 (1968). ¹⁴ Н. П. Воскресенская, Фоторегуляторные механизмы метаболизма раст., Тимирязевские чтения, 38, Наука, М., 1979. ¹⁵ В. О. Казарян, Н. Э. Кочарян, ДАН АрмССР, т. 69 № 4 (1979).

УДК 595.785

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. А. Вардилян

**Новый вид пяденицы из рода *Semiothisa* Hübner
(Lepidoptera, Geometridae) из Армянской ССР**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 6/XII 1984)

При обработке материала из рода *Semiothisa* Hübner обнаружен новый вид, описание которого приводится ниже.
Semiothisa erevanica Wardikjan sp. nov. (рис. 1, 2).

Крупные бабочки. Размах крыльев 37—38 мм. Усики у самца пыльчатые, у самки щетиновидные. По рисунку и окраске передние и задние крылья резко отличаются. По середине передних крыльев про-

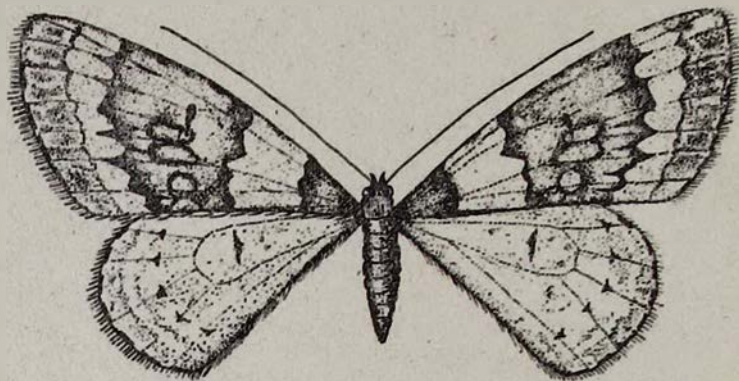


Рис. 1. *Semiothisa erevanica* Wardikjan sp. nov.

ходит широкая волнистая срединная перевязь, края которой резко выражены и покрыты темными чешуйками; середина перевязки светлая. Основание крыла покрыто такими же темными чешуйками. По внешнему краю проходит узкая линия в виде пунктира; впереди этой линии расположена сероватая равномерно окрашенная внешняя перевязь.

Задние крылья светлой окраски с явно выраженным продолговатым срединным пятном. Ближе к наружному краю проходит точечная срединная перевязь. Внешний край крыла с полоской в виде пунктира.

Задние голени довольно длинные с двумя парами мелких шпор. Генитальный аппарат самца (рис. 2, А).

Вальва по наружному краю имеет глубокую выемку. Дорзальный кант широкий, сильно склеротизованный и образует пальцевидный отросток. Вентральная часть вальвы (саккулус) сильно склеротизована. Вальвула складчатая, перепончатая. Саккус широкий, слабо вытянутый и равномерно склеротизованный.

Ункус конусовидный, широкий с тупой вершиной. Нижний край восьмого стернита слабо склеротизован в виде отдельной пластинки с

глубокой выемкой посередине. Эдеагус маленький с одним склеротизованным шипом на *pars inflabilis*. Вершина эдеагуса крючкообразно согнута.

Генитальный аппарат самки (рис. 2, Б).

Анальные сосочки крупные, треугольной формы с длинными, хорошо склеротизованными задними апофизами. Передние апофизы намного короче и менее склеротизованы. Совокупительное отверстие довольно широкое, слабо склеротизованное, суживаясь, сливается с перепончатым протоком сумки, который посередине имеет широкую склеротизованную полосу. Копулятивная сумка удлиненная, перепончатая, без *lamina dentata*.

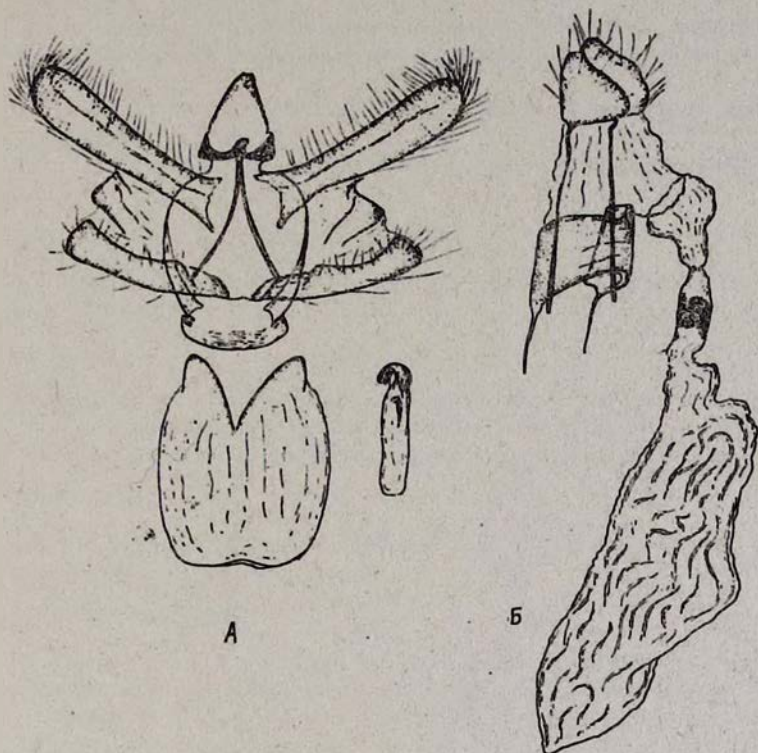


Рис. 2. *Semiothisa erevanica* Wardikjan sp. nov. А—половой аппарат самца; Б—половой аппарат самки

По величине (размах крыльев 37—38 мм) и по окраске описываемый вид сильно отличается от всех представителей рода *Semiothisa*. Имеются резкие отличия и в строении генитального аппарата.

Самец обособляется от представителей этого рода формой и степенью склеротизации саккулуса, саккуса и эдеагуса, а также формой вентральной пластинки.

Самка отличается по форме анальных сосочков, по строению копулятивной сумки и ее протока.

Голотип (самец)—окр. Еревана (зоопарк) 6/X 1959. Аллотип (самка—Азизбековский р-н, с. Гергер) 25/VI 1962. Голотип и аллотип хранятся в коллекциях Института зоологии Академии наук Армянской ССР.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Նրկաչափի բիբլոնների նոր տեսակ *Semiothisa Hübn*
սեռից (*Lepidoptera, Geometridae*) Հայկական ՍՍՀ-ից

Հոդվածում տրված է *Semiothisa Hübn* սեռից մի նոր տեսակ՝
Semiothisa erevanica Wardikjan sp. nov. ֆեդերալիզացիայի ժամանակ,
թե արտաքին տեսքով և թե սևական զրգանների կառուցվածքով
տարբերվում է այդ սեռի բոլոր ներկայացուցիչներից:

Հայտնաբերված նոր տեսակի տիպը և ալլոտիպը պահպանվում են
կական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Կենդանաբանության ինստիտուտի
հավաքածուներում:

