

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ ДОКЛАДЫ

LXXXI, №1

1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհատ. գիտ. բեկեմ-
 ծու (պատ. ֆառառար), Է. Գ. ԱՅՐԻՎՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐՍԵՆՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐԻՆԵՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ քրդ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄ-
 ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղա-
 փոխ), Վ. Գ. ՄԵՆԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քրդ.
 անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
 դեմիկոս, Ծ. Մ. ՍԱՊՈՆԴՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քրդ.
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
 ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
 ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
 демик АН АрмССР, В. О. ҚАЗАРЯН,
 академик АН АрмССР (зам. отв. редак-
 тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН
 АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,
 академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-
 ДЖЯН, академик АН АрмССР.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Գ. Գ. Էմին—Մոդուլները և խիստ ուղիղները	էջ 3
Ռ. Ի. Հովսեփյան—Ֆունկցիայի մոնոտոնությունը ապահովող որոշ նոր պայմանների մասին	7
Ս. Հ. Դավայան—Համասեռ բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևը	12

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ն. Ս. Մելիքյան—Օրացուցային պլանավորման խնդիրը տեխնոլոգիական ցանցերում	17
---	----

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Ա. Մառխիճ, Ն. Ա. Նիկոլսկայա—Եզրագծի վրա անկյունային կետերով կորվածքների պարունակող անվերջ տիրույթներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների հաշվումը	21
--	----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Հ. Սարգսյան—Ուղղանկյուն սալի և թեթև թաղանթի երկայնական մազնիսական դաշտում տատանումների խնդիրների մասին	26
---	----

ԷԼԵԿՏՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ռ. Հ. Թաթխանյան, Վ. Ռ. Սիմոնյան—Մակերևութային էլեկտրամագնիսական ալիքները գիրոտրոպ բյուրեղներում	31
---	----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Ն. Հայրապետյան, Յու. Ն. Հայրապետյան—Դիֆուզիայի գործակցի վարքը «մասնիկների հապաղվող ամպի եզրին»	35
Ռ. Հ. Թաթխանյան—Թերմոէլեկտրամագնիսական ալիքները անիզոտրոպ կիսահաղորդիչներում	40

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ա. Վաղդիկյան—Երկրաչափ թիթեռների նոր տեսակներ Eupithecia Curt. սեռից Հայաստանից	45
---	----

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
Г. Г. Экин—Модули и строгие радикалы	3
Р. И. Овсепян—О некоторых новых условиях, обеспечивающих монотонность функций	7
С. Г. Дадалаян—Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов	12
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	
И. А. Меликян—Задача календарного планирования на технологических сетях	17
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	
И. А. Матехин, И. А. Никольская—Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в бесконечных областях, содержащих вырезы с угловыми точками границы	21
МЕХАНИКА	
С. О. Саркисян—К задачам о колебании прямоугольной пластинки и полой оболочки в продольном магнитном поле	26
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	
Р. Г. Тарханян, В. Р. Симонян—Поверхностные электромагнитные волны в гиротропных кристаллах	31
ФИЗИКА	
В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян—Поведение коэффициента диффузии на «краю расплывающегося облака частиц»	35
Р. Г. Тарханян—Термоэлектромагнитные волны в анизотропных полупроводниках	40
ЭНТОМОЛОГИЯ	
С. А. Вардилян—Новые виды пядениц из рода <i>Eupithecia</i> Curt. (Lepidoptera, Geometridae) из Армении	45

CONTENTS

MATHEMATICS

P.

- G. G. Emin*—Modules And Strict Radicals 3
- R. I. Ousepian*—On some new conditions providing the monotonicity of functions 7
- S. H. Dalatian*—Discriminant form of the finite family of the homogeneous polynomials 12

APPLIED MATHEMATICS

- N. A. Melikian*—The task of calendar planning on the technology nets 17

THEORY OF ELASTICITY

- N. A. Matehin, N. A. Nikolskaya*—Stress intensity factors computation in infinite domains with corner points of a board. 21

MECHANICS.

- S. O. Sarkisian*—On the problem of vibration of orthogonal plates and inclined shells on longitudinal magnetic--fields 26

ELECTRODYNAMICS

- R. G. Tarkhanian, V. R. Simonian*—Surface electromagnetic waves in gyrotropic crystals 31

PHYSICS

- V. N. Hairapetian, U. N. Hairapetian*—The behaviour of the diffusion coefficient "on the edge of the breaking particles cloud". 35
- R. G. Tarkhanian*—Thermoelectromagnetic waves in anisotropic semi-conductors 40

ENTOMOLOGY

- S. A. Vardikian*—New Geometrid species of the genus *Eupithecia* Curt. (Lepidoptera, Geometridae) from the SSR of Armenia. 45

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 17.04.1985 г. Подписано к печати 13.09.1985 г. ВФ 06821

Бумага № 2, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-изд. л. 3,18. Тираж 430. Заказ 315. Издат. 6462.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-97-238.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.55

Г. Г. Эмин

Модули и строгие радикалы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/XII 1983)

В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин в ⁽¹⁾ предложили метод, с помощью которого в категории ассоциативных колец As радикалы в смысле Куроша—Амицура можно описывать на языке модулей. Л. А. Скорняков в ⁽²⁾ обобщил этот метод для случая бикатегорий. Оказалось, что пользуясь тем же методом, на языке модулей можно описывать строгие, а также сильно наследственные строгие радикалы (см. ⁽³⁾) категории As .

Пусть U —произвольное ассоциативное кольцо. Под U -модулем будем понимать правый U -модуль. Аннулятором U -модуля A называется множество $(O:A)_U = \{u|u \in U, A \cdot u = O\}$. Если $(O:A)_U = O$, то A —точный U -модуль, если же $A \cdot U = O$, то A —тривиальный U -модуль. Пусть Σ_U —произвольный класс U -модулей. Ядром класса Σ_U называется пересечение $Ker \Sigma_U = \bigcap \{(O:A)_U | A \in \Sigma_U\}$. Если $\Sigma_U = \emptyset$, то, как обычно, считаем $Ker \Sigma_U = U$. Если же $Ker \Sigma_U = O$, то класс называется точным. Известно следующее.

Предложение 1. Пусть U —произвольное кольцо, V —идеал кольца U . Если A является U/V -модулем, то при композиции $a \cdot u = a \cdot (u+V)$ A становится U -модулем, причем $V \subseteq (O:A)_U$. Обратно, если A есть U -модуль и идеал $V \subseteq (O:A)_U$, то при композиции $a(u+V) = a \cdot u$ A становится U/V -модулем. Всякий подмодуль U/V -модуля A есть подмодуль U -модуля A и обратно.

Каждому кольцу U поставим в соответствие некоторый класс Σ_U нетривиальных U -модулей (может быть и пустой), и пусть Σ —класс всех Σ_U , где U пробегает класс ассоциативных колец.

Учитывая предложение 1, дадим такое

Определение 1. Класс Σ назовем строго общим классом модулей, если выполнены следующие условия:

P1. Из $A \in \Sigma_{U/V}$ следует $A \in \Sigma_U$;

P2. Из $A \in \Sigma_U$ следует $A \in \Sigma_{U/V}$, если $V \subseteq (O:A)_U$;

P3*. Если класс Σ_U точен, то $\Sigma_V \neq \emptyset$ для любого ненулевого подкольца V кольца U ;

P4. Если $\Sigma_V \neq \emptyset$ для любого ненулевого идеала V кольца U , то класс Σ_U точен.

Очевидно, что строго общий класс модулей является общим классом модулей (см. ⁽¹⁾), поэтому мы можем рассмотреть Σ -радикал. Напомним определения.

Пусть Σ —общий класс модулей. Σ -радикалом $R(\Sigma, U)$ кольца U назовем ядро $\text{Ker } \Sigma_U$ класса Σ_U , т. е. $R(\Sigma, U) = \text{Ker } \Sigma_U$. Если $\Sigma_U = \emptyset$, то кольцо U назовем Σ -радикальным. Если класс Σ_U точен, т. е. $R(\Sigma, U) = 0$, то кольцо U назовем Σ -полупростым.

Под радикалом будем понимать некоторый радикал в смысле Куроша—Амицура. Радикал R категории As называется строгим, если для любого кольца U любое R -подкольцо кольца U содержится в R -радикале $R(U)$.

Теорема 1. Пусть Σ —строго общий класс модулей. Тогда Σ -радикал является строгим радикалом. Обратно, если Σ —такой общий класс модулей, что Σ -радикал является строгим радикалом, то Σ —строго общий класс модулей. Для любого строгого радикала R существует такой строго общий класс Σ -модулей, что R совпадает с Σ -радикалом.

Доказательство. Пусть V — Σ -радикальное подкольцо кольца U . Покажем, что $V \subseteq R(\Sigma, U)$. Предположим обратное, $V \not\subseteq R(\Sigma, U)$. Тогда кольцо $\bar{V} = V/V \cap R(\Sigma, U) \cong V + R(\Sigma, U)/R(\Sigma, U)$ является ненулевым подкольцом кольца $\bar{U} = U/R(\Sigma, U)$, для которого выполнено условие: $\Sigma \bar{V}$ —точный класс (см. ⁽¹⁾), следствие 1). Из условия $P3^*$ следует, что $\Sigma \bar{V} \neq \emptyset$. Значит и $\Sigma V \neq \emptyset$, в силу условия $P1$. Получили противоречие с тем, что V — Σ -радикальное кольцо. Значит, $V \subseteq R(\Sigma, U)$.

Обратно, пусть Σ —такой общий класс модулей, что Σ -радикал является строгим. Предположим, что условие $P3^*$ не выполнено и, значит, существует такое ненулевое подкольцо V Σ -полупростого кольца U , что $\Sigma V = \emptyset$. Поскольку V — Σ -радикальное подкольцо кольца U и Σ -радикал является строгим, то ненулевое подкольцо V должно лежать в радикале $R(\Sigma, U) = 0$. Получили противоречие, которое показывает, что условие $P3^*$ выполнено.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы.

Пусть R —произвольный строгий радикал. Тогда существует (⁽¹⁾, теорема 1) такой общий класс Σ , что R совпадает с Σ -радикалом. Поскольку R —строгий радикал, то Σ -радикал также является строгим. Значит, в силу первой части этой теоремы Σ —строго общий класс модулей. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть r —произвольный радикал в категории абелевых групп Ab . Тогда по этому радикалу r можно построить строгий радикал r^* в категории As , определенный по следующему правилу: $[r^*(U)]^+ = r(U^+)$, где U —произвольное кольцо и U^+ —аддитивная группа кольца U (см. ⁽⁴⁾). Каждому кольцу U поставим в соответствие класс Σ'_U всех таких нетривиальных U -модулей A , что фактор-группа $U^+ / [(0:A)_U]^+$ является r -полупростой группой. Пусть Σ' —класс всех Σ'_U , где U пробегает класс ассоциативных колец. Тогда в силу теоремы 1 и доказательства теоремы 1 работы (⁽¹⁾) Σ' —строго общий класс модулей.

Замечание 2. Теорема 1 дает возможность изложить описание строгих радикалов в категории модулей над всеми кольцами, используя лишь язык модулей. А именно, с помощью систем $\{\Sigma;$

$Ker \sum, \{U \in As\}$, удовлетворяющих условиям (R1)–(R3) работы (5), где Σ — строго общие классы модулей.

Напомним, что строгий радикал R категории As называется сильно наследственным строгим радикалом, если всякое подкольцо R -радикального кольца является R -радикальным. В работе (3) показано, что радикал R является сильно наследственным строгим тогда и только тогда, когда для всякого подкольца V любого кольца U справедливо равенство $R(V) = V \cap R(U)$. Но в таком случае вполне аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что верна

Теорема 2. Пусть Σ — такой класс модулей, для которых выполнены условия P1, P2 и

P5*. Для любого подкольца V кольца U справедливо равенство $Ker \sum_V = V \cap Ker \sum_U$.

Тогда Σ является строго общим классом модулей, причем Σ -радикал является сильно наследственным строгим радикалом. Обратно, если Σ — такой общий класс модулей, что Σ -радикал является сильно наследственным строгим радикалом, то условие P5* выполнено. Для любого сильно наследственного строгого радикала R существует такой общий класс Σ -модулей, удовлетворяющих условию P5*, что R совпадает с Σ -радикалом.

Замечание 3. Известно (6), что сильно наследственные строгие радикалы категории ассоциативных колец описываются с помощью наборов простых чисел $\Pi = (p_1, \dots, p_k, \dots)$. Сильно наследственный строгий радикал категории As , определенный набором простых чисел Π , будем обозначать R_Π . Поставим в соответствие каждому кольцу U класс $\sum_U^\Pi$ всех таких нетривиальных U -модулей A , что фактор-кольцо $U/(O:A)_U$ является R_Π -полупростым кольцом, т. е. из $u \in (O:A)_U$ следует, что $u \in (O:A)_U$, $u \in U$, $n - \Pi$ -число. Пусть Σ^Π — класс всех $\sum_U^\Pi$, где U пробегает класс ассоциативных колец. Получили, что классы модулей Σ , для которых выполнены условия P1, P2 и P5*, — это в точности всевозможные Σ^Π для всевозможных наборов простых чисел Π .

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Գ. Գ. ԷՄՆ

Մոդուլներ և խիստ ռադիկալներ

Վ. Ա. Անդրոնյանիկիչը և Յու. Մ. Ռյարուխինը առաջարկել էին մի մեթոդ, որի օգնությամբ ասոցիատիվ օղակների ռադիկալները կարելի է նկարագրել մոդուլների լեզվով: Պարզվում է, որ օգտվելով այդ մեթոդից կարելի է նկարագրել ոչ միայն ռադիկալները, այլ նաև խիստ, ինչպես նաև ուժեղ ժառանգական խիստ ռադիկալները: Վերը նշված նկարագրությունները արվում են մոդուլների խիստ ընդհանուր դասերի միջոցով: Դա հնարավորություն է տալիս բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի խիստ ռադիկալները, ինչպես նաև ուժեղ ժառանգական խիստ ռադիկալները նկարա-

գրել $\{\Sigma; R_R(\Sigma, U) | U \in As\}$ տիպի խիստ ուղղակիների համաձայնեցված սխեմաների միջոցով (տես՝ ⁵), որտեղ Σ -ները՝ դրանք մոդուլների խիստ ընդհանուր դասեր են: Այսպիսով, բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում էլ խիստ և ուժեղ ժառանգական խիստ ուղղակիները հնարավոր է նկարագրել միմիայն մոդուլների օգնությամբ: Բացի այդ, հայտնաբերված են մոդուլների ընդհանուր դասերի հետաքրքրություն ներկայացնող նոր օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Андрукиевич, Ю. М. Рябухин, ДАН СССР. т. 156, № 5 (1964). ² L. A. Skornjakov, in: Universale Algebren und Theorie der Radikale, Akademie—Verlag, Berlin, 1976. ³ Е. Г. Шлызгейфер, Тр. ММО, т. 19 (1968). ⁴ B. J. Gardner, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v. 24, № 3—4 (1973). ⁵ Г. Г. Эмин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 3 (1979). ⁶ P. N. Stewart, Proc. Amer. Math. Soc., v. 39, № 2 (1973).

УДК 517.518

МАТЕМАТИКА

Р. И. Овсепян

О некоторых новых условиях, обеспечивающих монотонность функции

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/XII 1983)

Всюду ниже рассматриваются вещественные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$. D обозначает класс функций, удовлетворяющих условию Дарбу, т. е. отображающих связное множество в связное.

B_1 —первый класс Бэра. $\mathcal{A}$ —множество функций, аппроксимативно (иначе, асимптотически) непрерывных всюду. Известно ⁽¹⁾, что $\mathcal{A} \subset DB_1$ (здесь $DB_1 \equiv D \cap B_1$). $f_{ap}^-(x)$ ($f_{ap}^+(x)$; $f_{-ap}^-(x)$)—аппроксимативная (правая; левая) производная в точке x . $f_q^-(x)$ ($f_q^+(x)$; $f_{-q}^-(x)$)—производная (правая; левая) Маркуса ⁽¹⁾. Это значит, что для точки x существуют интервал Δx и некоторое множество $E \subset \Delta$ такое, что $\Delta \setminus E$ имеет первую категорию и $\lim_{t \in E; t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f_q^-(x)$

Определение 1. Функцию f назовем a -непрерывной (c -непрерывной) в точке x , если существует множество E , для которого x —двусторонняя предельная точка (двусторонняя точка конденсации) и $\lim_{t \in E; t \rightarrow x} f(t) = f(x)$.

Очевидно, что функция класса Дарбу обязана быть c -непрерывной (следовательно, и a -непрерывной) всюду. Обратное неверно: функция Дирихле или ее очевидная модификация.

Определение 2. Функцию f назовем d -непрерывной в точке x , если существует такое множество E , что для любого $\delta > 0$

$$\text{mes}\{(x - \delta, x) \cap E\} > 0, \text{mes}\{(x, x + \delta) \cap E\} > 0 \text{ и } \lim_{t \in E; t \rightarrow x} f(t) = f(x).$$

Очевидно, что d -непрерывность в точке более слабое условие, чем асимптотическая непрерывность, и более сильное, чем c -непрерывность.

Известно, что если производная функции всюду равна нулю, то эта функция—постоянная. Этот факт обобщался многими авторами ^(1,2). Приведем те результаты, к которым непосредственно примыкает наша работа.

Л. Шеффер (см. ⁽³⁾, с. 73, а также ⁽⁴⁾, с. 44) доказал, что непрерывная функция сводится к постоянной, если в каждой точке, исключая, быть может, некоторое счетное множество (и. с. м.), она имеет правостороннее производное число, равное нулю. Однако, как следует из одного результата Ярника (см. ⁽⁵⁾), существуют непостоян-

ные непрерывные функции, у которых в каждой точке существует справа или слева (в зависимости от точки) производное число, равное нулю.

В связи с теоремой Шеффера Н. Н. Лузиным был сформулирован такой вопрос (см. ⁽⁵⁾, с. 374): обязана ли быть постоянной функция, имеющая всюду конечную производную, равную нулю почти всюду (п. в.). Ответ на этот вопрос содержится в теореме Ю. Гольдовского и Л. Тонелли (см. ⁽²⁾, с. 297 и ⁽¹⁾, с. 174): если 1) f — непрерывна ($f \in C$); 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная или бесконечная правосторонняя производная $f'_+ \geq -\infty$; 3) $f'_+ \geq 0$ п. в., то f монотонно возрастает ($f \uparrow$).

Нами установлено более сильное утверждение:

Теорема 1. Если 1) $f \in C$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует или $f'_{+ap}(x) (\geq -\infty)$ или $f'_{-ap}(x) (\geq -\infty)$; 3) $f'_{\pm(x)ap}(x) \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$.

Еще раз обращаем внимание на упомянутый выше результат Яриика.

В 1939 г. Г. П. Толстов (см. ⁽⁷⁾, а также ⁽¹⁾, с. 175) усилил утверждение Гольдовского—Тонелли, установив следующее: если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{ap}(x) (\geq -\infty)$; 3) $f'_{ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

В 1950 г. З. Загорский (см. ⁽⁸⁾, а также ⁽¹⁾, с. 175) доказал: если 1) $f \in D$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f' (\geq -\infty)$; 3) $f' \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как видим, здесь первое условие теоремы Толстова ослаблено ($\mathcal{A} \subset D$), а второе и третье усилены. С другой стороны, как тогда же указал З. Загорский, функция, удовлетворяющая во всех трех пунктах минимальным условиям теорем Толстова и Загорского, не обязана быть монотонной. В этой связи им была высказана гипотеза ⁽⁸⁾, что справедливо такое утверждение: если 1) $f \in DB_1$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{ap} (\geq -\infty)$; 3) $f'_{ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Эта гипотеза Загорского получила подтверждение в 1965 г. в работах А. Брукнера и Т. Святковского (см. ⁽¹⁾, с. 175).

Наш метод, основанный на иных (категорных) соображениях (чем у Брукнера и Святковского), также позволяет доказать их теорему, которая, очевидно, содержит теорему Г. Толстова, но не включает теорему Загорского. Упомянутая выше теорема Загорского в оригинале имеет длинное и сложное доказательство, которое по существу использует условие $f \in D$.

Нами установлено более сильное утверждение (с простым и прозрачным доказательством).

Теорема 2. Если 1) f — a -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f' (\geq -\infty)$; 3) $f' \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Точный аналог теоремы Брукнера—Святковского для производной С. Маркуса f'_a был установлен Дж. Леонардом (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 184). При этом он пользовался методом Брукнера.

Мы показываем, что в теореме Леонарда условие $f \in B_1$ излишне, а условие $f \in D$ можно заменить на значительно более слабое (заметим, что не так обстоит дело в случае теоремы Брукнера—Святковского: она перестает быть верной, если вместо $f \in DB_1$ предполагать лишь $f \in DB_2$). Итак, справедлива

Теорема 3. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_q (\geq -\infty)$; 3) $f'_q \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Наш метод позволяет проводить исследование и в случае односторонних производных. В этой связи заметим, что существуют непрерывные функции, обладающие всюду конечной правосторонней производной класса L^1 , у которых левосторонняя производная (даже асимптотическая) не существует на множестве мощности континуума (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 64).

Теорема 4. Если 1) $f \in DB_1$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ap}(x)$ или $f'_{-ap}(x)$; 3) $f'_{\pm(x)ap}(x) \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как показывает пример Крофта (см. ⁽¹⁾, с. 12), условие конечности $f'_{\pm ap}$ в теореме 4 опустить нельзя. Но это можно делать, если функция непрерывная: теорема 1 настоящей заметки.

Теорема 5. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ap} \in L^1$; 3) $f'_{+ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Опустить условие суммируемости нельзя, даже если $f \in DB_2$.

Теорема 6. Если 1) f — a -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная f'_* ; 3) $f'_* \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как показал Леонард (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 187), условие конечности f'_* можно опустить, если $f \in DB_1$ (и, как оказывается, при $f \in DB_2$ этого делать уже нельзя).

Теорема 7. Если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{+q} (\geq -\infty)$, которая конечна п. в.; 3) $f'_{+q} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Это утверждение дополняет теорему 3.

Рядом авторов (см., например, ⁽¹⁰⁻¹²⁾) исследовался вопрос: в какой мере аппроксимативная производная обобщает обычную производную. Так, А. Хинчин установил (см. ⁽¹⁾, с. 157), что если всюду существует конечная f'_{ap} , для которой выполняется неравенство $f'_{ap}(x) \leq \Phi'(x)$ (или $f'_{ap}(x) \geq \Phi'(x)$) при какой-либо Φ , то всюду $f'_{ap}(x) = f'(x)$. Это так, например, если f'_{ap} — ограничена (и, как легко убедиться, не так, даже если $f'_{ap} \in L^1$). С другой стороны, непрерывная функция может быть асимптотически дифференцируемой почти всюду и нигде в обычном смысле (см. ⁽⁹⁾, с. 448)*. Как будет видно из теоремы 10, в таком примере множество, где не существует f'_{ap} , обязано быть второй категории.

Г. Толстов показал (см. ⁽¹⁰⁾, а также ⁽¹⁾, с. 157), что если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) всюду существует $f'_{ap} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве f'_{ap} является производной (однако множество, где нет производной, может быть положительной меры, даже если f'_{ap} всюду конечна). Нами установлено, что условие $f \in \mathcal{A}$ в теореме Толстова излишне.

* Любопытно, что если непрерывная функция нигде не имеет правосторонней производной, то в бесконечном количестве точек она обязана быть асимптотически дифференцируемой (см. ⁽⁹⁾, с. 364).

Теорема 8. Если всюду существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве $f_{ар} = f'$.

Пример Крофта показывает, что в теореме 8 заменить $f_{ар}$ на $f_{+ар}$ нельзя, даже если $f \in DB_1$.

Теорема 9. Если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) вне некоторого множества первой категории и нулевой меры существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве существует f' .

Пример Крофта показывает, что в теореме 9 условие $f \in \mathcal{A}$ нельзя ослабить до $f \in DB_1$ (при этом f может стать недифференцируемой даже всюду). С другой стороны, утверждение теоремы 9 сохраняет силу, если условие $f \in \mathcal{A}$ заменить на d -непрерывность всюду (или на c -непрерывность всюду, но исключительное множество уже должно быть не более, чем счетным).

Теорема 10. Если 1) $f \in C$; 2) вне некоторого множества первой категории существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве существует f' .

Теорема 11. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ар} \in L^1$, то f —абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду существует производная.

Условие конечности $f'_{+ар}$ опустить нельзя, ибо, как известно (см., например, (6), с. 392), существуют непрерывные, но не абсолютно непрерывные функции, производная (быть может, бесконечная) которых существует всюду и суммируема. Заметим еще, что можно построить непрерывную функцию, у которой всюду существует асимптотическая производная (возможно, бесконечная) класса L^1 , однако множество недифференцируемости имеет положительную меру.

Ясно, что теорема 11 является обобщением известной теоремы А. Лебега, где речь идет о непрерывной функции и обычной производной. В этой связи заметим, что множество недифференцируемости функции f из теоремы 11 может иметь мощность континуума, даже если всюду существует конечная $f'_{ар} \in L^1$.

Отметим еще одно утверждение подобного рода: если $F(x)$ всюду имеет конечную аппроксимативную производную, интегрируемую по Данжуа (в широком смысле), то $F(x)$ является неопределенным интегралом Данжуа своей производной $F'_{ар}$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Ի. ՀՈՎՍԵԲՅԱՆ

Հանկցիայի մեմոռնուբյուրն ապանովող որոշ նոր պայմանների մասին

Աշխատանքում բերված պնդումները ընդհանրացնում են այլ հեղինակների պատկանող որոշ թեորեմներ ֆունկցիայի մոնոտոնության վերաբերյալ:

Օրինակ՝ եթե անընդհատ ֆունկցիան յուրաքանչյուր կետում բացառու-

Ինչպե՞ս գուցե մի հաշվելի բազմություն ունի աջակողմյան f_{+0} կամ ձախակողմյան f_{-0} ասիմպտոտիկ ածանցյալ (վերջավոր կամ անվերջ) և այն ոչ բացասական է համարյա ամենուրեք, ապա այդ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է (թեորեմ 1): Այս պնդումը ընդհանրացնում է Գ. Գոլոմսկու և Լ. Տոնելիի թեորեմը, որտեղ խոսքը գնում է աջակողմյան սովորական ածանցյալի մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Bruckner, Differentiation of Real Functions, Lecture Notes in Mathematics, 659 (1978). ² С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949. ³ А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, Гос. технико-теоретическое изд-во, М., 1934. ⁴ А. Карман, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, Мир, М. 1971. ⁵ V. Jarník, Fund. Math., v. 21 (1933). ⁶ Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, М.—Л., 1951. ⁷ G. Tolstoff, Mat. сб., т. 5 №3 (1939). ⁸ Z. Zahorski, TAMS, v. 69 (1950). ⁹ J. Leonard, Rev. Roum. Math. Pures Appl., v. 17, №5 (1972). ¹⁰ G. Tolstoff, Mat., сб. т. 4, №3 (1938). ¹¹ R. J. O'Malley, C. E. Well, TAMS, v. 234, №2 (1977). ¹² L. Zajíček, Comment. math. Univ. carol., v. 22, №3 (1981).

УДК 512.776

МАТЕМАТИКА

С. Г. Далалян

Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 5/І 1984)

Понятие дискриминантной формы объединяет и обобщает понятия результата (в частности, детерминанта) и дискриминанта. В отличие от работ ^(1,2), в которых понятие детерминанта обобщается с сохранением его формально-алгебраических свойств, нас больше интересует геометрическая сторона вопроса.

Пусть $A = A^{N_1} \times \dots \times A^{N_m} = A^N$ — пространство семейств однородных полиномов $f = (f_1, \dots, f_m)$, определенных на аффинном пространстве A^n и имеющих степени $\deg f_k = s_k$. Целочисленная последовательность $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ называется мультистепенью семейства f , ею вполне определяется пространство $A = A_s$. Все рассматриваемые полиномы считаются определенными над фиксированным алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, $n > 1$.

Уравнения $f_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, m$ определяют подмногообразие Z в $A \times P^{n-1}$. Проекция на первый сомножитель $p_1: Z \rightarrow A$ является расслоением на полные пересечения X_f гиперповерхностей X_{f_k} в $P^{n-1} = P(A^n)$. Проекция на второй сомножитель $p_2: Z \rightarrow P^{n-1}$ представляет из себя аффинное расслоение со слоем коразмерности m в A . Поэтому многообразие Z гладко, неприводимо и имеет размерность $\dim Z = (n-1) + (N-m)$.

Полное пересечение X_f в общей точке f пространства A_s неособо и имеет коразмерность m в P^{n-1} . Размерность X_f в произвольной точке f зависит от ранга якобиевой матрицы $\mathcal{Y}(f) = \|\partial f_k / \partial x_i\|_{i=1, \dots, n}^{k=1, \dots, m}$. Подмногообразия $\mathcal{S}$ многообразия Z определим эквивалентными условиями

$$\begin{aligned} (\varphi, \xi) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow & \begin{cases} \dim X_\varphi = n - m - 1, & \xi \in \text{sing } X_\varphi \\ \dim X_\varphi \geq \max(0, n - m), & \xi \in X_\varphi \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \text{rk } \mathcal{Y}(\varphi)(\xi) < \min(m, n). \end{aligned}$$

Очевидно, многообразие $\mathcal{S}$ и его проекция $\mathcal{Y} = p_1(\mathcal{S})$ замкнуты в топологии Зарисского соответствующих пространств.

Определение. Проекция $\mathcal{Y}$ многообразия $\mathcal{S}$ в A_s называется дискриминантным многообразием мультистепени s . Таким образом, дискриминантное многообразие есть замкнутое множество пространства A_s , над которым слои проекции p_1 специальные (особы или имеют подскок размерности).

Предложение 1. (i) При $m \geq n$ дискриминантное многообразие $\mathcal{Y}$ неприводимо и имеет коразмерность $m-n+1$ в A_s .
(ii). При $m \geq n$

$$\text{codim}_A \mathcal{Y} = \begin{cases} 1, & \text{если не все } s_k=1, k \in [1, m]; \\ (n-m+1), & \text{если } s_k=1 \text{ при всех } k \in [1, m]. \end{cases}$$

Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Лемма 1. (i) При $m \geq n$, а также при $m < n$, когда не все $s_k=1, k \in [1, m]$, проекция $p_1: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ является рациональным отображением степени 1 и $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{Y}$.

(ii). Если $m < n$ и все $s_k=1, k \in [1, m]$, общий слой проекции $p_1: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ изоморфен P^{n-m} и $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{S} - (n-m)$.

Действительно, в первом случае единственным прообразом общей точки φ дискриминантного многообразия $\mathcal{S}$ является точка (φ, ξ) , где ξ —единственная особая точка X_φ , если $m < n$, или единственная точка X_φ , если $m \geq n$. Во втором случае

$$(\varphi, \xi) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \dim X_\varphi > n-m-1 \geq 0, \xi \in X_\varphi,$$

поэтому $p_1^{-1}(\varphi) = X_\varphi \cong P^{n-m}$ для общей точки φ .

Лемма 2. Для любого $j \in [1, n]$ на открытом множестве Z_j многообразия Z , определяемом условием $x_j \neq 0$, j -тый столбец якобиевой матрицы $\mathcal{Y}(f)$ является линейной комбинацией остальных столбцов.

Для доказательства леммы 2 достаточно заметить, что для любой точки (φ, ξ) многообразия Z

$$\sum_{i=1}^n \partial \varphi_k / \partial x_i(\xi) \xi_i = 0, k \in [1, m].$$

Из леммы 2 следует, что $\text{rk}(\mathcal{Y}(f)) \leq n-1$ на Z . Поэтому при $m \geq n$ многообразие $\mathcal{S}$ совпадает с Z , и, следовательно, $\mathcal{Y} = p_1(Z)$ неприводимо и $\dim \mathcal{Y} = \dim Z = N + (n-1) - m$.

При $m < n$ в общей точке (f, x) многообразия Z $\text{rk}(\mathcal{Y}(f)) = m$ и $\text{rk} \left\| \partial f_k / \partial x_i \right\|_{i=1, \dots, m}^{k=1, \dots, m} = m-1$. Согласно лемме 2 на открытом множестве Z_{j_0} многообразие $\mathcal{S}$ определяется уравнениями

$$\det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\|_{i=1, \dots, m-1, j}^{k=1, \dots, m} = 0 \quad (j \in [1, n] \setminus \{j_0, j_1, \dots, j_{m-1}\}).$$

Следовательно, $\dim \mathcal{S} \geq N + (n-1) - m - (n-m) = N-1$. Так как $\mathcal{Y} \neq A_s$, то в случае, когда не все $s_k=1, k \in [1, m]$, получаем $\text{codim}_A \mathcal{Y} = 1$. Если $s_k=1$ при всех $k \in [1, m]$, то якобиева матрица $\mathcal{Y}(f)$ составлена из коэффициентов линейных форм f_k , поэтому вышеприведенные уравнения независимы и определяют многообразие $\mathcal{S}$ размерности $N-1$. Ввиду леммы 1 $\dim \mathcal{Y} = (N-1) - (n-m)$.

Следствие—определение. (i). При $m \geq n$ идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ дискриминантного многообразия $\mathcal{Y}$ порождается конечным семейством форм, называемым системой результатов однородных полиномов $f_1, \dots, f_m$ (2).

(ii). Если $m \leq n$ и не все $s_k=1, k \in [1, m]$, идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ порождает

ется одной формой $\text{disc}_n(f_1, \dots, f_m) = \text{disc}_n(f)$, которую мы будем называть дискриминантом конечного семейства однородных полиномов $f = (f_1, \dots, f_m)$. Дискриминантная форма однозначно определяется условием нормировки

$$\text{disc}_n(x_1^{s_1} + \dots + x_{n-m+1}^{s_{n-m+1}}, \dots, x_m^{s_m} + \dots + x_n^{s_m}) = 1. \quad (m=1; n-1; n).$$

При $m=n$ система результатов состоит из одной формы, совпадающей с дискриминантом. Отметим, что согласно предложению 1 результат $\text{disc}_n(f_1, \dots, f_n)$ является неприводимой формой и в случае, когда все полиномы $f_k, k \in [1, n]$ линейны, он равен детерминанту матрицы коэффициентов $\mathcal{H}(f)$. Следующие свойства дискриминантной формы являются обобщениями соответствующих свойств результата (см. (4)). Они справедливы при условиях $s_k \geq 1, k \in [1, m]$ и при $m < n$ не все $s_k = 1$.

A°. Для любой подстановки $\sigma \in S_m$

$$\text{disc}_n(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(m)}) = \mu_A \cdot \text{disc}_n(f_1, \dots, f_m).$$

При $m=n$ $\mu_A = \varepsilon_{\sigma}^{s_1, \dots, s_n}$, где ε_{σ} — функция четности на симметрической группе S_n . При $m=n-1$ $\mu_A = 1$.

B°. Если однородный полином $\tilde{f}_m - f_m$ принадлежит идеалу $(f_1, \dots, f_{m-1})$, то

$$\text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, \tilde{f}_m) = \mu_B \cdot \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m).$$

При $m=n$ $\mu_B = 1$.

C°. Предположим, что $a_k(x) = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i, k \in [1, t], t < m$ — линей-

ные формы, $\mathcal{H}(a)$ — якобиева матрица семейства $a = (a_1, \dots, a_t)$, Δ — определитель, составленный из ее первых t столбцов, $\Delta_i(a^j)$ — определитель, получаемый из Δ заменой i -того столбца на j -тый столбец a^j якобиевой матрицы $\mathcal{H}(a)$, $\tilde{f}_k = f_k(\Delta_1(a^{t+1})x_{t+1} + \dots + \Delta_1(a^n)x_n, \dots, \Delta_t(a^{t+1})x_{t+1} + \dots + \Delta_t(a^n)x_n, -\Delta x_{t+1}, \dots, -\Delta x_n), k \in [t+1, m]$. Тогда

$$\text{disc}_n(a_1, \dots, a_t, f_{t+1}, \dots, f_m) \cdot \Delta^t = \text{disc}_{n-t}(\tilde{f}_{t+1}, \dots, \tilde{f}_m).$$

D°. Дискриминантная форма обобщенно-мультипликативна относительно своих переменных

$$\begin{aligned} & \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m^* f_m^*) = \\ & = \begin{cases} \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m^*) \cdot \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m^*), & m=n; \\ \mu_D \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m^*) \cdot \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, f_m) \cdot \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{m-1}, \\ & f_m^*, f_m^*), & m=n-1; \\ 0, & m < n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

При $m < n$ формула справедлива без ограничения $\max_i s_i > 1$, если считать дискриминант семейства линейных форм тождественно равным 1.

E°. Пусть Δ_j — определитель, составленный из первых $(m-1)$ -го и $(j-1)$ -го столбцов якобиевой матрицы $\mathcal{H}(f)$ семейства $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\tilde{f}_k$ получается из f_k подстановкой $x_n = 0$. При $m < n$

$$\text{disc}_n(f_1, \dots, f_m, \Delta_{m+1}, \dots, \Delta_n) = {}^L \text{disc}_n(f_1, \dots, f_m)^T \cdot \text{disc}_{n-1}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)^R.$$

Если $m = n-1$, то $T = R = 1$.

F° . Степени дискриминантной формы относительно переменной f_i и полная степень при t равном n , $n-1$ и 1 задаются по формулам

$$\deg_k \text{disc}_n(f, \dots, f_n) = s_1 \dots \hat{s}_k \dots s_n, \quad \deg \text{disc}_n(f_1, \dots, f_n) = s_1 \dots s_n \sum_{k=1}^n s_k^{-1};$$

$$\deg_k \text{disc}_n(f_1, \dots, f_{n-1}) = s_1 \dots \hat{s}_k \dots s_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j - n + s_k \right),$$

$$\deg \text{disc}_n(f, \dots, f_{n-1}) = s_1 \dots s_{n-1} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k - n \right) \sum_{k=1}^{n-1} s_k^{-1} + n - 1 \right];$$

$$\deg \text{disc}_n f = n(s-1)^{n-1}.$$

Приведем два приложения свойств $A^\circ - F^\circ$.

Предложение 2. (I). Для семейства из одной функции f

$$\text{disc}_n(f) = \mu \cdot \text{disc}_n(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n).$$

(II) Для семейства из $n-1$ функции $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$

$$\text{disc}_n(f) = \frac{1}{n^{s_1 \dots s_{n-1}}} \text{disc}_n(f, \Delta) \cdot \prod_{i=1}^n \text{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1},$$

где Δ — определитель матрицы n -того порядка, составленной присоединением к якобиевой матрице $\mathcal{Y}(f)$ первой строки $(x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n, i \in [1, n])$.

Доказательство. (II). На открытом множестве $Z_j / x_j \neq 0, j \in [1, n]$ $\Delta = n x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n \Delta_j$, где Δ_j — определитель матрицы, полученной из якобиевой матрицы $\mathcal{Y}(f)$ вычеркиванием j -того столбца, помноженный на $(-1)^{1+j}$. Подставляя это значение Δ в дискриминантную форму, получаем, что на $p_1(Z_j)$

$$\text{disc}_n(f, \Delta_j) = \frac{1}{n^{s_1 \dots s_{n-1}}} \text{disc}_n(f, \Delta) \cdot \prod_{i \neq j} \text{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1}.$$

Из неприводимости форм $\text{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0}), i \in [1, n]$ следует, что все они делят форму $\text{disc}_n(f, \Delta)$. Согласно E°

$$\begin{aligned} \text{disc}_n f &= \text{disc}_n(f, \Delta_j) \cdot \text{disc}_{n-1}(f|_{x_j=0})^{-1} = \frac{1}{n^{s_1 \dots s_{n-1}}} \text{disc}_n(f, \Delta) \times \\ &\times \prod_{i=1}^n \text{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1}. \end{aligned}$$

Предложение 3. (I) Если $f = (f_1, \dots, f_n), g = (g_1, \dots, g_n)$ — семейства мультистепеней $s = (s_1, \dots, s_n), r = (r_1, \dots, r_n)$, а семейство $f \circ g$ получается подстановкой g_i вместо x_i в полиномы семейства f , то

$$\text{disc}_n(f \circ g) = \text{disc}_n(f)^{r^{n-1}} \cdot \text{disc}_n(g)^{s_1 \dots s_n}.$$

(II) Если в предыдущих обозначениях семейство f состоит из произвольного числа $m \leq n$ полиномов, а $r=1$, то

$$\text{disc}_n(f \circ g) = v \cdot \text{disc}_n(f) \cdot \text{disc}_n(g)^v.$$

При $m=1$ $v=s(s-1)^{n-1}$. При $m=n-1$ $v=s_1 \dots s_{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k - n + 1 \right)$.

Лемма 3. Если $\text{disc}_n(g) \neq 0$, отображение $g: \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}, x \rightarrow (g_1(x): \dots : g_n(x))$ является конечнолистным накрытием.

Действительно, неравенство $\text{disc}_n(g) \neq 0$ эквивалентно условию регулярности отображения g . Полный прообраз точки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, скажем, при $\xi_n \neq 0$ задается уравнениями $h_i = g_i - \alpha_i g_n = 0$, $\alpha_i = \xi_i / \xi_n$, $i \in [1, n-1]$. Если $\dim \bigcap_{i=1}^{n-1} X_{h_i} > 0$, то $\text{disc}_n(h_1, \dots, h_{n-1}, g_n) = 0$, что невозможно, так как согласно B^2

$$\text{disc}_n(h_1, \dots, h_{n-1}, g_n) = \text{disc}_n(g).$$

Доказательство теоремы. При условиях (I) и (II) предложения, используя лемму 3, можно показать, что формы $\text{disc}_n(f \circ g)$ и $\text{disc}_n(f) \cdot \text{disc}_n(g)$ имеют одинаковое множество нулей. Приравнявая степени однородности обеих частей по f и g или подставляя $g = (x_1, \dots, x_n)$, можно получить значения показателей сомножителей $\text{disc}_n(f)$ и $\text{disc}_n(g)$.

Ереванский государственный
университет

Վ. Հ. ԴԱՆԱՅԱՆ

Համասեռ բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևը

Մոտիվում է բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևի հասկացությունը և հետազոտվում են նրա հատկությունները: Մասնավորապես, ցույց է տրվում, որ դիսկրիմինանտային ձևը սիմետրիկ կամ շեղ-սիմետրիկ ընդհանրացված բազմապատկային համասեռ ֆուկցիա է $f_1, \dots, f_m$ բազմանդամներից: Որպես ապացուցված հատկությունների կիրառություն ստացվում են ընտանիքների արտադրյալի դիսկրիմինանտային ձևի բանաձևը և դիսկրիմինանտային ձևի արտահայտումը $m=1$ և $n-1$ դեպքերում ռեզուլտանտի միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԴԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их приложения. Физматгиз, М., 1960. ² Н. П. Соколов, Введение в теорию многомерных матриц, Научова думка, Киев, 1972. ³ Б. Л. ван дер Варден, Алгебра, Наука, М., 1976. ⁴ Н. Барбаки, Алгебра, гл. IV, приложение «Результант, дискриминант», Наука, М., 1965.

УДК 619.86.57

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Н. А. Меликян

Задача календарного планирования на технологических сетях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 28/XI 1984)

Применение многосетевых моделей в управлении строительными организациями является перспективным направлением в повышении эффективности строительного производства. Такой подход позволяет отражать в модели календарного планирования процессы возведения отдельных строительных объектов и процесс функционирования возводящей их организации в целом, что обеспечивает «...надежную увязку двух наиболее важных, но зачастую противоречивых задач, стоящих перед любой строительной организацией...» (¹).

Однако высокая размерность и многоэкстремальность задач многосетевого оптимального планирования затрудняют создание эффективных формальных методов и алгоритмов их решения. Используемые в современных системах методы и алгоритмы основаны на различных эвристических подходах и решают узкие задачи, ориентированные на конкретных потребителей.

В настоящее время возникла необходимость в создании гибких, универсальных систем календарного планирования, основанных на решении задач, отличающихся достаточной общностью постановки, что позволит применять их для решения широкого класса задач этого типа.

В работе рассматривается постановка задачи составления расписания работ на основе сетевых моделей, которая может применяться для решения некоторого класса частных задач, отражающих различные варианты учета ресурсов и различные предположения относительно характера использования ресурсов отдельными работами.

Рассмотрим строительный комплекс, состоящий из n разнотипных, технологически и территориально независимых объектов. Для каждого объекта n заданы директивный срок завершения строительства ($\tau_n^{дир}$) и нормативная продолжительность строительства ($\Delta\tau_n$).

Объекты представлены в виде направленных технологических графов (сетей), содержащих множество вершин (событий) и множество дуг (работ). Дуги в таких моделях, соединяющие две вершины, это определенный трудовой процесс, требующий затрат времени и ресурсов.

Комплекс описывается многосетевой моделью состоящей из технологически и организационно независимых сетей с единым источником ресурсов.

Работы выполняются единым (самостоятельным) производителем,

обладающим правом централизованного хранения и распределения ресурсов (материальных, финансовых, технических, энергетических и людских).

На последовательность выполнения работ каждой сети накладываются технологические ограничения в виде отношения предшествования, которые представляются в виде матрицы A_n , определяющей условия, необходимые и достаточные для начала выполнения работ сети, т. е. для каждой работы сети указывается перечень работ, завершение которых необходимо для начала ее выполнения.

Комплекс предусматривает выполнение h^* видов работ. Каждый вид работы характеризуется нормативной матрицей взаимосогласованных интенсивностей ($МСИ/h$), которая содержит различные организационно-технологические варианты выполнения работы вида h , определяет номенклатуру ресурсов и их количества на единицу измерения работы по отдельным вариантам.

Эти варианты разделены на технологические группы по признаку взаимозаменяемости. В процессе реализации работы допускается замена первоначально принятого технологического варианта на любую из технологий, относящихся к той же технологической группе. Технологии разных технологических групп не обладают признаком взаимозаменяемости.

$МСИ/h$ представляет собой прямоугольную матрицу размером $v_h^* \times l_h^*$. Первый столбец матрицы содержит номера организационно-технологических вариантов работы h , второй столбец — номера технологических групп. Третий и все последующие столбцы определяют номенклатуру ресурсов, т. е. соответствуют одному из типов ресурсов, при этом ресурсы организуются в порядке возрастания индексов, присвоенных им при кодировании.

Строки матрицы (v_h) описывают организационно-технологические варианты работы h — номер варианта, номер технологической группы, количества ресурсов по полной номенклатуре ресурсов матрицы, т. е. если некоторый тип ресурса не применяется по v_h варианту, то его значение принимается равным нулю.

Каждая работа комплекса задается ресурсоемкостью и относится к одному из видов h и, следовательно, может быть выполнена любым технологическим способом, предусмотренным $МСИ/h$.

В связи с тем, что в процессе выполнения работы допускается замена технологий, интенсивность отдельных работ переменная и выбирается с помощью заданного алгоритма. При выполнении работы возможны перерывы технологического и организационного характера. Продолжительность выполнения работы, сроки ее начала и окончания определяются в результате решения задачи. В общем случае по отдельной работе могут учитываться ресурсы по полной номенклатуре $МСИ/h$.

В строительстве комплекса применяются R^* типов ресурсов.

По характеру реализации ресурсы подразделяются на невозвратимые (материальные, энергетические, финансовые), частично возвратимые (технические) и полностью возвратимые (людские).

Невозвратимые ресурсы непосредственно расходуются в процессе выполнения работы, и в случае их неиспользования могут сохраняться и накапливаться.

Частично возвратимые ресурсы в процессе выполнения работы расходуются частично (на величину износа). Ресурсы этого типа не складываются и не накапливаются.

Полностью возвратимые ресурсы в процессе выполнения работы не расходуются и не допускают складирования.

В случае, если ресурсы последних двух типов в некоторый момент не используются, их количество в последующие периоды не увеличивается.

Число учитываемых ресурсов по комплексу в целом не превышает R^* .

Задача предусматривает различные варианты учета ресурсов.

1. Полностью возвратимые ресурсы распределяются, частично возвратимые и невозвратимые ресурсы рассчитываются.

2. Полностью возвратимые и частично возвратимые ресурсы распределяются, невозвратимые ресурсы рассчитываются.

3. Все виды ресурсов распределяются (полностью или частично). Запасы ресурсов могут быть постоянными или переменными. Изменения их уровней задаются заранее в виде функции от времени.

Период планирования T ($T^* - T^0$) разбит на равные промежутки — интервалы планирования Δt , время дискретное $t = 1, 2, \dots, t^*$, $t^* = \frac{T^* - T^0}{\Delta t}$. Каждому моменту t соответствует период планирования

$[T^0 + \Delta(t-1)] - [T^0 + \Delta t]$.

Экономический смысл задачи заключается в нахождении такого расписания планируемых строительно-монтажных работ самостоятельной строительной организации (перечень объектов задан директивно), которое обеспечивало бы: ввод в действие пусковых объектов планируемого периода в заданные сроки, нормативную продолжительность строительства отдельных объектов, сбалансированность производственных мощностей и ресурсов с планируемыми объемами работ при минимальной стоимости реализации комплекса.

В качестве критерия оптимальности выбран показатель, минимизирующий средства, отвлекаемые в строительство. Этот показатель отражает зависимость между затраченными средствами и сроком их окупаемости (моментом сдачи законченных объектов и проведения взаимных расчетов с заказчиком).

С экономической точки зрения затраты будущего времени не идентичны затратам настоящего времени, поэтому «уменьшение среднего размера отвлеченных средств за все время строительства имеет огромное значение для повышения эффективности общественного производства и капитальных вложений» ⁽²⁾.

Уменьшение размера отвлекаемых средств осуществляется за счет концентрации ресурсов на пусковых объектах и выбора организаций работ на отдельном объекте, обеспечивающей выполнение материало-емких работ на стадии его завершения.

Выбранный критерий рассчитывается как сумма произведений величины затрат (сметной стоимости выполненных работ) на промежутки времени между моментом осуществления затрат и сдачей объекта в эксплуатацию:

$$F = \min \sum_{i=1}^n \sum_{n=1}^N C_i^n (\tau_n^{\text{зсп}} - t), \quad (1)$$

где C_i^n — затраты по объекту n в момент t ; t — рассматриваемый момент времени; $\tau_n^{\text{зсп}}$ — директивный срок сдачи объекта n в эксплуатацию. При этом должны соблюдаться вышеуказанные ограничения по отдельным объектам и по всему комплексу.

В результате решения задачи определяются:

1. Для комплекса в целом: потребность рассчитываемых ресурсов в виде функции от времени.

2. Для отдельных объектов: а) сроки начала реализации; б) продолжительность строительства; в) потребность распределяемых ресурсов в виде функции от времени; г) потребность рассчитываемых ресурсов в виде функции от времени.

3. Для каждой работы: а) сроки начала и окончания, продолжительность выполнения; б) организационно-технологические варианты исполнения; в) интенсивность в виде функции от времени, т. е. графики выполнения работ; г) потребность распределяемых и рассчитываемых ресурсов во времени.

Задача многосетевого оптимального планирования в приведенной постановке решена на базе алгоритма динамического программирования, что позволило получить строгое оптимальное решение. Разработанный комплекс алгоритмов и программ оформляются для передачи в ГосФАП.

Армянский филиал Всесоюзного научно-исследовательского института проблем организации и управления при ГКНТ СССР

ՄԵԼԻՔՅԱՆ Ն. Ս.

Օրացուցային պլանավորման խնդիրը տեխնոլոգիական ցանցերում

Դիտարկվում է ինքնուրույն շինարարական կազմակերպության պլանավորվող աշխատանքների շրջանակի կազմման խնդրի դրվածքը: Աշխատանքը կատարված է շինարարական համակարգի օրինակով, որը նկարագրվում է բազմածանցային մոդելի օգնությամբ: Մոդելը կազմված է տեխնոլոգիական և կազմակերպչական անկախ ցանցերից, որոնց ռեսուրսների ապահովումը կատարվում է մեկ միասնական աղբյուրից:

Համակարգում կատարվում են 2 տեսակի աշխատանքներ, որոնցից յուրաքանչյուրը բնութագրվում է ինտենսիվությունների փոխհամաձայնեցված մատրիցայով, որը նկարագրում է տարբեր կազմակերպչական տեխնոլոգիական տարբերակները և նրանց ռեսուրսների ապահովումը:

Շինարարությունում ներգրավող միջոցների նվազագույն ցուցանիշը ընդունված է որպես օպտիմալության չափանիշ:

Խնդրի լուծման համար նախատեսված է օգտագործել դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. И. Рыбальский, Автоматизированные системы управления строительством, Высшая школа, Киев, 1979. ² М. Г. Минч, Л. Д. Кондратова, Экономическая эффективность капитальных вложений и производственных фондов в строительстве, Наука, М., 1976.

УДК 539.4.012.1:517.968

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. А. Матехин, Н. А. Никольская

Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в бесконечных областях, содержащих вырезы с угловыми точками границы

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии бесконечной плоскости с вырезом, симметричным относительно оси Ox . Предполагается, что вырез имеет угловую точку, в окрестности которой его граница совпадает с углом произвольного раствора. На границе выреза приложена постоянная распределенная нагрузка, действующая вдоль оси Oy .

На основе метода Мазы—Пламеневского ⁽¹⁾ коэффициент интенсивности выражается через известные параметры и некоторый интеграл от приближенного решения задачи. В частных случаях прямолинейной внутренней трещины и полубесконечной трещины, нагруженной ступенчатой нагрузкой, получены формулы, совпадающие с известными. В случае, когда вырез имеет вид ромба, получены численные значения коэффициента интенсивности. Для входящего бесконечного угла, нагруженного ступенчатой нагрузкой, получена аналитическая формула.

Рассмотрим бесконечную область (Ω) с внутренним вырезом $\partial\Omega$, совпадающим при $x \geq 0$ с углом раствора $2(\pi - W)$ (см. рис. 1).

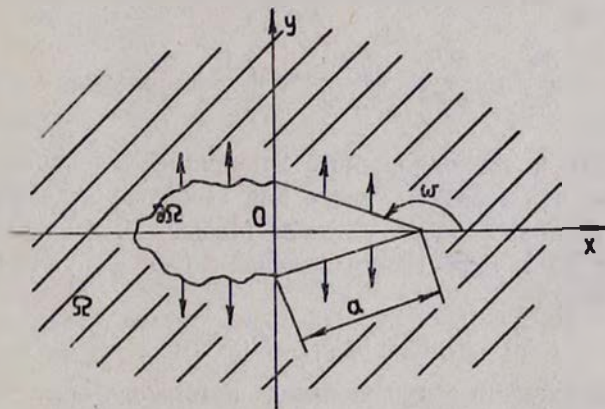


Рис. 1.

$$\sigma_{yy} = -P.$$

Пусть на границе выреза задана нагрузка.

Для функции Эри имеем краевую задачу:

$$\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\Phi(x, y) = \varphi_1(x); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}(x, y) = \varphi_2 \cos(\pi, \hat{x}) \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

где $\varphi_1 = -P \frac{x^2}{2}$; $\varphi_2 = -Px$.

Рассмотрим в области Ω функцию $w(x, y) = -P \frac{x^2}{2}$. Очевидно,

на $\partial\Omega$ $\frac{\partial w}{\partial n} = -Px \cos(n, \hat{x})$. Введем новую функцию

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - w(x, y)\eta(\rho), \quad (2)$$

(ρ, φ) — полярная система координат с центром в угловой точке; $\eta(\rho)$ — срезающая функция

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho < \rho_1 \\ \text{гладкая функция}, & \rho_1 < \rho < \rho_2 \\ 0, & \rho > \rho_2 \end{cases}$$

причем $0 < \rho_1 < \rho_2 < a$.

Учитывая, что на стороне угла $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и, следовательно,

$\frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$, для $F(x, y)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\Delta^2 F = -\Delta^2 (w\eta(\rho)) \equiv f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$F(x, y) = \varphi_1(x) [1 - \eta(\rho)], \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n}(x, y) = \varphi_2(x) [1 - \eta(\rho)] \cos(n, \hat{x}) \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Задача (3) имеет однородные граничные условия в окрестности угловой точки, что позволит теперь для вычисления коэффициента интенсивности воспользоваться методом Мазьи—Пламеневского ⁽¹⁾.

Согласно ⁽²⁾ в окрестности угловой точки функция $F(x, y)$ представима в виде

$$F \cong C\rho^{1+\lambda} g_\lambda(\varphi) + O(\rho^{1+\lambda}); \quad (4)$$

здесь C — коэффициент интенсивности, который в силу (2) совпадает с коэффициентом для функции $\Phi(x, y)$; λ — решение уравнения

$$\sin(2\lambda\omega) = -\lambda \sin(2\omega); \quad (5)$$

$$g_\lambda(\varphi) = \cos[(\lambda-1)\varphi] - \frac{\cos[(\lambda-1)\omega]}{\cos[(\lambda+1)\omega]} \cos[(\lambda+1)\varphi] \quad (6)$$

Следуя методу Мазьи—Пламеневского, для определения коэффициента интенсивности C воспользуемся формулой Грина для бигармонического оператора

$$\int_S (F \Delta^2 v - v \Delta^2 F) dS = \int_{\Gamma} \left(F \frac{\partial \Delta v}{\partial n} + \Delta F \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta F}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial F}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (7)$$

Интегрирование в (7) ведется в специально выбранной области S , границей которой служат два луча $\Gamma_1 = \{(\rho, \varphi): \varepsilon < \rho_1 < R, \varphi = \pm \omega\}$ и две окружности $\Gamma_2 = \{(\rho, \varphi): \rho = \varepsilon, |\varphi| \leq \omega\}$, $\Gamma_R = \{(\rho, \varphi): \rho = R, |\varphi| \leq \omega\}$ (см. рис. 2).

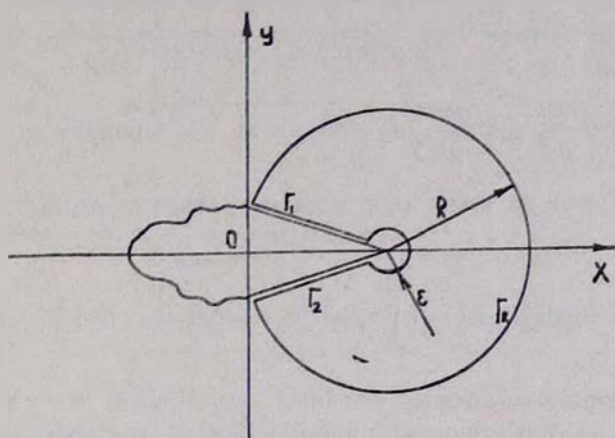


Рис. 2.

Кроме того, в (7) $F(x, y)$ — решение задачи (3); $v(x, y)$ — неэнергетическое однородное решение бигармонической задачи в угле $|\varphi| \leq \omega$, $v \in L_2$.

$$v(\rho, \varphi) = \rho^{1-\lambda} g_{-\lambda}(\varphi), \quad v \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (8)$$

Показатель особенности в (8) выбран таким образом, чтобы интеграл по окружности (Γ_2) в (7) не зависел от ее радиуса (ε).

Легко видеть, что в силу соответствующего убывания подынтегральных функций на бесконечности интеграл по Γ_R при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а интегралы по Γ_1 остаются при этом конечными.

Вычислим интегралы, входящие в формулу (7). Интеграл по Γ_2 при $\varepsilon \rightarrow 0$ легко вычисляется, если учесть, что в окрестности угловой точки функции $F(x, y)$ имеет место разложение (4). После некоторых преобразований получим

$$J_{\varepsilon} = 8C\lambda [2\omega \cos(2\omega) + \sin(2\omega)]. \quad (9)$$

Интеграл по лучам Γ_1 представим в виде суммы:

$$J_{\Gamma_1} = \int_0^{\rho_1} A(\rho) d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_2} B(\rho) d\rho + \int_{\rho_2}^a C(\rho) d\rho + \int_a^{\infty} D(\rho) d\rho. \quad (10)$$

Из-за однородных граничных условий на части границы $0 < \rho < \rho_1$ первый интеграл в (10) равен нулю; второй интеграл выражается через некоторые интегралы от срезающей функции и ее производных:

$$P_k = \int_{P_1}^{P_2} \rho^{k-\lambda} \tau_l(\rho) d\rho, \quad P_k^* = \int_{P_1}^{P_2} \rho^{k-\lambda} \tau_l^*(\rho) d\rho.$$

Третий интеграл удается взять в явном виде. Опуская громоздкие вычисления, выпишем окончательное выражение для коэффициента интенсивности:

$$C = \frac{P \frac{a^{1-\lambda}}{(1-\lambda^2)} \sin[(\lambda+1)w] [\lambda \cos^2 w - \sin^2(\lambda w)] + \frac{1}{2} J}{2\lambda w \cos(2\lambda w) + \lambda \sin(2w)},$$

где $J = \int_a^\infty \left(\Delta v \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Delta v}{\partial n} \right) d\rho$ при $\varphi = w$. Интегрируя по частям, учитывая граничные условия при $\rho = a$ и условия на бесконечности, получим

$$J = -8 \sin[(\lambda+1)w] \int_a^\infty \sigma_{\varphi\varphi} \rho^{-\lambda} d\rho + 8 \cos[(\lambda+1)w] \int_a^\infty \tau_{\varphi\varphi} \rho^{-\lambda} d\rho.$$

Рассмотрим некоторые случаи.

