

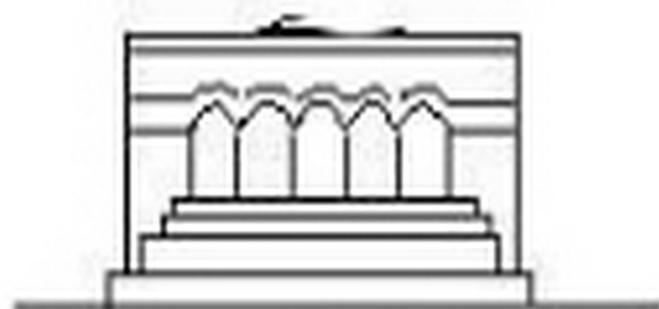
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1985

УДК 539.3

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ  
 ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО ТЕЛА

ГАСПАРЯН Г. О., ЛОМАКИН Е. В., МАЗНИК Р. И.

В [1] предложена модель изотропного разномодульного тела, упругие характеристики которого непрерывно зависят от вида напряженного или деформированного состояния. В основу построения модели положено предположение о существовании потенциала деформаций или напряжений, зависящего соответственно от параметра вида напряженного состояния (равного отношению среднего напряжения к интенсивности напряжений) или деформированного состояния (равного отношению объемной деформации к интенсивности деформаций) и включающего в себя как частный случай потенциал для классического упругого тела. Данная модель в отличие от модели [7, 8] учитывает зависимость диаграмм деформирования материала от вида напряженного состояния и позволяет описать дилатационные явления.

На простых примерах [2—4] показано, что учет таких свойств материала может в определенных случаях привести к существенному перераспределению напряжений в теле. Решение более сложных задач в связи с нелинейностью определяющих соотношений наталкивается на значительные математические трудности и возможно только приближенными численными методами.

В данной работе детализируются некоторые свойства модели изотропного разномодульного тела [1] и исследуется сходимость метода последовательных приближений.

1. Рассмотрим потенциал напряжений для изотропного разномодульного тела [2], который с помощью элементарных преобразований можно привести к виду

$$U = \frac{K}{2} \left[ \varepsilon^2 - 2\varphi(\gamma) \varepsilon \varepsilon_0 + \beta \varepsilon_0^2 \right] \quad (1.1)$$

где  $\gamma = \varepsilon/\varepsilon_0$  — параметр вида деформированного состояния,  $\varepsilon = \varepsilon_{ij}^2$  — объемная деформация,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_0 \varepsilon_0}$  — интенсивность деформаций,

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$  — девиатор деформаций,  $\beta = 3G/K$ ,  $K$  и  $G$  — константы,

$\varphi(\gamma)$  — безразмерная функция вида деформированного состояния, определяемая из экспериментов. При  $\varphi(\gamma) = 0$  потенциал (1.1) совпадает с потенциалом для классического упругого тела.

Преимущество записи потенциала (1.1) по сравнению с предложенным в [2] состоит в том, что член, учитывающий разномодульность материала, входит аддитивно, а это облегчает анализ сходимости приближенных методов решения краевых задач.

Зависимость напряжений от деформаций можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = K \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \psi(\gamma) \right] \varepsilon_{ij} + \frac{2}{3} K [\psi - 2\psi(\gamma) + \gamma\psi'(\gamma)] e_{ij} \quad (1.2)$$

где  $\psi(\gamma) = \gamma\varphi(\gamma)$ , штрихом обозначено дифференцирование по аргументу функции. При пропорциональном нагружении  $\gamma = \text{const}$  и зависимость напряжений от деформаций становится линейной.

Из (1.2) найдем

$$\sigma = K \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \psi(\gamma) \right] \varepsilon, \quad \sigma_0 = K [\psi - 2\psi(\gamma) + \gamma\psi'(\gamma)] \varepsilon_0 \quad (1.3)$$

где  $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  — среднее напряжение,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$  — интенсивность напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  — девиатор напряжений.

Заметим, что введенный параметр вида деформированного состояния  $\gamma$  принимает значения на всей числовой оси. При этом выражения (1.2) и (1.3) в общем случае могут содержать особенности при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \infty$ . Для их раскрытия потребуем, чтобы конечным деформациям соответствовали конечные напряжения или, иными словами, исключим из рассмотрения класс отвердевающих материалов, которые, вообще говоря, могут быть описаны предложенным потенциалом напряжений (1.1).

Следует отметить, что конечность соотношений (1.3) не нарушится, если к функции вида деформированного состояния добавить произвольную константу или член вида  $a\gamma^2$ , где  $a$  — некоторая постоянная. Введение таких добавочных членов приведет лишь к изменению входящих в потенциал (1.1) коэффициентов при  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon_0^2$ , оставляя без изменения вид потенциала и член, учитывающий разномодульность материала.

Исследуем поведение  $\sigma$  и  $\sigma_0$  при деформированном состоянии чистого сдвига, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\gamma \rightarrow 0$ . Конечность  $\sigma$  и  $\sigma_0$  будет обеспечена, если

$$\psi'(\gamma) \rightarrow C_1, \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Здесь и далее  $C_1$  — некоторые константы, соответствующие предельным значениям указанных функций.

С учетом (1.4) и сделанного выше замечания можно без ограничения общности положить  $\psi(0) = 0$ , и тогда из (1.3) найдем

$$\sigma = -K C_1 \varepsilon, \quad \sigma_0 = K \theta \varepsilon_0 \quad (1.5)$$

то есть в общем случае создание чисто сдвиговых деформаций в теле невозможно без наложения всестороннего растяжения (сжатия), величина которого определяется интенсивностью сдвиговых деформаций.

Отметим, что условие (1.4) заведомо будет выполняться для всякой функции  $\psi(\gamma)$ , аналитической в нуле.

Рассмотрим случай чисто объемной деформации, когда  $\epsilon_0 \rightarrow 0$  и значит  $\gamma \rightarrow \infty$ . Конечность  $\sigma$  и  $\sigma_0$  будет обеспечена, если

$$\frac{\psi(\gamma)}{\gamma} \rightarrow C_1 \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует

$$\psi'(\gamma) \rightarrow C_2 \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

При этом из (1.3) легко получить

$$\sigma = K\epsilon, \quad \sigma_0 = -KC_1\epsilon \quad (1.8)$$

то есть в общем случае для создания чисто объемной деформации на тело должно быть наложено не только гидростатическое давление, но и сдвиговые напряжения, интенсивность которых определяется величиной объемной деформации.

Условия (1.6), (1.7) требуют, чтобы на бесконечности функция шара деформированного состояния  $\psi(\gamma)$  была близка к линейной.

Равенства (1.5) и (1.8) показывают, что модель разномодульного тела, свойства которого определяются заданием упругого потенциала в виде (1.1), позволяет описать дилатационные явления.

Простейшей функцией, удовлетворяющей условиям (1.4) и (1.6), будет линейная функция, которая с учетом сделанного ранее замечания может быть записана в виде

$$\psi(\gamma) = C_2\gamma \quad (1.9)$$

При этом соотношения (1.5) и (1.8) сохраняют свой вид с заменой констант  $C_1$  и  $C_2$  на  $C_0$ .

2. Одним из возможных методов решения краевых задач для физически нелинейных сред является метод последовательных приближений, вариант которого — метод упругих решений — впервые был предложен для деформационной теории пластичности А. А. Ильюшиным [5] и получил строгое обоснование в [6] и дальнейшее развитие в работах [7, 8]. Некоторые общие вопросы сходимости методов последовательных приближений для сред с нелинейными определяющими соотношениями рассмотрены в [9].

Сходимость метода последовательных приближений для модели [7], приводящей к нелинейной теории и являющейся формальным обобщением деформационной теории пластичности при активном нагружении, исследовалась в [8]. В основе модели лежит предположение о том, что интенсивность напряжений и среднее напряжение являются функциями двух аргументов: интенсивности деформаций и объемной деформации. Введение потенциала в виде (1.1) позволяет отказаться от ограничений  $\sigma(0, \epsilon_0) = 0$ ,  $\sigma_0(\epsilon, 0) = 0$ , сделанных в [7], то есть описать материалы с более широкими свойствами и несколько упростить получающиеся при анализе сходимости оценки.

Заметим, что применение метода последовательных приближений требует выполнения теоремы о единственности решения. что в данном случае эквивалентно требованию выпуклости потенциала (1.1). Выпуклость потенциала, записанного в несколько иной форме [2], исследовалась в работе [10]. Выпуклость будет гарантирована, если в каждой точке будет выполнено

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0$$

Из (1.1) после несложных выкладок, используя неравенство  $(\delta \varepsilon_0)^2 \leq \frac{2}{3} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl}$ , получим квадратичную форму переменных  $\delta \varepsilon$ ,  $\delta \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} &\geq (1 - \psi'') (\delta \varepsilon)^2 - 2(\psi' - \gamma \psi'') \delta \varepsilon \delta \varepsilon_0 + \\ &+ [\beta - (2\psi - 2\gamma \psi' + \gamma^2 \psi'')] (\delta \varepsilon_0)^2 \end{aligned}$$

Приведем ее к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} &> (1 - \psi'') \left\{ \left( \delta \varepsilon - \frac{\psi' - \gamma \psi''}{1 - \psi''} \delta \varepsilon_0 \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\beta - [2\psi - 2\gamma \psi' + (\beta + \gamma^2) \psi''] + (2\psi \psi'' - \psi'^2)}{(1 - \psi'')^2} (\delta \varepsilon_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Квадратичная форма в правой части неравенства (2.1) положительна определена, если

$$1 - \psi'' > 0, \quad \beta - [2\psi - 2\gamma \psi' + (\beta + \gamma^2) \psi''] + (2\psi \psi'' - \psi'^2) > 0 \quad (2.2)$$

Упростим второе неравенство (2.2). Раскрыв скобки и перегруппировав члены, получим

$$(\beta - 2\psi + \gamma^2)(1 - \psi'') > (\psi' - \gamma)^2$$

откуда с учетом первого неравенства (2.2) следует

$$\beta - 2\psi + \gamma^2 > 0, \quad 1 - \frac{(\psi' - \gamma)^2}{\beta - 2\psi + \gamma^2} > \psi'' \quad (2.3)$$

Первое условие (2.3) означает, что функция  $\psi(\cdot)$  ограничена сверху параболой.

Таким образом, при выполнении условий (2.2) или, что равносильно, (2.3) будет гарантирована единственность решения краевой задачи.

В случае представления (1.9) эти требования сведутся к очевидному условию

$$\beta - C_2 > 0 \quad (2.4)$$

3. Исследуем сходимость метода последовательных приближений для краевых задач, основанных на использовании законов (1.2) и укажем условия, позволяющие находить обобщенные решения этих задач.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\tau_{ij,i} + F_i = 0 \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

$$u_i = 0 \quad x \in \Sigma_1, \quad \tau_{ij} n_j = T_i \quad x \in \Sigma_2 \quad (3.2)$$

Здесь  $\Omega$  — объем, занятый телом и ограниченный поверхностью  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . Напряжения и деформации связаны соотношением (1.2). Входящая в (1.2) функция  $\psi(\gamma)$  удовлетворяет условиям (1.4), (1.6) и (2.2) или (2.3).

Подставляя (1.2) в уравнения равновесия (3.1) и граничные условия (3.2), получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно перемещений  $u_i$  при соответствующих граничных условиях, решение которой будем искать методом последовательных приближений, определив рекуррентные соотношения следующим образом:

$$\left( K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon_{ij}^{(n+1)} + 2G \varepsilon_{ij}^{(n)} = -F_i + K(\psi^{(n)} \varepsilon_0^{(n)})_{,i} + \frac{2}{3} K [(2\psi^{(n)} - \psi^{(n)} \psi^{(n)}) \varepsilon_{ij}^{(n)}]_{,i} \quad (3.3)$$

$$u_i^{(n+1)} = 0 \quad x \in \Sigma_1, \quad \left( K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon_{ij}^{(n+1)} n_j + 2G \varepsilon_{ij}^{(n)} n_j = T_i + K(\psi^{(n)} \varepsilon_0^{(n)} n_i) + \frac{2}{3} K [(2\psi^{(n)} - \psi^{(n)} \psi^{(n)}) \varepsilon_{ij}^{(n)}] n_j \quad x \in \Sigma_2 \quad (3.4)$$

Решение поставленной задачи получается как предел последовательности  $u_i^{(n)}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Общая схема доказательства сходимости метода последовательных приближений аналогична используемой в работах [6, 8]. Рассмотрим линейное множество  $M$  вектор-функций  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , дважды непрерывно дифференцируемых в области  $\Omega$  и удовлетворяющих первому условию (3.2). Следует отметить, что если граничные условия заданы в напряжениях, то рассматриваемые вектор-функции  $u$  должны удовлетворять условиям отсутствия перемещений тела как жесткого целого. Очевидно, что классическое решение  $u$  краевой задачи (3.1), (3.2) принадлежит этому множеству.

Рассмотрим произвольные элементы  $u(u_1, u_2, u_3) \in M$ ,  $v(v_1, v_2, v_3) \in M$  и определим скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v)_\varepsilon = \int_\Omega [K \varepsilon(u) \varepsilon(v) + 2G e_{ij}(u) e_{ij}(v)] d\Omega \quad (3.5)$$

Пополняя множество  $M$  предельными элементами так, чтобы существовало скалярное произведение (3.5), получим полное гильбертово пространство  $H$  функций с суммируемыми квадратами производных. Нормы элемента  $u$  в  $H$  определяется по формуле

$$\|u\|_\varepsilon = \sqrt{\int_\Omega (K \varepsilon^2 + 3G \varepsilon^2) d\Omega} \quad (3.6)$$

Обобщенным решением краевой задачи назовем вектор-функцию  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3) \in H$ , удовлетворяющую равенству

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega - \int_{\Sigma_2} T_i v_i d\Sigma = 0 \quad (3.7)$$

для произвольной вектор-функции  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3) \in H$ . Заметим, что если некоторая функция является обобщенным решением поставленной задачи, то при этом выполняются все условия равновесия тела, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа, и обобщенное решение будет классическим, если оно дважды непрерывно дифференцируемо в  $\Omega$ . Первый интеграл в (3.7) существует в силу свойств пространства  $H$ , а для существования второго и третьего интегралов, как показано в [6], следует потребовать, чтобы

$$F_i \in L_p(\Omega) \quad p > \frac{6}{5}, \quad T_i \in L_q(\Sigma_2) \quad q > \frac{4}{3}$$

где  $L_r(G)$  — нормированное пространство функций, суммируемых в степени  $r$  по области  $G$ .

