

АЖ 144

ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ Д О К Л А Д Ы

LXXX, № 1

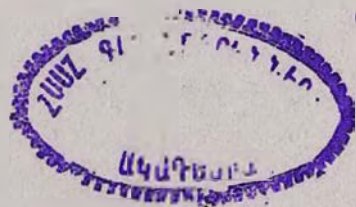
1985

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատմ. ֆառադար), Է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Վ. Հ. ՀԱՄԱՐԱՐՋՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատմ. խմբագրի աեղամ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ս. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. աեղամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

2. Մ. Մուշեղյան—Գումարման մեթոդների ուղղորդվածության մասին <i>F</i> տարածու-	էջ
թյուններում	3
4. Հ. Ղազարյան — Միթագ-լեֆերի տիպի ֆունկցիաների համակարգերի բազիսության	
կայունության հատկության վերաբերյալ	8
6. Ցա. Մելամուղ—Կարաթեոդորիի թևերի և Նևանլինայի եզրային ինտերպոլացիոն	
խնդիրը <i>J</i> շնորհ մատրից-ֆունկցիաների համար	12
Ա. Հ. Դալյալյան—Ազատ կիսախմբերի <i>X</i> -ազատ հոմոմորֆիզմների մասին	17
Ս. Ա. Իվանով—Բազիսներ ուղղորդված ֆունկցիաներից և կառուցման բազ-	
մություններ	20
Ս. Ս. Գինովյան—Գաուսյան ստացիոնար հաջորդականության սպեկտրի համար բարդ	
հիպոթեզի ստուգման համաձայնության չափանիշի մասին	23

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ա. Համբարձումյան, Գ. Ս. Բաղդասարյան—Իզոկլայան հաղորդիչ սալի ստիպողա-	
կան տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում	25

ՇՆՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Գ. Մազմանյան — Առաձգա-պլաստիկ գրունատային շերտի մեջ խորացված առաձ-	
գական կառույցի հաշվման մեթոդիկա սկյամիկական ազդեցության դեպքում	33

ԱՍՏՂԱՑԻՋՆԻԿԱ

Ս. Գ. Իսխուդարյան—Sc տիպի աստղային համակարգերի կենտրոնական խտացում-	
ների շափերը	38

ՏԵԿՏՈՆԻԿԱ

Ա. Հ. Դարբինյան, Ս. Ա. Փիրուզյան, Է. Ա. Ճառարյան—Տրանսկովկասյան դիսկո-	
կացիոն զոնայի սեյսմաակտիվության մասին	41

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

Ա. Ս. Սաֆարյան—Salmonella derby ֆագերի ԴնԹ-երի և սպիտակուցների բնութա-	
գիրը	45

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

<i>Г. М. Мушегян</i> —О регулярности методов суммирования в F -пространствах	3
<i>К. Г. Казарян</i> —О свойстве устойчивости базисности для систем функций типа Миттаг-Леффлера	8
<i>Е. Я. Меламуд</i> —Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неваплинны для аналитической J -перастягивающей матрицы-функции	12
<i>А. Г. Далалян</i> —Об X -свободных гомоморфизмах свободных полугрупп	17
<i>С. А. Иванов</i> —Базисы из рациональных вектор-функций и множества Карлесона	20
<i>М. С. Гиновян</i> —О критерии согласия для проверки сложной гипотезы о спектре гауссовской стационарной последовательности	23

МЕХАНИКА

<i>С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян</i> —Вынужденные колебания тонкой идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле	28
---	----

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

<i>А. Г. Мазмания</i> —Методика расчета на сейсмическое воздействие упругого сооружения, заглубленного в упругопластический слой грунта	33
---	----

АСТРОФИЗИКА

<i>С. Г. Искусдарян</i> —Размеры центральных сгущений S_c -галактик	39
---	----

ТЕКТОНИКА

<i>А. А. Габриелян, С. А. Пирюзян, Э. А. Чартарян</i> —О сейсмичности транскавказской зоны дислокаций	41
---	----

МИКРОБИОЛОГИЯ

<i>А. С. Сафарян</i> —Характеристика ДНК и белков фагов <i>Salmonella derby</i>	45
---	----

CONTENTS

MATHEMATICS

P

- G. M. Mushegian*—On the regularity of the methods of summation in F -spaces 3
- K. H. Kazarian*—On the stability of basisity for the systems of functions of Mittag-Leffler type. 8
- Y. Y. Melamood* The Caratheodory theorem and a boundary interpolation problem of Nevanlinna for an analytic J -contractive matrix function . . . 12
- A. H. Dalatian*—On X -free homomorphisms of free semigroups. . . . 17
- S. A. Ivanov*—Bases of rational vector-functions and the Carleson's sets. . . 20
- M. S. Ginovian*—On the goodness-of-fit test to verify complex hypothesis of the spectral density of a Gaussian stationary sequence. 23

MECHANICS

- S. A. Ambartsumian, G. E. Bagdasarian*—The forced vibrations of a thin perfectly conducting plate in longitudinal field 28

STRUCTURAL MECHANICS

- A. G. Mazmanian*—Design method of elastic construction penetrated into elastic-plastic layer of the soil under seismic effects. 33

ASTROPHYSICS

- S. G. Iskudarian*—The dimensions of central condensations of Sc galaxies . . . 38

TECTONICS

- A. H. Gabrielian, S. A. Firusian, E. A. Chartarian*—About the seismicity of transcaucasian dislocation zone 41

MICROBIOLOGY

- A. S. Safarian*—Characteristics of *Salmonella* derby phage DNA and proteins. 45

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 17.12.1984 г. Подписано к печати 28.02.1985 г. ВФ 06655.

Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2.

Учет.-изд. л. 3,16. Тираж 420. Заказ № 1018. Издат. 6285.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24 г, II эт., к. 1.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Г. М. Мушегян

О регулярности методов суммирования в F -пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянном 3/VI 1983)

Напомним некоторые факты. Пусть X линейное метрическое пространство над числовым полем Φ , а $T = (c_{m,n})_{m=0, n=0}^{\infty}$ числовая матрица, где $c_{m,n} \in \Phi$. Говорят, что последовательность $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $s_n \in X$, методом T суммируется к s , $s \in X$, если выполняются следующие условия:

1) для произвольного числа m , $0 \leq m < +\infty$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} s_n$ в метрике пространства X сходится к некоторому элементу $t_m(s_n)$, $t_m(s_n) \in X$;

2) последовательность $t_m(s_n)$ сходится к s при $m \rightarrow +\infty$.
 Метод T называется регулярным в X , если любая сходящаяся к s , $s \in X$, последовательность $\{s_n\}$, $\{s_n\} \subset X$, методом T суммируется к тому же s .

Если X пространство Банаха, то для него справедливо обобщение теоремы Теплица (см. (1)), т. е. имеет место следующая

Теорема 1. Для регулярности метода T в банаховом пространстве X необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m,n}| < H$, где H не зависит от m , $0 \leq m < +\infty$;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,n} = 0$ для произвольного фиксированного n , $0 \leq n < +\infty$;
- 3) $G_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$.

Хорошо известно также, что если X F -пространство (например, пространство измеримых функций), то теорема 1 уже не верна.

В настоящей работе доказываются следующие результаты.

Теорема 2. Пусть X произвольное F -пространство, тогда для регулярности метода $T = (c_{m,n})_{m=0, n=0}^{\infty}$ достаточно выполнения следующих условий:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m,n}| < H$, где H не зависит от m , $0 \leq m < +\infty$;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,n} = 0$ для любого фиксированного n ;
- 3) $G_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$;

4) существует $q > 0$ такое, что $l_m < q$, $0 \leq m < +\infty$, где l_m число всех тех индексов n , для которых $c_{m,n} \neq 0$.

Через Ω обозначим F -пространство определенных на $[0, 1]$ измеримых, почти всюду конечных функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} d\mu;$$

тогда справедлива следующая

Теорема 3. Для регулярности метода T в Ω условия 1)–4) теоремы 2 являются необходимыми, достаточными.

Далее приводятся необходимые и достаточные условия для регулярности метода T в пространстве L_p , $0 < p < 1$, с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p d\mu.$$

А именно, доказывается следующая

Теорема 4. Для того чтобы метод T был регулярен в L_p , $0 < p < 1$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m,n}|^p < H$, где H не зависит от m , $0 \leq m < +\infty$;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,n} = 0$ для любого фиксированного n , $0 \leq n < +\infty$;
- 3) $G_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow +\infty$.

Кроме самостоятельного интереса теоремы 3 и 4 дополняют теорему 2. Из теоремы 3 следует, что условия 1)–4) в формулировке теоремы 2 нельзя ослабить, а из теоремы 4 следует существование небаковского F -пространства, для которого условие 4) теоремы 2 не является необходимым.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{x_n\} \in X$, $x_0 \in X$ и $x_n \rightarrow x$. Для произвольного m , $0 \leq m < +\infty$ условие 4) обеспечивает сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x_n$. Так как $|c_{m,n}| < H$, то при произвольном $x \in X$ множество $\{R_{m,n}(x) = c_{m,n} x : 0 \leq m, n < +\infty\}$ ограничено, следовательно $R_{m,n}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) равномерно относительно m и n (см. (2), с. 64, теорема II). Следовательно, для произвольного ε , $\varepsilon > 0$, существует такое δ , $\delta > 0$, что для любого m и n $\|c_{m,n} x\| < \frac{\varepsilon}{3q}$ как только $\|x\| < \delta$.

Отсюда, выбирая N так, чтобы $\|x_n - x_0\| < \delta$, при $n > N$ и используя условие 4), для произвольного m будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{m,n} (x_n - x_0) \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|c_{m,n} (x_n - x_0)\| < \frac{q\varepsilon}{3q} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Далее, используя непрерывность относительно α оператора αx , из условий 2) и 3) можно указать число M такое, что при $m > M$ имело место неравенства

$$\sum_{n=0}^N \|c_{m,n}(x_n - x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} - 1 \right) x_0 \right\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Отсюда при $m > M$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|t_m(x_n) - x_0\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x_n - \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x_0 - x_0 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^N \|c_{m,n}(x_n - x_0)\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|c_{m,n}(x_n - x_0)\| + \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x_0 - x_0 \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m(x_n) = x_0$, что требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Достаточность сразу следует из теоремы 2. Легко доказать необходимость условий 1)–3) теоремы 3. Остается установить необходимость условия 4). Предположим, что регулярный в Ω метод T не удовлетворяет условию 4). Тогда возможны два случая:

- а) существует такое m_0 , что множество $\{n : c_{m_0,n} \neq 0\}$ бесконечно;
- б) для каждого m множество $\{n : c_{m,n} \neq 0\}$ имеет конечную мощность l_m , но множество $\{l_m\}_{m=0}^{\infty}$ не ограничено.

В случае а) пусть $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \{n : c_{m_0,n} \neq 0\}$. Обозначим $k_r = r(r+1)/2$, $r = 0, 1, \dots$. Положим $\tau_i = i - k_r$, при $k_r < i \leq k_{r+1}$ и

$$f_{n_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_{m_0,n_i}}, & \text{при } x \in \left(\frac{\tau_i - 1}{r+1}, \frac{\tau_i}{r+1} \right) \\ 0, & \text{при } x \notin \left(\frac{\tau_i - 1}{r+1}, \frac{\tau_i}{r+1} \right) \end{cases}.$$

Положим $f_n(x) = 0$ на $[0, 1]$, при $n \notin \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю, но

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{m_0,n} f_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=k_r+1}^{k_{r+1}} c_{m_0,n_i} f_{n_i}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

В случае б) можно предположить, что $l_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Допустим, уже построены числа $n_1 < n_2 < \dots < n_r$; $m_1 < m_2 < \dots < m_r$ и ограниченные функции $f_0(x), \dots, f_{n_r}(x)$. Обозначим $p_r = \max\{n : c_{m,n} \neq 0, m \leq m_r\}$. Используя условия 2) и б), можно выбрать m_{r+1} так, чтобы

$$l_{m_{r+1}} - p_r > r+1, \quad \left| \sum_{n=0}^{n_r} c_{m_{r+1},n} f_n(x) \right| < \frac{1}{2} \quad \text{при } x \in [0, 1].$$

Пусть $n_{r+1}^{(1)} < n_{r+1}^{(2)} < \dots < n_{r+1}^{(r+1)}$ наименьшие числа, для которых $c_{m_{r+1},n} \neq 0$ и $n_{r+1}^{(i)} > p_r$ при $1 \leq i \leq r+1$. Обозначим $n_{r+1} = n_{r+1}^{(r+1)}$ и положим $f_n(x) = 0$ на $[0, 1]$ при $n \notin \{n_{r+1}^{(1)}, \dots, n_{r+1}^{(r+1)}\} \cap \{n : n_r < n \leq n_{r+1}\}$, а при $n = n_{r+1}^{(i)}$, $1 \leq i \leq r+1$ $f_n(x) = 1/c_{m_{r+1},n}$, $n_{r+1}^{(i)}$ при $x \in \left(\frac{i-1}{r+1}, \frac{i}{r+1} \right)$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin \left(\frac{i-1}{r+1}, \frac{i}{r+1} \right)$.

Ясно, что $f_n(x) \rightarrow 0$ по мере, при $n \rightarrow \infty$, но

$$t_{m_r}\{f_n\} \geq \sum_{n=n_r+1}^{n_r+1} c_{m_r, n} f_n(x) - \left| \sum_{n=0}^{n_r} c_{m_r, n} f_n(x) \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает выполнение условия 4).

Доказательство теоремы 4. Достаточность легко установить. Необходимость. Пусть метод T регулярен в L_p . Легко установить, что для T имеют место условия теоремы 1. Докажем, что T удовлетворяет условию 1) теоремы 4. Предположим обратное. Тогда имеет место одно из следующих условий:

в) существует такое m_0 , что $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m_0, n}|^p = +\infty$;

г) для любого m ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m, n}|^p$ сходится, но существует такое $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$, что $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m_l, n}|^p \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$;

В случае в) пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\alpha_n > 0, \alpha_n \downarrow 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |c_{m_0, n}|^p = +\infty.$$

Пусть $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ попарно непересекающиеся интервалы на $[0, 1]$. Положим $f_n(x) = |\alpha_n|^{1/p} |\Delta_n|^{1/p}$ при $x \in \Delta_n$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin \Delta_n$. Тогда $\|f_n\|_{L_p} \rightarrow 0$, но

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m_0, n} f_n(x) \right|^p dx = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\Delta_l} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m_0, n} f_n(x) \right|^p dx = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l |c_{m_0, n}|^p = +\infty.$$

В случае г) пусть $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ описанная выше последовательность, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая, что $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_0 < 1$. Положим, что числа $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$; $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$ уже построены. Выберем m_k , а затем n_k так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{n_{k-1}} |c_{m_k, n}|^p < \varepsilon_k, \sum_{n=n_{k-1}+1}^{\infty} |c_{m_k, n}|^p > \frac{1}{\varepsilon_k^2} + 2, \sum_{n=n_k+1}^{\infty} |c_{m_k, n}|^p < \varepsilon_k.$$

При $n_{k-1} < n \leq n_k$ положим

$$f_n(x) = \varepsilon_k^{1/p} |\Delta_n|^{1/p} \text{ при } x \in \Delta_n; f_n(x) = 0 \text{ при } x \notin \Delta_n.$$

Ясно, что $\|f_n(x)\|_{L_p} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, учитывая, что $\|f_n(x)\|_{L_p} < 1$, легко убедиться, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_{m_k, n} f_n(x) \right|^p dx \geq \frac{1}{\varepsilon_k} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Откуда получим, что T удовлетворяет условию 1) теоремы 4.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գումարման մեթոդների ռեգուլյարության մասին F տարածություններում

Ներկա աշխատանքում քննարկվում է $T = (c_{m,n})_{m=0, n=0}^{\infty}$ աղյուսակային մեթոդների ռեգուլյարության հարցը F տարածություններում: Ապացուցվում է, որ եթե T մեթոդը բավարարում է Տյուպլիցի թեորեմի պայմաններին և կամայական տողում զերոյից տարբեր էլեմենտների քանակը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա նա ռեգուլյար է ցանկացած F տարածությունում: Ցույց է տրված նաև, որ նշված պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են որպեսզի մեթոդը լինի ռեգուլյար չափելի ֆունկցիաների տարածությունում: Մյուս կողմից $L_p(0 < p < \infty)$ տարածություններում T մեթոդի ռեգուլյարության համար վերը նշված պայմաններից վերջինը անհրաժեշտ չէ, ավելի ճիշտ է հետևյալը՝

Թեորեմ 4. Որպեսզի T մեթոդը լինի ռեգուլյար $L_p(0 < p < 1)$ տարածությունում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m,n}|^p < H$, որտեղ H -ը անկախ է m -ից.
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,n} = 0$ կամայական ֆիքսված n -ի համար
- 3) $G_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \rightarrow 1$, երբ $m \rightarrow \infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Robinson, Proc. London Math. Soc., (2), v. 52 (1950). ² Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы. Общая теория. Т. 1, ИЛ, М., 1962.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

К. Г. Казарян

О свойстве устойчивости базисности для систем функций
 типа Миттаг-Леффлера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/VIII 1984)

1. В исследованиях М. М. Джрбашяна (до 1965 г.), подытоженных в его монографии (¹), была создана теория гармонического анализа в комплексной области. Это теория прямых и обратных преобразований с ядрами, порожденными целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/p)} \quad (p > 0, \mu > 0), \quad (1)$$

на произвольной конечной системе лучей, исходящих из точки $z = 0$ комплексной плоскости. Им были установлены существенно новые результаты типа теорем Планшереля и Винера—Пэли.

В последние годы М. М. Джрбашяном и его учениками развивается новое направление дискретного гармонического анализа—дискретного аналога упомянутой выше теории гармонического анализа в комплексной области. Эти два направления внутренне столь же тесно и гармонично связаны, как и теории преобразований и рядов Фурье.

В работах М. М. Джрбашяна (^{2,3}) были построены системы функций типа Миттаг-Леффлера, которые являются полными системами собственных и присоединенных векторов, по существу, совершенно нестандартной краевой задачи для определенных интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Им были установлены теоремы о базисности таких систем—теоремы о разложениях по собственным и присоединенным функциям таких операторов.

Данная работа связана с разложениями по таким системам типа Миттаг-Леффлера, ассоциированным с нулями $\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ целой функции $S_v(\sigma z)$ ($0 \leq v < 2, \sigma > 0$), экспоненциального типа σ , где

$$S_v(z) = zE_{1/2}(-z^2; 1+v) = \frac{1}{2i} \{E_1(iz; v) - E_1(-iz; v)\}. \quad (2)$$

Исчерпывающая информация об асимптотическом поведении нулей этой функции дается следующими леммами, установленными в работе М. М. Джрбашяна (³) (см. леммы 1.1 и 1.5).

Лемма А. 1. При $\sigma > 0$ и для значений параметра

$$0 \leq v < 2 \quad (3)$$

функция $S_v(\sigma z)$ имеет только вещественные и простые нули $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, причем

$$x_0 = 0, \quad x_{-k} = -x_k \quad (-1 \leq k < +\infty). \quad (4)$$

2. При $0 < v < 1$

$$x_k \in \left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma}, \frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} \right) \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (5)$$

а при $v = 0$

$$x_0 = 0, \quad x_k = \frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \operatorname{sign} k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

3. При $1 < v < 2$

$$x_0 =, \quad x_k = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\sigma} k, \frac{\pi}{\sigma} (k+1) \right) & (k = 1, 2, \dots), \\ \left(\frac{\pi}{\sigma} (k-1), \frac{\pi}{\sigma} k \right) & (k = -1, -2, \dots), \end{cases} \quad (7)$$

а при $v = 1$

$$x_k = \frac{\pi}{\sigma} k \quad (-\infty < k < +\infty). \quad (8)$$

Лемма Б. При $0 < v < 1$ или при $1 < v < 2$ справедлива асимптотическая формула

$$x_k = \frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} (v-1) \operatorname{sign} k + O(|k|^{v-2}), \quad |k| \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Имеет место следующая теорема, которая является специальным случаем более общей теоремы 5 из работы С. Г. Рафасляна ⁽⁴⁾.

Теорема А. Пусть $-1 < \omega < 1$ и $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — последовательность нулей функции $S_v(\sigma z)$, где $\sigma > 0$ и $v = 1 + \frac{\omega}{2}$. Тогда система функций

$$\{(1+|x_k|)^{\omega/2} E_1(ix_k t; v)\}_{-\infty}^{+\infty} \quad (10)$$

является базисом Рисса пространства $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma) \equiv L^2(-\sigma, \sigma); |t|^\omega dt$.

Напомним, что базис $\{e_k\}$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если для каждого $x \in H$, $x = \sum a_k e_k$, выполняются неравенства $c \sum |a_k|^2 \leq \|x\|^2 \leq C \sum |a_k|^2$, где $c, C \in (0, +\infty)$ — константы, не зависящие от x .

Заметим, что когда $\omega = 0$ ($v = 1$), то, с учетом равенств (8) и тождества $E_1(z; 1) = \exp z$, эта теорема переходит в известное утверждение о том, что система функций $\left\{ \exp\left(i\pi \frac{k}{\sigma} t\right) \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ является ортонормальным базисом пространства $L^2(-\sigma, \sigma)$.

Базисные свойства системы $\{\exp(i\lambda_k t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, где λ_k — комплексные числа, были рассмотрены впервые Н. Винером и Р. Пэли ⁽⁵⁾ и изучались затем в ряде работ. В работах ⁽⁵⁻⁸⁾ на последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ накладывались условия геометрической близости к целым точкам

квм. Наиболее сильным в этом направлении является следующий результат М. И. Кадеца ⁽⁸⁾.

Теорема Б. Если числа δ_k таковы, что

$$\sup_{-\infty < k < +\infty} |\operatorname{Im} \delta_k| < +\infty, |\operatorname{Re} \delta_k| \leq d \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (11)$$

где $d < 1/4$, то система $\{\exp(i(k + \delta_k)t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ является базисом Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$.

Отметим, что второе из условий (11), т. е. $\sup_k |\operatorname{Re} \delta_k| < 1/4$, вообще говоря, уже нельзя ослабить, так как система $\{\exp[i \times (k + \theta \operatorname{sign} k)t]\}_{-\infty}^{+\infty}$ при $\theta > 1/4$ не полна, а при $\theta \leq -1/4$ не минимальна (см. ⁽⁹⁾, с. 48 и ⁽¹⁰⁾, с. 37).

Сформулируем теперь основной результат данной работы, который является обобщением теоремы Б на системы вида $\{c_k E_1(i \times (x_k + \delta_k)t; \nu)\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 1. Пусть $-1 < \omega < 1$, $\sigma > 0$ и $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — последовательность нулей целой функции $S_\nu(\sigma z)$, где $\nu = 1 + \frac{\omega}{2}$. Если числа δ_k таковы, что

$$\sup_{-\infty < k < +\infty} |\operatorname{Im} \delta_k| < +\infty, |\operatorname{Re} \delta_k| \leq d \cdot \rho_k \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (12)$$

где $d < 1/4$ и

$$\rho_k = \inf \{|x_k - x_j| : j \neq k, -\infty < j < +\infty\} \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (13)$$

то система

$$\{(1 + |x_k + \delta_k|)^{\omega/2} E_1(i(x_k + \delta_k)t; \nu)\}_{-\infty}^{+\infty} \quad (14)$$

является базисом Рисса пространства $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$.

Таким образом, системы вида (10) так же, как и системы вида $\{\exp(ikt)\}_{-\infty}^{+\infty}$, обладают свойством устойчивости базисности.

Отметим, что когда $\omega = 0$ (тогда $\nu = 1$) и $\sigma = \pi$, из (8) следует, что $x_k = k$ ($-\infty < k < +\infty$), так что в этом случае $\rho_k = 1$ ($-\infty < k < +\infty$). Отсюда и из тождества $E_1(z; 1) = \exp z$ следует, что при $\omega = 0$ (и при $\sigma = \pi$) теорема 1 переходит в теорему Б М. И. Кадеца.

Отметим, наконец, что нам не удалось построить соответствующего примера, как в теореме Б, и показать, что в нашей теореме 1 при $\omega \neq 0$ условие $d < 1/4$ также является точным.

Приношу глубокую благодарность моему научному руководителю профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении данной работы.

Ереванский государственный университет

Միբազմ-կեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համակարգերի բազիսության կայունության հատկության վերաբերյալ

Հայտնի է, որ $\{\exp(ikz)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ համակարգը ունի բազիսություն կալուսություն ունեցող հատկություն, որը կալանում է հետևյալում՝ եթե δ_k կոմպլեքս թվերն այնպիսին են, որ $\sup |\operatorname{Im} \delta_k| < +\infty$ և $|\operatorname{Re} \delta_k| \leq d$, ապա $d < 1/4$ դեպքում $\{\exp[i(x_k + \delta_k)z]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ համակարգը Ռիսի բազիս է $L^2(-\pi, \pi)$ ում:

Ներկա աշխատանքում բերվում է պնդում այն մասին, որ այդպիսի հատկությունը օժտված են նաև $E_1(z; \mu)$ ֆունկցիայով ծնված որոշակի համակարգեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966.
- ² М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 261, № 5 (1981).
- ³ М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 19, № 2 (1984).
- ⁴ С. Г. Рафаелян, ДАН АрмССР, т. 70, № 4 (1980).
- ⁵ Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, Наука, М., 1964.
- ⁶ R. I. Duffin, A. C. Schaeffer, Trans. Amer. Math. Soc., v. 72, № 2 (1952).
- ⁷ В. Д. Головин, ДАН АрмССР, т. 36, № 2 (1963).
- ⁸ М. И. Кадец, ДАН СССР, т. 155, № 6 (1964).
- ⁹ N. Levinson, Gap and density theorems, New York, Amer. Mat. Soc. coll. Publications, 1940.
- ¹⁰ В. Э. Кацнельсон, Функц. анализ и его приложения, т. 5, вып. 1 (1971).

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

Е. Я. Меламуд

Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической J -нерастягивающей матрицы-функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/VI 1983)

1. Пусть J —($m \times m$)-матрица, для которой $J^* = J$, $J^2 = I$. Обозначим через S_J класс аналитических матриц-функций $w(\lambda)$, J -нерастягивающих в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ($J - w^*(\lambda)Jw(\lambda) \geq 0$). Решается следующая интерполяционная задача. Даны n точек на мнимой оси $i\omega_k$ ($k=1, \dots, n$; $\omega_k \neq \omega_j$ при $k \neq j$) и $2n$ ($m \times m$)-матриц w_k , L_k , удовлетворяющих условиям

$$w_k^* J w_k = J, \quad L_k \geq 0 \quad (k=1, \dots, n). \quad (1)$$

Требуется найти необходимое и достаточное условие существования матрицы-функции $w(\lambda)$ класса S_J , для которой

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_k} w(\lambda) = w_k, \quad \lim_{\lambda \rightarrow i\omega_k} \frac{J - w^*(\lambda)Jw(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} \leq L_k, \quad (2)$$

когда $\lambda \rightarrow i\omega_k$ по любому некасательному пути, и в случае его выполнения дать полное описание всех решений (в дальнейшем называем ее задачей (1)–(2)).

Такая задача в скалярном случае для голоморфных сжимающих функций ($m=1$, $J=1$) была решена Р. Неванлинной ⁽¹⁾. В случае $m > 1$ интерполяционные задачи с узлами интерполяции внутри области (задачи Неванлинны—Пика, Шура, Каратеодори и др.) изучались многими авторами ^(2–8). Однако граничная интерполяционная задача Неванлинны в многомерном случае в такой постановке не рассматривалась. При дополнительном ограничении регулярности $w(\lambda)$ в узлах интерполяции решение этой задачи докладывалось автором на конференции « J -теория В. П. Потапова и связанные с ней вопросы» (апрель 1981 г.).

Отметим, что J -нерастягивающие матрицы-функции играют важную роль в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, в теории электрических цепей и во многих других вопросах (характеристическая матрица-функция несамосопряженного оператора, резольвентная матрица эрмитова оператора, проходная матрица-функция пассивного многополюсника и др.). Более полное представление о приложениях можно найти в обзоре ⁽⁷⁾.

В связи с тем, что узлы интерполяции в задаче (1)–(2) находятся на границе области, нам понадобилось доказать для матриц-функций класса S_J теорему, аналогичную известной теореме Каратеодори

(¹). Это позволило, используя матричный аналог леммы Жюльна (¹), выяснить вопрос о критерии разрешимости задачи (1)–(2) и, опираясь на идеи из работ (^{2, 9}), дать описание множества ее решений в неопределенном случае.

2. Аналог теоремы Каратеодори*.

Пусть $w(\lambda)$ — матрица-функция класса S_J , w_0 — постоянная J -унитарная матрица, $i\omega_0$ — произвольная точка мнимой оси. Тогда либо $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{\|J - w_0^* J w(\sigma + i\omega_0)\|}{\sigma} \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow +0$, либо при $\lambda \rightarrow i\omega_0$ по любому некасательному пути ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{J - w_0^* J w(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = M \geq 0$$

и при этом также

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{J - w^*(\lambda) J w(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} = M.$$

Доказательство. Если $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{\|J - w_0^* J w(\sigma + i\omega_0)\|}{\sigma} \not\rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow +0$, то для некоторой последовательности $\lambda_n = \sigma_n + i\omega_0$ существует $\lim_{\sigma_n \rightarrow +0} \frac{J - w_0^* J w(\lambda_n)}{\sigma_n} \stackrel{\text{def}}{=} M$, откуда следуют равенства

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow +0} w(\lambda_n) = w_0; \quad \lim_{\sigma_n \rightarrow +0} \frac{J - w^*(\lambda_n) J w(\lambda_n)}{2\sigma_n} = \operatorname{Re} M \geq 0.$$

Записав для $w(\lambda)$ неравенство Шварца—Пика (¹⁰) для точек λ_n и λ и перейдя к пределу при $\sigma_n \rightarrow +0$, получим аналог неравенства Жюльна (¹):

$$\left(\begin{array}{cc} \operatorname{Re} M & \frac{J - w_0^* J w(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \\ \frac{J - w^*(\lambda) J w_0}{\bar{\lambda} - i\omega_0} & \frac{J - w^*(\lambda) J w(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} \end{array} \right) \geq 0.$$

Полагая $P(\lambda) = J[w_0 - w(\lambda)][w_0 + w(\lambda)]^{-1}$, приходим к неравенству

$$\left(\begin{array}{cc} \bigwedge & \frac{P(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \\ \frac{P_0^*(\lambda)}{\bar{\lambda} - i\omega_0} & \frac{\operatorname{Re} P(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} \end{array} \right) \geq 0, \quad \bigwedge = J w_0 J (\operatorname{Re} M) J w_0^* J. \quad (3)$$

Из (3) видно, что блоки $\frac{\operatorname{Re} P(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda}$ и $\frac{P(\lambda)}{\lambda - i\omega_0}$ ограничены внутри любого угла $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg(\lambda - i\omega_0) < \frac{\pi}{2} - \delta$, ($\delta > 0$), и $\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} P(\lambda) = 0$.

Обозначив $p_f(\lambda) = f^* P(\lambda) f$ (f — произвольный вектор из C^m), получим для скалярной положительной функции $p_f(\lambda)$ неравенство

* Стимулом к установлению этой теоремы была беседа с И. В. Ковалишиной.

$$\left(\begin{array}{cc} f^* \Lambda f & \frac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \\ \frac{\overline{p_f(\lambda)}}{\bar{\lambda} - i\omega_0} & \frac{\operatorname{Re} p_f(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} \end{array} \right) \geq 0.$$

Рассмотрим функцию $s(\lambda) = \frac{1 - p_f(\lambda)}{1 + p_f(\lambda)}$. Очевидно, $|s(\lambda)| \leq 1$ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) и $\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} s(\lambda) = 1$. Применяя к $s(\lambda)$ скалярную теорему Каратеодори (1), получим, что при $\lambda \rightarrow i\omega_0$ по любому некасательному пути существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{1 - s(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = l$, $0 \leq l \leq \infty$. Из ограниченности $\frac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0}$ и равенства $\frac{1 - s(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = \frac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} (1 + s(\lambda))$ видно, что $l < \infty$. Таким образом, для $\forall f \in \mathbb{C}^n$ существует $\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{f^* P(\lambda) f}{\lambda - i\omega_0} \geq 0$. Переходя от квадратичных форм к билинейным, убеждаемся в существовании конечного предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{P(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \stackrel{\text{def}}{=} T \geq 0.$$

Возвращаясь к $W(\lambda) = [J + P(\lambda)]^{-1} [J - P(\lambda)] W_0$, заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} W(\lambda) = W_0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{J - W_0^* J W(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = 2 W_0^* T W_0 (= M) \geq 0.$$

Наконец, из равенства

$$\begin{aligned} \frac{J - W^*(\lambda) J W(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} - M &= \frac{\lambda - i\omega_0}{\bar{\lambda} + \lambda} \left[W^*(\lambda) J W_0 J \frac{J - W_0^* J W(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} - M \right] + \\ &+ \frac{\bar{\lambda} - i\omega_0}{\bar{\lambda} + \lambda} \left[\frac{J - W^*(\lambda) J W_0}{\bar{\lambda} - i\omega_0} - M \right] \end{aligned}$$

получаем, что $\lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{J - W^*(\lambda) J W(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} = M$.

Прямое следствие обобщенной теоремы Каратеодори является

Теорема (об „отталкивании“ полюсов и „нулей“ от мнимой оси). * Пусть $W(\lambda) \in S_J$ и $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{\|J - W_0^* J W(\sigma + i\omega_0)\|}{\sigma} \neq \infty$, ($W_0^* J W_0 = J$).

Положим $K = \lim_{\lambda \rightarrow i\omega_0} \frac{W^*(\lambda) J W(\lambda) - J}{\bar{\lambda} + \lambda}$. Тогда полюсы матриц-функций

$W(\lambda)$ и $W^{-1}(\lambda)$ расположены соответственно вне кругов $m_{\pm} |\lambda - i\omega_0|^2 < < 2\operatorname{Re} \lambda$, где $m_{\pm} = \max\{0, k_{\pm}\}$, причем $k_{+}(k_{-})$ — наибольшее собственное число матрицы $K(-K)$. Эти оценки неулучшаемы.

3. Решение интерполяционной задачи (1)–(2).

Введем обозначения: $I = I_m$, $\Omega = \operatorname{diag}(i\omega_1 I, \dots, i\omega_n I)$, $R_\lambda = (\Omega - \lambda I)^{-1}$, $\mathcal{E} = \operatorname{col}(I, \dots, I)$, $\mathcal{G} = \operatorname{col}(W_1, \dots, W_n)$,

* Теорема об „отталкивании“ полюсов от точек голоморфности для $W(\lambda) \in S_J$ впервые установлена в (3).

$$\tilde{L}_k = w_k J L_k J w_k^*, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 & \frac{J - w_1 J w_2^*}{i\omega_1 + i\omega_2} & \dots & \frac{J - w_1 J w_n^*}{i\omega_1 + i\omega_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{J - w_n J w_1^*}{i\omega_n + i\omega_1} & \dots & \dots & \tilde{L}_n \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Для того чтобы аналитическая матрица-функция $w(\lambda)$ была решением интерполяционной задачи (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы она была решением основного матричного неравенства задачи (ОМН)

$$\begin{pmatrix} W & R_\lambda[-\mathcal{E}, \mathcal{G}] \begin{bmatrix} w(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \\ [w^*(\lambda), I] \begin{bmatrix} -\mathcal{E} \\ \mathcal{G}^* \end{bmatrix} R_\lambda^* & [w^*(\lambda), I] \frac{J_2}{\bar{\lambda} + \lambda} \begin{bmatrix} w(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Теорема 2. Для того чтобы ОМН имело решение, необходимо и достаточно, чтобы информационный блок W был неотрицательным.

Теорема 3. Если $W > 0$, то задача (1)–(2) имеет бесчисленное множество решений; любое решение $w(\lambda)$ представимо в виде дробно-линейного преобразования

$$w(\lambda) = [a(\lambda)p(\lambda) + b(\lambda)q(\lambda)][c(\lambda)p(\lambda) + d(\lambda)q(\lambda)]^{-1}, \quad (4)$$

где матрица коэффициентов $\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ определяется формулой

$$\mathcal{A}(\lambda) = I + J_2 \begin{bmatrix} -\mathcal{E}^* \\ \mathcal{G}^* \end{bmatrix} R_{-\bar{\lambda}}^* W^{-1} \begin{bmatrix} -\mathcal{E} & \mathcal{G} \end{bmatrix}$$

и является групповой элементарной ⁽¹⁰⁾ J_2 -растягивающей при $\text{Re} \lambda > 0$, с полюсами в узлах интерполяции, а параметр $\text{col}[p(\lambda), q(\lambda)]$ — произвольная J -нерастягивающая неособенная ⁽⁵⁾ пара мероморфных матриц-функций.

Пусть блок $W \geq 0$ — вырожденный. Если $W = 0$, то задача (1)–(2) имеет единственное решение $w(\lambda) = w_1$, причем $w_k = w_1$ ($k = 2, 3, \dots, n$). Пусть $W \neq 0$. Представим W в виде $W = T^* \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$, где $T^* T = I$, $W_{11} > 0$ и разобьем на соответствующие блоки матрицы $T\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$, $T\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \end{pmatrix}$, $T\Omega T^* = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Теорема 4. Если блок $W \geq 0$ вырожден ($W \neq 0$), то общее решение задачи (1)–(2) представимо в виде (4), где матрица коэффициентов определяется формулой

$$\mathcal{A}(\lambda) = I + J_2 \begin{bmatrix} -\mathcal{E}_1^* \\ \mathcal{G}_1^* \end{bmatrix} (\Omega_{11}^* + \lambda I)^{-1} W_{11}^{-1} [-\mathcal{E}_1, \mathcal{G}_1],$$

а параметр $\text{col}[p(\lambda), q(\lambda)]$ — произвольная J -нерастягивающая не-

собенная пара мероморфных матриц-функций, удовлетворяющая условию

$$\mathcal{C}_2 p(\lambda) - \mathcal{G}_2 q(\lambda) \equiv 0.$$

Отметим, что близкие результаты при решении скалярной много-точечной проблемы моментов получены в (11).

В заключение выражаю искреннюю признательность М. Г. Крейну за внимание к этой работе.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Ե. ՏԱ. ՄԵԼԱՄՈՒԴ

Կարաթեորեթիկ թեորեմը և նեանլինայի եզրային ինտեգրալացիոն խնդիրը J չծագող մատրից-ֆունկցիաների համար

Ապացուցվում է սկալյար ֆունկցիաների համար Կարաթեորեթիկ անկյունային ածանցյալի մասին հայտնի թեորեմի անալոգը S_J դասի ($\mathcal{W}(\lambda)$ անալիտիկ մատրից-ֆունկցիաների դաս, որոնք $\operatorname{Re} \lambda > 0$ կիսահարթության մեջ բավարարում են $J - \mathcal{W}^*(\lambda)J\mathcal{W}(\lambda) \geq 0$ $J^* = J$, $J^2 = I$) ֆունկցիաների համար:

Ապացուցված է նաև թեորեմ ընեոնների և զրոների եզրից շեղվելու մասին: Լուծված է S_J դասի ֆունկցիայի վերականգնման խնդիրը վերջավոր թվով կետերում տված նրա անկյունային եզրային արժեքներով և անկյունային ածանցյալների մաթորանտներով:

Ստացված է խնդրի լուծելիության հայտանիշ և նրա բավարարման դեպքում նկարագրված են բոլոր լուծումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆ ՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ R. Nevanlinna, Ann. Acad. Soc., A32, 1—75, 1929. ² И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, ДАН АрмССР, т. 59, № 1 (1974). ³ И. В. Ковалишина, ДАН АрмССР, т. 59, № 3 (1974). ⁴ И. П. Федчина, ДАН АрмССР, т. 61, № 4 (1975). ⁵ Т. С. Иванченко, ДАН УССР, А, № 5 (1980). ⁶ M. Rosenblum, J. Rovnjak, Integral equations and operator theory, v. 5, p. 870—887 (1982). ⁷ J. W. Helton, Bulletin of the Amer. Math. Soc., v. 7, № 1, (1982). ⁸ J. A. Ball, J. W. Helton, J. Operator theory, v. 9, № 1 (1983). ⁹ А. А. Нудельман, ДАН СССР, т. 233, № 5 (1977). ¹⁰ А. В. Ефимов, В. П. Потапов, УМН, т. 28, вып. 1 (169) (1973). ¹¹ А. А. Нудельман, А. В. Тулуб, Теор. и мат. физика, т. 39, № 3 (1979).

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

А. Г. Далалян

Об X -свободных гомоморфизмах свободных полугрупп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 13/IX 1983)

1. Пусть X есть слово в алфавите $\Omega_\infty = \{x_1, x_2, \dots, x_s \dots\}$. Слово D в алфавите $\Psi_m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ будем называть словом вида X , если оно получается из слова X подстановкой вместо букв слова X некоторых непустых слов в алфавите Ψ_m , причем вместо одинаковых букв подставляются графически равные слова. Слово X называется исключаемым в алфавите Ψ_m , если в алфавите Ψ_m существует такое сверхслово (или бесконечно много графически неравных слов), которое не содержит (каждое из которых не содержит) подслов вида X (см. ⁽¹⁾). Слово в алфавите Ω_∞ называется просто исключаемым, если оно исключается в некотором алфавите Ψ_m , при $m \geq 2$.

Через $\Pi_r = \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$ будем обозначать свободную полугруппу с образующими $a_1, a_2, \dots, a_r$, где r может принимать значения $1, 2, \dots, \infty$. Гомоморфизм свободных полугрупп Π_r и Π_l , взаимно-однозначно отображающий множество всех образующих полугруппы Π_r в множество образующих полугруппы Π_l , будем называть тривиальным. Нетривиальный гомоморфизм полугрупп Π_r и Π_l называется X -свободным, где X есть фиксированное слово в алфавите Ω_∞ , если образ каждого не содержащего подслов вида X элемента полугруппы Π_r также не содержит подслов вида X ⁽¹⁾. В работе ⁽¹⁾ приводятся достаточные условия того, что гомоморфизм полугрупп Π_r и Π_l является x_1 и x_1^n -свободным (при $n \geq 3$) и ставится задача о нахождении необходимых и достаточных условий.

Через $|D|$ будем обозначать длину слова D , а через $\times$ равенство в свободной полугруппе, или, что то же самое, графическое равенство слов. Следующие теоремы дают ответ на первую часть поставленной задачи.

Теорема 1.1. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_r и Π_l является x_1 -свободным тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *если $D \in \Pi_r$, $|D| \leq 3$ и D не содержит подслов вида x_1 , то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_1 ;*

(ii) *если при некотором $U \in \Pi_r$ и некоторых образующих a_1 и a_k полугруппы Π_r имеют место равенства $\varphi(a_1) \times A_1 B \varphi(U) C B$ и $\varphi(a_k) \times C A_2$ (или $\varphi(a_1) \times B C \varphi(U) B A_1$ и $\varphi(a_k) \times A_2 C$), то $a_1 U a_k$ (соответственно $a_k U a_1$) содержит подслово вида x_1 .*

Пусть $\frac{|\varphi(a_i)|}{|\varphi(a_e)|}$ ограничено, когда a_i и a_e пробегает множество всех образующих полугруппы Π_r и N есть наименьшее целое число, такое, что $\frac{|\varphi(a_i)|}{|\varphi(a_e)|} \leq N$.

Теорема 1.2. Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_r и Π_t является x_i^1 -свободным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

(i') если $D \in \Pi_r$, $|D| \leq N+2$ и D не содержит подслов вида x_i^1 , то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_i^1 .

Теорема 1.3. Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_r и Π_t является x_i^1 -свободным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

(i'') если $D \in \Pi_r$, $|D| \leq 4$ и D не содержит подслов вида x_i^1 , то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_i^1 .

Из теоремы 1.1 вытекает.

Следствие 1.4. Существует алгоритм, который по любому гомоморфизму свободных конечнопорожденных полугрупп определяет, является ли он x_i^1 -свободным.

2. В работе ⁽¹⁾ ставится вопрос о существовании для любого исключаемого слова X X -свободного эндоморфизма (т. е. гомоморфизма в себя) некоторой конечнопорожденной свободной полугруппы. Нижеприведенные теорема и следствие дают достаточные условия для несуществования X -свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при $r, t \leq \infty$. Пусть $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$ есть произвольное множество слов в алфавите Ω_{∞} . Каждой букве x_i , входящей хотя бы в одно из слов указанного множества, сопоставим точку на плоскости (обозначим эту точку через i), причем различным буквам будем сопоставлять различные точки. Две точки i и j соединим ребром тогда и только тогда, когда хотя бы одно из слов $x_i x_j$ и $x_j x_i$ является подсловом одного из слов множества $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$. Полученный граф назовем графом множества слов $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$.

Теорема 2.1. Пусть

$$X \asymp X_1 x_{i_1} X_2 x_{i_2} \dots X_k x_{i_k} X_{k+1}$$

есть слово в алфавите Ω_{∞} , где $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ — суть все те буквы, которые входят в слово X ровно один раз. Если

(i) $|X| \geq 3k+2$;

(ii) граф множества слов $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$ не имеет нечетных циклов, то не существует X -свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при любых $r, t \leq \infty$.

Слово X в алфавите Ω_{∞} называется кратным, если каждая буква, входящая в X , входит в него минимум два раза.

Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2. Если X есть кратное слово и для любого представления X в виде

$$X \asymp Y_1 x_i Y_2 x_i Y_3$$

длина Y_2 нечетна, то не существует X -свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при любых $r, t \leq \infty$.

Следующие примеры слов, удовлетворяющие условию следствия 2.2, дают отрицательный ответ на поставленный выше вопрос не только для эндоморфизма конечнопорожденных свободных полугрупп, но и для гомоморфизма произвольных свободных полугрупп Π_r и Π_t при $r, t \leq \infty$.

а. При любом натуральном $n \geq 2$ слово

$$W_n \times x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$$

является кратным и, как ранее доказано автором, исключается в алфавите Ψ_4 .

б. При любом натуральном n слово

$$V_{2n} \times x_1 x_2 \dots x_{2n-1} x_{2n} x_{2s_1-1} x_{2l_1} \dots x_{2s_n-1} x_{2l_n},$$

где $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ и $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ есть перестановка множества $(1, 2, \dots, n)$, является кратным и исключается в алфавите Ψ_4 .

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Հ. ԴԱՎԱՅԱՆ

Ազատ կիսախմբերի X -ազատ հոմոմորֆիզմների մասին

Դիցուք, X -ը $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ հաշվի ալբուրների բառ է, A բառը $\Psi_m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ալբուրներում կոչվում է X տեսքի բառ, եթե այն ստացվում է X բառի տառերը Ψ_m ալբուրների որոշ ոչ դատարկ բառերով փոխարինելով, ընդ որում միանման տառերը փոխարինվում են հավասար բառերով: X բառը կոչվում է բացառելի, եթե գոյություն ունի Ψ_m ալբուրներ, որում կա տարբեր բառերի այնպիսի անվերջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը չի պարունակում իր մեջ X տեսքի ենթաբառեր: Ազատ կիսախմբերի հոմոմորֆիզմը կոչվում է X -ազատ, եթե X տեսքի ենթաբառեր չպարունակող Π կիսախմբի յուրաքանչյուր տարրի պատկերը նույնպես չի պարունակում X տեսքի ենթաբառեր: Այս աշխատանքի մեջ բերվում են ազատ կիսախմբերի հոմոմորֆիզմը X^2 -ազատ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, ինչպես նաև բազմությունների բացառելի X բառերի, որոնցից յուրաքանչյուրի համար ոչ մի ազատ կիսախմբերի X -ազատ հոմոմորֆիզմ գոյություն չունի:

Այս պնդումները պատասխանում են ⁽¹⁾-ում արժաժեք հարցերին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. F. McNulty, Pacific Journal of Mathematics, v. 85, № 2 (1979).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. А. Иванов

Базисы из рациональных вектор-функций и множества Карлесона

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19/X 1983)

В пространстве Харди $H_+^2(E)$ вектор-функций, принимающих значения в гильбертовом пространстве E , рассматривается система $X = \{X_\lambda\}_{\lambda \in \sigma}$, $X_\lambda = (k - \bar{\lambda})^{-1} \delta_\lambda E$ собственных подпространств оператора модели Б. С. Надя — Ч. Фояша, где σ — спектр системы — является счетным множеством в верхней полуплоскости, а δ_λ — ортопроектор в E . В работе дан критерий базисности системы X , спектр которой является конечным объединением карлесоновых множеств σ_j . Этот критерий не требует асимптотической стабилизации подпространств $\{\delta_\lambda E\}_{\lambda \in \sigma}$, а состоит в „равномерной базисности“ подпространств $\delta_\lambda E$ внутри групп, выделяемых в соответствии с теоремой В. И. Васюнина.

При $\dim E > 1$ такие системы впервые изучались в ⁽¹⁾, где было введено понятие серии Карлесона $C(\Delta)$ — такого семейства X , что $\sigma(X)$ есть карлесово множество

$$\inf_{\mu \in \sigma} \prod_{\substack{\lambda \in \sigma \\ \lambda \neq \mu}} \left| \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \bar{\mu}} \right| > 0 \quad (C)$$

и найдется такой проектор Δ в E , что $\delta_\lambda \rightarrow \Delta$. Там же показано, что если X можно разбить на конечное число серий Карлесона $C(\Delta_j)$ и ортопроекторы Δ_j близки в некотором смысле к попарно ортогональным, то X — базис Рисса.

Существование у подсистемы X „направляющих ортопроекторов“ является, конечно, сильным ограничением. Мы откажемся от него, используя построения и результаты В. И. Васюнина.

Определим для точек верхней полуплоскости гиперболическую метрику формулой $\text{th} \frac{1}{2} \rho(x, y) = |x - y| |x - \bar{y}|^{-1}$, и через $D(\lambda, \rho)$ обозначим круг в этой метрике с радиусом ρ и центром в λ .

Предложение ^(2.3). Пусть $\sigma = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j$, $\sigma_j \in (C)$, $G_m(\rho)$ — связная компонента $\bigcup_{j=1}^N D(\lambda, \rho)$, $\Lambda_m(\rho) = \sigma(X) \cap G_m(\rho)$, подпространства $L_m(\rho)$ суть $\bigvee_{\lambda \in \Lambda_m(\rho)} (k - \bar{\lambda})^{-1}$. Тогда семейство $\{L_m(\rho)\}$ образует базис Рисса в замы-

кании своей линейной оболочки в $H_+^2(C)$ и при $\rho < \rho_0 = \frac{1}{2N} \min_{j=1, \dots, N} \inf_{\lambda \neq \mu; \lambda, \mu \in \sigma_j} \rho(\lambda, \mu)$ размерность $L_m(\rho)$ не превосходит N .

Определим в пространстве семейств векторов $\{g = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_m}, g_\lambda \in \delta_\lambda E, \|g\| = \sum \|g_\lambda\|_E\}$ операторную матрицу Грама формулой $\Gamma_m(\rho) = \{\delta_\lambda \delta_\mu\}_{\lambda, \mu \in \Lambda_m}$. Если все ортопроекторы δ_λ одномерны (в этом случае, фактически, речь идет о семействе вектор-функций, а не подпространств), то Γ_m в базисе $\{e_\lambda\}$ имеет матрицу $\{(e_\lambda, e_\mu)_E\}_{\lambda, \mu \in \Lambda_m}, e_\lambda \in \delta_\lambda E$.

Теорема. Пусть $\sigma(X)$ есть объединение конечного числа карлесоновых множеств. Для того чтобы система X являлась базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого ρ

$$\sup_m \|\Gamma_m^{-1}(\rho)\| < \infty. \quad (1)$$

Схема доказательства. Из предложения вытекает базисность системы $\{K_m\}, K_m = \bigvee_{\lambda \in \Lambda_m} X_\lambda$. Базисность X равносильна тогда „равномерной по m “ базисности семейств $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_m}$ в K_m (в том, например, смысле, что для ортогонализаторов V_m систем $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_m}$ справедливы оценки $\sup_m \|V_m\| < \infty$ и $\sup_m \|V_m^{-1}\| < \infty$). Можно доказать эквивалентность такой равномерной базисности и выполнения неравенства (1) при достаточно малом ρ . При этом используется близость в $H_+^2(\mathbb{C})$ при малых ρ функций $(k - \bar{\lambda})^{-1}, \lambda \in \Lambda_m$, которая вытекает из справедливого при $\rho < \rho_0$ неравенства $\text{diam } G_m \leq 2N_\rho$.

Следствие. Если X есть конечное объединение серий Карлесона $C(\Delta_j)$, а семейство подпространств $\Delta_j E$ образует базис в своей линейной оболочке, то X — базис Рисса.

Отметим, что этот результат может быть получен из указанной выше теоремы Н. К. Никольского — Б. С. Павлова о сериях Карлесона, если заметить, что для изоморфизма $T, T: E \rightarrow E$, переводящего базис $\{\Delta_j E\}$ в ортогональный, система TX есть объединение уже асимптотически ортогональных серий Карлесона.

Замечание. Представляет интерес явно сформулировать факт, прямо следующий из результатов, приведенных в ⁽²⁾: если $\text{dim } E < \infty$, X — равномерно минимальная система и $\sigma(X)$ лежит в полосе $0 < c \leq \text{Im } k \leq C < \infty$, то X — базис Рисса.

В заключение приведем характерные примеры базисных систем. Для построения $G_m(\rho)$ используем евклидову метрику, эквивалентную в полосе $0 < c \leq \text{Im } k \leq C < \infty$ гиперболической. Все δ_λ в примерах одномерны, и удобнее рассматривать семейства вектор-функций, а не подпространств.

Пример 1. $X = \{(k - n + i)^{-1} e_n^{(1)}\} \cup \{(k - n + \gamma_n + i)^{-1} e_n^{(2)}\}, n \in \mathbb{Z}, |\gamma_n| < 1/4$, где $e_n^{(1)} = (\sin \alpha_n, \cos \alpha_n), e_n^{(2)} = (\sin(\alpha_n + \beta), \cos(\alpha_n + \beta)), \alpha_n \in \mathbb{R}, \beta \in (0, 2\pi)$. В этом примере, несмотря на произвольное поведение векторов $e_n^{(1)}$, „жесткая связь“ $e_n^{(1)}$ и $e_n^{(2)}$ дает при $\rho < 1/2$ оценку $\Gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & \cos \beta \\ \cos \beta & 1 \end{pmatrix} \geq (1 - \cos \beta)I$ и X — базис Рисса.

Пример 2. $X = \{(k - 2n + i)^{-1} e_1\} \cup \{(k - 2n - 1 + i)^{-1} e_2\} \cup \{(k - n + \gamma_n + i)^{-1} e_3\}, n \in \mathbb{Z}, |\gamma_n| < 1/4$. Система X является объединением трех „чистых“ серий Карлесона $C(e_1), C(e_2)$ и $C(e_3)$. Если вектора e_1, e_2, e_3 линейно зависимы, то воспользоваться следствием нельзя. Одна-

ко $\sigma(X)$ есть объединение только двух карлесоновых множеств $\{n + i\}$, $\{n - i\}$, и при $\rho < 1/2$ в одну группу $\Lambda_m(\rho)$ попадет не более двух точек спектра. Если вектора e_j различны, то тогда выполнено (1) и X — базис Рисса.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Ս. Ա. ԻՎԱՆՈՎ

Բազիսներ ռացիոնալ վեկտոր-ֆունկցիաներից և կառվածային
բազմություններ

Վերին կիսահարթությունում անալիտիկ E արժեքների Հարդիի տարածությունում դիտարկվում է X ենթատարածությունների $\{(k - \bar{\lambda})^{-1} \delta_{\lambda} E\}_{\lambda \in \sigma(X)}$ համակարգ, որտեղ՝ δ_{λ} -ն օրթոպրոեկտոր է E -ում, իսկ $\sigma(X)$ -ը՝ հաշվելի բազմություն է վերին կիսահարթությունից: Ստացվել են պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում X -ը կազմում է Ռիսի բազիս իր գծային թաղանթի փակվածության Հարդիի տարածությունում: Բերված են օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, Изв. АН СССР. Сер. математика, т. 34, № 1 (1970). ² Н. К. Никольский, Лекции об операторе сдвига, Наука, М., 1980. ³ В. И. Васюнин, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 130 (1977).

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

**О критерии согласия для проверки сложной гипотезы
 о спектре гауссовской стационарной последовательности**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 28/X 1983)

1. Пусть x_t , $t=0, \pm 1, \dots$ гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним ($Ex_t=0$). Предположим, что на основе одной реализации конечной длины n , $x_1, \dots, x_n$, последовательности x_t , требуется проверить гипотезу H_0 о том, что спектральная плотность последовательности x_t имеет вид $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Предположим, далее, что гипотеза H_0 сложная, т. е. гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda)$ зависит от неизвестного p -мерного параметра $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_p)' \in S$ (S —открытое множество евклидова пространства R^p), т. е. $f(\lambda)=f(\lambda; \theta)$, $\theta \in S$.

Пусть $\Phi_n(\theta)=(\Phi_{1n}(\theta), \dots, \Phi_{mn}(\theta))'$ — m ($m \geq p$)-мерный случайный вектор с компонентами

$$\Phi_{jn}(\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{I_n(t)}{f(t; \theta)} - 1 \right] \varphi_j(t) dt, \quad j=\overline{1, m},$$

где $\varphi_j(t)$, $j=\overline{1, m}$, некоторая ортонормированная система функций на $[-\pi, \pi]$, а

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{j=1}^n x_j e^{itj} \right|^2$$

—периодограмма последовательности x_t .

Заметим, что при некоторых достаточно широких условиях на спектральную плотность $f(\lambda; \theta)$ и функции $\varphi_j(\lambda)$, $j=\overline{1, m}$, случайный вектор $\Phi_n(\theta)$ при $\theta=\theta_0$ (θ_0 истинное значение параметра θ) имеет асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Если бы проверялась простая гипотеза, т. е. если бы истинное значение θ_0 параметра θ было известно, то ⁽¹⁻⁴⁾ для проверки гипотезы можно было воспользоваться статистикой

$$X_n^2(\theta) = \sum_{j=1}^m \Phi_{jn}^2(\theta), \quad (1)$$

которая при $n \rightarrow \infty$ и $\theta=\theta_0$ имеет χ^2 -распределение с m степенями свободы ⁽¹⁾.

Но здесь нас будет интересовать случай проверки сложной гипотезы H_0 . Следуя ^(2,3), для проверки сложной гипотезы H_0 также

воспользуемся статистикой (1), где, однако, вместо неизвестного параметра θ подставим некоторую его статистическую оценку. При этом, разумеется, асимптотическое распределение статистики (1) будет зависеть от выбранной нами оценки (3).

Предельное распределение статистики (1) после подстановки в нее вместо неизвестного параметра θ некоторой его статистической оценки для гауссовских стационарных процессов исследовалось в работах Осидзе (6,7) и Джапаридзе (4). Однако в этих работах предполагается, что спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса x_t отделена от нуля, т. е. она удовлетворяет условию $\inf_{\lambda} f(\lambda) > 0$.

Нас будет интересовать случай, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ имеет нули того или иного порядка. В настоящей работе в качестве оценки неизвестного параметра θ берется асимптотическая оценка максимального правдоподобия. Находится асимптотическое распределение статистики (1) в следующих двух случаях:

а) гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda; \theta)$ имеет „слабые“ нули, не зависящие от параметра θ , т. е. функция $f(\lambda)$ имеет порядок $|\lambda|^\alpha$, $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$;

б) гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda; \theta)$ имеет как „слабые“, так и „сильные“ нули полиномиального типа, т. е. она имеет вид

$$f(\lambda; \theta) = |Q_N(e^{i\lambda})|^2 h(\lambda; \theta),$$

где $Q_N(e^{i\lambda})$, ($|Q_N(0)| = 1$), полином степени N с корнями на единичной окружности, не зависящими от параметра θ , а функция $h(\lambda; \theta)$ имеет „слабые“ нули, также не зависящие от параметра θ .

2. В этом пункте мы рассмотрим случай а). Предположим, что выполнены следующие условия:

A1) истинное значение θ_0 параметра θ является внутренней точкой множества S ;

A2) если θ_1 и θ_2 разные значения параметра θ , принадлежащие S , то $f(\lambda; \theta_1) \neq f(\lambda; \theta_2)$ почти всюду (λ);

A3) при $\theta \in S$

$$\ln f(\lambda; \theta) = u(\lambda; \theta) + \tilde{v}(\lambda; \theta),$$

где $u(\lambda; \theta)$ и $v(\lambda; \theta)$ ограниченные функции ($\tilde{v}$ — функция, гармонически сопряженная с функцией v , т. е. $\tilde{v} = \text{Im } w$, $v = \text{Re } w$, для некоторой функции w из класса Харди H^2) и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$;

$$A4) \sum_{|k| > n} |a_k(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty;$$

$$A5) \sum_{|k| > n} |c_k(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty;$$

$$A6) \sum_{|k| > n} |b_{kl}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad l = \overline{1, p};$$

$$A7) \sum_{|k|>n} |l_{kj}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, m},$$

при $\theta \in S$, где $a_k(\theta)$, $c_k(\theta)$, $b_{kl}(\theta)$ и $l_{kj}(\theta)$ — коэффициенты Фурье функций $\ln f(\lambda, \theta)$, $f(\lambda; \theta)$, $\frac{1}{f(\lambda; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_l} \ln f(\lambda; \theta)$ и $\frac{\varphi_j(\lambda)}{f(\lambda; \theta)}$ соответственно;

A8) функции $\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda; \theta)$, $k = \overline{1, p}$, непрерывны по (λ, θ) , $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in S$, а функции $\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \ln f(\lambda; \theta)$, $\frac{\partial^3}{\partial \theta_k \partial \theta_l \partial \theta_i} \ln f(\lambda; \theta)$, $k, j, l = \overline{1, p}$, непрерывны по (λ, θ) , $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in N_\delta(\theta_0)$ ($N_\delta(\theta_0) = \{\theta; |\theta - \theta_0| < \delta\}$) — некоторая окрестность точки θ_0 ;

A9) матрица $\Gamma(\theta_0) = \|\gamma_{kj}(\theta_0)\|_{k, j = \overline{1, p}}$,

$$\gamma_{kj}(\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda; \theta) \right]_{\theta = \theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda; \theta) \right]_{\theta = \theta_0} d\lambda$$

невырождена.

Рассмотрим асимптотическую оценку максимального правдоподобия $\bar{\theta}_n$ неизвестного параметра θ , которая является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_k} L_n(\theta) = 0, \quad k = \overline{1, p},$$

где
$$L_n(\theta) = -\frac{n}{2} \left\{ \ln 2\pi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln f(\lambda; \theta) + \frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda; \theta)} \right] d\lambda \right\}$$

— логарифм асимптотической функции правдоподобия (5).