1. Задача о растяжении плоскости с внутренней прямолинейной трещиной длиной $2a$. Функция Эри для такой задачи имеет вид

$$\Phi = \frac{Pa^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{z}{a} \right) \left[\sqrt{\left(\frac{z}{a} \right)^2 - 1} - \left(\frac{z}{a} \right) \right] - \ln \left[\left(\frac{z}{a} \right) + \sqrt{\left(\frac{z}{a} \right)^2 - 1} \right] \right\},$$

при $\rho = a - x$, $y = 0$ имеем

$$\frac{2}{\rho} \Phi = \left\{ (\rho - a) \sqrt{\rho^2 - 2a\rho} - (\rho - a)^2 - a^2 \ln(\rho - a + \sqrt{\rho^2 - 2a\rho}) + a^2 \ln a \right\}.$$

В силу симметрии задачи $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{y=0} = 0$. Остается воспользоваться формулами (14) и (15). В результате получаем $C = P \sqrt{\frac{a}{2}}$, что соответствует известному выражению (3).

2. Задача о напряженно-деформированном состоянии плоскости с входящим углом, нагруженным силой $\sigma_{yy} = -P$, распределенной на отрезке длиной a , включающем вершину угла. Очевидно, в этом случае $J = 0$ и для коэффициента интенсивности имеем аналитическую формулу

$$C = \frac{Pa^{1-\lambda} \sin[(\lambda+1)w] \{\lambda \cos^2 w - \sin^2(\lambda w)\}}{(1-\lambda)^2 [2\lambda w \cos(2\lambda w) + \lambda \sin(2w)]}$$

В случае полубесконечной трещины ($w = \pi$) $C = \frac{2P}{\pi} \sqrt{a}$, что совпадает с известным выражением (3).

3. Задача о растяжении плоскости с вырезом в виде ромба. В этом случае при вычислении интеграла J использовалось численное решение задачи, полученное при решении интегрального уравнения

Мусхелишвили при использовании конформного отображения Кристоффеля-Шварца. В таблице приведены значения коэффициента интенсивности для плоскости с входящим углом (C_x) и для плоскости с вырезом в виде ромба (C_R) в зависимости от величины ω (значения C отнесены к величине $\rho\sqrt{\frac{a}{2}}$).

ω	0,55 π	0,6 π	0,65 π	0,7 π	0,75 π	0,8 π	0,85 π	0,9 π	0,95 π	π
C_x	0,35	0,45	0,57	0,67	0,75	0,81	0,86	0,89	0,9	0,9
C_R					0,66	0,75	0,86	0,94	0,99	1,0

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Ն. Ա. ՄԱՏԵՆԻՆ, Ն. Ա. ՆԻՈՒՍԿԱՅԱ

Եզրագծի վրա անկյունային կետերով կտրվածքներ պարունակող անվերջ տիրույթներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների հաշվումը

Օչ առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ կտրվածքով անվերջ հարթության լարված և դեֆորմացված վիճակի խնդրում հաշվվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցը:

Կտրվածքն ունի անկյունային կետ, որի շրջակայքում նրա եզրագիծը համընկնում է կամայական բացվածքով անկյան հետ: Եզրագծի վրա կիրառված է հաստատուն բևե:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. Г. Мизья, Б. А. Пламеневский, ДАН СССР, т. 219, № 2 (1974). ² В. А. Кондратьев, Тр. моск. мат. о-ва, т. 16, № 209 (1967). ³ Дж. Райс, в кн.: Разрушение, Мир, М., 1975. ⁴ С. С. Заргирян, в сб.: Механика (Ереван), вып. 3 (1984).

УДК 539.3 : 534.1

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

К задачам о колебании прямоугольной пластинки
 и пологой оболочки в продольном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/VI 1984)

Задаче о колебании прямоугольной пластинки в продольном магнитном поле на основе гипотез магнитоупругости тонких тел ⁽¹⁾ посвящены работы ^(2,3)

В данной работе рассматриваются колебания прямоугольных пластин и весьма пологих оболочек в продольном магнитном поле. Как исходные уравнения здесь принимаются уравнения магнитоупругости для тонких оболочек и пластин работы ⁽⁴⁾, имеющих $O(e^{2-2r})$ асимптотическую точность. В указанных уравнениях по сравнению с уравнениями, построенными на основе гипотез магнитоупругости ⁽¹⁾, появляются новые члены электромеханического происхождения. Численные исследования показывают, что относительно толстые пластинки и пологие оболочки могут терять устойчивость. Для более тонких пластин и пологих оболочек возникает явление, обнаруженное С. А. Амбарцумяном в ⁽⁵⁾, а именно, при возрастании напряженности магнитного поля частота колебаний сначала уменьшается, далее происходят аperiодические колебания, а когда напряженность магнитного поля превышает определенное значение, частота колебаний резко возрастает.

1. Рассматривается свободное колебание прямоугольной пластинки толщиной $2h$, с продольными размерами $2a$ и $2b$, с конечной электропроводностью σ , находящейся в продольном постоянном магнитном поле напряженности H_x .

Изучение свободных магнитоупругих колебаний прямоугольной пластинки в продольном магнитном поле приводится к решению следующей системы интегродифференциальных уравнений ⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} \bar{E}_y(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega w^* \right) - \frac{16\pi^2 \sigma^2 h^2}{3c^2} \left(\omega \bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega^2 w^* \right) \right] dx_0 dy_0; \\ \bar{E}_x^*(x, y) = & \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \right. \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0}) - \frac{4\pi\omega}{c} \bar{E}_x^* + \frac{16\pi^2\omega^2 h^2}{3c^3} \omega \bar{E}_x^* \Big| dx_0 dy_0;$$

$$D\nabla^2 \nabla^2 w^* + 2\omega h \omega^2 w^* + \frac{2\omega h}{c^2} H_x^2 \omega w^* + \\ + \frac{2\omega h}{c} H_x \bar{E}_y^* - \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^2 h^3}{c^3} \left(\omega H_x \bar{E}_y^* + \frac{1}{c} H_x^2 \omega^2 w^* \right) = 0;$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}; \quad -\infty < x, y < \infty; \quad -a \leq x_0 \leq a; \quad -b \leq y_0 \leq b,$$

где $\bar{E}_x^*$, $\bar{E}_y^*$ — напряженность возбуждаемого электрического поля на лицевых поверхностях пластинки, w^* — нормальное перемещение пластинки, ω — частота колебания, c — скорость света.

На границах пластинки $x = \pm a$ и $y = \pm b$ для упругой части задачи принимается шарнирное опирание.

Принимая безразмерные обозначения

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad k = \frac{b}{a}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad v_z^* = \frac{w^*}{h}, \quad (1.2)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля, для решения систем уравнений (1.1) принимается метод Бубнова — Галеркина, при этом, как отмечает С. Г. Михлин⁽⁶⁾, весьма важно так подобрать координатные функции, чтобы сингулярные интегралы просто вычислялись.

Итак, представим $\bar{E}_x^*(\xi, \eta)$, $\bar{E}_y^*(\xi, \eta)$ и $v_z^*(\xi_0, \eta_0)$ в виде

$$\bar{E}_x^*(\xi, \eta) = X \cdot \varphi(\xi, \eta); \quad \bar{E}_y^*(\xi, \eta) = Y \cdot \varphi(\xi, \eta); \quad v_z^* = Z \sin \frac{\pi}{2} (1 - \xi_0) \sin \frac{\pi}{2k} (k - \eta_0), \quad (1.3)$$

где $\varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ — преобразование Кельвина гармонического полинома⁽⁶⁾.

Если $v(\xi, \eta, \zeta)|_{\zeta=0} = \Phi(\xi, \eta)$, тогда имеет место следующее соотношение⁽⁶⁾:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \Phi(\xi_0, \eta_0). \quad (1.4)$$

В данном случае за гармонический полином принимается функция $u = z$, тогда его преобразование Кельвина будет

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\zeta + 2 - 2r^2}{r^3}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + 2)^2.$$

Итак, после подстановки (1.3) в уравнения (1.1) и применения обычной процедуры метода Бубнова — Галеркина с учетом соотношения (1.4) относительно неизвестных коэффициентов X , Y , Z получается однородная алгебраическая система. Обращая определитель этой системы в нуль, получим алгебраическое уравнение шестой степени для определения комплексной безразмерной частоты Ω .

Приведем результаты численных вычислений.

На рис. 1 график I соответствует случаю $h=1\text{см}$, $\varepsilon=0,01$, $k=1$; график II—случаю $h=0,5\text{см}$, $\varepsilon=\frac{1}{25}$, $k=1$, график III—случаю $h=1\text{см}$,

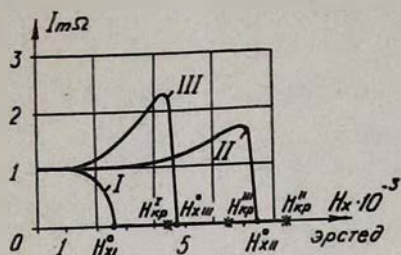


Рис. 1.

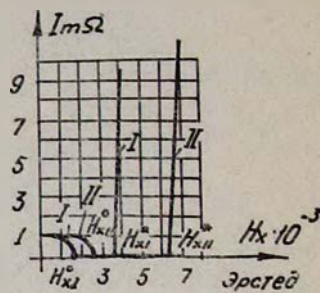


Рис. 2.

$\varepsilon = \frac{1}{25}$, $k=1$. Как видно из графиков, для относительно толстых

пластин безразмерная частота при возрастании H_x сначала возрастает, потом уменьшается до нуля при значении $H_x=H_x^0$. Если продолжать увеличивать напряженность магнитного поля до значения $H_{кр}$, происходят аperiодические колебания с $\text{Re}\lambda < 0$, при значении $H_x \geq H_{кр}$ опять движение аperiодическое, но для одного из решений $\text{Re}\lambda$ становится положительным, и, таким образом, при $H_x=H_{кр}$ пластинка потеряет устойчивость.

На рис. 2 приведены результаты для относительно более тонких пластин. График I соответствует случаю $h=0,01\text{см}$, $\varepsilon=0,001$, $k=1$; график II—случаю $h=0,005\text{см}$, $\varepsilon=0,001$, $k=1$. Эти результаты представляют собой те физические явления взаимодействия тонких пластин с магнитным полем, которые были обнаружены С. А. Амбарцумяном в (4).

2. Рассмотрим свободное колебание весьма пологой оболочки толщиной $2h$, прямоугольной в плане, с размерами $2a$ и $2b$, с конечной электропроводностью σ , находящейся в продольном магнитном поле напряженности H_x .

Кроме известных допущений теории пологих оболочек, здесь дополнительно принимается:

1) оболочка настолько пологая, что приближенно можно принимать $H_z \approx H_x$, $H_r \approx 0$, ($H_\theta = 0$), где α , β —линии кривизны на срединной поверхности оболочки, γ —направление нормали на поверхности;

2) за функцию Грина для внешней задачи электродинамики, когда источник расположен на пологой срединной поверхности оболочки, приближенно принимается функция Грина тех же уравнений, когда источник расположен на плоскости, где проектируется срединная поверхность оболочки.

При этом изучение свободных магнитоупругих колебаний весьма пологой оболочки приводится к решению следующей системы интегродифференциальных уравнений (4):

$$\begin{aligned} \bar{E}_y^*(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega w^* \right) - \frac{16\pi^2\sigma^2 h^2}{3c^3} \left(\omega \bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega^2 w^* \right) \right] dx_0 dy_0; \\ \bar{E}_x^*(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial x_0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi\sigma}{c} \bar{E}_x^* + \frac{16\pi^2\sigma^2 h^2}{3c^3} \omega \bar{E}_x^* \right] dx_0 dy_0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2F + D\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_k^2\nabla^2F^* + 2\rho h\omega^2\nabla^2\nabla^2F^* +$$

$$+\frac{2\pi\hbar}{c^2}H_x^{(1)}\nabla^2\nabla^2F^*+\frac{2\pi\hbar}{c}H_x\bar{E}_y-\frac{8\pi}{3}\frac{c^2\hbar^3}{c^3}\left(\omega H_x\bar{E}_y^*+\frac{1}{c}H_x^2\omega^2w^*\right)=0,$$

где

$$w^* = -\nabla^2 \nabla^2 F^*, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}, \quad \nabla_h^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}.$$

Для упругой части задачи принимается шарнирное опирание.

Поступая аналогичным образом, как и в предыдущей задаче, для определения безразмерной частоты колебания Ω получается алгебраическое уравнение шестой степени.

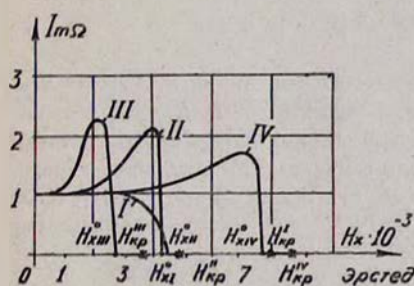


Рис. 3.

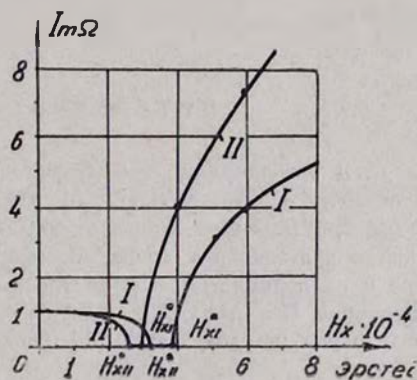


Рис. 4.

Приводим результаты численных вычислений. На рис. 3 график I соответствует случаю $R_1=R_2=R=8a$, $k=1$, $\varepsilon=0,01$, $h=0,5\text{см}$; график II—случаю $R_1=R_2=R=8a$, $k=1$, $\varepsilon=\frac{1}{50}$, $h=1\text{см}$; график III—случаю $R_1=R_2=R=8a$, $k=1$, $\varepsilon=\frac{1}{50}$, $h=2\text{см}$; график IV—случаю $\frac{1}{R_2}=0$, $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R}$, $R=8a$, $k=1$, $\varepsilon=\frac{1}{25}$, $h=0,5\text{см}$.

На рис. 4 график 1 соответствует случаю $R_1=R_2=R=R=8a$.

$k=1$, $\varepsilon=0,001$, $h=0,001$ см.; график II—случаю $R_1=8a$, $\frac{1}{R_2}=0$, $k=1$, $\varepsilon=0,001$, $h=0,001$ см.

Как видно из графиков, получаемые результаты для пологих оболочек аналогичны предыдущей задаче.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի երկայնական մագնիսական դաշտում առաժանումների խնդիրների մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի մագնիսաառաժական տատանումների երկայնական մագնիսական դաշտում: Որպես ելակետային հավասարումներ ընդունվում են ամրողչության մեջ ասիմպտոտիկորեն ճիշտ բարակ թաղանթների և սալերի մագնիսաառաժականության երկչափ հավասարումները:

Ելակետային ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար, որոնք ունեն որոշակի եզակիություն, պարունակող կորիզներ, կիրառվում է Բուրնով-Գալյորկինի մեթոդը: Ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի, չափողականություն չունեցող կոմպլեքս հաճախականության համար ստացվում են վեցերորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումներ, որոնք լուծվում են թվային մեթոդներով: Բերված թվային արդյունքները ցույց են տալիս սալերի և թաղանթների կայունության կորստի հնարավորությունը մագնիսական դաշտում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² М. В. Белубекян, С. Р. Сароян, Уч. зап. ЕГУ, № 2, 1979. ³ С. В. Саркисян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1981. ⁴ С. О. Саркисян, Тезисы лекций и кратких науч. сообщ. Всесоюзной школы-семинара «Методы малого параметра и их применение», Изд-во Ин-та математики АН БССР, Минск, 1982. ⁵ С. А. Амбарцумян, Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1983. ⁶ С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, Наука, М., 1966.

