

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր Д О К Л А Д Ы

LXXX, № 3

1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկեմ-
 ծու (պատմ. փորձագետ), Է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐԱՏՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՆՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ. տեղամ. Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ. տեղամ. Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄ-
 ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ ակադեմիկոս (պատմ. Խմբագրի տեղա-
 կալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ.
 տեղամ. Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակա-
 դեմիկոս, Ծ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ԲԳՐ.
 տեղամ. Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
 ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
 ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАР-ДЖЯН, академик АН АрмССР.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԲԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Ի. Կռպանեա—Կոշի—Գուրսայի խնդիրը աբստրակտ օպերատորով հեռազրական հավասարման համար	99
Ա. Ի. Պետրոսյան—Պիկի բազմությունները խիստ պահպանողական տիրույթում ողորկ ֆունկցիաների դասերի համար	104
Ս. Ա. Կրիգորյան—Հանրահաշիվներ ընդհանրացված անալիտիկ շրջանում	108
Ա. Հ. Քամալյան—Համարյա տյուրիցյան օպերատորների նյութերության մասին	112
Ս. Ա. Նիդիյան—Մրազրերի սխեմաների ֆունկցիոնալ և վերջավոր համարժեքությունների մասին	115

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ. Ա. Ջադոյան, Ն. Բ. Սաֆարյան—Պլաստիկորեն անհամասեռ սնամեջ գնդի վերջավոր դեֆորմացիան ճնշման հանկարծակի ազդեցության դեպքում	117
--	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Հ. Զրբաշյան—Մասնիկի լրիվ մոմենտը	123
-------------------------------------	-----

ԳԵՈՖԻԶԻԿԱ

Վ. Բ. Գամոյան, Ֆ. Ս. Ունույան—Թափառող հոսանքների դաշտը ձգված հանքային մարմինների առկայության դեպքում	129
--	-----

ՀԱՆՔԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Փ. Յաշվիլի—Դեբեդի մանգանի երևակման (Հայկական ՍՍՀ) հանքանյութերում գրոուտիտի հայտնաբերման վերաբերյալ	135
--	-----

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ն. Լ. Քալաբյան, Է. Ն. Շահյան—Պալարարակտերիաների ներդրողենազային ակտիվությունը թիթևոնածաղկավոր բույսերի արմատային կալուսների հետ համատեղ աճեցողության ժամանակ	139
--	-----

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Զաքարյով—Խեճուրյան—Ջատիկ ըզեզների նոր սեռ և տեսակ Սումատրայից (Coleoptera, Coleoptelidae)	142
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

- В. И. Коланена*—Задача Коши—Гурса для телеграфного уравнения с абстрактным оператором 99
- А. И. Петросян*—Множества пика классов гладких функций в строго псевдо-выпуклой области 104
- С. А. Григорян*—Об алгебрах на обобщенном аналитическом диске . . . 108
- А. Г. Камалян*—О нетеровости почти теплицевых операторов 112
- С. А. Нигиян*—О функциональной и конечной эквивалентностях схем программ 115

МЕХАНИКА

- М. А. Зайоян, Н. Б. Сафарян*—Конечная деформация пластически-неоднородной поллой сферы при внезапном воздействии давлений 117

ФИЗИКА

- В. А. Джрбашян*—Полный момент частицы 123

ГЕОФИЗИКА

- В. Б. Гамоян, Ф. С. Унусян*—Пространственное распределение поля блуждающих токов при наличии вытянутых тел 129

МИНЕРАЛОГИЯ

- Л. П. Яшвили*—Об обнаружении гроутита в рудах Дебедского проявления марганца (Армянская ССР) 135

МИКРОБИОЛОГИЯ

- Н. Л. Каладжян, Э. Е. Оганян*—Нитрогеназная активность клубеньковых бактерий при их совместном выращивании с корневыми каллусами бобовых растений 139

ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков-Хнзорян*—Новый род и вид жесткокрылых—кокцишеллид из Суматры (Coleoptera, Coccinellidae) 142

C O N T E N T S

MATHEMATICS

P.

- V. I. Kopaneva*—The Cauchy—Goursat problem for telegraph equation with an abstract operator 99
- A. J. Petrosian*—Peak sets of classes of smooth functions on strictly pseudoconvex domain. 104
- S. A. Grigorian*—On algebras on a generated analytic disc. 108
- A. G. Kamalian*—On the noetherness of almost Toeplitz operators 112
- S. A. Negeyan*—Functional and finite equivalences of the programm schemes 115

MECHANICS

- M. A. Zadoyan, N. B. Safarian*—The final deformation of the plastically non-homogeneous hollow ball under sudden pressure action. 117

PHYSICS

- V. A. Djrbashian*—Total angular momentum of a particle 123

GEOPHYSICS

- V. B. Gamoyan, F. S. Unustan*—Space distribution of stray currents in the presence of elongated bodies. 129

MINERALOGY

- L. P. Jashvili*—On the discovery of groutite of the Debed manganese manifestation (Armenian SSR). 135

MICROBIOLOGY

- N. L. Kaladjian, E. E. Ohanian*—Nitrogenase activity by nodule bacterium in association with root callus of legume plants 139

ENTOMOLOGY

- S. M. Iablokoff-Khinzorian*—A new genus and species of ladybeetles from Sumatra (Coleoptera, Coccinellidae) 142

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 20.02.1985 г. Подписано к печати 24.04.1985 г. ВФ 00916.

Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-пзд. л. 3,15. Тираж 420. Заказ 156. Издат. 6356.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 517.937

МАТЕМАТИКА

В. И. Копанева

Задача Коши—Гурса для телеграфного уравнения
с абстрактным оператором

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 18/XI 1983)

Рассмотрим телеграфное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Au, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ —искомая функция со значениями в банаховом пространстве E , а A —линейный оператор, действующий в этом пространстве, с областью определения $D(A)$.

Задачей Коши—Гурса (¹⁻³) для уравнения (1) называется задача о нахождении его решения внутри угла $x \geq 0$, $-x \leq t \leq 0$, удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad \text{и} \quad u(x, -x) = \varphi(x). \quad (2)$$

В характеристических координатах $t_1 = \frac{x+t}{2}$, $t_2 = \frac{x-t}{2}$ эта задача формулируется так: требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} - Au = 0 \quad (3)$$

внутри угла $R = \{(t_1, t_2) : t_2 \geq t_1 \geq 0\}$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t_1=0} = \varphi(t_2), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_{t_1=t_2} = \psi(t_1). \quad (5)$$

Определение. Функция $u(t_1, t_2)$ называется решением задачи (3)—(5), если: а) $u(t_1, t_2) \in C^1(R; E)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \in C(R; E)$; б) область значений функции $u(t_1, t_2)$ содержится в $D(A)$; функция $u(t_1, t_2)$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4), (5). При этом естественно предполагается, что $\varphi(t_2) \in C([0; \infty[; E)$ и $\psi(t_1) \in C([0; \infty[; E)$. Ниже будут получены формулы для решения задачи (3)—(5) в предположении, что оператор A является производящим оператором регулярной косинус-функции (^{4,5}). Сначала рассмотрим скалярную задачу (3)—(5). Справедлива

Теорема 1. Пусть $E=R$. Если в задаче (3)–(5) $A=c^2$, где c — произвольное комплексное число, $\varphi(t_2) \in C^1[0; \infty]$, а $\psi(t_1) \in C[0; \infty]$, то решение задачи (3)–(5) существует и единственно.

Применение метода Римана дает возможность написать явную формулу, представляющую решение задачи (3)–(5) в скалярном случае. Эта формула имеет вид:

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) = & \frac{\varphi(0)R(0, 0; t_1, t_1)}{2} + \int_0^{t_1} R(0, y; t_1, t_1)\varphi'(y)dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} R(x, x; t_1, t_1)\psi(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} R(x, x; t_1, t_2)\psi(x)dx - \\ & - \int_0^{t_1} \left(\left. \frac{\partial R(x, y; t_1, t_2)}{\partial x} \right|_{x=y} - \left. \frac{\partial R(x, y; t_1, t_2)}{\partial y} \right|_{x=y} \right) \left(\frac{\varphi(0)R(0, 0; x, x)}{2} + \right. \\ & \left. + \int_0^x R(0, y; x, x)\varphi'(y)dy + \frac{1}{2} \int_0^x R(s, s; x, x)\psi(s)ds \right) dx, \end{aligned}$$

где $R(x, y; t_1, t_2)$ — функция Римана уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - c^2 u = 0$.

Напомним, что преобразование $S(t): R \rightarrow L(E)$ называется регулярной косинус-функцией, если для любых $s, t \in R$: $S(t+s) + S(t-s) = 2S(t)S(s)$ и $S(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow 0$, $t \in R$, для любого $x \in E$. Производящий оператор косинус-функции определяется формулой

$$Ax = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t^2} = S''(0)x.$$

Введем в рассмотрение следующую оператор-функцию:

$$R(x, y; t_1, t_2)\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} S(2\sqrt{(t_1-x)(t_2-y)}\eta)\psi d\eta,$$

($\psi \in E$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t_1 \geq x$, $t_2 \geq y$), которую назовем функцией Римана уравнения (3).

Лемма 1. Функция Римана обладает свойствами:

а) $R(x, y; t_1, t_2)\psi|_{t_1=x} = R(x, y; t_1, t_2)\psi|_{t_2=y} = \psi$;

б) если $\psi \in D(A)$, то

$$\frac{\partial^2 [R(x, y; t_1, t_2)\psi]}{\partial t_2 \partial t_1} - AR(x, y; t_1, t_2)\psi = 0;$$

в) если $\psi \in D(A^2)$, то

$$\frac{\partial^3 [R(x, y; t_1, t_2)\psi]}{\partial x \partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^3 [R(x, y; t_1, t_2)\psi]}{\partial t_2 \partial t_1 \partial x};$$

$$\frac{\partial^3 [R(x, y; t_1, t_2)\psi]}{\partial y \partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial^3 [R(x, y; t_1, t_2)\psi]}{\partial t_2 \partial t_1 \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \left[\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi)}{\partial x} \right]_{x=y} - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi)}{\partial y} \Big|_{x=y} \Big|_{t_1=x=y} = -A\psi.$$

Доказательство леммы 1 основано на применении свойств регулярной косинус-функции и ее производящего оператора. С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Предположим, что оператор A является производящим оператором регулярной косинус-функции $S(t)$, функция $\psi(t_1)$ непрерывна на $[0; \infty[$, принимает значения в $D(A^2)$ и $A^2\psi(t_1) \in C([0; \infty[; E)$. Тогда функция*

$$u(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [R(x, x; t_1, t_1) + R(x, x; t_1, t_2)] \psi(x) dx - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(\int_0^x R(s, s; x, x) \left[\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi(s))}{\partial x} \right]_{x=y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi(s))}{\partial y} \Big|_{x=y} \right) ds dx$$

является решением задачи (3)–(5) для случая $\psi(t_1) \equiv 0$.

При рассмотрении абстрактной задачи (3)–(5) для случая $\psi(t_1) \equiv 0$ на оператор A налагаются дополнительные условия.

Теорема 3. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.1 из (6), функция $\varphi(t_1)$ непрерывно дифференцируема на $[0; \infty[$, а $A^2\varphi'(t_1) \in C([0; \infty[; E)$. Тогда функция*

$$v(t_1, t_2) = \frac{1}{2} (R(0, 0; t_1, t_2) + R(0, 0; t_1, t_1)) \varphi(0) + \int_0^{t_1} R(0, y; t_1, t_1) \varphi'(y) dy + \\ + \int_0^{t_2} R(0, y; t_1, t_2) \varphi'(y) dy - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} R(0, 0; x, x) \left(\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi(0))}{\partial x} \Big|_{x=y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi(0))}{\partial y} \Big|_{x=y} \right) dx - \int_0^{t_1} \left(\int_0^x R(0, y_1; x, x) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi'(y_1))}{\partial x} \Big|_{x=y} - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi'(y_1))}{\partial y} \Big|_{x=y} \right) dy_1 \right) dx$$

является решением задачи (3)–(5) для случая $\psi(t_1) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 2 основано на использовании леммы 1 и существенно зависит от результатов, полученных для скалярной задачи (3)–(5).

Как показано в (7), неограниченный нормальный оператор A в гильбертовом пространстве X является производящим оператором

регулярной косинус-функции тогда и только тогда, когда существует $\omega \geq 0$ такое, что $z^2 \in \rho(A)$ для любого $z \in C$, $\operatorname{Re} z > \omega$. Очевидно, что этому условию удовлетворяет любой полуограниченный сверху самосопряженный оператор A . Заметим, что условиям теоремы 1.1 из (*) удовлетворяет любой оператор A вида $A = B^2$, где B — производящий оператор равностепенно непрерывной группы (*). В заключение приведем конкретный пример задачи (1) — (2).

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 , граница которой является поверхностью класса $C^{2+\alpha}(\alpha > 0)$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ определим оператор A следующим образом:

$$D(A) = \{f : f \in \tilde{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)\}, \quad (6)$$

$$Af = \Delta f, \quad f \in D(A). \quad (7)$$

Согласно (**) A самосопряжен и $(Ax, x) \leq 0$ для любого $x \in D(A)$. Следовательно, A является производящим оператором регулярной косинус-функции. Более того, оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.1 из (*). Действительно, $A = (i\sqrt{-A})^2$, а в силу (10) оператор $i\sqrt{-A}$ является производящим оператором равностепенно непрерывной группы. В случае, когда $E = L_2(\Omega)$, а оператор A определяется формулами (6), (7), задача (1), (2) заключается в следующем.

Требуется найти функцию $u(x, t; x_1, x_2, x_3)$, являющуюся решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ в области $x \geq 0$, $-x \leq t \leq 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ и обладающую свойствами:

а) $u(x, t; x_1, x_2, x_3)$ относительно переменных x, t представляет собой абстрактную функцию со значениями в пространстве $W_2^2(\Omega)$;

б) $\left. \frac{\partial u(x, 0; x_1, x_2, x_3)}{\partial t} \right|_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x \in [0, \infty[}} = \psi(x, x_1, x_2, x_3)$, где $\psi(x) \in C([0; \infty[; W_2^4(\Omega))$; $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\psi|_{\partial\Omega} = 0$;

в) $u(x, -x; x_1, x_2, x_3)|_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x \in [0, \infty[}} = \varphi(x, x_1, x_2, x_3)$, где $\varphi(x, x_1, x_2, x_3) \in C^1([0; \infty[; L_2(\Omega))$ и $\frac{\partial \varphi'(x)}{\partial x}$ непрерывная функция со значениями в $W_2^4(\Omega)$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$.

Из теорем 2, 3 следует существование решения описанной задачи.

Автор благодарен С. Г. Крейну за постоянное внимание к данной работе.

