ISSN 0002-3035

ФИЗИКА · ՖԻԶԻԿԱ · PHYSICS

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Журнал издается с 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Адрес редакции: Республика Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն, 375019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ։

Editorial address: 24-g, Marshal Bagramyan Av., Yerevan, 375019, Republic of Armenia.

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 159—165 (1998)

УДК 538.3

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ИЗЛУЧЕНИЯ

Э. А. БЕГЛОЯН, Э. Д. ГАЗАЗЯН, В. Г. КОЧАРЯН, Э. М. ЛАЗИЕВ

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 5 июля 1997 г.)

В работе развит метод характеристических матриц для использования в задачах об излучении сгустков заряженных частиц в регулярных волноводах произвольного поперечного сечения, заполненного слоистой диэлектрической средой. Такой подход позволяет свести систему из 2N линейных уравнений к двум уравнениям с двумя неизвестными и представить выражения для полей и энергии излучения в удобном аналитическом виде. Рассмотрены вопросы формирования полей излучения и синхронного сложения волн, излученных разными сгустками на разных гармониках слоистой среды. Проанализирован случай мелкослоистой среды.

1. Рассмотрим регулярный волновод произвольного сечения, заполненный слоистой средой конечной толщины, состоящей из N чередующихся диэлектрических пластин толщины d и воздушных прослоек толщины a. Вдоль оси волновода со скоростью $v=v_z=\text{const}$ движется релятивистский сгусток с зарядом q. Согласно условиям задачи в волноводе возбуждаются лишь TM волны с отличной от нуля E_z составляющей поля излучения, которую и выберем в качестве потенциальной функции.

Значения произвольной n-ой распространяющейся моды поля на каждой j-ой границе стопки можно выразить через два неизвестных коэффициента: $B_n^{(j)}$, описывающих волны, распространяющиеся по направлению движения сгустка, и $A_n^{(j)}$, описывающих волны, распространяющиеся против направления движения сгустка. Коэффициенты $A_n^{(j)}$ и $B_n^{(j)}$ определяются граничными условиями, записанными на всех границах стопки.

Граничные условия, записанные для $2N$ границ стопки, приводят к системе из $4N$ уравнений со столькими же неизвестными. Эту систему можно свести к двум уравнениям с двумя неизвестными, если обобщить метод характеристических матриц [1] для решения задач об излучении заряженных частиц. Характеристической матрицей M одного периода слоистой среды (диэлектрическая и воздушная пластинки) называется матрица, которая однозначно связывает значения полей на первой и последней границах периода, с элементами

$$M_{11}=\cos\gamma_n d\cos\Gamma_n a-\left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon\Gamma_n}\right)\sin\gamma_n d\sin\Gamma_n a,$$

$$M_{12}=\frac{1}{\varepsilon\Gamma_n}\cos\gamma_n d\sin\Gamma_n a-\frac{1}{\gamma_n}\sin\gamma_n d\cos\Gamma_n a,$$

$$M_{21}=i\gamma_n \sin\gamma_n d\cos\Gamma_n a - i\varepsilon\Gamma_n\cos\gamma_n d\sin\Gamma_n a, \qquad (1)$$
$$M_{22}=\cos\gamma_n d\cos\Gamma_n a-\sin\gamma_n d\sin\Gamma_n a,$$

где $\gamma_n^2=(\omega^2/c^2)\varepsilon-\lambda_n^2$, $\Gamma_n^2=(\omega^2/c^2)-\lambda_n^2$, ε—диэлектрическая проницаемость пластины, λ_n^2—собственные волновые числа, n—индекс моды. Матрица (1) определяет закон преобразования волн, проходящих через один период слоистой среды

$$\hat{T}_{mL}=\hat{M}\hat{T}_{(m+1)L}, \qquad (2)$$

где $\hat{T}_{mL}$—матрицы-столбцы с неизвестными коэффициентами $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ с соответствующими фазовыми множителями

$$\hat{T}_{mL}=\begin{vmatrix} e^{-i\Gamma_n mL} & e^{-i\Gamma_n mL} \\ -\varepsilon\Gamma_n e^{-i\Gamma_n mL} & \varepsilon\Gamma_n e^{-i\Gamma_n mL}\end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_n^{(i)} \\ B_n^{(i)} \end{vmatrix}, \quad L=d+a. \qquad (3)$$

Если вдоль волновода движется сгусток, то в слоистой среде возникают дополнительные поля, связанные с изменением собственного поля сгустка при пересечении им границ раздела диэлектрических сред. Это изменение, определяемое из соответствующих граничных условий для n-ой моды, можно представить в виде матрицы-столбца

$$\hat{b}_n^{(m)}=-q(\varepsilon-1)F_n(\omega)\begin{vmatrix} \dfrac{\omega^2}{d_n c^2} \\ \dfrac{\omega a_n}{v d_n}\end{vmatrix} e^{-i(\omega/v)mL}, \qquad (4)$$

$d_n=(\omega^2/v^2-\gamma_n^2)(\omega^2/v^2-\Gamma_n^2)$, $a_n=(1-\beta^2)\omega^2/v^2-\gamma_n^2$, $F_n(\omega)$—форм-фактор сгустка.

В произвольном m-ом периоде сгусток пересекает две границы раздела. Изменения поля при переходе из вакуума в диэлектрик и из диэлектрика в вакуум описываются матрицами $\hat{a}(\gamma_n)$ и $\hat{a}(\Gamma_n)$, получающимися из матрицы $\hat{M}$, если соответственно $a=0$ и $d=0$. Окончательно уравнение (2) обобщается в виде

$$\hat{T}_{mL}=\hat{M}\hat{T}_{(m+1)L}+\hat{M}\hat{b}_n^{(m)}-\hat{p}(\gamma_n)\hat{b}_n^{m}e^{-i(\omega/v)d}. \qquad (5)$$

Выражая значения полей излучения на последующих границах через их значения на предыдущих границах, придем к связи полей на любых двух границах слоистой среды. В частности, для первой и последней границ стопки получим

$$\hat{T}_{NL}=\hat{M}^N\hat{T}_0+\sum_{k=0}^{N-1}\hat{M}^{N-k}(1-\hat{p}^{-1}(\gamma_n)e^{-i(\omega/v)d})\hat{b}_n^{(k)}. \qquad (6)$$

Для вычисления полей излучения в произвольном m-ом отсеке нужно записать уравнения, связывающие значения полей на границах m-го отсека с полями на первой и последней границах стопки:

$$\hat{T}_{mL}=\hat{M}^{m}\hat{T}_{0}+\sum_{k=0}^{m-1}\hat{M}^{m-k}(1-\hat{p}^{-1}(\gamma_n)e^{-i(\omega/v)d})\hat{b}_{n}^{(k)},$$

$$\hat{T}_{mL}=\hat{M}^{N-m}\hat{T}_{0}+\sum_{k=m}^{N-1}\hat{M}^{m-k}(1-\hat{p}^{-1}(\gamma_n)e^{-i(\omega/v)d})\hat{b}_{n}^{(k)}. \tag{7}$$

Решения этой системы уравнений и будут определять поля излучения в произвольном m-ом отсеке, когда сгусток пролетел всю стопку. Система (7) упрощается, если учесть, что матрицы $\hat{M}$ выражаются через полиномы Чебышева второго рода, равенство нулю аргумента ξ_n которых и является дисперсионным уравнением в слоистой среде:

$$\xi_n=\cos k_z L=\cos\gamma_n d\cos\Gamma_n a-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon\Gamma_n}+\frac{\varepsilon\Gamma_n}{\gamma_n}\right)\sin\gamma_n d\sin\Gamma_n a. \tag{8}$$

В полосе прозрачности стопки пластин для частот, удовлетворяющих условию Брюстера в волноводе [2]

$$\gamma_n=\varepsilon\Gamma_n, \tag{9}$$

выражения для полей еще более упрощаются.

2. Предположим теперь, что в волноводе движется система из N' одинаковых сгустков, отстоящих друг от друга на расстояние l. С учетом сделанных замечаний, для $E_{z\omega}$ составляющих полей излучения в m-ом отсеке получим [3]:

$$E_{z\omega}^{(m)}=\sum_{n}\frac{2q\lambda_n^2F_n(\omega)}{i\omega}\cdot\frac{\sin\frac{N'\omega l}{2v}}{\sin\frac{\omega l}{2v}}e^{-i(N'-1)\frac{\omega l}{2v}}\left\{\frac{\sin m\left(\frac{\omega}{v}-k_z\right)\frac{L}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{v}-k_z\right)\frac{L}{2}}\cdot\right.$$

$$\cdot B_n\exp\left(i(m-1)\left((\Gamma_n-\gamma_n)d-\left(\frac{\omega}{v}-k_z\right)\frac{L}{2}\right)-i\Gamma_n z\right)+$$

$$+\frac{\sin(N-m)\left(\frac{\omega}{v}+k_z\right)\frac{L}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{v}+k_z\right)\frac{L}{2}}\cdot \tag{10}$$

$$\left.\cdot A_n'\exp im\left((\Gamma_n-\gamma_n)d-(N+m-1)\left(\frac{\omega}{v}+k_z\right)\frac{L}{2}-i\Gamma_n z\right)-\frac{\omega^2(1-\beta^2)e^{-i\frac{\omega}{v}z}}{\lambda_n^2v^2\left(\frac{\omega^2}{v^2}-\Gamma_n^2\right)}\right\}\times$$

$$\times\Psi_n(x,y)\Psi_n(x_0,y_0),$$

где $\Psi_n(x,y)$—собственные функции поперечного сечения волновода, x_0, y_0—координаты пролета сгустков в поперечном сечении волновода, B_n определяет поля излучения «вперед» от пластины, A_n—«назад». Полученные формулы справедливы для регулярного волновода произвольного поперечного сечения. Первое слагаемое в (10) описывает поля излучения «вперед» от первых m пластин, а второе слагаемое — поля излучения «назад» от оставшихся пластин. Действительно, если положить $m=N$, второе слагаемое в (10) обратится в нуль. Механизм формирования полей излучения в стопке диэлектрических пластин следующий: каждый сгусток пучка генерирует в диэлектрических пластинах слоистой среды поля переходного излучения, которые распространяясь «вперед» и «назад», складываются друг с другом с соответствующими фазами. Если в диэлектрических пластинах выполняются условия возникновения излучения Вавилова-Черенкова, то оно также будет давать вклад в поля излучения. Такой процесс повторяется для всех сгустков пучка. Эта ситуация описывается в (10) множителями

$$f_1(\omega)=\frac{\sin\frac{N'\omega l}{2v}}{\frac{\omega l}{2v}}, \quad f_2(\omega)=\frac{\sin N\left(\frac{\omega}{v}\pm k_z\right)\frac{L}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{v}\pm k_z\right)\frac{L}{2}}. \tag{11}$$

Первый множитель $f_1(\omega)$ описывает интерференцию полей излучения от различных сгустков и имеет максимумы на частоте следования сгустков $f_0=v/l$ и ее гармониках.

Второй множитель описывает интерференцию от разных пластин стопки. При N и $N'\gg 1$ они приобретают δ-образный вид и становятся существенно отличными от нуля на частотах, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\omega}{v}\pm k_z=\frac{2\pi j}{L} \quad \frac{\omega}{v}=\frac{2\pi k}{l} \quad j,k=0,\pm 1,\pm 2\ldots, \tag{12}$$

где k — номер гармоники частоты следования сгустков, j — номер пространственной гармоники слоистой среды. Если $j=0$, то первое условие в (12) приобретает вид

$$\omega=vk_z. \tag{13}$$

Поскольку k_z имеет смысл постоянной распространения волны в слоистой среде, то условие (13) эквивалентно условию возникновения излучения Вавилова-Черенкова, когда скорость источника равна скорости сопутствующей волны. Волны с частотой, удовлетворяющей условию (13), наиболее долго взаимодействуют с пучком с длительной трансформацией энергии пучка в энергию соответствующей волны. Случай $j=0$ соответствует гармоникам слоистой среды и определяет частоты, при которых возникает параметрическое излучение [4].

Максимальный отбор энергии излучения пучка обеспечивается, когда излученные волны на данной частоте синфазны. Этого можно достигнуть оптимизацией параметров излучающего пучка, слоистой среды и волновода. Так, если определить размеры поперечного сечения волновода такими, чтобы удовлетворялось условие

$$\chi_n = \left(\frac{2\pi k\beta}{L}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}, \tag{14}$$

то частота ω_{nk} Брюстера на n-ой моде, согласно (9) и (12), будет совпадать с частотой k-ой гармоники следования сгустков и для волн с этими частотами стопка станет прозрачной. При этом если толщины диэлектрических пластин d и воздушных прослоек a удовлетворяют соотношению

$$k\left(1 \mp \frac{\beta(a+\varepsilon d)}{(d+a)\sqrt{\varepsilon+1}}\right)\frac{L}{2} = p_{\pm}, \quad p_{\pm} = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

(верхний знак соответствует волнам, распространяющимся «вперед», нижние «назад»), то волны, излученные на различных пластинках всеми сгустками пучка складываются в одинаковых фазах. При $p=0$ (аналог черенковского излучения в волноводе) (15) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{\varepsilon+1}-\beta}{\varepsilon\beta-\sqrt{\varepsilon+1}}. \tag{16}$$

Условие (15) реализуется для диэлектрических сред, проницаемость которых удовлетворяет условию

$$\varepsilon > \frac{(1+\sqrt{1+4\beta^2})}{2\beta^2}. \tag{17}$$

Для ультрарелятивистских частиц $\varepsilon > 1{,}61$. Отметим, что условие (17) справедливо для регулярных волноводов произвольного сечения. Соотношения (14)—(17) определяют оптимальные параметры излучателя, при которых отбор энергии от последовательности сгустков максимален.

Напряженность поля излучения в m-ом отсеке, после пролета системы сгустков через стопку пластин, может быть представлена в виде

$$E_z^m(x,y,z,t) = \sum_m \{mE_z^+(x,y,z,t) + (N-m)E_z^-(x,y,z,t)\}, \tag{18}$$

где $E_z^+(x,y,z,t)$ и $E_z^-(x,y,z,t)$ — поля излучения „вперед" и „назад" от одной пластины. Выражения для них получаются из (10) с учетом формул (14)—(17).

С увеличением номера отсека m первое слагаемое в (18) линейно растет. Оно описывает волны, распространяющиеся со скоростью сгустков в направлении их движения, а согласно изложенному выше, волны, излученные на каждой последующей пластине синфазно складываются с волнами, излученными на всех предыдущих пластинах, что и объясняет линейный рост $E_z^{(m)}$ с ростом номера ячейки m. Учет потерь энергии в диэлектрических пластинах и в стенках волновода приведет к уменьшению роста величины напряженности полей излучения.

Заметим, что выражение (18) справедливо лишь для достаточно большой последовательности сгустков ($N \gg 1$), когда в основном усиливается частота, совпадающая с частотой следования сгустков ν_0. При этом излучение носит резонансный характер и эффективный отбор энергии происходит на выбранной моде согласно (14). В случае небольшого количества сгустков, необходимо рассматривать весь спектр излучения согласно формулам (10).