УДК 538.3

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Тархания, В. Р. Симонян

Поверхностные электромагнитные волны в гиротропных кристаллах

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяном 10/VII 1984)

В последние годы для изучения физических свойств поверхности кристаллов широко используется спектроскопия поверхностных пларитонов, локализованных у границы раздела двух различных сред ⁽¹⁾. Обычно поверхностные волны существуют, лишь если диэлектрические проницаемости контактирующих сред отличаются по знаку. В настоящей статье мы покажем возможность существования нового класса поверхностных электромагнитных волн на границе раздела двух энантиоморфных модификаций одного и того же гиротропного кристалла (например, кварца), различающихся лишь тем, что в них вращение плоскости поляризации происходит в противоположных направлениях. В таких кристаллах без учета гиротропии никакие поверхностные волны реализоваться не могут, так что речь идет о волнах, само существование которых обусловлено пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости. В работе ⁽²⁾ было предсказано существование лишь одной поперечной ветви поверхностных волн с законом дисперсии

$$\frac{c^2 k_{||}^2}{\omega^2} = \epsilon_{||}, \quad (1)$$

не зависящим от параметра гиротропии. Мы покажем, что существуют не одна, а две волны поверхностного типа, законы дисперсии которых значительно отличаются от (1).

Пусть область пространства $Z > 0$ занимает правовращающий кристалл, а область $Z < 0$ — левовращающий. Кристаллы немагнитные, а их оптические оси перпендикулярны к границе раздела, так что не зависящий от волнового вектора тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ и псевдотензор $\hat{\alpha}$, описывающий гиротропию, диагональны: $\epsilon_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_z = \epsilon_{||}$, $\alpha_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_{\perp}$, $\alpha_z = \alpha_{||}$. Как и в ⁽³⁾, будем считать, что в области $Z > 0$ поля $\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{k} = (k_{||}, 0, k_z)$ и описываются уравнениями Максвелла, а в области $Z < 0$ поля $\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{k}_g = (k_{||}, 0, k_{gz})$ и описываются инверсионно-сопряженными уравнениями Максвелла—Иосифьяна ⁽⁴⁾. В качестве материальных уравнений используем феноменологические соотношения, приведенные в ⁽⁵⁾, которые хоть и отличаются от классических ⁽⁶⁾, но удобны тем, что позволяют использовать обычные граничные условия. Итак, в области $Z > 0$ имеем

$${}_x\vec{D} = -[\vec{k}\vec{H}], \quad {}_x\vec{B} = [\vec{k}\vec{E}], \quad (2)$$

$$\vec{D} = \hat{\epsilon}(\vec{E} + i\alpha[\vec{k}\vec{E}]), \quad \vec{B} = \vec{H} + i\alpha[\vec{k}\vec{H}], \quad (3)$$

а в области „левого“ кристалла $Z < 0$

$${}_x\vec{B}_g = -[\vec{k}_g\vec{E}_g], \quad {}_x\vec{D}_g = [\vec{k}_g\vec{H}_g], \quad (4)$$

$$\vec{B}_g = \vec{H}_g - i\alpha\hat{\epsilon}\vec{D}_g, \quad \vec{D}_g = \hat{\epsilon}(\vec{E}_g + i\alpha\hat{\epsilon}\vec{B}_g), \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{\omega}{c}$. Подставляя (3) в (2), исключая H_x , H_z и E_x , E_z с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \left(i\alpha_{\perp} E_y + \frac{H_y}{\epsilon_{\perp}\alpha} \right) k_z, & E_z &= -k_{\parallel} \left(i\alpha_{\parallel} E_y + \frac{H_y}{\epsilon_{\parallel}\alpha} \right), \\ H_x &= K_z \left(i\alpha_{\perp} H_y - \frac{E_y}{\alpha} \right), & H_z &= k_{\parallel} \left(-i\alpha_{\parallel} H_y + \frac{E_y}{\alpha} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

получим систему двух однородных алгебраических уравнений для E_y и H_y :

$$\frac{i}{\alpha} (p + \alpha_{\perp} k^2) E_y + H_y \left(\frac{q}{\alpha^2 \epsilon_{\perp}} + \alpha_{\perp} p - 1 \right) = 0, \quad (7)$$

$$(k^2 - \alpha^2 \epsilon_{\perp} + \alpha^2 \epsilon_{\perp} \alpha_{\perp} p) E_y - i H_y \alpha (p + \alpha_{\perp} q) = 0, \quad (8)$$

где

$$p = \alpha_{\perp} k_z^2 + \alpha_{\parallel} k_{\parallel}^2, \quad q = k_z^2 + \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} k_{\parallel}^2, \quad k^2 = k_z^2 + k_{\parallel}^2. \quad (9)$$

Условие существования нетривиального решения этой системы с точностью до членов $\sim \alpha^2$ имеет вид:

$$(k_z^2 - k_{0z}^2)(k_z^2 - k_{ez}^2) - \alpha^2 G(k_z) = 0, \quad (10)$$

где

$$k_{0z}^2 = \epsilon_{\perp} \alpha^2 - k_{\parallel}^2, \quad (11)$$

$$k_{ez}^2 = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} (\epsilon_{\parallel} \alpha^2 - k_{\parallel}^2) \quad (12)$$

определяют нормальную составляющую волнового вектора обыкновенной и необыкновенной волн в отсутствие гиротропии, а функция

$$G(k_z) = \epsilon_{\perp} (p^2 + 2\epsilon_{\perp} \alpha_{\perp} p + \alpha_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 q) \quad (13)$$

характеризует связь этих волн, обусловленную гиротропией. Решение уравнения (10) напомним в виде

$$k_{z1,2} = \frac{1}{2} \left(k_{0z}^2 + k_{ez}^2 \pm \sqrt{(k_{0z}^2 - k_{ez}^2)^2 + 4\alpha^2 G(k_z)} \right), \quad (14)$$

где в силу малости параметра гиротропии α в $G(k_z)$ следует положить $k_z = k_{0z}$, если берется перед корнем знак $+$ (k_{z1}), и $k_z = k_{ez}$, если берется знак $-$ (k_{z2}). Для существования поверхностных волн необходимо, чтобы $\text{Im} k_z > 0$ для обоих решений (14). Подставляя (5) в (4), для левовращающего кристалла аналогичным образом получаем

решения, совпадающие с (14), однако в отличие от предыдущего случая теперь нас интересуют волны, для которых $\text{Im} k_{gz} < 0$. Поскольку при наличии гиротропии обыкновенная и необыкновенная волны в одноосном кристалле не расщепляются, то решения вида поверхностной волны могут удовлетворять граничным условиям на поверхности раздела $Z=0$, лишь если представить поля в виде суперпозиции

$$\vec{E} = (\vec{E}_1 e^{-p_1 z} + \vec{E}_2 e^{-p_2 z}) e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z > 0 \quad (15)$$

$$\vec{E}_g = (\vec{E}_{g1} e^{p_1 z} + \vec{E}_{g2} e^{p_2 z}) e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z < 0 \quad (16)$$

и аналогично для векторов $\vec{H}$ и $\vec{H}_g$; $p_1 = -ik_{z1}$, $p_2 = -ik_{z2}$, $\text{Re} p_{1,2} > 0$. Условия непрерывности касательных составляющих полей на границе раздела $z=0$ имеют вид (3):

$$\begin{aligned} E_{1x} + E_{2x} + E_{g1x} + E_{g2x} &= 0, & H_{1x} + H_{2x} - H_{g1x} - H_{g2x} &= 0, \\ E_{1y} + E_{2y} + E_{g1y} + E_{g2y} &= 0, & H_{1y} + H_{2y} - H_{g1y} - H_{g2y} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (6) и аналогичные соотношения для „левого“ кристалла, полагая $k_{gz} = -k_z$ и исключая H_y с помощью (7), из (17) получим систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно величин E_{1y} , E_{2y} , E_{g1y} и E_{g2y} . Условие существования нетривиального решения этой системы имеет вид:

$$(a_1 k_{2z} - a_2 k_{1z})(b_1 k_{1z} - b_2 k_{2z}) = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{\varepsilon_{\perp} z(p + \alpha_{\perp} k_l^2)}{k_{gz}^2 - k_{lz}^2 - \varepsilon_{\perp} z^2 \alpha_{\perp} p} = \frac{z^2 \varepsilon_{\perp} - k_l^2 - \varepsilon_{\perp} \alpha_{\perp} p}{z(\alpha_{\perp} q + p)}, \\ b_l &= \alpha_{\perp} + \frac{a_l}{\varepsilon_{\perp} z}, \quad l=1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

Несложный анализ показывает, что существуют, вообще говоря, две ветви поверхностных волн, дисперсионные соотношения которых с точностью до членов $\sim \alpha$ имеют вид:

$$\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\perp} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}} \right) \right]^{-1} \quad (20)$$

и

$$\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\parallel} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \left(\frac{\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Найденные нами законы дисперсии существенно отличаются от соотношения (1): во-первых, они зависят от параметров гиротропии $\alpha_{\perp}$ и $\alpha_{\parallel}$, во-вторых, они соответствуют непоперечным волнам. Таким образом, найден новый класс поверхностных электромагнитных волн в одноосных гиротропных кристаллах. Эти волны могут быть исследованы обычными методами спектроскопии, например, методом НРВО (1). В заключение отметим, что в изотропном случае ($\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel}$, $\alpha_{\perp} = \alpha_{\parallel}$), а также при неучете запаздывания ($c \rightarrow \infty$) поверхностные волны (20) и (21) не существуют. В случае $\varepsilon_{\perp}(\omega) > 0$ и $\varepsilon_{\parallel}(\omega) > 0$ вол-

на (20) существует лишь в области частот, где $\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} < 2 - \frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}}$, а волна

(21) — в области $\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} > \frac{\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel}}{2\alpha_{\perp}}$. В кристаллах класса C_{2v} или D_{2d} , в

которых $\alpha_{\perp} = \alpha_{\parallel}$, существует лишь одна ветвь поверхностных волн: волна (20), если $\varepsilon_{\perp} < \varepsilon_{\parallel}$, и волна (21), если $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ԹԱՐԽԱՆՅԱՆ, Վ. Ռ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Մակերևութային էլեկտրամագնիսական ալիքները գիրոտրոպ բյուրեղներում

Ցույց է տրված, որ միևնույն գիրոտրոպ բյուրեղի (օրինակ՝ կվարցի) երկու տարբեր էնանտիոմորֆ մոդիֆիկացիաների բաժանման սահմանով կարող են տարածվել նոր տիպի մակերևութային էլեկտրամագնիսական ալիքներ, որոնց համար ստացված են դիսպերսիոն առնչություններ և հետազոտված են նրանց գոյության պայմանները: Այդ ալիքների գոյությունը պայմանավորված է դիէլեկտրիկ թափանցելիության տարածական դիսպերսիայով (գիրոտրոպիա) և բյուրեղային ցանցի անիզոտրոպիայով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М., Наука, 1979. ² В. М. Агранович, О. А. Дубовский, Письма в ЖЭТФ, т. 26, № 9, (1977). ³ Р. Г. Тарханян, ДАН АрмССР, т. 75, № 5 (1982). ⁴ А. Г. Иосифьян, ДАН АрмССР, т. 51, № 1 (1970), т. 55, № 2 (1972). ⁵ Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, ЖЭТФ, т. 61, № 5 (11) (1971). ⁶ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГПФМЛ, М., 1959.

УДК 532.72+532.772:517.9

ФИЗИКА

В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян

Поведение коэффициента диффузии на «краю расплывающегося облака частиц»

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 18/IV 1984)

Рассмотрим процесс одномерной диффузии, т. е. рассмотрим частицу, блуждающую вдоль прямой случайным образом. Обозначим через $K(y, x, t)$ вероятность, с которой частица, находящаяся в момент t в положении y , окажется в момент $t+dt$ в интервале $x, x+dx$ (т. е. $K(y, x, t)$ — плотность вероятности переноса, отнесенная к единице времени — относительная скорость переноса ($[K]=[t^{-1}][t^{-1}]$). Заметим, что вместо того чтобы рассматривать процесс блуждания одной частицы, можно представить себе очень большое количество частиц, первоначально находящихся в тождественных условиях и совершающих затем случайные перескоки без каких-либо взаимных влияний (оба эти представления (языка) полностью эквивалентны (^{1,2})). Тогда эволюцию плотности числа диффундирующих частиц $\rho(x, t)$ можно описать уравнением

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^x K(y, x, t) \rho(y, t) dy - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(y, x, t) dy \right] \rho(x, t). \quad (1)$$

Здесь в первом интеграле пределы берутся от $-\infty$ до x , так как в окрестность x частицы могут попасть только из области, расположенной „левее“ x (если x крайняя „правая“ точка „расплывающегося облака частиц“). Мы ограничимся рассмотрением диффузии только на „правом“ краю, так как диффузия на другом краю протекает, очевидно, совершенно таким же образом). Во втором интеграле пределы интегрирования берутся от $-\infty$ до $+\infty$, так как частица, находящаяся в точке x , может за время dt „уйти“ из этой точки „куда угодно“ — как „направо“, так и „налево“. Заметим теперь, что поскольку на самом „краю“ $\rho(x, t) \equiv 0$, то второй интеграл в (1) в точности равен нулю. Это предположение ($\rho(x, t) \equiv 0$ на самом „краю“) фактически есть единственно возможное в данном случае следствие фундаментального физического принципа, согласно которому любые частицы могут перемещаться лишь с конечной скоростью (см. об этом подробнее ниже).

Будем считать систему автономной, однородной и изотропной, т. е.

$$K(y, x, t) = K(y, x) = K(|y-x|). \quad (2)$$

В силу быстрого убывания $K(|y-x|)$ (оно содержит Больцмановский множитель, экспоненциально быстро убывающий с ростом $|y-x|$ ⁽²⁾) разложим $\rho(y, t)$, входящее в (1), по степеням $y-x=\xi$. Учитывая, что на самом „краю“ $\rho(x, t) \equiv 0$, получим из (1)

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \int_0^\infty \xi K(|\xi|) d\xi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \int_0^\infty \xi^2 K(|\xi|) d\xi. \quad (3)$$

Рассмотрим простейший случай: частица диффундирующего вещества с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$, может совершать перескоки на расстояние h „направо“ и „налево“ за время τ . Этот случай реализуется, если положить

$$K(|x-y|) = K(|\xi|) = A \delta(|\xi| - h). \quad (4)$$

Здесь δ — δ -функция Дирака, $A = \frac{1}{2\tau}$ (определяется из условия нормировки, так как за время τ частица обязательно должна „перескочить“ „направо“ или „налево“). Подставив (4) в (3), получим

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{h}{2\tau} \cdot \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{4\tau} \cdot \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Таким образом, появление в (5) члена $\left(-\frac{h}{2\tau}\right) \rho'_x$ и коэффициента $h^2/4\tau$ вместо коэффициента $h^2/2\tau$, который появляется в уравнении, описывающем тот же процесс, только не на „краю“ (ур. типа (7), см. ниже), есть следствие асимметрии „правого“ и „левого“ полупространств относительно краевой точки („слева“ в нее частицы могут поступать, а „справа“ нет). Уравнение (5), описывающее эволюцию ρ в приграничной области, является, фактически, уравнением Фоккера — Планка. Конкретный вид коэффициентов при ρ'_x и ρ''_{xx} связан с выбором в качестве $K(x, y, t)$ — δ -функции. В дальнейшем мы исследуем влияние функциональной зависимости $K(y, x, t)$ на вид коэффициентов при ρ'_x и ρ''_{xx} .