Воронежский лесотехнический институт

Կոշի — Գուրսայի խնդիրը արստրակտ օպերատորով հեռագրական հավասարման համար

Դիտարկվում է հեռագրական հավասարումը հետևյալ տեսքով

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Au,$$

որտեղ՝ $u(x, t) - E$ բանախյան տարածության մեջ ընդունող արժեքներով որոշվող ֆունկցիան է, իսկ A — արդ տարածության մեջ գործող $D(A)$ որոշման տիրույթով զծալին օպերատոր:

Հեռագրական հավասարման համար Կոշի — Գուրսայի խնդիր կոչվում է՝ այդ հավասարման այնպիսի լուծում գտնելը $x \geq 0$, $-x \leq t \leq 0$ անկյան մեջ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad u(x, -x) = \varphi(x):$$

Ենթադրելով, որ A — ռեզոլյար կոսինուս ֆունկցիայի ծնող օպերատոր է, ստացվել է բանաձև, որը բացահայտ տեսքով ներկայացնում է Կոշի — Գուրսայի խնդրի լուծումը $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ֆունկցիաների և հեռագրական հավասարման «Ռիմանի ֆունկցիայի» միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Наука, М., 1966. ² Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, Наука, М., 1974. ³ М. М. Смирнов, Уравнения смешанного типа, Наука, М., 1970. ⁴ М. Sova, Rozprawy Matematyczne, v. 49, p. 1—46 (1966). ⁵ H. O. Fattorini, Journal of Differential Equations, v. 5, №1 (1969). ⁶ H. O. Fattorini, Journal of Differential Equations, v. 6, №1 (1969). ⁷ D. Lutz-Lincol, Rend. Sc. fis. mat. e nat., v. 63, novembre (1977). ⁸ Р. Рухтмайер, Принципы современной математической физики, Мир, М., 1982. ⁹ Ф. Рунге, Сёкефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. ¹⁰ К. Ноцида, Функциональный анализ, Мир, М., 1967.

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

Множества пика классов гладких функций
в строго псевдовыпуклой области

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/XI 1983)

Пусть D — строго псевдовыпуклая область с регулярной границей в пространстве C^n , т. е.

$$D = \{z \in C^n : \rho(z) < 0\},$$

где вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция $\rho(z)$ определена в некоторой окрестности замыкания области $\bar{D}$ и комплексный гессиан

$$\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \bar{w}_i \bar{w}_k$$

положительно определен при всех $z \in \partial D$. Обозначим через $A^k(D)$ класс функций, голоморфных в D , у которых все производные до k -го порядка непрерывны на $\bar{D}$. Подмногообразие M на границе ∂D области называется многообразием пика для $A^k(D)$, если для каждого компакта $K \subset M$ существует функция $f \in A^k(D)$ (функция пика) такая, что $f(z) = 1$ при $z \in K$ и $|f(z)| < 1$ при $z \in \bar{D} \setminus K$. Очевидно, это условие можно заменить на

$$f(z) = 0 \text{ при } z \in K \text{ и } \operatorname{Re} f(z) > 0 \text{ при } z \in \bar{D} \setminus K. \quad (1)$$

В работе Г. М. Хенкина и А. Е. Туманова ⁽¹⁾ показано, что многообразие пика M для $A(D) = A^0(D)$ в каждой точке $z \in M$ должно удовлетворять условию

$$T_z(M) \subset T_z^c(\partial D). \quad (2)$$

Здесь $T_z(M)$ — пространство, касательное к M в точке z , $T_z^c(\partial D)$ — комплексное касательное пространство к ∂D в точке z , т. е.

$$T_z^c(\partial D) = \left\{ z \in C^n : \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_k} = 0 \right\}.$$

В той же работе доказано, что если M принадлежит классу гладкости C^3 , то условие (2) является и достаточным, чтобы M было многообразием пика для $A(D)$. Впоследствии в работе У. Рудина ⁽²⁾ условие на M было ослаблено: достаточно, чтобы M принадлежало C^1 . Случай $A^\infty(D)$ исследован в ⁽³⁾ и ⁽⁴⁾.

Настоящая работа посвящена исследованию многообразий пика для $A^k(D)$, $2 \leq k < \infty$. Доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Если подмногообразие M класса $C^k (k \geq 3)$ на границе строго псевдовыпуклой области D в каждой точке $z \in M$ удовлетворяет условию (2), то M является многообразием пика для $A^{k-1}(D)$.

При доказательстве используется схема, примененная в ⁽¹⁾ и ⁽³⁾. Для заданного компакта $K \subset M$ сперва строится так называемая „почти аналитическая“ функция пика $F(z)$.

Теорема 2 (см. ⁽¹⁾, а также ⁽⁴⁾). Пусть M — то же, что в теореме 1, K — компакт на M . Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существует функция $F(z)$, $F \in C^k(\Omega)$, такая, что

а) $F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in K$;

б) $\bar{\partial}F = 0$ на M , более того, $\bar{\partial}F(z) = o(d(z, M)^{k-1})$, где $d(z, M)$ — расстояние между z и M ;

в) $\operatorname{Re} F(z) \geq cd(z, M)^2$ при $z \in \bar{D} \cap \Omega$. Здесь c — константа, зависящая только от области D ;

$$\text{г) } \operatorname{grad} \operatorname{Re} F(z) = -\frac{\chi_z}{\|\chi_z\|^2}, \quad \operatorname{grad} \operatorname{Im} F(z) = -\frac{\tau_z}{\|\tau_z\|^2}, \quad \text{где } \chi_z = \operatorname{grad} \rho(z), \\ \tau_z = i\chi_z.$$

Пусть функция $\lambda(z) \in C^\infty(\Omega)$ финитна в Ω , $\lambda(z) = 1$ в некоторой окрестности компакта K и $0 \leq \lambda(z) \leq 1$. Рассмотрим форму $g(z) = \frac{\bar{\partial}\lambda(z)}{F(z)}$.

Лемма. Уравнение $\bar{\partial}u = g$ в области D имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\bar{D} \setminus M$ и удовлетворяющее оценке

$$D^p u(z) = o(d(z, M)^{k-|p|-3}). \quad (3)$$

Здесь $p = (p_1, \dots, p_{2n})$ — целочисленный вектор, $|p| = \sum_{k=1}^{2n} p_k$ и

$$D^p u(z) = \frac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \cdot \partial \bar{z}_{n+1}^{p_{n+1}} \dots \partial \bar{z}_{2n}^{p_{2n}}}.$$

Решение $u(z)$, допускающее оценку (3), выписывается явной формулой, полученной в ⁽⁵⁾:

$$u(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{\partial D \times [0,1]} g(\zeta) \wedge \omega'(\eta) \wedge \omega(\zeta) - \int_D g(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\},$$

где $\omega'(\eta) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \eta_k d\eta_{11} \wedge \dots \wedge d\eta_{k-1} \wedge d\eta_{k+1} \wedge \dots \wedge d\eta_n$,

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n, \quad \eta_k = (1-t) \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^2} + t \cdot \frac{P_k(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)},$$

$\Phi(\zeta, z)$ — ядро Хенкина — Рамиреца и $\sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) P_k(\zeta, z) \equiv 1$. Оценка

(3) основана на том, что форма

$$g = \bar{\partial} \frac{\lambda}{F} = \frac{1}{F} \bar{\partial} \lambda - \lambda \frac{\bar{\partial} F}{F^2}$$

бесконечно дифференцируема на $\bar{D} \setminus M$, а при подходе к M имеет

степенной рост. А именно, из б) — г) следует, что $g(z) = o(d(z, M)^{k-\delta})$ при $z \rightarrow M$ вдоль комплексного касательного направления и $g(z) = o(d(z, M)^{k-3})$ при $z \rightarrow M$ вдоль комплексной нормали, т. е. плоскостности векторов χ и τ .

Доказательство теоремы 1. Пусть $K \subset M$, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что в теореме 2 и лемме. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z).$$

Имеем $\bar{\partial}v = \bar{\partial} \frac{\lambda}{F} - \bar{\partial}u = g - \bar{\partial}u = 0$, т. е. $v(z)$ голоморфна в области D . Далее,

$$\operatorname{Re} v = \lambda \frac{\operatorname{Re} F}{|F|^2} - \operatorname{Re} u. \quad (4)$$

Из (3) при $k \geq 3$ и $p = 0$ следует, что $u(z) = o(d(z, M))$, т. е. $u(z)$ ограничена на $\bar{D}$. Поэтому с учетом в) и (4) имеем

$$\operatorname{Re} v(z) \geq -\max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re} u(z) > -\infty.$$

Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно предположить, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0, \quad z \in \bar{D} \setminus K. \quad (5)$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \quad (6)$$

является искомой функцией пика для компакта K . Прежде всего, $f(z)$ голоморфна в D и, как следует из (5), $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $z \in \bar{D} \setminus K$. Из (6) следует, что нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. с множеством K (см. а)). Таким образом, f удовлетворяет условиям (1). Остается показать, что $f \in A^{k-1}(D)$. Функция f на множестве $\bar{D} \setminus K$ принадлежит классу C^k , поэтому проверять непрерывность $D^p f$ ($|p| \leq k-1$) следует лишь в окрестности K , где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Взяв для простоты случай $p = (k-1, 0, \dots, 0)$, получаем

$$D^p f = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+1} m!}{(1 - uF)^{m+1}} C_{k-1}^m C_m^j D^{k-1-m} F \cdot D^{m-j} F \cdot D^j u. \quad (7)$$

Из оценок (3) следует, что при $j \leq k-2$ $D^j u$ непрерывны на $\bar{D}$. А те слагаемые в (7), которые содержат $D^{k-2} u$ или $D^{k-1} u$, имеют соответствующие сомножители F и F^2 , которые „гасят“ рост этих производных.

Ереванский государственный университет

Պիկի բազմությունները խիստ պսևդոմոտոպիկ տիրույթում ռդորկ
ֆունկցիաների դասերի ճամար

Ինքուք D -ն խիստ պսևդոմոտոպիկ տիրույթ է C^n տարածության մեջ,
 M -ը նրա ∂D եզրի վրա ենթաբազմաձևություն է, որը լուրաքանչյուր $z \in M$
կետում բավարարում է $T_z(M) \subset T_z(\partial D)$ պայմանին:

Այստեղ $T_z(M)$ -ը M բազմաձևության շոշափող տարածությունն է,
իսկ $T_z(\partial D)$ -ն ∂D -ի կոմպլեքս շոշափող տարածությունն է z կետում:
 $A^*(D)$ -ով նշանակվում է D -ում հոլոմորֆ և $\bar{D}$ -ում միջին k -րդ կարգի ան-
ընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը:

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե M -ը պատկանում է C^k դասին,
ապա կամայական $R \subset M$ կոմպակտ բազմություն հանդիսանում է պիկի բազ-
մություն $A^{k-1}(D)$ -ի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. M. Henkin, A. E. Tumanov, C. R. Ecole d'été à Drogo-bytch, 1974. ² W. Rudin, Pacific J. Math., v. 75 267—279 (1978). ³ M. Hakim, N. Sibony, Duke Math. J. v. 45, 601—617 (1978). ⁴ J. Chaumat, A. M. Chollet, Ann. Inst. Fourier, v. 29, 171—200 (1979). ⁵ Г. М. Хенкин, Мат. сб., т. 82, № 2 (1970).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Об алгебрах на обобщенном аналитическом диске

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 29/XI 1983)

1°. Пусть Q —аддитивная группа рациональных чисел, снабженная дискретной топологией, $Q_+ = \{x \in Q; x \geq 0\}$ —подполугруппа всех неотрицательных чисел группы Q , а G —компактная группа, являющаяся группой характеров группы Q .

На локально компактном пространстве Ω , полученном из декартова произведения $Q \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$, рассмотрим систему φ^x , $x \in Q_+$ непрерывных функций, определенных следующим образом: для $\omega = (\alpha, \rho) \in \Omega$, $\alpha \in G$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi^x(\omega) = \alpha(x) \cdot \rho^x$, $x \in Q_+$. Множества $\Omega_r = \{(\alpha, \rho) \in \Omega; \rho \leq r\}$ и $\Omega_r^0 = \{(\alpha, \rho) \in \Omega; \rho < r\}$ будем называть, соответственно, замкнутым и открытым обобщенным диском радиуса r . Очевидно, $\Omega_r^0 = \text{int } \Omega_r$.

Каждое φ^x , $x \in Q_+$ осуществляет непрерывное отображение из Ω_1^0 на открытый единичный круг D . Пусть H^* —классическая алгебра ограниченных аналитических функций на D и $H^x = \{f \cdot \varphi^x; f \in H^*\}$, $x \in Q_+$. Можно показать, что H^x , $x \in Q_+$ совпадает с пространством тех непрерывных ограниченных функций на Ω_1^0 , которые локально аппроксимируются линейными комбинациями функций вида φ^{n_x} , где $n_x \in \mathbb{Z}_+$ —полугруппа неотрицательных целых чисел. Полученное таким образом семейство $\{H^x\}_{x \in Q_+}$ алгебр удовлетворяет следующему условию:

$H^{x_2} \subset H^{x_1}$ тогда и только тогда, когда

$$x_2 = n x_1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

Обозначим через H банахово пространство, полученное с помощью равномерного замыкания на Ω_1^0 линейных комбинаций функций из $\{H^x\}_{x \in Q_+}$. Поскольку для любых двух чисел $x, y \in Q_+$ найдется $z \in Q_+$ такое, что $x = n_1 z$, $y = n_2 z$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$, то (в силу (1)) $H^x \cdot H^y \subset H^z$, и поэтому H является также банаховой алгеброй.

Пусть A и B —алгебры всех тех непрерывных функций на Ω_1 и Ω_1^0 , соответственно, которые локально на этих множествах аппроксимируются линейными комбинациями φ^x , $x \in Q_+$. Так как

$$\{\varphi^x\}_{x \in Q_+} \subset H, \text{ а } \{H^x\}_{x \in Q_+} \subset B, \text{ то } A \subset H \subset B.$$

Т. В. Тонев показал (1), что у алгебры H нет короны, т. е. Ω_1^0 плотно в пространстве максимальных идеалов алгебры H , и на недавнем конгрессе математиков в Варшаве им же был поставлен воп-

рос о совпадении алгебр H и B . Ответу на этот вопрос и посвящена данная заметка.

2°. Опишем некоторые свойства алгебры H .

Лемма 1. Для любого $x_0 \in Q_+$, $x_0 \neq 0$ банахова алгебра H совпадает с $[A, H^{x_0}]$ — банаховой алгеброй, полученной из равномерного замыкания на $\Omega_1^?$ алгебры, порожденной функциями из A и H .

Доказательство. Пусть $x_1 = x_0/2$ и $G_0 = \{\alpha \in G; \alpha(x_0) = 1\}$, $G_1 = \{\alpha \in G; \alpha(x_1) = 1\}$. Очевидно, $G_0 \supset G_1$ и фактор-группа G_0/G_1 имеет порядок 2. Поэтому найдется $\alpha_0 \in G_0$ такое, что

$$\alpha_0(x_1) = -1. \quad (2)$$

Определим теперь действие группы G на Ω ; для $g \in G$, $\omega = (\alpha, \rho) \in \Omega$, $g\omega = (g\alpha, \rho)$. Пусть P_1 и P_2 — такие два оператора на H^{x_1} , что $P_1(f) = \frac{f - f_{\alpha_0}}{2}$, $P_2(f) = \frac{f + f_{\alpha_0}}{2}$ где f_{α_0} — сдвиг функции $f \in H^{x_1}$ на $\alpha_0 \in G_0$. Очевидно, P_1 и P_2 непрерывны. Так как каждую функцию $f \in H^{x_1}$ можно представить формально в виде ряда $\sum a_n \varphi^{n x_1}$ и

$$\varphi^{n x_1}(\alpha_0 \omega) = \begin{cases} \varphi^{n x_1}(\omega), & n = 2k \\ -\varphi^{n x_1}(\omega), & n = 2k + 1, \end{cases}$$

то P_2 отображает H^{x_1} на H^{x_0} , а P_1 отображает H^{x_1} на $\varphi^{x_1} \cdot H^{x_0}$. Следовательно, $H^{x_1} = H^{x_0} \oplus \varphi^{x_1} \cdot H^{x_0}$ ($\oplus$ — прямая сумма). Более того, если $y \in Q_+$ такое, что $x_0 = ny$, то $H^y = H^{x_0} \oplus \varphi^y \cdot H^{x_0} \oplus \dots \oplus \varphi^{(n-1)y} \cdot H^{x_0}$. Поэтому

$$H^y \subset [A, H^{x_0}]. \quad (3)$$

Пусть теперь $x_n = \frac{x_0}{n}$, $n = 1, \dots$. Подсемейство $\{H^{x_n}\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет следующему условию: для всякого $H^x \in \{H^x\}_{x \in Q_+}$ найдется такое n , что $H^{x_n} \supset H^x$ (достаточно взять n такое, что $\frac{x_1 \cdot n}{x_0} \in \mathbb{Z}$ и применить (1)). Следовательно, каждая подалгебра из $\{H^x\}_{x \in Q_+}$ содержится, в силу (3), в $[A, H^{x_0}]$. Поэтому $H = [A, H^{x_0}]$. Лемма доказана.

Над каждой точкой компакта $G \times \{1\} \subset \Omega_1$ существует слой — часть пространства максимальных идеалов алгебры H . Все эти слои гомеоморфны, так как один слой получается из другого с помощью действия группы G на $G \times \{1\}$. Обозначим через M_α слой над точкой $\omega = (\alpha, 1) \in G \times \{1\}$, а через M — часть пространства максимальных идеалов алгебры H^∞ , расположенной над некоторой точкой единичной окружности.

Лемма 2. Пространства M_α и M гомеоморфны, а сужения гельфандовских представлений H на M_α и H^∞ на M изометрически изоморфны.

Пусть U ($0 \notin U$) — полиномиально выпуклый компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D — открытый единичный круг, $W = U \cap D$ и $W_0 = \{\omega \in \Omega_0^0; \varphi^{x_0}(\omega) \in W\}$. Обозначим через H_W и $H_W^{x_0}$ равномерное замыкание на W_0 элементов из H и H^x , соответственно; через H_W^∞ — равномерное замыкание сужения на W элементов из H^∞ . Для произ-

вольного множества E через $\bar{E}$ будем обозначать замыкание множества E в соответствующей топологии.

Лемма 3. Пусть $G_0 = \{z \in G; z(x_0) = 1\}$. Тогда алгебра $H_{\bar{W}}$ изометрически изоморфна банаховой алгебре ограниченных функций на декартовом произведении $W \times G_0$, порожденной равномерным замыканием на $W \times G_0$ линейных комбинаций функций вида $f \cdot \psi$, где $f \in H_{\bar{W}}$, $\psi \in C(G_0)$ — алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G_0 .

Таким образом, не теряя общности, можно считать, что $W_0 = W \times G_0$ и, кроме того, сужение H на множество вида $W \times \{z\}$, $z \in G_0$ есть в точности $H_{\bar{W}}$.

Вместо W возьмем теперь следующее множество: пусть $\omega_0 = (z_0, 1) \in \Omega_1$ и U — диск с радиусом $1/2$ в комплексной плоскости и с центром в точке $\varphi^{-1}(\omega_0)$. Пусть теперь $W = U \cap D$ и $W_0 = \{\omega \in \Omega_1; \varphi^{-1}(\omega) \in W\}$. Поскольку $W_0 = W \times G_0$ и $\omega_0 \in \bar{W}_0$, найдутся $\omega_0 \in \bar{W}$ и $\beta_0 \in G_0$ такие, что $\omega_0 = \omega_0 \times \beta_0$.

Следствием лемм 2 и 3 является

Лемма 4. Пусть M_{ω_0} — часть пространства максимальных идеалов алгебры H , расположенная над точкой $\omega_0 = (z_0, 1)$ и $E = W \times \{\beta_0\}$. Тогда для каждой точки $t \in M_{\omega_0}$ и любой функции $f \in H$ найдется такая последовательность точек $e_n \in E$, что $\lim f(e_n) = t(f)$ ($t(f)$ — значение f в $t \in M_{\omega_0}$).

Теорема 1. Алгебра H строго содержится в алгебре B .

Метод, разработанный для доказательства теоремы 1, позволяет получить один результат для аналитических почти-периодических функций в левой полуплоскости.

Пусть R — аддитивная группа вещественных чисел, $R_+ = \{x \in R; x \geq 0\}$ и P — подполугруппа в R_+ . Пусть $S = \{z \in C, \operatorname{Re} z < 0\}$ — левая полуплоскость в комплексной плоскости C и $H[P]$ — алгебра всех ограниченных аналитических функций в S , которые формально можно представить в виде ряда Дирихле с показателями из P , т. е. $f \sim \sum a_n e^{\lambda_n z}$, $\lambda_n \in P$, $f \in H[P]$. Алгебра $H[P]$ — банахова в $\sup$ -норме на S . Пусть Δ — семейство всех характеров полугруппы P . Можно показать, что Δ — компактная абелева полугруппа, и алгебра $H[P]$ изометрически изоморфна некоторой алгебре функций, определенных в Δ (3).

Скажем, что у $H[P]$ локально нет „короны“, если для некоторой точки $z_0 = i y_0$ на мнимой оси в S и ограниченной окрестности U точки z_0 замыкание $S \cap U$ в топологии пространства максимальных идеалов алгебры $H[P]$ содержит слой M_{z_0} — часть пространства максимальных идеалов алгебры $H[P]$, находящейся над точкой.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны.

- у $H[P]$ локально нет короны;
- для любых $t \in M_{z_0}$, $f \in H[P]$ найдется семейство $\{z_n\}_1 \subset S \cap U$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = t(f)$;
- полугруппа P изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы Z_+ .

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Հանրահաշիվների ընդհանրացված անալիտիկ շրջանում

Դիցուք Q -ն դիսկրետ տոպոլոգիայով օժտված ռացիոնալ թվերի ադդիտիվ խումբ է, իսկ G -ն նրա բնութագրերի խումբն է:

$\Omega = G \setminus \{0\} / G \setminus \{0\}$ լոկալ կոմպակտ տարածություն վրա դիտակվում է

$$\varphi^x(\omega) = \alpha(x) \rho^x(\omega) = (x, \rho) \quad x \in Q_+ = \{x \in Q, x \geq 0\}$$

Ֆունկցիաների ընտանիք: Յուրաքանչյուր $\varphi^x(x \in Q_+)$ ֆունկցիա արտապատկերում է Ω տարածությունը բաց միավոր շրջանի վրա և հետևաբար $H^x = \{f \circ \varphi^x; f \in H\}$ հանրահաշիվ է, որտեղ H^x միավոր շրջանում սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվ է: Նշանակենք H -ով H^x -երի ($x \in Q_+$) ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաների հավասարաչափ փակումը Ω -ում և B -ով Ω -ի վրա անընդհատ և սահմանափակ ալն ֆունկցիաների տարածությունը, որոնք լոկալ մոտարկվում են H^x -երի ($x \in Q_+$) ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաներով: Ակնհայտ է, որ $H \subset B$:

Մաթեմատիկոսների Վարչավայի կոնգրեսում Տ. Վ. Տոնեևի կողմից դրված էր հետևյալ հարցը, համընկնում են արդյո՞ք այդ երկու հանրահաշիվները:

Հոդվածում պարունակվում է այդ հարցի բացասական պատասխանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ T. V. Tonev, Proceedings of the conference on analytic Functions, 1979. ² K. Hoffman, T. A. M. S. v. 87, 447—466 (1958). ³ R. Arens, I. Singer, T. A. M. S. v. 81, №2 (1956).

УДК 517.988

МАТЕМАТИКА

А. Г. Камалян

О нетеровости почти теплицевых операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/VII 1984)

В данной работе изучаются операторы парного типа, порожденные матрицами $\|s_{n,m}\|$, элементы которых удовлетворяют тождеству

$$s_{n+1,m+1} - s_{n,m} = c_n d_m, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Эти операторы содержат в себе теплицевы (так как для последних имеет место $s_{n+1,m+1} - s_{n,m} = 0$) и являются дискретным аналогом „почти разностных“ операторов (см. (1)).

1°. Пусть Γ — единичная окружность комплексной плоскости. Обозначим через $PC(\Gamma) = PC$ алгебру всех кусочно-непрерывных и непрерывных слева функций на Γ . Как известно (см. например (2), с. 75), замыкание этой алгебры по норме $L_\infty(\Gamma)$, совпадает с множеством $\overline{PC}$ линейчатых функций на Γ .

Каждой функции $a \in \overline{PC}$ сопоставим (см. (2)) функцию $a^p: \Gamma \times [0, 1] \rightarrow C(1 < p < \infty)$, определенную равенством

$$a^p(t, \mu) = a(t+0)f_p(\mu) + a(t-0)(1-f_p(\mu)) \quad (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1),$$

где $f_p(\mu) = \mu$, если $p=2$, и $f_p(\mu) = \sin(\theta\mu) \exp[i\theta(\mu-1)]/\sin\theta$ при $\theta = (p-2)\pi/p$, если $p \neq 2$.

Функция $a \in \overline{PC}$ называется $\{p\}$ -неособенной, если $a^p(t, \mu) \neq 0$ ($t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1$). Для $\{p\}$ -неособенной функции $a \in PC$ $\{p\}$ -индексом (обозначается $\text{ind } a^p$) называется индекс Коши (см. (2), с. 79) кривой, совпадающей с образом $a(t, \mu)$ ($t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1$) и ориентированной естественным способом. Пусть $a \in \overline{PC}$, $a_n \in PC$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\|_{L_\infty} = 0$. Нетрудно проверить, что, если функция a $\{p\}$ -неособенная, то начиная с некоторого n функции a_n также являются $\{p\}$ -неособенными и числа $\text{ind } a_n^p$ стабилизируются. Положим $\text{ind } a^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } a_n^p$.

Обозначим через $Fl_p(1 \leq p \leq 2)$ банахово пространство всех функций $f \in L_1(\Gamma)$, коэффициенты Фурье $\{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ которых удовлетворяют условию $\|f\|_{Fl_p} = \left(\sum_{j=-\infty}^\infty |f_j|^p \right)^{1/p} < \infty$.

Множество функций $a \in L_\infty(\Gamma)$, для которых оператор aI умножения на функцию a ограничен в пространстве Fl_p , будем обозначать через $R_p(1 \leq p \leq 2)$. В случае $2 \leq p \leq \infty$ через R_p будем обозначать множество $R_q(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Условимся еще о следующих обоз-

начениях. Пусть Ω некоторое подмножество $[1, 2]$ и $p \in (1, 2)$; положим

$$R_{\pm} = \bigcap_{p \in \Omega} R_p, \quad R_{<p>} = \bigcup_{\substack{p \in \Omega \\ p > 0}} R_{(p-1, p+1)}, \quad C_{<p>} = C(\Gamma) \cap R_{<p>}, \quad \overline{PC}_{<p>} = \overline{PC} \cap R_{<p>}.$$

2°. Пусть $h_k(t), c_k(t), d_k(t) \in L_{\infty}(\Gamma)$ и $\{h_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}, \{d_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}, \{c_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $(k=1, 2)$ — их коэффициенты Фурье. Введем функции

$$a(t) = h_1(t) + c_1(t)d_1(t^{-1}), \quad b(t) = h_2(t) + c_2(t)d_2(t^{-1}). \quad (2)$$

Обозначим через L и L' операторы, определенные в $l_p (1 \leq p \leq \infty)$ соответственно следующими системами уравнений:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{n,m} y_m = r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (3)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s'_{n,m} y_m = r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (4)$$

где $s_{n,m}(s'_{n,m}) = h_{n-m}^1 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n+k}^1 d_{m+k}^1$ при $m(n) \geq 0$ и $s_{n,m}(s'_{n,m}) = h_{n-m}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k}^2 d_{m+k}^2$ при $m(n) < 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть функции $h_k, c_k \in \overline{PC}_{<p>} (h_k, d_k \in \overline{PC}_{<p>})$, $d_k \in C_{<p>} (c_k \in C_{<p>})$ ($k=1, 2; 1 < p < \infty$). Для того чтобы оператор $L(L')$ был нетеровым в пространствах $l_p (1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t+0)b(t-0)f_q(\mu) + a(t-0)b(t+0)(1-f_q(\mu)) \neq 0 \quad (5)$$

$$(|l|=1, 0 \leq \mu \leq 1, p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Если условие (5) выполнено и $g=a/b$, то

$$\text{ind } L = -\text{ind } g^q (\text{ind } L' = -\text{ind } g^q). \quad (6)$$

Доказательство теоремы основывается на сведениях операторов L и L' к сингулярным интегральным операторам в пространствах Fl_p (см. гл. XIV (3)).

Заметим, что теорема остается справедливой и в случае одностороннего уравнения типа Винера—Хопфа; при этом в формулах (5) и (6) необходимо брать $b(t) \equiv 1$.

3°. В работах (4,5) рассматривался оператор типа Винера—Хопфа вида

$$(Uy)_n = y_n - e^{i\omega n} \sum_{m=0}^{\infty} v_{n,m} y_m, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $v_{n,m} = u_{n-m}$ — элементы матрицы, а $\omega/2\pi$ либо рациональное число, либо иррациональное число, медленно приближаемое рациональными числами, т. е. $|\omega/2\pi - m/n| > C/h^1$ для любых целых $m, n > 0$ (C, γ постоянные, зависящие только от ω).

Здесь мы рассмотрим более общий случай, когда в уравнении

(7) $\tau_{n,m}$ удовлетворяют тождеству (1), что эквивалентно представлению

$$\tau_{n,m} = h_{n-m} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n-k} d_{m+k}, \quad (8)$$

где $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ являются коэффициентами Фурье функций $h(t)$, $c(t)$, $d(t)$.

Введем функцию

$$a(t) = h(t) + c(t)d(t^{-1}). \quad (9)$$

На основе результатов ^(4,5) доказывается следующая

Теорема 2. Пусть имеет место одно из следующих условий:

а) $\omega/2\pi$ — рациональное число, $\omega/2\pi = r/m$; $(r, m) = 1$;

б) $\omega/2\pi$ — иррациональное число, медленно приближаемое рациональными.

Для того чтобы оператор U вида (7), (8) был нетеровым в пространствах $l_{p,\pm}$ ($1 < p < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы в

случае а) $\varphi(t) = 1 - \prod_{k=0}^{m-1} a(te^{i\omega k})$, при этом индекс χ оператора U вы-

числяется по формуле $\chi(U) = -1/m \operatorname{Ind} \varphi(t)$; в случае б): $\rho_a(t) =$

$$\stackrel{\text{def}}{=} 1/2\pi \int_0^{2\pi} \ln |a(e^{i\theta})| d\theta \neq 0, \text{ при этом } \chi(U) = \begin{cases} 0 & \text{если } \rho_a(t) < 0 \\ -\operatorname{Ind} a(t) & \text{если } \rho_a(t) > 0 \end{cases}.$$

Аналогичный результат может быть получен и для более общих операторов (типа парных).

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ՔԱՄԱԴՅԱՆ

Համարյա տյուրիցյան օպերատորների նյութերության մասին

Աշխատանքի 1° — 2° կետերում դիտարկվում են դույզ տիպի դիսկրետ օպերատորներ, որոնք ծնված են $\|S_{n,m}\|$ համարյա տյուրիցյան մատրիցաներով, այսինքն՝

$$S_{n+1, m+1} - S_{n,m} = c_n d_m \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Այդպիսի օպերատորների համար գտնված են նյութերության պայմանները և տրվում են ինդեքսի հաշվման բանաձևեր:

Խնդիրը դիտարկվում է l_p ($1 < p < \infty$) տարածություններում գործակիցների գծավոր ֆունկցիաների դասում (տես 1°):

Այնուհետև (3°) ուսումնասիրվում է Վիննի—Հոպֆի տիպի (7) օպերատորը և ընդհանրացվում են ^(4,5) աշխատանքների արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Б. Нерсисян, Г. А. Чернявская, ДАН АрмССР, т. 79, № 1 (1984). ² Н. Бурбаки, Функции действительного переменного, Наука, М., 1965. ³ И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в теорию одномерных сингулярных операторов, Штеница, Кишинев, 1973. ⁴ Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, ДАН СССР, т. 200, № 1 (1971). ⁵ Н. К. Карапетянц, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974).

УДК 519.681

МАТЕМАТИКА

С. А. Нигиян

О функциональной и конечной эквивалентностях схем программ

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 5/X 1984)

Теория схем программ, к которой относится данная работа, занимается изучением свойств программ посредством обращения к их моделям: они называются схемами программ (¹).

Каждая схема программ представляет собой множество программ; программы, охватываемые одной схемой, получаются из нее посредством интерпретации входящих в схему функциональных и предикатных символов.

Важное место в проблематике теории схем программ принадлежит изучению функциональной и конечной эквивалентностей схем. Две схемы называются функционально эквивалентными (далее эквивалентными), если, какой бы ни была интерпретация входящих в них символов, она приводит одну и другую к программам, вычисляющим совпадающие функции. Две схемы называются конечно эквивалентными (далее к-эквивалентными), если в определении эквивалентности множество всех интерпретаций заменяется множеством конечных интерпретаций. Очевидно, что из эквивалентности схем следует их к-эквивалентность, но обратное, вообще говоря, неверно (¹).

Говорят, что отношение эквивалентности компактно в некотором классе схем, если в данном классе схем отношения эквивалентности и к-эквивалентности совпадают. Известно, что отношения эквивалентности и к-эквивалентности являются неразрешимыми в классе всех схем (¹).

В теории схем программ изучаются следующие свойства классов схем: 1) разрешимость отношения эквивалентности; 2) разрешимость отношения к-эквивалентности; 3) компактность отношения эквивалентности (см., например, (¹⁻³)).

Каждое из отмеченных трех свойств удовлетворяет следующему условию: класс схем, обладающий данным свойством, имеет бесконечное дополнение. Свойства классов схем, удовлетворяющие этому условию, назовем α -свойствами.

Обычно изучение некоторого α -свойства сопровождается выделением различных подклассов схем и исследованием того, обладает ли данный класс α -свойством или нет.

Из теоремы, приводимой ниже, следует: каким бы ни было α -свойство классов схем программ, не существует алгоритма, который бы по всякому эффективно выделенному классу схем отвечал на вопрос,

обладает ли данный класс α -свойством или нет. Отсюда следует, что процесс выделения классов схем, обладающих некоторым α -свойством, бесконечен.

Для формулировки теоремы введем некоторые понятия, которые, как правило, берутся из ⁽⁴⁾.

Обозначим через N множество натуральных чисел. Говоря «множество», мы будем понимать некоторое подмножество множества N . Дополнение множества A есть разность $N \setminus A$.

Нам рассматриваются функции, область определения и множество значений которых являются подмножествами множества N . Функцию, область определения которой совпадает с N , а множество значений входит в $\{0,1\}$, назовем характеристической функцией (х. ф.). Каждая х. ф. определяет некоторое множество чисел, а именно то множество, на котором она равна 1.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_x, \dots$ — гёделева нумерация одноместных частично-рекурсивных функций (ч. р. ф.). $X = \{x | \varphi_x = \text{х. ф.}\}$.

Множество $P \subseteq X$ назовем свойством рекурсивных множеств, если $P \neq \emptyset$, и из $x \in P$ и $\varphi_x = \varphi_y$ следует $y \in P$.

Теорема. Пусть P свойство рекурсивных множеств, такое, что если $x \in P$, то множество, определяемое х. ф. φ_x , имеет бесконечное дополнение, тогда:

1) класс всех одноместных функций ψ , область определения которых содержит множество X и таких, что $\psi(x) = 1$, если $x \in P$, и $\psi(x) = 0$, если $x \in X \setminus P$, не содержит ч. р. функции;

2) P — продуктивно.

Отметим, что кроме рассмотренных нами трех свойств классов схем программ свойствами, удовлетворяющими требованиям теоремы, будут и такие свойства, как разрешимость всюду определенности, пустоты и многие другие, что дает представление о широте сферы ее применения.

Ереванский государственный университет

Ս. Ա. ՆԻԳԻՅԱՆ

Մաթեմատիկական ֆունկցիոնալ և վերջավոր
համարժեքությունների մասին

Ցույց է տրված, որ ինչպիսին էլ լինի ծրագրերի սխեմաների դասերի հատկությունը, որով օժտված չեն վերջավոր լրացումով սխեմաների դասերը, գոյություն չունի ալգորիթմ, որը յուրաքանչյուր էֆեկտիվ ձևով առանձնացված սխեմաների դասի համար որոշի, օժտված է այդ դասը տվյալ հատկությամբ թե ոչ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. C. Lukham, D. M. Park, M. S. Paterson, J. Computer and System Sciences, № 4, 1970. ² С. А. Нугиян, Программирование, № 5, 1979. ³ С. А. Нугиян, Молодой научный работник, Ереван, ЕГУ, 2(22), 1975. ⁴ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, М., 1972.

М. А. Задоян, Н. Б. Сафарян

**Конечная деформация пластически-неоднородной
 полой сферы при внезапном воздействии давлений**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 15/II 1984)

Исследование пластически-неоднородных тел при динамических воздействиях впервые проведено в работах Х. А. Рахматулина ^(1,2), где исходя из идеально-пластической схемы предел текучести принимается переменным по длине цилиндрического стержня. В работах ⁽³⁻⁹⁾ в основном рассматриваются идеально-пластические и линейно-упрочняющиеся среды при различных граничных и начальных условиях. Подробный анализ исследований динамических задач пластически-неоднородных тел дан в обзорных статьях Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро ⁽¹⁰⁾, Н. Кристеску ⁽¹¹⁾, в монографии В. Ольшака, Я. Рыхлевского, В. Урбановского ⁽¹²⁾.

1. В настоящей статье рассматривается полая сфера из пластически-неоднородного по радиусу упрочняющегося по степенному закону несжимаемого материала при внезапном воздействии на внутреннюю поверхность большого давления, которое в дальнейшем остается постоянным. Вследствие центральной симметрии задачи единственным отличным от нуля компонентом перемещения будет радиальный компонент $-u(r, t)$.

Дифференциальное уравнение движения в сферических координатах при конечных деформациях имеет вид

$$\left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) (\sigma_r - \sigma_\theta) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

закон упрочнения материала принимаем в виде

$$\sigma_0 = K(r) \epsilon_0^m, \quad (2)$$

$$\epsilon_0 = \frac{2}{3} (\epsilon_\theta - \epsilon_r); \quad \sigma_0 = \sigma_\theta - \sigma_r.$$

где m —параметр, а $K(r)$ —известная из эксперимента функция, характеризующие неоднородность материала.

Зависимости между деформациями, перемещениями и напряжениями имеют вид

$$\epsilon_r = \ln \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right); \quad \epsilon_\varphi = \epsilon_\theta = \ln \left(1 + \frac{u}{r}\right); \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta; \quad (3)$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon = \frac{2}{3} K(r) \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_r(r, \theta); \quad \varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta).$$

Из условия несжимаемости $\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 0$ определяем перемещение

$$u(r, t) = \sqrt[3]{r^3 + a^3 \psi(t)} - r, \quad (4)$$

где $\psi(t)$ — неизвестная функция времени, которая определяется в дальнейшем.

Если ввести обозначение $x = r^3/a^3$, то с учетом соотношений (3) и (4) дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m \left(1 + \frac{\psi}{x}\right) = \\ = \frac{\rho a^2}{9} \left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} \psi'' - \frac{2}{3} (x+\psi)^{-\frac{7}{3}} \psi'^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегрируя и используя граничное условие на внутренней поверхности

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad x=1, \quad (6)$$

где p — постоянное во времени значение давления, получаем выражение σ_r через неизвестную функцию $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_r = -p + \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \int_1^x \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln \left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx + \\ + \frac{\rho a^2}{18} \left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}} \right] \psi'^2 - \frac{\rho a^2}{3} \left[(x+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}} \right] \psi''. \end{aligned} \quad (7)$$

Из условия на внешней поверхности

$$\sigma_r = 0 \quad x = \mu = b^3/a^3 \quad (8)$$

получаем уравнение относительно $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \left[(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}} \right] \psi'' - \frac{1}{6} \left[(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}} \right] \psi'^2 - \\ - \frac{2}{\rho a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^m \int_1^\mu \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m \left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx + \frac{3p}{\rho a^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем обозначение

$$\psi'^2 = \omega(\psi). \quad (10)$$

Уравнение (9) сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{3} \frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} \omega + \\ + \frac{\frac{6p}{\rho a^2} - \frac{4}{\rho a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^m \int_1^\mu \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m \left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx}{[(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}]} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае закона неоднородности

$$K(r) = k \left(\frac{a}{r} \right)^3 \quad (12)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{3} \frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} \omega + \\ + \frac{\frac{6p}{\rho a^2} + \frac{4k}{\rho a^2} \left(\frac{2}{3} \right)^m}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} \frac{1}{m+1} \frac{1}{\psi} \left[\ln^{m+1} \left(1 + \frac{\psi}{\mu} \right) - \ln^{m+1} (1+\psi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно (10) окончательное решение получаем в квадратурах:

$$t = \frac{a}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\rho}{k}} \cdot \int_0^{\psi} \sqrt{\frac{(1+z)^{-\frac{1}{3}} - (\mu+z)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{p}{k} z - \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} \frac{1}{m+1} F(z)}} dz, \quad (14)$$

$$\text{где } F(z) = \int_0^z \left[\ln^{m+1} (1+\xi) - \ln^{m+1} \left(1 + \frac{\xi}{\mu} \right) \right] \frac{d\xi}{\xi}.$$

Компоненты напряжения будут

$$\begin{aligned} \sigma_r = \left\{ p + \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} \frac{k}{m+1} \frac{1}{\psi} \left[\ln^{m+1} \left(1 + \frac{\psi}{x} \right) - \ln^{m+1} (1+\psi) \right] \right\} \times \\ \times \frac{(x+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} + \frac{\rho a^2}{18} \omega \left\{ (x+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}} - \right. \\ \left. - \frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} \left[(x+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}} \right] \right\}; \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_r + \left(\frac{2}{3} \right)^m \frac{k}{x} \ln^m \left(1 + \frac{\psi}{x} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

2. Из условия $\psi'(t) = \omega = 0$ определяется момент $t = t_*$ окончания этапа расширения полый сферы. Приравнявая нулю ω , определяем $\psi_* = \psi(t_*)$:

$$\psi_* = \frac{k}{p(m+1)} \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} \int_0^{\psi_*} \left[\ln^{m+1} (1+z) - \ln^{m+1} \left(1 + \frac{z}{\mu} \right) \right] \frac{dz}{z}. \quad (16)$$

Тогда из (14) определяем

$$t_* = \frac{a}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\rho}{k}} \int_0^{\psi_*} \sqrt{\frac{(1+z)^{-\frac{1}{3}} - (\mu+z)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{p}{k} z - \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} \frac{1}{m+1} F(z)}} dz. \quad (17)$$

При $t > t_*$ происходит разгрузка, подчиняющаяся линейному закону:

$$\sigma_\theta - \sigma_r - (\sigma_\theta^* - \sigma_r^*) = 2G[\epsilon_\theta - \epsilon_r - (\epsilon_\theta^* - \epsilon_r^*)]. \quad (18)$$

Здесь символом (*) обозначены напряжения и деформации в момент начала разгрузки. Для этого момента имеем

$$\sigma_0^* - \sigma_r^* = \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{x} \ln^m \left(1 + \frac{\psi}{x}\right); \quad \varepsilon_0^* - \varepsilon_r^* = \ln \frac{x}{x + \psi_*}.$$

Тогда из (19) находим

$$\sigma_r - \sigma_0 = 2G \ln \frac{x + \psi_*}{x + \psi} - \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{x} \ln^m \left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right). \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение движения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{4G}{3(x + \psi)} \ln \frac{x + \psi_*}{x + \psi} - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \frac{k}{x(x + \psi)} \ln^m \left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right) = \\ = \frac{\rho a^2}{9} \left[(x + \psi)^{-\frac{4}{3}} \psi'' - \frac{2}{3} (x + \psi)^{-\frac{7}{3}} \dot{\psi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя и учитывая условие на внутренней поверхности, в этапе разгрузки получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r = -p - \frac{4G}{3} \int_1^x \frac{\ln(x + \psi_*)}{x + \psi} dx + \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} k \int_1^x \frac{\ln^m \left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right)}{x(x + \psi)} dx + \\ + \frac{2}{3} G \left[\ln^2(x + \psi) - \ln^2(1 + \psi) \right] + \frac{\rho a^2}{18} \left[(x + \psi)^{-\frac{4}{3}} - (1 + \psi)^{-\frac{4}{3}} \right] \dot{\psi}^2 - \\ - \frac{\rho a^2}{3} \left[(x + \psi)^{-\frac{1}{3}} - (1 + \psi)^{-\frac{1}{3}} \right] \psi''. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя граничное условие на внешней поверхности сферы и обозначение (10), приходим к линейному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{3} \frac{(\mu + \psi)^{-\frac{4}{3}} - (1 + \psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu + \psi)^{-\frac{1}{3}} - (1 + \psi)^{-\frac{1}{3}}} + \\ + \frac{4G \left[\frac{3p}{2G} - \ln^2(\mu + \psi) + \ln^2(1 + \psi) + Q(\psi) \right]}{\rho a^2 \left[(\mu + \psi)^{-\frac{1}{3}} - (1 + \psi)^{-\frac{1}{3}} \right]} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q(\psi) = 2 \int_1^\mu \frac{\ln(x + \psi_*)}{x + \psi} dx - \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{G} \int_1^\mu \frac{\ln^m \left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right)}{x(x + \psi)} dx.$$