Пусть $B(\theta) = \|\beta_{kj}(\theta)\|_{k, j = \overline{1, m}}$ есть $(m \times p)$ -матрица с элементами

$$\beta_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda; \theta) d\lambda.$$

Теорема 1. При условиях A1—A9 статистика

$$X^2(\bar{\theta}_n) = \sum_{j=1}^m \Phi_j^2(\bar{\theta}_n)$$

асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) распределена так же, как случайная величина

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^p \nu_j \xi_{m-p+j}^2, \quad (2)$$

где ξ_j , $j = \overline{1, m}$, независимые нормальные случайные величины со средним нуль и единичной дисперсией, а числа $\nu_1, \dots, \nu_p$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq \nu_j < 1$, $j = \overline{1, p}$, и являются корнями относительно ν уравнения $\det[(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)] = 0$.

Доказательство следует из следующих лемм.

Лемма 1. Асимптотическая оценка максимального правдоподобия состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна.

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\Phi_n(\bar{\theta}_n) = \Phi_n(\theta_0) - \sqrt{n} B(\theta_0)(\bar{\theta}_n - \theta_0) + o_p(1),$$

где слагаемое $o_p(1)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю по вероятности.

3. Теперь рассмотрим случай б). Предположим, что выполнены следующие условия:

Б1) выполнены условия А1, А2, А3, А4, А8 и А9 пункта 2, в применении к функции $h(\lambda; \theta)$;

$$\text{Б2)} \sum_{|k| > n} |\bar{c}_k(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{Б3)} \sum_{|k| > n} |\bar{d}_{ki}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad i = \overline{1, p};$$

$$\text{Б4)} \sum_{|k| > n} |\bar{l}_{kj}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, m},$$

при $\theta \in S$, где $\bar{c}_k(\theta)$, $\bar{d}_{ki}(\theta)$ и $\bar{l}_{kj}(\theta)$ — коэффициенты Фурье функций $h(\lambda; \theta)$, $\frac{1}{h(\lambda; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln h(\lambda; \theta)$ и $\frac{\varphi_j(\lambda)}{h(\lambda; \theta)}$ соответственно.

Введем следующие обозначения: L^2 — это L^2 -пространство, построенное по мере $f(\lambda) d\lambda$; $H_n(f)$ — пространство полиномов степени n , рассматриваемое как подпространство пространства L^2 ; $G'_n(\lambda, \mu)$ — воспроизводящее ядро пространства $H_n(f)$ (определение и основные свойства воспроизводящего ядра см. (8)).

Рассмотрим случайный вектор $\bar{\Phi}_n(\theta) = (\bar{\Phi}_{1n}(\theta), \dots, \bar{\Phi}_{mn}(\theta))'$,

$$\bar{\Phi}_{jn}(\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\bar{l}_n(\lambda)}{h(\lambda; \theta)} - 1 \right] \varphi_j(\lambda) d\lambda, \quad j = \overline{1, m},$$

где

$$\bar{l}_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_n^{[Q_N]'}(\lambda, t) G_n^{[Q_N]'}(t, \mu) |Q_N(e^{it})|^2 Z'(d\lambda) \overline{Z'(\overline{d\mu})}$$

— обобщенная периодограмма последовательности x_t ($Z'(d\lambda)$ — ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении последовательности x_t : $x_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z'(d\lambda)$).

Пусть $\hat{\theta}_n$ — асимптотическая оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра θ , которая в рассматриваемом здесь случае определяется как корень следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \ln h(\lambda; \theta) + \frac{\bar{l}_n(\lambda)}{h(\lambda; \theta)} \right\} d\lambda \right] = 0, \quad k = \overline{1, p}.$$

И, наконец, пусть $\Gamma(\theta) = \|\gamma_{kj}(\theta)\|_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,p}}$ и $B(\theta) = \|\beta_{kj}(\theta)\|_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,p}}$ — соответственно $(p \times p)$ и $(m \times p)$ матрицы с элементами

$$\tilde{\gamma}_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln h(\lambda; \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda; \theta) d\lambda,$$

$$\tilde{\beta}_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda; \theta) d\lambda.$$

Теорема 2. При условиях Б1—Б4 статистика

$$\tilde{X}^2(\hat{\theta}_n) = \sum_{j=1}^m \tilde{\Phi}_j^2(\hat{\theta}_n)$$

асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) распределена так же, как случайная величина (2), где теперь числа ν_j , ($0 \leq \nu_j < 1$), $j = \overline{1,p}$, являются корнями относительно γ уравнения

$$\det[(1-\nu)\tilde{\Gamma}(\theta_0) - \tilde{B}'(\theta_0)\tilde{B}(\theta_0)] = 0.$$

Замечание. Функции $\varphi_j(\lambda)$, $j = \overline{1,m}$, также могут зависеть от неизвестного параметра θ . В таком случае параметр θ и здесь должен быть заменен его оценкой ($\hat{\theta}_n$ — в случае а) и $\hat{\theta}_n$ — в случае б)): предельное распределение получаемой при этом статистики не меняется.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Գաուսյան ստացիոնար հաջորդականության սպեկտրի համար բարդ
հիպոթեզի ստուգման համաձայնության չափանիշի մասին

Դիցուք x_t , $t=0, \pm 1, \dots$ գաուսյան ստացիոնար հաջորդականություն է, որի միջինատիկական սպասումը հավասար է զրոյի: Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը: օգտագործելով համաձայնության չափանիշը, $x_1, \dots, x_n$ վերցվածքի միջոցով ստուգել H_0 բարդ հիպոթեզը ալի մասին, որ x_t հաջորդականության սպեկտրալ խտությունն ունի $f(\lambda; \theta)$ տեսքը, որտեղ $\lambda \in [-\pi, \pi]$, իսկ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ անհայտ վեկտորական պարամետր է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. Хеннан, Анализ временных рядов, Наука, М., 1964. ² Г. Крамер, Математические методы статистики, Мир, М., 1975. ³ М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт, Статистические выводы и связи, Наука, М., 1973. ⁴ К. О. Джапаридзе, Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов, ТГУ, Тбилиси, 1981. ⁵ М. С. Гиноян, Зап. науч. семинаров ЛОМІІ, т. 108 (1981). ⁶ А. Г. Осидзе, Сообщ. АН ГССР, т. 74, № 2 (1974). ⁷ А. Г. Осидзе, Сообщ. АН ГССР, т. 77, № 2 (1975). ⁸ Н. Ароншайн, Сб. переводов «Математика», т. 7, № 2 (1963).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян

**Вынужденные колебания тонкой идеально проводящей пластинки
 в продольном магнитном поле**

(Представлено 26/IV 1984)

Рассматривается задача вынужденных колебаний идеально проводящей тонкой пластинки в продольном магнитном поле, когда пластинка под действием нормально приложенной нагрузки колеблется по форме цилиндрической поверхности, а продольное магнитное поле направлено перпендикулярно образующим этой поверхности.

Показано существенное влияние напряженности магнитного поля на частоту и амплитуду колебания пластинки.

1. Пусть идеально проводящая, упругая изотропная тонкая пластинка постоянной толщины $2h$ под действием поперечной нагрузки $P(x, t)$ колеблется во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}$, направленным по оси ox . Пластинка отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $хоу$. Граничные условия, нагрузка и форма пластинки таковы, что она колеблется по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии $оу$. Считается, что пластинка совершает симметричные колебания, т. е. прогиб пластинки $w(x, t)$ является четной функцией переменной x в области пластинки $[-a, a]$.

Задача решается в линейной постановке ^(1,2), при этом принимаются следующие предположения ⁽¹⁻³⁾: а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях; б) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и окружающей среды считаются равными единице; в) влияние токов смещения на характеристики колебаний не учитываются.

В силу принятых предположений задача вынужденных колебаний идеально проводящей пластинки, занимающей область $x \in [-a, a]$ в продольном магнитном поле $\vec{H}(H, 0, 0)$, сводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{hH^2}{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = P(x, t) - \frac{H^2}{2\pi^2} \int_{-a}^x \frac{1}{x-\xi} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-\xi^2}} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, E — мо-

дуль упругости, ν —коэффициент Пуассона, ρ —плотность материала пластинки, ε —коэффициент затухания при отсутствии магнитного поля

2. Рассмотрим задачу вынужденных колебаний шарнирно-опертой по краям $x = -a$, $x = a$ пластинки-полосы шириною $2a$, под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, t) = P(x) \sin \omega t$.

Решение исходного уравнения (1.1) будем искать в виде бесконечного ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{2n-1}{2a} \pi. \quad (2.1)$$

Представление (2.1) удовлетворяет известным условиям шарнирного опирания по краям $x = -a$, $x = a$, а также требованию четности функции $w(x, t)$ по переменной x .

Подставляя (2.1) в (1.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(t)$:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_m}{dt} + \Omega_m^2 f_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_n(t) = c_m \sin \omega t \quad (2.2)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{где} \quad \Omega_m^2 = \Omega_{0m}^2 + \frac{hH^2}{4\rho h} \lambda_m^2, \quad \Omega_{0m}^2 = \frac{D\lambda_m^4}{2\rho h},$$

$$a_{mn} = -\frac{\lambda_n H^2}{4\rho h a \pi^2} \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{1}{x-\xi} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-\xi^2}} \sin \lambda_n \xi d\xi \right) \cos \lambda_m x dx =$$

$$= \frac{H^2}{4\rho h a} \left[\mu_n J_0(\mu_m) J_1(\mu_n) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k J_{2k}(\mu_m) J_{2k}(\mu_n) \right],$$

$$\mu_k = a \lambda_k, \quad c_m = \frac{1}{2\rho h a} \int_{-a}^a P(x) \cos \lambda_m x dx,$$

Ω_{0m} —частоты собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, J_k —функции Бесселя действительного аргумента. При вычислении коэффициентов a_{mn} использованы следующие известные соотношения: $\cos(z \cos \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z) \cos 2k\theta$, $\sin(z \cos \theta) =$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J_{2k-1}(z) \cos(2k-1)\theta, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi},$$

$$(k=0, 1, 2, \dots),$$

Если возмущающая сила отсутствует ($c_m = 0$), то уравнения (2.2) являются однородными и характеризуют собственные магнитоупругие колебания идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Исследование влияния магнитного поля на частоту свободных колебаний для простоты проводим, принимая $\varepsilon = 0$. Тогда из (2.2) полу-

чим следующие уравнения собственных магнитоупругих колебаний пластинки:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \Omega_m^2 f_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_n(t) = 0. \quad (2.4)$$

Представим решение системы (2.4) в виде

$$f_n(t) = A_n e^{i\omega t}, \quad (2.5)$$

где ω — частота колебаний пластинки, A_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.5) в систему (2.4), приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно A_n :

$$(\Omega_m^2 - \omega^2) A_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} A_n = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.6)$$

Отсюда для определения частоты колебаний получим следующее характеристическое уравнение:

$$|(\Omega_m^2 - \omega^2) \delta_{mn} + a_{mn}| = 0. \quad (2.7)$$

Легко показать ⁽⁴⁾, что определитель (2.7) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из (2.7) для первой частоты магнитоупругих колебаний получается выражение

$$\omega_1^2 = \Omega_{01}^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{ah} \right), \quad (2.8)$$

где использовано, что $J_0(\mu_1) = 0,484$; $J_1(\mu_1) = 0,564$; $J_2(\mu_1) = 0,244$, а также тот факт, что значения $J_k(\mu_1)$ для $k > 4$ меньше 10^{-2} .

Формула (2.8) подтверждает известный факт, что наличие продольного магнитного поля приводит к увеличению частоты колебаний пластинки ^(1,2). В табл. 1 приведены значения относительной частоты $\bar{\Omega}_1 = \omega_1/\Omega_{01}$ при различных значениях h/a и напряженности магнитного поля. Таблица составлена по уравнению (2.8) при $\nu = 0,36$; $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см² (отожженный алюминий).

Таблица 1

Значения ω_1/Ω_{01}					
$\frac{10^{-3} \cdot H, \text{э}}{10^2 h/a}$	1	5	10	20	30
1	1,049	1,871	3,317	6,403	9,531
2	1,007	1,145	1,500	2,449	3,500
0,5	1,342	4,583	9,00	17,92	26,85

Из таблицы видно, что магнитное поле напряженности $5 \cdot 10^3$ эрстед в случае тонких пластинок может в несколько раз увеличить частоту упругих колебаний.

Вернемся к основной задаче вынужденных колебаний пластинки, ограничиваясь первым приближением. Тогда из системы (2.2) в силу (2.8) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \epsilon \frac{df_1}{dt} + \omega_1^2 f_1 = c_1 \sin \omega t, \quad (2.9)$$

Общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$f_1(t) = (B_1 \cos pt + B_2 \sin pt) e^{-\epsilon t/2} + M_1 \cos \omega t + M_2 \sin \omega t, \quad (2.10)$$

где B_1 и B_2 — постоянные, которые в каждом частном случае должны быть определены из начальных условий,

$$M_1 = - \frac{\epsilon \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\epsilon \omega)^2} c_1, \quad (2.11)$$

$$M_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\epsilon \omega)^2} c_1; \quad p^2 = \omega_1^2 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2.$$

Первый член правой части представления (2.10), содержащий множитель $e^{-\epsilon t/2}$, описывает свободные затухающие магнитоупругие колебания пластинки. В дальнейшем будем рассматривать только вторую часть общего решения (2.10), которая описывает установившиеся вынужденные колебания, имеющие место только по истечении времени, необходимого для затухания свободных колебаний. Амплитуда этих колебаний в случае, когда частота вынуждающей силы равна первой резонансной ($\omega = \Omega_{01}$), можно представить в виде

$$A = c_1 [(\omega_1^2 - \Omega_{01}^2)^2 + (\epsilon \Omega_{01})^2]^{-1/2}. \quad (2.12)$$

При этом если отсутствует магнитное поле ($\omega_1 = \Omega_{01}$, $H = 0$), из (2.12) для амплитуды резонансных колебаний получим известное выражение (5)

$$A_0 = c_1 (\epsilon \Omega_{01})^{-1}. \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.12) с (2.13) можем записать

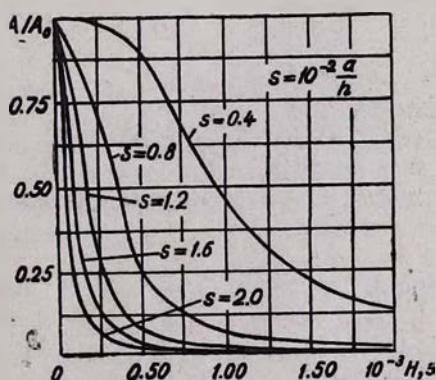
$$A = A_0 \left[1 + \left(\frac{\omega_1^2 - \Omega_{01}^2}{\epsilon \Omega_{01}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.14)$$

из которого видно, что присутствие магнитного поля может существенно уменьшить амплитуду вынужденных колебаний в области резонанса. Учитывая (2.8), формулу (2.14), с точностью $1 + h/a \approx 1$, можно представить в виде

$$A = A_0 \left\{ 1 + \left[\frac{48(1 - \nu^2)}{\pi^4} \frac{H^2}{\psi E} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (2.15)$$

где $\psi = 2\pi\epsilon/\Omega_{01}$ — относительное рассеяние энергии вследствие конструкционного демпфирования.

На основании уравнения (2.15) произведены вычисления относительной амплитуды вынужденных магнитоупругих колебаний пластинки в зависимости от напряженности заданного магнитного поля при различных значениях h/a . Для расчета принято $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см²; $\nu = 0,36$; $\psi = 0,03$. Результаты подсчета значений A/A_0 приведены в табл. 2 и на рисунке.



Значения A/A_0

$\frac{10^{-3}H, \text{э}}{10^{-2}a/h}$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	10
0.4	1	0.902	0.462	0.225	0.129	0.0052
0.8	1	0.252	0.065	0.0289	0.0163	0.000641
1.2	1	0.0769	0.0193	0.00857	0.00482	$0.193 \cdot 10^{-3}$
1.6	1	0.0325	0.00814	0.00362	0.00203	$0.813 \cdot 10^{-4}$
2.0	1	0.0167	0.00417	0.00185	0.00104	$0.417 \cdot 10^{-4}$

Рассматривая таблицу и приведенные кривые, замечаем, что при наличии магнитного поля амплитуда резонансных колебаний существенно уменьшается (при $2h/a = 10^{-2}$; $H = 1 \cdot 10^3$ э амплитуда колебаний уменьшается более чем в 900 раз).