Линейное уравнение диффузии, описывающее процесс распространения частиц, происходящий по механизму случайных блужданий вдали от „краев“ „облака“ (см., например, ^(2,4)), при предельном переходе $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, таком, что $D = \frac{h^2}{2\tau} = \text{const}$, имеет фундаментальное решение (описывающее эволюцию единичной массы, первоначально сосредоточенной в точке $x=0$)

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad (6)$$

которое обращается в нуль лишь асимптотически, что влечет за собой бесконечно большую скорость распространения частиц (так как при сколь угодно больших x и конечных t $\rho(x, t)$, задаваемое (6), не обращается в нуль ^(2,5,6)).

Если и в уравнении (5) предельный переход $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ совершать таким образом, чтобы $D = \frac{h^2}{2\tau} = \text{const} \neq 0$, то тогда $h/2\tau = \frac{v}{2} = \frac{D}{h} \rightarrow \infty$ и определяющим (т. е. дающим основной вклад в правую часть ур. (5)) будет именно член $\frac{h}{2\tau} \rho'_x$. При предельном же перехо-

де, проводящемся так, чтобы выполнялось $\frac{h}{\tau} = v = \text{const}$ и, следовательно, $D = \frac{vh}{2} \rightarrow 0$, опять-таки определяющим „справа“ в ур. (5)

оказывается тот же член. В силу вышесказанного конечная скорость распространения частиц влечет за собой „зануление“ коэффициента диффузии D на самом „краю облака распространяющихся частиц“ (другими словами, на „фронте волны концентрации“ D обращается в нуль одновременно с $\rho(x, t) \rightarrow 0$). Очевидно, что учет этого обстоятельства существен для тех стадий процесса диффузии, когда возмущение („фронт волны концентрации“) „не успело дойти“ до граничных точек рассматриваемой среды, т. е. на начальных стадиях процесса диффузии в пространственно ограниченные среды и при диффузии в полуограниченную среду.

Возникает вопрос: возможно ли на „краю“ одновременное выполнение $\rho'_x(x, t) \equiv 0$ и $\frac{h^2}{2\tau} = D = \text{const} \neq 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$. Если это было бы возможным, то ур. (5) приняло бы вид:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение же (7) имеет фундаментальное решение

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right), \quad (8)$$

которое обращается в нуль лишь асимптотически и, следовательно, не имеет „края“. Получилось противоречие, поэтому на поставленный вопрос с необходимостью следует отрицательный ответ.

Обсудим различные определения скорости v распространения диффундирующих частиц.

Пусть в процессе случайного блуждания частица с вероятностью $1/2$ в моменты $n\tau$ ($n=1, 2, \dots, \infty$) „перескакивает“ в соседние точки на расстояния h . Скачок, совершаемый из каждого i -того положения, — независимое событие. Тогда за t секунд совершается t/τ скачков. Отсюда дисперсия за t секунд

$$\frac{t}{\tau} h^2 = 2 \frac{h^2}{2\tau} \cdot t = 2Dt, \quad (9)$$

где $D = \frac{h^2}{2\tau} = \text{const}$. Следовательно, модуль среднего отклонения с те-

чением времени изменяется по закону $\Delta r = \sqrt{2Dt}$, поэтому естественно за v принять

$$\frac{d\Delta r}{dt} = \sqrt{\frac{D}{2t}}. \quad (10)$$

Если же подсчитать суммарный путь, пройденный частицей в процессе случайного блуждания, то он окажется равным

$$\frac{t}{\tau} h = \frac{h^2}{\tau} \cdot \frac{t}{h} = D \frac{2t}{h} \quad (11)$$

и будет стремиться к бесконечности при $h \rightarrow 0$, $D = \text{const}$ и конечных t . Следовательно, и $v \rightarrow \infty$. При этом все перемещения могут быть и одного знака, и именно поэтому какая-то часть частиц в „облаке“ имеет конечную вероятность „уйти“ на бесконечность. Для того чтобы совместить получающуюся таким образом бесконечную скорость распространения частиц с конечной дисперсией, и вводится предположение о бесконечной частоте осцилляции частиц (см., например, (*), с. 261).

При $D \neq \text{const}$ естественно „разбить“ t (или x) на участки, на которых D можно считать постоянным, и подсчитать дисперсию на каждом участке, а потом их складывать (так как „перескоки“ на каждом участке — суть независимые события, то их дисперсии складываются).

При описании диффузии в неограниченную и полуограниченную области (именно эти случаи мы обсуждаем) правомочна подстановка Больцмана (6) $u = x/2\sqrt{Dt}$. Тогда изоконцентрационный профиль $\rho(x, t) = \rho\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = \text{const}$ распространяется со скоростью, определяемой из условия $x = 2\gamma\sqrt{t}$ (где γ некоторая постоянная).

Заметим, что определения v , за исключением данного с помощью формулы (11), — макроскопические и, в сущности, совпадающие. Определение же v , данное с помощью (11), являясь микроскопическим, противоречит не только макроскопическим определениям, но и фундаментальному физическому принципу, требующему конечной скорости распространения частиц. При этом даже введение бесконечной частоты и осцилляции не снимает этого противоречия, ибо «край облака» по-прежнему будет мгновенно «уходить» на бесконечность.

Для преодоления этого противоречия заметим, что эволюция плотности диффундирующих частиц на самом «краю облака» будет описываться уравнением (5), являющимся уравнением Фоккера—Планка. Как было показано выше, это обстоятельство является следствием учета конечной скорости распространения частиц (откуда следует и факт наличия «края»). Поэтому скорость v , введенная с помощью (11), является принципиально ненаблюдаемой, так же как не может быть наблюдаем (из физических соображений) отдельный акт «перескока» частицы на расстояние h , происходящий за время τ , при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Поэтому определение v по формуле (11) лишено физического смысла. Таким образом и внутри «облака» скорость распространения частиц не бесконечна и должна определяться макроскопически.

Автори выражают глубокую благодарность академику АН Армянской ССР Г. М. Гарибяну и чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяну и всем участникам теоретического семинара кафедры общей физики ЕГУ за полезное обсуждение работы.

Ереванский государственный
университет

Վ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, ՅՈՒ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Դիֆուզիայի գործակցի վարժը «մասնիկների նապաղվող ամպի եզրին»

Դիտարկված է «չփոխադրող մասնիկների ամպի» նապաղման պրոցեսը, երբ մասնիկները սկզբում կենտրոնացված են տարածության սահմանափակ տիրույթում:

Նշելով դիֆուզիոն մասնիկների շարժման արագության սահմանափակ լինելու սկզբունքից՝ վերլուծված է դիֆուզիայի գործակցի վարժը «ամպի եզրում»: Արված է հետևյալ եզրակացությունը՝ «ամպի» եզրին դիֆուզիայի գործակցը պետք է հավասար լինի զրոյի:

Ամպի եզրին չփոխադրող մասնիկների նապաղման պրոցեսը նկարագրվում է Ֆոկեր-Պլանկի հավասարումով: Ստացված են այդ հավասարման գործակիցները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрофизике, ИЛ, М., 1947. ² Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис, Элементы математической физики, Наука, М., 1973. ³ Л. Жирифалько, Статистическая физика твердого тела, Мир, М., 1975. ⁴ Ю. А. Розанов, Введение в теорию случайных процессов, Наука, М., 1982. ⁵ Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Наука, М., 1966. ⁶ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Наука, М., 1966.

УДК 537.877:[536.21:548]

ФИЗИКА

Р. Г. Тарханян

Термоэлектромагнитные волны в анизотропных полупроводниках

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Авакьянцем 21/VI 1984)

В работе ⁽¹⁾ исследовалось влияние градиента температуры $\vec{\nabla}T$ на диэлектрическую проницаемость анизотропных полупроводников ϵ_{ij} и было показано, что возникающий при этом высокочастотный эффект Нернста приводит к резкому изменению электромагнитных свойств кристалла. Цель настоящей статьи—изучение влияния градиента температуры на распространение высокочастотных электромагнитных волн в одноосных полупроводниках на основе полученного в ⁽¹⁾ выражения для тензора ϵ_{ij} . Это влияние оказывается весьма существенным: при наличии $\vec{\nabla}T$ изменяются поляризации, дисперсионные соотношения и другие характеристики распространяющихся волн. Кроме того, как будет показано, при определенных условиях волны, частоты которых значительно превышают частоту столкновений, могут испытывать «бесстолкновительное» затухание (даже в отсутствие пространственной дисперсии) либо самопроизвольное усиление за счет энергии электронов, дрейфующих под действием термоэлектрического поля и магнитного поля волн. Именно из-за этих особенностей волны, распространяющиеся в полупроводниковой плазме при наличии $\vec{\nabla}T$, в дальнейшем будем называть термоэлектромагнитными волнами (ТЭМВ).

Рассмотрим, как и в ⁽¹⁾, одноосный полупроводник с одним сортом носителей заряда. Будем считать, что длина неоднородности $T/\nabla T$ значительно превышает длину свободного пробега частиц, а также длину волны рассматриваемых электромагнитных колебаний. В этом случае пространственное изменение поля можно характеризовать с помощью волнового вектора: $\vec{E}, \vec{H} \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$. При этом уравнения Максвелла принимают вид

$$[\vec{n} \vec{H}] = -\vec{D}, \quad [\vec{n} \vec{E}] = \vec{H}, \quad (1)$$

где $n = ck/\omega$, $D_i = \epsilon_{ij}E_j$, ϵ_{ij} —тензор комплексной диэлектрической проницаемости, полученный в ⁽¹⁾ с помощью кинетического уравнения для функции распределения носителей тока. Дисперсионное уравнение

$$\det[n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}] = 0, \quad (2)$$

следующее из (1), удобно исследовать в системе координат с осью

$\vec{k}$ и ось x в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла $\vec{C}$ и волновой вектор $\vec{k}$, составляющие между собой угол θ . В этой системе координат, используя (1), для тензора ε_{ij} получим

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta + n \gamma \nabla_x T & -n \gamma \nabla_y T \mu_{xz} / \mu_{\perp} & (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \varepsilon_{\perp} + n \gamma \nabla_x T & 0 \\ (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta - n \gamma \nabla_x T & -n \gamma \nabla_y T \mu_{xz} / \mu_{\perp} & \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $z = (\mu_{xz} \nabla_x T + \mu_{zx} \nabla_z T) / \mu_{\perp}$, $\gamma = 4\pi c \mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}(\omega) Q(\omega) / \omega$, (4)

$$\varepsilon_{\perp, \parallel} = \varepsilon_{\perp, \parallel}^L + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma(\omega) \mu_{\perp, \parallel}, \quad \mu_{zz} = \mu_{\perp} \sin^2 \theta + \mu_{\parallel} \cos^2 \theta, \quad \mu_{xz} = (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta, \quad (5)$$

$\mu_{\perp, \parallel}$ — главные значения безразмерного тензора эффективной массы носителей вдоль и поперек оси кристалла, $\varepsilon_{\perp, \parallel}^L$ — соответствующие величины для независимой от частоты тензора диэлектрической проницаемости решетки, $\sigma(\omega)$ и $Q(\omega)$ — кинетические коэффициенты, вычисленные в (1). Используя (3), из (2) получим два дисперсионных соотношения для ТЭМВ:

$$n^2 - \varepsilon_{\parallel} n - \varepsilon_{\perp} = 0, \quad (6)$$

$$(\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta) n^2 - \gamma n [(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta \nabla_x T + (\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta) \nabla_z T] - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} = 0. \quad (7)$$

Каждое из этих уравнений имеет по два решения для показателя преломления: n_{+} и n_{-} , которые в случае полубесконечной среды соответствуют падающим на поверхность среды (изнутри) и отраженным волнам, отличающимся знаком нормальной составляющей волнового вектора. При $\vec{\nabla} T = 0$ (6) и (7) дают

$$n^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad (6a) \quad n^2 = \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} / (\varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta), \quad (7a)$$

первое из которых соответствует обыкновенной, а второе — необыкновенной волне в одноосных кристаллах. При наличии градиента температуры в безграничной среде в заданном направлении распространяются по-прежнему две волны, свойства которых, однако, существенно отличаются от соответствующих свойств волн, описываемых (6a) и (7a). Так, из (4) — (6) следует, во первых, что при $\vec{\nabla} T \neq 0$ появляется зависимость показателя преломления обыкновенной волны от направления распространения. Во-вторых, волна перестает быть поперечной и изменяется характер поляризации. Действительно, при $\vec{\nabla} T = 0$ вектор электрического поля $\vec{E}_{\parallel}$ оси y , а при $\nabla_y T \neq 0$ возникают составляющие E_x и E_z , причем

$$\frac{E_z}{E_y} = \frac{n \gamma \mu_{\perp} \nabla_y T}{\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel}}, \quad \frac{E_x}{E_y} = n \gamma \nabla_y T \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\mu_{\parallel} \varepsilon_{\perp} - \mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})}. \quad (8)$$

Легко видеть, что в изотропном случае, а также в случае распространения волны вдоль оси кристалла ($\theta = 0$) этот эффект невозможен: волна остается поперечной, вектор $\vec{E}_{\perp}$ плоскости $(\vec{k}, \vec{\nabla} T)$. В одноосном же кристалле при $\theta \neq 0$ рассматриваемая волна (6) не продольна и не поперечна и обладает, вообще говоря, эллиптической

поляризацией. Волна имеет линейную поляризацию лишь при распространении в плоскости $(\vec{C}, \vec{\nabla}T)$, при этом показатель преломления зависит от угла θ между волновым вектором и осью кристалла, так что волна (6) становится „необыкновенной“. Влияние $\vec{\nabla}T$ на свойства необыкновенной волны оказывается менее резким. В волне (7), как и в (7a), вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости xz и в отличие от вектора индукции $\vec{D} = (D_x, 0, 0)$ имеет как поперечную, так и продольную составляющую относительно волнового вектора, причем

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{n\gamma \nabla_x T - \epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}}. \quad (9)$$

В частных случаях распространения вдоль ($\theta=0$) или поперек оси кристалла ($\theta=\pi/2$) из дисперсионного уравнения (7) отщепляется решение, соответствующее продольной ($\vec{E} \parallel \vec{K}$) волне: $\epsilon_{\parallel}=0$ в случае $\theta=0$ и $\epsilon_{\perp}=0$ в случае $\theta=\pi/2$. Из (5) следует, что в рассматриваемом приближении градиент температуры не влияет на свойства продольных волн. Оставшееся решение (7) описывает продольно-поперечную волну с дисперсионным соотношением

$$n^2 - n\gamma \nabla_z T - \epsilon_{\perp} = 0 \quad (10a)$$

в случае $\theta=0$ и

$$n^2 - n\gamma \nabla_z T - \epsilon_{\parallel} = 0 \quad (10b)$$

в случае $\theta=\pi/2$. Заметим, что несмотря на совпадение (10a) с (6), если в последнем положить $\theta=0$, волны, описываемые ими, существенно отличаются: в волне (10a) $\vec{E} = E_x(1, 0, n\gamma \nabla_x T / \epsilon_{\parallel})$, а в волне (6) при $\theta=0$ $\vec{E} = E_y(0, 1, 0)$. Таким образом, вдоль оси кристалла распространяются две волны с различной поляризацией, но с одной и той же частотой и фазовой скоростью. В случае $\theta=\pi/2$ такое вырождение отсутствует; в этом направлении распространяются две волны с различными показателями преломления: волна (10b), в которой $\vec{E} = E_x(1, 0, n\gamma \nabla_z T / \epsilon_{\perp})$, и волна с дисперсионным соотношением

$$n^2 - n\gamma \nabla_z T \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} - \epsilon_{\perp} = 0, \quad (66)$$

в которой $\vec{E} = E_y(0, 1, n\gamma \mu_{\perp} \nabla_y T / \epsilon_{\perp} \mu_{\parallel})$.