Обратная пластическая деформация возникает в момент времени t_{**} , при котором $\dot{\psi}(t) = 0$. Тогда значение $\psi_{**} = \psi(t_{**})$ определяется из условия

$$\omega(\psi_{**}) = 0.$$

Момент окончания разгрузки и начала вторичного пластического состояния будет

$$t_{xz} = t_* + \int_{\psi_{xz}}^{\psi_{ss}} \frac{dz}{\sqrt{\omega(z)}}. \quad (23)$$

Проведены численные расчеты при следующих значениях параметров: $a=10$; $m=1/3$; $b=2a$; $p=0,42k$. На рис. 1 показан график зависимости ψ от $t \cdot \left(\frac{6k}{\rho a^2}\right)$, полученный с использованием формул (14)

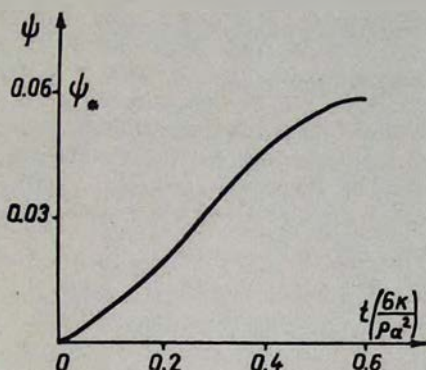


Рис. 1

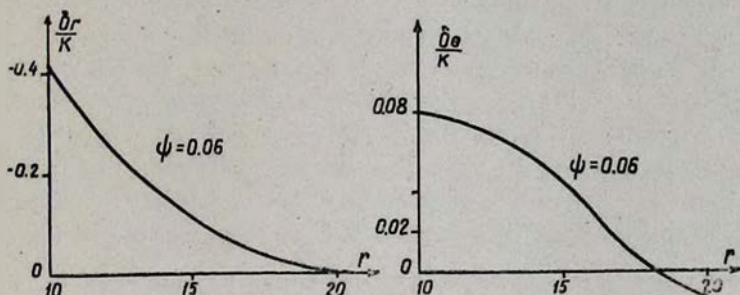


Рис. 2

и (16), а на рис. 2—графики безразмерных напряжений σ_r/k и σ_θ/k в этапе нагружения, полученные при помощи формулы (15).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԿՈՅԱՆ, Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Պլաստիկորեն անհամասեռ սնամեջ գնդի վերջավոր դեֆորմացիան
ճնշման հանկարծակի ազդեցության դեպքում

Հնդունելով նյութը պլաստիկորեն անհամասեռ և անսեղմելի, ուսումնասիրվում է սնամեջ գնդի վերջավոր դեֆորմացիան, ճնշման հանկարծակի ազդեցության դեպքում: Ծնշումը ազդեցության ընթացքում մնում է հաստատուն: Բեռնավորման միջակայքում նյութը ենթարկվում է աստիճանային ամրա-

պընդման օրենքին: Լարումները և ռադիալ տեղափոխությունը արտահայտված են $\psi(t)$ ֆունկցիայով: $\psi(t)$ ֆունկցիայի համար ստացվում է երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում, որի լուծումը տրված է կվադրատությամբ:

Ուսումնասիրվում է նաև սնամեջ գնդի բեռնաթափման վիճակը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ X. A. Рахматулин, ПММ, т. 10, № 3 (1946). ² X. A. Рахматулин, ПММ, т. 14, № 1 (1950). ³ В. С. Ленский, Вестн. МГУ, № 3, 1949. ⁴ С. Д. Мочахов, Уч. зап. Томск. ин-та, № 25, 1955. ⁵ П. Пежина, Arch. Mech. Stos. v. 11, № 5 (1959). ⁶ П. Пежина, Основные вопросы вязкоупругости, Мир, М., 1968. ⁷ R. Gutowski, S. Kaliski, I. Osleski, Biuletyn WAT, № 2, 1959. ⁸ В. Н. Кукуджанов, Л. В. Никитин, Изв. АН СССР, № 4, 1960. ⁹ М. А. Задоян, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. № 3 (1960). ¹⁰ X. A. Рахматулин, Г. С. Шаниро, Изв. АН СССР. ОТН, № 2, 1955. ¹¹ M. Cristescu, In: Proc. Sec. Symposium, Pergamon Press. N. Y. 1960. ¹² В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский, Теория пластичности неоднородных тел, Мир, М. 1965.

УДК 593.12.14

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. А. Джрбашян

Полный момент частицы

(Представлено 26/I 1983)

Мы знаем, что свободные частицы в соответствии с первым законом Ньютона классической механики имеют определенный, неизменяющийся со временем импульс. На языке квантовой механики это означает, что волновая функция свободной частицы есть собственная функция оператора импульса. Этот факт подтверждается использованием известного решения (1) уравнения Дирака, имеющего вид плоской волны, в качестве волновой функции электрона, для получения вероятностей и сечений всех процессов (например, известных формул Клейна—Нишины для комптон-эффекта и Бете—Гайтлера—для тормозного излучения). Известно, что сохранение импульса, т. е. обладание свободной частицей определенным, не зависящим от радиуса вектора и времени импульсом, есть следствие однородности (трансляционной симметрии) свободного пространства.

Известно также, что следствием изотропности (вращательной симметрии) пространства при наличии центрально-симметричного (кулоновского) поля является сохранение момента: частица в таком поле, при отрицательных энергиях, имеет определенный, не зависящий от $\vec{r}$ и t квадрат и проекцию момента, оператор которого есть $-\hbar[\vec{r} \nabla,] + \vec{s}$. Состояния в атоме классифицируются по собственным значениям этих операторов и оператора энергии.

Однако в традиционной квантовой механике нет оператора момента, такого, чтобы волновая функция свободной частицы была собственной функцией его квадрата и компоненты вдоль произвольной оси z . Но свободное пространство не менее симметрично, чем пространство при наличии сферически симметричного поля. Поскольку наложение поля не увеличивает симметрию пространства (например, в присутствии второго электрона момент лишь одного электрона в атоме не будет сохраняться), то снятие поля симметрию не уменьшит.

В случае наличия центрально-симметричного поля симметрия пространства допускает вращение системы координат, оставляя ее начало в точке, где находится источник поля (ядро в случае атома). В случае свободного пространства, когда мы можем поместить начало координат где угодно (трансляционная симметрия), возможность поворота осей (вращательная симметрия) не теряется. Спрашивается, почему не должна иметь момент количества движения частица, если она свободна, т. е. если пространство, в котором она находится, по сравнению

с пространством центрально-симметричного поля не менее, а более симметрично. Оператор такого момента найден в работах (1-5)

Рассмотрим поведение волновой функции свободного электрона при вращении системы координат.

Экспериментально проверенная, известная (6) волновая функция свободного электрона имеет вид

$$\psi_{\vec{p}\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}} u_{\mu} \exp[i(\vec{p}_i \vec{r}_i - Et)/\hbar], \quad (1)$$

где биспинор $u_{\mu} = N \begin{pmatrix} v_{\mu}(\lambda) \\ w_{\mu}(\lambda) \end{pmatrix}$, ($N = [(1 + Mc^2/E)/2]^{1/2}$) при $E > 0$, v_{μ} — собственная функция оператора спина:

$$s_z v_{\mu}(\lambda) = \hbar \mu v_{\mu}(\lambda) \quad (2)$$

λ — спинорный индекс, $v_{\mu}(\lambda) = \delta_{\mu\lambda}$,

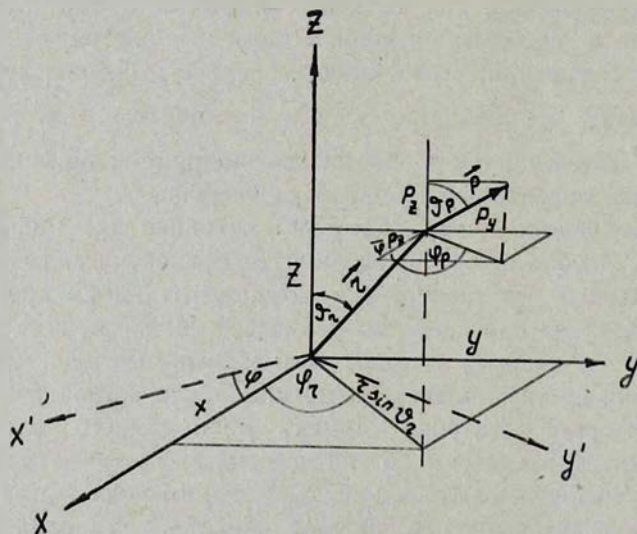
$$w_{\mu}(\lambda) = \sum_{\lambda'} \frac{2c(s_i p_i)_{\lambda\lambda'}}{\hbar(E + Mc^2)} v_{\mu}(\lambda'). \quad (3)$$

Как видно из (1) и (3), волновая функция зависит от спинора v_{μ} и скалярных произведений $(\vec{p} \vec{r})$ и $(\vec{s} \vec{p})$ трех векторов:

$$\vec{r} (x = r \sin \vartheta_r \cos \varphi_r, y = r \sin \vartheta_r \sin \varphi_r, z = r \cos \vartheta_r),$$

$$\vec{p} (p_x = p \sin \vartheta_p \cos \varphi_p, p_y = p \sin \vartheta_p \sin \varphi_p, p_z = p \cos \vartheta_p) \text{ и } \vec{s}.$$

Перейдем в систему координат, полученную от исходной поворотом на угол φ вокруг оси z (см. рисунок).



Компоненты $\vec{r}$ и $\vec{p}$, входящие в формулу (1), для исходной и повернутой систем координат

В новой системе будем иметь

$$x' = r \sin \vartheta_r \cos(\varphi_r + \varphi), y' = r \sin \vartheta_r \sin(\varphi_r + \varphi), z' = z, \quad (4)$$

$$p'_x = p \sin \theta_p \cos(\varphi_p + \varphi), \quad p'_y = p \sin \theta_p \sin(\varphi_p + \varphi), \quad p'_z = p_z. \quad (5)$$

Вместо первых двух компонент удобно рассматривать их комбинации

$$r_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) = \mp r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_r e^{\pm i \varphi_r}, \quad r_0 = z, \quad (6)$$

$$p_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (p_x \pm i p_y) = \mp p \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_p e^{\pm i \varphi_p}, \quad p_0 = p_z. \quad (7)$$

Тогда в новой системе согласно (4—7)

$$r'_{\pm 1} = e^{\pm i \varphi} r_{\pm 1}, \quad r'_0 = r_0, \quad (8)$$

$$p'_{\pm 1} = e^{\pm i \varphi} p_{\pm 1}, \quad p'_0 = p_0. \quad (9)$$

По этому же закону, как известно, преобразуются и компоненты спин-а (7)

$$s_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (s_x \mp i s_y), \quad s_0 = s_z, \quad (10)$$

$$s'_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (s'_x \pm i s'_y) = e^{\pm i \varphi} s_{\pm 1}, \quad s'_0 = s_0. \quad (11)$$

Спинор $v_\mu(\lambda)$ преобразуется по закону (8)

$$v'_\mu(\lambda) = e^{i \mu \varphi} v_\mu(\lambda). \quad (12)$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$p_i r_i = p_x x + p_y y + p_z z = -p_1 r_{-1} - p_{-1} r_1 + p_0 r_0.$$

Подставляя (8) и (9) в выражение для $p'_i r'_i$, получим

$$p'_i r'_i = -p'_1 r'_{-1} - p'_{-1} r'_1 + p'_0 r'_0 = -p_1 r_{-1} - p_{-1} r_1 + p_0 r_0 = (\vec{p} \vec{r}).$$

Таким же образом согласно (9) и (11) получится $s'_i p'_i = s_i p_i$. Следовательно, согласно (1) и (12) волновая функция в новой системе связана с исходной соотношением

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = e^{i \mu \varphi} \psi_{\vec{p}\mu} = \sum_{\mu_1} \delta_{\mu_1 \mu} e^{i \mu_1 \varphi} \psi_{\vec{p}\mu_1}. \quad (13)$$

Как известно (9), из условия сохранения ортонормированности волновых функций

$$\langle \psi'_{\vec{p}_1 \mu_1} | \psi'_{\vec{p}_2 \mu_2} \rangle = \langle \psi_{\vec{p}_1 \mu_1} | \psi_{\vec{p}_2 \mu_2} \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta_{\mu_1 \mu_2}, \quad (14)$$

следует существование унитарной матрицы $U_{\mu_1 \mu}$, через которую преобразуется волновая функция при повороте системы координат

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = \sum_{\mu_1} U_{\mu_1 \mu} \psi_{\vec{p}\mu_1} \quad (15)$$

и соответствующего унитарного оператора $\hat{U}$

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = \hat{U} \psi_{\vec{p}\mu}. \quad (16)$$

Выше (формула (13)) мы фактически нашли эту матрицу, диаго-

нальную в рассматриваемом случае поворота вокруг оси z . Теперь найдем оператор.

Нетрудно видеть, что искомым оператором $\hat{U}$ в данном случае будет произведение трех унитарных операторов

$$\hat{U} = e^{\frac{\partial}{\partial s_r}} e^{\frac{\partial}{\partial s_p}} e^{i(h)s_z}. \quad (17)$$

С этой целью учтем, что согласно разложению Тейлора

$$f(x+a) = \left[1 + \frac{a}{1!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right] f(x) = e^{a \frac{\partial}{\partial x}} f(x), \quad (18)$$

т. е. воздействие оператора $e^{a \frac{\partial}{\partial x}}$ приводит к замене x на $x+a$. Следовательно первые два множителя в (17) приведут к требуемому изменению компонент $\vec{r}$ и $\vec{p}$, согласно (4) и (5), сдвигая φ_r и φ_p на φ .

Чтобы убедиться в необходимости третьего множителя, в (17) примем во внимание, что из соотношений коммутации декартовых компонент спина

$$[s_z, s_x] = i\hbar s_y, \quad [s_z, s_y] = -i\hbar s_x \quad (19)$$

следуют соотношения коммутации для циклических компонент

$$[s_0, s_q] = \hbar q s_q, \quad \text{т. е. } s_z s_q = s_q (s_z + \hbar q), \quad (q=0, \pm 1). \quad (20)$$

Следовательно, при коммутации с s_q s_z заменится на $s_z + \hbar q$

$$e^{\mp(i/\hbar)s_z} s_q = s_q e^{\mp(i/\hbar)(s_z + \hbar q)} = e^{iq\mp} s_q e^{\mp(i/\hbar)s_z}. \quad (21)$$

Отсюда вытекает, что воздействие оператора $e^{\mp(i/\hbar)s_z}$ приводит к требуемому согласно (10) и (11) изменению компонент спина. Учитывая также следующее из (2) соотношение

$$e^{\mp(i/\hbar)s_z} v_\mu(\lambda) = e^{i\mu\mp} v_\mu(\lambda), \quad (22)$$

получим, что действительно

$$\psi_{\vec{p}\mu}^{\pm} = \hat{U} \psi_{\vec{p}\mu}^{\pm} = e^{i\mu\mp} \psi_{\vec{p}\mu}^{\pm}, \quad (23)$$

т. е. согласно (13) и (16) оператор $\hat{U}$, определяемый выражением (17), есть оператор вращения $\hat{R}_z$.

Представим этот унитарный оператор в общепринятой форме

$$\hat{R}_z = e^{i\varphi \hat{J}_z / \hbar}, \quad (24)$$

выражая через эрмитовый оператор проекции полного момента $\hat{J}_z$. Согласно (17)

$$\hat{J}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_r} - i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_p} + \hat{s}_z. \quad (25)$$

Из найденного соотношения

$$e^{i\varphi \hat{J}_z / \hbar} \psi_{\vec{p}\mu}^{\pm} = e^{i\mu\varphi} \psi_{\vec{p}\mu}^{\pm}, \quad (26)$$

имеющего место при произвольном φ , следует, что

$$\hat{J}_z \psi_{p\mu} = \hbar \mu \psi_{p\mu}, \quad (27)$$

т. е. свободная частица имеет определенный полный момент (¹⁻⁵).

Существование унитарного преобразования $U(\psi' = U\psi)$ при параллельном переносе ($U=T$) системы координат связано с тем, что свободная частица имеет определенный импульс, а при вращении ($U=R$) — определенный полный момент.

Заметим, что выражение (25) есть z -компонента оператора полного момента

$$\hat{J} = \hat{L}' + \hat{L}^p + \hat{s}, \quad \text{где } \hat{L}' = -i\hbar[\vec{r} \nabla_r], \quad \hat{L}^p = -i\hbar[\vec{p} \nabla_p]. \quad (28)$$

В работе (¹) предложен прямой метод доказательства как соотношения (27), так и

$$\hat{J}^2 \psi_{p\mu} = \hbar^2 J(J+1) \psi_{p\mu}, \quad J = s = 1/2. \quad (29)$$

Поскольку оператор, собственная функция которого есть спинор, называется оператором спина, оператор полного момента $\hat{J}$, собственная функция проекции и квадрата которого при $J = 1/2$ есть биспинор, в этом частном случае был назван оператором биспина.

В работах (^{2,3}) показано, что сохранение J_z и $\hat{J}^2$ для свободных частиц и частиц в центрально-симметричном поле есть следствие изотропности пространства.

Теперь простым способом покажем, что волновая функция свободного электрона (1) есть собственная функция z -компоненты оператора полного момента.

С этой целью заметим, что первый спинор v_μ биспинора u_μ не зависит от углов φ_r и φ_p , поэтому согласно (2) и (25)

$$\hat{J}_z v_\mu = \hbar \mu v_\mu. \quad (30)$$

Второй спинор согласно (3) можно представить в виде

$$w_\mu = \frac{pc}{E + Mc^2} \frac{(\vec{\sigma} \vec{p})}{p} v_\mu, \quad (31)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — матрицы Паули. Так как

$$\frac{(\vec{\sigma} \vec{p})}{p} v_\mu = (\sigma_x \sin \vartheta_p \cos \varphi_p + \sigma_y \sin \vartheta_p \sin \varphi_p + \sigma_z \cos \vartheta_p) v_\mu, \quad (32)$$

где ϑ_p полярный, а φ_p азимутальный углы, определяющие направление импульса в обычной трехмерной системе координат, то

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_p} + \frac{\hbar}{2} \sigma_z \right) \frac{(\vec{\sigma} \vec{p})}{p} v_\mu &= \hbar \left(i\sigma_x \sin \vartheta_p \sin \varphi_p - i\sigma_y \sin \vartheta_p \cos \varphi_p + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sigma_z \sigma_x \sin \vartheta_p \cos \varphi_p + \frac{1}{2} \sigma_z \sigma_y \sin \vartheta_p \sin \varphi_p + \frac{1}{2} \sigma_z^2 \cos \vartheta_p \right) v_\mu. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая соотношения $\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$, $\sigma_z \sigma_y = -i\sigma_x$, $\sigma_z^2 = 1$, суммируя одноименные члены, подставляя в качестве единицы перед v_μ σ_z^2 и используя (2), последовательно из (33) получим

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_p} + \frac{\hbar}{2} z_z \right) \frac{(\vec{z} \vec{p})}{p} v_\mu = \hbar \left(\frac{i}{2} z_x \sin \theta_p \sin \varphi_p - \frac{i}{2} z_y \sin \theta_p \cos \varphi_p + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos \theta_p \right) v_\mu = \hbar (i z_x z_z \sin \theta_p \sin \varphi_p - i z_y z_z \sin \theta_p \cos \varphi_p + z_z \cos \theta_p) \frac{1}{2} z_z v_\mu = \\ = \hbar (\sigma_y \sin \theta_p \sin \varphi_p + z_x \sin \theta_p \cos \varphi_p + z_z \cos \theta_p) v_\mu = \hbar \mu \frac{(\vec{z} \vec{p})}{p} v_\mu. \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку w_μ согласно (31) и (32) не зависит от φ_r , то из (25) и (34) следует, что

$$\hat{J}_z w_\mu = \hbar \mu w_\mu. \quad (35)$$

Учитывая также (30), отсюда следует

$$\hat{J}_z u_\mu = \hbar \mu u_\mu. \quad (36)$$

Если принять во внимание, что

$$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial}{\partial \varphi_p} \right) e^{i\vec{p} \vec{r}} \hbar = 0, \quad (37)$$

из-за того, что в $\vec{p} \vec{r} = pr [\cos \theta_r \cos \theta_p + \sin \theta_r \sin \theta_p \cos(\varphi_r - \varphi_p)]$ углы φ_r и φ_p входят через разность $\varphi_r - \varphi_p$, то согласно (1), (25) и (36) придем к формуле (27).

Заметим, что этим же методом может быть получена и формула (29).

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ րդրակից անդամ Վ. Հ. ԶԻՐԱՇԵԱՆ

Մասնիկի լրիվ մոմենտը

Դիտելով կոորդինատների սխեմայի պտույտը, բերվում է Դիրակի հավասարման հայտնի լուծումով նկարագրվող ազատ մասնիկի՝ իմպուլսից բացի որոշակի լրիվ մոմենտ ունենալու փաստի պարզ ապացույցը:

Ցույց է տրվում նաև անմիջականորեն, որ (1) ալիքային ֆունկցիան հանդիսանում է լրիվ մոմենտի օպերատորի Z -բաղադրիչի սեփական ֆունկցիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Джрбашян, ДАН СССР, т. 254, № 5 (1980). ² В. А. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Физика, т. 16, № 1 (1981). ³ В. А. Джрбашян, Препринт ЕФИ-449 (1980). ⁴ V. A. Djrbashian, Abstracts of Contributed papers IX Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Struct., Versailles, p. 490 (1981). ⁵ V. A. Djrbashian, Abstracts of contributed papers IX Inter. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Struct., Versailles, p. 479 (1981). ⁶ А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969. ⁷ Эдмондс, в сб.: Деформация атомных ядер, ИЛ, М., 1958. ⁸ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963. ⁹ Е. Вигнер, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., 1961.

УДК 550.837.3

ГЕОФИЗИКА

В. Б. Гамоян, Ф. С. Унусян

Пространственное распределение поля блуждающих токов при наличии вытянутых тел

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 11/V 1984)

Настоящая статья посвящена изучению распределения поля квазистационарных электрических помех от железных дорог рудников при наличии тела цилиндрической формы. Она служит разработке методики интерпретации аномалий над протяженными рудными телами, а также учета влияния рельефа и подземных горных выработок при работе методом блуждающих токов (БТ) ⁽¹⁾.

Принята однородная среда с удельным электрическим сопротивлением ρ_0 и включением цилиндра радиуса a с удельным сопротивлением ρ_1 . Выбрана цилиндрическая система координат (φ, r, z) , ось z которой совмещена с осью цилиндра. „Линейно-двухполюсный“ источник блуждающих токов ⁽²⁾ расположен так, чтобы положительный его полюс находился на расстоянии l от оси цилиндра. Потенциалы электрического поля в любой точке вне (U_1) и внутри (U_2) цилиндрического тела удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Функции U_1 и U_2 должны иметь конечные значения всюду кроме точек, лежащих в источнике, и удовлетворять граничным условиям, требующим непрерывности потенциала и нормального составляющего плотности тока.

Общее решение уравнения Лапласа (1) можно представить в виде ⁽³⁾

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] \times \\
\times \left\{ \int_0^{\infty} I_n(\lambda r) [C(\lambda) \sin(\lambda z) + D(\lambda) \cos(\lambda z)] d\lambda + \right. \\
\left. + \int_0^{\infty} K_n(\lambda r) [M(\lambda) \sin(\lambda z) + N(\lambda) \cos(\lambda z)] d\lambda \right\}, \quad (2)$$

где $I_n(\lambda r)$, $K_n(\lambda r)$ — модифицированные функции Бесселя ⁽⁴⁾; A_n , B_n , $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ — коэффициенты, определяемые из условий задачи; λ и n — параметры разделения переменных.

Учитывая симметрию поля относительно плоскостей $z_i=0$ и $\bar{z}_i=0$, при которой $\sin(i, z_i) = \sin(n\bar{z}_i) = 0$, формула (2) примет вид

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\bar{z}_i) \left| \int_0^{\infty} I_n(\lambda r) D(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} K_n(\lambda r) N(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda \right|. \quad (2')$$

Для получения выражений распределения потенциала „линейно-двухполюсного“ источника последний разбит на $2m+1$ δ -элементарных отрезков, и каждый отрезок принят за точечный источник.

Потенциал „линейно-двухполюсного“ источника в однородной среде согласно (3.5) определяется формулой

$$U_0 = \frac{2H\rho_0}{\pi} \sum_{i=1}^{2m+1} \frac{\text{sh}(m+1-i)\alpha}{b_i}, \quad (3)$$

где

$$H = \frac{I_0 R_p}{4[R_p \text{sh}(m\alpha) + \sqrt{4R_k R_p + R_p^2} \text{ch}(m\alpha)]};$$

I_0 — ток, подаваемый в источник (рельсы электрифицированных железных дорог); R_p — сопротивление δ отрезка рельсового пути; R_k — сопротивление заземления δ отрезка рельсового пути; $\alpha = 2 \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_p}{R_k}} + \sqrt{1 + \frac{R_p}{R_k}} \right)$; b_i — расстояние точки определения от i -го отрезка источника.

Учитывая конечность функции U_1 , регулярность ее в бесконечности и особенность в источнике, потенциал в окружающей среде представлен как сумма потенциала U_0 , не искаженного проводимостью иного тела, и потенциала, обусловленного цилиндрической неоднородностью. При этом коэффициенты $I_n(\lambda r)$ равны нулю, так как $I_n(\lambda r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$:

$$U_1 = U_0 + \sum_{i=1}^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\bar{z}_i) \int_0^{\infty} B_n^*(\lambda) K_n(\lambda z_i) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (4)$$

где $B_n^*(\lambda) = A_n N(\lambda)$

Потенциал внутри цилиндра определяем из (2'), принимая коэффициенты $K_n(\lambda r)$ равными нулю, так как $K_n(\lambda r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\bar{z}_i) \int_0^{\infty} C_n^*(\lambda) I_n(\lambda r) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (5)$$

где $C_n^*(\lambda) = A_n D(\lambda)$.

Для определения коэффициентов $B_n^*(\lambda)$ и $C_n^*(\lambda)$ $\frac{1}{b_i}$ представлено функцией Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{1}{b_l} = \frac{1}{\sqrt{b_l^2 + z_l^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty K_0(i b_l) \cos(i z_l) d i,$$

где z_l и b_l определяются из рис. 1.

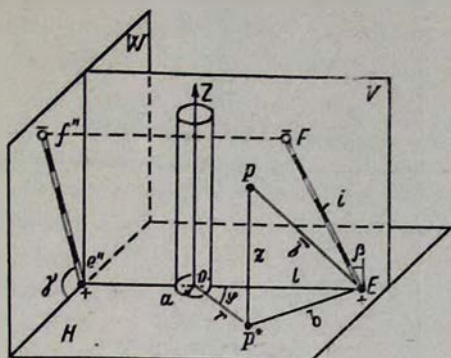


Рис. 1. Простая модель источника БГ при наличии тела цилиндрической формы

По теореме сложения цилиндрических функций ⁽⁶⁾

$$K_0(\lambda b_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^* K_n(\lambda L_l) I_n(\lambda r) \cos(n \varphi_l), \quad (6)$$

где $\varepsilon_n^* = 2$ при $n \neq 0$ и $\varepsilon_n^* = 1$ при $n = 0$.

Подставив значения b_l в формулу (3) и учитывая (6), выведем выражение

$$U_0 = H \rho_0 \sum_{l=1}^{2m+1} \text{sh}(m+1-l) \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^* \cos(n \varphi_l) \times \\ \times \int_0^\infty K_n(\lambda L_l) I_n(\lambda r) \cos(\lambda z_l) d \lambda. \quad (7)$$

Руководствуясь предельными и граничными условиями, при помощи формул (4), (5) и (7) получены математические выражения для $C_n^*(\lambda)$ и $B_n^*(\lambda)$:

$$C_n^*(\lambda) = \frac{H \rho_0 \alpha_1 \varepsilon_n^* \text{sh}(m+1-l) \alpha K_n(\lambda L_l)}{\rho_1 - (\rho_1 - \rho_0) I_n'(\lambda a) K_n(\lambda a)}; \\ B_n^*(\lambda) = \frac{H \rho_0 (\rho_0 - \rho_1) \varepsilon_n^* \text{sh}(m+1-l) \alpha K_n(\lambda L_l) I_n'(\lambda a) I_n(\lambda a)}{I_n'(\lambda a) K_n(\lambda a) (\rho_0 - \rho_1) - \frac{\rho_1}{\lambda a}}.$$

С целью изучения закономерности распределения поля с помощью формул (4) и (5) вычислены значения потенциала и построены карты при $\rho_1/\rho_0 = 0,1$ и 10^2 , $a = 20$ и 40 , $l = 50$, $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$. На рис. 2 показаны карты потенциала поля простого „линейно-двухполюсного“ источника в плоскости H при однородной среде и при на-

личии хорошопроводящего и высокоомного цилиндрических тел. При всех трех случаях удельное электрическое сопротивление окружающей среды принято 220 Ом.м.

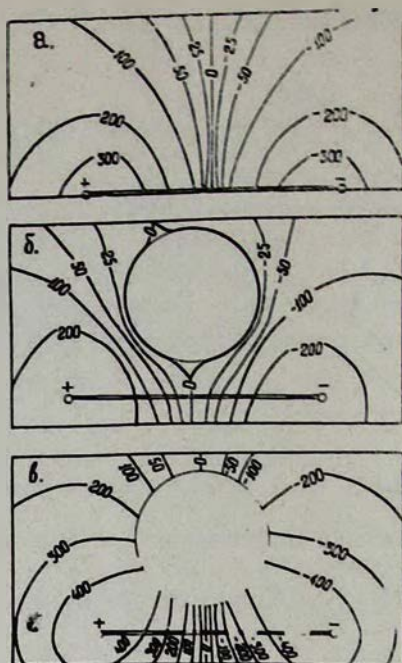


Рис. 2. Карты потенциала простого «линейно-двухполюсного» источника в различных средах: а—однородная изотропная среда с $\rho_0 = 220$ Ом. м б—неоднородная изотропная среда ($\rho_0 = 220$ Ом.м) с включением изопотенциального цилиндра; в—неоднородная среда ($\rho_0 = 220$ Ом.м) с включением цилиндра бесконечного сопротивления

В случае однородной среды (рис. 2,а) поле характеризуется симметрией по отношению к горизонтальной и вертикальной осям. Горизонтальная ось симметрии совпадает с источником поля, вертикальная ось проходит по средней точке между полюсами источника.