В заключение рассмотрим случай мелкослоистой среды, когда

$$\gamma_n d \ll 1, \quad \Gamma_n a \ll 1. \tag{19}$$

Разлагая ξ_n в ряд по малым параметрам, с точностью до квадратичных членов получим

$$\xi_n = 1 + \delta_n, \tag{20}$$

$$\text{где} \quad \delta_n = 0.5\left((\gamma_n d)^2 + (\Gamma_n a)^2 - \frac{(\gamma_n d)(\Gamma_n a)}{\gamma_n(\varepsilon\Gamma_n + \varepsilon\Gamma_n/\gamma_n)}\right).$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon L}{\varepsilon a + L}, \quad \varepsilon_r = \frac{a + \varepsilon d}{a + d}, \quad D = NL, \quad \hat{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_z + \lambda_n^2\right)}, \tag{21}$$

то характеристическую матрицу стопки можно представить в виде:

$$M = \begin{vmatrix} \cos\tilde{\gamma}_n D & \frac{i}{\varepsilon_r \tilde{\gamma}_n}\sin\tilde{\gamma}_n D \\ i\varepsilon_r\tilde{\gamma}_n \sin\tilde{\gamma}_n D & \cos\tilde{\gamma}_n D \end{vmatrix} - \frac{\sin\tilde{\gamma}_n D}{\tilde{\gamma}_n D} \begin{vmatrix} M_{11} - 1 & 0 \\ 0 & M_{22} - 1 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Первая матрица в (22) совпадает с характеристической матрицей одной анизотропной пластины, если под $\tilde{\gamma}_n$ понимать постоянную распространения волн в этой пластине, а под D—толщину пластины. Выясним условие, при котором можно пренебречь второй матрицей (22). Для этого сравним коэффициенты отражения и прохождения для стопки из N тонких пластин с соответствующими выражениями одиночной пластины. Они совпадают для области частот, в которой выполняется условие

$$\left(\sqrt{\gamma_n/\varepsilon\Gamma_n} + \sqrt{\varepsilon\Gamma_n/\gamma_n}\right)\gamma_n d \ll 1. \tag{23}$$

В указанной области частот мелкослоистую среду конечной толщины можно рассматривать как одну анизотропную пластину с проницаемостью

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Данная работа проведена при поддержке гранта А-087 ISTC.

ЛИТЕРАТУРА

1. **М. Борн, Э. Вольф.** Оновы оптики, М., Наука, 1973.
2. **Х. С. Арутюнян, Э. А. Беглоян, Э. М. Лазиев, Г. Г. Оксузян.** Условия Брюстера в волноводе. Научное сообщение ЕрФИ-286(11)-78.
3. **Э. А. Беглоян, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев.** Радиотехника и электроника, **21**, 164(1976).
4. **А Хижняк.** Радиотехника и электроника, **5**, 413(1960).

ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿԸ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Է. Ա. ԲԵՂԼՈՅԱՆ, Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Վ. Գ. ՔՈՉԱՐՅԱՆ, Է. Մ. ԼԱԶԻԵՎ

Աշխատանքում մշակված է բնութագրիչ մատրիցների եղանակը՝ կիրառված լիցքավորված թանձրուկների ճառագայթման խնդիրներում՝ կամավոր լայնական կտրվածք ունեցող կանոնավոր ալիքատարի մեջ, որը լցված է շերտավոր դիէլեկտրական միջավայրով։ Այս մոտեցումը թույլ է տալիս 2N թվով գծային հավասարումների համակարգը հանգեցնել երկու անհայտով երկու հավասարումների և դաշտերի և էներգիայի արտահայտությունները ներկայացնել հարմար վերլուծական տեսքով։ Դիտարկված են ճառագայթման դաշտերի ձևավորման և շերտավոր միջավայրի տարբեր հարմոնիկների վրա տարբեր թանձրուկների ճառագայթման դաշտերի սինքրոն վերադրման հարցերը։ Վերլուծված է մանրաշերտ միջավայրի դեպքը։

THE METHOD OF CHARACTERISTIC MATRIXES AS USED IN RADIATION PROBLEMS

E. A. BEGHLOYAN, E. D. GAZAZIAN, V. G. KOCHARIAN, E. M. LAZIEV

This work presents a development of the characteristic matrix method to use in the problems on charged particle bunch radiation in arbitray cross-section regular waveguides filled with a laminated dielectric medium. This approach enables to reduce a set of 2N linear equations to two equations with two unknowns and present the expressions for fields and energy in a suitable analytical form. The questions concerning radiation field formation as well as synchronous interference of waves emitted by different bunches at different laminated medium harmonics are considered.

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 166—175(1998)

УДК 539.2

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНА НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКЕ ИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ δ-ПОТЕНЦИАЛОВ

Д. М. СЕДРАКЯН, Д. А. БАДАЛЯН

Ереванский государственный университет

А. Ж. ХАЧАТРЯН

Государственный инженерный университет Армении

(Поступила в редакцию 27 ноября 1997 г.)

В работе развит новый метод, позволяющий провести точную процедуру усреднения сопротивления цепочки из периодически расположенных случайных короткодействующих потенциалов. Показано, что зависимость среднего сопротивления системы от ее длины, при произвольном характере беспорядка на центрах, есть сумма трех показательных функций. Исследован характер локализации состояний в зависимости от параметров беспорядка системы и энергии одноэлектронных состояний.

Введение

Для одномерной системы электропроводность σ при нулевой температура есть обратная величина сопротивления Ландауэра, которая в свою очередь может быть представлена как [1,2]

$$\rho=R/T, \tag{1}$$

где R и T—соответственно коэффициенты отражения и прохождения электрона.

Как известно, проблема нахождения средних кинетических характеристик одномерных неупорядоченных систем представляет большой интерес (см., например, [3—14]). Это связано, в частности, с тем, что в ряде случаев одномерные модели допускают точные решения, что позволяет проследить за эволюцией электронных состояний в зависимости от размера образца, при произвольном значении силы взаимодействия. Так, среднее сопротивление Ландауэра $\langle\rho\rangle$ для одномерного металла с неподвижными рассеивателями, где все электронные состояния локализованы, при нулевой температуре выражается через длину цепочки L, когда $L\to\infty$, следующей формулой [1—4] ($\hbar=e^2=1$);

$$\langle\rho\rangle=1/2\exp(L/\xi), \tag{2}$$

где угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по всевозможным реализациям случайного поля. Здесь ξ—радиус локализации одноэлектронных состояний, который зависит от энергии электрона, вида случайного поля и не зависит от длины цепочки.

В работе [15] получено точное решение для среднего сопротивления и найдена зависимость радиуса локализации от параметров беспорядка и энергии электрона для модели цепочки из периодически расположенных случайных δ-рассеивателей, когда среднее значение потенциала равно нулю. В [16] методом трансфер-матриц был найден общий вид решения для среднего сопротивления модели, рассмотренной в [15], когда среднее значение потенциала отлично от нуля.

В настоящей работе развит новый метод, позволяющий в наиболее общем случае найти точное решение для среднего сопротивления цепочки из случайных короткодействующих потенциалов. Показано, что все одноэлектронные состояния локализованы и найдена зависимость радиуса локализации от параметров системы для всех значений энергии одноэлектронного спектра.

В п. 1 настоящей работы дается постановка задачи и приводятся некоторые результаты работ [14, 15]. В п. 2 получено уравнение, которому удовлетворяет среднее сопротивление системы. Далее, в п. 3 дается точное решение уравнения, полученного в п. 2, проводится его анализ и находится радиус локализации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения среднего Ландауэровского сопротивления цепочки из N случайных δ-потенциалов, расположенных в произвольных точках $X_1, X_2, \dots X_N$:

$$V(X)=\sum_{l=1}^{N} V_l\delta(X-X_l). \qquad (3)$$

Пусть мощности δ-потенциалов $V_1, V_2, \dots V_N$ суть независимые случайные параметры, принимающие значения в интервале $[-w/2, w/2]$ с одинаковой функцией распределения $f(V_l)$, которая может быть произвольной функцией.

Как было показано в [14, 15], процедура усреднения сопротивления в рассматриваемой модели может быть представлена как

$$\langle\rho_N\rangle=\int\limits_{-w/2}^{w/2}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\dots\int\limits_{-w/2}^{w/2} (D_N D^*_N-1)f(V_1)f(V_2)\dots f(V_N)dV_1dV_2\dots dV_N, \qquad (4)$$

где D_N есть следующий ряд:

$$D_N=1+\sum_{p=1}^{N}\sum_{1\le l_1<l_2<l_p}^{N}\frac{iV_{l_1}}{2k}\frac{iV_{l_2}}{2k}\dots\frac{iV_{l_p}}{2k}\prod_{l=1}^{p-1}(1-\exp(2ik(X_{l_{l+1}}-X_{l_l}))). \qquad (5)$$

Здесь $k^2=E$ есть энергия электрона.

Таким образом, задача нахождения среднего сопротивления предполагает интегрирование выражения (4). Как следует из представления D_N в виде ряда (5), для произвольной реализации случайного поля сопротивление ρ_N содержит только линейные и квадратичные члены относительно параметров $V_1, V_2, \dots V_N$. Соответственно, среднее сопротивление $\langle\rho_N\rangle$ при произвольном характере распределения величин V_l

в интервале $[-w/2, w/2]$ выражается через среднее ($\langle V\rangle=\beta$) и среднеквадратичное ($\langle V^2\rangle=\alpha$) значение случайного поля.

В [15] была рассмотрена и точно решена задача определения $\langle\rho_N\rangle$ (4), когда средний потенциал равен нулю ($\langle V_i\rangle=0$ и $\langle V_i^2\rangle\neq 0$), что соответствует случаю, когда $f(V_i)$ есть произвольная четная функция. Непосредственное интегрирование (4) для произвольного $f(V_i)$, т. е. когда $\langle V_i\rangle\neq 0$ и $\langle V_i^2\rangle\neq 0$, сопряжено с определенными математическими трудностями, которые не позволяют определить $\langle\rho_N\rangle$ непосредственно из (4). Техника нижеизложенного метода заключается в нахождении среднего сопротивления $\langle\rho_N\rangle$, не выполняя процедуру усреднения (4) непосредственно.

Приведем некоторые соотношения, которые будут использованы в дальнейшем. Рассмотрим ряд (4) как функцию от дискретной переменной N и запишем его в виде

$$D_N = D_{N-1} + \frac{iV_N}{2k} S_N, \quad D_1 = 1 + \frac{iV_1}{2k}. \tag{6}$$

Тогда, как следует из (5) и (6), величина S_N может быть представлена с помощью рекуррентного уравнения:

$$S_N = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{iV_{N-n}}{2k} f_{N-n} S_{N-n}, \quad S_1 = 1, \tag{7}$$

где $f_{N,N-n}=1-\exp i2k(X_N-X_{N-n})$. Записывая (6) в виде

$$D_N = 1 + \frac{iV_N}{2k} S_N + \frac{iV_{N-1}}{2k} S_{N-1} + \ldots + \frac{iV_1}{2k} S_1 \tag{8}$$

и учитывая (7), между величинами S_N, S_{N-1}, D_{N-1} можно получить следующее соотношение:

$$D_{N-1} = (1/f_{N,N-1}) S_N + (1 - 1/f_{N,N-1}) S_N. \tag{9}$$

Рассматривая соотношение (9) в случае, когда переменной N соответствует число $N-1$, и вычитывая его из D_{N-1} (9), для величин S_N получим отличное от (7) рекуррентное уравнение:

$$S_N = \left\{ \frac{iV_N}{2k} f_{N,N-1} + \lambda_{N,N-1} + \frac{f_{N,N-1}}{f_{N-1,N-2}} \right\} S_{N-1} - \frac{f_{N,N-1} \cdot \lambda_{N-1,N-2}}{f_{N-1,N-2}} S_{N-2}, \tag{10}$$

где $\lambda_{N,N-n}=\exp i2k(X_N-X_{N-n})$.

Интересно отметить, что подстановка S_N и S_{N-1} из (6) в (10) сразу приводит к рекуррентному уравнению для D_N, полученному ранее в работе [9].

2. Уравнение для среднего сопротивления $\langle\rho_N\rangle$

Как было отмечено выше, определение среднего сопротивления $\langle\rho_N\rangle$ из (4) прямой подстановкой D_N (5) в (4) с последующим интегрированием по параметрам $V_1, V_2, \ldots, V_N$, для произвольной функции распределения значений мощностей δ-потенциалов, не представляется возможным. Ниже мы покажем, что когда δ-рассеиватели в цепочке расположены периодически, то возможно такое представление ρ_N, которое позволяет провести его усреднение для произвольных $f(V_i)$ в общем случае и в результате получить уравнение для $\langle\rho_N\rangle$.

Прежде чем перейти к этой задаче, представим сопротивление ρ_N цепочки из N δ-потенциалов в виде суммы:

$$\rho_N-1=P_N+P_{N-1}+\ldots+P_1, \tag{11}$$

где

$$P_N=|D_N|^2-|D_{N-1}|^2. \tag{12}$$

Последнее, как следует из (6), может быть также представлено в виде

$$P_N=\frac{V_N^2}{4k^2}S_NS_N^*-\frac{iV_N}{2k}\{S_ND_{N-1}^*-S_N^*D_{N-1}\}. \tag{13}$$

Из (13) видно, что относительно параметра V_N величина P_N содержит только линейные и квадратичные члены, т. к. S_N и D_N содержат только параметры $V_1, V_2, \ldots, V_{N-1}$. Данное свойство величины P_N имеет ключевое значение в процессе усреднения ρ_N и связано с тем, что в рассматриваемой модели беспорядка случайные параметры $V_1, V_2, \ldots, V_N$ нескоррелированы.

Рассмотрим модель, когда δ-рассеиватели в цепочке расположены периодично, т. е. $|X_n-X_m|=a|n-m|$, где a—период цепочки. Использование (9), (10) и (13) позволяет выразить величины P_N, P_{N-1} через S_N, S_{N-1}, S_{N-2}, S_{N-3} в следующем виде:

$$P_N=L_N|S_N|^2-\frac{V_N}{2k}K_{N-1}|S_{N-1}|^2+\frac{V_N}{2k}K_{N-2}|S_{N-2}|^2- -\frac{V_N}{2k}C^*S_{N-2}^*S_{N-3}+\frac{V_N}{2k}CS_{N-2}S_{N-3}^*, \tag{14}$$

$$P_{N-1}=L_{N-1}|S_{N-1}|^2-\frac{V_{N-1}}{2k}K_{N-2}|S_{N-2}|^2+ +\frac{V_{N-1}}{2k}C^*S_{N-2}^*S_{N-3}+\frac{V_{N-1}}{2k}CS_{N-2}S_{N-3}^*, \tag{15}$$

$$L_N=\frac{V_N^2}{4k^2}+\frac{V_N}{2k}(C+C^*)+|C|^2,\quad K_N=CR_{N-1}+G^*R^*. \tag{16}$$

$$C=\frac{1}{i(1-B)},\quad R_N=\left\{1+B+\frac{iV_N}{2k}(1-B)\right\},\quad B=\exp(i2ka). \tag{17}$$

Как видно из представлений P_N, P_{N-1} в виде (14), (15), искомые функции $|S_N|^2$, $S_N^*S_{N-1}$, S_N, S_{N-1}^* и соответствующие им коэффициенты L_N, K_N при любом N содержат различные по индексу параметры V_N. Причем искомые функции зависят от меньших по индексу параметров V, чем соответствующие им коэффицаенты.

Как следует из вышесказанного, при усреднении величин P_N, P_{N-1} для модели, когда параметры V_N суть случайные независимые величины, их представление в виде (14), (15) допускает факторизацию, т. е.

$$\langle L_N\cdot|S_N|^2\rangle=\langle L_N\rangle\cdot\langle|S_N|^2\rangle \text{ и т. д.}$$

Таким образом, в выражениях $\langle P_N\rangle$ и $\langle P_{N-1}\rangle$ среднее от произведений искомых функций и соответствующих им коэффициентов есть произведение средних искомых функций и коэффициентов.

Рассмотрим среднее от величины P_N+P_{N-1}:

$$\langle F_N\rangle=\langle P_N+P_{N-1}\rangle=\langle\rho_N\rangle-\langle\rho_{N-2}\rangle. \tag{18}$$

Тогда, используя (14), (15), для него получим следующее выражение:

$$\langle F_N\rangle=L_N\rangle\langle|S_N|^2\rangle+\left(\langle L_N\rangle-\left\langle\frac{V_N}{2k}K_N\right\rangle\right)\langle|S_{N-1}|^2\rangle, \tag{19}$$

где $$\langle L_N\rangle=\langle L_{N-1}\rangle=\frac{\alpha}{4k^2}+\frac{\beta}{2k}(C+C^*)+|C|^2, \tag{19.а}$$

$$\langle V_NK_N\rangle=C\left\{\frac{\beta}{2k}(1+B)+i\frac{\alpha}{4k^2}(1+B)\right\}+\text{к.с.} \tag{19.б}$$

Согласно (18) и (19), для нахождения разностного уравнения для $\langle\rho_N\rangle$ необходимо получить разностное уравнение для $\langle|S_N|^2\rangle$. Используя (10), искомые функции $|S_N|^2$ и $|S_{N-1}|^2$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}|S_N|^2=|A_{N-1}|^2|S_{N-1}|^2-\{A^*_{N-1}A_{N-2}+A_{N-1}A^*_{N-2}-1\}|S_{N-2}|^2+\\+A_{N-1}S^*_{N-2}S_{N-3}+A^*_{N-1}S_{N-2}S^*_{N-3},\end{aligned} \tag{20}$$

$$|S_{N-1}|^2=|A_{N-2}|^2|S_{N-2}|^2-|S_{N-3}|^2+A_{N-2}S^*_{N-2}S_{N-3}+A^*_{N-2}S_{N-2}S^*_{N-3}, \tag{21}$$

где $$A_N=1+\exp(2ika)+\frac{iV}{2k}(1-\exp(2ika)).$$

Усредняя выражения (20) и (21) и учитывая, что $\langle A_N\rangle$ не зависит от N, получим для $\langle|S_N|^2\rangle$ следующее рекуррентное уравнение:

$$\langle|S_N|^2\rangle=(l+m)\langle|S_{N-1}|^2\rangle-(l-m)\langle|S_{N-2}|^2\rangle+\langle|S_{N-3}|^2\rangle, \tag{22}$$

где

$$l=4\left(\cos(ka)+\frac{\beta}{2k}\sin(ka)\right)-1,\quad m=2\left(\frac{\alpha}{4k^2}-\frac{\beta^2}{4k^2}\right)(1-\cos(2ka)). \tag{22.а}$$

Легко заметить, что величины $\langle F_N\rangle$ удовлетворяют такому же рекуррентному уравнению, что и $\langle|S_N|\rangle^2$, т. е.

$$\langle F_N\rangle=(l+m)\langle F_{N-1}\rangle-(l-m)\langle F_{N-2}\rangle+\langle F_{N-3}\rangle. \tag{23}$$

Действительно, если подставить $\langle F_N\rangle$ в виде (19) в (23) и учесть (22), то соотношение (23) превращается в тождество.

Учитывая, что $\langle F_N\rangle=\langle\rho_N\rangle-\langle\rho_{N-2}\rangle$, для величины $\langle\rho_N\rangle$ получим искомое конечно-разностное уравнение от дискретной переменной N:

$$\langle\rho_N\rangle=(l+m)\langle\rho_{N-1}\rangle-(l-m)\langle\rho_{N-2}\rangle+\langle\rho_{N-3}\rangle+m. \qquad (24)$$

Расписав уравнение (24) для N и $N-2$ и рассматривая их разность, мы получим уравнение (23).

Выбор неоднородной части уравнения (24), равной m, связан с требованием его выполнения для $N=3$. Как видно из (22), (23), величины $\langle F_N\rangle$ и $\langle|S_N|^2\rangle$ удовлетворяют тому же уравнению, что и $\langle\rho_N\rangle$ с неоднородной частью, равной нулю. Таким образом, задача определения среднего сопротивления $\langle\rho_N\rangle$ при произвольном характере распределения мощностей δ-потенциалов в общем случае сводится к задаче решения уравнения (24) с граничными условиями

$$\langle\rho_2\rangle=2\frac{\beta^2}{4k^2}\cos(2ka)+4\frac{\alpha\beta}{8k^3}\sin(2ka)+2\frac{\alpha}{4k^2}+2\frac{\alpha^2}{16k^4}(1-\cos(2ka)),$$
$$\langle\rho_1\rangle=\frac{\alpha}{4k^2},\quad \langle\rho_0\rangle=0. \qquad (25)$$

Выражения для $\langle\rho_0\rangle$, $\langle\rho_1\rangle$, $\langle\rho_2\rangle$ легко получить непосредственно из (4) и (5).

В конце заметим, что решение рекуррентного уравнения (24) как «дифференциального уравнения» для дискретной переменной с «граничными условиями» (25) равносильно решению «интегрального» уравнения

$$\langle\rho_N\rangle=\left(\frac{\alpha-\beta}{4k^2}\right)N+\frac{\beta^2}{4k^2}\,\frac{\sin^2(Nka)}{\sin^2(ka)}+\sum_{n=1}^{N-1}c_{N-n}\langle\rho_n\rangle, \qquad (26)$$

где

$$c_n=2\left(\frac{\alpha-\beta}{4k^2}\right)(1-\cos(2kan))+2\left(2\frac{\beta}{2k}+\frac{\beta^2}{4k^2}\operatorname{tg}(ka)\right)\sin(2kan).$$

Отметим, что при $\beta=0$ (средний потенциал равен нулю) уравнение (26) переходит в уравнение, которое было получено и решено в работе [15].

3. Среднее сопротивление системы и радиус локализации

Следуя работам [15, 16], будем искать зависимость среднего сопротивления цепочки от ее длины в следующем виде:

$$\langle\rho_N\rangle=\sum_{j=1}^{p}A_jx_j+A_0, \qquad (27)$$

где A_j, x_j, A_0 не зависят от N. Подставляя (27) в (24) или же (26), получаем $A_0=-1/2$ и характеристическое уравнение для определения величин x_j:

$$x_j^3 - x_j^2(l+m) + x(l-m) - 1 = 0, \tag{28}$$

где
$$l = 4\cos^2\varphi - 1, \quad m = \left(\frac{\alpha - \beta^2}{4k^2}\right)(1 - \cos(2ka)). \tag{28.a}$$

Подставляя решение (27) в «граничные условия» (25), с учетом характеристического уравнения (28) получим следующие уравнения для определения A_j:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j x_j = \frac{1}{2} + \alpha, \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{A_j}{1+x_j} = \frac{1}{4} + \frac{(\beta^2 - \alpha)\cos^2(ka)}{\cos^2\varphi}, \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{3} A_j = \frac{1}{3}. \tag{31}$$

Так как уравнение (26) содержит в себе граничные условия (25), то уравнения (29)-(31) можно также получить прямой подстановкой решения (27) в (26). Решение линейной системы уравнений (29)-(31) приводит к следующим выражениям для коэффициентов A_1, A_2, A_3:

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\frac{4b(1+l) - (1+x_1)(l+m-x_1-2a+1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}, \tag{32}$$

где

$$a = \alpha + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4} + \frac{(\beta^2 - \alpha)\cos^2(ka)}{16k^2\cos^2\varphi}.$$

Коэффициенты A_2, A_3 получаются из A_1 с помощью циклической перестановки букв x_1, x_2, x_3.

Таким образом, зависимость среднего сопротивления цепочки от ее длины в общем случае выражается суммой трех показательных функций от корней характеристического уравнения (28) x_1, x_2, x_3 с коэффициентами A_1 A_2 A_3.

Корни кубического уравнения (28) выражаются через радикалы:

$$x_1 = A + B + \frac{l+m}{3}, \quad x_2,\ x_3 = -\frac{A+B}{2} \pm i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3} + \frac{l+m}{3}, \tag{33}$$

где
$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \tag{34}$$

$$Q = \frac{2l}{3}\,\frac{l^2+3m^2}{9} - \frac{1}{12}\left(\frac{l^2-m^2}{3}\right)^2 - \frac{l^2-m^2}{6} + \frac{1}{4},$$
$$\tag{35}$$
$$q = -2\left(\frac{l+m}{3}\right)^3 + \frac{l^2-m^2}{6} - \frac{1}{2}.$$

Отметим, что при $Q > 0$ уравнение (28) имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных корня, и при $Q \leqslant 0$ все три корня являются действительными.

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи рассматриваемой модели. Сопротивление ρ_N для известной модели Кронига-Пенни (все δ-потенциалы имеют одинаковую мощность) можно получить из решения (27) подстановкой $\alpha=\beta^2$. Действительно, из (33) в этом случае получаем

$$x_1=1, \quad x_2=\exp(i2\varphi), \quad x_3=\exp(-i2\varphi). \tag{36}$$

Тогда подставляя (36) в (32), имеем:

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{\beta^2}{4k^2\sin^2\varphi}-1\right\}, \quad A_2=A_3=\frac{1}{16k^2}\cdot\frac{\beta^2}{\sin^2\varphi}. \tag{37}$$

Подстановка (36) и (37) в (27) сразу приводит к известному результату [9]:

$$\rho_N=\frac{\beta^2}{4k^2}\cdot\frac{\sin^2(N\varphi)}{\sin^2\varphi}, \tag{38}$$

где

$$\cos\varphi=(\cos ka)+\frac{V}{2k}\sin(ka).$$

Как видно из (38), при $|\cos\varphi|\leqslant1$, что соответствует спектру разрешенных значений энергии электрона, зависимость ρ_N от N имеет осцилляционный характер. Когда $|\cos\varphi|>1$, что предполагает подстановку $\varphi=i\gamma$ в (38), сопротивление цепочки при увеличении ее длины экспоненциально растет. Рассмотрим другой частный случай, когда энергия электрона соответствует краю энергетической зоны ($ka=\pi$, $k^2=E$—энергия электрона) и параметры беспорядка α и β могут принимать произвольные значения. В этом случае среднее сопротивление $\langle\rho_N\rangle$ имеет следующий вид:

$$\langle\rho_N\rangle=\left(\frac{\alpha-\beta^2}{4k^2}\right)N+\frac{\beta^2}{4k^2}N^2. \tag{39}$$

Результат (39) легко получить из рекуррентного уравнения (26), замечая, что при $ka=\pi$ для произвольного n величины $c_n=0$. Как видно из (39), зависимость среднего сопротивления системы от ее длины состоит из линейного и квадратичного относительно N слагаемых. Степенная зависимость $\langle\rho_N\rangle$ от N приводит к тому, что состояние является делокализованым. Это хорошо известная особенность рассматриваемой модели, связанная с выбором потенциалов взаимодействия в виде δ-функций [5].

Прежде чем рассматривать асимптотическое поведение $\langle\rho_N\rangle$ при $N\to\infty$, выясним некоторые свойства корней характеристического уравнения (28). Для этого запишем (28) в следующем виде:

$$l=\frac{x^2+x+1}{x}m-\frac{x+1}{x-1}. \tag{40}$$

Будем рассматривать l и m как линейно независимые переменные, а корень x характеристического уравнения (28) как некий независимый параметр уравнения (40). Как видно из определений l и m (28.а), для произвольно заданных ka, β и α ($\alpha \geqslant 0$, $\alpha - \beta^2 \geqslant 0$) они могут принимать численные значения только в интервалах

$$l \in [-1;\infty[\text{ и } m \in [0;\infty[. \tag{41}$$

Можно показать, что только для определенных x уравнение (40), которое на плоскости $(l;m)$ выглядит как прямая линия, пересекает область определения переменных l и m (41). Ясно, что действительные корни характеристического уравнения имеют такие численные значения, для которых прямая (40) проходит через область (41). Это имеет место, когда x принимает значение в интервале

$$x \in [-1;\infty[. \tag{42}$$

Из сказанного вытекает, что характеристическое уравнение (28) всегда имеет действительный корень, который больше или равен единице. Остальные корни при $Q \leqslant 0$ меньше единицы и при $Q > 0$ модуль комплексных корней меньше единицы. Заметим, что возможно и наличие двух корней больших единицы ($Q \leqslant 0$). Следовательно, радиус локализации, согласно (2) определяется формулой

$$\xi = a/x_1, \tag{43}$$

где x_1—наибольший действительный корень ($x_1 > 1$) уравнения (28).

Как видно из (43), когда $x_1 = 1$, радиус локализации становится бесконечным, т. е. имеет место делокализация состояний. Действительно, как видно из (36), случай $x_1 = \theta^2 = 1$ соответствует модели Кронига-Пенни $\langle V^2 \rangle = \langle V \rangle^2$, когда энергия электрона лежит в пределах разрешенной зоны ($|\cos\varphi| \leqslant 1$).

Когда дисперсия потенциала отлична от нуля, то x_1 больше единицы. Тогда все электронные состояния являются локализованными.

Найдем радиус локализации для физически интересного случая, когда энергия частицы лежит в пределах разрешенной зоны модели Кронига-Пенни, а дисперсия потенциала σ намного меньше среднего значения потенциала, т. е. $\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2 \ll \langle V \rangle^2$. В этом случае x_1 близко к единице и его можно искать в виде

$$x_1 = 1 + \Delta x; \quad 0 < \Delta x \ll 1. \tag{44}$$

Подставляя (44) в (28) и оставляя только члены, линейные по σ^2, для Δx получим

$$\Delta x = \frac{2m}{3-l}. \tag{45}$$

Подставляя (44) в (43), с учетом (45) для радиуса локализации окончательно получим

$$\xi = \frac{2ak^2}{\sigma^2}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin(ka)}\right)^2. \tag{46}$$

Формула (46) определяет зависимость радиуса локализации от дисперсии потенциала и энергии электрона при малых дисперсиях. Равенство между корнями уравнения, т. е. $x_1=x_2=x_3=1$, выполняется в случае, когда $Q=0$, что, как было отмечено выше, соответствует состояниям $ka=\pi m\,(m=0,1,...)$. Как видно из (43), в данном случае состояния являются делокализованными.

В заключение отметим, что в рамках рассматриваемой модели все состояния одноэлектронного спектра, кроме состояний $ka=\pi m$ $(m=0,1,...)$, локализованы. Найдено аналитическое выражение для зависимости радиуса локализации от параметров беспорядка системы и энергии электрона. Предложенный в работе метод может быть применен для нахождения средних значений более высоких моментов случайной величины ρ_N, а также при решении задачи в случае горизонтального беспорядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Landauer. Phil. Mag., 21, 863 (1970).
2. F. W. Anderson, D. L. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher. Phys. Rev., B22, 3519 (1980).
3. V. L. Melnikov. Sov. Phys. Solid State, 23, 444 (1981).
4. V. N. Prigodin. Sov. Phys. JETP, 52, 1185 (1980).
5. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. М., Наука, 1982.
6. G. M. Soukolis, I. V. Jose, E. N. Economou, Ping Sheng. Phys. Lett., 50, 786 (1983).
7. В. И. Перель, Д. И. Поляков. ЖЕТФ, 86, 352 (1984).
8. N. Kumar. Phys. Rev., B31, 5513 (1985).
9. V. M. Gasparian, B. L. Altshuler, A. G. Aronov, Z. H. Kasamanian. Phys. Lett., A132, 201 (1988).
10. А. П. Дмитриев. ЖЕТФ, 95, 234 (1989).
11. O. N. Dorokhov. Sov. Phys. JETP, 74, 518 (1992).
12. N. Zekri, M. Schreiber, R. Ouasti, R. Rouamrane, A. Brezini. Z. Phys. B, 99, 381 (1996).
13. Б. Н. Шалаев. ФТТ, 32, 3586 (1990).
14. V. M. Gasparian, Ash. Zh. Khachatrian. Solid State Commun., 12, 1061 (1993).
15. Д. М. Седракян, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, А. Ж. Хачатрян. ЖЭТФ, 111, 575 (1997).
16. P. Erdos, C. Herdon. Solid State Commun., 98, 495 (1996).
17. Ю. А. Бычков. Письма в ЖЭТФ, 17, 226 (1973).
18. B. Kramer, Localization and ..., Preprint PTB (1988).