Изложенные выше результаты справедливы для волн произвольной частоты, распространяющихся в полупроводниках с произвольной степенью вырождения электронного (или дырочного) газа. Далее рассмотрим распространение высокочастотных ($\omega\tau \gg 1$, $\tau = \tau(\epsilon)$ — время релаксации носителей заряда) ТЭМВ в полупроводниках с невырожденной электронной плазмой. В этом случае согласно (1)

$$\gamma = -i \frac{r \epsilon_{\perp}^L \omega_{\perp}^2}{m_0 c \omega^3}, \quad \epsilon_{\perp \parallel} = \epsilon_{\perp \parallel}^L \left(1 - \frac{\omega_{\perp \parallel}^2}{\omega^2} \right), \quad \omega_{\perp \parallel}^2 = \omega_0^2 \frac{\mu_{\perp \parallel}}{\epsilon_{\perp \parallel}}, \quad (11)$$

$\omega_0^2 = 4\pi N e^2 / m$, m — масса и N — концентрация свободных электронов,

r — параметр, определяющий характер механизма рассеяния носителей. Подставляя (11) в (6) и (7), для показателей преломления ТЭМВ получим соответственно

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^L} \left[\pm \left(1 - \frac{\omega_{\perp}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\perp}^4 \Omega_{\perp}^2}{\omega^6} \right)^{\frac{1}{2}} - i \frac{\omega_{\perp}^2 \Omega_{\perp}}{\omega^3} \right], \quad (12)$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}^L \varepsilon_{\parallel}^L}{\varepsilon_{zz}^L}} \left\{ \pm \left[\frac{(\omega^2 - \omega_{\perp}^2)(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)} - \left(\frac{\omega_{\perp} \omega_p \Omega}{\omega^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - i \frac{\omega_{\perp} \omega_p \Omega}{\omega^3} \right\}, \quad (13)$$

где

$$\Omega_{\perp} = r \sqrt{\varepsilon_{\perp}^L} / 2m c, \quad \Omega = \frac{r^2}{2c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}^L}{m_{\perp} m_{\parallel}}}, \quad \beta = \nabla_z T + \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} \nabla_x T, \quad (14)$$

$\omega_p^2 = \omega_0^2 \varepsilon_{zz}^L / \varepsilon_{zz}^L$ — резонансная частота волны (13). Из этих выражений следует, что при распространении ТЭМВ испытывают самопроизвольное усиление либо затухание в зависимости от знака величин Ω и $\Omega_{\perp}$. При заданных направлениях векторов $\vec{k}$ и $\vec{\nabla}T$ знак этих величин зависит лишь от механизма рассеяния носителей заряда. Например, в случае $\alpha > 0$ волна (12), распространяющаяся в направлении $+z$, затухает при рассеянии на акустических фононах ($r < 0$) и усиливается при рассеянии на ионах примеси либо на оптических фононах при $T > T_D$ ($r > 0$). При заданном направлении распространения и заданном значении r усиление волны переходит в затухание (и наоборот) в случае инверсии вектора $\vec{\nabla}T$. Из (12) следует, что волна существует лишь в области частот $\omega > \omega_{\perp} + \frac{\Omega_{\perp}^2}{2\omega_{\perp}}$, т. е. наличие градиен-

та температуры приводит к смещению частоты отсечки в сторону более высоких частот на величину $\sim (\nabla T)^2$, что может проявляться на эксперименте как сдвиг края плазменного отражения. Коэффициент поглощения волны (12) в области прозрачности определяется выражением

$$\eta = - \frac{\alpha r \varepsilon_{\perp}^L \omega_{\perp}^2}{m_{\perp} c^2 \omega^3} \quad (15)$$

и существенно зависит от взаимной ориентации векторов $\vec{k}$, $\vec{\nabla}T$ и оси кристалла $\vec{C}$. В случае волны (13) в формуле (15) следует заменить α на β . Используя (4), коэффициент α можно записать в виде $\alpha = \vec{\nabla}T \cdot \vec{\zeta}$, где

$$\vec{\zeta} = \cos \psi \left(\cos^2 \theta + \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \psi \cos \varphi \cdot \left(\frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} - 1 \right), \quad (16)$$

ψ и φ — полярный и азимутальный углы вектора $\vec{\nabla}T$ в выбранной системе координат. Из (15) и (16) легко видеть, что при заданных значениях r , θ и φ знак коэффициента поглощения меняется на обратный при $\psi = \psi_0$, где

$$\operatorname{tg} \psi_0 = - \mu_{zz} / \mu_{xz} \cos \varphi, \quad (17)$$

и что при $\psi = \psi_0 - \frac{\pi}{2}$ (если $\mu_{\perp} > \mu_{\parallel}$) либо при $\psi = \psi_0 + \frac{\pi}{2}$ (если $\mu_{\perp} < \mu_{\parallel}$)

$|\eta|$ имеет максимум, равный

$$|\eta|_{\max} = \frac{|r|e^{\frac{1}{2}}\omega_{\perp}^2\nabla T}{m_e c^2 \omega_{\parallel}^2} (\mu_{xx}^2 + \mu_{xz}^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Заметим, что в изотропном случае, а также в случаях $\theta = 0, \pi/2$ поглощение имеет максимум при $\psi = 0$ либо $\psi = \pi$, а коэффициент поглощения меняет знак при $\psi = \pi/2$. В анизотропном же случае, как это следует из (17), появляется возможность „управлять“ этими характерными значениями ψ путем изменения углов θ и φ .

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ԹԱՐԽԱՆՅԱՆ

Թերմոէլեկտրամագնիսական ալիքները անիզոտրոպ կիսաճաղորդիչներում

Ուսումնասիրված է ջերմաստիճանի գրադիենտի ազդեցությունը անիզոտրոպ կիսաճաղորդիչներում բարձր հաճախականության էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման վրա: Ցույց է տրված, որ կտրուկ փոխվում են ալիքների դիսպերսիոն առնչությունները, բևեռացումը, բեկման ցուցիչները և որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում ալիքները կարող են սպոնտան կերպով ուժեղանալ Թերմոէլեկտրական դաշտի և ալիքի մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ դրեյֆոդ ազատ լիցքակիրների էներգիայի հաշվին: Ստացված է բացահայտ արտահայտություն ալիքների կլանման գործակցի համար: Թերմոէլեկտրամագնիսական ալիքների փորձնական հետազոտումը կարող է արժեքավոր ինֆորմացիա տալ կիսաճաղորդիչներում լիցքակիրների ցրման մեխանիզմի վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Р. Г. Тарханян, ДАН АрмССР, т. 78, № 3 (1984).

УДК 517.544

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. А. Вардилян

Новые виды пядениц из рода *Eupithecia* Curt.
(Lepidoptera, Geometridae) из Армении

(Представлено чл.-корр. АН АрмССР С. О. Мовсисяном 7/IX 1984)

При обработке материала по роду *Eupithecia* Curt. нами обнаружены два новых вида, описание которых приводится ниже.

1. *Eupithecia dinaria* Wardikjan sp. nov. (рис. 1).

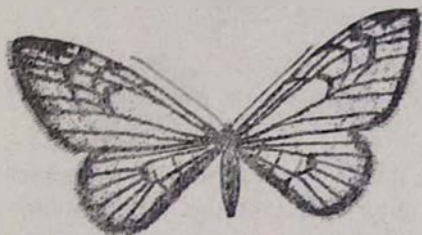


Рис. 1. *Eupithecia dinaria* Wardikjan sp. nov.

Размах крыльев 15—16 мм. Усики питевидные. Передние и задние крылья сероватые с неясно выраженными поперечными перевязями, которые более четко выражены у переднего края передних крыльев, а к заднему краю исчезают. На вершине передних крыльев имеется темное пятно. На жилках имеется скопление темных чешуек, поэтому хорошо выделяется жилкование крыльев. Срединная ячейка более светлая, на вершине ее расположено узкое, поперечно-удлиненное срединное пятно.

Задние крылья более монотонной окраски с едва заметными перевязями и срединным пятном. Внутренний край задних крыльев темнее. Бахрома двухцветная: внутренняя полоса темнее, внешняя светлее.

Генитальный аппарат самца (рис. 2).

Вальвы лепестковидные с хорошо склеротизованным дорзальным кантом, в виде узкой полосы. Ункус небольшой, конусовидный, острокопечный. Саккус вытянутый, достаточно склеротизованный с округлым внешним краем. Эдеагус прямой, цилиндрический с небольшим расширением у основания. На паре пифлабилис имеется пара склеротизованных удлиненных пластинок с зазубренными краями. Вентраль-

ная пластинка продольно разделена на две половинки, которые у верхнего края соединены узкой перемычкой. Верхняя часть этих пластинок округлая, а нижняя в виде узкого, дугообразно изогнутого остроконечного отростка.

По окраске, по рисунку крыла и по строению генитального аппарата данный вид сближается с видом *E. silenicolata*. У описываемого

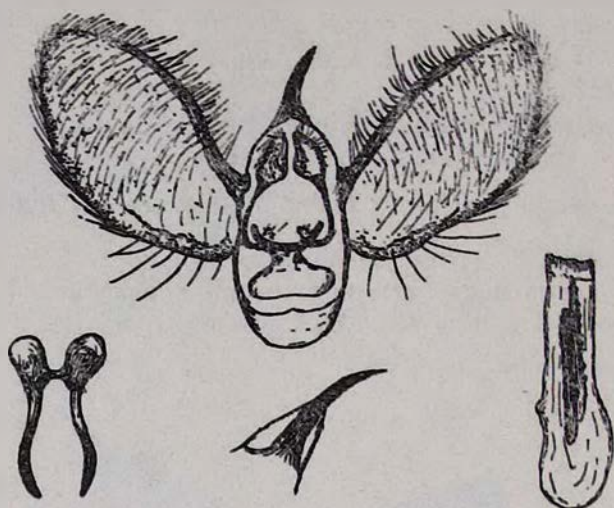


Рис. 2. *Eupithecia dinaria* Wardikjan sp. nov. Половой аппарат самца

нового вида вальвы более узкие, ункус остроконечный, склеротизованные пластинки на паре инфлабилис совершенно другой формы (две пластинки удлиненной формы с зазубренными краями). Резко отличается также по форме вентральной пластинки.

Тип (самец)—окр. Еревана (зоопарк) 24.IX.1957 г. (Вардикян), хранится в коллекциях Института зоологии Академии наук Армянской ССР. Вид назван в честь моей внучки.

2. *Eupithecia hamleti* Wardikjan sp. nov. (рис. 3).

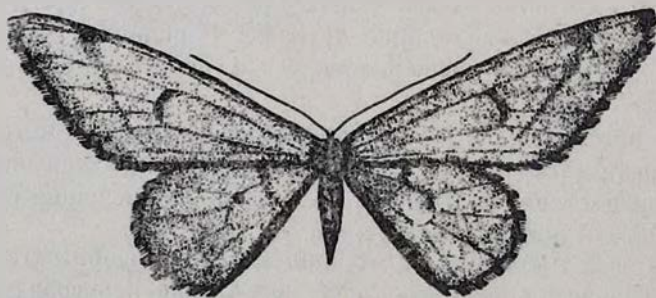


Рис. 3. *Eupithecia hamleti* Wardikjan sp. nov.

Размах крыльев 16—17 мм. Усики нитевидные. Передние и задние крылья имеют монотонную окраску, покрыты светло-серыми чешуйками. На фоне обоих крыльев выделяется по одному срединному пятну. Срединное пятно на передних крыльях поперечно-удлиненной фор-

ми, на задних крыльях округлой формы. Имеется едва заметная поперечная наружная перевязь на передних и внутренняя на задних крыльях.

Генитальный аппарат самца (рис. 4, А).

Вальвы лепестковидные с явно выраженным дорзальным кантом. Ункус на вершине с неглубокой выемкой разделен на две лопасти. Саккус вытянутый с округлым внешним краем. Вентральная пластинка треугольной формы с небольшой выемкой по переднему краю. Узкая часть вентральной пластинки с боков имеет склеротизованные по-

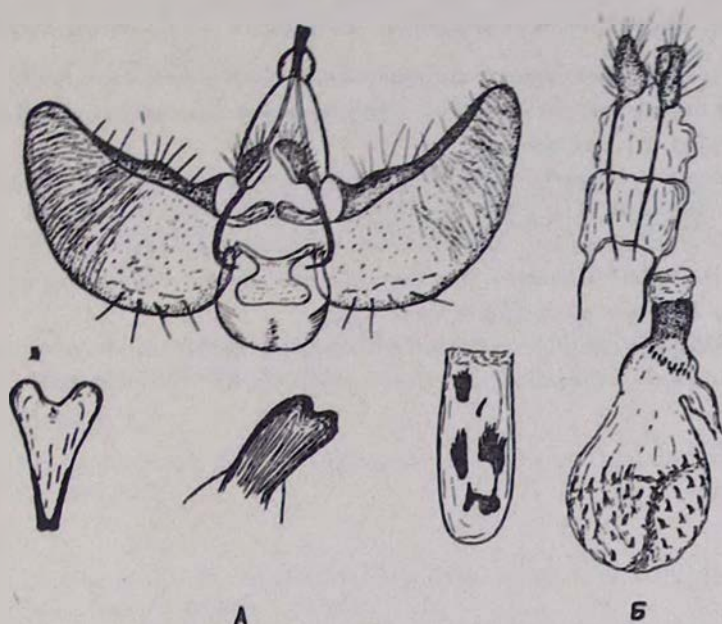


Рис. 4. *Eupithecia hamletti* Wardljan sp. nov. А—половой аппарат самца; Б—половой аппарат самки

лости. Эдеагус широкий, цилиндрический с несколькими склеротизованными пластинками различной формы, покрытыми мелкими шипиками, на парс инфлабилисе.

Генитальный аппарат самки (рис. 4, Б).

Анальные сосочки удлинённые с явно выраженными апофизами. Сополокительное отверстие широкое, перепончатое, округлой формы. Копулятивная сумка грушевидная. Внутренняя поверхность округлого дна покрыта крупными шипами. Проток копулятивной сумки широкий, с боковыми широкими пластинками. От основания копулятивной сумки отходит широкий, перепончатый семенной проток. У основания сумки, на месте, где отходит семенной проток, имеется ряд склеротизованных мелких шипиков.

Указанный вид близок к *E. intricata*, отличается от него окраской тела, двувёршинным ункусом, склеротизованной пластинкой на парс инфлабилисе у основания эдеагуса. Генитальный аппарат самки отличается по форме и расположению шипиков на внутренней поверхности копулятивной сумки и по форме и степени склеротизации протока сумки.

Тип (самец и аллотип (самка)) — окр. Еревана зоопарк) 1.X.1958 г. (Вардицян), хранится в коллекциях Института зоологии Академии наук Армянской ССР. Вид назван в честь сотрудника института, принявшего активное участие в сборе материала.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՎԱՐԴԻԿՅԱՆ

Երկրաչափ թիթեռների նոր տեսակներ Eupithecia Curt. սեռից Հայաստանից

Հոդվածում զետեղված է Հայաստանում հայտնաբերված երկրաչափ թիթեռներից երկու նոր տեսակների նկարագրությունը, որոնք պատկանում են Eupithecia Curt. սեռին:

Նկարագրված երկու տեսակներից մեկը մոտ է կանգնած Eupithecia sile-nicolata, իսկ մյուսը Eupithecia intricata տեսակներին, բայց թե արտաքին տեսքով և առանձնապես սեռական օրգանների կառուցվածքով խիստ տարբերվում են նշված տեսակներից: Առաջին տեսակից հայտնաբերված է միայն արու, իսկ երկրորդ տեսակից և արու և էգ:

Հայտնաբերված նոր տեսակների տիպերը գտնվում են Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի կենդանաբանության ինստիտուտի հավաքածուներում:

