

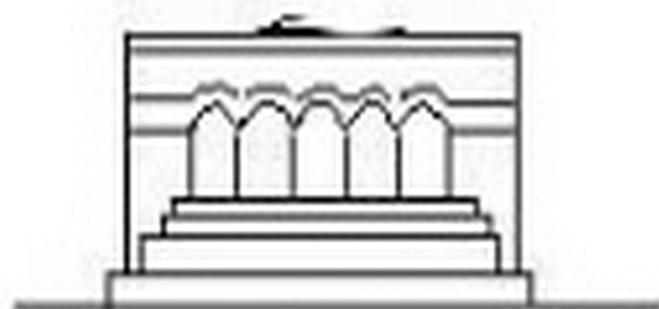
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1986

УДК 539.3

О КОНТАКТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
 БЕСКОНЕЧНОГО ОРТОТРОПНОГО ДВУХСЛОЙНОГО  
 ЦИЛИНДРА

ВАТУЛЯН А. О., ОВСЕПЯН В. В.

За последние годы в печати появился ряд работ, посвященных смешанным динамическим задачам для бесконечного изотропного цилиндра [1—3]. Подобные задачи для анизотропных цилиндров практически не исследованы. В работах [4, 5] нами были изучены динамические контактные задачи для анизотропного бесконечного полого и сплошного цилиндров.

Широкое применение слоистых конструкций (в частности, цилиндрических волноводов) делает актуальным рассмотрение задачи о колебаниях штампа на поверхности слоистого цилиндра из ортотропного материала, что соответствует колебаниям конструкций из композитных материалов в рамках теории эффективных модулей.

1. Рассматривается осесимметричная задача о колебаниях ортотропного бесконечного двухслойного цилиндра с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) под действием колеблющегося штампа ширины  $2c$ , жестко сцепленного с цилиндром.

Граничные условия зададим в форме

$$\begin{aligned}
 & \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} = 0 & |z| > c \\
 r = a & \quad u_r^{(2)} = f_1(z) \exp(-i\omega t) & |z| < c
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 & u_r^{(2)} = f_2(z) \exp(-i\omega t) \\
 & u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \\
 r = b & \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полагаем, что

- 1)  $u_z^{(l)} = 0$ ,  $u_r^{(l)}$  и  $u_z^{(l)}$  не зависят от  $\theta$ .
- 2) режим колебаний установившийся, то есть

$$u_r^{(l)} = \hat{u}_r^{(l)}(r, z) \exp(-i\omega t), \quad u_z^{(l)} = \hat{u}_z^{(l)}(r, z) \exp(-i\omega t), \quad l = 1, 2 \tag{1.3}$$

- 3)  $A_{11}^{(l)} = A_{22}^{(l)}$ ,  $A_{33}^{(l)} = A_{44}^{(l)}$

$A_{ij}^{(l)}$  — упругие постоянные материалов цилиндров ( $l = 1, 2$ ). Здесь индекс 1 относится к внутреннему цилиндру, 2 — к внешнему.

Уравнения движения в амплитудах перемещений получены в работе [5]

$$A_{11}^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \bar{u}_r^{(1)} \right] + \rho^{(1)} \omega^2 \bar{u}_r^{(1)} + A_{33}^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{(1)}}{\partial z^2} + [A_{13}^{(1)} + A_{55}^{(1)}] \frac{\partial^2 \bar{u}_z^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$A_{55}^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(1)}}{\partial r} \right] + \rho^{(1)} \omega^2 \bar{u}_r^{(1)} + A_{33}^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^{(1)}}{\partial z^2} + [A_{13}^{(1)} + A_{55}^{(1)}] \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{(1)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(1)}}{\partial z} \right] = 0$$

Здесь  $\rho^{(l)}$  ( $l = 1, 2$ ) — плотность материала внутреннего и внешнего цилиндров.

Замыкают постановку задач об установившихся колебаниях условия излучения на бесконечности [5].

Для сведения поставленной задачи к системе интегральных уравнений рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается уравнениями (1.4) и граничными условиями вида

$$\begin{aligned} r = a \quad & \bar{\sigma}_r^{(2)} = \bar{\sigma}_r^*(z) \\ & \bar{\tau}_{rz}^{(2)} = \bar{\tau}_{rz}^*(z) \\ r = b \quad & \bar{\sigma}_r^{(1)} = \bar{\sigma}_r^{(2)}, \quad \bar{\tau}_{rz}^{(1)} = \bar{\tau}_{rz}^{(2)} \\ & \bar{u}_r^{(1)} = \bar{u}_r^{(2)}, \quad \bar{u}_z^{(1)} = \bar{u}_z^{(2)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение вспомогательной задачи строится методом интегрального преобразования Фурье.

Следует отметить, что решение вспомогательной задачи позволит рассчитывать волновое поле внутри составного цилиндра. Наличие анизотропии приводит к существенному усложнению задачи по сравнению с изотропным случаем.

Перемещения  $\bar{u}_r$  и  $\bar{u}_z$  при  $r = a$  получим в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= \frac{\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}}{A_{33}^{(2)} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{11}(u) \bar{\sigma}_r^* + iK_{12}(u) \bar{\tau}_{rz}^*] \exp(-iux) du \\ \bar{u}_z &= \frac{\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)}}{A_{33}^{(1)} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [iK_{12}(u) \bar{\sigma}_r^* + K_{22}(u) \bar{\tau}_{rz}^*] \exp(-iux) du \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем

$$K_{ij}(u) = [K_0(u)]^{-1} \det \bar{A}_{ij}(u), \quad \det \bar{A}_0(u) = K_0(u), \quad i, j = 1, 2$$

где

$$\bar{A}_0(u) =$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_1(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_1(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(1)} J_1(\gamma \sigma_1^{(1)}) & \sigma_2^{(1)} J_1(\gamma \sigma_2^{(1)}) \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(1)} J_0(\gamma \sigma_1^{(1)}) & \varphi_2^{(1)} J_0(\gamma \sigma_2^{(1)}) \\ \psi_1^{(2)}(\gamma, u) & \psi_2^{(2)}(\gamma, u) & P_1(\gamma, u) & P_2(\gamma, u) & T \psi_1^{(1)}(\gamma, u) & T \psi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \sigma_1^{(2)} \chi_1^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(\gamma, u) & T \sigma_1^{(1)} \chi_1^{(1)}(\gamma, u) & T \sigma_2^{(1)} \chi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \psi_1^{(2)}(1, u) & \psi_2^{(2)}(1, u) & P_1(1, u) & P_2(1, u) & 0 & 0 \\ \sigma_1^{(2)} \chi_1^{(2)}(1, u) & \sigma_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(1, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(1, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(1, u) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Матрицы  $\bar{A}_{ij}(u)$  получаются из представления матрицы  $\bar{A}_0(u)$  следующим образом:  $\bar{A}_{11}(u)$  и  $\bar{A}_{12}(u)$  получаются заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы  $\bar{A}_0(u)$  соответственно 1-ой строкой следующей матрицы:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_1(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_1(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а  $\bar{A}_{21}(u)$  и  $\bar{A}_{22}(u)$  — заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы  $\bar{A}_0(u)$  соответственно 2-ой строкой матрицы  $\bar{L}$ .

Здесь введены следующие обозначения:

$$x^2 = x^{(2)^2} = \rho^{(2)} A_{22}^{(1)} x^{(1)} / \rho^{(1)} A_{22}^{(2)}$$

$$x^{(1)} = \rho^{(1)} \sigma^2 a^2 / A_{22}^{(2)}, \quad \gamma_1^{(2)} = A_{11}^{(1)} / A_{22}^{(2)}, \quad \gamma_2^{(1)} = A_{33}^{(1)} / A_{33}^{(2)}$$

$$\gamma_3^{(1)} = A_{13}^{(1)} / A_{33}^{(1)}, \quad \gamma_4^{(1)} = A_{12}^{(1)} / A_{22}^{(1)}, \quad \gamma = b/a, \quad x = z/a$$

$$\sigma_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)} a^2, \quad u^2 = \sigma^2 a^2, \quad i = 1, 2$$

$$T = \gamma_{11}(\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}) / (\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}), \quad \gamma_{12} = -A_{22}^{(1)} / A_{22}^{(2)}$$

$$\psi_k^{(1)}(\mu, u) = R(\sigma_k^{(1)}, u) J_0(\mu \sigma_k^{(1)}) + \frac{\gamma_{12}^{(1)} + \gamma_{13}^{(1)}}{\mu} (\gamma_4^{(1)} - \gamma_1^{(1)}) \sigma_k^{(1)} J_1(\mu \sigma_k^{(1)})$$

$$P_k(\mu, u) = R(\sigma_k^{(1)}, u) Y_0(\mu \sigma_k^{(1)}) + \frac{\gamma_{12}^{(1)} - \gamma_{13}^{(1)}}{\mu} (\gamma_4^{(1)} - \gamma_1^{(1)}) \sigma_k^{(1)} Y_1(\mu \sigma_k^{(1)}) \quad (1.8)$$

$$\chi_k^{(1)}(\mu, u) = E(\sigma_k^{(1)}, u) J_1(\mu \sigma_k^{(1)}), \quad \mu = 1, \gamma$$

$$Q_k(\mu, u) = E(\sigma_k^{(1)}, u) Y_1(\mu \sigma_k^{(1)}), \quad l, k = 1, 2$$

$$\varphi_k^{(1)} = [\sigma_k^{(1)} \gamma_1^{(1)} - x^{(1)^2} + \gamma_3^{(1)} u^2] / [\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}]^{1/2}$$

$$R(\sigma_k^{(1)}, u) = \gamma_1^{(1)} \gamma_3^{(1)} \sigma_k^{(1)} + \gamma_3^{(1)} (x^{(1)^2} - \gamma_2^{(1)} u^2)$$

$$E(\sigma_k^{(1)}, u) = \gamma_1^{(1)} \gamma_3^{(1)} \sigma_k^{(1)^2 - \gamma_2^{(1)} (x^{(1)^2} + \gamma_3^{(1)} u^2)$$

$J_k(t)$  и  $Y_k(t)$  — функции Бесселя соответственно первого и второго рода,  $\alpha$  — параметр интегрального преобразования Фурье, а  $\sigma_k^{(1)}$ ,  $\lim_{\sigma_k^{(1)} \rightarrow 0} \sigma_k^{(1)} > 0$ , ( $k, l = 1, 2$ ) являются корнями следующего характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(0)} \gamma_2^{(0)} \gamma_3^{(0)} - [x^{(0)2} (\gamma_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)} + u^2 (\gamma_1^{(0)2} + 2\gamma_1^{(0)} \gamma_2^{(0)} - \\ - \gamma_1^{(0)})] \alpha^{(0)} + (x^{(0)2} - \gamma_2^{(0)} u^2) (x^{(0)} - u^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя решения вспомогательной задачи, сведем исходную задачу к системе интегральных уравнений

$$\int_{-d}^d \bar{k}(\xi-x) q(\xi) d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| \leq d \quad (1.10)$$

где 
$$k(t) = \int_{\sigma} \bar{K}(u) \exp(iut) du \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}(u) = \begin{vmatrix} K_{11}(u) & iK_{12}(u) \\ -iK_{12}(u) & K_{22}(u) \end{vmatrix}, \quad \zeta = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}, \quad d = \frac{c}{a} \\ \underline{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}, \quad q_1 = \frac{\gamma_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)}}{A_{12}^{(0)}} \zeta_1, \quad q_2 = \frac{\gamma_1^{(0)} - \gamma_2^{(0)}}{A_{12}^{(0)}} \zeta_2 \end{aligned}$$

Здесь контур  $\sigma$  выбирается, как указано в [6]. Общая теория систем уравнений вида (1.10) подробно освещена в [6].

Решение системы (1.10) строится методом фиктивного поглощения путем преобразования исходной системы уравнений к операторной системе с матрицей-символом, вырождающейся в функционально-коммутативную на бесконечности [5, 7]. Следует отметить, что исследование элементов  $K_{ij}(u)$  в задачах с анизотропией является существенно более сложной задачей.

2. Элементы  $K_{ij}(u)$  представляют отношение двух детерминантов шестого порядка и являются сложными мероморфными функциями, имеющими одинаковые полюсы на вещественной оси. Проведено детальное численное и аналитическое исследование функции  $K_{11}(u)$ , соответствующей задаче о радиальных колебаниях гладкого бандажа на поверхности слоистого ортотропного цилиндра. В этом случае краевая задача сводится к одному интегральному уравнению вида (1.10), а в представлении ядра (1.11) вместо матрицы  $\bar{K}(u)$  достаточно подставить  $K_{11}(u)$

$$\int_{-d}^d k(\xi-x) q_1(\xi) d\xi = 2\pi f_1(x); \quad k(t) = \int_{\sigma} K_{11}(u) \exp(iut) du \quad (2.1)$$

Установлено, что число бегущих волн в слое существенным образом зависит от соотношения механических параметров, а также от того какой из двух выбранных материалов заполняет внутренний цилиндр, а какой — внешний.

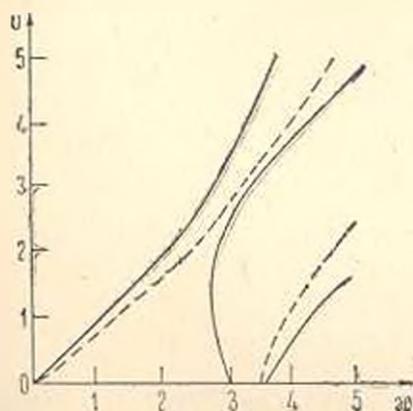
В настоящей работе для численных результатов применяются два материала со следующими упругими постоянными: керамика из титаната бария (материал 1)

$A_{11} = 16,8$ ,  $A_{12} = 7,1$ ,  $A_{22} = 18,9$ ,  $A_{13} = 5,46$ ,  $A_{23} = 7,82$  ( $10^{10}$  н/м<sup>2</sup>)  
и олова (материал 2)

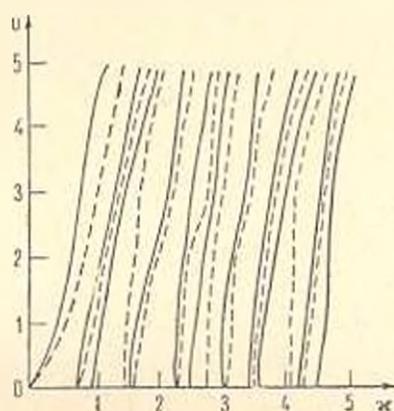
$A_{11} = 7,35$ ,  $A_{12} = 2,8$ ,  $A_{22} = 8,7$ ,  $A_{13} = 2,2$ ,  $A_{23} = 2,34$ ,  $A_{66} = 2,265$  ( $10^{10}$  н/м<sup>2</sup>) [8].

Результаты численного анализа показали, что в случае, когда упругие постоянные материалов отличаются незначительно ( $\delta = \max A_{jj}^{(1)}/A_{jj}^{(2)} = 0,95 \div 1,05$ ), то дисперсионная картина меняется мало при замене материалов местами.

На фиг. 1,2 приведено распределение нулей и полюсов функции  $K_{11}(u)$  при  $\gamma = 0,7$ , причем сплошными линиями обозначены линии действительных полюсов, прерывистыми—действительных нулей. Фиг. 1 отвечает случаю, когда внешний цилиндр изготовлен из материала 1, а внутренний изготовлен из материала 2. Этот случай далее будем обозначать I (жесткий-внешний цилиндр, мягкий-внутренний, в данном случае  $\delta = 2,48$ ). Фиг. 2 соответствует противоположному расположению материалов—внешний цилиндр изготовлен из материала 2, а внутренний—из материала 1. Этот случай далее будем обозначать II (мягкий-внешний цилиндр, жесткий-внутренний, в этом случае  $\delta = 0,46$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что полюсы функции  $K_{11}(u)$  отвечают бегущим плоским волнам по поверхности цилиндра. Фиг. 1 и 2 позволяют указать их количество в зависимости от безразмерной частоты  $x$ . Так, например, в случае I при  $x = 2$  имеется всего одна бегущая поверхностная волна, а в случае II таких волн уже будет 4.

Аналогичные расчеты проведены для различных значений  $\gamma$ . Можно сделать следующий вывод: в случае I число бегущих волн с ростом  $\gamma$  (тонкое покрытие) не возрастает, а в случае II число бегущих волн с ростом  $\gamma$  не убывает. Это, видимо, связано в случае II с переотражением волн от поверхности внутреннего более жесткого цилиндра.

Проведем асимптотическое исследование функции  $K_{11}(u)$  при  $|u| \rightarrow \infty$

$$K_{11}(0, x) = \left\{ \sqrt{\gamma_1^{(1)}} \left[ Y_1 \left( \frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) J_1 \left( \frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) - J_1 \left( \frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Y_1 \left( \frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \right] B^{(2)}(\gamma, J) + \sqrt{\gamma_1^{(2)}} J_1 \left( \frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}} \right) \left[ Y_1 \left( \frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \times \right. \right. \quad (2.2)$$

$$\times B^{(2)}(\gamma, J) - J_0\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) B^{(2)}(\gamma, Y) \left| \left| D_2(0, x) | D_0(0, x) |^{-1} \right. \right.$$

Здесь

$$D_0(0, x) = D_1(0, x) D_2(0, x)$$

$$D_1(0, x) = \gamma_1^{(2)} J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) [B^{(2)}(\gamma, J) B^{(2)}(1, Y) + B^{(2)}(\gamma, Y) \times \\ \times B^{(2)}(1, J)] - \sqrt{\gamma_1^{(1)} \gamma_1^{(2)}} B^{(1)}(\gamma, J) \left[ J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}}\right) B^{(2)}(1, Y) - Y_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}}\right) B^{(2)}(1, J) \right] \quad (2.3)$$

$$D_2(0, x) = \left\{ \gamma_2^{(2)} J_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \left[ J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) Y_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) - Y_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) J_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)}} J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(1)}}}\right) \left[ Y_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) J_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) - J_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) Y_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \right] \right\}$$

$$B^{(k)}(\mu, J) = x J_0\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right) + \frac{\gamma_1^{(k)} - \gamma_1^{(k)}}{\mu \sqrt{\gamma_1^{(k)}}} J_1\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right), \quad \mu = 1, \gamma$$

$$B^{(k)}(\mu, Y) = x Y_0\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right) + \frac{\gamma_1^{(k)} - \gamma_1^{(k)}}{\mu \sqrt{\gamma_1^{(k)}}} Y_1\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right), \quad k = 1, 2$$

Из уравнения  $D_0(0, x) = 0$  выделяются два семейства частот за-  
пирания, которые определяются из уравнений

$$D_1(0, x) = 0, \quad D_2(0, x) = 0 \quad (2.4)$$

что соответствует стоячим волнам.

Используя асимптотические представления для функций Бесселя, получим из системы (2.4), что частоты за-  
пирания с большими номерами в слоистом цилиндре удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_1^{(1)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}} - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{x_n^{(1)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}} + \sqrt{\frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_1^{(2)}}} = 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2^{(2)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}} - \frac{3\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{x_n^{(2)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}} + \sqrt{\frac{\gamma_2^{(1)}}{\gamma_2^{(2)}}} = 0 \quad (2.5)$$

Для решения интегрального уравнения (2.1) используется метод фиктивного поглощения [7].

Функция  $K_{11}(u)$  удовлетворяет всем условиям, позволяющим применить этот метод, а именно: она является четной мероморфной функцией, имеющей конечное число нулей  $z_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_1$ ) и полюсов  $p_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_2$ )  $n_2 \geq n_1$  на вещественной оси и убывающая на бесконечности

$$K_{11}(u) = C_1 |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \quad |u| \rightarrow \infty$$

Аппроксимируем функцию  $K_{11}(u)$  функцией

$$K_*(u) = (u^2 + b^2)^{-1/2} H(u), \quad H(u) = C_1 \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2)(u^2 - p_k^2)^{-1}, \quad b_* > 0 \quad (2.6)$$

$z_k$  ( $k = n - n_1, \dots, n$ ),  $p_k$  ( $k = n - n_2, \dots, n$ ) — соответственно комплексные нули и полюсы  $H(u)$ , которые находятся в процессе аппроксимации функции полиномами Лагранжа.

Приближенное решение уравнения (2.1) при  $f_1(x) = \exp(i\gamma x)$ ,  $\text{Im}\gamma = 0$  имеет вид [5]

$$q_1(x) = \frac{\exp(-i\gamma x)}{K_{11}(\gamma)} + \frac{\sqrt{b_* - i\gamma}}{2\pi i} \exp(-i\gamma d) \int_0^d \frac{\sqrt{b_* + iu}}{H(u)(u - \gamma)} \exp(i(d-x)u) du -$$

$$- \frac{\sqrt{b_* + i\gamma}}{2\pi i} \exp(i\gamma d) \int_0^d \frac{\sqrt{b_* - iu}}{H(u)(u - \gamma)} \exp(-i(d+x)u) du - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} c_k \times$$

$$\times \int_0^d \frac{\sqrt{b_* - iu}}{H(u)} |F(u, x_k) \exp(-i(d+x)u) + F(u, -x_k) \exp(-i(d-x)u)| du$$

где

$$F(u, x_k) = \sum_{m=1}^n \frac{D_m \exp(i(d+x_k)p_m)}{\sqrt{b_* - ip_m} (p_m - d)}, \quad D_m = \text{Res}_{u=p_m} H(u)$$

$x_k = \pm y_k$ ,  $y_k$  — точки, делящие интервал  $(0, d)$  на равные отрезки, а  $c_k$  есть решение линейной алгебраической системы [7]

$$\sum_{k=1}^{2n} A_{lk}^{\pm} c_k = B_l^{\pm}, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

причем интегралы в (2.7) легко вычисляются по теории вычетов.

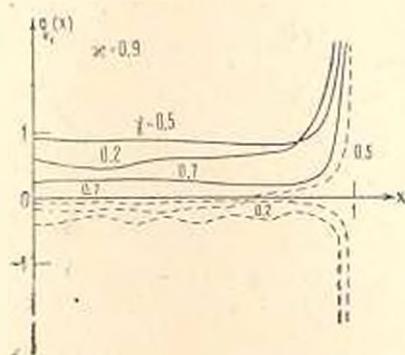
В решении (2.7) первое слагаемое есть вырожденное решение, соответствующее бесконечному штампу, второй и третий интегралы описывают влияние краев штампов и имеют характерную корневую особенность.

Последний интеграл представляет собой осциллирующую составляющую контактных напряжений под штампом.

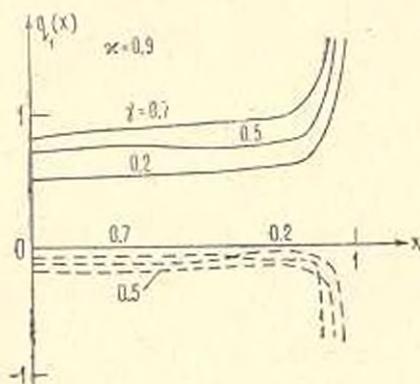
**3. Численный пример.** Получено распределение контактных напряжений под штампом в задачах о контакте без трения для случаев I, II при различных параметрах. Например, при  $\kappa = 0.9$  функция  $K_{11}(u)$  имеет и в случае I и в случае II один нуль и один полюс, так что качественная картина напряженного состояния одинакова (фиг. 3 и 4). Этот же вывод можно сделать, анализируя фиг. 1 и 2 при малых частотах (что соответствует малым  $\kappa$ ). При более высоких частотах качественная картина напряженного состояния различна в случаях I и II (фиг. 5). На этих фигурах сплошными линиями обозначены  $\text{Re} q_1(x)$ , а прерывистыми линиями  $-\text{Im} q_1(x)$ .

В этих расчетах эффективное приближение функции  $K_{11}(u)$  для различных частот колебания  $\kappa$  получено при аппроксимации полино-

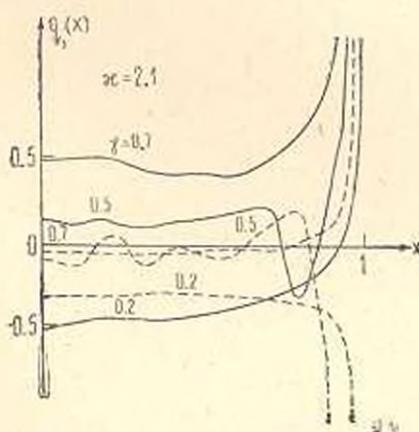
мами Лагранжа порядка 6, 8. Погрешность аппроксимации не превышает 8—15%. Например, при  $\kappa=0,9$ ,  $\gamma=0,7$  порядок полинома Лагранжа в случаях I и II берется соответственно 6 и 8, а для  $\kappa=2,1$  берется 8 и 8.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведено численное исследование при малых  $\gamma$  ( $\gamma \sim 0,01 \div 0,1$ ). Получено, что дисперсионная картина и распределение контактных напряжений практически не отличаются от соответствующих кривых для аналогичной задачи сплошного цилиндра, изготовленного из материала внешнего цилиндра для широкого диапазона частот  $\kappa \in [0,5]$ .

Авторы благодарят В. А. Бабешко за постановку задачи и обсуждение результатов.

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿ  
ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ Ա. Հ., ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ Վ. Վ.

Ա մ փ ա փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգական երկշերտ օրթոտրոպ անվերջ գլանի մակերև-  
փույթի վրա շտամպի տատանման կոնտակտային խնդիր: Ընդհանուր դեպքում  
խնդիրը բերվում է կոնտակտային լարումների նկատմամբ առաջին սևոի ին-  
տեգրալ հավասարումների սխեմեմի: Առաջարկվում է խնդրի լուծման մեթոդ:  
Բերվում է թվային օրինակ:

A CONTACT DYNAMICAL PROBLEM FOR AN INFINITE  
ORTHOTROPIC TWO-LAYERED CYLINDER

A. O. VATULIAN, V. V. HOVSEPIAN

S u m m a r y

A contact problem of vibration of the stamp on the surface of an  
infinite orthotropic two-layered elastic cylinder is considered. In the ge-  
neral case the problem is reduced to the system of the first type of  
integral equations relative to the contact stresses. A method for the  
solution of the problem is proposed. A numerical example has been  
presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берштейн П. Я. Динамическое кручение бесконечного цилиндра, заключенного в упругую полубесконечную обложку.—Гидроаэромех. и теор. упругости, Межвуз. науч. сб., 1976, вып. 20, с. 82—86.
2. Каламчук В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 555—559.
3. Дубинин В. В. Смешанная динамическая стационарная упругая задача для полого толстостенного цилиндра.—Изв. вузов. Машиностр., 1981, № 4, с. 5—10.
4. Ватуляян А. О., Овсепян В. В. О некоторых динамических контактных задачах для полого ортотропного цилиндра.—Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости», Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982, с. 81.
5. Ватуляян А. О., Овсепян В. В., Пряхина О. Д. Контактная динамическая задача для ортотропного бесконечного цилиндра.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 4, с. 47—55.
6. Воронич Н. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979, 320 с.
7. Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при малом контакте.—ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 725—733.
8. Хантаингтон Г. Упругие постоянные кристаллов.—УФМ, 1961, 74, вып. 2, с. 303—352, вып. 3, с. 461—520.

Ростовский госуниверситет

Поступила в редакцию  
14.V. 1984

УДК 539.385

КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, АРМИРОВАННОГО  
 ЧЕТЫРЕХГРАННОЙ ПРИЗМОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

ГЕВОРГЯН Г. Г., ЗАРГАРЯН С. С.

В работе рассматривается решение задачи о кручении цилиндрического стержня, армированного четырехгранной призмой из другого материала.

Задача решается методом граничных интегральных уравнений. Трудности, возникающие при переходе от гладких границ к границам с угловыми точками на линии спая двух сред, заключаются в изменении функционально-аналитических свойств интегральных операторов [1]. Интегральные операторы рассматриваемого уравнения являются вполне непрерывными, если граница области поперечного сечения и линия спая сред являются гладкими замкнутыми линиями. Однако, в случае кусочно-гладких линий интегральные операторы теряют полную непрерывность.

В работе доказывается, что интегральный оператор системы интегральных уравнений рассматриваемой задачи является обобщенным оператором Фредгольма.

Решение системы интегральных уравнений проводится численно-аналитическим методом с учетом априорной информации об особенностях решения этой системы в угловых точках линии спая различных сред.

Приводятся результаты численного решения задачи для ряда материалов и для различных отношений размеров стороны квадрата к радиусу окружности поперечного сечения.

В результате решения задачи установлено, что в зависимости от отношения  $\mu = G_1/G_0$  в окрестности угловой точки имеет место различное распределение напряжений. Так, в случае, когда  $\mu < 1$ , в окрестности угловой точки напряжения неограниченно возрастают, а в случае, когда  $\mu > 1$ , в окрестности угловой точки напряжения остаются ограниченными.

1. Пусть поперечное сечение стержня состоит из областей  $\Omega^{(0)}$  и  $\Omega^{(1)}$  (здесь  $\Omega^{(1)}$  — область, занимаемая квадратом), соответствующих отдельным материалам, ограниченных кусочно-гладкими замкнутыми линиями. Обозначим через  $\Gamma_1$  границу квадрата, а через  $\Gamma_0$  — окружность. Тогда будем иметь:  $\partial\Omega^{(0)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $\partial\Omega^{(1)} = \Gamma_1$ . Множество угловых точек контура обозначим через  $L$ .

Как известно [2], задача кручения такого стержня приводится к нахождению гармонических функций  $\varphi^{(j)}$  ( $j=0, 1$ ) из краевой задачи

$$\Delta\varphi^{(0)}=0 \text{ в } \Omega^{(0)}; \quad \Delta\varphi^{(1)}=0 \text{ в } \Omega^{(1)} \quad (1.1)$$

$$\varphi^{(0)}=\varphi^{(1)} \text{ на } \Gamma_1; \quad G_0 \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} - G_1 \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n} = f_1 \text{ на } \Gamma_1 \setminus L \quad (1.2)$$

$$f_1 = (G_0 - G_1) [\operatorname{ycos}(n, \hat{x}) - x\operatorname{cos}(n, \hat{y})] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} = g_0, \quad g_0 = \operatorname{ycos}(n, \hat{x}) - x\operatorname{cos}(n, \hat{y}) \text{ на } \Gamma_0 \quad (1.4)$$

В (1.3) и (1.4)  $G_j$  ( $j=0, 1$ ) — модули сдвига соответствующих материалов,  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega^{(0)}$ .

Решение задачи (1.1)–(1.4) во всей области поперечного сечения  $\Omega = \Omega^{(0)} \cup \Omega^{(1)}$  будем искать в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y) = \int_{\Gamma_0} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds + \int_{\Gamma_1} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds + \int_{\Gamma_1} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds \quad (1.5)$$

где  $r$  — расстояние между точками  $(x, y)$  и  $\tau(s)$ , где  $\tau(s) \in \partial\Omega^{(0)}$ , а  $s$  — дуговая абсцисса;  $\varphi(x, y) = \varphi^{(j)}(x, y)$  в  $\Omega^{(j)}$  ( $j=0, 1$ ),  $\rho(s)$  — плотность слоя.

На основании известных свойств потенциала простого слоя функция  $\varphi(x, y)$  непрерывна в  $\Omega$ , а на линиях спая ее нормальная производная имеет разрывы

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial n_t} \right)_0 = \pi\rho(t) + \int_{\partial\Omega} \rho(s) \frac{\partial}{\partial n_t} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (1.6)$$

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial n_t} \right)_1 = -\pi\rho(t) + \int_{\partial\Omega} \rho(s) \frac{\partial}{\partial n_t} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (1.7)$$

Подставляя эти выражения в (1.3) и (1.4), получаем систему интегральных уравнений

$$\rho(t) + \int_{\partial\Omega} K(t, s) \rho(s) ds = f(t), \quad t \in \partial\Omega \setminus L \quad (1.8)$$

где

$$K(t, s) = \frac{G_0 - G_1}{\pi(G_0 + G_1)} \frac{\partial}{\partial n_t} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \text{ при } t \in \Gamma_1; \quad K(t, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \text{ при } t \in \Gamma_0$$

$$f(t) = \frac{f_1(t)}{\pi(G_0 + G_1)} \text{ при } t \in \Gamma_1; \quad f(t) = \frac{1}{\pi} g_0(t) \text{ при } t \in \Gamma_0$$

Докажем разрешимость системы интегральных уравнений (1.8). В более общем предположении будем считать, что контуры  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  являются кусочно-гладкими.

Однородная система, сопряженная к которой совпадает с (1.8), имеет вид

$$z_j(t) + \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma_0} a_0(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{\Gamma_1} z_1(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds = 0 \quad (j=0; 1)$$

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = (G_0 - G_1)/(G_0 + G_1) = (1 - \mu)/(1 + \mu) \quad (1.9)$$

Покажем, что матричный интегральный оператор системы (1.9) является обобщенным оператором Фредгольма [3]. Для этого представим систему (1.9) в виде

$$\sigma_j(t) + \frac{\lambda_j}{\pi} \int_{\Gamma_j} \sigma_j(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds + v_j \vec{\sigma} = 0 \quad (s \in \Gamma_j, \quad j=0; 1) \quad (1.10)$$

где  $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1)$  — двухкомпонентная вектор-функция, а матричный оператор

$$v_j \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} v_{0j} \sigma_j \\ v_{1j} \sigma_j \end{pmatrix}$$

является вполне непрерывным. Положим

$$(A_j \vec{\sigma})(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \vec{\sigma}(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (j=0; 1)$$

и обозначим через  $W$  диагональную матрицу  $\|\lambda_j A_j \delta_j\|_{j=0}^1$

Назовем оператор  $\vec{\sigma} + \begin{pmatrix} \lambda_0 A_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 A_1 \end{pmatrix} \vec{\sigma}$  главной частью системы (1.10):

$$\vec{\sigma} + T \vec{\sigma} = 0, \quad T = W + V \quad (1.11)$$

Пусть  $Q_j$  — число угловых точек  $P_k, k=1, 2, \dots, Q_j$ , на каждом из контуров  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ .

Предположим, что вектор-функция  $\vec{u} = (u_0, u_1)$  является элементом пространства  $C(\partial\Omega)$ , непрерывных на  $\partial\Omega$  функций, с нормой  $\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)} = \max \|u_j\|_{C(\partial\Omega)}$ , где  $u_j$  — функция из  $C(\Gamma_j)$ , заданная на  $\Gamma_j$  ( $j=0; 1$ ).

Следуя И. Радону [1], введем существенную норму матричного оператора  $W$  по определению, принятому в работе [4]:

$$R = \text{ess} \|W\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \inf \|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} \quad (1.12)$$

где  $\{B\}$  множество всех линейных, матричных, вполне непрерывных операторов, действующих из банахова пространства  $C(\partial\Omega)$  в банахово пространство  $C(\partial\Omega)$ , а

$$\|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \sup_{\vec{u}} \frac{\|(W - B)\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} = \sup_j \frac{\max \|[(W - B)\vec{u}]_j\|_{C(\partial\Omega)}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} \quad (1.13)$$

Здесь  $[(W - B)\vec{u}]_j$  —  $j$ -ая компонента вектора  $(W - B)\vec{u}$ .

Для линейного ограниченного оператора  $T$  системы (1.11), действующего в банаховом пространстве  $C(\partial\Omega)$ , радиус Фредгольма  $r_T$  [1] определяет наибольший круг на комплексной плоскости  $\lambda$  с центром  $\lambda=0$ , внутри которого  $I-\lambda T$  является обобщенным оператором Фредгольма. Этот радиус есть точная верхняя грань радиусов сходимости ряда Неймана

$$1 + \lambda(W-B) + \lambda^2(W-B)^2 + \dots \quad (1.14)$$

где верхняя грань берется по множеству  $\{B\}$  всех вполне непрерывных операторов, действующих в  $C(\partial\Omega)$ . Ряд (1.14) сходится при  $|\lambda| \leq \|W-B\|_{C(\partial\Omega)}^{-1}$ , поэтому

$$r_T \geq \|\inf_B \|W-B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)}\|^{-1} \quad (1.15)$$

Согласно (1.12) знаменатель в (1.15) называется существенной нормой оператора  $T$ .

Оценим существенную норму  $R$ . Из (1.11)–(1.13) следует

$$R \leq \inf_B \cdot \sup_u \frac{\max_j \|(\lambda_j A_j - B_j)u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)}}{\|u\|_{C(\partial\Omega)}}$$

Выберем такие  $B_j^{(0)}$ , для которых имеет место неравенство

$$\|(\lambda_j A_j - B_j^{(0)})u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)} \leq (\lambda_j \|A_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j) \rightarrow C(\partial\Omega \setminus D_j)} + \varepsilon) \|u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R &\leq \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j) \rightarrow C(\partial\Omega \setminus D_j)} + \varepsilon) \sup_u \frac{\max_j \|u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)}}{\|u\|_{C(\partial\Omega)}} = \\ &= \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j) \rightarrow C(\partial\Omega \setminus D_j)} + \varepsilon) \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon$  произвольно, то его можно положить равным нулю. Поэтому

$$R \leq \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j) \rightarrow C(\partial\Omega \setminus D_j)})$$

или

$$R \leq \max_j \lambda_j \cdot \max_{\alpha_k^{(j)}} \frac{\alpha_k^{(j)}}{\pi}. \quad (1.16)$$

Здесь  $\alpha_k^{(j)}$  — скачок полукасательной в угловой точке  $P_k$  контура  $\Gamma_j$  ( $j=0; 1$ ). Получим обратную оценку для  $R$ .

$$\begin{aligned} R &= \inf_B \|W-B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \inf_B \cdot \sup_u \frac{\|(W-B)u\|_{C(\partial\Omega)}}{\|u\|_{C(\partial\Omega)}} \geq \\ &\geq \inf_B \cdot \sup_u \frac{\|(\lambda_j A_j - B_j)u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)}}{\|u_j\|_{C(\partial\Omega \setminus D_j)}} \end{aligned}$$

Положим

$$\vec{u}^{(1)} = (u_1, 0); \quad \vec{u}^{(2)} = (0; u_2) \quad (1.17)$$

По определению (1.17) имеем  $B_j u_j \stackrel{\text{def}}{=} B u^{(j)}$

Поэтому  $R \geq \inf_j \|i_j A_j - B_j\|_{C(\partial\Omega^{(j)})} \geq \lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega^{(j)})}$ . Итак

$$R \geq \max_j \lambda_j \cdot \max_{1 \leq \alpha \leq Q_j} \frac{\alpha^{(j)}}{\pi} \quad (1.18)$$

Из (1.16) и (1.18) следует, что

$$R = \max_j \cdot \max_{1 \leq \alpha \leq Q_j} \frac{\alpha^{(j)}}{\pi}$$

Когда угловая точка находится на внешнем контуре  $\Gamma_0$ , то  $\lambda_0 = 1$  и для того, чтобы  $R$  была меньше единицы, необходимо и достаточно, чтобы  $0 \leq \alpha_0 < \pi$ . Если же угловая точка находится на контуре  $\Gamma_1$ , учитывая, что  $\lambda_1 < 1$ , получаем, что  $R < 1$  даже при скачках полукасательных, равных  $\pi$ . Таким образом,  $r_j > 1$  для всех углов на  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , если углы этих контуров не имеют точек заострения.

Применяя обратный оператор  $(I+W)^{-1}$ , получаемый из (1.14) при  $\lambda = 1$  к оператору  $U = I+T$ , где  $I$  — тождественный оператор, находим  $(I+W)^{-1}U = (I+W)^{-1}(I+W+V) = I + (I+W)^{-1}V$  — вполне непрерывный оператор.

Дословным повторением вышеизложенного приема можно проверить, что и сопряженный оператор  $T^*$  является обобщенным оператором Фредгольма в пространстве  $C^*(\partial\Omega)$  функций ограниченной вариации на  $\partial\Omega$  [3].

2. Следуя [5], для вывода асимптотики решения системы рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\Delta \psi^{(0)} = 0 \text{ в } \Omega^{(0)}; \Delta \psi^{(j)} = 0 \text{ в } \Omega^{(j)} \quad (j=1, 2), \quad \psi^{(0)} + \psi^{(1)} = \frac{2}{\pi} \varphi^{(0)} \text{ на } \Gamma_1$$

$$G_0 \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial n} + G_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} \left( G_0 \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial n} + G_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} \right) \text{ на } \Gamma_1 \setminus L \quad (2.1)$$

$$\psi^{(0)} + \psi^{(2)} = \frac{2}{\pi} \varphi^{(0)} \text{ на } \Gamma_0; \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} g_0 \text{ на } \Gamma_0$$

где  $\Omega^{(2)}$  — свободное пространство с  $G_2 = 0$ .

Тогда можно доказать [5], что на  $\Gamma_1 \setminus L$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial n} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} \right) \quad (2.2)$$

Следовательно, асимптотика решения системы интегральных уравнений (1.8) может быть получена с помощью формулы (2.2), если будет известно решение вспомогательной задачи (2.1).

Предположим, что вблизи угловой точки  $P_j$  рассматриваемая область совпадает с сектором  $\{x = x_1 + i x_2 = r e^{i\omega}; 0 < r < \epsilon, -\frac{3}{2}\pi < \omega < \frac{\pi}{2}\}$

причем материал с модулем сдвига  $G_0$  занимает сектор  $\left\{ 0 < r < \delta; -\frac{3}{2}\pi < \omega < 0 \right\}$ , а материал с модулем сдвига  $G_1$  занимает сектор  $\left\{ 0 < r < \delta; 0 < \omega < \frac{2}{\pi} \right\}$ .

Тогда, как и в [5], для плотности  $\rho$  получаем асимптотику

$$\rho = \frac{\lambda}{2\pi} (\mu - 1) D r^{\mu-1} + O(1) \text{ на } \omega = 0, \quad \rho = -\frac{\lambda}{2\pi} (\mu - 1) D r^{\mu-1} + O(1) \text{ на } \omega = \frac{\pi}{2} \quad (2.3)$$

где  $\mu = G_1/G_0$ ;  $\lambda$  — корень с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения

$$\sin^2(\lambda\pi) = \left( \frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^2 \sin^2\left( \lambda \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.4)$$

3. Интегральное уравнение (1.8) будем решать методом последовательных приближений, полагая

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_n(t) \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (3.1)$$

Подставив (3.1) в (1.8), получим

$$\rho_0(t) = f(t), \quad \rho_n(t) = - \int_{\partial\Omega} K(t, s) \rho_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Численное решение интегрального уравнения (1.8) можно реализовать алгоритмом, указанным в [6]. Разбиваем каждую сторону квадрата на  $n_1$ , а окружность — на  $n_2$  равных частей. Крайние сегменты, пересечением которых является угловая точка, обозначим через  $\Delta$ . Множество точек  $T_0$ , расположенных в серединах сегментов, назовем множеством основных опорных точек. Между двумя соседними точками множества  $T_0$ , не примыкающими к угловым, поместим  $m$  дополнительных точек на равных расстояниях, а в окрестности угловых точек поместим  $p$  дополнительных точек, которые будем сгущать по мере приближения к угловой точке. Обозначим множество дополнительных опорных точек через  $T_1$ . Пусть  $T = T_0 \cup T_1$ . Обозначим через  $T_2$  множество угловых точек и точек, лежащих в серединах соседних точек множества  $T$ , не примыкающих к угловым.

Для приближенного решения системы (1.8), записанного в виде одного уравнения, заменим интеграл в (3.2) интегральной суммой

$$\int_{\partial\Omega} \rho_{n-1}(s) \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds = \sum_{\substack{i=1 \\ (t_k \neq s_i)}^q \rho_{n-1}(s_i) \frac{\partial}{\partial n_{t_k}} \left( \ln \frac{1}{r_{t_k s_i}} (s_{i-1} - s_i) \right) \quad (3.3)$$

где  $t_k \in T_0$ ,  $s_i \in T$ ,  $s_i \in T_2$ ,  $q$  — число точек множества  $T$ .

В окрестностях угловых точек функцию  $\rho_n(s)$  будем представлять, согласно (2.3), в виде

$$\rho_n^{(ac)}(s) = Ar^{\lambda-1} + B \quad (3.4)$$

где  $A$  и  $B$  — константы,  $r$  — расстояние от точки  $s$  до соответствующей угловой точки,  $\lambda$  — корень с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (2.4). Согласно исследованиям [7] уравнение (2.4) имеет положительный корень, который всегда меньше единицы.

Будем полагать, что функция (3.4) определена при  $s \in \left[0; \frac{3}{2}b\right]$ .

На остальных участках квадрата и на окружности искомую функцию  $\rho_n(s)$  будем представлять в виде кубического сплайна [8].

Для гладкого сопряжения представления (3.4) со сплайном потребуем, чтобы в точках сопряжения выполнялись следующие условия:

$$\rho_n^{(ac)}(t_k) = \rho_n^{(cn)}(t_k), \quad \rho_n^{(ac)'}(t_k) = \rho_n^{(cn)'}(t_k) \quad (3.5)$$

где  $t_k \in T_0$ ;  $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $k=2, n_1 \pm 2, 2n_1 \pm 2, 3n_1 \pm 2, 4n_1 - 2$ .

Определяя коэффициенты представления (3.4) и сплайна сначала для известной в (3.2) функции  $\rho_0(t) = f(t)$  в основных опорных точках, в дополнительных точках  $T_1$  значение этой функции будем определять из этого представления и сплайна. Подставив эти значения  $\rho_0(s)$  в (3.3), определим значения  $\rho_1(t)$  по (3.2) в основных опорных точках. Продолжая таким образом последовательные приближения, придем к искомому численному решению (3.1).

Компоненты тензора напряжений выражаются через функцию кручения  $\varphi(x, y)$  с помощью следующих формул:

$$X_j = \tau G_j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad Y_j = \tau G_j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (j=0; 1) \quad (3.6)$$

(остальные компоненты тензора напряжений равны нулю).

Здесь  $\tau$  — степень кручения;  $\tau = M/D$ , где  $M$  — крутящий момент,  $D$  — жесткость при кручении.

Жесткость  $D$  определяется по формуле [2]:

$$D = G_0 R^4 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{G_1 - G_0}{6G_0} \left( \frac{b}{R} \right)^4 - \frac{1}{2R^2} \left( \int_{r_0}^r \varphi dr^2 + \frac{G_0 + G_1}{G_0} \int_{r_1}^r \varphi dr^2 \right) \right\} \quad (3.7)$$

где  $R$  — радиус круга,  $b$  — сторона квадрата.

4. Для численного решения задачи на ЭВМ приняты следующие параметры разбиения контура:  $n_1 = 20$ ;  $n_2 = 100$ ;  $m = 2$ ;  $p = 8$ . В качестве  $\mu = G_1/G_0$  приняты значения  $\mu = 0; 0,07; 0,33; 0,55; 0,85; 1,25; 3; 5; 10; 100$ , причем для большинства случаев рассмотрены четыре варианта отношений  $R/b$

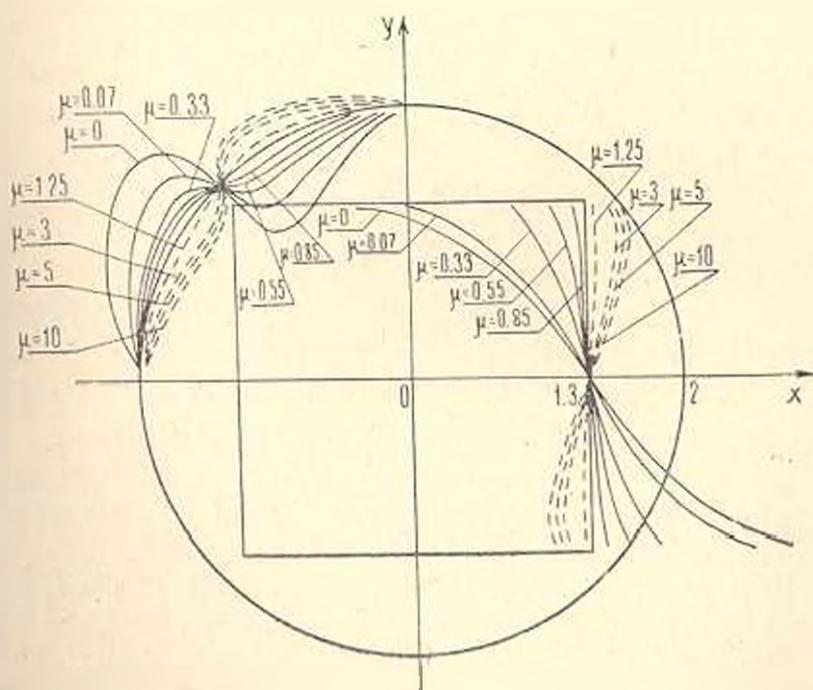
$$R/b = 1,25; 1; 0,77; 0,7$$

Во всех случаях, кроме случая  $\mu = 100$ , последовательные приближения сходятся довольно быстро.

В табл. 1 приведено число необходимых итераций для достижения точности  $10^{-5}$  при решении системы интегральных уравнений. Из этой таблицы можно заключить, что при сближении границ точность решения ухудшается и достижение высокой точности требует увеличения числа итераций. Кроме того, при увеличении отношения  $\mu$  от нуля до единицы необходимое число итераций для достижения точности  $10^{-5}$  уменьшается. При дальнейшем увеличении отношения  $\mu$  с единицы и выше, необходимое число итераций для достижения указанной точности увеличивается.

Таблица 1

$\mu$	Число итераций		
	$Rb = 1.25$	$Rb = 1$	$Rb = 0.77$
0	24	24	25
0.07	17	19	21
0.33	8	8	11
0.55	6	7	9
0.85	5	6	7
1.25	5	6	7
3	8	9	10
5	9	9	11
10	11	15	19



Фиг. 1

На фиг. 1 приведены графики функции  $\rho(s)$  для некоторых значений  $\mu$  для случая  $R/b=0,77$  после 25-и итераций. Сплошными линиями обозначены графики функции  $\rho(s)$  для случаев  $\mu < 1$ , а пунктирными линиями—для случаев  $\mu > 1$ . Ввиду симметрии графики показаны только для четверти контура. На остальных частях квадрата значения функции  $\rho(s)$  могут быть продолжены по циклической симметрии с поворотом на угол  $k\pi/2$ ,  $k=0;2;3$ . На окружности график функции  $\rho(s)$  антисимметричен относительно точек пересечения биссектрисе координатных углов и координатных осей с окружностью.

Как показывают расчеты, в угловых точках контура решение интегрального уравнения  $\rho(s)$  неограниченно возрастает для случаев  $\mu < 1$  и остается ограниченным при  $\mu > 1$ .

Для других значений отношений  $R/b$  графики функции  $\rho(s)$  имеют подобный вид.

После нахождения плотности  $\rho(s)$  вычисляем касательные напряжения  $X_2$  и  $Y_2$  по формулам (3.6) и проверяем краевое условие  $\sigma_0 = \sigma_1$  на  $\Gamma_1$ , где

$$\sigma_j = [X_2 \cos(n, x) + Y_2 \cos(n, y)], \quad (j=0;1) \quad (4.1)$$

Здесь  $n$ —нормаль, внешняя по отношению к  $\Omega^{(j)}$ . Индекс  $j$  указывает, что выражение, заключенное в квадратные скобки, вычисляется для материала, находящегося в области  $\Omega^{(j)}$ .

Во всех упомянутых случаях (кроме случая  $\mu=100$ ) граничное условие (4.1) удовлетворяется с большой точностью. Для дополнительных точек  $T_1$  наибольшая относительная погрешность составляет 4,5%:

$$\left| \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_1} \right| \cdot 100 \% \leq 4,5 \%$$

В табл. 2 приведены некоторые численные результаты для случаев  $\mu < 1$ . В таблице приняты следующие обозначения:  $\lambda$ —корень трансцендентного уравнения (2.4);  $D$ —жесткость, которая вычисляется по формуле (3.7);  $A$  и  $B$ —коэффициенты представления (3.4) для плотности  $\rho(s)$ ;  $A_1$  и  $A_2$ —коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности угловой точки в следующем виде:

$$A_1 = r^{1-\lambda} X_2, \quad A_2 = r^{1-\lambda} Y_2$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  имеют противоположные знаки, что согласуется с асимптотикой решения интегрального уравнения. На правой стороне угла (если из угловой точки смотреть во внутрь области) коэффициент  $A$  имеет знак плюс, а на левой стороне—минус.

Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  вычислены для точек интервала (0,0045 в; 0,05 в). В этом интервале они изменяются монотонно, поэтому в таблице 2 приведены интервалы их изменения.

В последнем столбце таблицы 2 приведены значения жесткости  $D/G_0 R^4$ .

Как показывают расчеты, при  $\mu > 1$  коэффициент  $A$  в представ-

лении (3.4) стремится к нулю. Поэтому, для повышения точности вычислений в представлении (3.4) принято, что  $A=0$  и взят следующий член асимптотики  $A_2 r^{\lambda_2}$ , где  $\lambda_2$  — второй по величине корень трансцендентного уравнения (2.4).

На фиг. 2 показаны графики касательных напряжений на биссектрисе координатного угла, на линии спая различных сред и на окружности для случаев  $\mu < 1$  и  $R=b$ . Для других значений отношения  $R/b$  графики имеют подобный вид. На стороне квадрата показаны графики полного касательного напряжения

$$T = X_2 \cos(t, x) + Y_2 \cos(t, y)$$

где  $t$  — касательная к линии спая. Эти напряжения, вычисленные на стороне квадрата со стороны области  $\Omega^{(0)}$ , показаны сплошными симметричными относительно оси  $x$  линиями, а со стороны области  $\Omega^{(1)}$  — пунктирными, симметричными относительно оси  $y$  линиями. Эти графики показывают, что при  $\mu < 1$  в угловых точках контура напряжения неограниченно возрастают по-разному в зависимости от отношения модулей сдвигов материалов.

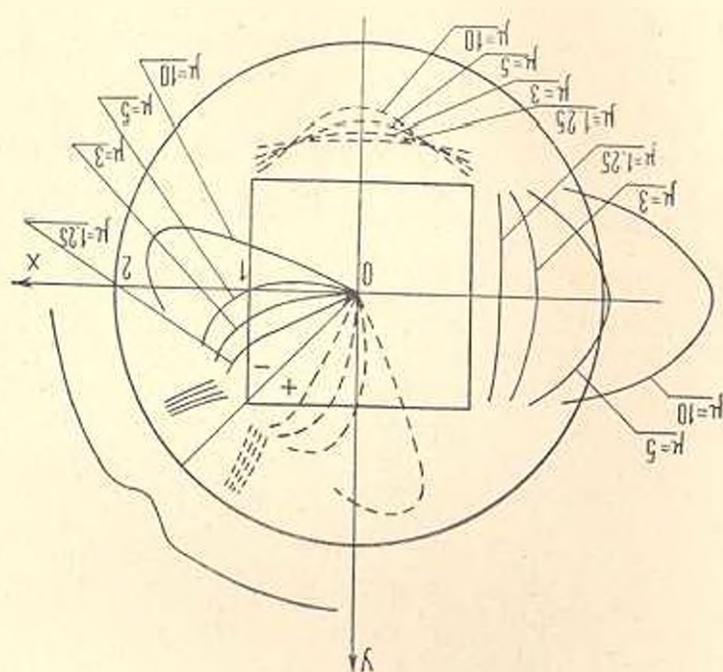
Таблица 2

$R/b$	$\mu$	$\lambda$	$A$	$B$	$A_1$		$A_2$		$D/G_0 R$
					$Q^{(1)}$	$Q^{(0)}$	$Q^{(1)}$	$Q^{(0)}$	
1.25	0	0,75	+0,209	+0,079	0	0,023—0,001	0	1,395—1,346	1,49
	0,07	0,937	+0,238	+0,131	0,338—0,131	0,317—0,131	0,242—0,098	1,464—1,261	1,50
	0,33	0,875	+0,207	+0,136	0,768—0,416	0,740—0,416	0,622—0,311	1,855—1,049	1,52
	0,55	0,75	+0,183	+0,140	0,928—0,441	0,788—0,442	0,727—0,506	1,323—0,938	1,54
1	0	0,75	+0,281	+0,006	0	0,033—0,001	0	6,001—1,832	1,38
	0,07	0,937	+0,318	+0,164	0,434—0,176	0,591—0,180	0,317—0,117	4,526—1,669	1,40
	0,33	0,875	+0,265	+0,170	0,952—0,536	1,011—0,542	0,786—0,414	2,384—1,314	1,45
	0,55	0,75	+0,232	+0,175	1,015—0,868	1,042—0,693	0,907—0,651	1,649—1,184	1,49
0,77	0	0,75	+0,485	+0,176	0	0,081—0,001	0	10,36—2,918	1,04
	0,07	0,937	+0,523	+0,259	0,737—0,285	0,742—0,285	0,527—0,178	7,524—2,552	1,08
	0,33	0,875	+0,387	+0,241	1,441—0,780	1,384—0,780	1,165—0,623	3,529—1,885	1,23
	0,55	0,75	+0,318	+0,261	1,419—0,948	1,396—0,948	1,271—0,881	2,311—1,603	1,35
	0,85	0,984	+0,242	+0,218	1,347—1,058	1,326—1,068	1,300—1,170	0,530—1,377	1,50

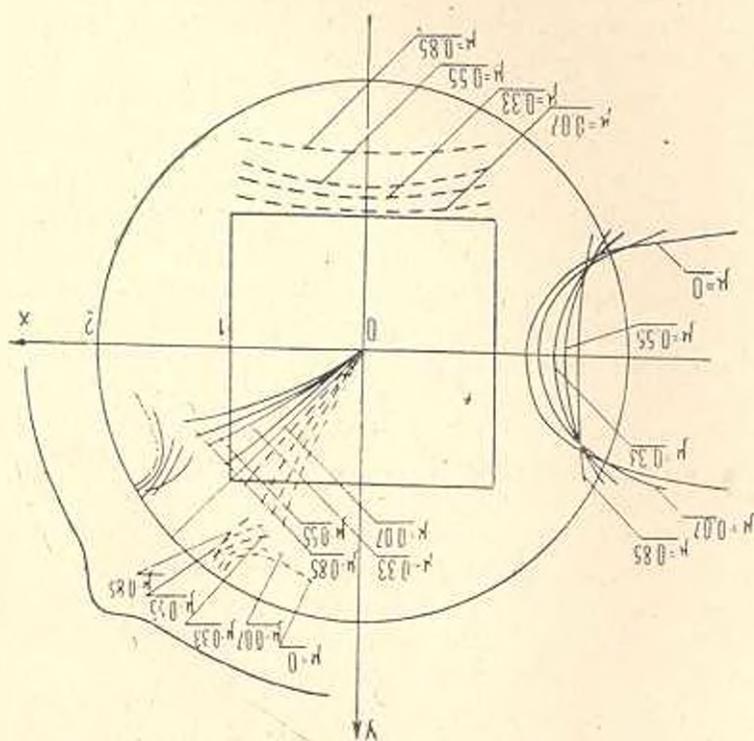
На окружности график касательного напряжения  $T$  показан лишь для случая  $\mu=0$ , так как для других значений  $\mu$  их величины отличаются незначительно. Из этого графика видно, что в окрестности точки пересечения биссектрисы угла с окружностью при  $\mu < 1$  наблюдается концентрация напряжений.

На фиг. 2 графики напряжений  $X_2$  и  $Y_2$  показаны по разные стороны от биссектрисы. Сплошными линиями обозначены графики напряжения  $X_2$ , а пунктирными линиями — графики напряжения  $Y_2$ . Для биссектрис остальных координатных углов между напряжениями  $X_2$  и  $Y_2$  имеют место следующие соотношения:

Фиг. 3



Фиг. 2



$$X_2^1 = X_2^2 = Y_2^2; \quad X_2^3 = -Y_2^3 = Y_2^1; \quad X_2^4 = Y_2^4 = Y_2^1$$

իւր վերին աստիճանը ցուցնում է, որ շրջանագծի վրա լարումը միջին է, որը համարում ենք  $\mu = 1$ ։

Ուրեմն, երբ  $\mu > 1$  և  $R = b$ , այսինքն, լարումը միջին է, որը համարում ենք  $\mu = 1$ ։

Ուրեմն, երբ  $\mu < 1$  և  $R = b$ , այսինքն, լարումը միջին է, որը համարում ենք  $\mu = 1$ ։

Ուրեմն, երբ  $\mu > 1$  և  $R < b$ , այսինքն, լարումը միջին է, որը համարում ենք  $\mu = 1$ ։

## ՔԱՆԱՆԻՍ ՊՐԻՉՄԱՅՈՎ ԱՄՐԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԶՈՂԻ ՈՂՈՐՈՒՄԸ ԱՅԻ ԿՅՈՒԹԵՐԻՑ

Կ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ս. Ս. ԶԱՐԿԱՐՅԱՆ

### Ա մ փ ո ւ լ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է այլ նյութից քառանկյան պրիզմայով ամրանավորված գլանային ձողի ուղղման խնդիրը։

Խնդիրը լուծվում է Լորանցի ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով։ Ապացուցվում է, որ դիտարկվող խնդրի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի ինտեգրալային օպերատորը հանդիսանում է Ֆրեդհոլմի ընդհանրացված օպերատոր։

Ինտեգրալ հավասարումների համակարգը լուծվում է թվային-անալիտիկ մեթոդով։

Թերթում են խնդրի թվային լուծման արդյունքները։

## THE TORSION OF A CYLINDRICAL ROD REINFORCED BY A TETRAHEDRAL PRISM FROM ANOTHER MATERIAL

G. G. GEVORGIAN, S. S. ZARGARIAN

### S u m m a r y

In this paper the problem of torsion of a cylindrical rod reinforced by a tetrahedral prism is considered.

The problem is solved by the method of boundary integral equations. It has been proved that the operator of the system of integral equations of the considered problem is the generalized Fredholm operator.

The solution leads to the numerical analytic method.

The results of the numerical solution are given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала.—Успехи математических наук. 1946, т. 1, вып. 3—4, с. 96—124.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1968. 707 с.
3. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975. 295 с.
4. Кресин Г. И., Мазья В. Г. О существенной норме оператора типа потенциала двойного слоя в пространстве  $S_{\mu}$ .—Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 2, с. 272—275.
5. Заргарян С. С. Кручение стержней, составленных из композитов, имеющих ребра на поверхностях спая различных сред.—Механика композитных материалов. Рига, 1984, № 2, с. 320—327.
6. Арсенян В. А., Заргарян С. С. Численное решение плоских задач теории упругости для областей с углами.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 1, с. 47—55.
7. Чобанян К. С. Явление малонапряженности окрестности края поверхности контакта нагруженного составного тела. Диплом на открытие № 102.—Открытия. Изобретения. Пром. образцы. Товарн. знаки, 1971, № 36, с. 3.
8. Альберг Дж., Нильсон Э., Уиллс Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию  
10.IV. 1985

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХ  
ЦИЛИНДРОВ

МАРТИРОСЯН Э. А.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для трех соосных цилиндров, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами. Контакт между цилиндрами предполагается гладким, то есть без сцепления, а зоны контакта считаются неизвестными. Для простоты принимается, что на боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки таким способом, что обе контактные области образуются в виде круга.

Задача решена при помощи функций Папковича-Нейбера, которые представляются в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и две системы парных рядов уравнений, содержащих функции Бесселя, решение которых сводится к решению квазиполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

Для решения описанной задачи величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему цилиндрам, будем отмечать соответственно индексами 1, 2 и 3 (фиг. 1).

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} F_i(r) & (0 \leq r < a_i) \\ 0 & (a_i \leq r < R) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 3)$$

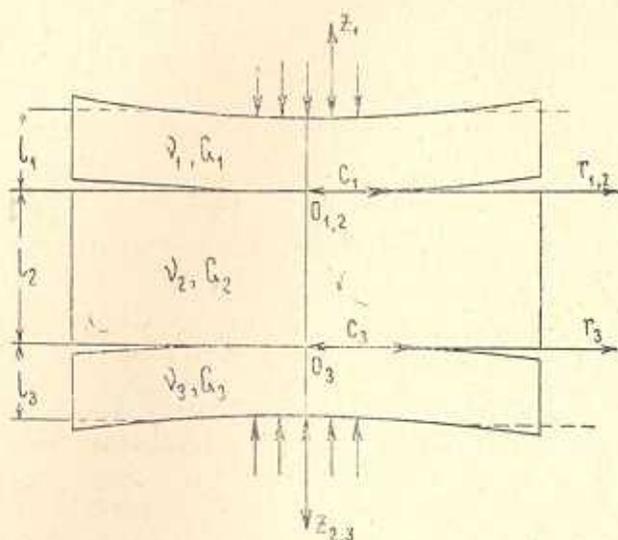
$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0), \quad \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0)$$

$$\tau_r^{(i)}(R, z) = 0, \quad \tau_z^{(i)}(R, z) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) & 0 \leq r < c_1 \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 & c_1 < r < R \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_z^{(2)}(r, l_2) = u_z^{(3)}(r, 0) & 0 \leq r < c_3 \\ \sigma_z^{(3)}(r, 0) = 0 & c_3 < r < R \end{cases}$$



Фиг. 1

Здесь принято, что  $F_i(r)$ , ( $i=1, 3$ ) — кусочно-непрерывная и ограниченная на заданном интервале функция и может быть представлена в виде ряда Фурье-Дини.  $l_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — длины,  $R$  — радиус цилиндров,  $J_n(x)$  — функция Бесселя действительного аргумента первого рода,  $\beta_k$  — положительные корни уравнения  $J_1(\beta_k R) = 0$ , а  $c_i$  ( $i=1, 3$ ) — размеры области контакта двух цилиндров.

Решение задачи сводится к нахождению функций Папковича-Нейбера, которые удовлетворяют гармоническому уравнению [2]

$$\Delta \varphi_j^{(i)}(r, z) = 0 \quad (j=1, 2); \quad \Delta \varphi_3^{(i)}(r, z) - \frac{\varphi_3^{(i)}(r, z)}{r^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрических координатах, и условиям (1).

Решения уравнений (1.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(i)}(r, z) = & C_i z + B_i (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(i)} \lambda_{ki}^{-1} J_0(\lambda_{ki} r) \cos(\lambda_{ki} z) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{-1} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r) \quad C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_2^{(i)}(r, z) = A_i z + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 2, 3)$$

(3)

$$\varphi_3^{(i)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(i)} I_1(\lambda_{ki} r) \cos \lambda_{ki} z$$

где  $I_n(x)$  — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а

$$\lambda_{ki} = \frac{k\pi}{l_i}.$$

Пользуясь обычными формулами [2] и вычисляя при помощи (3) напряжения и перемещения, удовлетворяя далее условиям (1), получим следующие соотношения:

$$A_i = \frac{a_0}{2(1+\nu_i)}, \quad B_i = \frac{\nu_i a_0}{2(1+\nu_i)}$$

$$A_k^{(i)} - (1-2\nu_i)D_k^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$E_k^{(i)} = \left[ 2(1-\nu_i) - \lambda_{ki} R \frac{I_0(\lambda_{ki} R)}{I_1(\lambda_{ki} R)} \right] G_k^{(i)}$$

$$B_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{ki} + C_k^{(i)} [\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} - (1-2\nu_i) \operatorname{sh} \mu_{ki}] + D_k^{(i)} \mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$-B_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{ki} - C_k^{(i)} [\mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} - 2(1-\nu_i) \operatorname{ch} \mu_{ki}] - D_k^{(i)} (\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} - \operatorname{sh} \mu_{ki}) = \frac{a_k^{(i)} + P_{ki}}{\beta_k} \quad (i=1, 3)$$

$$-B_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2} - C_k^{(2)} [\mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} - 2(1-\nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2}] - D_k^{(2)} (\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - \operatorname{sh} \mu_{k2}) = \quad (5)$$

$$= -[B_k^{(3)} - 2(1-\nu_3)C_k^{(3)}] + \frac{P_{k2}^* - P_{k3}}{\beta_k}$$

$$-B_k^{(1)} + 2(1-\nu_1)C_k^{(1)} - \frac{P_{k1}}{\beta_k} = -B_k^{(2)} + 2(1-\nu_2)C_k^{(2)} - \frac{P_{k2}}{\beta_k}$$

$$Y_k^{(i)} = \frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i \varphi_{ki}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[(-1)^k (C_n^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{pi} + D_p^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{pi}) - D_p^{(i)}] \beta_p^2 J_0(\beta_p R)}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_k^{(1)} - (3-4\nu_1)D_k^{(1)} - G[A_k^{(2)} - (3-4\nu_2)D_k^{(2)}] \} J_0(\beta_k r) &= 0 \quad (0 \leq r < c_1) \\ \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k [B_k^{(1)} - 2(1-\nu_1)C_k^{(1)}] J_0(\beta_k r) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{k1} \quad (c_1 < r < R) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$q_0^{(3)} - \sum_{k=1}^{\infty} [-2(1-\nu_2)(C_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_{k2} + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_{k2}) + 2G^*(1-\nu_3)D_k^{(3)}] J_0(\beta_k r) = 0 \quad (0 \leq r < c_3)$$

$$\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k [B_k^{(3)} - 2(1-\nu_3)C_k^{(3)}] J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k3} \quad (c_3 < r < R)$$

где введены обозначения

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(3)} = \alpha_0, \quad q_0^{(1)} = -C_1, \quad q_0^{(3)} = \frac{l_2 a_0}{1+\nu_2} + G^* C_3 \quad (8)$$

$$\lambda_{ki} I_1(\lambda_{ki} R) G_k^{(i)} = Y_k^{(i)}, \quad \mu_{ki} = \beta_k l_i \quad (i=1, 2, 3), \quad G = \frac{G_1}{G_2}, \quad G^* = \frac{G_2}{G_3}$$

$$P_{ki} = -\frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{ni} Y_n^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_k^2)^2}; \quad P_{ki}^* = -\frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda_{ni} Y_n^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_k^2)^2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (9)$$

$$\varphi_{ki} = \lambda_{ki} R \left[ 1 - \frac{I_0^2(\lambda_{ki} R)}{I_1^2(\lambda_{ki} R)} \right] + \frac{2(1-\nu_i)}{\lambda_{ki} R}$$

$G_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — модули сдвига, а  $\nu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — коэффициенты Пуассона.

Введем обозначения

$$- [B_k^{(i)} - 2(1 - \nu_i)C_k^{(i)}] = \frac{X_k^{(i)}}{\beta_k} \quad (i=1, 3) \quad (10)$$

Тогда из соотношений (5) получим

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} C_k^{(1)} &= -\nu_{k1} \operatorname{sh}^{\nu_{k1}} \frac{a_k^{(1)} + P_{k1}^*}{\beta_k} + \operatorname{sh}^{2\nu_{k1}} \frac{X_k^{(1)}}{\beta_k} \\ \Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} &= F_k^{(2)} \frac{a_k^{(2)} + P_{k2}^*}{\beta_k} - H_k^{(2)} \frac{X_k^{(2)}}{\beta_k} \\ \Delta_k^{(3)} C_k^{(3)} &= -\nu_{k2} \operatorname{sh}^{\nu_{k2}} \frac{X_k^{(3)} + P_{k2}^* - P_{k3}}{\beta_k} + \operatorname{sh}^{2\nu_{k2}} \frac{X_k^{(1)} - P_{k1} + P_{k2}}{\beta_k} \\ \Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} &= F_k^{(2)} \frac{X_k^{(3)} - P_{k2}^* - P_{k3}}{\beta_k} - H_k^{(2)} \frac{X_k^{(1)} - P_{k1} + P_{k2}}{\beta_k} \end{aligned} \quad (i=1, 3) \quad (11)$$

где

$$\Delta_k^{(i)} = \operatorname{sh}^{2\nu_{ki}} - \nu_{ki}^2, \quad F_k^{(i)} = \operatorname{sh}^{\nu_{ki}} + \nu_{ki} \operatorname{ch}^{\nu_{ki}}, \quad H_k^{(i)} = \operatorname{sh}^{\nu_{ki}} \operatorname{ch}^{\nu_{ki}} + \nu_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

Подставляя значения  $C_k^{(i)}$ ,  $D_k^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) в (7), получим следующую систему парных рядов — уравнений, содержащих функции Бесселя:

$$q_0^{*(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M_{ki}) \frac{X_k^{(i)}}{\beta_k} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \quad (0 \leq r < c_i) \quad (i=1, 3) \quad (13)$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(2)} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ki} J_0(\beta_k r) \quad (c_i < r < R)$$

где введены обозначения

$$q_0^{*(1)} = \frac{C_1}{2[1 - \nu_1 + G(1 - \nu_2)]}, \quad q_0^{*(3)} = \frac{I_2 a_0 + G^* C_3}{2[1 - \nu_2 + G^*(1 - \nu_3)]} \quad (14)$$

$$M_{k1} = \alpha M_k^{(1)} + (1 - \alpha) M_k^{(2)}, \quad M_{k3} = \alpha^* M_k^{(2)} + (1 - \alpha^*) M_k^{(3)} \quad (15)$$

$$\Delta_k^{(i)} M_k^{(i)} = \operatorname{sh}^{\nu_{ki}} (\operatorname{ch}^{\nu_{ki}} - \operatorname{sh}^{\nu_{ki}}) + \nu_{ki} (1 + \nu_{ki}) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\alpha = \frac{1 - \nu_1}{1 - \nu_1 + G(1 - \nu_2)}, \quad \alpha^* = \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_2 + G^*(1 - \nu_3)}$$

$$N_k^{(i)} = \frac{1}{\beta_k} \left[ \alpha \frac{F_k^{(1)}(a_k^{(1)} + P_{k1}^*)}{\Delta_k^{(1)}} + (1 - \alpha) \frac{(X_k^{(3)} + P_{k2}^* - P_{k3}) F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}} - \frac{H_k^{(2)}(P_{k2} - P_{k1})}{\Delta_k^{(2)}} \right]$$

$$N_k^{(2)} = \frac{1}{\beta_k} \left[ \alpha \frac{F_k^{(2)}(X_k^{(1)} - P_{k1} + P_{k2})}{\Delta_k^{(2)}} - \alpha^* \frac{H_k^{(2)}(P_{k2}^* - P_{k3})}{\Delta_k^{(2)}} + \right. \\ \left. + (1 - \alpha^*) \frac{F_k^{(3)}(a_k^{(3)} + P_{k3}^*)}{\Delta_k^{(3)}} \right]$$

Представляя  $X_k^{(i)}$  ( $i=1, 3$ ) в виде

$$X_k^{(i)} = \frac{1}{(\beta_k c_i)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} J_{2n+1/2}(\beta_k c_i) + P_{ki} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad \beta_0=0 \quad (16)$$

и применяя известные методы решения парных рядов-уравнений [1, 3, 4], решение уравнений (13) сведем к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(1)} b_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(3)} b_n^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(1)} Y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + d_s^{(1)} \quad (17) \\ (s=1, 2, \dots)$$

$$b_s^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(3)} b_n^{(3)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(1)} b_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn}^{(3)} Y_n^{(3)} + d_s^{(3)}$$

где

$$a_{sn}^{(i)} = -2(4s+1) \left[ \frac{(-1)^{n+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y)}{y I_1(y)} I_{2n+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right) dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ki} J_{2n+1/2}(\beta_k c_i) J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \right] \quad (i=1, 3)$$

$$c_{sn}^{(i)} = -\frac{8(4s+1)\sqrt{c_i}}{R^3} \gamma^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{1/2} [(-1)^n F_k^{(i)} - H_k^{(i)}]_{k,ni}}{\Delta_k^{(i)} J_0(\beta_k R) (i_{n2}^2 + \beta_k^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_k c_i) \quad (i=1, 2, 3) \\ c_3 = c_1$$

$$b_{sn}^{(1)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{R^2 \sqrt{c_1}} \alpha^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(2)} J_{2n+1/2}(\beta_k c_1) J_{2s+1/2}(\beta_k c_3)}{\Delta_k^{(2)} \beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \quad (18)$$

$$b_{sn}^{(3)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{R^2 \sqrt{c_3}} (1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(2)} J_{2n+1/2}(\beta_k c_3) J_{2s+1/2}(\beta_k c_1)}{\Delta_k^{(2)} \beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}$$

$$d_{sn}^{(2)} = -\frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R^3} \alpha^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{1/2} [F_k^{(2)} - (-1)^n H_k^{(2)}]_{k,n2}}{\Delta_k^{(2)} J_0(\beta_k R) (i_{n2}^2 + \beta_k^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_k c_3)$$

$$d_s^{(i)} = \frac{2(4s+1)\sqrt{c_i}}{R^2} \gamma^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(i)} a_k^{(i)}}{\Delta_k^{(i)} \beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} J_{2s+1/2}(\beta_k c_i) \quad (i=1, 3)$$

$$b_0^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \quad \gamma^{(1)} = \alpha, \quad \gamma^{(2)} = 1 - \alpha, \quad \gamma^{(3)} = 1 - \alpha^*$$

$K_n(x)$  — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Подставляя значения  $C_k^{(i)}$  и  $D_k^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) в (6) и учитывая (16), получим

$$Y_k^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(i)} b_n^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(i)} Y_n^{(i)} + d_k^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

$$Y_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(2)} b_n^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^{(2)} b_n^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} Y_n^{(2)} \quad (19)$$

где

$$a_{kn}^{(i)} = \frac{4\lambda_{kl}^2}{l_i \varphi_{kl} c_l^{1/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^{1/2} [H_p^{(i)} - (-1)^k F_p^{(i)}]}{\Delta_p^{(i)} J_0(\beta_p R) (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad c_2 = c_1$$

$$c_{kn}^{(i)} = \frac{16\lambda_{kl}^2}{l_i \varphi_{kl} R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 \{ [(-1)^k F_p^{(i)} - H_p^{(i)}] + (-1)^n [F_p^{(i)} - (-1)^k H_p^{(i)}] \}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2 (\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} \lambda_{nl} \quad (20)$$

$$b_{kn}^{(2)} = \frac{4\lambda_{k2}^2}{l_2 \varphi_{k2} c_2^{1/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^{1/2} [(-1)^k H_p^{(2)} - F_p^{(2)}]}{\Delta_p^{(2)} J_0(\beta_p R) (\lambda_{k2}^2 + \beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c_2)$$

$$d_k^{(i)} = \frac{4\lambda_{kl}^2}{l_i \varphi_{kl}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p J_0(\beta_p R) [(-1)^k H_p^{(i)} - F_p^{(i)}]}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} a_p^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

Докажем, что бесконечные системы (17) и (19) квазивполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных, когда  $s \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}^{(i)}| = \frac{2(4s+1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) I_{2n+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) dy +$$

$$+ \frac{2(4s+1)}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{kl} |J_{2s+1/2}(\beta_k c_i) J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \quad (21)$$

Для первого члена (21) получим оценку

$$\frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) \right] dy <$$

$$< \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n-1} \left( \frac{c_i y}{R} \right) dy =$$

$$= \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s+1/2} \left( \frac{c_i y}{R} \right) \left[ I_{-1} \left( \frac{c_i y}{R} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{c_i y}{R} \right] dy \quad (22)$$

Интеграл (22) сходится абсолютно и равномерно по параметру  $s$  и, следовательно, выражение (22) является ограниченной функцией от  $s$ .

Для больших значений  $s$  имеем

$$I_{2s+1/2}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1/2}}{\Gamma(2s+1/2)} \quad (23)$$

следовательно, интеграл, входящий в (22), при возрастании  $s$  стремится к нулю.

Имея в виду, что по  $n$   $\sum_{n=1}^{\infty} |J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|$  сходится и его сумма имеет порядок  $\beta_p^{-1/2}$  и учитывая, что  $M_{kl}$  и  $F_k^{(2)}/\Delta_k^{(2)}$  — ограниченные величины и при возрастании индекса стремятся к нулю, получим

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2(4s+1)}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{kl} |J_{2s+1/2}(\beta_k c_i) J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} = 0 \quad (24)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{sn}^{(i)}| = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} d_s^{(i)} = 0 \quad (i=1, 3)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{sn}^{(i)}| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |d_{sn}^{(i)}| = 0, \quad \text{как показано в работе [1].}$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}^{(i)}| \rightarrow 0 (k^{-1/2}) \quad (i=1, 2, 3), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_{kn}^{(2)}| \rightarrow 0 (k^{-1/2})$$

Для суммы модулей коэффициентов при неизвестных  $Y_n^{(i)}$  системы (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}^{(i)}| &\leq \frac{16\lambda_{kl}^2}{l_i |\varphi_{kl}| R} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\beta_p^3 F_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nl}}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} + \right. \\ &\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nl} [1 + (-1)^n (-1)^k]}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

Первая двойная сумма в (25) при  $k$  стремящемся к бесконечности стремится к нулю, так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + \beta_p^2)^2}$  имеет порядок  $\frac{1}{2\beta_p^2}$ ,

$$\frac{F_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}} \rightarrow 0 (pe^{-p}), \quad \text{а} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_{kl}| = 1.$$

Вторую двойную сумму в (25) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{16\lambda_{kl}^2}{Rl_i |\varphi_{kl}|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nl} [1 + (-1)^n (-1)^k]}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} = \\ = \begin{cases} \frac{32\lambda_{kl}^2}{Rl_i |\varphi_{kl}|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H_p^{(i)} \beta_p^3}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{nl}}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} \\ \frac{32\lambda_{kl}^2}{Rl_i |\varphi_{kl}|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)} (\lambda_{kl}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{nl}}{(\lambda_{nl}^2 + \beta_p^2)^2} \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

При этом в формуле (26) верхняя строка в правой части соответствует четным значениям  $k$ , а нижняя — нечетным значениям  $k$ .

Для второго ряда верхней строки (26) получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k_{ni}}{(k_{ni}^2 + \beta_p^2)^2} &= \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n\pi/l_i}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l_i^2} + \beta_p^2\right)^2} = \frac{l_i^3}{\pi^3} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 + \frac{l_i^2\beta_p^2}{\pi^2}\right)^2} = \\ &= \frac{l_i^3}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{\left[(2m)^2 + \frac{l_i^2\beta_p^2}{\pi^2}\right]^2} = \frac{l_i^3}{8\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2 + \frac{l_i^2\beta_p^2}{4\pi^2}\right)^2} \approx \\ &\approx \frac{l_i^3}{8\pi^3} \frac{4\pi^2}{2l_i^2\beta_p^2} = \frac{l_i}{4\pi\beta_p^2} \end{aligned}$$

Если представим  $\frac{H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}}$  в виде  $\frac{H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}} = 1 + Q_p^{(i)}$ , где  $Q_p^{(i)} \rightarrow 0$  ( $e^{-2\epsilon}$ ), то для больших значений  $k$  получим следующую оценку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}^{(i)}| \leq \frac{4}{\pi^2}$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов бесконечных систем (17) и (19) при больших значениях  $s$  стремится к нулю или остается меньше единицы. Следовательно, эти системы квазивполне регулярны.

После решения бесконечных систем (17) и (19) из первого уравнения (13) при фиксированном  $r$  определяются  $q_0^{(i)}$ , а из уравнения (14), находится  $c_i$  ( $i=1, 3$ ).

Подставив значение  $X_k^{(i)}$  ( $i=1,3$ ) из формулы (16) во второй ряд (13), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение [1]:

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) = \frac{R^2(c_1^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2} c_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \frac{n! F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_1^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leq r < c_1 \quad (27)$$

$$\sigma_z^{(2)}(r, L_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0) = \frac{R^2(c_3^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2} c_3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(3)} \frac{n! F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_3^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leq r < c_3$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $F(a, \beta, \gamma, x)$  — гипергеометрический ряд.

Коэффициент при особенности  $(c_i^2 - r^2)^{-1/2}$  в формуле (27) в окрестности  $r = c_i$  имеет вид [1]

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi} c_i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

Неизвестные величины  $c_i$  ( $i=1,3$ ) можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} = 0 \quad (i=1, 3) \quad (28)$$

*Численные примеры.* В частности, рассмотрим три цилиндра, имеющих одинаковые диаметры, изготовленных из различных материалов, которые контактированы между собой торцами. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки (фиг. 1.).

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -P & \text{при } 0 \leq r < a \\ 0 & \text{при } a < r < R \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 3)$$

где

$$a_0 = -\frac{a^2}{R^2} P, \quad a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k R)} P$$

Вычисления проведены для значений  $a=0,2R, 0,7R$ ;  $\nu_1=0,1, \nu_2=0,2, \nu_3=0,3, G_1=G_2=G_3; l_1=l_3=0,5l_2=0,2R$ .

Для этого частного случая при  $a=0,2R$  получается  $c_1=0,36R, c_3=0,341R$ , а при  $a=0,7R$   $c_1=0,806R, c_3=0,794R$ .

При решении системы уравнений (17) и (19) сначала были подобраны значения  $c_1$  и  $c_3$  (примерные их значения известны из [5]), по ним решались бесконечные системы алгебраических уравнений и полученные значения неизвестных были подставлены в (28). Этот процесс многократно повторялся до тех пор, пока в левой части (28) не получались числа с разными знаками, но близкие к нулю (с точностью 0,01).

## ԵՐԵՔ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

### 2. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

#### Ա մ փ ո փ ո ռ լ մ

Գիտարկվում են ճակատներով հարված, տարբեր առաձգական հատկությունների, միևնույն տրամագծեր և վերջավոր երկարությունների ունեցող երկրորդանային գլանների առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիր: Նորմալ և շոշափող լարումները գլանային մակերևույթների վրա բացակայում են: Գլանների կոնտակտների տիրույթները համարվում են անհատալի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դիլիի շարքերի միջոցով: Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ համակարգեր և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք-հավասարումներ, որոնց լուծումները հանգեցված են քվադրիտիկ ուղղար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը: Բերված են թվային օրինակներ:

# THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR THREE CYLINDERS

Y. A. MARTIROSSIAN

## Summary

The axisymmetric contact problem of the elasticity theory for three cylinders of finite lengths and equal diameters is considered. The cylinders are contacted with each other by the faces. The contact between the cylinders is assumed smooth and the contact zones are assumed to be unknown.

The normal and shear stresses are equal to zero on the side surfaces of the cylinders. The symmetrically disposed compressing loads are applied on the free faces of the cylinders in this way: both contact regions are shaped in the form of a circle. The problem is solved using the Papkovitch-Neuber functions, which are presented as the sum of Fourier and Fourier-Dini series with unknown coefficients for the determination of which are obtained three infinite systems of linear algebraic equations and two systems of dual series—equations containing Bessel functions, the solution of which are reduced to a quasi-regular infinite system of linear equations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян З. А. Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 14—25.
2. Лурье А. И. Теория упругости, М.: Наука, 1970. 939 с.
3. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier—Bessels Series.—Quart J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, pt. 3.
4. Баблоян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 5, с. 3—15.
5. Мартиросян З. А., Точоян В. С. О контактном взаимодействии трех соосных упругих цилиндров конечных длин.—МТТ, 1981, № 6, с. 94—102.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию  
26.XII. 1983.

УДК 539.3:539.55

## К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

МОВСИСЯН Л. А.

Как известно [1, 2], задача устойчивости термочувствительных упругих оболочек и пластин сводится к уравнениям с переменными коэффициентами, которые, вообще говоря, аналитически не интегрируемы, разве только в элементарных случаях. В [3] предложен подход к решению задач устойчивости цилиндрической оболочки и пластинки, находящейся в одномерном стационарном температурном поле, когда коэффициенты упругости и температурного расширения произвольным образом зависят от температуры. Определение критических параметров сводится к нахождению минимальных собственных значений бесконечных матриц.

В данной работе этот подход распространяется и на решение nasledственно упругих задач.

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка, которая находится в осесимметричном стационарном температурном поле, причем толщина оболочки настолько мала, что изменением температуры по ней можно пренебречь.

Пусть свойства материала описываются соотношениями

$$\sigma_{ij} = (1 - \Gamma^*) [\lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}] - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \delta_{ij} \quad (1.1)$$

Здесь коэффициенты  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  считаются произвольным образом зависящими от температуры  $T$ , но так, что коэффициент Пуассона  $\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$  является постоянным [1], а оператор  $\Gamma^*$  определяется как

$$\Gamma^* u(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) u(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Если предположить, что оболочка сжимается в осевом направлении усилием постоянной интенсивности  $P$ , то уравнение осесимметричных форм потери устойчивости запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\tau \right] \right\} + \frac{Eh}{R^2} \left[ w - \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) w d\tau \right] + P \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (1.3)$$

В дальнейшем, ради конкретности и простоты вычислительных работ будем иметь дело исключительно с ядрами экспоненциального типа — типичное или стандартное тело —  $\Gamma(t - \tau, T) = f(T) \exp\{-|\gamma + f(T)| \times \times (t - \tau)\}$ , где  $1/\gamma$  — время запаздывания ( $\gamma = \text{const}$ ). Тогда (1.3) можно привести к дифференциальному уравнению

$$L\left(E, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + [\gamma + f(T)]L(E, w) - L(Ef, w) + + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ [\gamma + f(T)]w + \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$L(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{uh^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{uh}{R^2} v$$

Будем изучать только оболочку и пластинку, края которых шарпирно ошергты, при заданных начальных условиях:  $w = w_0(x)$  при  $t = 0$ .

2. Характерные черты и общие выводы, связанные с вязкостью для оболочки и пластинки одинаковые, поэтому для простоты исследований наследственно упругих задач ограничимся только пластинкой ( $R \rightarrow \infty$ ). Тогда вместо (1.4) будем иметь (цилиндрический изгиб)

$$\frac{Ek^2}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + P \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + [\gamma + f(T)]w \right] = 0 \quad (2.1)$$

Нас интересуют значения мгновенного и длительного критических усилий, которые определяются соответственно из уравнений

$$EJ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + P \bar{w} = 0, \quad J = \frac{k^2}{12(1-\nu^2)} \quad (2.2)$$

$$EJ \gamma \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + [\gamma + f(T)]P \bar{w} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2) и (2.3) получаются при предельных значениях  $k(w = \bar{w}(x) \exp(kt))$ . А вообще, уравнение (2.1) можно решить так как и (2.2), (2.3).

Будем решать (2.3). Решение (2.2) получится как частный случай ( $f(T) = 0$ ). Представим  $E$  и  $\gamma = f(T)$  в виде рядов

$$EJ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos^2 kx, \quad 1 + \frac{f(T)}{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos^2 kx, \quad \gamma = \frac{k\pi}{l} \quad (2.4)$$

В виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям, будем искать также прогиб

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin^2 kx \quad (2.5)$$

Тогда подставляя (2.4) и (2.5) в (2.3) и проигнодая некоторые процедуры, для неизвестных  $f_k$  получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$2 \left[ \left( a_0 - \frac{1}{2} a_{2k} \right) k_k^2 - P \left( b_0 - \frac{1}{2} b_{2k} \right) \right] f_k + \sum_{m=1}^{k-1} [(a_{k-m} - a_{k+m}) k_m^2 - (b_{k-m} - b_{k+m}) P] f_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} [(a_{m-k} - a_{m+k}) k_m^2 - (b_{m-k} - b_{m+k}) P] f_m = 0 \quad (2.6)$$

Критическое усилие длительной потери устойчивости ( $P_{кр}^L$ ) определится как наименьший корень равенства нуля детерминанта системы (2.6).

Сначала рассмотрим два примера, для которых решение задач мгновенной устойчивости можно получить в замкнутой форме без вышеприведенных процедур.

а) Пусть часть пластинки ( $0 \leq x < c$ ) свободна от температуры, а оставшаяся часть ( $c \leq x \leq l$ ) подогрева постоянной температурой  $T_1$ . Обозначим модули упругости соответственно  $E$  и  $E_1$ . Если решение искать обычным образом, то есть для двух интервалов постоянства изгибной жесткости, далее удовлетворять условиям на концах и в точке сопряжения  $x=c$ , то для определения критического усилия получим уравнение

$$k_1 \operatorname{tg} k_1 z + k_2 \operatorname{tg} k_2 (l-z) = 0, \quad z = c/l \quad (2.7)$$

$$k_1^2 = \frac{P l^2}{E J}, \quad k_2^2 = \frac{P l^2}{E_1 J}$$

б) Температура по длине пластинки меняется линейно

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l} \quad (2.8)$$

и модуль Юнга также линейно зависит от температуры

$$E = E_0 (1 - \lambda \alpha_0 T) \quad (2.9)$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$(1 - ax) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + b^2 \bar{w} = 0, \quad b^2 = \frac{P}{E_0 (1 - \lambda \alpha_0 T_1)}, \quad a = \frac{\lambda \alpha_0 (T_2 - T_1)}{(1 - \lambda \alpha_0 T_1) l} \quad (2.10)$$

решение которого выражается через бесселевы функции

$$\bar{w} = C_1 y^{1/2} J_1(2dy^{1/2}) + C_2 y^{1/2} Y_1(2dy^{1/2}), \quad d = b/a, \quad y = 1 - ax \quad (2.11)$$

Для определения критического усилия имеем уравнение

$$J_1(2d) Y_1[2d(1-a)^{1/2}] - Y_1(2d) J_1[2d(1-a)^{1/2}] = 0 \quad (2.12)$$

Теперь эти же задачи рассмотрим в постановке, когда критические усилия определяются из системы (2.6).

Коэффициенты  $a_k$  соответственно для первой и второй задач будут

$$a_0 = [Ez + E_1(1-z)]J, \quad a_k = \frac{2(E - E_1)J}{k\pi} \sin k\pi z \quad (2.13)$$

$$a_0 = E_2 J [1 - 0,5 \lambda z_0 (T_2 + T_1)], \quad a_k = \frac{2E_2 J [1 - (-1)^k]}{k^2 \pi^2} \quad (2.14)$$

Сравнение минимальных корней трансцендентных уравнений (2.7) и (2.12) с соответствующими, полученными из (2.6) ( $\theta_2 = 0$ ,  $k \neq 0$ ) при (2.13) и (2.14), даже во втором приближении (детерминант второго порядка) показывает вполне удовлетворительное совпадение. Например, для первой задачи при  $E = 4E_1$ ,  $\lambda z_0 = 0,5$  минимальный корень, определенный из (2.7), есть  $P_{кр} = 1,46 P_1(E_1)$ , в то время как из (2.6) получается  $P_{кр} = 1,52 P_1(E_1)$  ( $P_1(E_1) = E_1 J \lambda^2$ ).

Это показывает эффективность вышеприведенного способа определения критических сил в задачах, для которых непосредственное интегрирование невозможно.

Теперь займемся определением длительного критического усилия. Помимо  $a_k$  нам необходимо будет также  $b_k$ . Для конкретности примем, что  $f(T)$  также линейная функция от температуры  $f(T) = A + BT$ . Тогда коэффициенты  $b_k$  соответственно для первой и второй задач будут

$$b_0 = a_1 z + b_1 (1 - z), \quad b_k = \frac{2}{k\pi} (a_1 - b_1) \sin k\pi z, \quad a_1 = 1 + \frac{A}{\gamma}, \quad b_1 = a_1 + \frac{BT_1}{\gamma} \quad (2.15)$$

$$b_0 = a_2 + \frac{b_2 l}{2}, \quad b_k = \frac{2b_2}{k\pi} [1 - (-1)^k], \quad a_2 = 1 + \frac{1}{\gamma} (A + BT_1), \quad b_2 = \frac{B}{\gamma l} (T_2 - T_1)$$

На фиг. 1 и 2 приведены кривые мгновенных (1) и длительных (2) безразмерных критических усилий. По оси ординат отложено  $\bar{P}_{кр} = P_{кр}/P_2$ , ( $P_2 = E_2 J \lambda^2$ ), а по оси абсцисс — в первом случае  $z$ , а во втором — безразмерное  $\theta = T_1/T_2$ . Было принято:

$$E = 2E_1, \quad a_1 = 2, \quad b_1 = 3, \quad \lambda z_0 T_2 = 0,5, \quad a_2 = a_1 + \theta, \quad b_2 = 1 - \theta$$

Известно, что при неучете упругих и вязких свойств материала от температуры, значение длительного критического усилия получается из выражения мгновенного усилия, если заменить мгновенный упругий модуль длительным. Но, как видно из приведенных фигур и из (2.1), это для термочувствительных систем будет иметь место только в случае, когда время релаксации  $1/|\gamma + f(T)|$  не изменяется с изменением температуры. В частности, в первом примере, если при  $z = 1$  длительное критическое усилие равно половине эйлерового, то уже при  $z = 0$  (пластина постоянно подогрета) оно равно одной трети эйлерового с новым мгновенным модулем упругости.

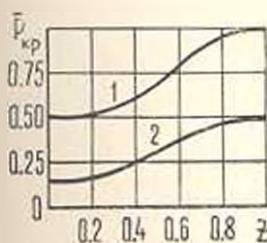
Между прочим, первую задачу можно рассмотреть и в упруго-пластической постановке в предположении, что нагретая часть пластинки находится в пластическом состоянии. Если предположить, что материал пластинки подчиняется линейному упрочнению и  $E_k$  — каса-

тельный модуль, то выражение мгновенного критического усилия определится из (2.6) ( $b_k=0, k \neq 0$ ) с  $a_k$  из (2.13), в которых  $E_1$  должно быть заменено на  $E_k$ .

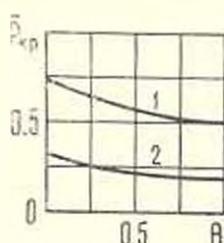
3. В предыдущих задачах влияние температуры входило только через упругие и наследственные коэффициенты. Теперь рассмотрим пример, когда сжимающая сила также зависит от температуры. Таковым будет, например, случай, когда края пластинки защемлены в продольном направлении (начальное состояние). Если предположить, что пластинка неравномерно нагрета и внешние силы отсутствуют, то выражение сжимающего усилия будет

$$P = h \int_0^l \alpha T dx \left| (1 - \nu) \int_0^l \frac{dx}{E} \right. \quad (3.1)$$

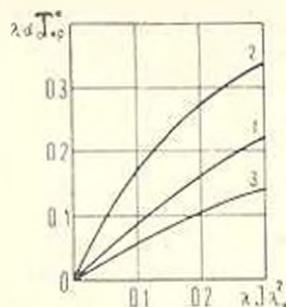
Формула сжимающего усилия для наследственно-упругой пластинки при неравномерном нагреве получается слишком длинной и получить аналитическое выражение для критического усилия невозможно.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3. приведены кривые критической температуры  $\lambda_0 T_{cr}^*$  в зависимости от безразмерного параметра  $\lambda_1 \lambda_1^2$  для трех случаев:

- 1)  $T^0 = T_1 = T_2$ , 2)  $T_1 = 0, T_2 = T^0$ , 3)  $T_2 = 2T_1 = 2T^0$

Температура по длине пластинки изменяется по закону (2.8), а модуль Юнга и коэффициент температурного расширения также линейные функции от температуры  $E = E_0(1 - \lambda_2 T)$ ,  $\alpha = \alpha_0(1 + \lambda_3 T)$ .

Если предположить, что пластинка обладает наследственным свойством и подогрета постоянной температурой  $T^0$ , то критические усилия соответственно для мгновенной и длительной устойчивости определяются формулами

$$\alpha_0 T^0 (1 + \lambda_3 T^0) = \lambda_1^2, \quad \alpha_0 T^0 (1 + \lambda_3 T^0) = \lambda_1^2 \left[ 1 + \frac{f(T^0)}{\gamma} \right] \quad (3.2)$$

Из приведенных формул видно, что длительная критическая температура может быть больше или меньше мгновенной (причем мгновенная критическая температура при учете зависимости коэффициента

температурного расширения от температуры получается меньшей, чем без учета этой зависимости), смотря по тому как зависят коэффициент температурного расширения и время релаксации от температуры.

4. Случай цилиндрической оболочки при мгновенной устойчивости получим из (1.4) и бесконечная система, аналогичная (2.6), будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{q-1} (c_{q-n} - c_{q+n}) \omega_n + (2c_0 - c_2 - P_{cr}^2) \omega_q + \sum_{n=q+1}^{\infty} (c_{n-q} - c_{n+q}) \omega_n = 0 \quad (4.1)$$

$$c_{q \pm n} = \left( \frac{h^2 \lambda_n^2 l^2}{24(1-\nu^2)} + \frac{h}{2R^2} \right) a_{q \pm n}$$

Выражение мгновенного критического усилия для достаточно длинной оболочки при (2.8) и (2.9) во втором приближении имеет вид

$$P_{cr} = 0,605 E_0 \frac{h^2}{R} \left\{ 1 - \lambda_0 \left| \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{e^2} (T_2 - T_1) \right| \right\}$$

5. Здесь будем рассматривать цилиндрическую оболочку под равномерным давлением. Если предположить, что температура по длине оболочки меняется так, что имеет место  $\frac{\partial^2(E\Phi)}{\partial x^2} = E \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \beta^2}$ , то для потенциальной функции  $\Phi$  можно получить уравнение, аналогичное (1.4), которое для мгновенной задачи примет вид

$$\frac{\partial^2(E\Phi)}{\partial x^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)R^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} + \frac{q}{hR^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0$$

Если представить  $E(x)$  в виде (2.4) и искать  $\Phi$  следующим образом:

$$\Phi = \cos m\beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x$$

то бесконечная система будет иметь вид (4.1) с коэффициентами

$$c_{q \pm n} = \left( \frac{h^2 m^2}{24(1-\nu^2)R^4} + \frac{1}{2} \lambda_n^2 \right) a_{q \pm n}$$

а  $P_{cr}^2$  необходимо заменить на  $Q = qm^2/hR^2$ .

Определение критического давления в случае, когда  $E$  линейно зависит от температуры, а последняя по длине меняется как  $T = T_1 \cos \lambda_1 x$ , ( $T_1 = \text{const}$ ), сводится к нахождению минимального корня цепной дроби

$$U_1 = \frac{1}{U_2 - \frac{1}{U_3 - \dots}} = 0, \quad U_n = \frac{2c_n - Q}{c_n}$$

Для оболочки с данными  $12(1-\nu^2)R^4/h^2 = 10^4$ ,  $\pi R/l = 10$  при  $\lambda_0 T_1 = 0,75$  получается, что значения критического давления в первых 40

трех приближениях соответственно равны 1; 0,825 и 0,796 от значения классического критического давления (без учета зависимости свойства материала от температуры).

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՋԳԱՄԱՇՈՒՑԻԿ ԶԵՐՄԱՋԳԱՅՈՒՆ ՍԱՂԵՐԻ ԵՎ  
ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրվում է զլանային թաղանթի և սալի կայունությունը միաչափ ստացիոնար ջերմային դաշտում առաձգական և առաձգամածուցիկ դրվածքներով. երբ այդ հատկությունները հանդիսանում են կամայական ֆունկցիաներ ջերմությունից: Ակնթարթային և երկարատև կրիտիկական ուժերի որոշումը ազատ հենված համակարգերի համար բերվում է անվերջ մատրիցների ամենափոքր սեփական արժեքների գտնելուն: Գիտարկված է մի շարք խնդիրներ:

ON THE STABILITY OF ELASTIC AND VISCOELASTIC  
THERMOSENSIBLE PLATES AND SHELLS

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The stability of cylindrical shell and plate in the one-dimensional steady thermal field in elastic and viscoelastic state is investigated, when these properties are arbitrary functions from temperature. For free supported systems the determination of instantaneous and long-term critical forces is reduced to finding of the minimal eigenvalues of infinite matrices. A series of problems have been considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластики и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
2. *Ambartsumian S. A., Bagdasarian G. E., Durgurlan S. M. and Gnany V. T.* Some Problems of Vibration and Stability of Shells and Plates.—IJSS, 1966, vol. 2, p. 59—81.
3. *Мовсисян Л. А.* Об устойчивости термочувствительных цилиндрических оболочек и пластин.—Механика Межвуз. сб. научн. тр. Изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 75—80.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
12.III. 1984.

УДК 539.374

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ  
 ПРЕССОВАНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

ГЕОГДЖАЕВ В. О., ОСОКИН А. Е.

В рамках жесткопластического анализа в работах [1—5] для задачи волочения, прокатки полосы, поддвига литосферных плит и задачи резания металла предложены решения, в которых на границе (или на части границы) между жесткими и пластическими зонами нет скачка касательной составляющей скорости и, следовательно, вектор скорости остается непрерывным при пересечении этой границы. Подход, развиваемый в этих работах, позволяет получить для ряда задач теории пластичности решения, физически более приемлемые.

В публикуемой работе предлагается решение задачи прессования, в котором поле скоростей всюду в очаге деформации непрерывно.

Плоское пластическое деформированное состояние изотропных сред без упрочнения описывается гиперболической системой уравнений [6], которую можно записать в виде

$$2 \frac{\partial S}{\partial \xi} = T, \quad 2 \frac{\partial T}{\partial \eta} = S, \quad 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} = V, \quad 2 \frac{\partial V}{\partial \eta} = U \quad (1)$$

$$S = y \sin \psi + x \cos \psi, \quad T = y \cos \psi - x \sin \psi$$

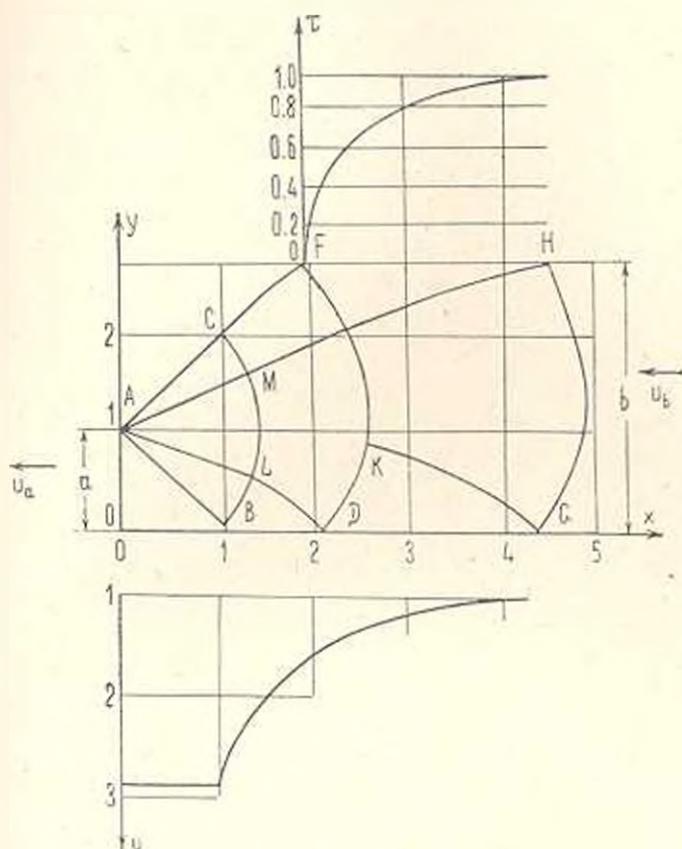
$$U = u \sin \psi - v \cos \psi, \quad V = u \cos \psi + v \sin \psi$$

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad 2\varphi = \xi - \eta, \quad 2\chi = \xi + \eta$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты физической плоскости,  $u$  и  $v$  — проекции скорости в этой плоскости на оси координат. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  выражаются через функции  $\varphi$ ,  $\chi$  и постоянную условия пластичности Мизеса  $k$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = k(2\chi \pm \cos 2\varphi), \quad \tau_{xy} = k \sin 2\varphi \quad (2)$$

Рассмотрим задачу прессования полосы. Полоса шириной  $2b$  со скоростью  $v_0$  входит в неподвижную матрицу, после обжатия полоса становится шириной  $2a$  и выходит из матрицы со скоростью  $v_1$ . Схема процесса прессования с характерными пластическими областями приведена на фиг. 1. В силу симметрии схемы на фиг. 1 показана только верхняя половина полосы.



Фиг. 1

Настоящая задача впервые была рассмотрена Хиллом [7]. В этом решении очаг пластических деформаций был ограничен характеристикой  $FD$  (фиг. 1), вследствие чего вдоль жесткопластических границ  $ACF$  и  $FD$ , а также в очаге деформации вдоль характеристики  $ALD$  образовались скачки скоростей. Если в точке  $D$  в жесткой зоне скорость равняется 1, в точке  $D$  области  $LDFC$  скорость равна  $\sqrt{5}/2$  (составляющие соответственно по  $DL$   $1/\sqrt{2}$  по  $LK$   $2/\sqrt{2}$ ), то в точке  $D$  области  $BLD$  скорость равняется 2.

Материал полосы несжимаем, поэтому полагаем, что

$$u_a a = u_b b \quad (3)$$

На границе  $FH$  действует вязкое трение

$$\tau_{xy} = -\lambda u \quad (4)$$

где  $\lambda = \text{const}$ .

В безразмерном виде соотношение (4) запишется так:

$$\bar{\tau}_{xy} = -\mu \bar{u}$$

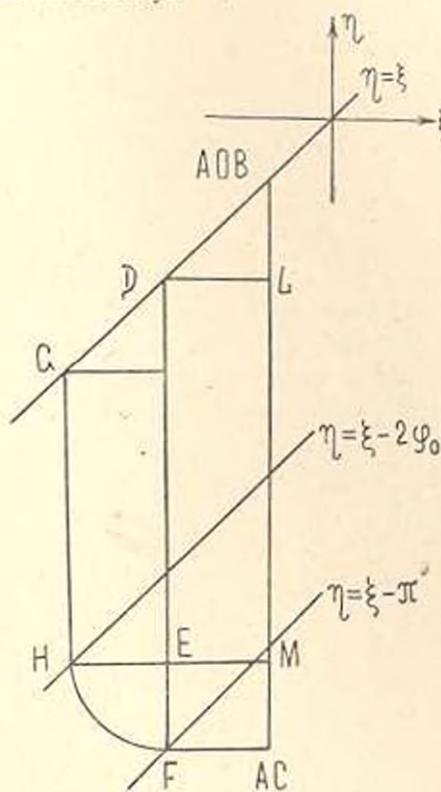
где

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{k}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_b}, \quad \bar{p} = \frac{\lambda u_b}{k}$$

Далее, для простоты, черточки над безразмерными величинами опускаются.

Трение на границе матрицы и полосы в реальных условиях различными способами делается наименьшим. Поэтому коэффициент  $\lambda$  полагается малым так, что безразмерный коэффициент трения  $\bar{p}$  считается ограниченным,  $\bar{p} \ll 1$ . Решение для больших  $\lambda$  ( $\bar{p}$ ) не строится. Условие  $\bar{p} \ll 1$  есть ограничение для скорости  $u_b$  при заданных  $\lambda$  и  $k$ . Таким образом, на границе жесткой и пластической зон в точке  $H$  напряжение трения  $|\tau_{xy}| \ll 1$ . Естественно, что поле напряжений и предельная нагрузка в построенном решении будут зависеть от безразмерного коэффициента трения  $\bar{p}$  и величины обжатия  $u/a$ .

Пластическим областям в плоскости  $xy$  соответствуют области в плоскости характеристик  $\xi\eta$ , (фиг. 2). Для удобства области в плоскостях  $xu$  и  $\xi\eta$  обозначены одними и теми же буквами. Далее будем использовать безразмерные переменные, для чего все линейные размеры отнесем к величине  $a$ , а все скорости — к  $u_b$ , напряжения поделим на постоянную  $k$ .



Фиг. 2

На линии  $AO$  и в треугольнике  $AOB$  справедливы условия  $\tau_{xy}=0$ ,  $\sigma_x=0$ . Это означает, что в треугольнике  $AOB$   $\varphi=0$ ,  $\chi=-0,5$  и ему в плоскости  $\xi\eta$  соответствует точка  $AOB$   $\xi=\eta=-0,5$ , лежащая на прямой  $\eta=\xi$ . Материал в треугольнике  $AOB$  движется с постоянной скоростью и поэтому его можно считать жестким. В этом случае пластическая зона начинается характеристикой  $AB$ , на которой  $\chi=-0,5$ ,  $\varphi=0$ , что обеспечивает отсутствие сил на выходе из матрицы прессуемой полосы. В пластической зоне  $ABLMC$  реализуется интеграл уравнений пластичности [6] с характеристиками в виде дуг концентрических окружностей с центром в точке  $A$  и их радиусов. При этом характеристика  $BLMC$  — дуга окружности радиуса  $\sqrt{2}$ .

На оси полосы, на линии  $BDG$ , выполняется условие  $\tau_{xy}=0$ , то есть  $\varphi=0$ , так что отрезок  $BG$

отображается в плоскости характеристик на соответствующий отрезок прямой  $\eta = \xi$ . Точка  $D$  пластической области  $BLD$  расположена так, чтобы в точке  $F$  имело место равенство  $y = b$ . На границе пластической и жесткой зон  $ACF$  скорость равна нулю. Так как в точке  $F$   $u = 0$ , то в соответствии с соотношениями (2) и (4) в характеристической плоскости положение точки  $F$  определяется условием  $\varphi = \pi/2$ . Таким образом, образ точки  $F$  в плоскости  $\xi\eta$  лежит на прямой  $\eta = \xi - \pi$ .

Кривая  $FH$  на плоскости  $\xi\eta$  находится из условия, что на ней  $y = b$ . После определения положения линии  $FH$  в каждой ее точке известны значения  $\xi$  и  $\eta$ , а значит и  $\varphi$ . Тем самым, в каждой точке  $FH$  по формулам (2), (4) могут быть рассчитаны значения скорости

$$u = -\frac{1}{\mu} \sin 2\varphi \quad (5)$$

В точке  $H$   $u = -1$ , поэтому точка  $H$  на плоскости  $\xi\eta$  лежит на прямой

$$\eta = \xi - 2\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} (\pi - \arcsin \mu)$$

На линии  $FH$   $v = 0$ , а  $u$  может быть вычислено по формуле (1.5). Тем самым, на этой линии определены  $U$  и  $V$ . На линии  $CF$  по значениям  $u = v = 0$  определяем, что  $U = V = 0$ . На  $GH$   $u = -1$ ,  $v = 0$ . Это позволяет определить  $U$  и  $V$  на  $GH$ . На оси полосы, на линии  $BDC$   $v = 0$ . Это означает, что на отрезке  $BDC$  выполняется условие  $U = V$ .

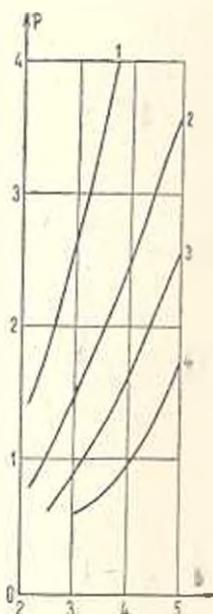
Сформулированные граничные условия для координат и скоростей позволяют путем последовательного решения краевых задач теории пластичности [6] определить в очаге деформаций поля напряжений и скоростей. По известным значениям напряжений вдоль линии  $GH$  можно определить требуемую относительную силу прессования  $2p = 2P/ka$ , где  $2P$  — сила прессования. Наличие трения между жесткой частью полосы и контейнером можно учесть дополнительно.

Так как в точке  $H$  скорость в пластической и жесткой зонах не терпит разрыва, то вдоль всей характеристики  $GH$  нет скачка касательной составляющей скорости. В точке  $F$  скорость как в пластической, так и в жесткой областях равна нулю, что и обеспечивает непрерывность скорости во всем очаге пластических деформаций.

Для вычисления скоростей и напряжений А. Е. Осокиным была составлена программа на языке ФОРТРАН-4, представляющая собой развитие программы, ранее использованной для жесткопластического анализа процесса подвига литосферных плит [3]. Разностная схема строилась аппроксимацией условий на характеристиках (1.1) конечно-разностными соотношениями и имела первый порядок точности.

Рассматриваемую задачу можно обобщить на случай анизотропного материала, тогда вместо уравнений (1.1) можно взять уравнения

анизотропного материала [8] и провести построение решения, придерживаясь принципиальной схемы, описанной выше. Тем самым, в рассматриваемой задаче прессования можно оценить влияние анизотропии материала на потребные силы прессования.



Фиг. 3

На фиг. 3 даны зависимости относительных потребных сил прессования  $p$  в функции относительной толщины полосы  $b$  для различных значений  $\mu$  (кривая 1 —  $\mu = 1$ , кривая 2 —  $\mu = 0,8$ , кривая 3 —  $\mu = 0,6$ , кривая 4 —  $\mu = 0,4$ ). На фиг. 1 сетка характеристик соответствует случаю  $b = 2,88$  и  $\mu = 1$ , ниже оси  $x$  дана зависимость скорости вдоль оси полосы, а на границе контейнера  $FH$  представлено распределение касательного напряжения  $\tau$ .

Как показали численные расчеты, скорость от жесткопластической границы  $ACF$  быстро возрастает. Если протяженность пластической зоны  $FHGD$  мала (касательное напряжение в точке  $H$  невелико), скорости по характеристике  $FKD$  меняются следующим образом: от нуля в точке  $F$  скорость довольно быстро приближается к единице и достигает максимума, примерно равного 1,1 где-то в середине этой характеристики. Далее скорость уменьшается до значения порядка единицы на оси полосы в точке  $D$ .

ՍՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԻՐԻ ԱՆԻՆԻԶՄԱՏ ԳԱՇՏՈՎ ՄԱՍԼՄԱՆ ԽԵՂԻՐԻ  
ՎՈՇՏ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Վ. Օ. ԴԵՈԴԶԱԵՎ, Ա. Ե. ՕՍՈԿԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մամլման ինգրի համար դիտարկված է լարումների և արագությունների դաշտ, որը օժտված է այն առանձնահատկությամբ, որ կոշտ և պլաստիկական տիրույթների միջև եզրի վրա արագությունները անընդհատ են: Դա թույլատրվում է վերածնելու հայտնի լուծումներում եղած արագությունների թուրքները գեոմորֆացիաների օջախում:

Բերված են թվային օրինակներ մածուցիկության շփման դործակցի տարրեր արժեքների համար:

THE RIGID-PLASTIC ANALYSIS OF THE PRESSURE PROBLEM  
WITH A CONTINUOUS VELOCITY FIELD

V. O. GEOGDGAEV, A. E. OSOKIN

S u m m a r y

The continuous velocity field is constructed for the pressure problem. This velocity field is of such characteristics that the discontinuities of the velocity between rigid and plastic regions are eliminated.

The numerical solutions for different coefficients of viscous friction between a strip and matrix are presented.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Геогджаев В. О., Михайлов С. Е. К вопросу о волочении полосы.—Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 5, с. 131—134.
2. Геогджаев В. О. Некоторые вопросы теории пластичности с непрерывным полем скоростей.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 190.
3. Геогджаев В. О., Осокин А. Е. Жесткопластический подвиг литосферных плит.—Изв. АН СССР. Физика Земли, 1981, № 11, с. 93.
4. Геогджаев В. О. Прокатка полосы.—Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 7, с. 125—129.
5. Геогджаев В. О. Вариант решения задачи Црандтля.—Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6, с. 134—136.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
8. Геогджаев В. О. Плоская деформация анизотропных пластических сред и вдавливание выпуклых штампов.—В кн.: Пластическая деформация легких и специальных сплавов. Вып. 1. М.: Металлургия, 1978, с. 133—136.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
6.XII. 1983.

УДК 624.074.7.042.8

## О ДИНАМИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЯХ ПОТОКА СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ НА СТЕНЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ГРЯНИК В. Т.

Многие конструкции для хранения и переработки сыпучих материалов (бункеры, силосы, химические аппараты) представляют собой вертикальные призматические оболочки. При разгрузке таких оболочек возможны две основные формы движения сыпучего заложителя — струйное течение и массовый поток [1]. В первом случае сыпучая среда движется узкой центральной струей. Ее давления на стены емкости мало отличаются от давлений покоящейся засыпки. При второй форме движения сыпучий материал опускается «всем столбом», и давления на стены оболочки существенно возрастают.

Вторая форма движения и повышенные давления сыпучих материалов впервые наблюдались в конце прошлого столетия [2]. Позже были обнаружены пульсации давлений [3]. Несмотря, однако, на длительную историю исследований, причины возникновения разных форм течения сыпучего, а также их кинематика и динамика изучены мало [4].

Особенно актуальной является задача о расчете повышенных давлений сыпучих материалов при второй форме движения. Разнообразные методы такого расчета разработаны в [5—9]. Однако эти методы не учитывают эволюцию потока сыпучего. В частности, они не отражают пульсацию давлений, которая является одной из причин разрушения силосных сооружений [10]. Кроме того, согласно [5—9] максимальные динамические давления сыпучего действуют в нижней зоне оболочки, что не подтверждается опытами [11, 12] с достаточно высокими емкостями.

Модели массового потока сыпучей среды, свободные от указанных недостатков, предложены в [13—15]. Они базируются на уравнении одномерного течения сыпучего в эйлеровом [13] и лагранжевом [14, 15] представлениях. Модель [14, 15] отличается от [13] замыкающими физическими соотношениями.

В данной статье рассматривается развитие работ [14, 15]. Дополнительно учитывается установленная в опытах [16] зависимость коэффициента внешнего трения сыпучего от скорости  $v_n$  разгрузки емкости. На основе уточненной модели построено аналитическое решение задачи о давлениях потока сыпучей среды на стены оболочки. Прове-

ден анализ численных результатов. Изучено, в частности, влияние скорости  $v_0$  на динамику потока. Полученные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными.

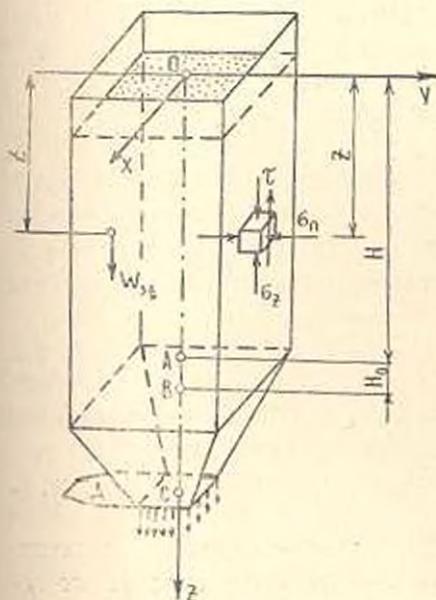
§ 1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассматривается вертикальная емкость, состоящая из жесткой призматической оболочки  $OB$  и пирамидальной воронки  $BC$  с центральным выпускным отверстием  $C$  и затвором  $D$  (фиг. 1). Емкость заполнена сыпучим материалом, с которым связана лагранжева система координат  $x, y, z$ .

При открывании затвора начинается истечение сыпучего из выпускной воронки и движение его в емкости. Задача состоит в том, чтобы определить поле нормальных давлений  $p_n$  движущейся сыпучей среды на стены призматической оболочки.

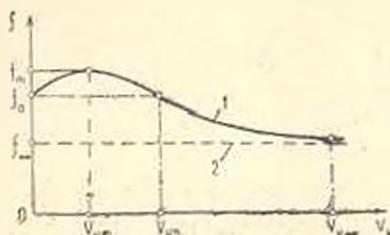
Следуя [14], будем полагать, что в оболочке возникает вторая форма течения, причем все частицы сыпучего смещаются вниз плоскими слоями («поршневой» поток). Такое движение определяется одномерным полем вертикальных перемещений  $w = w(z, t)$ , где  $t$  — время,  $z \in [0, H]$ ,  $H$  — высота пульсирующей части потока  $OA$  (фиг. 1). Внизу потока, на участке  $AB$  высотой  $H_0$  ( $H_0 \ll H$ ), движение происходит с постоянной скоростью  $v_0$  [14]. Таким образом, нижний слой основной зоны  $OA$  подчиняется кинематическому ограничению

$$w_z = v_n = \text{const}, \quad z = H \quad (1.1)$$

Здесь и далее индекс после запятой означает частную производную по соответствующей переменной; методика определения скорости  $v_n$  выпуска сыпучего освещена в [15].



Фиг. 1



Фиг. 2

Обратимся к напряжениям. Аналогично [14, 15] будем считать, что в «поршневом» потоке напряжения, как и перемещения  $w$ , зависят от лагранжевой координаты  $z$  и времени  $t$ . При этом движение произвольного слоя сыпучего удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\sigma_{z,z} + \tau r^{-1} + \rho w_{,tt} = \rho g \quad (1.2)$$

где  $\sigma_z$  — вертикальное нормальное напряжение,  $\tau$  — касательное напряжение на контакте сыпучего с емкостью (фиг. 1),  $r$  — гидравлический радиус оболочки,  $\rho$  — плотность засыпки (предполагается постоянной),  $g$  — ускорение силы тяжести.

Напряжение  $\tau$  связано с давлением  $\sigma_n$  законом сухого трения Кулона

$$\tau = f \sigma_n \quad (1.3)$$

Здесь  $f$  — коэффициент трения сыпучего о стены оболочки, зависящий от скорости потока. Согласно экспериментам [16] график  $f(v_n)$  имеет вид кривой 1 с горизонтальной асимптотой 2 (фиг. 2). Величина  $f_0$  — коэффициент внешнего трения сыпучего в покое, в момент предельного равновесия. Прочие обозначения ясны из фиг. 2. Отметим, что с незначительной погрешностью можно считать  $f = f_0$  при  $v_n = v_{n,к}$ , где, к примеру,  $v_{n,к} \approx 5$  мм/с для потока пшеницы в железобетонной или стальной оболочке [16].

Рассмотрим нормальные напряжения  $\sigma_z$  и  $\sigma_n$ . Как показано в [14], они состоят из двух слагаемых: начальных (статических) напряжений  $\sigma_{z,0}$ ,  $\sigma_{n,0}$  и динамических компонент  $\sigma_{z,1}$ ,  $\sigma_{n,1}$ . Напряжения  $\sigma_{z,0}$ ,  $\sigma_{n,0}$  возникают в сыпучем после заполнения емкости. Динамические компоненты  $\sigma_{z,1}$ ,  $\sigma_{n,1}$  обусловлены деформациями потока, которые порождаются его неоднородным движением. Таким образом,

$$\sigma_z = \sigma_z(z, t) = \sigma_{z,0}(z) + \sigma_{z,1}(z, t) \quad \sigma_n = \sigma_n(z, t) = \sigma_{n,0}(z) + \sigma_{n,1}(z, t) \quad (1.4)$$

Задача об определении начальных напряжений  $\sigma_{z,0}$ ,  $\sigma_{n,0}$  является неголономной [17], и ее решение связано со значительными трудностями. Однако их можно обойти: работами [13, 17] установлено, что вертикальные напряжения  $\sigma_{z,0}$  удовлетворительно аппроксимируются формулой Янсена

$$\sigma_{z,0} = \rho g r (\xi f_0)^{-1} [1 - \exp(-\xi f_0 r^{-1} z)] \quad (1.5)$$

где  $\xi$  — коэффициент бокового давления засыпки. Горизонтальные нормальные напряжения  $\sigma_{n,0}$  определяются соотношением [14]

$$\sigma_{n,0} = k \xi \sigma_{z,0} \quad (1.6)$$

Величина  $k \sim 1$  представляет собой некоторую функцию координаты  $z$ , зависящую также от вида сыпучего материала, способа его засыпки в емкость и ряда других факторов. В частном случае  $k = \text{const}$ .

Чтобы замкнуть зависимости (1.2) — (1.6), необходимо задать определяющие соотношения для динамических напряжений  $\sigma_{z,1}$ ,  $\sigma_{n,1}$ .

Как известно, решение этой задачи в случае неупругого деформирования представляет фундаментальную проблему механики гранулированных сред [22]. Однако, для «поршневого» потока сыпучего эта проблема упрощается. Связано это с тем, что в таком потоке, согласно многочисленным экспериментам [3, 7, 9, 11, 12, 20, 21 и др.], нормальные напряжения  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$  достаточно малы, а касательные (сдвиговые) напряжения практически отсутствуют. Поэтому напряженно-деформированное состояние сыпучего заполнителя в «поршневом» потоке далеко от предельного и может считаться упругим [23]. Следовательно, в рамках поставленной задачи можно полагать, что динамические компоненты  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$  подчиняются линейно-упругим физическим зависимостям [14]

$$\sigma_{n1} = -E\omega_{z1}, \quad \sigma_{n2} = -E\omega_{z2} \quad (1.7)$$

Здесь  $E$  — модуль деформации сыпучей среды.

Из соотношений (1.2) — (1.7) вытекает разрешающее уравнение задачи

$$\omega_{z1z} + b\omega_{z1} - \mu^2\omega_{z1} = -c\mu^2g[1 - \exp(-az)] \quad (1.8)$$

где

$$a = \frac{1}{2}f_0\rho^{-1}, \quad b = a(1 - \eta), \quad \eta = 1 - ff_0^{-1}, \quad \mu^2 = \rho E^{-1}, \quad c = 1 - k(1 - \eta) \quad (1.9)$$

Заметим, что кинематический коэффициент трения  $f$  является, вообще говоря, функцией локальной скорости  $\omega_z$  потока сыпучего. Поэтому согласно (1.9) величины  $\eta$ ,  $b$ ,  $c$  зависят от  $\omega_z$ . Следовательно, уравнение (1.8) является в общем случае нелинейным.

Вместе с тем, как установлено опытами [18], локальная скорость  $\omega_z$  мало отличается от средней скорости  $v_0$  «поршневого» потока. Это позволяет считать коэффициент трения  $f$  функцией  $v_0$  (см. фиг. 2). Тогда величины  $\eta$ ,  $b$ ,  $c$  становятся постоянными, а соотношение (1.8) представляет собой линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами. Именно такой случай рассматривается в данной статье.

Если далее упростить задачу и положить равными статический  $f_0$  и кинематический  $f$  коэффициенты трения, то согласно (1.9) получим  $\eta = 0$ ,  $b = a$ ,  $c = 1 - k$ . При этом (1.8) примет вид разрешающего уравнения работ [14, 15] (с корректировкой правой части за счет множителя  $1 - \exp(-az)$ ). Таким образом, соотношение (1.8) является обобщением модели [14, 15]. Это обобщение учитывает разницу между коэффициентами внешнего трения сыпучего в покое и в движении.

Решение уравнения (1.8) необходимо подчинить следующим крайевым и начальным условиям:

$$\omega_{z1} = 0, \quad z = 0; \quad \omega = \Phi(t) \equiv v_0 t [1 - \exp(-vt)], \quad z = H \quad (1.10)$$

$$\omega = \omega_{z1} = 0, \quad t = 0 \quad (1.11)$$

Первое краевое условие (1.10) вытекает из (1.7) и означает, что верх  $z = 0$  засыпки свободен от напряжений. Второе краевое условие (1.10) относится к нижнему слою  $z = H$  сыпучего и при  $v \rightarrow \infty$  пере-

ходит в (1.1). Параметр  $\nu$  отражает работу затвора [15]: чем резче открывается затвор, тем больше  $\nu$  и тем быстрее скорость  $\omega_1$  нижнего слоя  $z=H$  засыпки стремится к асимптотическому значению  $v_n = \text{const}$ , обусловленному соотношением (1.1).

Нулевые начальные условия (1.11) соответствуют опорожнению емкости от покоящейся в начальный момент  $t=0$  сыпучей среды. Заметим, что в случае перекачки сыпучего его скорость  $\omega_1 > 0$  при  $t=0$ .

§ 2. Решение задачи. Введем замену переменной

$$\omega(z, t) = u(z, t) \exp(-0,5bz) + \psi(t) \quad (2.1)$$

Тогда разрешающее уравнение (1.8), а также краевые и начальные условия (1.10) и (1.11) преобразуются соответственно к виду

$$Lu = \mu^2 u + F(z, t) \quad (2.2)$$

$$u_z - 0,5bu = 0, \quad z=0; \quad u=0, \quad z=H \quad (2.3)$$

$$u = u_t = 0, \quad t=0 \quad (2.4)$$

Здесь  $L$  — линейный дифференциальный оператор ( $L = \partial^2 / \partial z^2 - b^2/4$ ),  $F(z, t)$  — функция, определяемая выражением

$$F(z, t) = \mu^2 \{v_n \cdot (2 - \nu t) \exp(-\nu t) - cg[1 - \exp(-\alpha z)]\} \exp(0,5bz).$$

Поскольку величины

$$Z_n = \cos \gamma_n z + 0,5b \gamma_n^{-1} \sin \gamma_n z, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

являются собственными функциями оператора  $L$  [15], то искомое решение  $u(z, t)$  можно разложить по  $Z_n$  в регулярно сходящийся ряд Фурье [19]

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t) \quad (2.6)$$

Корни  $\gamma_n$ , входящие в (2.5), являются собственными значениями оператора  $L$  и определяются трансцендентным уравнением [15]

$$\text{tg} b \gamma_n = -\gamma_n^{-1} \theta_n, \quad \theta_n = H \gamma_n, \quad \gamma_0 = 0,5 b H, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

С учетом (2.5) и (2.7) представление (2.6) автоматически удовлетворяет граничным условиям (2.3). Подстановка (2.6) в (2.2) приводит к соотношению

$$\sum_{m=1}^{\infty} (i_m^2 T_m + \mu^2 T_{m,t}) Z_m + F(z, t) = 0 \quad (2.8)$$

где  $i_m = \psi_m / H$ ,  $\psi_m = (b^2 + 3)^{0,5}$

Легко показать, что система собственных функций  $\{Z_n\}$  ортогональна на отрезке  $[0, H]$ . Поэтому, умножая (2.8) на  $Z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и интегрируя по переменной  $z$  от 0 до  $H$ , получаем для функции  $T_n(t)$  дифференциальное уравнение

$$T_{n,t} + \omega_n^2 T_n = q_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$q_n(t) = g[A_n - B_n(2 - \nu t) \exp(-\nu t)]$$

$$A_n = 2c(\theta_n^{-1} \sin \theta_n \exp \tau_0 - (\theta_n^2 + \tau_0^2)^{-1} \{2\tau_0 \cos \theta_n [1 - \exp(-\tau_0)] + (\theta_n^2 - \tau_0^2) \theta_n^{-1} \sin \theta_n \exp(-\tau_0)\}) C_n^{-1}$$

$$B_n = 2\nu_n \nu \sin \theta_n \exp \tau_0 (C_n \theta_n)^{-1}$$

$$C_n = 1 + \tau_0^2 \theta_n^{-2} + 0,5(1 - \tau_0^2 \theta_n^{-2}) \theta_n^{-1} \sin 2\theta_n + \tau_0(1 - \cos 2\theta_n) \theta_n^{-2}$$

$$\tau_0 = \tau_0(1 - \eta)^{-1} = 0,5 f_0 H r^{-1}, \tau_1 = \tau_0(1 + \eta), \omega_n = \lambda_n n^{-1}, \nu = \nu_0 H, \nu_n = \nu_n(g_0 H)^{-1}$$

Очевидно, что при фиксированных коэффициентах  $\xi$  и  $f_0$  введенный выше параметр  $\tau_0$  нарастает с увеличением относительной высоты  $H/r$  оболочки. Поэтому оболочки с большим параметром  $\tau_0 \geq 3$  можно считать высокими, а с малым параметром  $\tau_0 \leq 1$  — низкими; при  $1 < \tau_0 < 3$  имеем оболочку средней высоты. Такая классификация оказывается естественной и удобной при анализе динамических давлений сыпучего (см. далее § 3).

Возвращаясь к  $T_n(t)$ , видим, что в силу (2.4) и (2.6) эти функции подчиняются нулевым начальным условиям

$$T_n = T_{n,t} = 0, \quad t = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

С учетом обозначений

$$t' = t(g_0 H)^{-1}, \quad z' = z H^{-1}, \quad \psi_n^2 = \theta_n^2 - (\nu')^2, \quad \tilde{\psi}_n^2 = \theta_n^2 + (\nu')^2, \quad T_n'(t') = T_n(t) [g_0 (rH)^2]^{-1}$$

решение задачи Коши (2.9), (2.10) представляется в безразмерном виде

$$T_n'(t') = a_{1n} \cos \psi_n t' + a_{2n} \sin \psi_n t' + a_{3n} + (a_{4n} + a_{5n} \nu' t') \exp(-\nu' t') \quad (2.11)$$

где

$$a_{1n} = -A_n \psi_n^{-1} + 2B_n \tau_0^2 \psi_n^{-4}, \quad a_{2n} = -4B_n \psi_n \nu' \psi_n^{-4}$$

$$a_{3n} = A_n \psi_n^{-2}, \quad a_{4n} = -2B_n \tau_0^2 \psi_n^{-4}, \quad a_{5n} = 2B_n \psi_n^{-2}$$

Соотношения (2.5), (2.6) и (2.11) полностью определяют вспомогательную функцию  $u(z, t)$ . Подстановка этой функции в (2.1), а затем перемещения  $w(z, t)$  в (1.7) приводит после некоторых преобразований к следующей формуле для динамической компоненты горизонтального давления сыпучего:

$$\sigma_{n1} = \rho g H z_{n1}' \quad (2.12)$$

Здесь  $z_{n1}'$  — безразмерное динамическое напряжение, определяемое бесконечным рядом

$$z_{n1}' = \xi \exp(-\tau_0 z') \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 \theta_n^{-1} T_n'(t') \sin \theta_n z' \quad (2.13)$$

Горизонтальное статическое давление согласно формулам (1.6) и (1.5) имеет вид

$$\sigma_{n0} = \rho g H z_{n0}' \quad (2.14)$$

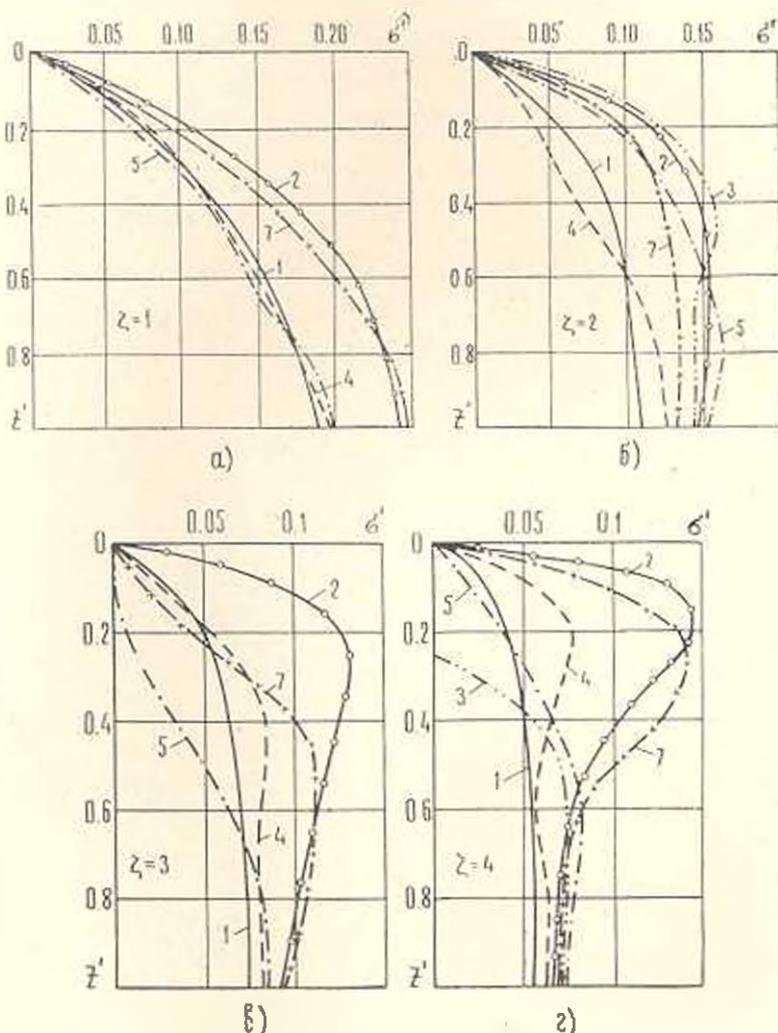
где

$$\sigma'_{z0} = 0,5kz^{-1} [1 - \exp(-2z'z')] \quad (2.15)$$

Соотношения (2.12) — (2.15) в совокупности с (1.4) дают полное решение поставленной задачи о давлениях массового потока сыпучей среды на стены призматической оболочки.

§ 3. Анализ численных результатов. На основании зависимостей (2.13) и (2.15) вычислены безразмерные давления сыпучего. Расчет выполнен на ЭВМ по специально составленной программе. Рассмотрены относительные глубины  $z' \in [0,1; 1]$  с шагом  $\Delta z' = 0,1$ , а также интервал времени  $t' \in [1, 200]$  с шагом  $\Delta t' = 0,5$ . По результатам расчета построены эпюры безразмерных давлений (фиг. 3—5).

На фиг. 3 и 4 эпюры 1 представляют статические давления  $\sigma'_{z0}$ , а эпюры 2—7 — динамические давления  $\sigma'_n = \sigma'_{z0} + \sigma'_{zn}$  в моменты времени соответственно  $t' = 1; 3,5; 9; 15; 40; 100$ . Параметры  $\gamma$  и  $\delta$  варьировались:  $\gamma = 0,2$  (фиг. 3),  $\gamma = -0,1$  (фиг. 4);  $\delta = 1, 2, 3, 4$  на фраг-

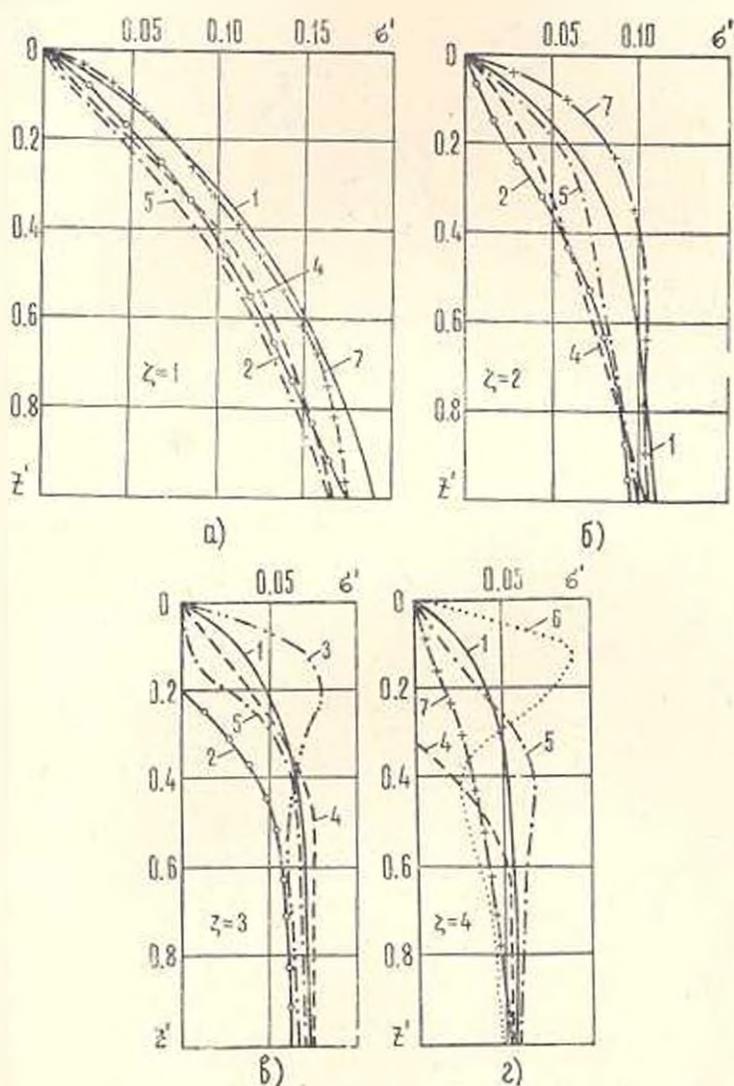


Фиг. 3

ментах а) — г) указанных фигур. Прочие определяющие параметры фиксировались:  $\xi=0,44$  (пшеница, ячмень);  $k=1$ ;  $v'=1$ ;  $v_{II}'=0,0005$ .

Из фиг 3 и 4 видно, что очертания элюр меняются со временем — происходят пульсации динамических давлений  $\Delta\sigma_n$  по всей высоте оболочки. Размахи пульсаций  $\Delta\sigma_n = \max \sigma_n - \min \sigma_n$  зависят от определяющих параметров  $\eta$  и  $\zeta$ , а также от глубины  $z'$  слоя сыпучего.

На фиг. 3 размахи  $\Delta\sigma_n$  в целом больше, чем на фиг. 4. Следовательно, при  $\eta=0,2 > 0$  пульсации протекают интенсивнее, чем при  $\eta=-0,1 < 0$ .



Фиг. 4

В случае низкой оболочки ( $\zeta=1$ , фиг. 3 и 4, а) пульсации примерно одинаковы во всей нижней половине потока и убывают в его верхней части. По мере увеличения параметра  $\zeta$  размахи  $\Delta\sigma_n$  на-

растают, а зона наибольших пульсаций смещается вверх. Это смещение тем больше, чем выше оболочка. Так, в оболочках средней высоты ( $\zeta = 2$ , фиг. 3 и 4, б) наибольшие пульсации развиваются несколько выше их середины, а в высоких оболочках ( $\zeta \geq 3$ , фиг. 3 и 4, в, г) — в пределах верхней трети потока. Наоборот, внизу высоких оболочек пульсации затухают.

Следует подчеркнуть, что отмеченные явления обнаружены ранее в экспериментах. Так, смещение зоны наибольших пульсаций наблюдается при сравнении опытов [20] и [21] с оболочками соответственно малой и средней высоты.

Обратимся к анализу динамического коэффициента  $\kappa = \frac{\max \sigma_n}{\sigma_{n0}}$ .

На фиг. 3 максимальные динамические давления  $\max \sigma_n$  заметно превышают статические давления  $\sigma_{n0}$  во всем потоке сыпучего и при всех параметрах  $\zeta$ . Таким образом, при  $\eta = 0.2$  динамический коэффициент  $\kappa$  существенно больше единицы. В то же время на фиг. 4 давления  $\max \sigma_n$  подчиняются иной закономерности. В отличие от фиг. 3 здесь  $\max \sigma_n \sim \sigma_{n0}$  (кроме верхней зоны высоких оболочек на фиг. 4, б, г). Следовательно, при  $\eta = -0.1$  в большей части потока сыпучей среды динамический коэффициент  $\kappa$  близок к единице.

Вообще, численный анализ показывает, что в случае  $k=1$  динамический коэффициент  $\kappa$  существенно зависит от параметра  $\eta$ : а)  $\kappa \sim 1$  при  $\eta < 0$ ; б)  $\kappa = 1$  при  $\eta = 0$  [15]; в)  $\kappa > 1$  при  $\eta > 0$  и нарастает по мере увеличения  $\eta$ .

Поскольку параметр  $\eta$  зависит от коэффициента трения  $f$ , а тот, в свою очередь, от скорости  $v_H$  выпуска сыпучего, то указанные результаты можно увязать с  $v_H$ .

С этой целью вернемся к третьей формуле (1.9), из которой следует, что параметр  $\eta \geq 0$  соответственно при  $f \leq f_0$ . С другой стороны, как видно из фиг. 2,  $f \leq f_0$ , если скорость  $v_H \leq v_{H0}$ . Значит,  $\eta = 0$ , если соответственно  $v_H \geq v_{H0}$ .

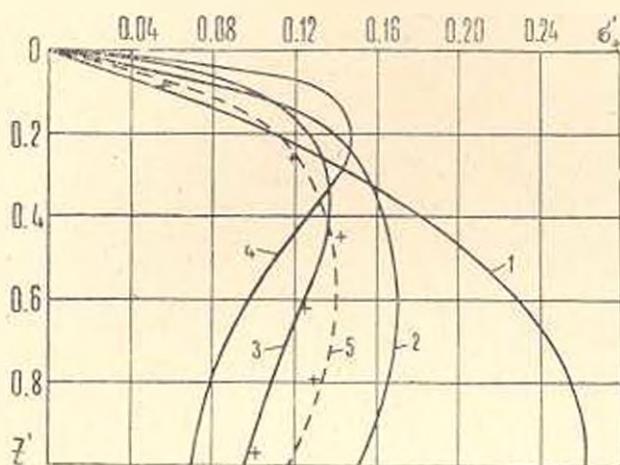
Для дальнейшего важно учесть, что параметр  $\eta$  не может неограниченно возрастать. В самом деле, из очевидного неравенства  $f > f_0$  (фиг. 2) и третьей формулы (1.9) вытекает, что  $\eta < \eta_{\infty}$ , где  $\eta_{\infty} = 1 - f_0/f_0$ . Параметр  $\eta_{\infty}$  соответствует асимптотическому коэффициенту трения  $f_0$  и практически достигается при скорости выпуска  $v_H = v_{H\infty}$ . Следовательно, при  $v_H > v_{H\infty}$  параметр  $\eta$  остается неизменным и равным  $\eta_{\infty}$ .

Таким образом, приведенный анализ показывает, что при  $k=1$  динамический коэффициент  $\kappa$  следующим образом зависит от скорости  $v_H$  выпуска сыпучего из оболочки:

- а)  $\kappa \sim 1$  при малых скоростях  $v_H < v_{H0}$ ;
- б)  $\kappa = 1$  при скорости  $v_H = v_{H0}$ ;
- в)  $\kappa > 1$  при больших скоростях  $v_H > v_{H0}$  и увеличивается по мере роста  $v_H$ , пока  $v_H < v_{H\infty}$ ;
- г) если скорость выпуска  $v_H$  достигла квазисимптотической границы  $v_{H\infty}$ , то при дальнейшем увеличении  $v_H$  динамический коэффициент  $\kappa$  не возрастает.

К аналогичным выводам пришел автор экспериментов [16]. Теоретически эти факты установлены, по-видимому, впервые.

Заметим, что при варьировании параметров  $\nu'$  на два, а  $v_H$  на один порядок эюры на фиг. 3 и 4 практически не меняются. Следовательно, скорость открывания затвора (параметр  $\nu'$ ) мало влияет на динамику «поршневого» потока. Что же касается скорости  $v_H$  выпуска сыпучего, то, как видим, ее непосредственное влияние оказывается также слабым [15]. Оно существенно проявляется лишь косвенным путем—за счет изменения кинематического коэффициента трения  $f$  и связанного с ним параметра  $\zeta$ .



Фиг. 5

Рассмотрим в заключение фиг. 5, где представлены огибающие эюры пиковых динамических давлений  $\sigma'$  сыпучего в интервале  $z' \in [1, 200]$  ( $z' = \max \sigma'$ ). Эюры 1—4 показывают давления  $\sigma'$  соответственно при  $\zeta = 1, 2, 3, 4$ ; прочие определяющие параметры приняты согласно фиг. 3. Эюра 5 представляет давления  $\sigma'$  при измененных параметрах  $\zeta = 2.2$  и  $\xi = 0.391$ , которые характерны для массового потока песка в оболочке средней высоты, исследованной в опытах [11]. Полученные в этих опытах пиковые давления отмечены на фиг. 5 крестиками. Видна согласованность с ними теоретической эюры 5 по всей высоте оболочки, кроме нижнего сечения вблизи выпускного отверстия, где нарушаются исходные предположения о «поршневом» истечении сыпучего.

Из фиг. 5 видно также, что конфигурация эюр пиковых давлений зависит от параметра  $\zeta$ . В низких оболочках пиковые давления монотонно нарастают с глубиной  $z'$  и достигают наибольших значений в нижней части потока сыпучей среды (эюра 1). По мере увеличения параметра  $\zeta$  монотонность нарушается—область наибольших пиковых давлений (ОНПД) смещается вверх. Так, в оболочках средней высоты ОНПД находится в средней зоне потока (эюры 2 и 5). В высоких

оболочках ОНПД располагается в верхней половине емкости (эпюры 3 и 4). При этом внизу оболочки пиковые давления заметно снижаются.

Эти теоретические результаты соответствуют не только отмеченным выше опытам [11] с песком. Они согласуются также и с другими экспериментами, в частности, с пшеницей в оболочках малой [20] и средней [21] высоты, с ячменем в высоких оболочках [12].

ՈՒՂՂԱԷԱՅԱՅ ՊՐԻՉՄԱՍԻ ՔԱՂԱՆԹԻ ՊԱՆԵՐԻ ՎՐԱ ԽՈՐՈՒՆ ԱՐՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀՈՍՔԻ ԳԻՆԱՄԵՐԻ ԶՆՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Վ. Տ. ԳՐԱՆԻԿ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Զարգացվում է հեղինակի կողմից ավելի շուտ առաջարկված ուղղահայաց պրիզմատիկ թաղանթում սորուն միջավայրերի զանգվածային հոսքի աեսությունը: Լրացուցիչ հաշվի է առնվում սորուն լցունի արտաքին շփման գործակցի կախվածությունը հոսքի միջին արագությունից: Զրգացված տեսության հիմի մասին խնդրի լուծումը:

Բերված է թվային արդյունքների վերլուծությունը: Ստացված արդյունքները համաձայնեցվում է հայտնի փորձերի հետ:

Սան վրա ստացված է տարողության պատերի վրա հոսքի դինամիկ ճնշումներ:

ON DYNAMIC WALL PRESSURES OF FLOW OF BULK SOLIDS ON VERTICAL PRISMATIC SHELL

V. T. GRANIK

S u m m a r y

The theory of mass flow of bulk material in a vertical prismatic shell, earlier proposed by the author is developed. In addition to this theory dependence of wall friction factor of bulk material on average flow velocity  $v$ , is taken into consideration. More exact analytical solution of the problem on dynamic flow wall pressures is received. The numerical results are discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бернштейн М. С. Расчет конструкций с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1947. 92 с.
2. Prante M. Messungen des Gerleidedruckes gegen Silowandungen.—Z. Ver. deutscher Ing., 1896, В. 40, № 39, S. 1122—1125.
3. Платонов П. Н., Ковтун А. А. Давление зерна на стенки силосов элеваторов.—Мук.элеватор, промышленность, 1959, № 12, с. 22—24.
4. Стажевский С. Б. О первой форме течения сыпучих материалов в бункерах.—Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых, 1983, № 3, с. 14—21.
5. Соловьев С. Ф. Давление на стенки силоса при истечении заполнителя.—Изв. вузов. Стронт. и архитектура, 1958, № 1, с. 98—107.

6. Сорокин П. Расчет динамического давления зерна при опорожнении силосов.— Мук.-элеватор. промышленность, 1966, № 6, с. 22—26.
7. Jentke A. W., Johnson J. R. Pits loads.—J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1968, v. 94, No ST4, p. 1011—1011.
8. Анатолев А. В., Чоботов В. П. Динамические давления при истечении сыпучего материала из глубоких сосудов.—Прикл. механика, 1973, т. 9, в. 12, с. 71—76.
9. Осипов М. М., Яковлев А. С., Давыдов В. П. О давлении сыпучих в процессе движения на стенки железобетонных силосов.—Строит. мех. и расчет сооруж., 1975, № 5, с. 13—16.
10. Таймер О. Ф. Аварии железобетонных силосов зерновых элеваторов.—Тр. америк. о. инж. мех., сер. Б. Констр. и технол. машиностр., 1969, т. 91, № 2, с. 181—198.
11. Шмид И. Давление сыпучего материала на стенку стальной трубы.—Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых, 1977, № 3, с. 117—122.
12. Pieper K., Mittelman G., Wenzel F. Messungen des horizontalen Getreidedruckes in einer 15 m hohen Silozelle.—Beton- und Stahlbetonbau, 1964, H. 11, S. 241—246.
13. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучей среды. М.: Госстройиздат, 1958. 122 с.
14. Граник В. Т. К теории динамического давления сыпучих материалов на стенки силосов.—Строит. мех. и расчет сооруж., 1981, № 5, с. 37—40.
15. Граник В. Т. О динамических явлениях потока сыпучей среды на стенки силоса.—Строит. мех. и расчет сооруж., 1983, № 4, с. 34—39.
16. Гарбуз В. И. Влияние скорости выпуска сыпучего материала на напряженное состояние стенок круглых силосов.—Строит. мех. и расчет сооруж., 1979, № 2, с. 12—16.
17. Бушманова О. П., Ресуженко А. Ф. Исследование задачи Янссена.—Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых, 1981, № 3, с. 3—15.
18. McCabe K. P. Flow patterns in granular materials in circular silos.—Gotechnique, 1974, v. 24, No. 1, p. 45—62.
19. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
20. Платонова П., Иванов Б., Закощечюк А. Экспериментальные исследования деформаций силоса.—Мук.-элеватор. промышленность, 1971, № 6, с. 36—38.
21. Kaminski M. Untersuchungen des Getreidedruckes in Silozellen.—Bautechnik, 1981, № 1, S. 19—22.
22. Николаевский В. Н. Механика твердых деформируемых тел. Т. 6. Механические свойства грунтов и теория пластичности.—В кн.: Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. М.: Наука, 1972. 80 с.
23. Граник В. Т. О векторной теории термоупругости зернистой среды.—В кн.: V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1981. 368 с.

Одесское высшее артиллерийское  
командное ордена Ленина училище  
им. М. В. Фрунзе

Поступила в редакцию  
13.X. 1983.

Ն Դ Կ 539.3

КУБИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ НЕОДНОРОДНО  
СТАРЕЮЩИХ КОМПОЗИТОВ ИЗОТРОПНЫХ ФАЗ

КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

1. Пусть композит состоит из изотропных фаз. Обобщение главной квазилинейной кубической теории вязкоупругости [1] на неоднородно стареющие [2] композиты будет иметь вид

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}(t) = \frac{1}{3K_*} \sigma_{\alpha\alpha}, \quad \varepsilon_{ij}(t) = \left[ \frac{1}{2\mu_*} + \Gamma_* s_{mn} \right] s_{ij} \quad (1.1)$$

где

$$\frac{1}{3K_*} \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha\alpha}(t)}{3K(t - \tau^*(x), x)} + \int_0^t I_0(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) \sigma_{\alpha\alpha}(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2\mu_*} s_{ij} = \frac{1}{2\mu(t - \tau^*(x), x)} s_{ij} + \int_0^t I(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s_{ij}(\tau) d\tau$$

$$\Gamma_* s_{mn} s_{mn} s_{ij} = A_* s_{ij}(t) + \int_0^t B_* s_{ij}(\tau) d\tau$$

Здесь обозначено

$$A_* = \Gamma_0(t - \tau^*(x), x) s(t, t) + \int_0^t [\Gamma_1(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s(t, \tau) + \Gamma_2(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s(\tau, \tau)] d\tau, \quad B_* = \Gamma_3(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s(t, t) + \Gamma_4(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s(t, \tau) + \Gamma_5(\tau - \tau^*(x), t - \tau, x) s(\tau, \tau) \quad (1.3)$$

$$s(t, \tau) = s_{mn}(t) s_{mn}(\tau)$$

В формулах (1.1)–(1.3)  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$  — первые инварианты тензоров деформаций и напряжений;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $s_{ij}$  — девиаторы деформаций и напряжений;  $K$  и  $\mu$  — объемный и сдвиговой модули;  $\Gamma_0, 2\mu_*$  — коэффициент кубической податливости;  $I$  — функция линейной сдвиговой ползучести;  $\Gamma$  ( $l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) — функции кубически нелинейной сдвиговой ползучести;  $I_0$  — функция объемной ползучести. Модули и функции ползучести зависят явно от  $x$  для неоднородных композиционных материалов, а сдвиг времени у аргументов  $t, \tau$ , равный  $\tau^*(x)$ , является моментом времени изготовления образца в окрестности точки  $x$  [2] и учитывает неоднородность старения, отмечаемую индексом\*. Для не-

пористых композиционных материалов (1.1), (1.2) объемные свойства — линейные.

Сохраняя равенства (1.1), (1.2), для девиаторов можно принять более простое соотношение [1] для главной теории неоднородно стареющих композитов, следующее из (1.1), (1.2) при

$$A_{ij} = \Gamma_0(t - \tau^*(x), x) s_{mn}(t) s_{mn}(t), \quad B_{ij} = \Gamma_2(\tau - \tau^*(x), t - x, x) s_{mn}(\tau) s_{mn}(\tau) \quad (1.4)$$

2. При решении краевых задач ползучести композитов, составленных из большого числа разных однородных тел, трудно учесть явную зависимость модулей и функций ползучести от координат  $x$ . Поэтому представляет интерес получение эффективных однородных свойств упругости и ползучести и затем учет неоднородности старения.

Рассмотрим сначала случай композита, хаотически составленного из своих компонент, но изготавливаемого наращиванием. Поэтому возраст материала существенно может зависеть от координат. В рассматриваемом случае композит может эффективно считаться изотропным, но неоднородно стареющим материалом. Ниже будем ограничиваться главными моделями вида (1.1), (1.2), (1.4). Введем  $\Delta V(x)$  — объем с центром инерции в точке  $x$ , внутри которого (при фиксированном  $x$ ) отдельно для объема  $\Delta V_i(x)$  каждого  $i$ -компонента материала старение может считаться однородным ( $\Delta V(x) = \sum_i \Delta V_i(x)$ ).

Будем считать, что структура композита практически периодична. Тогда относительное содержание  $v_i$   $i$ -го компонента в объеме  $\Delta V(x)$  не зависит от  $x$ :

$$\Delta V_i(x) / \Delta V(x) = v_i \quad (2.1)$$

Введем среднее  $\langle \rangle_\Delta$  по окрестности  $\Delta V(x)$  каждой точки  $x$ :

$$\langle a \rangle_\Delta = \frac{1}{\Delta V(x)} \int_{\Delta V(x)} a(x') dV(x') \quad (2.2)$$

Результат осреднения в (2.2) зависит от  $x$  более гладко, чем  $a(x')$  от  $x'$ . При дискретном осреднении имеем

$$\langle a \rangle_\Delta = \sum_i v_i a(t - \tau_i^*(x)) \quad (2.3)$$

Здесь  $\tau_i^*(x)$  — момент времени изготовления образца в окрестности точки  $x$  компонента с номером  $i$ .

Обобщение осреднения по Рейссу [3] на случай неоднородно стареющих материалов будет следовать из предположения для напряжений

$$\sigma_{ij}(t) = \langle \sigma_{ij} \rangle_\Delta \quad (2.4)$$

Осредняя соотношения (1.1) с учетом (1.2), (1.4) — (2.4), получим

$$\langle \epsilon_{33} \rangle_{\Delta} = \frac{1}{3\hat{K}_{*3}} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta}, \quad \langle e_{ij} \rangle_{\Delta} = \left[ \frac{1}{2\hat{\mu}_{*3}} + \hat{\Gamma}_{*3} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \right] \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} \quad (2.5)$$

причем эффективные операторы ползучести по Рейссу равны

$$\frac{1}{\hat{K}_{*3}} = \left\langle \frac{1}{\hat{K}_*} \right\rangle_{\Delta}, \quad \frac{1}{\hat{\mu}_{*3}} = \left\langle \frac{1}{\hat{\mu}_*} \right\rangle_{\Delta}, \quad \hat{\Gamma}_{*3} = \langle \hat{\Gamma}_* \rangle_{\Delta} \quad (2.6)$$

Эффективные операторы ползучести (2.6) определяются формулами ряда (1.2), (1.4), в которых модули и функции ползучести замещаются на эффективные модули и эффективные функции ползучести (2.3):

$$1/\hat{K}_{*3} = \sum_i v_i / K(t - \tau_i^*(x)), \quad 1/\hat{\mu}_{*3} = \sum_i v_i / \mu(t - \tau_i^*(x)) \quad (2.7)$$

$$\hat{\Gamma}_{03} = \sum_i v_i \Gamma_0(t - \tau_i^*(x)), \quad \hat{\Gamma}_{13} = \sum_i v_i \Gamma_1(\tau - \tau_i^*(x), t - \tau)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \sum_i v_i \Gamma_2(\tau - \tau_i^*(x), t - \tau), \quad \hat{\Gamma}_{33} = \sum_i v_i \Gamma_3(\tau - \tau_i^*(x), t - \tau)$$

Формулы (2.7) указывают на новый качественный эффект осредненного рассмотрения неоднородно стареющих композитов—модули, податливости и ядра ползучести зависят от моментов времени  $\tau_i^*(x)$  всех компонентов. В общем случае единое эффективное время  $\tau_i^*(x)$  подобрать не удастся. Единое эффективное время  $\tau_i^*(x)$  можно ввести для композита, если только один компонент обладает неоднородностью старения или если несколько компонентов обладают одинаковыми функциями  $\tau_i^*(x)$ . Тогда функции в (2.7), определяющие старение, зависят от  $t$  и  $t - \tau_i^*(x)$  или от  $\tau$  и  $\tau - \tau_i^*(x)$ . Если несколько компонентов обладают одинаковыми функциями  $\tau_i^*(x) = \tau_j^*(x)$ , а остальным компонентам не свойственно старение, только тогда функции в (2.7), определяющие старение, зависят от аргумента  $t - \tau_i^*(x)$  или  $\tau - \tau_i^*(x)$ . Решение (1.1) в операторной форме будет иметь вид

$$\epsilon_{33}(t) = 3\hat{K}_{*3} e_{33}, \quad s_{ij}(t) = 2(\hat{\nu}_* + \hat{M}_{*3} e_{mn} e_{mn}) e_{ij} \quad (2.8)$$

где с точностью до третьих степеней деформаций

$$\hat{M}_{*3} e_{mn} e_{mn} e_{ij} = -8\hat{\nu}_* (\hat{\Gamma}_{*3} \hat{\nu}_* e_{mn} \cdot \hat{\nu}_* e_{mn} \cdot \hat{\nu}_* e_{ij}) \quad (2.9)$$

Обобщение осреднения по Фойгту [3] на случай неоднородно стареющих композитов следует из осреднения по окрестности (2.2) напряжений, входящих в (2.8), (2.9), и использования предположения  $\epsilon_{ij} = \langle \epsilon_{ij} \rangle_{\Delta}$ . Разрешая полученные осредненные уравнения относительно  $\langle e_{ij} \rangle_{\Delta}$  через  $\langle \sigma_{ij} \rangle_{\Delta}$ , получим (2.5), причем эффективные операторы ползучести по Фойгту равны

$$\begin{aligned} 1/\hat{K}_{*3} &= 1/\langle \hat{K}_* \rangle_{\Delta}, \quad 1/\hat{\mu}_{*3} = 1/\langle \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta}, \quad \hat{\Gamma}_{*3} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} = \\ &= \frac{1}{\langle \hat{\nu}_* \rangle_{\Delta}} \cdot \left\langle \hat{\nu}_* \hat{\Gamma}_* \hat{\nu}_* \frac{1}{\langle \hat{\nu}_* \rangle_{\Delta}} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \cdot \hat{\nu}_* \frac{1}{\langle \hat{\nu}_* \rangle_{\Delta}} \langle S_{mn} \rangle_{\Delta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \hat{\nu}_* \frac{1}{\langle \hat{\nu}_* \rangle_{\Delta}} \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} \right\rangle_{\Delta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Формулы (2.10) показывают, что в нелинейном случае эффективные операторы ползучести, полученные осреднением по Фойгту уже имеют сложные выражения.

3. Рассмотрим слоистый композит. Пусть ось 3 направлена перпендикулярно слоям. Следуя [4], для слоистого материала будем считать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \langle \sigma_{31} \rangle_{\Delta}, & \sigma_{13} &= \langle \sigma_{13} \rangle_{\Delta}, & \sigma_{23} &= \langle \sigma_{23} \rangle_{\Delta}, & \varepsilon_{11} &= \langle \varepsilon_{11} \rangle_{\Delta} \\ \sigma_{22} &= \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta}, & \varepsilon_{12} &= \langle \varepsilon_{12} \rangle_{\Delta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения (3.1) отличаются от соотношений в [4] видом осреднения из-за неоднородного старения материалов. Пусть слои изготовлены из материалов, каждый из которых изотропный, кубически нелинейный, вязкоупругий и определяется соотношением (1.1). С учетом (3.1) уравнения (1.1) переищутся так:

$$\langle \hat{\varepsilon}_{11} \rangle_{\Delta} = \hat{s}_1 \sigma_{11} + \hat{s}_2 \sigma_{22} + \hat{s}_3 \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta}, \quad \langle \hat{\varepsilon}_{22} \rangle_{\Delta} = \hat{s}_2 \sigma_{11} + \hat{s}_1 \sigma_{22} + \hat{s}_3 \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{33} = \hat{s}_3 \sigma_{11} + \hat{s}_3 \sigma_{22} + \hat{s}_1 \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \hat{s}_2 \langle \sigma_{23} \rangle_{\Delta}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \hat{s}_2 \langle \sigma_{13} \rangle_{\Delta}$$

$$\langle \varepsilon_{12} \rangle_{\Delta} = \frac{1}{2} \hat{s}_2 \sigma_{12}, \quad \hat{s}_{12} = -\hat{s}_{11} \left( \langle \hat{c}_3 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_3 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_3 \right\rangle_{\Delta} \right)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= \frac{1}{9K_*} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2\mu_*} + \hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \right), & \hat{s}_2 &= \frac{1}{\mu_*} + 2\hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \\ \hat{s}_3 &= \frac{1}{9K_*} - \frac{1}{6\mu_*} - \frac{1}{3} \hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Проделаем следующие выкладки. Осредним четвертое и пятое равенства (3.2). Разрешим шестое равенство (3.2) относительно  $\sigma_{12}$  и осредним результат, разрешим новый результат относительно  $\langle \varepsilon_{12} \rangle_{\Delta}$ . Разрешим первые два уравнения (3.2) относительно  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , осредним результат. Из полученных двух уравнений найдем  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_{\Delta}$  и  $\langle \varepsilon_{22} \rangle_{\Delta}$ . Найденные на предыдущем этапе выражения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  подставим в третье уравнение (3.2), осредним результат. В новый результат подставим найденные ранее выражения  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_{\Delta}$  и  $\langle \varepsilon_{22} \rangle_{\Delta}$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle_{\Delta} &= \hat{s}_{11} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{12} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{13} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle_{\Delta} &= \hat{s}_{12} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{11} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{13} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle_{\Delta} &= \hat{s}_{13} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{13} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} + \hat{s}_{33} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} \\ \langle \varepsilon_{23} \rangle_{\Delta} &= \frac{1}{2} \hat{s}_{24} \langle \sigma_{23} \rangle_{\Delta}, \quad \langle \varepsilon_{13} \rangle_{\Delta} = \frac{1}{2} \hat{s}_{24} \langle \sigma_{13} \rangle_{\Delta} \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle_{\Delta} &= \frac{1}{2} \hat{s}_{24} \langle \sigma_{12} \rangle_{\Delta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем при дополнительном пренебрежении нелинейностью эффекта Пуассона в выражениях, отмечаемых штрихом, для операторов ползучести получим приближенные формулы

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= 1 / \left( \left( \langle \hat{c}_1 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_2 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_3 \right\rangle_{\Delta} \right) - \left( \langle \hat{c}_2 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_3 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_2 \right\rangle_{\Delta} \right) \right) \times \\ &\times \frac{1}{\langle \hat{c}_1 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_2 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_3 \right\rangle_{\Delta}} \left( \langle \hat{c}_3 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_3 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_2 \right\rangle_{\Delta} \right) \quad (3.5) \\ \hat{s}_{12} &= -\hat{s}_{11} \left( \langle \hat{c}_2 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_3 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_2 \right\rangle_{\Delta} \right) \frac{1}{\langle \hat{c}_1 \rangle_{\Delta} - \left\langle \hat{c}_2 \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{c}_3 \right\rangle_{\Delta}} \\ \hat{s}_{13} &= -(\hat{s}_{12} + \hat{s}_{11}) \left\langle \hat{c}_2 \cdot \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta}, \quad \hat{s}_{44} = 1 / \left\langle \frac{1}{\hat{s}_2} \right\rangle_{\Delta} \\ \hat{s}_{33} &= \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta} - 2 \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \cdot \hat{c}_3 \right\rangle_{\Delta} \cdot \hat{s}_{12}, \quad \hat{s}_{44} = \langle \hat{s}_2 \rangle_{\Delta} \end{aligned}$$

В формулах (3.5) обозначено

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \hat{K}_* + \frac{4}{3} (\hat{\mu}_* + \hat{M}_* e_{mn} e_{mn}), \quad \hat{c}_2 = \hat{K}_* - \frac{2}{3} (\hat{\mu}_* + \hat{M}_* e_{mn} e_{mn}) \quad (3.6) \\ \hat{c}_3 &= \hat{K}_* + \frac{4}{3} \hat{\mu}_*, \quad \hat{c}_2 = \hat{K}_* - \frac{2}{3} \hat{\mu}_* \end{aligned}$$

Если в формулах (3.5) опустить штрихи, то получатся точные выражения для операторов ползучести слоистого композита. При нахождении зависимости операторов ползучести от средних напряжений точным выражением пользоваться сложно. Приведем эти зависимости, основанные на приближении (3.5), в частном случае, когда коэффициент Пуассона  $\nu$  компонентов композита в линейной области приближенно не зависит от координат и времени. Тогда формулы (3.5) перелишутся так:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= \frac{1}{\langle \hat{E}_* \rangle_{\Delta}} \left( 1 + \frac{4}{3} \langle \hat{\mu}_* \hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta} \frac{1}{\langle \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta}} \right), \quad \hat{s}_{12} = -\nu_{12} \hat{s}_{11} \\ \hat{s}_{13} &= -\nu_{13} \hat{s}_{11}, \quad \nu_{12} = \nu, \quad \nu_{13} = \nu, \quad \hat{E}_* = 2(1 + \nu) \hat{\mu}_*, \\ \hat{s}_{33} &= \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta} + N \hat{s}_{11}, \quad N = 2 \frac{\nu^2}{1 - \nu} \quad (3.7) \\ \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta} &= \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta} + \frac{8}{3} \left\langle \frac{1}{\hat{c}_1} \hat{\mu}_* \hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \hat{\mu}_* \frac{1}{\hat{c}_1} \right\rangle_{\Delta} \\ \hat{s}_{44} &= \left\langle \frac{1}{\hat{\mu}_*} \right\rangle_{\Delta} + 2 \langle \hat{\Gamma}_* s_{mn} s_{mn} \rangle_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\hat{S}_{66} = \frac{1}{\langle \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta}} \left( 1 + 2 \langle \hat{\mu}_* \hat{\Gamma}_* S_{mn} S_{mn} \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta} \frac{1}{\langle \hat{\mu}_* \rangle_{\Delta}} \right)$$

Если  $\nu$  не постоянная по коэффициентам величина, приближенно можно пользоваться формулами (3.7), но для других значений  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $N$ , получаемых из (3.5), если пренебречь в выражениях для  $S_{12}$ ,  $\hat{S}_{11}$ ,  $\hat{S}_{22}$  операторами вязкости у величин со штрихами. Тогда

$$\nu_{12} \cong \left[ \left\langle \frac{2\mu_* \nu}{1-2\nu} \right\rangle_{\Delta} - \left\langle \frac{2\mu_* \nu}{1-2\nu} \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle_{\Delta} \right] / \left[ \left\langle \frac{2\mu_* (1-\nu)}{1-2\nu} \right\rangle_{\Delta} - \left\langle \frac{2\mu_* \nu}{1-2\nu} \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle_{\Delta} \right]$$

$$\nu_{13} \cong \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle_{\Delta} (1 - \nu_{12}), \quad N \cong 2 \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle_{\Delta} \nu_{13} \quad (3.8)$$

Для слоистых материалов напряжения в компонентах связаны со средними по композиту напряжениями первыми тремя равенствами (3.1) и соотношениями [4, 5]

$$\sigma_{11} = \hat{a} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta}, \quad \sigma_{22} = \hat{a} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta}, \quad \sigma_{12} = \hat{b} \langle \sigma_{12} \rangle_{\Delta}$$

$$\hat{a} = E_* / \langle E_* \rangle_{\Delta}, \quad \hat{b} = \nu_* / \langle \nu_* \rangle_{\Delta} \quad (3.9)$$

В первом приближении коэффициенты концентрации напряжений в компонентах  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  могут определяться только модулями упругости  $E_*$  и  $\nu_*$ . С учетом (3.1) и (3.9) получаются зависимости (3.7) от средних по композиту напряжений при помощи следующего правила, в котором произвольные операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  надо заменить на соответствующие операторы, входящие в (3.7)

$$\langle \hat{A} \hat{\Gamma}_* S_{mn} S_{mn} \hat{B} \rangle_{\Delta} = \frac{2}{3} \langle \hat{A} \hat{\Gamma}_* \hat{a}^2 [ \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta}^2 + \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta}^2 - \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} ] \hat{B} \rangle_{\Delta}$$

$$- \frac{1}{3} \langle \hat{A} \hat{\Gamma}_* [ \hat{a} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} + \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} \hat{a} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Delta} + \hat{a} \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} +$$

$$+ \langle \sigma_{22} \rangle_{\Delta} \hat{a} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta} ] \hat{B} \rangle_{\Delta} + 2 \langle \hat{A} \hat{\Gamma}_* \hat{b}^2 \langle \sigma_{12} \rangle_{\Delta}^2 \hat{B} \rangle_{\Delta} +$$

$$+ 2 \langle \hat{A} \hat{\Gamma}_* \left[ \frac{1}{3} \langle \sigma_{33} \rangle_{\Delta}^2 + \langle \sigma_{23} \rangle_{\Delta}^2 + \langle \sigma_{13} \rangle_{\Delta}^2 \right] \hat{B} \rangle_{\Delta}$$

ԻՉՈՏՐՈՎԱՅԻՆ ՓՈՒԼԵՐԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂԲԸ

Վ. Վ. ԿՈՂԿՈՂԵԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկված է անհամասեռ ծերացող կոմպոզիտ միջավայրերի նկատմամբ կիրառված խորանարդային կվադրիդային մածուցիկաառուձգականության տեսության տարրերակի ընդհանրացումը: Ստացված է այդպիսի նյութերի էֆեկտիվ բնութագրիչները: Մասնրամասը գիտարկված է շերտավոր կոմպոզիտի դեպքը:

# CUBICAL NONLINEAR CREEP OF NONHOMOGENEOUS AGING COMPOSITS OF ISOTROPIC PHASES

V. V. KOLOKOLCHIKOV

## Summary

The general variant of quasilinear cubic theory of viscoelasticity used in nonhomogeneous aging composit media is considered. The effective characteristics of such materials have been obtained. The case of layer composit has been considered in detail.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шлюшин А. А., Огибалов П. М. Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра.—Мех. полимеров, 1966, № 2, с. 170—189.
2. Арутюнян П. Х. Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно-старееющих тел.—Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
4. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств полукристаллов.—ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11, с. 967.
5. Колокольчиков В. В., Комирова Н. С. Критерий разрушения от накопления поврежденной трехкомпонентного слоистого композита.—Мех. композитных материалов, 1983, № 1, с. 33—41.

Куйбышевский госуниверситет

Поступила в редакцию  
5.XII. 1983.