LOCALIZATION OF ELECTRON IN A ONE-DIMENSIONAL CHAIN OF PERIODICALLY ARRANGED RANDOM δ-SCATTERERS

D. M. SEDRAKIAN, D. H. BADALYAN, ASH. ZH. KHACHATRIAN

A new method is developed for the exact procedure of averaging the resistance of the chain consisting of periodically spaced random delta-function potentials. It is shown that the dependence of the average resistance on the length of the chain, for an arbitrary disorder on the centers, is a sum of three exponential functions. The dependence of the localization radius on the energy of the incident electron and on disorder parameters of the chain is found.

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 176—178 (1998)

УДК 621.378

ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА В ИНТЕНСИВНОМ РЕЗОНАНСНОМ БИХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

К. Х. СИМОНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 15 апреля 1997 г)

Задача о двухуровневой системе в резонансном бихроматическом поле сведена к задаче о двухуровневой системе в периодическом поле, что позволяет ввести в рассмотрение квазиэнергетические состояния. Для квазиэнергий получено выражение, справедливое во всей допустимой области изменения частот при умеренных значениях обоих параметров интенсивности. Рассмотрены предельные случаи теории возмущений и резонансного приближения.

1. Задача о двухуровневой системе в бихроматическом поле мало изучена из-за ее сложности. Даже при условии резонансности обоих частот решение задачи не становится более простым, и известные нам работы [1—6] так или иначе связаны с применением теории возмущений и резонансного приближения по обоим полям или по одному из них. В работе [7], в случае резонансности обоих полей, задача исследована при произвольном значении одного из параметров интенсивностей и при умеренных значениях другого. Исследование этих задач в условиях, когда оба компонента поля равноправны, не было проведено. В частности, совершенно не исследован случай, когда частоты обоих компонентов поля близки к частоте атомного перехода, и параметры интенсивностей, которые определяются как отношения матричных элементов взаимодействия к разности частот полей, принимают умеренные значения.

2. Исходные уравнения, описывающие двухуровневую систему в поле классической бихроматической волны, имеют вид

$$\begin{aligned} i\dot{A} &= (V_1 e^{i\omega_1 t} + V_2 e^{i\omega_2 t})B, \\ i\dot{B} &= \omega_0 B + (V_1^* e^{i\omega_1 t} + V_2^* e^{-i\omega_2 t})A, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\hbar\omega_0$—расстояние между уровнями, $\hbar V_{1,2} = -(dE_{1,2})$—матричные элементы дипольного взаимодействия, $E_{1,2}$—амплитуды напряженности полей.

Поскольку гамильтониан системы непериодичен по времени, то атом в таком поле не обладает квазиэнергетическими состояниями, но после преобразования амплитуд [8]

$$A = A_1, \quad B = A_2 e^{-i(\omega_1+\omega_2)t/2}, \tag{2}$$

гамильтониан системы становится периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi/\omega_{21}$, что позволяет для системы (2) ввести в рассмотрение квазиэнергетические состояния и квазиэнергии. Для Фурье-компонент амплитуд получим

$$A_{\alpha,n}=(E-n\omega_{12}-\bar{\omega}_{\alpha})^{-1}\sum_{\substack{m\\ \beta\neq\alpha}}V_{\alpha\beta,nm}A_{\beta n}, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} V_{12,nm}=V^{*}_{21,nm}=V_1\delta_{m,n-1}+V_2\delta_{m,n+1}, \\ \bar{\omega}_1=0, \quad \bar{\omega}_2=\omega_0-(\omega_1+\omega_2)/2, \quad \omega_{12}=(\omega_1-\omega_2)/2. \end{gathered} \tag{4}$$

Систему уравнений (3) можно решить разными приближенными методами, но с целью получения более точных результатов и аналитических формул по параметрам задачи применим метод Хилла [9], обобщенный соответствующим образом [10, 11].

Квазиэнергия определяется из условия обращения в нуль детерминанта системы уравнений (3):

$$E_{1,2}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\pm\frac{\omega_{12}}{2\pi}\arccos\left[\cos\left(\frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\omega_{12}}\pi\right)-\frac{2\pi}{\omega_{12}}R_1\sin\left(\frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{2}\pi\right)\right]. \tag{5}$$

С точностью до квадратичных членов, разложение для R_1 по степеням α_1 и α_2 имеет вид

$$R_1=\frac{\omega_{12}^2}{4}\left(\frac{\alpha_1^2}{\omega_0-\omega_1}+\frac{\alpha_2^2}{\omega_0-\omega_2}\right), \tag{6}$$

и справедливо при значениях $\alpha_{1,2}\leqslant 2$, где $\alpha_{1,2}=|2V_{1,2}/\omega_{1,2}|$ -- параметры интенсивности внешнего поля. Формулы (5) и (6) определяют спектр квазиэнергии системы (2).

В пределе теори возмущений, т. е. при $\alpha_{1,2}\ll 1$ и вдали от резонансов имеем:

$$\begin{gathered} E_1=-\frac{\omega_{12}^2}{4}\left(\frac{\alpha_1^2}{\omega_0-\omega_1}+\frac{\alpha_2^2}{\omega_0-\omega_2}\right)=-\left(\frac{V_1^2}{\omega_0-\omega_1}+\frac{V_2^2}{\omega_0-\omega_2}\right), \\ E_2=\omega_0-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\left(\frac{V_1^2}{\omega_0-\omega_1}+\frac{V_2^2}{\omega_0-\omega_2}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

В другом предельном случае, когда $\omega_1=\omega_0$ и $\omega_2=\omega_0$ (точные резонансы), величина $R_1\sin\left(\frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\omega_{12}}\pi\right)$ остается конечной, и для ветвей квазиэнергии получим:

$$\begin{gathered} E=\frac{\omega_0-\omega_2}{4}\pm\frac{\omega_0-\omega_2}{2\pi}\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\alpha_1\right) \text{ при } \omega_1=\omega_0. \\ E=\frac{\omega_0-\omega_1}{4}\pm\frac{\omega_0-\omega_1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\alpha_2\right) \text{ при } \omega_2=\omega_0. \end{gathered} \tag{8}$$

При малых значениях параметров интенсивностей ($\alpha_{1,2} \ll 1$) формулы (8) переходят в

$$E = \frac{\omega_0 - \omega_2}{4}(1 \pm \alpha_1^2) \quad (\omega_1 = \omega_0),$$

$$E = \frac{\omega_0 - \omega_1}{4}(1 \pm \alpha_2^2) \quad (\omega_2 = \omega_0).$$

В частном случае, когда $V_1 = V_2 = V$, все результаты совпадают с результатами работы [10] (при замене $\omega_{12} \to \omega$, $\overline{\omega}_2 \to \omega_0$, $\overline{\omega}_1 = 0$). В связи с этим отметим, что несмотря на схожую математическую формулировку (в случае $V_1 = V_2$) задачи здесь и в [10] физически различны. Здесь частоты ω_1 и ω_2 могут лежать в оптической области, а условие резонансности означает, что $\omega_1 - \omega_2 \ll |(\omega_1 + \omega_2)/2 - \omega_0|$, $|2V_{1,2}| \ll \omega_1 + \omega_2$. В [10], если ω—оптическая частота, то учет нерезонансных членов, пропорциональных V/ω, должен проводиться совместно с учетом влияния других уровней. Поэтому эта задача больше подходит к описанию эффектов интенсивности в явлениях магнитного резонанса, где можно создать два уровня, далеко отстоящих от других.

Работа выполнена в рамках научной темы 96—858, финансируемой из государственных централизованных источников РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. **P. Bucci, S. Sanfucci.** Phys. Rev. A, **2**, 2105 (1970).
2. **B. R. Mollow.** Phys. Rev. A, **5**, 2217 (1972).
3. **Э. Г. Канецян, Н. В. Шахназарян.** Изв. АН Арм.ССР, Физика, **9**, 335(1974).
4. **С. П. Гореславский, В. П. Крайнов.** Оптика и спектроскопия, **47**, 825(1979).
5. **R. Guccion-Gush, H. P. Gush.** Phys. Rev. A, **10**, 1474 (1974).
6. **T. S. Ho, S. I. Chu.** J. Phys. B. **17**, 2101 (1984).
7. **А. О. Меликян, К. Х. Симонян.** Изв. Вузов, Физика, **23**, №8, 23(1980).
8. **А. О. Меликян, К. Х. Симонян.** IX Всесоюзная конференция по когерентной и нелинейной оптике. Тезисы докладов, ч. II, Ленинград, с. 80, 1978.
9. **Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.** Курс современного анализа, тт. 1-2, М., 1963.
10. **А. О. Меликян.** ЖЭТФ, **68**, 1228(1975).
11. **А. О. Меликян.** Квантовая электроника, **4**, 429(1977).

TWO-LEVEL SYSTEM IN A STRONG RESONANT BICHROMATIC FIELD

K. KH. SIMONYAN

The problem of a two-level system in a resonant bichromatic field is reduced to the problem of a two-level system in a periodic field, what allows to consider the quasi-energy states. An expression for quasi-energies is obtained which is valid in the whole permissible range of frequencies at moderate values of the intensity parameters. The limiting cases of the perturbation theory and of the resonant approximation are considered.

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 179—181 (1998)

УДК 537.87

К ВОПРОСУ О СИЛЕ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Б. В. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 17 октября 1997 г.)

Исходя из предыдущей работы автора, выведено четырехмерное выражение для силы самодействия—силы, действующей на движущийся излучающий заряд.

В работе [1] показано, что сила реакции излучения $\mathbf{f}$, действующая на движущуюся заряженную частицу со стороны излученных ею же электромагнитных волн, определяется формулой

$$\mathbf{f}=-\frac{I}{c}\boldsymbol{\beta}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{v}/c$, $\mathbf{v}$ и c—скорости заряда и света соответственно, I—энергия, излученная по всем направлениям в единицу времени (мощность излучения). Основываясь на формуле (1), попробуем найти ковариантное (четырехмерное) выражение для силы реакции излучения $g^i (i=0, 1, 2, 3)$, соответствующее трехмерной силе $\mathbf{f}$. Связь между четверкой g^i и трехмерной силой $\mathbf{f}$ определим следующим образом (мы следуем обозначениям книги [2]):

$$g^i=\left\{\frac{\mathbf{f}\boldsymbol{\beta}}{c\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right\}.$$

С этой целью предварительно заметим, что полная мощность I является лоренц-инвариантной величиной (четырехмерным скаляром) и ее можно представить в виде

$$I=-\frac{2}{3}e^2cw_kw^k\equiv-\frac{2}{3}e^2c\dot{u}_k\dot{u}^k, \tag{2}$$

где u^k—четырехмерная скорость, $w^k=\dfrac{du^k}{ds}\equiv\dot{u}^k$—четырехмерное ускорение частицы, $ds=c\sqrt{1-\beta^2}\,dt$ —четырехмерный интервал (4-х скаляр), и по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование от нуля до трех (и в дальнейшем точки над буквами будут означать дифференцирование по интервалу)

Из формул (1) и (2) следует, что можно определить силу g^i в виде

$$g^i=\frac{2e^2}{3c}w_kw^ku^i, \tag{3}$$

что было бы лоренц-инвариантным определением, однако при таком определении не выполнялось бы тождество $g^i u_i = 0$, обязательное для любого четырехмерного вектора силы. Чтобы добиться выполнения этого тождества, добавим к правой части (3) четырехмерные векторы w^i, $\dot{w}^i$, $\ddot{w}^i$, и т. д. (в нашей задаче возможны только эти векторы), помноженные на неопределенные пока лоренц-инвариантные коэффициенты (четырехмерные скаляр-функции) α_0, α_1, α_2 и т. д., т. е. представим силу в следующем виде (обозначение g^i для силы не меняем):

$$g^i = \frac{2e^2}{3c} w^k w_k u^i + \alpha_0 w^i + \alpha_1 \dot{w}^i + \alpha_2 \ddot{w}^i + \dots \tag{4}$$

Для определния скалярных функций α_i помножим (4) на u^i и учтем тождества $u^i_a u_i = 1$, $u^i w_i = 0$, $w_i w^i + u_i \dot{w}^i = 0$, а также произвольность функций u^i и их производных. В результате из требования выполнения тождества $g^i u_i = 0$ получаем

$$\alpha_1 = \frac{2e^2}{3c}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0,$$

а α_0 может быть любым. Если теперь с помощью слагаемого $\alpha_0 w^i$ перенормировать массу излучающего заряда, то для силы g^i (называем эту силу полной силой самодействия) окончательно получим:

$$g^i = \frac{2e^2}{3c} (\dot{w}^i + w_k w^k u^i). \tag{5}$$

С учетом тождества $w_i w^i + u_i \dot{w}^i = 0$ формула (5) в точности совпадает с известным выражением четырехмерной силы g^i [2, 3, 4].

Рассмотрим пространственную часть $(i = 1, 2, 3,)$ силы самодействия (5) в нерелятивистском случае $(\beta \ll 1)$. Из (5) следует

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = -\frac{2e^2 w^2}{3c^5} \mathbf{v} + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \tag{6}$$

(здесь w^2—квадрат трехмерного ускорения).

Слагаемое $\mathbf{f}_2$ есть общепринятое выражение для силы реакции излучения в нерелятивистском случае, обращающейся в нуль в случае равноускоренного движения, когда $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{const}$. При этом на естественный вопрос—как же заряд может излучать, если радиационное трение равно нулю?—следуют разные ответы, среди которых и такой: равноускоренно движущийся заряд не излучает.

На самом деле ответ дает первое слагаемое в формуле (6). Прежде всего, следуя работе [1], силой реакции излучения необходимо назвать силу

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{2e^2}{3c^5} w^2 \mathbf{v}, \tag{7}$$

а не силу $\mathbf{f}_2$, поскольку именно сила $\mathbf{f}_1$ обусловлена электромагнитными полями, уходящими в бесконечность, т. е. полями излучения. И тогда из формулы (7) следует, что в случае равноускоренного движения наряду с отличной от нуля энергией излучения ($w=\mathrm{const}\neq 0$), отлична от нуля и сила радиационного трения.

Какая из сил f_1 или f_2 больше, зависит от закона движения заряда. Например, очевидно, что при $w=\mathrm{const}$ в полной силе самодействия $f_1\neq 0$, а $f_2=0$. Может реализоватся и обратный случай, когда доминирующей является сила f_2. Например, при одномерном движении заряда под действием квазиупругой силы $-m\omega_0^2 x$ больше оказывается сила f_2 (нетрудно оценить, что $f_1\sim\beta f_2\ll f_2$). В связи с этим отметим, что влияние силы f_1 на уширение спектральных линий (см. [1]) незначительно, ширина обусловлена практически только силой f_2 и определяется известным выражением $\gamma=\dfrac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$.

В общем случае в качестве силы самодействия следует пользоваться силой (6).

Выражаю благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б. В. Хачатрян.** Изв. НАН Армении, Физика, 32, №5, 260(1997).
2. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** Теория поля. М., Наука, 1973.
3. **Дж. Джексон.** Классическая электродинамика. М., 1965.
4. **В. Е. Тирринг.** Принципы квантовой электродинамики. М., 1964.

ON THE QUESTION OF RADIATION REACTION FORCE

B. V. KHACHATRIAN

On the basis of author's previous paper a four-dimensional expression for the self-acting force on a radiating charged particle is obtained.

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՌԵԱԿՑԻԱՅԻ ՈՒԺԻ ՄԱՍԻՆ

Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ստացված է լիցքավորված մասնիկի վրա ազդող ճառագայթման ռեակցիայի եռաչափ ուժի քառաչափ ընդհանրացումը։

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 182—186 (1998)

УДК 621.315.592

ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА В РАЗМЕРНО-КВАНТОВАННОЙ ПРОВОЛОКЕ ПРИ НЕПРЯМЫХ МЕЖЗОННЫХ ПЕРЕХОДАХ: РАССЕЯНИЕ НА ЗАРЯЖЕННЫХ ПРИМЕСНЫХ ЦЕНТРАХ

М. М. АГАСЯН, А. А. КИРАКОСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 17 октября 1997г.)