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐԶՈՒՄՅԱՆ, Գ. Ն. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ

Իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում ստացված է անվերջ էլեկտրահաղորդականություն ունեցող սալի ստիպողական տատանումների հավասարումը երկայնական մագնիսական դաշտում: Ստացված հավասարման հիման վրա ուսումնասիրված են հոդակապորեն ամրացված սալի ազատ և ստիպողական տատանումները: Ստացված են բանաձևեր սեփական տատանումների հաճախականության և ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաների որոշման համար: Ցույց է տրված, որ երկայնական մագնիսական դաշտի առկայությունը կարող է մի քանի անգամ մեծացնել սեփական տատանումների հաճախականությունը և էապես փոքրացնել ռեզոնանսային տատանումների ամպլիտուդան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² S. Kaliski, Proc. Vibration Probl., v. 3, № 4 (1962). ³ Г. Е. Багдасарян, Прикладная механика, т. 19, № 12 (1983). ⁴ В. В. Болотин, Некоэрвативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961. ⁵ С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, Физматгиз, М., 1959.

УДК 624.131.536 : 550.34

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. Мазманиян

Методика расчета на сейсмическое воздействие
 упругого сооружения, заглубленного в упругопластический
 слой грунта

(Представлено академиком АН Армянской ССР | А. Г. Назаровым | 13/XII 1982)

В статье рассматривается взаимодействие сооружения с упруго-пластическим грунтовым основанием при сейсмическом воздействии. Для грунтового основания (рис. 1) рассмотрим систему уравнений (1), включающую

а) геометрические соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (1)$$

б) уравнение состояния грунта

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}); \quad (2)$$

в) уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} + P_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (3)$$

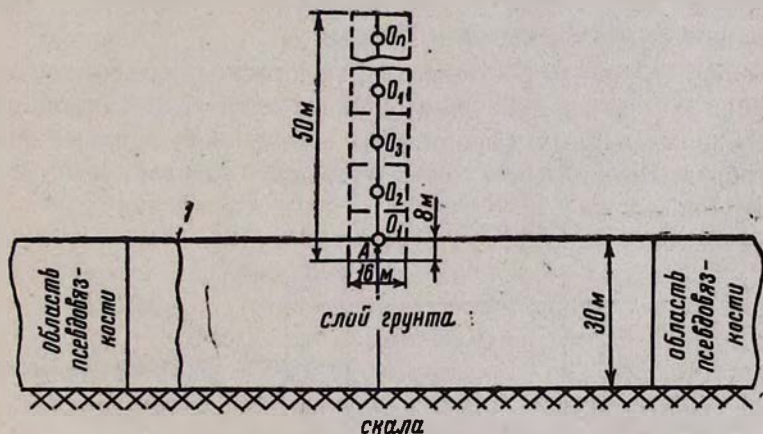


Рис. 1. Расчетная схема сооружения, заглубленного в слой грунта. I—сечение слоя задания сейсмограммы.

Для решения задачи применен алгоритм численного решения динамических и статических задач теории упругости (2). Пластические деформации в основании сооружения учитываются по деформационной теории Мора—Кулона (3). Предельная поверхность в плоскости инвариантов σ , σ_1 представляет собой прямую линию на рис. 2

$$f = \sigma_i + k \cdot \sigma - C = 0, \quad (4)$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{S_{xx}^2 + S_{xy}^2}; \quad S_{xx} = -S_{yy} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad S_{xy} = \tau; \quad (5)$$

k и C — параметры прочности грунта.

В качестве основного принципа, положенного в основу построения теории пластичности, принимается принцип максимума Мизеса. Из принципа Мизеса следует ассоциированный с функцией нагружения закон течения

$$dz_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} d\lambda, \quad (6)$$

$d\lambda$ — скалярная бесконечно малая положительная величина.

В теории пластичности принимается, что полные деформации состоят из упругой и пластической части

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (7)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука (2). Таким образом, при вычитании из полных деформаций их упругой части получаем пластические деформации. Упругие постоянные в процессе нагрузки и разгрузки остаются теми же самыми.

Порядок расчета пластических деформаций следующий.

1. По полным деформациям исходя из закона Гука (2) определим некоторые фиктивные напряжения σ_x , σ_y и τ и по формуле (5) найдем соответствующие инварианты σ_i , σ .

2. Если $\bar{\sigma}_i \leq -k\sigma + C$, то материал работает в упругой стадии, приращение пластических деформаций не происходит и найденные напряжения σ_x , σ_y и τ будут истинными.

3. Если $\bar{\sigma}_i > -k\sigma + C$ (точка $\tilde{M}\{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_i\}$ расположена выше предельной (рис. 2)), то за счет приращения пластических деформаций при фиксированных полных деформациях напряжения должны измениться таким образом, чтобы они соответствовали условию (4) (M на рис. 2). Таким образом,

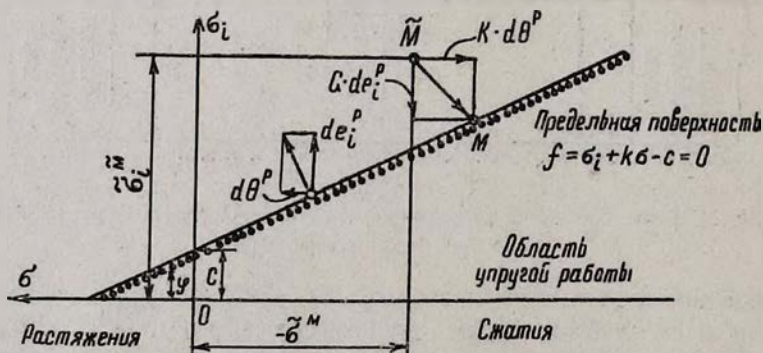


Рис. 2. К определению пластических деформаций по теории идеально упруго-пластического тела

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \bar{\sigma}_i - G de_i^p = \bar{\sigma}_i - G \cdot d\lambda \\ \sigma &= \bar{\sigma} - K \cdot d\theta^p = \bar{\sigma} - k \cdot K \cdot d\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где de_i^p и $d\theta^p$ — приращения инвариантов пластических деформаций на данном временном шаге Δt .

Подставляя (8) в (4), находим

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma}_i + k\sigma - C}{G + k^2 \cdot K}. \quad (9)$$

Вычислив значение $d\lambda$, по формуле (8) найдем истинные значения инвариантов σ_i , σ , соответствующие точке M . Компоненты девиатора напряжений могут быть определены из соотношения, аналогичного (8):

$$S_{ij} = \bar{S}_{ij} - G de_{ij}^p = \bar{S}_{ij} - G \cdot S_{ij} \cdot d\lambda / \sigma_i,$$

откуда

$$S = \frac{\bar{S}_{ij}}{1 + G d\lambda / \sigma_i}. \quad (10)$$

Учитывая, что $\sigma_x = \sigma + S_{xx}$, $\sigma_y = \sigma + S_{yy}$, $\tau = S_{xy}$, вычислим все компоненты напряжений и при необходимости найдем приращения пластических деформаций по формулам

$$de_i^p = d\lambda; \quad d\theta^p = k d\lambda; \quad de_{ij}^p = \frac{S_{ij}}{\sigma_i} d\lambda. \quad (10)$$

Изложенная методика учета пластических деформаций приведена в (4).

Учет упругих свойств сооружения основывается на общей теории относительного движения, описанной в (5). Для учета податливости разобьем сооружение на n секций и будем следить за перемещениями центров тяжести $o_1, o_2, \dots, o_n$ секций (рис. 1). Введем подвижную систему координат $o_1 x_1 y_1$, жестко связанную с сооружением. Такой выбор обусловлен расчетной моделью. Принимаем, что сооружение вращается как жесткое тело относительно точки o_1 и имеет малые деформации сдвига и растяжения-сжатия для каждой секции. Такое движение упругого сооружения под действием сейсмических сил можно разложить на движение системы координат $o_1 x_1 y_1$ относительно неподвижной системы oxy (переносное движение) и движение точек $o_2, \dots, o_n$ относительно системы $o_1 x_1 y_1$ (относительное движение). Очевидно, движение системы будет совпадать с движением абсолютно жесткого сооружения, а относительное смещение точек $o_2, \dots, o_n$ будет описывать деформацию сооружения. Обозначим через ξ и η проекции смещения точек o_1 относительно неподвижной системы отсчета oxy и через θ угол поворота системы $o_1 x_1 y_1$ относительно своего начала (точки o_1). Уравнения движения абсолютно жесткого сооружения (уравнения переносного движения) запишем в виде

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = R_x; \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = R_y - Mg; \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M_z, \quad (12)$$

где M — масса сооружения; I — собственный момент инерции соору-

жения относительно центра тяжести; R_x и R_y — компоненты сил, действующих на фундамент сооружения со стороны грунта; M_z — момент этих сил относительно центра тяжести сооружения. Переходя к относительному движению, обозначим x_i и y_i координаты точек o_i ($i=2, 3, \dots, n$) относительно системы $o_1x_1y_1$ в статическом (неподвижном) состоянии. Без ограничения общности можно считать, что все $x_i=0$ ($i=2, 3, \dots, n$). Обозначим через u_i и v_i малые перемещения точек o_i в относительном движении, так что в процессе движения точки o_i будут иметь относительные координаты u_i и y_i+v_i ($i=2, 3, \dots, n$). Со стороны $i+1$ -ой секции действует реакция, имеющая проекции на подвижные оси Q_{i+1} и N_{i+1} , а со стороны i -ой секции — реакция с компонентами Q_i и N_i и, наконец, сила тяжести, имеющая проекции на подвижные оси $m_i g \sin \theta$ и $m_i g \cos \theta$. Таким образом, уравнения движения i -ой секции запишем в виде:

$$m_i \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \sin \theta - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (y_i + v_i) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 u_i - 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dv_i}{dt} + \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right] = Q_{i+1} - Q_i - m_i g \sin \theta; \quad (13)$$

$$m_i \left[\frac{d^2 \eta}{dt^2} \cos \theta - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \sin \theta + \frac{d^2 \theta}{dt^2} u_i - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (y_i + v_i) + 2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{du_i}{dt} + \frac{d^2 v_i}{dt^2} \right] = N_i - N_{i+1} - m_i g \cdot \cos \theta,$$

где m_i — масса i -ой секции сооружения. Для оси Q_i и N_i принимаем следующие уравнения:

$$Q_i = G F_i \frac{u_i - u_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}; \quad N_i = E F_i \frac{v_i - v_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, \quad (14)$$

где F_i — площадь поперечного сечения сооружения i -ой и $i-1$ -ой секций; E и G — модуль упругости и модуль сдвига материала сооружения. Граничные условия для первой секции запишем в виде $y_1 = v_1 = u_1 = 0$. Подставляя в уравнения (13) вместо $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$, $\frac{d^2 \eta}{dt^2}$, $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ из (12), Q_i и N_i из (14) их выражения, получим дифференциальные уравнения для вычисления u_i и v_i :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{dt^2} &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 u_i + 2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dv_i}{dt} + \frac{M_z}{I} (y_i + v_i) - \frac{R_x}{M} \cos \theta - \\ &\quad - \frac{R_y}{M} \sin \theta + \frac{G}{m_i} \left(F_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{y_{i+1} - y_i} - F_i \frac{u_i - u_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \right); \\ \frac{d^2 v_i}{dt^2} &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (y_i + v_i) - 2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dv_i}{dt} - \frac{M_z}{I} u_i + \frac{R_x}{M} \sin \theta - \\ &\quad - \frac{R_y}{M} \cos \theta + \frac{E}{m_i} \left(F_i \frac{v_i - v_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} - F_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{y_{i+1} - y_i} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Произведен численный расчет тринадцатизэтажного сооружения. В качестве внешнего воздействия задана сейсмограмма землетрясения

«San Fernando» 2.09.1971 г. Закон изменения сейсмограммы по глубине слоя подбирается по методике, предложенной в работе ⁽⁶⁾. Задача реализована на ЭВМ «М-22» при следующих исходных данных. Параметры сооружения: модуль упругости 450 МПа; модуль сдвига 250 МПа; высота 50 м; ширина 16 м; степень заглубления фундамента 8 м. Параметры грунта: статический модуль упругости 60 МПа; дина-

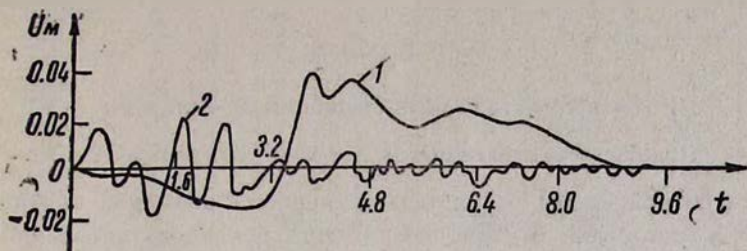


Рис. 3. Сопоставление сейсмограмм: 1—заданная сейсмограмма (горизонтальная компонента); 2—расчетная сейсмограмма тринадцатого этажа.

мический модуль упругости 80 МПа; удельный вес $15 \cdot 10^3$ н/м³; коэффициент Пуассона 0,4; коэффициент внутреннего трения 0,6; сцепление $15 \cdot 10^{-3}$ МПа.

На рис. 3 сопоставлены сейсмограммы (заданная и расчетная) тринадцатого этажа (горизонтальные компоненты).

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՄԱԶՄԱՆՅԱՆ

Առաձգա-պլաստիկ գրունտային շերտի մեջ խորացված առաձգական կառույցի հաշվման մեթոդիկա սեյսմիկական ազդեցության դեպքում

Հորվածում դիտարկվում է առաձգական կառույցի խնդիր հարաբերական տեսության հիման վրա: Կառույցի հիմնատակում պլաստիկ դեֆորմացիաները հաշվի են առնվում ըստ Մոր—Կուլոնի տեսության: Հաշվված են դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնց լուծումն իրականացված է էՀՄ «Մինսկ—22»-ի վրա: Որպես օրինակ հաշվարկված է 13 հարկանի կառույց, կոնկրետ սեյսմիկական ազդեցության դեպքում: Ստացված են միջհարկային ծածկերի և գրունտային շերտի համար սեյսմոգրամի, ակսելերոգրամի հաշվարկային գրանցումներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. П. Тимошенко, Р. Ж. Гудьер, Теория упругости, Наука, М., 1975. ² В. Н. Ломбардо, Изв. ВНИИГ, т. 103 (1973). ³ В. Т. Койтер, Общие теоремы теории упругопластических сред, ИЛ, М., 1961. ⁴ С. С. Дарбинян, А. Г. Мазманиян, Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Материалы V Всесоюзной конференции, т. 2, Ташкент, 8—10 декабря 1981. ⁵ Л. Аппель, Теоретическая механика, т. 1, Наука, М., 1961. ⁶ А. Г. Мазманиян, ДАН АрмССР, т. 76, № 3 (1983).

УДК 523.855

АСТРОФИЗИКА

С. Г. Искударян

Размеры центральных сгущений Sc галактик

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 11/XI 1983)

В статье приведены результаты измерений размеров центральных сгущений Sc галактик. В столбцах таблицы последовательно приводятся порядковые и NGC номера галактик, бюраканские классы, размеры ядер в секундах дуги в голубом и желтом цветах, логарифмы линейных размеров в тех же цветах, цвета и абсолютные фотографические яркости ядер (^{1,2}) ($H=75$ км/сек Мпс).

В таблицу не входят галактики бюраканского класса 1 и некоторые галактики бюраканского класса 2 (NGC 1003, 2537, 5474, 5668), границы центральных сгущений которых на снимках были неопределенными. Все приведенные в таблице данные обсуждены и использованы в работе (³).

В настоящей работе впервые даны результаты массовых измерений центральных сгущений одного класса объектов.

№	NGC JC _*	БК	d''(o)	d''(g)	lgD _o	lgD _g	CJ _я	M _я
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	157	5	3.6	5.1	2.66	2.81	+1.4	-15.6
2	214	2	6.8	9.0	3.33	3.45	1.5	16.7
3	428	2	2.3	2.4	2.25	2.25	0.8	12.9
4	514	4	4.8	4.6	2.94	2.92	0.4	16.4
5	598	5	4.6	4.1	1.20	1.15	0.8	10.4
6	628	2	6.6	7.2	2.46	2.50	1.1	12.3
7	753	2	4.3	—	3.16	—	—	16.4
8	877	2	3.8	—	3.02	—	—	16.8
9	925	2	3.4	8.0	2.19	2.56	0.2	12.5
10	1058	4	5.7	4.8	2.41	2.34	0.5	14.1
11	1084	2	8.7	—	2.95	—	—	14.8
12	1087	4	6.6	6.7	2.90	2.91	0.2	15.8
13	342	4	6.3	5.1	1.96	1.87	0.5	14.6
14	1637	4	4.4	3.4	2.34	2.23	1.3	14.3
15	2268	4	3.2	3.4	2.73	2.76	1.2	17.0
16	2276	4	3.4	3.9	2.77	2.83	0.4	16.9
17	2441	2	4.6	—	3.06	—	—	15.7
18	2500	2	3.4	—	2.73	—	—	14.9
19	2715	2	4.4	—	2.59	—	—	13.2
20	2748	2	3.2	—	2.55	—	—	14.2
21	2776	2	2.3	—	2.64	—	—	14.8
22	2903	2	5.7	2.3	2.35	1.96	0.0	16.3
23	2964	4	6.3	7.2	2.73	2.79	1.6	15.1
24	2967	2	3.3	—	2.65	—	—	14.6
25	2976	2	3.5	—	1.71	—	—	10.0

1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	3055	4	5.9	6.8	2.83	2.89	+0.2	-16.3
27	3162	4	9.0	4.8	2.91	2.64	0.4	16.0
28	3184	4	6.7	4.3	2.52	2.33	0.3	16.1
29	3198	2	6.8	—	2.07	—	—	11.9
30	3294	2	5.6	—	2.74	—	—	13.9
31	3338	2	5.9	—	2.67	—	—	12.8
32	3344	5	5.1	4.6	2.43	2.38	1.1	15.8
33	3370	4	5.4	5.1	2.67	2.64	0.7	15.7
34	3389	2	6.5	—	2.72	—	—	13.4
35	3395	2	4.6	4.8	2.72	2.74	0.9	14.3
36	3396	4	4.8	5.1	2.71	2.74	-0.6	17.2
37	3430	2	4.7	6.0	2.73	2.83	-0.4	14.8
38	3432	2	2.6	—	2.18	—	—	13.6
39	3486	4	3.8	5.7	2.43	2.61	+0.5	16.1
40	3512	4	3.6	4.2	2.54	2.61	0.7	15.4
41	3556	2	5.5	5.8	2.30	2.32	-0.8	12.6
42	3631	2	4.1	—	2.50	—	—	14.5
43	3646	4	4.3	4.9	3.09	3.15	+1.4	18.1
44	3672	2	7.1	—	2.94	—	—	14.5
45	3684	2	6.0	5.7	2.72	2.70	-0.2	13.6
46	3726	4	3.6	5.2	2.38	2.54	+0.3	15.6
47	3810	4	5.5	7.8	2.50	2.65	1.5	14.4
48	3893	4	3.5	6.2	2.41	2.66	1.2	15.3
49	3938	2	3.6	—	2.33	—	—	13.8
50	3949	2	4.7	5.6	2.37	2.45	1.6	13.3
51	3995	5	2.2	4.0	2.65	2.95	-0.1	18.3
52	4030	2	3.6	—	2.51	—	—	15.1
53	4038	4	4.0	3.5	2.59	2.54	0.0	16.0
54	4039	4	3.5	3.5	2.53	2.53	+0.5	15.8
55	4136	4	4.2	4.6	2.36	2.40	0.3	14.4
56	4162	4	3.6	3.6	2.78	2.78	0.8	16.6
57	4178	2	4.8	5.6	2.50	2.58	0.3	12.7
58	4212	4	5.5	2.8	2.56	2.27	1.0	15.2
59	4254	4	2.8	4.6	2.27	2.48	1.0	15.3
60	4303	4	4.7	2.4	2.49	2.20	0.4	17.6
61	4414	2	4.0	3.1	2.32	2.21	0.7	14.5
62	4490	2	12.4	10.0	3.09	3.00	-1.4	15.7
63	4519	2	10.3	—	2.83	—	—	13.1
64	4535	4	3.6	2.5	2.38	2.22	+0.8	15.4
65	4559	5	2.8	2.5	2.20	2.15	0.9	13.9
66	4567	5	5.1	3.2	2.53	2.32	-0.2	16.5
67	4568	2	6.4	7.3	2.62	2.68	+1.2	13.2
68	4647	2	8.6	—	2.75	—	—	13.9
69	4666	2	3.6	—	2.38	—	—	13.4
70	4713	2	6.4	—	2.56	—	—	13.1
71	4775	2	10.1	—	3.02	—	—	14.5
72	4781	2	8.0	—	2.66	—	—	13.0
73	4793	4	2.2	3.4	2.57	2.76	0.5	18.0
74	4900	2	8.0	—	2.71	—	—	13.0
75	5033	2	4.1	4.4	2.43	2.46	1.7	13.6
76	5194	4	3.3	3.9	1.72	1.81	1.1	13.1
77	5204	2	5.7	—	1.92	—	—	9.8
78	5248	2	3.4	8.0	2.41	2.78	1.2	14.0
79	5301	2	6.7	—	2.90	—	—	13.8
80	5364	2	4.8	4.8	2.64	2.64	-1.0	14.2
81	5457	2	5.1	3.6	1.87	1.72	+1.6	10.1
82	5468	2	6.8	—	3.09	—	—	15.2
83	5585	2	4.4	4.0	1.81	1.76	+0.6	10.2
84	5653	2	4.8	—	3.06	—	—	16.7
85	5668	2	—	5.8	—	2.82	-0.4	14.3
86	5676	2	6.5	6.3	3.02	3.00	+1.0	15.5
87	5678	2	5.5	4.4	2.96	2.86	1.2	14.8
88	5962	2	4.7	6.0	2.80	2.91	1.8	14.9
89	6015	2	9.1	4.8	2.72	2.44	0.1	12.6
90	6070	2	9.3	4.8	3.12	2.84	-0.3	15.3
91	6181	2	4.4	4.7	2.83	2.86	+1.4	15.3
92	6207	5	4.0	3.6	2.46	2.41	0.1	17.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
93	6217	5	4.6	3.4	2.69	2.56	0.00	-18.00
94	6412	4	4.6	3.5	2.73	2.61	+0.3	15.8
95	6503	2	5.7	6.3	2.37	2.42	0.6	12.9
96	6946	4	4.8	5.1	2.02	2.05	0.8	13.6
97	7448	4	3.5	3.4	2.79	2.78	1.4	17.3
98	7541	2	4.0	—	2.88	—	0.9	15.4
99	7606	2	4.3	6.8	2.86	3.06	1.7	15.1
100	7678	4	2.2	3.6	2.73	2.94	0.3	17.7
101	7769	5	4.0	3.2	3.08	2.99	0.7	18.9

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ԻՍԿՈՒՂԱՐՅԱՆ

Sc ախլի աստղային համակարգերի կենտրոնական խտացումների չափերը

Ներկա աշխատանքն առաջինն է, որ մասսայաբար տալիս է մի դասի օբյեկտների կենտրոնական խտացումների չափերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ С. Г. Искударян, Астрофизика, т. 4, 385 (1968). ² С. Г. Искударян, Сообщ. Бюраканской обс., т. 46, 62 (1975). ³ С. Г. Искударян, ДАН АрмССР, т. 79, № 5 (1984)

УДК 550.343.5 : 551.242.1 (479)

ТЕКТНИКА

Академик АН Армянской ССР А. А. Габриелян, С. А. Пирузян,
Э. А. Чартарян

О сейсмичности транскавказской зоны дислокаций

(Представлено 19/X 1983)

Детальное изучение земной коры геологическими и геофизическими методами в сейсмоактивных областях и создание правильной модели строения литосферы являются главным условием научного подхода к решению важнейшей научной проблемы прогноза землетрясений.

По нашему мнению, среди многочисленных факторов, контролирующих пространственное распределение эпицентров землетрясений и их интенсивность, наиболее важными являются: возраст главной (завершенной) складчатости (время становления гранитно-метаморфического слоя); глубинные разломы, и в частности действовавшие в неотектоническом этапе и выраженные в рельефе; поперечные дислокации (поднятия, прогибы, разломы) и, в частности, узлы их пересечения с продольными тектоническими зонами; новейшие тектонические движения, их амплитуда и характер; перестройка знаков движений в отдельные тектонические периоды и эпохи, а также соотношение плана новейших (в частности, четвертичных) и более древних структурных зон.

Одним из важнейших структурных элементов, контролирующими сильные землетрясения на Антикавказе, является Транскавказская зона поперечных поднятий и разломов, уточнению структуры и краткой сейсмологической характеристике которой посвящена данная статья.

Эта зона—одна из крупных трансзональных тектонических структур на юге СССР, тянущаяся в субмеридиональном направлении от южной части древней Восточно-Европейской платформы на севере, через скифскую эпигерцинскую молодую плиту и центральные приподнятые части мегантиклинория Большого Кавказа, Закавказской межгорной впадины и мегантиклинория Антикавказа и до Битлисского выступа байкальского основания у оз. Ван на юге (¹).

Вдоль этой зоны поднятий расположены выходы байкальского и герцинского основания на Большом Кавказе (центральный горст-антиклинорий), на Закавказском срединном массиве (Дзирульский, Храмский, Локский массивы), а также на Перигондванской части Анатолийско-Иранской микроплиты (Арзаканский и Битлисский массивы).

Это—особая зона дислокаций, охватывающая, как это впервые отметил Н. С. Шатский (²), и геосинклинальные складчатые области и платформы. Тектонопарой ее можно считать региональную зону прогибания, протягивающуюся почти параллельно ей и охватывающую

Восточно-Русскую впадину, Прикаспийскую синсклизу и впадину Каспийского моря.

Транскавказская зона поднятия особенно интенсивно развивалась в позднеорогенную эпоху альпийского периода (плиоцен-антропоген) и обусловила мощное проявление эффузивного вулканизма оливин-базальтовой и андезито-базальтовой формации—Джавахетское вулканическое нагорье с многочисленными линейно расположенными вулканическими аппаратами, стратовулканы Арагац, Арарат, Немрут, Тондурек, Сипан и др. В пределах Антикавказа с этой зоной связаны очаги разрушительных землетрясений Ахалкалакского нагорья, Ленинанкана, Ани, Текора, Аруча, склонов гор Арагац и Арарат (3). Можно полагать, что Транскавказская зона контролировала также фациальные различия отложений миоцена на Центрально-Анатолийско-Иранском срединном массиве. Западнее ее (в Анатолии) распространены преимущественно морские отложения, а восточнее (в Иране)—лагунные.

Время заложения Транскавказской зоны дислокаций на Кавказско-Анатолийском сегменте пока точно не установлено, однако имеются факты, свидетельствующие о том, что оно датируется началом альпийского периода геологической истории данного региона—юрой.

В этот период уже наблюдается отчетливо выраженная поперечная асимметрия в развитии геосинклинали Большого Кавказа. Восточная (прикаспийская) половина последней испытывала гораздо более интенсивное погружение (мощность юрских отложений свыше 8 км), чем западная (причерноморская) часть, где мощность юрских отложений не превышает 3 км. Эти два сегмента юрской геосинклинали Б. Кавказа были разделены поперечным поднятием в верховьях рек Терек и Ардон, расположенным в Транскавказской зоне дислокаций.

Любопытно, что в неотектоническом этапе Восточный блок мегантиклинория Б. Кавказа испытывал более интенсивное поднятие (5—6 км), чем западный, причерноморский блок. Вероятно, об этом свидетельствуют также значительные фациальные различия юрских образований в Восточной Анатолии и на Антикавказе, т. е. сегментов, расположенных восточнее и западнее описываемой дислокационной зоны.

Транскавказская поперечная зона дислокации, по геологическим и геофизическим данным, имеет ширину порядка 60—70 км и состоит из ряда параллельных (субпараллельных) близмеридиональных разломов, поднятий и прогибов. Однако среди этих многочисленных структур наиболее крупными являются ограничивающие эту зону с запада и востока глубинные разломы и поднятия. Западная подзона (полоса) дислокаций (назовем условно Ергени-Ванской) фиксируется приблизительно в направлении город Буденовск—город Нальчик—верховья реки Ардон—город Квайси—Дзирульский выступ байкальского основания—Ахалкалакское вулканическое нагорье—город Ленинанкан—пос. Талин—оз. Ван. При этом осевая линия этой полосы разломов проходит примерно по меридиану 43°8.

Восточная подзона разломов, собственно Казбек-Араратская (4), тянется с севера на юг, примерно по линии город Моздок—верховья реки Терек—Казбек—Арагац (восточный склон)—Арарат—район стыковки складчато-горных хребтов Таврид и Загроса. Осевая линия под-

зоны разломов проходит примерно по меридиану 44°3. На этой линии разломов расположены Храмский и Локский массивы, сложенные рифейским метаморфическим комплексом пород и фанерозойским чехлом.

Восточнее этой подзоны, параллельно ей, в пределах Армении тянется другая (дочерняя) зона поднятия по линии Алавердский антиклинорий—Тандзутское поперечное поднятие—Арзаканский антиклинорий. Вдоль этой зоны расположены киммерийские и альпийские интрузии гранитоидов, а также субвулканические и эффузивные фации пород эоцена. Западнее и восточнее этой поперечной зоны вулканогенные фации замещаются туфоосадочными образованиями. В Среднеараксинской впадине это поднятие обуславливает фациальное различие в миоценовых отложениях (соленосные на северо-востоке и терригенно-молассовые на юго-западе).

Первые результаты, относящиеся к проявлению в Армении восточной из описанных подзон—Казбек-Арабатского глубинного разлома по геофизическим данным опубликованы в 1965 г. (5).

В дальнейшем указанные две подзоны (полосы) глубинных разломов в пределах западного сегмента территории республики были подтверждены результатами специальных комплексных геофизических исследований, выполненных в связи с определением сейсмической опасности площадки строительства Армянской АЭС (6), а также данными исследования закономерностей размещения магматизма и оруденения южной части Антикавказа (7).

С указанными краевыми подзонами глубинных разломов и их ответвлениями связано огромное количество эпицентров сильных и разрушительных землетрясений Кавказа и Восточной Анатолии. Так, с западной Ергени-Ванской подзоной связаны эпицентры следующих семи—девятибалльных землетрясений: Нальчикское 1956 г. (VII баллов), Мизурское 1902 г. (VII б.), Зарамагское 1917 г. (VII б.), Тамисское 1922 г. (VII б.), Онийская группа землетрясений 435, 1250, 1877, 1902 гг. (VII—VIII б.), Табацкурское 1940 г. (VIII б.), Ахалкалакское 1899 г. (VIII—IX б.), Гомеретское 1959 г. (VII б.), Мадатапское 1959 г. (VII б.), Ленинанканская группа 1924, 1926 гг. (VII, VIII—IX б.), Ани-Текорская группа 1046, 1132, 1319, 1935 гг. (VII—VIII б.), Аручское 972 г. (VIII б.), Илдырское 1962 г. (VII—VIII б.), Ванская группа 741, 881, 1205, 1701, 1940, 1945 гг., в том числе Калдеранское 1976 г. (IX б.), а также ряд такого же класса землетрясений южнее оз. Ван.

С восточной, Казбек-Арабатской, подзоной связаны землетрясения: Дарьяльское 1915 г. (VII б.), Гудамарское 1947 г. (VII б.), Картлийское 1920 г. (VIII—IX б.), Мцхетское 1275 г. (VIII—IX б.), Дманисское 1978 г. (VII—VIII б.), Степанаванское 1916 г. (VII б.), Спитакское 1967 г. и 1975 г. (VII б.), Арагацское 1869 г. (VII б.), Бюраканское 1949 г. (VII б.), Ереванские 1910 г. и 1937 г. (VII б.) Арабатская группа 550 г. до н. э., 139 г., 1319 г., 1840 г. (соответственно IX, VII, VIII и VIII—IX б.) и другие, расположенные южнее озер Ван и Урмия как, например, Баязетское 1841 г. (VII б.), Дилманское 1930 г., (IX—X б.), у города Маку 1968 г. (VIII б.) и т. д.

Следует отметить, что Транскавказская зона дислокаций согласно имеющимся геофизическим, в том числе сейсмологическим, материалам

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Տրանսկովկասյան դիսլոկացիոն զոնայի սեյսմաակտիվության մասին

Կովկասում սեյսմաակտիվությունը վերահսկող կարևոր կառուցվածքային տարրերից մեկը Տրանսկովկասյան բարձրացումների ու բեկվածքների շղթան է, որի սեյսմաերկրաբանական բնութագրմանն է նվիրված սույն հոդվածը։ Այդ զոնայի վրա են գտնվում Արագած, Արարատ, Թոնդուրեկ, Նեմրուժ, Սիփան հանգած հրաբխային կենտրոնները և շուրջ երկու հազարամյա պատմական ժամանակաշրջանում բազմիցս տեղի ունեցած կործանիչ երկրաշարժերի էպիկենտրոնները (Օնի, Ախալքալաք, Լենինական, Անի, Տեկոր, Արուճ, Մցխեթ, Արագած, Արարատ, Բայազետ և այլն)։ Վերջիններս ինչպես նաև մեր օրերի բազմաթիվ ուժեղ երկրաշարժերը կապված են Տրանսկովկասյան դիսլոկացիոն շղթան արևմուտքից և արևելքից սահմանափակող Երզնի—Վան և Կազբեկ—Արարատ խոշորագույն եզրային բեկվածքների ու նրանց ճյուղավորությունների հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ГРУЧԱԿՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Габриелян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 13, № 3 (1970). ² Н. С. Шатский, Изв. АН СССР. Сер. геолог., № 5, 1948. ³ А. А. Габриелян, С. А. Пирузян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 15, № 4 (1972). ⁴ М. А. Кашкай, Г. П. Тамразян, Поперечные (антикавказские) дислокации Крымско-Кавказского региона, Недра, М., 1967. ⁵ С. А. Пирузян, ДАН АрмССР, т. 41, № 4 (1965). ⁶ С. А. Пирузян, А. Г. Бабаджанян, А. Т. Донабедов и др., Изв. АН АрмССР. Науки о земле, т. 31, № 6 (1978). ⁷ Б. М. Меликсетян, Б. П. Архипов, Г. П. Капранов и др., Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 29, № 1 (1976). ⁸ Р. Ф. Володарский, Е. Н. Востоков, Д. А. Гиллод, Сейсмотектоника Альпийского складчатого пояса юга СССР и некоторых сопредельных территорий, Наука, М., 1974. ⁹ Л. П. Винник, Э. Ленартович, Изв. АН СССР. Физика Земли, № 3, 1976.

УДК 537.144.2

МИКРОБИОЛОГИЯ

А. С. Сафарян

Характеристика ДНК и белков фагов *Salmonella derby*

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Африкяном 19/VII 1984)

Фаги *Salmonella derby*, выделенные из бактерий *Salmonella*, объединены в одну родственную группу на основе идентичности их свойств в системе фаг-хозяин и ряда серологических показателей (¹). Особенностью этих фагов является их умеренный и умеренно-вирулентный характер, тип негативных колоний, низкая частота лизогенизации и трансдукции (²). Ранее был изучен ряд физико-химических свойств умеренного и умеренно-вирулентного фагов *Salmonella derby*, обозначенных символами *dp9* и *dp1—8* (³). Определен молекулярный вес этих ДНК, установлена определенная аналогия между профилем рестрикции эндонуклеазами ДНК умеренного фага *dp9* и ДНК известного умеренного фага *P22* и значительная разница между ДНК фага *P22* и ДНК умеренно-вирулентного фага *dp8* (⁴). Разница между умеренным и умеренно-вирулентным фагами показана также по ширине интервала плавления их ДНК (⁵).

В этой связи представлялось интересным изучить ряд других физико-химических характеристик ДНК фагов *dp8* и *dp9* в сравнении с ДНК фага *P22*, а также некоторые физико-химические свойства белков этих фагов.

Очистку и концентрирование фагов проводили по Дж. Миллеру (⁶), ДНК выделяли по методу Макхетье (⁷). Препараты для электронной микроскопии готовили по известному методу (⁸), визуализацию молекул ДНК проводили на электронном микроскопе JEM-100 В. Молекулярную массу ДНК определяли по методу, описанному Ланг (⁹). Гетеродуплексы получали согласно Дэвис с сотр. (¹⁰).

Белки фагов получали по описанному ранее способу (¹¹) и идентифицировали при помощи электрофореза в полиакриламидном геле. Денситограммы снимали при 590 нм в приборе «Isco-Scanner».

Электронномикроскопическое исследование ДНК фагов *dp8*, *dp9* и *P22* показало, что они представляют собой линейные двухспиральные молекулы с молекулярным весом 28×10^6 дальтон, что согласуется с данными, полученными в отношении молекулярного веса ДНК известного умеренного фага *P22* (¹²). На рис. 1 показаны электронные микрофотографии ДНК фагов *dp8*, *dp9* и *P22*, свидетельствующие о формировании циркулярных структур. В структуре ДНК вирусов и фагов обнаружены дополнительные особенности строения—липкие концы, пермутации, повторяющиеся последовательности и одноцепочечные разры-

вы (13, 14). Из избыточных концевых нуклеотидных последовательностей в ДНК фага Р22 были выявлены циклические перестановки и повторяющиеся последовательности, обеспечивающие формирование кольцевой молекулы ДНК фага Р22 при ее полной денатурации и отжиге (15). Такая же картина отмечается для ДНК фага *dp9* (рис. 1, б). Ве-

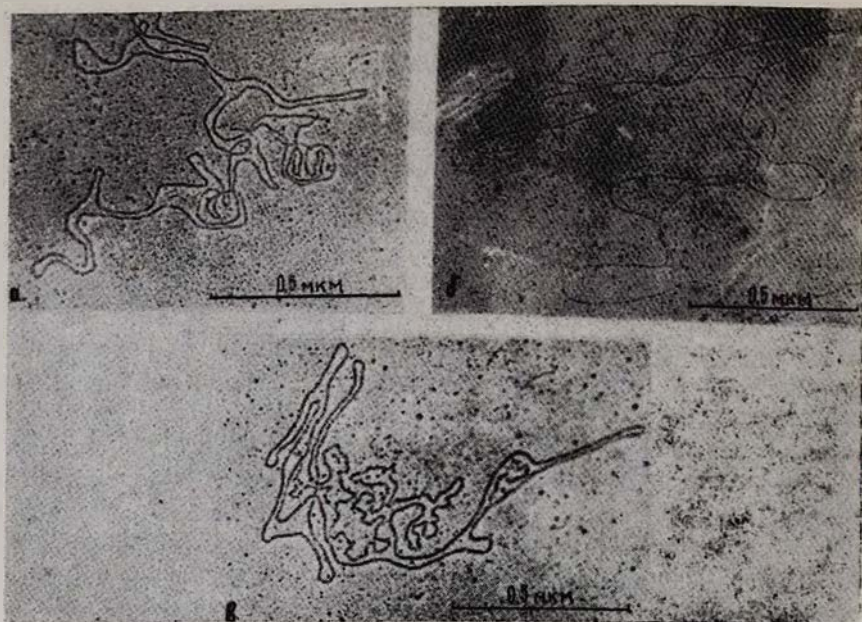


Рис. 1. Электронные микрофотографии гомодуплекса ДНК фага Р22, 97000х (а); гомодуплекса ДНК фага *dp9*, 89000х (б); гомодуплекса ДНК фага *dp8*, 92000х (а)

личина концевого повтора для гомодуплекса ДНК фага Р22 составляет примерно 2%, а величина пермутации—20%. Такие же значения для величин концевого повтора и пермутации выявлены и для ДНК фага *dp9*, в то же время величина концевого повтора для ДНК фагов *dp8* составляет 4%, а величина пермутации 15% (рис. 1, в).

Анализ гетеродуплексов ДНК фагов *dp8*/Р22 и *dp9*/Р22 выявил значительную гомологию между фагами *dp9* и Р22—70% (рис. 2), в

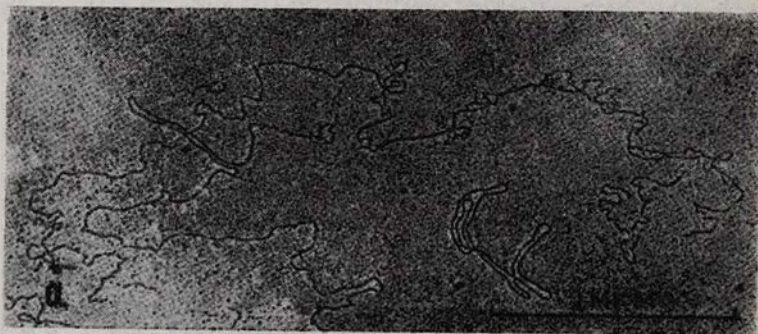


Рис. 2. Электронная микрофотография гетеродуплекса ДНК фага Р22 и *dp9*, 45000х

то время как гомология между ДНК фагов *dr8* и P22 составляет 30%.

При изучении некоторых физико-химических характеристик белков исследуемых фагов было обнаружено, что каждый фаг в своем составе содержит примерно 7 белков. Как видно из рис. 3, электрофоретическая подвижность и количественное выражение этих белков заметно

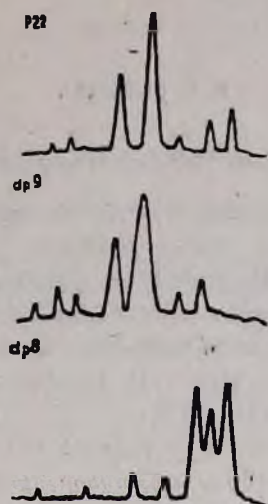


Рис. 3. Электрофореграммы белков фагов P22, *dr9* и *dr8*

отличаются у разных фагов. Молекулярные веса белков этих фагов, определенные по продвижению маркерных белков, при электрофорезе в полиакриламидном геле находятся в пределах 18000—73000 дальтон, причем у умеренных фагов P22 и *dr9* наиболее выраженными являются белки с молекулярным весом 50000—55000 дальтон, тогда как у белков умеренно-вирулентного фага *dr8* преобладают молекулы с значительно низкими молекулярными весами—18000—30000 дальтон.

Наши данные полностью совпадают с результатами других авторов, полученными в отношении белков фага P22 (^{16, 17}) и являются еще одним доказательством сходства между умеренными фагами P22 и *dr9* и их различия с умеренно-вирулентным фагом *dr8*.

Результаты наших исследований по общности и различию умеренного и умеренно-вирулентного фагов *Salmonella derby* позволяет более глубоко изучить структурно-функциональные особенности ДНК этих фагов, механизм интеграции их в геном хозяина. Известно, что ДНК умеренного фага λ интегрирует в геном хозяина согласно модели Кэмпбелла (¹⁸), по которой геном вируса сразу же после заражения принимает циркулярную форму за счет наличия липких концов, после чего с помощью реципрокной генетической рекомбинации встраивается в геном хозяина. В то же время установлено, что в отличие от фага λ умеренный фаг P22 лишен липких концов. Одновременно показано, что ДНК фага P22 циркулярно пермутирована по аналогии с ДНК фагов T2 и T4 (^{12, 15}). Циркулярно-пермутированная структура ДНК этих фагов предполагает возможное существование двух различных механизмов включения линейных геномов вирусов в их бактериальную хромосому.

Все сказанное, по-видимому, правомочно также для циркулярно-пер-
мутированных ДНК исследуемых нами фагов dp8 и dp9 и указывает
на определенное эволюционное родство между фагами P22 и dp9 и
структурной организацией их ДНК.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ՍԱՅԱՐՅԱՆ

Salmonella derby ֆագերի ԴՆԹ-երի և սպիտակուցների բնութագիրը

Ըր 8, Ըր 9 և ր 22 ֆագերի ԴՆԹ-ի համոդուրելիզացիոն մոլեկուլների էլեկտրոնամիկրոսկոպիկական հետազոտությունը ցույց է տվել, որ առաջին երկուսի մոտ ծայրային կրկնությունները կազմում են 2 %, իսկ շրջանաձև պերմուտացիան՝ 28 %: Մինչդեռ ր 22-ի մոտ՝ համապատասխանաբար 4 % և 15 %: Հետերոդուրելիզացիոն քննությամբ հայտնի է դարձել, որ Ըր 9 և ր 22 ֆագերի ԴՆԹ-ի մոլեկուլների միջև կա մոտ 70 % միատիպություն, իսկ Ըր 8-ի և ր 22-ի միջև՝ ընդամենը 30 %:

Ցույց է տրված, որ Ըր 8 և Ըր 9 ֆագերի կառուցվածքում գերակշռում են փոքր մոլեկուլային կշիռ ունեցող սպիտիները, իսկ ր 22-ի մոտ՝ մեծ: Բոլոր ֆագերի մոտ հայտնաբերվել են 7 տարբեր պեպտիդներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. К. Вартанян, Б. П. Карабеков, *Вопр. мол. клеточ. биол. иммунол.*, 97, 1970.
- ² М. К. Вартанян, Ж. А. Кцоян, Б. П. Карабеков, *Биол. журн. Армении*, т. 30, 14 (1977).
- ³ Р. А. Захарян, А. С. Сафарян, Э. Т. Захарян и др., *ДАН АрмССР*, т. 66, 296 (1978).
- ⁴ А. С. Сафарян, Э. Т. Захарян, К. С. Карагезян и др., *Биол. журн. Армении*, т. 8, 879 (1978).
- ⁵ А. Г. Габриелян, Р. А. Захарян, М. К. Вартанян и др., *Биол. журн. Армении*, т. 32, 357 (1979).
- ⁶ Дж. Миллер, в кн.: *Эксперименты в мол. генетике*, Мир, М., 1976.
- ⁷ L. MacHattie, D. Ritchie, C. Thomas, *J. Mol. Biol.*, v. 23, 355 (1967).
- ⁸ A. Kleinschmidt, *Methods in Enzymology*, v. 12, 361 (1968).
- ⁹ D. Lang, *J. Mol. Biol.*, v. 54, 537 (1970).
- ¹⁰ R. Davis, M. Simon, N. Davidson, *Methods in Enzymology*, v. 21, 413 (1971).
- ¹¹ J. Strauss, B. Burge, J. Darnell, *Virology*, v. 37, 367 (1969).
- ¹² M. Rhosdes, L. MacHattie, C. C. Thomas, *J. Mol. Biol.*, v. 37, 21 (1968).
- ¹³ Т. А. Смирнова, И. Б. Миненкова, М. Р. Позосбекова и др., *Молекуляр. ген. микробиол. вирусол.*, т. 2, 27 (1984).
- ¹⁴ C. Thomas, L. MacHattie, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 52, 1297 (1964).
- ¹⁵ M. Rhosdes, C. Thomas, *J. Mol. Biol.*, v. 37, 41 (1968).
- ¹⁶ D. Botstein, C. Vaddel, J. King, *J. Mol. Biol.*, v. 80, 669 (1973).
- ¹⁷ J. King, E. Lenk, D. Botstein, *J. Mol. Biol.*, v. 80, 697 (1973).
- ¹⁸ A. Campbell, in: *The Bacteriophage Lambda*, 13, 1973.