Рассматривая (3.3) как вектор-уравнение, умножим его на вектор-функцию  $\mathbf{v} \in H$  и проинтегрируем по области  $\Omega$  с учетом граничных условий (3.4). В результате получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})_{\Omega} = A(\mathbf{v}) - K \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon_0^{(n)}(\mathbf{u}) \psi'^{(n)}(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{v}) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} [2\psi^{(n)}(\mathbf{u}) - \gamma^{(n)}(\mathbf{u}) \psi'^{(n)}(\mathbf{u})] e_{ii}^{(n)}(\mathbf{u}) e_{ii}(\mathbf{v}) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $A(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Sigma_2} T_i v_i d\Sigma$

Записав аналогичное уравнение для  $n$ -го приближения через  $(n-1)$ -е, вычитая его из (3.8) и полагая  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}$ , найдем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_{\Omega}^2 = K \int_{\Omega} \left\{ (\varepsilon_0^{(n)} \psi'^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)} \psi'^{(n-1)}) (\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} [(2\psi^{(n)} - \gamma^{(n)} \psi'^{(n)}) e_{ii}^{(n)} - (2\psi^{(n-1)} - \gamma^{(n-1)} \psi'^{(n-1)}) e_{ii}^{(n-1)}] (e_{ii}^{(n+1)} - e_{ii}^{(n)}) \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Оценим сверху полученную норму разности двух последующих приближений.

После несложных преобразований, учитывая неравенство  $\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}) \geq |\varepsilon_0^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)}|$  и используя теорему о среднем значении, получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_{\Omega}^2 \leq K \int_{\Omega} \{ |\psi''(\gamma_1)| |\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)}| + |\psi'(\gamma_2) - \gamma_2 \psi''(\gamma_2)| \varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}) \} \times$$

$$\times (\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) d\Omega + K \int_{\Omega} (|\psi'(\gamma_2) - \gamma_2 \psi''(\gamma_2)| |\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)}| + \\ + |2\psi^{(n-1)} - \gamma^{(n-1)} \psi^{(n-1)}| + |\gamma_4 (\psi'(\gamma_4) - \gamma_4 \psi''(\gamma_4))| |\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)})|) \times \\ \times \varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) d\Omega$$

где  $\gamma_1 = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0^{(n)}}$ ,  $\varepsilon^* \in [\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon^{(n)}]$ ;  $\gamma_3 = \frac{\varepsilon^{**}}{\varepsilon_0^{(n)}}$ ,  $\varepsilon^{**} \in [\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon^{(n)}]$

$$\gamma_2 = \frac{\varepsilon_0^{(n-1)}}{\varepsilon_0^{(n)}}, \quad \varepsilon_0^{(n)} \in [\varepsilon_0^{(n-1)}, \varepsilon_0^{(n)}]; \quad \gamma_4 = \frac{\varepsilon_0^{(n-1)}}{\varepsilon_0^{(n)}}, \quad \varepsilon_0^{**} \in [\varepsilon_0^{(n-1)}, \varepsilon_0^{(n)}]$$

Воспользовавшись дважды неравенством Буняковского, получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left| \sqrt{K(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)})^2 + 3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)})} \times \right. \\ \times \sqrt{KA_1^2 + \frac{K^2}{3G} B_1^2} |\varepsilon^{(n-1)} - \varepsilon^{(n)}| + \sqrt{K(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)})^2 + 3G\varepsilon^2(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)})} \times \\ \times \left. \sqrt{KA_2^2 + \frac{K^2}{3G} B_2^2} \cdot \varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) \right| d\Omega \leq \\ \leq \int_{\Omega} \sqrt{K(\varepsilon^{(n-1)} - \varepsilon^{(n)})^2 + 3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n-1)} - \mathbf{u}^{(n)})} \sqrt{K(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)})^2 + 3G\varepsilon^2(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)})} \times \\ \times \sqrt{A_1^2 + \frac{K}{3G}(A_2^2 + B_1^2) + \left(\frac{K}{3G}\right)^2 B_2^2} d\Omega$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = |\psi''(\gamma_1)|, \quad B_1 = |\psi'(\gamma_2) - \gamma_2 \psi''(\gamma_2)| \quad (3.9)$$

$$A_2 = |\psi'(\gamma_3) - \gamma_3 \psi''(\gamma_3)|, \quad B_2 = |2\psi^{(n-1)} - \gamma^{(n-1)} \psi^{(n-1)}| + |\gamma_4 (\psi'(\gamma_4) - \gamma_4 \psi''(\gamma_4))|$$

Учитывая (3.6) и применяя интегральное неравенство Буняковского, последнее неравенство приведем к виду

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2^2 \leq \mu_n \|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2 \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|_2 \quad (3.10)$$

где

$$\mu_n = \max \int_{\Omega} \sqrt{A_1^2 + \frac{K}{3G}(B_1^2 + A_2^2) + \left(\frac{K}{3G}\right)^2 B_2^2} \quad (3.11)$$

Из (3.10) при  $\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2 \neq 0$  получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2 \leq \mu_n \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|_2 \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует [11], что последовательные приближения сходятся к обобщенному решению, если

$$0 < \mu_n \leq \lambda < 1 \quad (3.13)$$

Условие (3.13) с учетом (3.11) и (3.9) означает, что должны быть выполнены следующие неравенства:

$$|\psi''(\gamma)| \leq a, \quad \sqrt{\frac{K}{3G}} |\psi'(\gamma) - \gamma\psi''(\gamma)| \leq b \quad (3.14)$$

$$\frac{K}{3G} \{ |2\psi(\gamma) - \gamma\psi'(\gamma)| + |\gamma[\psi'(\gamma) - \gamma\psi''(\gamma)]| \} \leq c, \quad \sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \lambda < 1$$

В случае представления (1.9), когда потенциал (1.1) принимает вид

$$U = \frac{K}{2} (x^2 - 2C_0 x x_0 + 3x_0^2)$$

условия (3.14) существенно упрощаются

$$\max_{\gamma} \sqrt{\frac{2K}{3G} C_0^2 \left( 1 + \frac{2K}{3G} \gamma^2 \right)} \leq \lambda < 1$$

При этом  $C_0$  должно удовлетворять (2.4).

Первые два неравенства из (3.14) накладывают существенные ограничения на вид функции  $\psi(\gamma)$ , не противоречащие сделанным выше предположениям о поведении функции и ее производных при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \infty$  и требованиям выпуклости потенциала. Третье неравенство (3.14) при  $\gamma \rightarrow \infty$ , то есть при чисто объемном деформировании в общем случае может не выполняться, и, следовательно, сходимость метода в этом случае может не иметь места.

В этом заключается характерное свойство рассматриваемой модели разномодульного тела. Условия сходимости накладывают ограничения не только на вид функции деформированного состояния, описывающей разномодульность материала, но и на вид деформированного состояния.

Эти заключения сделаны для произвольного трехмерного деформированного состояния. В случае плоского деформированного состояния, когда параметр  $\gamma$  ограничен ( $|\gamma| \leq 3$ ), область сходимости метода последовательных приближений будет значительно шире.

## ԻՋՈՏՐՈՓ ՏՍՐԱՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՐԻՆԵԼԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՋՈՐԳՈՒՄԸ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈՒԹԻ ՄԱՍԻՆ

Կ. Օ. ԿԱՐՊԱՆՅԱՆ, Ե. Վ. ԱՄԻՆԵՆ, Ռ. Ի. ՄԱՋՐՅԱՆ

### Ո Ւ Փ Ո Փ Ո Ս Տ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում են լարվածաչին վիճակից դեֆորմացիոն բնութագրիչների անընդհատ կախվածությունը իդատրոպ տարամոդուլ մարմինների մոդուլի համար որոշիչ կապակցությունների մի քանի հատկություններ: Հետազոտված է տարամոդուլ մարմինների համար հաջորդական մասավորությունների մեթոդի դուրսմիտությունը:

# ON THE SUCCESSIVE APPROACH METHOD FOR ISOTROPIC MULTIMODULUS MATERIALS

G. O. GASPARIAN, E. V. LOMAKIN, R. I. MAZING

## S u m m a r y

In the present paper some features of constitutive relations for the model of isotropic multimodulus materials with continuous dependence of deformation properties on the stress state are discussed. The convergence of the successive approach method is analysed for multimodulus materials.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин Е. В., Работнов Ю. П. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
2. Ломакин Е. В. Определяющие соотношения механики разномодульных тел. ИПМ АН СССР. Препринт № 159, 1980.
3. Гаспарян Г. О. Решение плоских задач теории упругости разномодульного тела методом малого параметра.—Вест. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 2.
4. Гаспарян Г. О. Некоторые осесимметричные задачи разномодульной теории упругости.—Машиноведение, 1982, № 5.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.
6. Ворович Н. И., Крисовский Ю. П. О методе упругих решений.—ДАН СССР, 1959, т. 126, № 4.
7. Быков Д. Л. Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды.—Изв. ж. МТТ, 1966, № 4.
8. Быков Д. Л. О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах. В сб.: «Упругость и неупругость», вып. 2. Изд-во МГУ, 1971.
9. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981.
10. Ломакин Е. В. О единственности решения задач теории упругости для изотропного разномодульного тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2.
11. Тренигин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Механико-математический факультет  
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
30.IX.1982

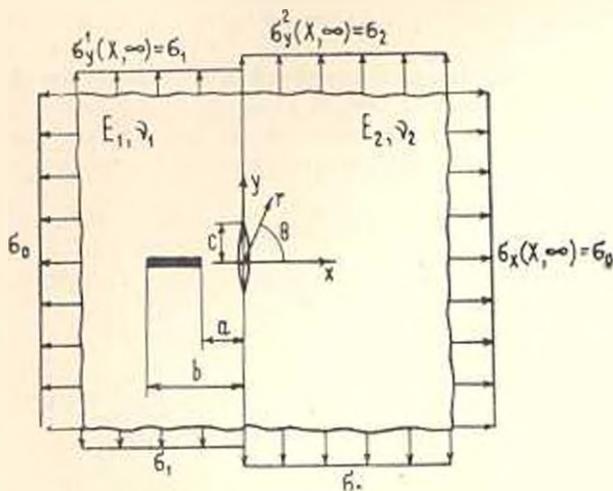
УДК 539.3 : 534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
 С ТРЕЩИНОЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

ГРИЦИՔԻՍ Ժ. Վ., ԵՄՄՍԻՆԿՈ Ա. Ա.

Решена задача линейной теории упругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с трещиной на прямой линии раздела материалов и перпендикулярно ей расположенным тонким упругим включением. Путем использования интегрального преобразования Меллина получена разрешающая система сингулярных интегральных уравнений относительно функций скачка напряжений и перемещений на берегах включения и трещины. Численные результаты представлены для коэффициентов интенсивности напряжений на торцах включения.

1. Рассмотрим кусочно-однородную пластину, содержащую трещину и упругое включение (фиг. 1). Трещина занимает отрезок  $[-c, c]$  оси  $x=0$ , а включение расположено вдоль оси симметрии внутри одной



Փիգ. 1

из полуплоскостей и имеет длину  $2a_0 = b - a$ , ширину  $2h_0$ . К пластине приложены растягивающие усилия  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на бесконечности. При этом должно выполняться соотношение

$$(1 + \nu_1)\mu_2\sigma_1 = (1 + \nu_2)\mu_1\sigma_2 - [(3 - \nu_2)\mu_1 - (3 - \nu_1)\mu_2]\sigma_0$$

$$\nu_1 = \begin{cases} 3 - 4\nu_1 & \text{— для плоской деформации;} \\ (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1) & \text{— для обобщенного плоского напряженного состояния.} \end{cases}$$

ния;  $\nu_j = E_j / [2(1 + \nu_j)]$ ,  $E_j$ ,  $\nu_j$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы ( $j = 1, 2$ ) и включения ( $j = 0$ ). Для элементов упругих полей примем следующие обозначения:  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  — компоненты напряжений,  $u_r, u_\theta$  — составляющие вектора смещений пластины, записанные в полярной системе координат  $(r, \theta)$  с началом в центре разреза;  $N(r)$  — нормальное усилие в сечении включения.

Граничные условия задачи

$$\begin{aligned} \tau_{2\theta}(r, 0) = u_{2\theta}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < \infty \\ \tau_{1\theta}(r, \pi) = -\frac{1}{2} f_1(r), \quad \frac{\partial u_{1\theta}(r, \pi)}{\partial r} = -\frac{1}{2} f_2(r), \quad a < r < b \\ \tau_{1\theta}(r, \pi/2) = \tau_{2\theta}(r, \pi/2), \quad \tau_{1\theta}(r, \pi/2) = \tau_{3\theta}(r, \pi/2), \quad -c < r < c \\ \frac{\partial}{\partial r} [u_{1\theta}(r, \pi/2) - u_{2\theta}(r, \pi/2)] = -g_1(r), \quad -c < r < c \\ \frac{\partial}{\partial r} [u_{1\theta}(r, \pi/2) - u_{3\theta}(r, \pi/2)] = -g_2(r), \quad -c < r < c \end{aligned} \quad (1.1)$$

Взаимодействие включения с матрицей при условии идеального их механического контакта и равенстве поперечных деформаций кромок прослойки описывают соотношения [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1r}(r, \pi)}{\partial r} &= \frac{(1 + \nu_0)}{8\nu_0} N(r) - \frac{(3 - \nu_0)}{8\nu_0} \tau_{1\theta}(r, \pi) \\ \frac{u_{1\theta}(r, \pi)}{h_0} &= \frac{(2 + \nu_0)}{8\nu_0} \tau_{1\theta}(r, \pi) - \frac{(3 - \nu_0)}{8\nu_0} N(r) \\ N(r) &= N(b) + \frac{1}{h_0} \int_a^b \tau_{1\theta}(s, \pi) ds - \frac{1}{h_0} \int_a^r \tau_{1\theta}(s, \pi) ds, \quad a < r < b \end{aligned} \quad (1.2)$$

Согласно [2] трансформанты Меллина напряжений и перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} M[r^s \tau_j(r, \theta), s] &= 2i(s+1) [A_j s \exp(isb) + B_j (s+1) \exp(i(s+2)b) - \\ &\quad - \bar{B}_j \exp(-i(s+2)b)] \\ M[r^s u_j(r, \theta), s] &= -\frac{(s+1)}{i} [A_j s \exp(isb) + B_j (s+1) \exp(i(s+2)b) + \\ &\quad + \alpha_j \bar{B}_j \exp(-i(s+2)b)] \\ \sigma_j(r, \theta) &= \tau_{j1}(r, \theta) + i\tau_{j2}(r, \theta), \quad u_j(r, \theta) = \frac{\partial u_{1j}(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial u_{2j}(r, \theta)}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$A_j, B_j$  ( $j = 1, 2$ ) — комплексные функции параметра преобразования  $s$ . Введем обозначения

$$A_1 = C_1 + iC_2, \quad B_1 = C_3 + iC_4, \quad A_2 = C_5 + iC_6, \quad B_2 = C_7 + iC_8$$

Подставляя выражения (1.3) в граничные условия (1.1), записанные в пространстве изображений интегрального преобразования Меллина, приходим к системе восьми линейных алгебраических уравнений

$$sC_6 + (s+2)C_8 = 0, \quad sC_4 + (s+1-z_2)C_8 = 0$$

$$s \sin \theta_2 C_1 + s \cos \theta_2 C_2 + (s+2) \sin \theta_2 C_3 + (s+2) \cos \theta_2 C_4 = \frac{F_2(s)}{4(s+1)}$$

$$s \sin \theta_2 C_1 + s \cos \theta_2 C_2 + (s+1-z_1) \sin \theta_2 C_3 + (s+1-z_1) \cos \theta_2 C_4 = \frac{\mu_1 F_2(s)}{2(s+1)}$$

$$s \sin \theta_1 C_5 + s \cos \theta_1 C_6 - (s+2) \sin \theta_1 C_7 - (s+2) \cos \theta_1 C_8 - \\ - s \sin \theta_1 C_3 + (s+2) \sin \theta_1 C_7 = 0$$

$$s \cos \theta_1 C_5 - s \sin \theta_1 C_6 - s \cos \theta_1 C_7 + s \sin \theta_1 C_8 - s \cos \theta_1 C_3 + s \cos \theta_1 C_7 = 0$$

$$m[s \cos \theta_1 C_5 - s \sin \theta_1 C_6 - (s+1+z_1) \cos \theta_1 C_7 + (s+1+z_1) \sin \theta_1 C_8] =$$

$$- s \cos \theta_1 C_3 + (s+1+z_2) \cos \theta_1 C_7 = \frac{\mu_2 G_1(s)}{s+1}$$

$$m[s \sin \theta_1 C_5 + s \cos \theta_1 C_6 - (s+1-z_1) \sin \theta_1 C_7 - (s+1-z_1) \cos \theta_1 C_8] =$$

$$- s \sin \theta_1 C_3 + (s+1-z_2) \sin \theta_1 C_7 = \frac{\mu_2 G_2(s)}{s+1}$$

$$m = \mu_2/\mu_1, \quad \theta_j = j\pi s/2, \quad F_j(s) = \int_a^b f_j(r)r^{s-1}dr, \quad G_j(s) = \int_a^b g_j(r)r^{s-1}dr \quad (j=1,2)$$

Решение этой системы позволяет определить  $C_k$  ( $k=1, \dots, 8$ ) в зависимости от функций  $F_j(s)$ ,  $G_j(s)$  ( $j=1, 2$ )

$$C_6 = C_8 = 0$$

$$C_4 = -\frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} C_2 = \frac{(s+1-z_1)F_1(s) - 2\mu_1(s+2)F_2(s)}{4s(s+1)(1+z_1)\sin \theta_2}$$

$$C_2 = \frac{\mu_2}{s(s+1)m_1 m_2} \{[(s+1)m_2 - m_1] \sin \theta_1 G_1(s) + [(s+1)m_2 + m_1] \cos \theta_1 G_2(s)\} -$$

$$- \frac{1}{4s(s+1)(1+z_1)} \{[m_3(s+1)(2s+2-z_1) + m_4] F_1(s) - \\ - 2\mu_1[m_3(s+1)(2s+3) + m_5] F_2(s)\}$$

$$C_2 = -\frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} C_4 + \frac{F_1(s) - 2\mu_1 F_2(s)}{4(s+1)(1+z_1)\sin \theta_2}$$

$$C_6 = \frac{\mu_2}{(s+1)m_1} |\sin \theta_1 G_1(s) + \cos \theta_1 G_2(s)| -$$

$$\frac{m_2[(2s+2-z_1)F_1(s) - 2\mu_1(2s+3)F_2(s)]}{4(s+1)(1+z_1)}$$

$$C_5 = \frac{\mu_2}{s(s+1)m_1 m_2 \sin \theta_2} \{ |(s+1)m_1 - m_2| \sin \theta_1 G_1(s) - |(s+1)m_1 + m_2| \cos \theta_1 G_2(s) \} -$$

$$- \frac{m}{4s(s+1) \sin \theta_2} \left| \left| \frac{2s+2-x_1}{m_1} - \frac{s+1}{m_2} \right| F_1(s) + 2\mu_1 \left| \frac{2s+3}{m_1} - \frac{s+1}{m_2} \right| F_2(s) \right\}$$

$$C_7 = \frac{\mu_2}{(s+1)m_2 \sin \theta_2} |\sin \theta_1 G_1(s) - \cos \theta_1 G_2(s)| + \frac{m |F_1(s) - 2\mu_1 F_2(s)|}{4(s+1)m_2 \sin \theta_2}$$

$$m_1 = 1 + m x_1, \quad m_2 = m + x_2, \quad m_3 = 1 - m, \quad m_4 = m x_1 - x_2, \quad m_5 = m_2/m_1, \quad m_6 = m_2/m_2 \quad (1.4)$$

Подставляя значения  $G_k(s)$  ( $k=1, \dots, 8$ ) (1.4) в соотношения (1.3), находим на линиях  $\theta = -\pi/2$  и  $\theta = \pi$

$$M |r^2 z_1(r, -\pi/2), s| = \gamma_1 \{ \operatorname{tg} \theta_1 G_1(s) - i \operatorname{ctg} \theta_1 G_2(s) + \gamma_2 |G_2(s) - i G_1(s)| \} +$$

$$+ |4(1+x_1) \cos \theta_1|^{-1} \{ |2s+3-x_1-m_5(2s+2-x_1)+m_6| F_1(s) - 2\mu_1 [2(s+2) -$$

$$- m_5(2s+3) + m_6] F_2(s) \} - i \{ 4(1+x_1) \sin \theta_1 \}^{-1} \{ |2s+1-x_1-m_5(2s+2-x_1) -$$

$$- m_6| F_1(s) - 2\mu_1 [2(s+1) - m_5(2s+3) - m_6] F_2(s) \}$$

$$M |r^2 z_{1,6}(r, \pi), s| = \mu_2 (m_1 m_2)^{-1} \{ (2s+1)m_2 - m_1 |(\cos \theta_1)^{-1} G_1(s) - |(2s+$$

$$+ 1)m_2 + m_1 |(\sin \theta_1)^{-1} G_2(s) \} + 0,5(1+x_1)^{-1} \{ (x_1-1) \operatorname{ctg} \theta_2 + [m_5(2s+1)(2s+$$

$$+ 2-x_1) + m_6] (\sin \theta_2)^{-1} |F_1(s) + 2\mu_1| 2 \operatorname{ctg} \theta_2 - [m_5(2s+$$

$$+ 1)(2s+3) + m_6] (\sin \theta_2)^{-1} |F_2(s) \}$$

$$M \left| r^2 \frac{\partial u_{1r}(r, -)}{\partial r}, s \right| = m(2m_1 m_2)^{-1} \{ (2s+x_1+2)m_2 - m_1 |(\cos \theta_1)^{-1} G_1(s) +$$

$$+ |(2s+2+x_1)m_2 + m_1 |(\sin \theta_1)^{-1} G_2(s) \} - |4\mu_1(1+x_1)|^{-1} \{ |2x_1 \operatorname{ctg} \theta_2 +$$

$$+ |m_5(2s+2-x_1) \times (2s+2+x_1) + m_6| (\sin \theta_2)^{-1} |F_1(s) - 2\mu_1 [(x_1-1) \operatorname{ctg} \theta_2 +$$

$$+ |m_5(2s+x_1+2)(2s+3) + m_6| \times (\sin \theta_2)^{-1} |F_2(s) \}$$

$$\gamma_1 = \mu_2 \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}, \quad \gamma_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad (1.5)$$

Применяя к выражениям (1.5) формулы обращения интегрального преобразования Меллина [3] и используя при этом некоторые табличные интегралы [4], получаем

$$z_{1,6}(r, -\pi/2) - i z_{1,6}(r, \pi/2) = \gamma_1 \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\xi) + i g_2(\xi)}{\xi - r} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\xi) - i g_2(\xi)}{\xi + r} d\xi - \right.$$

$$- \gamma_2 |g_1(r) + i g_2(r)| - \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_0^{\infty} f_1(\gamma) \left\{ \gamma \left[ |4(3+x_1)\gamma^2 - (1-x_1)r^2 - m_5| (2+$$

$$+ x_1)\gamma^2 - (2-x_1)r^2 \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} + m_6 \right\} + i r \left\{ |(3-x_1)\gamma^2 - (1-x_1)r^2 - m_5| (1+x_1)\gamma^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + x_1 r^2 \left| \frac{1}{\gamma^2 + r^2} - m_6 \right| \left| \frac{d\gamma}{\gamma^2 + r^2} + \frac{\mu_1}{(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \gamma \left[ 2(\gamma^2 - r^2) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - m_3(\gamma^2 - 3r^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} + m_6 \right\} + i r \left[ 2(\gamma^2 - r^2) - m_3(3\gamma^2 - r^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + r^2} - m_6 \right| \left| \frac{d\gamma}{\gamma^2 + r^2} \right|
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{115}(s, \pi) &= \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \frac{x_1 - 1}{\gamma + s} + m_3 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2(3-x_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{[(2-x_1)m_3 + m_6]}{\gamma + s} \right\} d\gamma + \frac{2\mu_1}{(1+x_1)\pi} \int_a^b f_2(\gamma) \left\{ \frac{1}{\gamma - s} - \right. \\
 & \left. - m_3 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] - \frac{(3m_3 + m_6)}{2(\gamma + s)} \right\} d\gamma - \frac{2\mu_1}{m_1 m_2 \pi} \left\{ \int_0^{\xi} g_1(\xi) \xi \left[ m_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + m_2 \frac{5\xi^2 + s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} - \int_0^{\eta} g_2(\xi) \xi \left[ m_1 - m_2 \frac{3\xi^2 - s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} \right\} \\
 \frac{\partial u_{1r}(s, \pi)}{\partial s} &= \frac{1}{2\mu_1(1+x_1)\pi} \int_a^b f_1(\gamma) \left\{ \frac{x_1}{\gamma - s} + m_3 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{(4-x_1^2)m_3 + m_6}{2(\gamma + s)} \right\} d\gamma + \frac{1}{2(1+x_1)\pi} \int_a^b f_2(\gamma) \left\{ \frac{x_1 - 1}{\gamma - s} + m_3 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2(5-x_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{3(2-x_1)m_3 + m_6}{\gamma + s} \right\} d\gamma + \frac{m}{m_1 m_2 \pi} \left\{ \int_0^{\xi} g_1(\xi) \xi \left[ m_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{m_2(4-x_1^2)\xi^2 - x_1 s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} + \int_0^{\eta} g_2(\xi) \xi \left[ -m_1 + m_2 \frac{(2-x_1)\xi^2 - (2+x_1)s^2}{\xi^2 + s^2} \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + s^2} \right\}
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношения (1.6), (1.7) имеют место при любых значениях  $r$ , в частности,

$$\tau_{1,4}(r, \pi/2) - i\tau_{100}(r, \pi/2) = \tau_{1,9}^0(r, \pi/2) - i\tau_{100}^0(r, \pi/2), \quad 0 < r < c \quad (1.8)$$

$$\tau_{1,40}(r, \pi) = \tau_{100}^0(r, \pi) + \tau_{100}^+(r, \pi), \quad \frac{\partial u_{1r}(r, \pi)}{\partial r} = \frac{\partial u_{100}^0(r, \pi)}{\partial r} + \frac{\partial u_{100}^+(r, \pi)}{\partial r} \quad a < r < b \quad (1.9)$$

$\sigma_{11}^0, \sigma_{33}^0, u_{1r}^0$  — напряжения и перемещения в теле при отсутствии включения и трещины, вызванные заданной внешней нагрузкой; звездочкой отмечены возмущенные величины, обусловленные наличием включения. Подставляя соотношения (1.6) в равенство (1.8), а (1.7) — в условия взаимодействия (1.2), с учетом представления (1.9) и формул

$$u_{11}(r, \pi) = u_{11}(b, \pi) + \frac{1}{2} \int_a^b f_2(s) ds - \frac{1}{2} \int_a^r f_2(s) ds$$

$$\int_a^r f_1(s) ds - \frac{1}{2} \int_a^b \operatorname{sign}(r-s) f_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_a^b f_1(s) ds$$

$$\int_0^r g_1(t) \times [\text{четная функция по } t] dt = -\frac{i}{2} \int_{-c}^c [g_2(t) + i g_1(t)] [\text{четная функция по } t] dt$$

$$\int_0^c g_1(t) \times [\text{четная функция по } t] dt = \frac{1}{2} \int_{-c}^c t [g_2(t) + i g_1(t)] [\text{четная функция по } t] dt \quad (1.10)$$