Изолинии потенциала, огибающие полюса источника, имеют вытянутую форму с коэффициентом сжатия примерно 0,9. Экстремумы поля со значением потенциала 320 мВ заметно сближены по отношению к межполюсному расстоянию источника (отношение расстояний между полюсами и экстремумами составляет 1,2). Вдоль источника, между его полюсами, градиент потенциала почти постоянный, за пределами источника—падает по ходу удаления от него.

При наличии хорошопроводящего цилиндрического тела (рис. 2,б): а) понижается уровень и уменьшается область распространения поля, особенно в пределах цилиндрического тела и за ним; б) поле характеризуется асимметрией по отношению к «линейно-двухполюсному» источнику и к вертикальной линии, проходящей по средней точке

между полюсами источника; в) наблюдается относительно высокий градиент потенциала между положительным полюсом источника и цилиндрическим телом, что объясняется сгущением токовых линий по направлению наименьшего сопротивления; г) за цилиндрическим телом изолинии сильно разрежены. Это объясняется тем, что хорошо проводящее тело является в какой-то мере заряженным, следовательно и фактором перераспределения поля; д) часть поверхности цилиндра, куда заходят токовые линии, значительно меньше части, где они выходят.

При наличии высокоомного цилиндрического тела наблюдается совершенно иной характер распределения поля (рис. 2, в): а) повышается уровень и увеличивается область распространения поля. Значение потенциала особенно высокое между источником и цилиндром; б) наблюдается асимметрия поля по отношению к источнику. По отношению к вертикальной оси поле симметрично.

Искажение параметров поля прямо пропорционально диаметру цилиндра.

На рис. 3 изображены нормированные кривые приращения по-

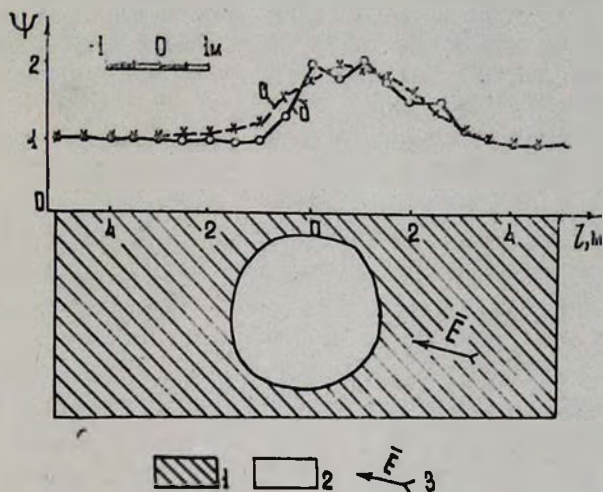


Рис. 3. Кривые Ψ над подземной горной выработкой, полученные путем теоретических расчетов (а) и путем полевых экспериментальных наблюдений (б). 1—габбро; 2—подземная горная выработка; 3—направление поля

тенциала блуждающих токов, показывающие влияние горной выработки.

Четкое совпадение кривых указывает на практическую применимость результатов проведенных исследований.

Թափառող հոսանքների դաշտը ձգված հանճային մարմինների առկայության դեպքում

Ստացված են մաթեմատիկական բանաձևեր, որոնք արտահայտում են թափառող հոսանքների դաշտի տարածական բաշխումը գլանաձև հանքային մարմինների առկայության դեպքում:

Ներկայացված են դաշտի պոտենցիալի քարտեզներ տարբեր հարթությունների վրա, հանքային մարմնի և շրջապատող ապարների տարբեր տեսակարար էլեկտրական դիմադրությունների դեպքում:

Ներկայացվող նյութը կարևոր նշանակություն կունենա էլեկտրահետախուզության թափառող հոսանքների նորագույն մեթոդի զարգացման պրոծում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. В. Бадалян, Г. О. Газарян, В. Б. Гамоян, Подземная электроразведка на рудных месторождениях Армении, Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1980. ² В. Б. Гамоян, Е. М. Лулечян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 31, № 2 (1978). ³ В. П. Дьяконов, Изв. АН СССР. Сер. геофизика, № 1, 1967. ⁴ Справочник по специальным функциям, Наука, М., 1979. ⁵ Г. В. Зевеке, А. П. Нонкин и др., Основы теории цепей, Госэнергоиздат, М., 1963. ⁶ Ю. Люк, Специальные математические функции и их аппроксимации, Мир, М., 1980.

УДК 549.52

МИНЕРАЛОГИЯ

Л. П. Яшвили

Об обнаружении гроутита в рудах Дебедского
проявления марганца (Армянская ССР)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 6/IV 1984)

Гроутит ($MnO \cdot OH$) — редкий минерал диаспор-гётитовой группы ⁽¹⁾. Образуется в гипогенных условиях в низкотемпературных марганцевых месторождениях. Описан в ряде рудников в США (Магномен, Сагамор, Телквил и др.) ^(2,3), а также в Японии на острове Хоккайдо (рудник Пайрайка) ⁽⁴⁾ в ассоциации с манганитом, гематитом и кальцитом. В ассоциации с браунитом, гаусманитом и минералами группы псиломелана описан на месторождении Идикель (Марокко) ⁽⁵⁾.

Нами гроутит обнаружен на Дебедском проявлении марганца и описывается впервые как для марганцевых руд Армении, так и Союза.

Дебедское проявление расположено в 1,5 км к С—СЗ от села Дебед Кироваканского района. Впервые было описано А. Е. Кочаряном в 1947 г. ⁽⁶⁾. Район проявления сложен вулканогенно-осадочными отложениями среднего эоцена ⁽⁷⁾. Оруденелая зона приурочена к контакту измененных туфобрекчий и пересекающих их плотных мелкозернистых дацитов. Зона прослеживается на 150—200 м при ширине 40—60 м. Оруденение представлено прожилками, гнездами и мелкими вкраплениями, сложенными окисными и гидроокисными соединениями марганца среди измененных туфобрекчий. Мощность прожилков составляет 2—3 см. В раздувах иногда достигает 5 см. Приблизительно такие же размеры в поперечнике имеют гнезда.

Гроутит обнаружен в прожилках и гнездах в тесной ассоциации с манганитом. Макроскопически он представляет собой плотный агрегат черно-стального цвета с полуметаллическим блеском. Имеет радиальнолучистое строение. Длина «лучей» достигает 3—4 мм. В зоне окисления, замещаясь пиролюзитом, переходит в марающий руки землистый агрегат.

Под микроскопом в отраженном свете гроутит очень похож на манганит — такого же серовато-белого цвета с едва уловимым бурым оттенком и сильным двуотражением. В полях манганита серый цвет сгущается. Отражательная способность низкая, ниже, чем у манганита, но разницу можно уловить лишь на стыке зерен этих двух минералов. По данным Нейчелла и Филлипса ⁽⁸⁾ для различных длин волн отражательная способность гроутита колеблется в пределах 12—21%,

тогда как у манганита она составляет 14,4—23%. Двукратное и эффекты анизотропии сильнее, чем у манганита, и без цветовых эффектов. Часто наблюдаются сферолитовые кресты в серо-черных тонах. Внутренние рефлексы красные или красно-бурые, проявляются редко в иммерсии. Отчетливо наблюдается ориентированное замещение пиролюзитом.

Приблизительно-количественный спектральный анализ радиально-лучистого гроутита (возможно с небольшой примесью манганита) из Дебедского проявления марганца показал следующий состав элементов примесей (в %): Ca—1,0; K—0,18; Na—0,056; Fe, Cu—0,042; Ti—0,032; Ba—0,01; Zr, Li—0,001; Ga—0,0001.

В таблице приведены данные рентгенографического анализа радиально-лучистого гроутита из Дебедского проявления* и для сравнения рентгенограмма гроутита из района штата Миннесота по П. Рамдору⁽⁹⁾.

Как показал анализ рентгенографических данных, исследуемые образцы из Дебедского проявления вполне определяются как гроутит—на рентгенограмме присутствуют все наиболее характерные, но несколько ослабленные линии для этого минерала: очень сильная—4,17 и сильные линии—2,79; 2,66; 2,36 и 2,29⁽¹⁰⁾.

Межплоскостные расстояния и интенсивность дифракционных линий на дебаграмме гроутита

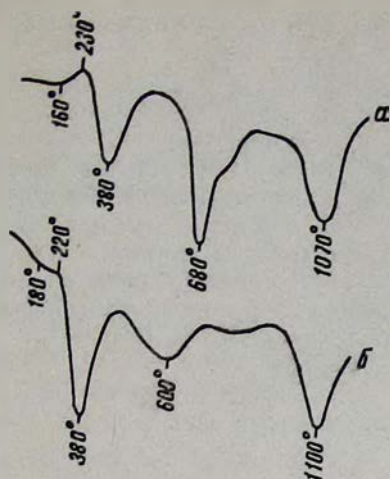
№ пп.	Дебедское проявление		Шт. Миннесо- та, США		№ пп.	Дебедское проявление		Шт. Миннесо- та, США	
	<i>J</i>	<i>d n</i>	<i>J</i>	<i>d n</i>		<i>J</i>	<i>d n</i>	<i>J</i>	<i>d n</i>
1	4	4,19	о.с.	4,17	17	2	1,67	—	—
2	10	3,42	сл.	3,45	18	2	1,60	сл.	1,60
3	2	3,12	—	—	19	5	1,50	ср.	1,51
4	5	2,80	с.	2,79	20	3	1,43	сл.	1,43
5	6	2,68	с.	2,66	21	—	—	сл.	1,39
6	7	2,63	—	—	22	—	—	сл.	1,34
7	2	2,53	сл.	2,52	23	3	1,32	—	—
8	4	2,419	—	—	24	2	1,28	сл.	1,28
9	3	2,37	с.	2,36	25	—	—	сл.	1,21
10	4	2,27	—	—	26	3	1,181	—	—
11	1	2,17	—	—	27	3	1,156	ср.	1,15
12	3	2,19	ср.	2,20	28	4	1,131	ср.	1,131
13	—	—	сл.	2,00	29	2	1,114	сл.	1,117
14	—	—	сл.	1,192	30	—	—	сл.	1,115
15	4	1,78	—	—	31	—	—	сл.	1,083
16	5	1,69	с.	1,69					

Примечание: о.с.—очень сильная, с.—сильная, ср.—средняя, сл.—слабая.

Термический анализ проб гроутита из Дебедского проявления (рисунок) показал, что имеющиеся на кривой нагревания эндотермические эффекты при температуре 380 и 1070° вполне соответствуют кривой нагревания гроутита из месторождения Идикель⁽⁵⁾. Для неокисленных природных манганитов характерен эндотермический эффект в

* Анализ выполнен в рентгеноструктурной лаборатории ИГиЛ АН АрмССР, аналитик Н. Ревазова

интервале 797—895° (16), что не характерно для гроутита. На нашем образце эндотермический пик при 680° говорит о наличии в исследуемом образце пиролюзита, который, как было отмечено выше, образуется в зоне окисления за счет гроутита.



Кривая нагрева гроутита: а—из Дебедского проявления; б—из Иди-келя (по Журавскому (5))

Судя по геологической обстановке, составу и текстурно-структурным особенностям руд, на Дебедском проявлении гроутит выпадал из низкотемпературных гидротермальных растворов, содержащих выщелоченный из вмещающих пород марганец.

Не исключено, что гроутит в небольшом количестве входит также в состав руд собственно гидротермального этапа оруденения Севкар-Саригюхского месторождения марганца (12), но ввиду большого сходства с манганитом нами не был обнаружен (почти на всех дебаеграммах манганита из Севкар-Саригюхского месторождения присутствует сильная линия 4,1, характерная для гроутита).

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

1. Փ. ՅԱՇՎԻԼԻ

Դերեդի մանգանի երևակման (Հայկական ՍՍՀ) հանճանյութերում գրոուտիտի հայտնաբերման վերաբերյալ

Դերեդի մանգանի երևակման հանքանյութերում, ՀՍՍՀ և Սովետական Միության համար առաջին անգամը լինելով, հայտնաբերվել է հազվագյուտ գրոուտիտ միներալը, որը պատկանում է դիասպոր—գյոթիտի խմբին:

Գրոուտիտ պարունակող հանքանյութումը հարում է հիդրոթերմալ փոփոխությունների ենթարկված տուֆաբեկիտների և մանրահատիկ դաքիտների կոնտակտին: Միներալն առաջացնում է շառավղա-ճառագայթային ազդեցատներ և հստակորեն որոշվում է ռենտգենյան և թերմիկ անալիզների միջոցով:

Երկրաբանական իրադրությունից, հանքանյութերի կողմից և տեքստուրա-

կառուցվածքային առանձնահատկություններից հիմնով կարելի է ենթադրել, որ գրոուտիտն առաջացել է ներփակվող ապարներից մանգան տարալուծած ցածր ջերմաստիճան ունեցող հիդրոթերմալ լուծույթներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Минералы. Справочник. Т. 2. вып. 3. Наука. М., 1967. ² J. W. Gruner, Am. Min., v. 32, № 11—12 (1947). ³ C. G. Segeler, Am. Min. v. 44, № 7—8 (1959). ⁴ J. I. Horiya, Min. Soc., Japan, v. 4, № 10 (1959). ⁵ G. Jouravsky, L. Ortelli, Notes et mèm. geol. Maroc., v. 19, № 149 (1960). ⁶ А. Е. Кочарян, Изв. АН АрмССР. Естественные науки, № 8, 1947. ⁷ А. Т. Асланян, Региональная геология Армении, Айпетрат, Ереван, 1958. ⁸ L. Nichol, R. Phillips, Min. Mag., v. 35, № 269 (1965). ⁹ Symposium sobre yacimientos de manganesa XX Congreso geologic international. Т. 1, Mexico, 1956. ¹⁰ Р. Рамдор, Рудные минералы и их срastания, ИЛ, М., 1962. ¹¹ Е. Я. Роде, Кислородные соединения марганца. Изд-во АН СССР, М., 1952. ¹² Л. П. Яшвили, ДАН АрмССР, т. 63, № 3 (1971).

УДК 581.035.23

МИКРОБИОЛОГИЯ

Н. Л. Каладжян, Э. Е. Оганян

Нитрогеназная активность клубеньковых бактерий при их совместном выращивании с корневыми каллусами бобовых растений

(Представлено академиком М. Х. Чайлахяном 10/III 1984)

В настоящее время нитрогеназная активность клубеньковых бактерий обнаруживается не только при инокуляции ими бобовых растений, но и при их совместном выращивании с корневыми каллусами бобовых растений (¹⁻⁴). Явление азотфиксации обнаружено также у чистых культур клубеньковых бактерий в условиях *in vitro* при выращивании их на искусственных средах (⁵⁻⁸). Авторы отмечают, что проявление нитрогеназной активности в этих условиях обуславливается присутствием некоторых растительных метаболитов. В этом отношении особенно интересны корневые метаболиты, в частности метаболиты специфических для клубеньковых бактерий бобовых растений.