Получено выражение для коэффициента поглощения размерно-квантованной полупроводниковой проволоки круглого сечения при рассеянии носителей заряда на заряженных примесных центрах. Исследовано также влияние различия диэлектрических постоянных проволоки и окружающей среды на коэффициент поглощения и показано, что для рассматриваемого механизма им можно пренебречь.

Как известно, в непрямозонных массивных полупроводниках ширина запрещенной зоны меньше порога прямых переходов, поэтому основной вклад в собственное поглощение обусловлен непрямыми межзонными переходами [1]. Имеющее место в низкоразмерных структурах размерное квантование приводит к зависимости вероятности непрямых межзонных переходов от характерных размеров образца, а также «включает» новые механизмы непрямых переходов, не имеющих место в массивных образцах [2, 3].

Преобладающим механизмом непрямых переходов как в массивных, так и низкоразмерных полупроводниковых структурах является рассеяние носителей заряда (НЗ) на фононах [1, 4, 5]. Однако при понижении температуры роль фононного рассеяния уменьшается, и определяющими становятся другие механизмы непрямых переходов, обусловленных, например, рассеянием НЗ на поверхностных шероховатостях образца [3], на дислокациях [6, 7].

В квазиодномерных структурах—квантованных проволоках при низких температурах возрастает роль примесного рассеяния и, тем самым, непрямого примесного поглощения, так как из-за сильной локализации НЗ в поперечной плоскости увеличивается вероятность рассеяния на примесных центрах.

В данной работе в рамках модели двух невырожденных параболических зон рассмотрено поглощение света в размерно квантованной полупроводниковой проволоке круглого сечения, обусловленное непрямыми межзонными переходами НЗ при рассеянии на заряженных примесных центрах.

При непрямых межзонных переходах коэффициент поглощения дается известным выражением [8]

$$\alpha(\omega)=\frac{2\pi\chi_1^{1/2}}{c\hbar}\sum_{i,m,f}\frac{|M_{ph}|^2|M_{imp}|^2}{(\varepsilon_m-\varepsilon_i-\hbar\omega)^2}\delta(\varepsilon_f-\varepsilon_i-\hbar\omega), \qquad (1)$$

где χ_1—диэлектрическая постоянная проволоки, ε_i, ε_m, ε_f—энергии начального, промежуточного и конечного состояний соответственно, M_{ph}—оптический матричный элемент, M_{imp}—матричный элемент взаимодействия НЗ с примесным центром, ω—угловая частота световой волны.

В рамках модели бесконечно глубокой потенциальной ямы уровни энергии и волновые функции НЗ в проволоке хорошо известны [9]:

$$\varepsilon_l = \varepsilon^l_{mnk} = \varepsilon^l_{mn} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_l}, \quad \varepsilon^l_{mn} = \frac{\hbar^2 \lambda^2_{|m|n}}{2m_{l,\perp} R^2}, \tag{2}$$

$$\Psi^l_{mnk}(\rho,\varphi,z) = \frac{J_{|m|}(\lambda_{|m|n}\rho/R)}{(\pi R^2 L)^{1/2} J_{|m|+1}(\lambda_{|m|n})} \exp(im\varphi + ikz) U_{lk}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где R—радиус, а L—длина проволоки, $m_{l,\perp}(m_l)$—поперечная (продольная) эффективная масса в l-ой зоне, k—волновое число, характеризующее движение НЗ вдоль оси проволоки (ось z), $\lambda_{|m|n}$—n-й корень функции Бесселя $J_m(x)$ первого рода порядка m, $U_{lk}(\mathbf{r})$—блоховская амплитуда в l-ой зоне. Квантовые числа m и n принимают значения $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n=1, 2, 3 \ldots$.

Перейдем к расчету коэффициента поглощения для переходов $v \to c \to c'$. Согласно [10], при значениях $R \leqslant 10^{-6}$см, $\chi_1 \sim 10$, $\varepsilon_g(0) \approx 1$эВ ($\varepsilon_g(0)$—ширина запрещенной зоны в центре зоны Бриллюэна), когда параметр $qR \leqslant 0{,}2$ (q—волновой вектор световой волны), оптический матричный элемент дается выражением

$$|M_{ph}|^2 \approx \frac{8e^2 \hbar |P_{cv}(k)|^2 \cos^2\beta}{\chi_1 m_0^2 L R \omega} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \tag{4}$$

где $P_{cv}(k)$—матричный элемент импульса, β—угол между вектором поляризации световой волны и осью z, m_0—масса свободного электрона. Как следует из (4), «вертикальные» межзонные переходы $v \to c$ удовлетворяют правилам отбора $m=m'$, $n=n'$ (в $|M_{ph}|^2$ не учтены пропорциональные $(qR)^2$ члены, соответствующие переходам $m \to m' = m \pm 1$).

Для расчета матричного элемента M_{imp}, соответствующего переходу электрона из промежуточного состояния (m', n', k) в конечное состояние (m'', n'', k'') в области непрямого минимума (переходы $c \to c'$), рассмотрим рассеяние электрона на неэкранированном кулоновском центре, расположенном на оси проволоки в точке z_i. Если проволока находится в среде с диэлектрической постоянной χ_2, то энергия взаимодействия находящегося в точке (ρ, z) электрона с примесным центром с зарядом e', согласно [11], дается выражением

$$V_i(\rho,z) = -\frac{2ee'}{\chi_1 \pi} \int_0^\infty \cos t(z-z_i)[K_0(t\rho) + B_\gamma(tR) I_0(t\rho)]\,dt, \tag{5}$$

где

$$B_\gamma(x) = \frac{(\gamma-1)K_0(x)K_1(x)}{\gamma K_0(x) I_1(x) + I_0(x) K_1(x)}, \qquad \gamma = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \tag{6}$$

а $K_n(x), I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка $n=0,1$. С помощью выражений (3) и (5) для квадрата матричного элемента M_{imp}, усредненного по всем рассеивающим центрам, получим

$$<|M_{imp}|^2> = \frac{(4ee')^2}{\chi_1^2 L^2} \delta_{m'm''} N [P_{m'n'}^{m''n''}(a) + B_\gamma(a) Q_{m'n'}^{m''n''}(a)]^2, \qquad (7)$$

где N — число рассеивающих примесных центров, $a = |k-k''|R$,

$$P_{m'n'}^{m''n''}(a) = \int\limits_0^1 \frac{J_{|m'|}(\lambda_{|m'|n'}x) J_{|m''|}(\lambda_{|m''|n''}x)}{J_{|m'|+1}(\lambda_{|m'|n'}) J_{|m''|+1}(\lambda_{|m''|n''})} K_0(ax) x dx, \qquad (8)$$

а $Q_{m'n'}^{m''n''}(a)$ дается формулой (8) с заменой под интегралом функции $K_0(ax)$ на $I_0(ax)$.

Второе слагаемое в (7) учитывает различие диэлектрических постоянных проволоки и среды. При $\chi_1 = \chi_2$, согласно (6), $\gamma = 1$ и $B_\gamma(a) = 0$. В области края поглощения можно приближенно считать, что $|k-k''| \simeq k_0$, (k_0 определяет положение минимума зоны проводимости c'). Нетрудно убедиться в том, что параметр k_0R ограничен снизу. Действительно, при межзонных прямых $v \to c$ переходах, как правило, пренебрегают волновым вектором световой волны по сравнению со средним (характерным) волновым вектором электрона. Естественно поэтому считать, что $q \ll k_0$, или, с учетом приведенной выше оценки $qR \leqslant 0{,}2$, что $k_0R \geqslant 2$ при $R \approx 10^{-6}$ см. В условиях, когда параметр k_0R порядка нескольких единиц и больше, в (6) можно воспользоваться асимптотическими выражениями для $K_n(k_0R)$ и $I_n(k_0R)$, в результате чего для B_γ получим:

$$B_\gamma(k_0R) \simeq \pi \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \exp(-2k_0R). \qquad (9)$$

С учетом (9), а также по оценкам функций $P_{m'n'}^{m''n''}(k_0R)$ и $Q_{m'n'}^{m''n''}(k_0R)$, для физически разумных значений k_0R вторым слагаемым в (7) можно пренебречь. Это, в свою очередь, означает, что для рассматриваемого механизма непрямых переходов различием диэлектрических постоянных проволоки и среды можно пренебречь.

После подстановки выражений (2)-(4) и (7) в (1) и некоторых вычислений, для коэффициента поглощения в случае «разрешенных» переходов ($|P_{cv}(k)|^2 \simeq |P_{cv}(0)|^2$) получим:

$$\alpha(\omega, R) \simeq \alpha_0 \sum_{m,n,n''} [P_{m'n'}^{m''n''}(k_0R)]^2 \Theta(b_{mn}^{mn''}), \qquad (10)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{128 e^4 e'^2 n_L |P_{cv}(0)|^2 (m_c m_v)^{1/2}}{m_0^2 \chi_1^{5/2} \hbar^2 c R^2 [\varepsilon_g(0) - \varepsilon_g]^2 \omega} \cos^2\beta, \qquad (11)$$

$$b_{mn}^{mn''} = \hbar\omega - \varepsilon_g - \varepsilon_{mn''}^{c'} - \varepsilon_{mn}^{v}, \qquad (12)$$

$$\Delta_{mn}^{mn''} = \varepsilon_{mn}^{v} + \varepsilon_{mn''}^{c'}. \tag{13}$$

В (10) и (11) введены обозначения, n_L—линейная плотность примесных центров, $m_{c'}$ —продольная эффективная масса в области основного минимума, $\varepsilon_g = \varepsilon_g(k_0)$—ширина запрещенной зоны, $\Theta(x)$—функция единичного скачка. Согласно (10), с увеличением частоты падающего излучения коэффициент поглощения увеличивается скачками, имеющими место при значениях

$$\hbar\omega_{mn}^{mn''} = \varepsilon_g + \Delta_{mn}^{mn''}, \tag{14}$$

при этом величина скачка пропорциональна $[P_{mn}^{mn''}(k_0 R)]^2$.

В случае „запрещенных" переходов ($P_{cv}(0)=0$, $|P'_{cv}(0)|^2 \neq 0$) для коэффициента поглощения получаем:

$$\alpha'(\omega, R) \approx \alpha'_0 \sum_{m,n,n''} [P_{m'n'}^{m''n''}(k_0 R)]^2 b_{mn}^{mn''} \Theta(b_{mn}^{mn''}), \tag{15}$$

где

$$\alpha'_0 = \frac{64 e^4 e'^2 n_L |P'_{cv}(0)|^2 (m_{c'})^{1/2} (m_v)^{3/2}}{m_0^2 \chi_1^{5/2} \hbar^4 c R^2 [\varepsilon_g(0) - \varepsilon_g]^2 \omega} \cos^2\beta. \tag{16}$$

С увеличением частоты ω коэффициент поглощения, согласно (15), меняется линейно, при этом наклон прямой меняется скачками при значениях $\hbar\omega$, даваемых выражением (14).

Следует заметить, что суммирование в выражениях (10) и (15) распространяется на значения квантовых чисел m, n и n', удовлетворяющих условию $\Delta_{mn}^{mn''} \ll \varepsilon_g$.

Из количественных оценок энергий квантовых состояний ε_{mn}^{l} согласно формуле (2) следует, что по мере увеличения $\hbar\omega$ межзонные переходы «включаются» в следующем порядке: $(0,1)\to(0,1)$, $(0,2)\to\to(0,1)$, $(1,1)\to(1,1)$, $(0,1)\to(0,2)$ и т. д. При этом среди указанных наибольшее значение имеет парциальный коэффициент поглощения для перехода $(0,2)\to(0,1)$, пропорциональный величине $[P_{02}^{01}(k_0 R)]^2$. Такое поведение парциального коэффициента поглощения обусловлено смещением ближайшего к оси проволоки максимума вероятности распределения электронов в сторону оси проволоки, что, в свою очередь, усиливает взаимодействие электронов с расположенными на оси проволоки примесными центрами.

Помимо рассмотренных выше переходов $v\to c\to c'$, в коэффициент поглощения вносят вклад также переходы $v\to v'\to c'$, т. е. через промежуточные состояния с $k \approx k_0$. Однако, поскольку, как правило, $\varepsilon_g(0) < \varepsilon_c(k_0) - \varepsilon_v(k_0)$, то, согласно (1), вкладом переходов $v\to v'\to c'$ можно пренебречь.

Сравним парциальные коэффициенты непрямого фононного и примесного поглощения для переходов $(0,1)\to(0,1)$. В случае рассеяния НЗ на акустических объемных фононах [12] оценки, проведенные для проволоки Ge с $R=100$ Å и $n_L=10^4$ см$^{-1}$ (в предположении, что параметры проволоки совпадают с параметрами массивного образца) показывают, что примесный механизм непрямого поглощения начинает превалировать над фононным при температурах $T > T_0 \approx 37$K. С уменьшением радиуса проволоки T_0 смещается в сторону высоких температур: так, при $R=50$Å и $n_L=10^4$см$^{-1}$ для T_0 получаем значение 67К.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б. Ридли.** Квантовые процессы в полупроводниках. М., Мир, 1986.
2. **А. А. Киракосян, Э. А. Саркисян.** ФТП, **11**, 1629(1977).
3. **А. А. Киракосян, Э. А. Саркисян.** Изв. АН АрмССР, Физика, **13**, 444(1978).
4. **H. H. Hassan, H. N. Spector.** Phys. Rev., **B 33**, 5456 (1986).
5. **Э. М. Казарян, Г. Л. Маилян, Р. Л. Энфиаджян.** Изв. АН АрмССР, Физика, **7**, 361(1972).
6. **А. А. Киракосян, М. К. Кумашян, К. А. Мхоян, А. А. Саркисян.** Изв. НАН Армении, Физика, **30**, 208(1995).
7. **E. M. Kazaryan, K. A. Mkhoyan, H. A. Sarkisyan.** Thin Solid Films, **302**, 54 (1997).
8. **А. И. Ансельм.** Введение в теорию полупроводников. М., Наука, 1978.
9. **Б. А. Тавгер, М. Д. Блох, Е. Л. Фишман.** ФММ, **33**, 1137(1972).
10. **А. А. Киракосян, Э. М. Казарян.** Уч. зап. ЕГУ, **3**, 44(1974).
11. **Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов.** Классическая теория поля. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.
12. **А. А. Киракосян, А. Л. Вартанян.** Тезисы докл. XII Совещания по теории полупроводников, часть II, стр. 25, Киев, 1985.

LIGHT ABSORPTION IN A SIZE-QUANTIZED WIRE IN INDIRECT INTERBAND TRANSITIONS: SCATTERING BY CHARGED IMPURITY CENTERS

M. M. AGHASYAN, A. A. KIRAKOSYAN

The expression for the absorption coefficient of a size-quantized semiconductor wire with a circular cross-section is obtained for the scattering of charge carriers on charged impurity centers. The effect of a difference of dielectric constants of the wire and surrounding medium on the absorption coefficient is also studied and it is shown that for considered mechanism the mentioned difference can be neglected.

ԼՈՒՅՍԻ ԿԼԱՆՈՒՄԸ ՔՎԱՆՏԱՑՎԱԾ ԼԱՐՈՒՄ ՈՉ ՈՒՂԻՂ ՄԻՋԳՈՏԻԱԿԱՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ. ՑՐՈՒՄ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ԽԱՌՆՈՒՐԴԱՅԻՆ ԿԵՆՏՐՈՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

Մ. Մ. ԱՂԱՍՅԱՆ, Ա. Ա. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Ստացված է չափայնորեն քվանտացված, շրջանային հատույթով կիսահաղորդչային լարի կլանման գործակցի համար արտահայտություն, երբ լիցքակիրները ցրվում են խառնուրդային կենտրոնների վրա։ Ուսումնասիրված է նաև լարի և միջավայրի դիէլեկտրական հաստատունների տարբերության ազդեցությունը կլանման գործակցի վրա և ցույց է տրված, որ դիտարկված մեխանիզմի համար այն կարելի է հաշվի չառնել։

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 187—190 (1998)

УДК 539

ПРИБЛИЖЕННОЕ ТРЕХМЕРНОЕ СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСПЕРСИИ И ДИССИПАЦИИ

А. В. ШЕКОЯН

Институт механики НАН Армении

(Поступила в редакцию 27 ноября 1997г.)

В статье исследовано трехмерное нелинейное эволюционное уравнение пятой степени, описывающее нелинейные волновые процессы в различных сложных средах с дисперсией и различными механизмами поглощения. Показано, что указанное уравнение имеет солитонное решение, и исследовано, как влияет диссипация на профиль солитона.

За последние годы появились работы, в которых изучаются нелинейные волны в различных средах со сложной структурой — таких, как пьезодиэлектрик с внедренными сферическими неоднородностями, вязкостью и теплопроводностью [1], вязкоупругая среда с полостями, жидкость с пузырьками газа и химическими реакциями [2], электропроводящие микрополярные жидкости [3], грунты [4] и т. д.

Для описания нелинейных волн в вышеуказанных средах выводятся нелинейные трехмерные эволюционные уравнения, которые в общем случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial x}+L\Delta_\perp\psi=\alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)+\delta\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}+\beta\frac{\partial^4\psi}{\partial\tau^4}+\gamma\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5}, \tag{1}$$

где $\tau=xv^{-1}\text{-}t$—эйконал, x—координата, вдоль которой распространяется нелинейная волна, а y и z—координаты, перпендикулярные направлению распространения волны, t—время, v—линейная скорость волны, ψ—скорость движения среды (например, в статьях [1,4] $\psi=\frac{\partial u_3}{\partial\tau}$, где u_3—смещение), $\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Коэффициенты L, α, δ, β, и γ содержат постоянные, характеризующие упругие, нелинейные, вязкостные, теплопроводящие, дифракционные, электрические и другие свойства среды, а также параметры, характеризующие волну. Коэффициент L характеризует поперечные свойства среды и волны, α—нелинейный коэффициент, δ и γ характеризуют диссипативные свойства среды, обусловленные различными механизмами поглощения (например, для вязкой жидкости с пузырьками газа δ связан с вязкостью жидкости, а γ—с поглощением, обусловленным наличием пузырьков), β обусловлен дисперсионными свойствами среды.

Уравнение (1) выводится в предположении малости изменения профиля волны на конечных расстояниях (см., например, [5]). Если ограничиться одномерным приближением ($\Delta_\perp=0$) и считать, что нет поглощения, т. е. в (1) отсутствуют слагаемые $\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}$ и $\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5}$, то получится уравнение Кортевега де Вриза с точностью до коэффициентов. В этом случае есть конкурирующие нелинейность и дисперсия. Уравнение Кортевега де Вриза имеет солитонное решение (см., например, [6]). В работе [7] введено трехмерное эволюционное уравнение типа (1) для недиссипативной, но диспергирующей среды, которое в дальнейшем получило название уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Это уравнение допускает солитонное решение [8]. В работе [9] исследовано уравнение типа (1), где положено $L=\gamma=0$, т. е. рассмотрено одномерное уравнение, где учитываются дисперсия и диссипативный член, соответствующий кубично дифференцированному слагаемому. Для его изучения использован метод медленно меняющейся амплитуды для слабой диссипации.

Цель настоящей статьи—показать, что уравнение (1) имеет решение солитонного типа, найти его вид и исследовать его.

Для дальнейших расчетов удобно ввести новую функцию $u=-\frac{\alpha}{6}\psi$, тогда (1) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\tau}+L\Delta_\perp u=-6\frac{\partial}{\partial\tau}\left(u\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)+\delta\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial\tau^4}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial\tau^5}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u=\varphi(\xi), \quad (3)$$

где $\xi=a\tau+by+dz-kx$, b и d—постоянные, которые показывают наклон плоскости фронта ($\xi=\mathrm{const}$) к оси x, a и k—постоянные, имеющие размерность частоты и волнового числа. Подставляя (3) в (2), дважды интегрируя, считая, что при стремлении ξ к бесконечности u стремится к нулю, можно постоянные интегрирования считать равными нулю и получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-a^2\beta\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+3\varphi^2-c\varphi=a\delta\frac{d\varphi}{d\xi}+a^3\gamma\frac{d\varphi^3}{d^3\xi}, \quad (4)$$

где

$$c=[ak-L(b^2+d^2)]a^{-2}.$$

Уравнение (1) выведено для слабо диспергирующих и поглощающих сред, однако, если поглощение слабее, чем дисперсия, т. е. коэффициенты δ и γ меньше, чем β, то уравнение (4) можно решать методом медленно меняющейся амплитуды [9]. Следуя этому методу, решение уравнения (4) будем искать в виде

$$\varphi=\varphi_0(\xi)[1+T(\xi)], \quad (5)$$

причем требуется выполнение следующих неравенств:

$$T \ll 1, \quad \frac{d^2T}{d\xi^2} \ll \frac{dT}{d\xi} \ll T. \tag{6}$$

Физический смысл этих неравенств заключается в том, что из-за диссипации форма солитона мало меняется, функция T плавная, так что она и ее производные меняются слабо.

В выражении (5) $\varphi_0(\xi)$ есть солитонное решение уравнения (2), если в нем положить $\delta=\gamma=0$. Это решение имеет вид [8]:

$$\varphi_0(\xi) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\,\xi\right), \tag{7}$$

где $c \geqslant 0, a > 0$. Этот солитон распространяется со скоростью

$$V_c^2 = a^2[(av^{-1}-k)^2+b^2+d^2]^{-1}.$$

Подставляя (5) в уравнение (4), учитывая неравенства (6) и пользуясь соотношением (7), можно получить для T следующее выражение:

$$T = \frac{(-c\beta)^{-1/2}}{3}\left[-\frac{6\gamma c}{\beta}\,\mathrm{th}\left(\frac{\xi}{2a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\right) - \left(\delta - \frac{\gamma c}{\beta}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\xi}{a}\sqrt{-\frac{c}{\beta}}\right)\right]. \tag{8}$$

Следует отметить, что при стремлении ξ к бесконечности T тоже стремится к бесконечности, т. е. для больших ξ первое неравенство в (6) не выполняется. Решение (8) для больших ξ теряет смысл. Оно описывает искажение формы солитона только вблизи вершины солитона.

Для малых ξ выражение (7) можно упростить и функция T имеет вид

$$T = \frac{2\delta + 4\gamma c\beta^{-1}}{6a\beta}\,\xi = \frac{M}{6a\beta}\,\xi. \tag{9}$$

Теперь видно, что а) если $M>0$, то $T>0$ при $\xi>0$ и $T<0$ при $\xi<0$; б) когда $M<0$, то получается наоборот: $T<0$ при $\xi>0$ и $T>0$ при $\xi<0$. Из этих неравенств видно, как изменяется форма солитона по отношению к симметричной форме недиссипативного солитона, определенной по формуле (7). В случае а) солитон смещается влево, но так, что вершина солитона остается неподвижной (при $\xi=0$ $\varphi=\varphi_0$). В случае б) аналогичным образом профиль солитона смещается вправо. Проиллюстрируем полученный результат на примере, когда нелинейная волна распространяется в пьезодиэлектрике со сферическими внедрениями. Воспользовавшись значениями коэффициентов уравнения (1), приведенными в [1], для величины M получим

$$M = \frac{v}{m}(\gamma^2\chi T_1 c_1^{-1} - \eta) - \frac{4cl_0^2(2w^3+1)}{v^2(2w^2+1)}, \tag{10}$$

где v—линейная скорость волны в данной среде, γ, χ и η—соответственно коэффициенты термичности, температуропроводности и вязкости среды, c_1—теплоемкость, l_0—размер шарика, w—отношение продольной и поперечной скоростей упругой волны, m—электроупругий параметр среды ($m>0$), T_1—температура среды. Из выражения (10) видно, что при большой вязкости, когда выполняется условие

$$\frac{v\gamma_1^2\chi T_1}{c_1 m} < \frac{v\gamma}{m} + \frac{4cl_0^2(2w^3+1)}{v^2(2w^2+1)},$$

$M<0$ и солитон будет иметь форму случая б). При обратном неравенстве $M>0$ солитон имеет форму случая а).

Интересен случай, когда $M=0$, который также можно осуществить. Это означает, что различные механизмы поглощения и дисперсия компенсируют друг друга, и солитон распространяется, как в недиссипативной среде.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за неоднократные ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян.** Изв. НАН Армении, Механика, **48**, №1, 64(1995).
2. **А. Г. Багдоев, Г. Г. Оганян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **37**, №1, 4(1984).
3. **А. Г. Багдоев, Л. Г. Петросян.** Изв. АН АрмССР, Механика, **36**, №5, 3(1983).
4. **A. G. Bagdoev, A. V. Shekoyan.** Int. J. Non-linear Mechanics, **32**, № 2, 385 (1997).
5. **Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская.** Нелинейная теория звуковых пучков. М., Наука, 1982.
6. **В. И. Карпман.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
7. **Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили.** Доклады АН СССР, **192**, №4, 753 (1970).
8. **И. Т. Селезов, С. В. Корсунский.** Нестационарные нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев, Наукова думка, 1991.
9. **Ю. В. Чугаевский.** Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. Кишинев, Штиинца, 1974.

APPROXIMATE THREE-DIMENSIONAL SOLITON SOLUTION IN THE PRESENCE OF DISPERSION AND DISSIPATION

A. V. SHEKOYAN

In this paper the nonlinear evolution equation of fifth degree describing the nonlinear wave processes in various complex media with dispersion and dissipation is investigated. It is shown that this equation has a soliton solution and an influence of dissipation on the profile of soliton is studied.

ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՌԱՉԱՓ ՍՈԼԻՏՈՆԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅԻ ԵՎ ԴԻՍԻՊԱՑԻԱՅԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Հոդվածում ուսումնասիրված են եռաչափ, ոչ գծային հինգերորդ աստիճանի էվոլյուցիոն հավասարումները, որոնք նկարագրում են ոչ գծային ալիքային երևույթները տարբեր, բարդ կառուցվածք և դիսիպացիայի տարբեր ձևեր ունեցող, միջավայրերում։ Ցույց է տրված, որ նշված հավասարումները ունեն սոլիտոնային լուծումներ։ Ուսումնասիրված է դիսիպացիայի ազդեցությունը սոլիտոնի կորվածքի վրա։

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 191—194 (1998)

УДК 550.388.2

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ИОНОСФЕРНЫМИ ВЕТРАМИ В ОКОЛОЗЕМНОМ КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. С. ВАРДАНЯН

Институт радиофизики и электроники НАН Армении

(Поступила в редакцию 6 апреля 1997 г.)

В работе приводятся аналитические выражения для магнитных полей, возбуждаемых ионосферными ветрами в каждом из слоев околоземного космического пространства.

В работе [1] изучено возбуждение электромагнитных процессов ионосферными ветрами в околоземном космическом пространстве. В частности, рассчитаны электрические поля и токи в каждом из слоев околоземного космического пространства. Однако большой научный и практический интерес представляют и магнитные поля, создаваемые электрическими токами.

Как показано в [1, 2], граничные условия между слоями предлагаемой модели околоземного космического пространства в приближении бесконечно проводящей Земли составляют замкнутую систему алгебраических уравнений, которая однозначно определяет произвольные постоянные величины, входящие в выражения для электрических полей и токов, индуцируемых ионосферными ветрами. Однако при учете внутренних слоев Земли, обладающих разными физическими свойствами, замкнутую систему алгебраических уравнений для произвольных постоянных величин электрических полей и токов в околоземном космическом пространстве и индуцируемых ими электрических полей и токов внутри Земли составляют граничные условия между слоями всей системы—околоземного пространства и Земли.

Магнитные поля определяются из уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{h}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$*, которое определяет $\mathbf{h}$ с точностью до градиента произвольной функции φ. Естественно, она должна удовлетворять уравнению Лапласа, поскольку $\mathrm{div}\,\mathbf{h}=0$. Это позволяет выбором определенной функции φ удовлетворить всем граничным условиям перехода магнитного поля $\mathbf{h}$ из одного слоя в другой слой околоземного космического пространства. Поскольку в задаче исключаются поверхностные токи, то магнитные поля на границе между слоями должны быть непрерывны. Следовательно, значения произвольных постоянных величин, обеспечивающих непрерывность магнитных полей, могут быть определены решением соответствующей системы алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий.

---

* Так как задача в [1] является стационарной.

Названная система уравнений составляется путем прибавления к частному решению уравнения для магнитного поля градиента Фурье-компоненты функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа, и требования непрерывности поля на границах раздела между слоями. Ясно, что непрерывность полей на границах предполагает непрерывность каждой из компонент поля $\mathfrak{h}_{x,y,z}$. Математически это представляется в следующем виде:

$\mathfrak{h}^M_{x,y,z}=\mathfrak{h}^{F_2}_{x,y,z}$—на границе между магнитосферой и F_2-слоем ионосферы;

$\mathfrak{h}^{F_2}_{x,y,z}=\mathfrak{h}^{F_1}_{x,y,z}$—на границе между F_2 и F_1 слоями ионосферы;

$\mathfrak{h}^{F_1}_{x,y,z}=\mathfrak{h}^{E}_{x,y,z}$—на границе между F_1 и E слоями ионосферы; (1)

$\mathfrak{h}^{E}_{x,y,z}=\mathfrak{h}^{a}_{x,y,z}$—на границе между E-слоем ионосферы и атмосферой*;

$\mathfrak{h}^{a}_{x,y,z}=\mathfrak{h}^{З}_{x,y,z}$—на границе между атмосферой и Землей.

Здесь индексы M, F_2, F_1, E, a и $З$ относятся соответственно к магнитосфере, $F_{2,1}$ слоям ионосферы, E-слою ионосферы, к атмосфере и Земле.

Решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi=0$, определяющее функцию φ в геометрии работы [1], представляется в виде

$$\varphi=(A_1e^{-k|z|}+A_2e^{k|z|})\sin k_1x\cdot\sin k_2y+(A_3e^{-k|z|}+A_4e^{k|z|})\sin k_1x\cdot\cos k_2y+$$
$$+(A_5e^{-k|z|}+A_6e^{k|z|})\cos k_1x\cdot\sin k_2y+(A_7e^{-k|z|}+A_8e^{k|z|})\cos k_1x\cdot\cos k_2y,$$

где $A_{1,\ldots,8}$—неопределенные коэффициенты, вообще говоря, разные для каждого слоя.

Как видно из работы [1], частное решение для уравнения магнитного поля $\mathfrak{h}$ по координатам x, y содержит соответственно в $\mathfrak{h}^{F_2,F_1,E}_{x,y}$ и $\mathfrak{h}^{F_2,F_1E}_{z}$ слагаемые только с $\sin k_1x\cdot\sin k_2y$, $\cos k_1x\cdot\cos k_2y$, $\sin k_1x\cdot\cos k_2y$, $\cos k_1x\cdot\sin k_2y$. Тогда для удовлетворения граничных условий необходимо будет определить двадцать неизвестных постоянных A_i из алгебраических уравнений (1), которые составляют замкнутую систему относительно A_i.

С учетом вышеуказанного можно произвести унифицированную запись системы граничных уравнений (1). Она будет содержать уравнения, пропорциональные $\sin k_1x\cdot\sin x_2y$, $\cos k_1x\cdot\cos k_2y$, $\sin k_1x\cdot\cos k_2y$, $\cos k_1x\cdot\sin k_2y$, выражающие равенство магнитных полей на границах раздела.

Первые две группы уравнений, каждая из которых состоит из пяти уравнений, пропорциональных соответственно $\sin k_1x\cdot\sin k_2y$, $\cos k_1x\cdot\cos k_2y$, записываются в виде

$$(F_2(1,2),F_1,E,a)\mp k_1[A_{5(3)}(F_2(1,2),F_1,E,a)e^{-k|l|}+A_{6(4)}(F_2(1,2),F_1,E,a)e^{k|l|}]=$$
$$=(M,F_1,E,a,З)\mp k_1[A_{5(3)}(M,F_1,E,a,З)e^{-k|l|}+A_{5(4)}(M,F_1,E,a,З)e^{k|l|}]. \quad (2)$$

* Здесь и далее термин «атмосфера», как и в [1], имеет смысл «нейтральной атмосферы».

Здесь $(F_2(1,2),F_1,E,a)$ и $A_{5(3),6(4)}(F_2(1,2),F_1,E,a)$ в левой части уравнения— символическая запись значения частных решений уравнения для магнитного поля в соответствующих слоях ионосферы и атмосферы, обозначенных в скобках, на границах раздела и произвольные постоянные в тех же слоях. $(M,F_1,E,a,З)$ и $A_{5(3),6(4)}$ $(M, F_1, E, a, З)$ в правой части уравнения имеют тот же смысл, однако относятся соответственно к магнитосфере, к F_1 и E слоям ионосферы, к атмосфере и Земле. Причем левая часть уравнения соответствует правой части по порядку приводимых в скобках обозначений, где соответственно слоям меняется и значение в выражениях (2) $e^{+k|t|}$. Для принятой в работе [1] геометрии и в прямоугольной системе координат $|t|$ принимает значения: $(d-a-l-p)$—на границе магнитосферы и F_2-слоя ионосферы, $(d-a-l)$—на границе F_2 и F_1 слоев ионосферы, $(d-a)$—на границе F_1 и E слоев ионосферы, d—на границе E-слоя и атмосферы и $(d+f)$ —на границе атмосферы и Земли.

Здесь необходимо отметить, что уравнение (2) содержит как систему уравнений, пропорциональных $\sin k_1x \cdot \sin k_2y$ с верхним знаком в уравнении, так и систему уравнений, пропорциональных $\cos k_1x \cdot \cos k_2y$ с нижним знаком в уравнении и индексами в скобках при произвольных постоянных. Заметим, что уравнение (2) выражает граничное условие с бесконечно проводящей Землей, где магнитное поле равно нулю. В случае ситуации, близкой к реальной, когда магнитные поля в Земле отличны от нуля, необходимо будет решить систему уравнений, охватывающих и внутренние слои Земли, электродинамически связанные с околоземным пространством.

Две последние группы уравнений, каждая из которых состоит из пяти уравнений, пропорциональных $\sin k_1x \cdot \sin k_2y$ и $\cos k_1x \cdot \cos k_2y$, представляются в виде

$$(F_2(1,2),F_1,E,a)-\operatorname{sgn} z \cdot k[A_{3(5)}(F_2(1,2),F_1,E,a)e^{-k|t|}-$$
$$-A_{4(6)}(F_2(1,2),F_1,E,a)e^{k|t|}]=$$
$$=(M,F_1,E,a,3)-\operatorname{sgn} z \cdot k[A_{3(5)}(M,F_1,E,a,3)e^{-k|t|}-A_{4(6)}(M,F_1,E,a,3)e^{k|t|}],$$

и объяснение этого уравнения полностью аналогично вышеизложенному объяснению уравнения (2).

Таким образом, в работе показано, что система граничных условий полностью определяет магнитные поля, научно-практическая важность которых для физики процессов в околоземном пространстве и внутри Земли подробно изложена в работах [1, 2]. Отметим, что в нашей работе рассмотрены те широты, где можно пренебречь горизонтальной составляющей магнитного поля Земли и магнитные силовые линии остаются замкнутыми. Причем ионосферные ветры считаются геострофическими, т. е. горизонтальными $(\mathbf{w}_z=0)$, и геометрические размеры их малы по сравнению с радиусом Земли (что позволяет применить плоскую модель), но больше высоты однородной атмосферы [1]. Ясно, что по постановке задачи [1] и методу ее решения возбуждаемые ионосферными ветрами магнитные поля будут малыми возмущениями к основному магнитному полю Земли. Однако эти поля, высотные профили которых будут приведены в последующей работе, имеют важное научно-практическое значение, так как методы выделения различных типов возмущений хорошо изучены [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ю. С. Варданян.** Известия АН АрмССР, Физика, 27, 163(1992).
2. **Ю. С. Варданян.** Известия НАН Армении, Физика, 30, 261(1995).
3. **А. Нишида.** Геомагнитный диагноз магнитосферы. М., Мир, 1980.

MAGNETIC FIELDS EXCITED BY IONOSPHERIC WINDS IN THE NEAR-EARTH SPACE

YU. S. VARDANYAN

Analytic expressions are given for magnetic fields excited by ionospheric winds in every layer of the near-Earth space.

ԻՈՆՈԼՈՐՏԱՅԻՆ ՔԱՄԻՆԵՐՈՎ ԳՐԳՌՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ՄԵՐՁԵՐԿՐՅԱ ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

ՅՈՒ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Աշխատանքում բերված են մերձերկրյա տիեզերական տարածության մեջ իոնոլորտային քամիներով գրգռված մագնիսական դաշտերի անալիտիկ արտահայտությունները։

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 195—200(1998)

УДК 548.732

РЕНТГЕНОВСКИЙ КОНДЕНСОР

К. Т. АВЕТЯН, М. М. АРАКЕЛЯН, С. А. АНЧАРАКЯН, А. Г. ПАТВАКАНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 9 декабря 1997 г.)

Теоретически обоснован и экспериментально осуществлен конденсор для улучшения освещения исследуемых объектов при рентгенодифракционных топографических исследованиях структурных несовершенств (дислокаций) кристаллов. Конденсор представляет собой асимметричный кристалл-монохроматор, изогнутый по параболическому цилиндру, в приповерхностный слой отражающей грани которого введена двухмерная сеть дислокаций. Конденсор обеспечивает увеличение светосилы системы (сокращение времени экспозиции) в 4 раза при некотором увеличении разрешающей способности.

Конденсорная система обеспечивает оптимальное освещение исследуемого объекта и является неотделимой частью многих оптических и электронных приборов. В рентгеновских исследованиях конденсоры обеспечивают также формирование пучка рентгеновского излучения с заданными параметрами. Параметры пучка рентгеновского излучения—спектральное и угловое распределение плотности излучения и ширина фронта—имеют существенное значение при формировании рентгенодифракционных изображений. Эти параметры выбираются, исходя из требований задачи.

В прямых методах рентгенодифракционных топографических исследований, каким является визуализация топографических изображений структурных несовершенств кристаллов, широко применяется и считается оптимальным спектральное распределение плотности излучения в пределах естественной ширины спектральной линии характеристического излучения при расходимости пучка $\Delta\theta=\Delta\lambda \mathrm{tg}\theta/\lambda$ определяемой условием Брэгга.

При визуализации рентгенодифракционных топографических изображений поступательно-возвратное движение связано с проблемой запоминания и сложения отдельных частей изображения, поэтому целесообразно применять пучок с широким фронтом. Одним из широко применяемых методов получения широкого фронта является асимметричное отражение. Однако при асимметричном отражении происходит уменьшение углового интервала области отражения, что весьма неблагоприятно для формирования кинематического контраста дислокаций в исследуемом кристалле [1].

Нами осуществлен конденсор, который обеспечивает пучок рентгеновского излучения с параметрами, оптимальными для формирования нормального кинематического контраста изображения дислокаций в исследуемом кристалле. При этом одновременно увеличивается светосила (в 4—5 раз) и разрешающая способность системы. В конденсоре нами был применен асимметричный, изогнутый по параболическому цилиндру кристалл-монохроматор, в приповерхностный слой которого введена дислокационная сеть.

Как уже было сказано, отраженный на асимметричном совершенном кристалле пучок излучения имеет малый угловой и спектральный интервалы. При таком пучке кинематический контраст изображений дислокаций в исследуемом кристалле резко снижается. Для оптимального контраста требуется пучок, содержащий несравнимо большие угловой и спектральный интервалы. В случае асимметричного кристалла-монохроматора с дислокационной сетью в приповерхностном слое ситуация меняется. Локальные линейные и угловые смещения решетки вокруг дислокации можно рассматривать как локальную эффективную разориентацию [2, 3]. Точная оценка эффективных разориентаций позволяет определить угловой и спектральный интервалы отраженного пучка излучения. Однако в таких расчетах и оценках необходимости нет. Дело в том, что если падающий на асимметричный кристалл пучок имеет достаточно широкие угловой и спектральный интервалы, то дифрагированный пучок будет содержать угловое и спектральное распределение в соответствии с эффективной разориентацией поля дислокаций.

Выходит, что отраженный на асимметричном кристалле, в приповерхностный слой которого введена дислокационная сеть, пучок излучения содержит такие угловые и спектральные распределения, которые необходимы для формирования оптимального кинематического контраста в другом—исследуемом кристалле. Благодаря существенному увеличению углового и спектрального интервалов существенно увеличивается и поток отраженного излучения (в 10^2—10^3 раз). Причем весь этот поток является полезным, поскольку в процессе формирования кинематического контраста дислокаций в исследуемом кристалле участвует весь поток, очищенный от неполезных долей углового и спектрального интервалов первичного пучка.

Кроме расширения фронта отраженного пучка, асимметричное отражение имеет еще одно замечательное свойство, благодаря которому существенно увеличивается коэффициент полезного действия. При симметричном отражении угловые расходимости падающего и отраженного пучков одинаковы. В случае асимметричного отражения расходимость падающего пучка в пределах центрального максимума будет $\Delta\theta_0 = \Delta\theta_s\sqrt{b}$, где $\Delta\theta_s$ —угловая ширина при симметричном отражении, $b = \sin(\theta+\psi)/\sin(\theta-\psi)$—линейное увеличение ширины фронта асимметрично отраженного пучка, θ—угол Брэгга, ψ—угол между отражающими плоскостями и входной поверхностью кристалла. Другими словами, асимметричный кристалл втягивает из падающего пучка и переводит в отраженный пучок в $\sqrt{b}$ раз больше интенсивности, чем симметричный кристалл [4].

Необходимо отметить, что эти рассуждения справедливы и строго обоснованы теоретически для совершенного асимметричного кристалла. В случае асимметричного кристалла, в приповерхностный слой которого введена дислокационная сеть, утверждать о точно таком же увеличении коэффициента полезного действия нет оснований. В первом приближении можно считать, что $\Delta\theta_0 = \Delta\theta_s \cdot k \cdot \sqrt{b}$, где k—поправочный коэффициент (он равен единице при совершенном асимметричном кристалле). На первый взгляд, кажется что k должен зависеть от плотности и ориентации дислокаций. Вопрос о значении k будет обсуждаться ниже, исходя из экспериментальных результатов.

Дополнительное двукратное увеличение светосилы системы нами было достигнуто применением асимметричного кристалла-монохроматора, изогнутого по параболическому цилиндру. В самом деле, при точечном источнике рентгеновского излучения, помещенном в фокусе параболического цилиндра, рабочая поверхность (часть, удовлетворяющая условию Брэгга) увеличивается в два раза, поскольку угол расходимости входного пучка $\Delta\varphi = 2\Delta\theta_0$. При этом отраженный пучок будет параллелен. Конечность размеров фокусного пятна рентгеновской трубки влияет на расходимость отраженного пучка и на разрешающую способность системы. Однако оказывается, что на геометрическую разрешающую способность данной системы влияет только размер фокусного пятна, параллельный образующей цилиндра, поскольку в этом направлении размер мнимого изображения пятна не изменяется.

Эксперимент и результаты

Бездислокационный кристалл кремния с размерами 40х20х2мм³ был вырезан так, что одна из плоскостей (110) составляла с большой гранью угол $\psi = 6^0$. Дислокации в кристалл были введены методом четырехточечного изгиба при температуре $T \sim 1000$K. При четырехточечном изгибе наиболее точно обеспечивается равномерное распределение механического напряжения между двумя средними опорами, и кристалл изгибается по круглому цилиндру. Источниками дислокаций служили уколы алмазного индентора, предварительно нанесенные на большую грань в виде двухмерной периодической сетки. Плотность уколов и режим (температура, касательное напряжение и время) были подобраны так, что дислокационные гексагональные полупетли вплотную приближались друг к другу. При введении дислокаций в кристалл каждая из них является результатом микропластической деформации, поэтому кристалл остается изогнутым по круглому цилиндру. Кривизна этого цилиндра зависит от нескольких факторов и контролируется плохо. Необходимая кривизна придается специальным кристаллодержателем после введения дислокаций.

Размеры фокусного пятна рентгеновской трубки, применяемой в наших экспериментах, 0,4х0,4мм². Исходя из требования, что расходимость отраженного пучка не должна превышать $\Delta\theta$ для расстояния между фокусным пятном и центром рабочей поверхности получим $r=\frac{f_2\sin2(\theta-\psi)}{2\sqrt{b}\cdot\delta\theta_s}\approx100$мм. Соответственно, для параметра параболы $p=r\cdot2\sin(\theta-\varphi)\approx1$мм. Для радиуса кривизны рабочей поверхности $R=\frac{p}{\sin^3(\theta-\psi)}=3600$мм. Поскольку радиусы кривизны на краях рабочей поверхности $R_1=\frac{p}{\sin^3(\theta-\psi)}$, $R_2=\frac{p}{\sin^3(\theta+\Delta\theta-\psi)}$ очень близки, то замена параболического цилиндра круглым цилиндром с таким же радиусом кривизны в этом интервале радиусов весьма корректна.

Кристаллодержатель насаждается на ось гониометрической головки, обеспечивающей вращение кристалла вокруг двух взаимно перпендикулярных осей. Головка прикрепляется к столику, позволяющему перемещать головку в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В системе применены три ограничивающие щели: одна—перед кристаллом-монохроматором, две другие—непосредственно перед и после исследуемого кристалла.

Предварительная юстировка кристалла-монохроматора осуществлялась установлением на максимум интегральной интенсивности пучка, отраженного от кристалла-монохроматора, и уточнялась после эталонного исследуемого кристалла.

Светосила системы была оценена измерением интегральной интенсивности пучка, отраженного на эталонном (исследуемом) кристалле при разных кристаллах-монохроматорах и без него (прямой пучок на эталонный кристалл).

В случае асимметричного, бездислокационного и неизогнутого кристалла-монохроматора $I\sim(10^{-2}-10^{-3})I_0$, где I_0—интегральная интенсивность отражения на эталонном (исследуемом кристалле) при прямом пучке (без кристалла-монохроматора), I—интегральная интенсивность отражения в двухкристальной системе. Этот результат не является неожиданным, поскольку в отраженном на асимметричном бездислокационном кристалле пучке существенно уменьшаются спектральный и угловой интервалы, весьма ухудшаются условия формирования кинематического контраста дислокаций.

В случае симметричного неизогнутого кристалла-монохроматора с введенной дислокационной сеткой $I\sim(0{,}9—1{,}3)I_0$. Этот результат, очевидно, обусловлен существенным увеличением углового и спектрального интервалов пучка, отраженного на дислокациях. Кроме того, благодаря разориентации областей вокруг дислокаций, несколько увеличивается расходимость падающего пучка.