Целью нашей работы было выявление нитрогеназной активности клубеньковых бактерий при их совместном выращивании с корневыми каллусами специфических и неспецифических бобовых растений.

Растительную ткань через 14 дней после пересева переносили на среду, содержащую 20% нитратного азота, инокулировали клубеньковыми бактериями из расчета 3—3,5 млн. бактериальных клеток на 500 мг каллусной ткани. Совместное выращивание продолжалось в течение 5 суток. Нитрогеназную активность определяли ацетиленовым методом. Газовую хроматографию производили аппаратом марки «Цвет» модели 4—67, на чувствительности $10^9 \cdot 200$. Колонка хром аппарата размерами 60×0,3 см, наполненная обработанной щелочью окиси алюминия. Детектор пламенно-ионизационный, температура испарителя 85°, скорость гелия 40 мл/мин. Количество образовавшегося этилена выражено наномолями за 24 часа из расчета 500 мг растительной ткани и 3—3,5 млн. бактериальной клетки.

По литературным данным (⁹⁻¹¹) известно, что количество этилена, являющегося метаболитом растительных организмов и играющего особенно важную роль как естественный газообразный гормон тканевых культур, обуславливается количеством и взаимоотношениями других эндогенных гормонов, в частности ауксинов и кинетинов.

Данные, представленные в таблице, показывают, что этилен производится не только при совместном выращивании бактериальных и растительных клеток, но и в контроле, где растительная ткань не инокулирована клубеньковыми бактериями. В ассоциациях с клубеньковыми бактериями у некоторых штаммов количество этилена значительно выше по сравнению с контролем, что и можно отнести за счет

активности нитрогеназы, обусловленной взаимоотношением клубеньковых бактерий и растительных культур.

При совместном выращивании разных видов клубеньковых бактерий с корневым каллусом фасоли нитрогеназную активность проявляли не только штаммы клубеньковых бактерий фасоли № 679, 680, но и штаммы клубеньковых бактерий других видов—гороха № 227, 245, сои № 650 и эспарцета № 811. Наивысшую нитрогеназную активность проявляли клубеньковые бактерии гороха. Однако при совместном выращивании с корневыми каллусами сои нитрогеназная активность клубеньковых бактерий сои не превышает нитрогеназной активности других, неспецифических штаммов, а штамм № 647 клубеньковых бактерий сои вообще не проявлял нитрогеназной активности. С корневыми каллусами сои высокую нитрогеназную активность проявляли штаммы клубеньковых бактерий фасоли № 679, 680, люцерны № 421 и вики № 144.

Количество этилена, образовавшегося при совместном выращивании клубеньковых бактерий с корневыми каллусами бобовых растений, наномоли

Вид клубеньковой бактер и и № штамма	Корневые каллусы			
	фасоль ?	соя	горох	эспарцет
Контроль (не заражено клубеньковыми бактериями)	93	168	15	19
фасоли, шт. 679	210	306	42	21
фасоли, шт. 680	225	405	39	27
гороха, шт. 227	183	111	15	24
гороха, шт. 245	123	156	63	27
сои, шт. 647	57	102	87	54
сои, шт. 650	198	192	30	39
эспарцета, шт. 811	165	165	27	54
эспарцета, шт. 821	90	123	45	39
люцерны, шт. 421	93	234	82	21
вики, шт. 144	78	282	48	42

При выращивании клубеньковых бактерий с корневыми каллусами гороха нитрогеназную активность проявляли все испытанные штаммы кроме специфического штамма клубеньковых бактерий гороха № 227, нитрогеназная активность которого равна контролю. Здесь наибольшую нитрогеназную активность проявили клубеньковые бактерии люцерны № 421, гороха № 245, сои № 647 и вики № 144.

При совместном выращивании с корневыми каллусами эспарцета нитрогеназную активность проявили не только специфические штаммы клубеньковых бактерий эспарцета № 811, 821, но и штаммы клубеньковых бактерий сои № 647, 650, вики № 144.

Из изложенного можно сделать вывод о том, что при совместном выращивании клубеньковых бактерий и корневых каллусов в условиях *in vitro* между специфичностью ассоциации и проявлением нитрогеназной активности не наблюдается никакой закономерности. Высокой нитрогеназной активностью отличаются отдельные штаммы клубеньковых бактерий (фасоли № 679, 680, сои № 650, эспарцета № 811, вики № 144), проявлявшие нитрогеназную активность почти со всеми растительными каллусами.

Очевидно, проявление нитрогеназной активности в этих условиях обуславливается более всего штаммовыми свойствами.

Результаты этих исследований косвенно подтверждают данные наших предыдущих работ (12-14) о том, что метаболиты корневых каллусов бобовых растений вне зависимости от их специфичности стимулируют рост клубеньковых бактерий. Это говорит о том, что между метаболитами корневых клеток различных бобовых растений существенных отличий не проявляется.

Институт микробиологии
Академии наук Армянской ССР

Ն. Լ. ՔԱԼԱԶՅԱՆ, Է. Ն. ՕՆԱՆՅԱՆ

Պալարաբակտերիաների նիտրոգենազային ակտիվությունը
թիթեռնածաղկավոր բույսերի արմատային կալուսների
հետ համատեղ աճեցողության ժամանակ

Աշխատանքի նպատակն է եղել բացահայտել պալարաբակտերիաների նիտրոգենազային ակտիվությունը սպեցիֆիկ և ոչ սպեցիֆիկ թիթեռնածաղկավոր բույսերի արմատային կալուսների հետ in vitro պայմաններում համատեղ աճեցողության ժամանակ:

Նիտրոգենազային ակտիվությունը որոշվել է ացետիլենային եղանակով: Պարզվել է, որ ոչ մի օրինաչափություն չկա պալարաբակտերիաների նիտրոգենազային ակտիվության դրսևորման և բուսական հյուսվածքային կուլտուրաների հետ համակեցության սպեցիֆիկ բնույթի միջև:

In vitro պայմաններում համատեղ աճեցողության ժամանակ պալարաբակտերիաների նիտրոգենազային ակտիվությունը պայմանավորվում է առավելապես շտամային հատկություններով, քանի որ առանձին շտամներ նիտրոգենազային ակտիվություն են դրսևորում համարյա բոլոր տեսակի հյուսվածքային կուլտուրաների հետ համատեղ աճեցողության ժամանակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ I. I. Child, T. A. La Rue, Plant physiology, v. 53, № 1 (1974) ² A. Phillips, Donald, Plant physiology, v. 54, № 4 1974. ³ Н. М. Ше.маханова, Г. А. Бонарцева, Изв. АН СССР. Сер. биол., № 1 (1977). ⁴ И. К. Зубко, А. И. Чиндерева, А. К. Зубко и др., Тр. ВНИИ с.-х. микробиологии, № 4, 1978. ⁵ I. D. Ragan, I. I. Child, W. R. Scowcroft e. a., Nature, v. 256, № 5516 (1975). ⁶ W. G. N. Karz, T. A. La Rue, Nature, v. 256, № 5516 (1975). ⁷ I. A. Me Comb, I. Elliot, M. I. Dilworth, Nature, v. 256, № 5516 (1975). ⁸ I. Tjerkema, H. Evans, Biochem. Biophys. Res. Commun., v. 65, № 2 (1975). ⁹ O. L. Gamborg, T. A. G. La Rue, Plant physiology, v. 48, № 4 (1971). ¹⁰ T. A. G. La Rue. O. L. Gamborg, Plant physiology, v. 48, № 4 (1971). ¹¹ F. B. Abeles, Plant physiology, v. 41, № 4 (1966). ¹² Р. Ш. Арутюнян, И. Л. Каладжян, М. Д. Ст.панян и др., ДАН СССР т. 229, № 5 (1976). ¹³ И. Л. Каладжян, Р. Ш. Арутюнян, М. Х. Чайлахян, ДАН СССР, т. 242, № 1 (1978). ¹⁴ И. Л. Каладжян, Р. Ш. Арутюнян, Э. Е. Оганян, и др., ДАН АрмССР, т. 75: № 1 (1982).

УДК 595.763.7

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Новый род и вид жесткокрылых—кокцинеллид из Суматры (Coleoptera, Coccinellidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 25/V 1984)

Род *Eonedra* Iablokoff-Khnzorian, gen. nov.

Передний край наличника прямой, до тупых углов. Лоб вдвое уже головы. Щеки очень короткие. Усики толстые (рис. 1, *д*), слегка короче ширины головы, с сильно вздутым 1-м члеником и слабо расширенной булавой, 9-й и 10-й членики усиков сходные. Переднеспинка слабо вырезана за головой, с тупыми передними углами, намеченными задними, ее боковой край едва и равномерно выпуклый, с очень тонким, резко окаймленным валиком, основание неокймленное. Проплевры с крупными плоскими ямками, для вкладывания конца передних бедер, четко отграниченными лишь у основания, и здесь с коротким кантом. Щиток треугольный. Надкрылья сильно выпуклые, их боковой скат спадает почти отвесно до такого же валика, как на переднеспинке, сзади скат спадает отвесно. Пришовный угол закругленный, заложен под прямым углом. От передних тазиков отходят две тонкие бороздки, сближенные впереди и достигающие переднего края переднегруды (этот признак для семейства необычный). 3-й стернит брюшка с широким срединным выступом и цельными параболически изогнутыми бедренными линиями, достигающими заднюю шестую длины их стернита. Вертлуги на заднем крае с тупым зубцом у обоих полов. Шпоры отсутствуют. Коготки без зубца.

Сифон (рис. 1, *е*) состоит из двухлопастной капсулы и узкой простой остроконечной трубки, приблизительно достигающей половины длины тела. Тегмен с короткой трубкой и длинным трабесом.

Сперматека (рис. 1, *в*) небольшая, толстая, с крючковатым рогом и крупным вздутым узелком, без ветви, с длинным протоком. Воронки нет. Генитальные пластинки (рис. 1, *г*) удлиненные, образуют овискант.

Типовой вид: *E. sumatrensis* Iablokoff-Khnzorian, sp. nov. Голова, усики и щупики черные. Лоб густо вдавленно точечный и волосистый на гладком фоне. Переднеспинка черная, неоднородно неравномерно, довольно густо точечная на гладком фоне. Щиток черный, в 16 раз уже тела. Надкрылья черные с двумя парами крупных округлых оранжево-красных пятен, достигающих боковых краев (рис. 1, *а*). Точечность всюду такая же, как на переднеспинке, но в среднем менее густая на гладком фоне, местами выглядит двойной. Эпиплевры в 8,5 раза уже тела, густоточечные и волосистые, светлые с черной гладкой каймой, отграниченной рядом точек. Весь низ с эпимерами и поги чер-
 142

ные, лапки светлые. Грудь точечная, переднегрудь волосистая, с широким плоским выступом, у вершины обрубленным на уровне края ее тазиков, без килей.

Пенис, сперматека и генпластинки (рис. 1). У тегмена трубка треугольная, не достигает вершины парамер, трабес узко изогнуто палочковидный, длиннее остальной части тегмена. Длина 5,2—6,4 мм.

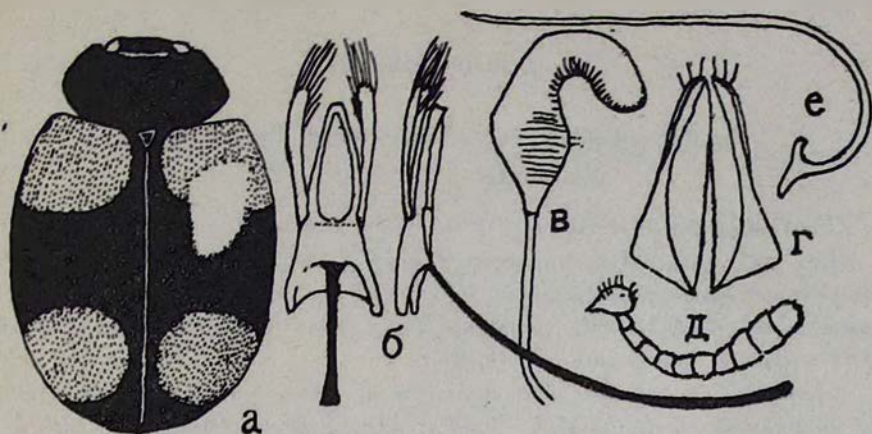


Рис. 1. *Eoneda sumatrensis* Khnz., gen. et sp. nov.

а—габитус; б—тегмен, вентрально и латерально; в—сперматека; г—генитальные пластинки; д—правый усик; е—сифон.
а×8; б, г и д×34; в×60; е×17

Голотип и аллотип: Папрат (сев. Суматра), 1100 м над ур. м., 22.7.1982, Dichl leg.

Голотип, самец, в колл. Ин-та зоологии АН АрмССР, аллотип, самка, в колл. А. Пютца (Pütz), в Эйзенхюттенштадте (ГДР).

Этот вид—типичный представитель трибы *Coccinellini* в нашем понимании этой трибы (¹). По наружным признакам род легко отличается от всех прочих родов Старого света, более или менее сходных габитуально, и по размерам тела уже своими параболическими бедренными линиями брюшка, слабо вырезанной переднеспинкой и по строению бокового края надкрылий. В этой трибе простые коготки известны лишь у крупного *Docimocaria formosa* Gr., австралийского *Micraspis furcifera* Guér. и видов рода *Bulaea* Muls., совсем иной окраски. По наличию овискапта он может быть сближен лишь с родом *Antineda* Khnz. В нашу определительную таблицу родов *Coccinellini* по основным признакам (¹): 73) он может быть включен следующим образом:

1.

1а. Сперматека маленькая, толстая, без узелка, с короткой и широкой ветвью 2

— Сперматека с большим узелком, без ветви. В отличие от рода *Antineda* передний край наличника прямой, усики толстые с узкой булавой, переднеспинка слабо вырезана за головой, боковой скат надкрылий спадает почти отвесно (и не распластан), среднегрудь без ямки, коготки без зубца, сифон короткий, окраска пная

Eoneda Khnz. nov.

Филогенетические связи рода не совсем ясны, так как в нем разные филогенетически важные признаки сочетаются своеобразно, но он явно представляет специализированный реликт древней фауны этой трибы.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈԿՈՎ-ԽՆԶՈՐՅԱՆ

Ձառիկ բզեզների նոր սեռ և տեսակ Սումատրայից
(Coleoptera, Coccinellidae)

Սումատրայից նկարագրված է նոր սեռ և տեսակ — *Eoneda sumatrensis* Khnz. sp. nov. Այս սեռը պատկանում է Coccinellini տրիբային: Նրա ֆիլոգենետիկ կապերը լրիվ պարզ չեն, քանի որ այդ սեռում հատկանիշները լուրատիպ են համընկնում, բայց այս սեռը բացահայտորեն հանդիսանում է նշված տրիբայի հին ֆաունայի ունիկատ:

Նկարագրված է երկու անհատներ՝ էգ ու արու, որոնք որոշելու նպատակով ուղարկված են հեղինակին ԳԴՀ-ից: Հոլոտիպը պահպանվում է ՀՍՍՀ ԳԱ Կենդանաբանության ինստիտուտի միջատների հավաքածուներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. M. Iablokoff-Khnzorian, Les Coccinelles, Paris, Boubee éd., 1982,