В случае асимметричного неизогнутого кристалла-монохроматора с введенной дислокационной сеткой $I\sim(2—2{,}7)I_0$. Увеличение относительной светосилы в этом случае обусловлено увеличением угла расходимости падающего пучка при асимметричном отражении в $\Delta\theta_0=k\sqrt{b}\cdot\Delta\theta_s$ раз.

В случае асимметричного изогнутого кристалла-монохроматора с введенной дислокационной сеткой относительная светосила $I \approx 4 I_0$. Последнее обусловлено увеличением угла расходимости падающего пучка на параболическом или круглом цилиндре.

Нам не удалось выяснить четкую зависимость относительной интенсивности от отдельных факторов. Кроме того, неясно, является ли увеличение светосилы в 4 раза предельным. Дело в том, что при введении дислокационной сетки некоторые факторы, влияющие на плотность и ориентацию дислокаций, контролируются не полностью. Поэтому изготовить два совершенно идентичных кристалла-монохроматора нам пока не удалось. Влияние плотности и распределения дислокаций в кристалле-монохроматоре на светосилу мы установили приблизительно. Но четко установлено, что увеличение светосилы в 4 раза—реально полученный результат. В наших экспериментах $b \approx 4$—5. Если иметь в виду, что увеличение светосилы в 2 раза однозначно обусловлено изогнутостью кристалла, то, вследствие асимметричности, увеличение будет также в 2 раза и из выражения $\Delta\theta_0 = k \cdot \Delta\theta_s \sqrt{b}$ для k получим $k \sim 1$.

Разрешающая способность двухкристальной системы оценивалась по топографическим изображениям дислокаций в исследуемом эталонном кристалле, полученным фотографической регистрацией при сравнении с изображением, полученным прямым пучком.

Как уже было сказано, размер мнимого изображения источника в направлении образующей остается неизменным, поэтому ожидается, что геометрическая разрешающая способность в антибрэгговском направлении должна остаться неизменной. Однако при применении конденсора наблюдается некоторое улучшение разрешающей способности системы. Увеличение разрешающей способности в брэгговском и антибрэгговском направлениях объясняется тем, что в двухкристальной схеме понижается фон рассеянного излучения, поскольку в этом случае на исследуемый кристалл направляется не весь спектр белого излучения, а только спектральный интервал, который необходим для формирования кинематического контраста дислокаций в исследуемом кристалле. Благодаря понижению фона, контраст изображения увеличивается и улучшаются условия разрешения двух близких изображений.

Таким образом, применение в качестве конденсора асимметричного кристалла, изогнутого по параболическому цилиндру, в приповерхностный слой которого введена двухмерная дислокационная сеть, дает четырехкратное увеличение светосилы и заметное улучшение разрешающей способности двухкристальной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. K. Tanner. X-ray Diffraction Topography. Oxford, New York, Pergamon press, 1976.
2. W. Spirkl, B. K. Tanner, C. Whitenouse, et al. Phil. Mag., 69, 221 (1994).

3. W. Spirkl, B. K. Tanner, C. Whitenouse, et al. Phil. Mag., 70, 532 (1994).
4. З. Г. Пинскер. Рентгеновская кристаллооптика. М., Наука, 1982.

X-RAY CONDENSER

K. T. AVETYAN, M. M. ARAKELYAN, S. H. ANCHARAKYAN, A. G. PATVAKANYAN

A condenser for improvement of illumination for investigating objects when studying structural imperfections (dislocations) of crystals is theoretically substantiated and experimentally implemented. The condenser represents an asymmetrical cfystal-monochromator bent on the parabolic cylinder, in the near-surface layer of the reflecting facet of which a two-dimensoinal dislocation network is doped. The condenser provides 4 times magnification of the system aperture (reduction of the exposure time) with a certain increase in the resolution.

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԿՈՆԴԵՆՍՈՐ

Կ. Թ. ԱՎԵՏՅԱՆ, Մ. Մ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ս. Հ. ԱՆՉԱՐԱԿՅԱՆ, Ա. Գ. ՊԱՏՎԱԿԱՆՅԱՆ

Տեսականորեն հիմնավորված և փորձնականորեն իրականացված է կոնդենսոր, որը հնարավորություն է տալիս մեծացնել նմուշի լուսավորությունը բյուրեղների կառուցվածքային արատների (դիսլոկացիաների) ռենտգենադիֆրակտային տեղագրական ուսումնասիրությունների դեպքում։ Կոնդենսորը ներկայացնում է ապահամաչափ բյուրեղ-մեներանգիչ՝ ճկված ըստ պարաբոլական գլանի, որի անդրադարձնող նիստի մերձմակերևույթային շերտ մտցված է դիսլոկացիաների երկչափ ցանց։ Կոնդենսորն ապահովում է համակարգի լուսաուժի մեծացում (լուսակայման ժամանակի կրճատում) 4 անգամ, լուծունակության որոշակի մեծացման դեպքում։

Известия НАН Армении, Физика, т. 33, №4, с. 201—204 (1998)

УДК 541.64

МОДЕЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЕРЕХОДА СПИРАЛЬ-КЛУБОК В ДВУСПИРАЛЬНОЙ ГОМОГЕННОЙ МОДЕЛИ ДНК

В. Ф. МОРОЗОВ, Е. Ш. МАМАСАХЛИСОВ, Н. Э. МАТЕВОСЯН, М. С. ШАГИНЯН

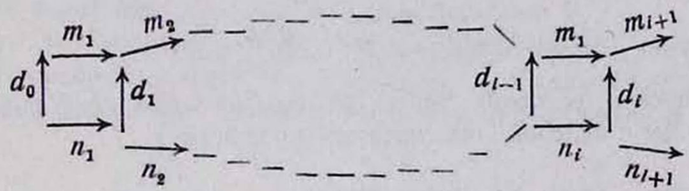
Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 25 марта 1997 г.)

Построен гамильтониан для описания перехода спираль-клубок в двунитчатых системах. Показано, что характеристическое уравнение соответствует обобщенной однонитчатой модели, предложенной ранее.

Целью данной работы является построение теории перехода спираль-клубок в двунитчатых системах (ДНК), основанной только на молекулярных характеристиках системы и не содержащей усредненных параметров, как в общепринятых среднеполевых теориях [1—3]. Ранее такой подход был нами применен для однонитевых систем [4—7].

Пусть схематически ДНК представляет собой совокупность векторов, соединяющих сахарные кольца соседних повторяющихся единиц для одной (m_i) и другой (n_i) цепи и векторов, соединяющих сахарные кольца двух цепей (d_i) как это указано на рисунке:



Образование водородной связи в i-й комплементарной паре произойдет тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{d}_0+\sum_{k=1}^{i}\mathbf{m}_k-\mathbf{d}_i-\sum_{k=1}^{i}\mathbf{n}_k=0. \tag{1}$$

Введем вектор $\gamma_k=\mathbf{d}_{k-1}+\mathbf{m}_k-\mathbf{n}_k-\mathbf{d}_k$, тогда условие (1) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{i}\gamma_k=0. \tag{2}$$

Таким образом, гамильтониан системы может быть записан в виде

$$-\beta H=J\sum_{i=1}\delta_{Kr}\left(\sum_{k=1}^{i}\gamma_k,0\right), \tag{3}$$

где $\beta=T^{-1}$, $J=U/T$, U —энергия образования водородной связи, δ_{Kr}— символ Кронекера. Отметим, что все входящие в гамильтониан величины имеют строго микроскопической характер. Они включают в себя энергию образования водородной связи (J) и конформационные особенности цепей γ_i.

Введем обозначение $\delta^i_j=\delta_{Kr}\left(\sum\limits_{k=1}^{i}\gamma_k,0\right)$, с учетом которого гамильтониан (3) запишется в виде

$$-\beta H=J\sum_{i=1}^{N}\delta^i_1. \tag{4}$$

Для статистической суммы получим следующее выражение:

$$Z=\sum_{\{\gamma_i\}}\exp(-\beta H)=\sum_{\{\gamma_i\}}\exp\left(J\sum_{i=1}\delta^i_1\right). \tag{5}$$

Как и в случае полипептидной цепочки, введем обозначение $V=\exp(J)-1$, тогда статистическая сумма перепишется в следующем виде:

$$Z=\sum_{\{\gamma_k\}}\prod_{i=1}(1+V\delta^i_1). \tag{6}$$

Разложим статсумму по степеням V и рассмотрим член V^f; он будет состоять из f произведений δ^k_1. Расположим их в порядке возрастания k. Учитывая, что $\delta^k_1\delta^m_1=\delta^k_1\delta^{m-1}_{k+1}$, данный член разложения примет вид

$$V^f\delta^{k_1}_1\delta^{k_2-k_1}_{k_1+1}\delta^{k_3-k_2}_{k_2+1}\ldots\delta^{k_f-k_{f-1}}_{k_{f-1}+1}. \tag{7}$$

При циклических условиях равенства конформаций N-ой повторяющейся единицы и нулевой, для статсуммы получим:

$$Z=\sum_f V^f\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2}\ldots\sum_{\gamma_{k_1}}\delta^{k_1}_1\sum_{\gamma_{k_1+1}}\sum_{\gamma_{k_1+2}}\ldots\sum_{\gamma_{k_f}}\delta^{k_2-k_1}_{k_1+1}\ldots\sum_{\gamma_{k_f+1}}\sum_{\gamma_{k_f+2}}\ldots\sum_{\gamma}\delta^{N-k_f}_{k_f+1}=$$
$$=Q^N\sum_f V^f\sum_{m_1}\varphi(m_1)\sum_{m_2}\varphi(m_2)\ldots\sum_{m_f}\varphi(m_f), \tag{8}$$

где $k_i-k_{i-1}=m_i$. Здесь

$$\varphi(m)=Q^{-m}\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2}\ldots\sum_{\gamma_m}\delta^m_1, \tag{9}$$

Q—число конформаций повторяющейся единицы и имеет тот же смысл, что и в полипептидной цепи [4, 5].

Таким образом, под $\varphi(m)$ мы будем понимать отношение статсуммы петли из m повторяющихся единиц к стасумме той же цепи, но не замкнутой в петлю. Суммирование по m_k в (9) выполняется с условием $\sum_{k=1}^{f} m_k = N$. Как обычно [1, 8], при суммировании с условием мы вводим множитель

$$\delta\left(\sum_{k=1}^{f} m_k - N\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint P^{\sum_{k=1}^{f} m_k - N - 1} dP. \tag{10}$$

Затем, подставляя (10) в (9) и рассматривая все m_k как независимые, получаем

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - \left[V \sum_{1}^{\infty} \varphi(m) P^m \right]^{+1}}{1 - \left[V \sum_{1} \varphi(m) P^m \right]} P^{-N-1} dP. \tag{11}$$

Для больших N оценка (11) дает $Z \approx P^{-N-1}$, где P_0—ближайший к нулю полюс подынтегрального выражения в (11). Следовательно, свободная энергия на одну повторяющуюся единицу

$$F = T \ln P_0, \tag{12}$$

где P_0 есть корень характеристического уравнения

$$\sum P^m \varphi(m) = \frac{1}{V}. \tag{13}$$

Характеристическое уравнение связывает между собой ограничения, накладываемые на образование водородной связи в цепи, определяемые относительными статвесами $\varphi(m)$ и энергией образования водородной связи, определяющей температурный параметр V.

Пусть Δ—характерный масштаб, определяющий петли малой длины. Пренебрежем здесь ограничениями, накладываемыми на петли большой длины [2]. В рамках данного приближения $\varphi(m)$ будет иметь вид

$$\varphi(m) = \begin{cases} Q^{-m}, & m \leqslant \Delta - 1, \\ Q^{-\Delta}, & m \geqslant \Delta. \end{cases} \tag{14}$$

В обозначениях $\lambda = Q/P$ получаем

$$\lambda^{\Delta-1}(\lambda - (V+1))(\lambda - Q) = V(Q-1). \tag{15}$$

Таким образом, характеристическое уравнение для двухцепочечной модели с пренебрежением ограничений, накладываемых на петли большого масштаба, свелось к характеристическому уравнению обобщенной полипептидной цепи [4, 8], определяемой гамильтонианом вида

$$-\beta H = J \sum_{i=1} \prod_{k=0}^{\Delta-1} \delta_{Kr}(\gamma_{i+k}, 1), \tag{16}$$

где суммирование ведется по наборам $\{\gamma_i\}$ переменных, определяющих набор конформационных состояний цепи. Ранее для полипептидной цепи было показано, что Зимм-Брэгговские параметры могут быть приближенно представлены в виде [5, 7]

$$S=\frac{V+1}{Q}, \quad \sigma=Q^{\Delta-1}, \tag{17}$$

при этом точка перехода T_m будет определяться соотношением $S=1$ или $V=Q-1$, откуда

$$T_m=\frac{U}{\ln Q}. \tag{18}$$

В двухцепочном случае под величиной Q мы будем понимать отношение статсуммы комплементарного динуклеотида, не связанного водородными связями, к статсумме динуклеотида, связанного водородными связями. Величину Δ, согласно (18), можно связать с длиной статистического сегмента изолированной полинуклеотидной цепочки.

Приведем некоторые оценки параметра кооперативности. Согласно (17), из [9] Q может быть грубо оценена как 3, а из [10] Δ изменяется от 19 до 15. Таким образом, значения σ оцениваются от 10^{-5} до 10^{-7} [2].

Следовательно, в пренебрежении ограничений, накладываемых на крупномасштабные петли, переход спираль-клубок в двухцепочечных полинуклеотидах может быть описан в терминах обобщенной модели полипептидной цепи с гамильтонианом (16) и характеристическим уравнением (15). При описании гетерополимерной ситуации полипептидная цепь будет гомогенной по V и гетерогенной по Q, а для полинуклеотидной цепи система будет гетерогенной по V и гомогенной по Q. Здесь сразу можно указать, что для гетерополинуклеотидов (см. (17)) в рамках нашей модели система оказывается гомогенной по параметру кооперативности σ. Несмотря на то, что нами была показана нелокальность параметра кооперативности для полипептидных цепей [5], параметр кооперативности для полинуклеотидов может быть выбран локальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D. C. Poland, H. A. Scheraga.** Theory of Helix-Coil Transition. New York, Acad. Press, 1970.
2. **А. А. Веденов, А. М. Дыхне, М. Д. Франк-Каменецкий.** УФН, 105, 479 (1971).
3. **S. Lifson, A. Roig.** J. Chem. Phys., 34, 1963 (1961).
4. **N. S. Ananikian, Sh. A. Hairian, V. F. Morozov. E. Sh. Mamasahklisov.** Biopolymers, 30, 357 (1990).
5. **Sh. Hairian, V. F. Morozov, E. Sh. Mamasahklisov.** Biopolymers, 35, 75 (1995).
6. **Ш. А. Айрян, Н. С. Ананикян, Е. Ш. Мамасахлисов, В. Ф. Морозов.** Биофизика, 34, 394 (1989).
7. **Ш. А. Айрян, Н. С. Ананикян, В. Ф. Морозов.** Биофизика, 31, 386 (1986).
8. **Р. Бэкстер.** Точно решаемые мокели в статистический механике. М., Мир, 1981.
9. **W. K. Olson and P. J. Flory.** Biopolymers, 11, 1 (1972).
10. **G. Felsenfeld and H. T. Miles.** Ann. Rev. Biochemistry, 36, 407 (1967).

CONTENTS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Технический редактор **В. Д. СТЕПАНЯН**

Сдано в набор 30.03.1998 г. Подписано к печати 15.06.1998 г.
Формат 70×108[1]/16. Бумага №1, «сыктывкарская». Высокая печать. Печ. лист. 3.
Усл. печ. лист. 4,2. Усл. кр. отт. 4,5. Тираж 200. Заказ 29.
Издат. 7952. Цена договорная.

Издательство «Гитутюн» НАН РА, 375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства НАН Армении, 378410, г. Аштарак.

Индекс 77709

СОДЕРЖАНИЕ