приходим к системе трех сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-y} dt - \gamma_2 \Phi(y) - \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 I_j(t, y) \psi_j(t) dt = -\frac{1}{\gamma_1} [\tau_{12}^0(y, \pi/2) - i \tau_{13}^0(y, \pi/2)]$$

$$-1 < y < 1$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\lambda_{1j}}{\pi(t-x)} - Q_j(t, x) \right] \psi_j(t) dt - i_2 \int_{-1}^1 S(x-t) \psi_1(t) dt -$$

$$- \int_{-1}^1 H(t, x) \Phi(t) dt = P_1(x)$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\lambda_{2j}}{\pi(t-x)} + Q_{0j}(t, x) + \lambda_j S(x-t) \right] \psi_j(t) dt + \int_{-1}^1 H_1(t, x) \Phi(t) dt = P_2(x)$$

$$-1 < x < 1 \quad (1.11)$$

Здесь обозначено

$$Q_j(t, x) = Q_{1j}(t, x) + 8\nu_0 Q_{2j}(t, x) (3 - \nu_0)$$

$$H(t, x) = H_1(t, x) + 8\nu_0 H_2(t, x) / (3 - \nu_0), \quad S(x-t) = \operatorname{sign}(x-t) - \delta^*$$

$$I_1(t, y) = \frac{a^*}{2(1+\nu_1)\pi} \left\{ \epsilon y \left[ |(3+\nu_1)\gamma^2 - (1-\nu_1)c^2 y^2 - m_3[(4+\nu_1)\gamma^2 + \nu_1 c^2 y^2]| \right] \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} - m_4 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + i\eta \right| \left[ (3+z_1)\gamma^2 - (1-z_1)c^2 y^2 - m_5 \left| (2+z_1)\gamma^2 - (2-z_1)c^2 y^2 \right| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + m_6 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} \right| \right]$$

$$I_2(t, y) = -\frac{a^2 \mu_1}{(1+z_1)\gamma_1 \pi} \left\{ c\eta \left[ 2(\gamma^2 - c^2 y^2) - m_5(3\gamma^2 - c^2 y^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} - m_6 \right\}$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + i\eta \left[ 2(\gamma^2 - c^2 y^2) - m_5(\gamma^2 - 3c^2 y^2) \right] \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} + m_6 \left| \frac{1}{\gamma^2 + c^2 y^2} \right|$$

$$H_1(t, x) = \frac{c\mu_2}{m_1 m_2 \pi} \left\{ ct \left[ m_1 - m_2 \frac{3c^2 t^2 - s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} + \right.$$

$$\left. + is \left[ m_1 + m_2 \frac{5c^2 t^2 - s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} \right\}$$

$$H_2(t, x) = \frac{cm}{2m_1 m_2 \pi} \left\{ ct \left[ -m_1 + m_2 \frac{(2-z_1)c^2 t^2 - (2+z_1)s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] - \right.$$

$$\left. - is \left[ m_1 + m_2 \frac{(1-z_1)c^2 t^2 - z_1 s^2}{c^2 t^2 + s^2} \right] \frac{1}{c^2 t^2 + s^2} \right\}$$

$$Q_{11}(t, x) = \frac{a^2}{2(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^3} - \frac{2(3-z_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + [(2-z_1)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{12}(t, x) = -\frac{2\gamma_1 a^2}{(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \frac{1}{2} (3m_5 + m_6) \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{21}(t, x) = -\frac{a^2}{2\mu_1(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4s^2}{(\gamma + s)^3} - \frac{6s}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [(4-z_1^2)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$Q_{22}(t, x) = \frac{a^2}{2(1+z_1)\pi} \left\{ m_5 \left[ \frac{4(s^2 + 3\gamma s + 4\gamma^2)}{(\gamma + s)^3} - \frac{2(5+z_1)(2\gamma + s)}{(\gamma + s)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + [3(2+z_1)m_5 + m_6] \frac{1}{\gamma + s} \right\}$$

$$P_1(x) = \frac{1+z_0}{3-z_0} N(1) - z_{100}^0(x, \pi) - \frac{8\gamma_0}{(3-z_0)} \frac{\partial z_{10}^0(x, \pi)}{\partial x}$$

$$P_2(x) = \frac{\gamma_0 - 3}{1+z_0} N(1) + z_{100}^0(x, \pi) - \frac{8\gamma_0}{(1+z_0)} \frac{u_{10}(1, \pi)}{2h_0}$$

$$u_{10}(1, \pi) = \frac{h_0(1+z_0)}{4} \frac{[(1+z_0)z_{100}^0(1, \pi) - (3-z_0)z_{10}^0(1, \pi)]}{\max(E_0, E)}$$

$$N(1) = |\ln(\mu_0, \mu_1)/\mu_1|^{1/2} \varphi_{1,r}(1, \pi), \quad \Phi(y) = g_2(cy) + ig_1(cy)$$

$$\psi_j(t) = f_j(\tau) \quad (j=1, 2), \quad \tau = ct, \quad r = cy, \quad a_0 = (b-a)/2, \quad b_0 = (b+a)/2$$

$$\chi = \begin{cases} a_0 t + b_0, & a \neq 0 \\ bt, & a = 0 \end{cases} \quad s = \begin{cases} a_0 x + b_0, & a \neq 0 \\ bx, & a = 0 \end{cases}$$

$$a^* = \begin{cases} a_0, & a \neq 0 \\ b, & a = 0 \end{cases} \quad \delta^* = \begin{cases} 0, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

Если  $a > 0$ , то для однозначной разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) к ней следует прибавить условия

$$\int_{-1}^1 \Phi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi_j(t) dt = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.12)$$

При  $a = 0$  из соотношения (1.10) получаем

$$u_{13}(x, \pi) = -\frac{b}{2} \int_{-1}^x \psi_2(t) dt + \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(t) dt + u_{13}(1, \pi)$$

Интегрируя условия (1.11) и отделяя действительную и мнимую части, имеем

$$u_{1r}(y, \pi/2) - u_{2r}(y, \pi/2) = -c \operatorname{Im} \int_0^y \Phi(t) dt + \operatorname{Im} [C]$$

$$u_{1i}(y, \pi/2) - u_{2i}(y, \pi/2) = -c \operatorname{Re} \int_0^y \Phi(t) dt - \operatorname{Re} [C]$$

$$C = c \int_0^1 \Phi(t) dt$$

Отсюда, учитывая свойства функции  $\Phi(t)$ , находим

$$\operatorname{Im} [C] = -\frac{ic}{2} \int_{-1}^1 \Phi(t) dt$$

и, поскольку,

$$u_{1r}(0, \pi/2) - u_{2r}(0, \pi/2) - u_{1r}(0, \pi/2) = -u_{1i}(-1, \pi),$$

получаем

$$-\frac{ic}{2} \int_{-1}^1 \Phi(t) dt = -\frac{b}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(t) dt + u_{13}(1, \pi) \quad (1.13)$$

В случае абсолютно жесткого включения ( $E_0 = \infty$ )  $\psi_2(x) = 0$  и последние два уравнения системы (1.11) преобразуются в одно уравнение

$$\frac{\gamma_1}{2\gamma_1(1+\gamma_1)\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 Q_{21}(t, x) \psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 H_2(t, x) \Phi(t) dt =$$

$$= -\frac{\partial u_{12}^+(x, \pi)}{\partial x} \quad |x| < 1$$

Когда же  $E_0=0$ , тогда и  $\psi_1(x)=0$ . В этом случае имеем

$$\frac{2\gamma_1}{(1-\gamma_1)\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 Q_{12}(t, x) \psi_2(t) dt + \int_{-1}^1 H_1(t, x) \Phi(t) dt = -\tau_{12}^+(x, \pi)$$

— интегральное уравнение, которое вместе с первым уравнением системы (1.11) описывает упругое равновесие спаянных разнородных полуплоскостей с трещиной на прямой линии раздела материалов и перпендикулярно ей расположенной трещиной внутри одной из полуплоскостей.

Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) будем искать методом коллокаций [5, 6]. Пусть

$$\Phi(t) = (1-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta} \Phi^*(t), \quad \alpha = -\frac{1}{2} - i\omega, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}$$

$$\psi_1(t) = (1-t^2)^{-1/2} \psi_1^*(t), \quad a > 0, \quad \psi_2(t) = (1-t^2)^{-1/2} \psi_2^*(t) = (1-t^2)^{\alpha} \psi_2^*(t), \quad a = 0$$

Тогда из (1.11) — (1.13) получаем

$$\sum_{m=1}^M \frac{A_m}{t_m - y_k} \Phi^*(t_m) - i \sum_{j=1}^2 \sum_{a=1}^N \tau \omega^* I_j(t_n, y_k) \psi_j^*(t_n) = -\frac{1}{\gamma_1} [\tau_{12}^+(y_k) - i\tau_{12}^0(y_k)]$$

$$+ \sum_{n=1}^N \tau \omega^* \left\{ \left| \frac{i\tau_{11}}{\pi(t_n - x_1)} - i_3 S(x_1 - t_n) - Q_1(t_n, x_1) \right| \psi_1^*(t_n) + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{i\tau_{12}}{\pi(t_n - x_1)} - Q_2(t_n, x_1) \right| \psi_2^*(t_n) \right\} + \sum_{m=1}^M A_m H_2(t_n, x_1) \Phi(t_m) - P_2(x_1)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \sum_{a=1}^N \tau \omega^* \left\{ \frac{i\tau_{2j}}{\pi(t_n - x_j)} + i_3 S(x_j - t_n) + Q_{1j}(t_n, x_j) \right\} \psi_j^*(t_n) +$$

$$+ \sum_{m=1}^M A_m H_1(t_n, x_j) \Phi(t_m) - P_1(x_j) \quad (1.14)$$

$$\sum_{m=1}^M A_m \Phi^*(t_m) = 0, \quad \sum_{a=1}^N \frac{\pi}{N} \psi_j^*(t_n) = 0 \quad (j=1, 2), \quad a > 0 \quad (1.15)$$

$$- \frac{tc}{2} \sum_{m=1}^M A_m \Phi(t_m) = -\frac{b}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{2N+1} \psi_2^*(t_n) + u_{12}(1, \pi), \quad a = 0 \quad (1.16)$$

$$k = 1, \dots, M-1; \quad t = \begin{cases} 1, \dots, N-1, & a > 0 \\ 1, \dots, N, & a = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$(t^2-1)P_{M-2}^{(\alpha+1, \beta+1)}(t_m) = 0, \quad P_{M-1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(y_k) = 0$$

$$A_m = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(M+\alpha) \Gamma(M+\beta)}{(M-1) \Gamma(M) \Gamma(M+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma}{[P_{M-1}^{(\alpha, \beta)}(t_m)]}$$

$$A_1 = (1+\alpha)A_1^*, \quad A_M = (1+\beta)A_M^*, \quad A_p = A_p^* \quad (p=2, \dots, M-1)$$

$$t_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2N^*} \pi\right), \quad x_l = \cos\left(\frac{l}{N^*} \pi\right), \quad \omega^* = \frac{\pi}{N^*}, \quad N^* = \begin{cases} N, & a > 0 \\ 2N+1, & a = 0 \end{cases}$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  — полиномы Якоби.

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляем по формулам

$$k_j^* = \mp \left[ \frac{2z_1}{1+z_1}, \frac{z_1-1}{2(1+z_1)} \right] \varphi_j^*(1) \quad (j=1, 2)$$

на торцах включения и по формулам

$$k = k_1 + ik_2 = c(1-\gamma_2^2)\Phi^*(1)$$

в вершине трещины.

2. Численное решение системы линейных алгебраических уравнений (1.14), (1.15) (если  $a > 0$ ) и (1.14), (1.16) ( $a = 0$ ) получено для комбинации материалов полуплоскостей алюминий-эпоксид ( $E_{11}/E_{22} = 22,47$ ,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $\nu_{21} = 0,35$ ) и случае плоской деформации. При этом

$$\varepsilon_0 = \frac{\nu_1}{1-\nu_2} = 0,42857, \quad \varepsilon_1 = 1,0, \quad \varepsilon_2 = 0,26844 \quad (\text{алюминий-эпоксид})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\nu}{1-\nu_2} = 0,42857, \quad \varepsilon_2 = 0,26844, \quad \varepsilon_1 = 1,0 \quad (\text{эпоксид-алюминий})$$

Определение комплексных точек коллокации  $u_j$  и узлов  $t_k$ , являющихся корнями полиномов Якоби, проводилось методом Ньютона—Рафсона. В качестве нулевых приближений брались точные значения корней соответствующих полиномов Чебышева.

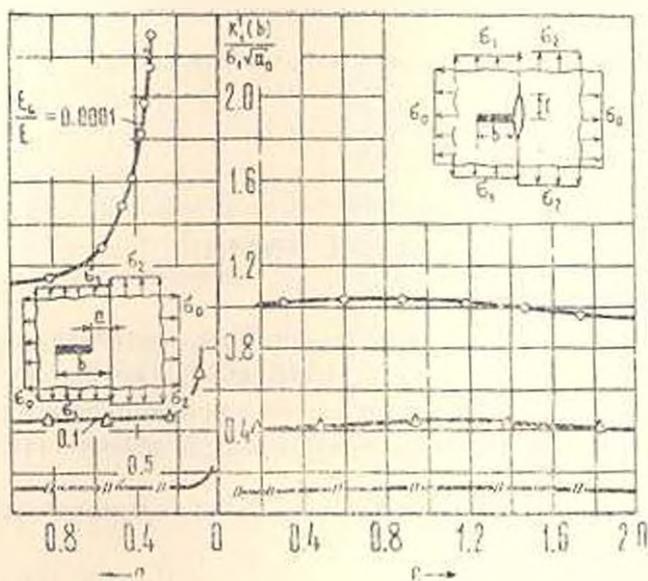
Для достижения относительной точности в 1% потребовалось при самых неблагоприятных значениях параметров задачи положить в (1.14—1.16)  $N^* = 21$ ,  $M = 25$ .

Результаты вычислений приведенных коэффициентов интенсивности напряжений

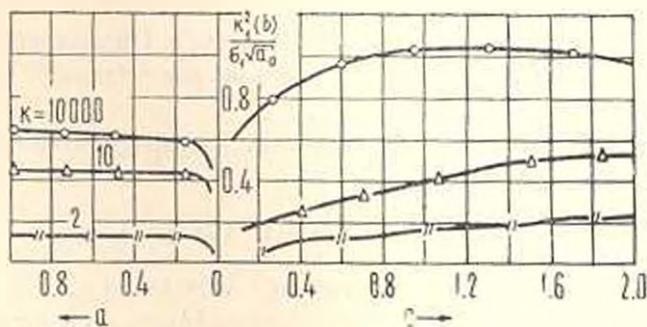
$$k_j'(b) = k_j^*(b) / (\varepsilon_1 \sqrt{a_0}) \quad (j=1, 2)$$

для значений относительной жесткости включения  $k_0 = E_0/E_1 = 0,0001$ ; 0,1; 0,5; 2; 10; 10000, расположенного в алюминиевой матрице, представлены на фиг. 2, 3. Здесь фиксировали длину включения  $a_1 = 1$ , его толщину  $h_0 = 0,1$  и исследовали влияние расстояния правого торца  $x = a$  на коэффициенты  $k_j'(b)$  ( $j=1, 2$ ). После достижения торцом  $x = a$  линии раздела материалов полуплоскостей ( $a = 0$ ) предполагалось возникновение трещины полудлины  $c$  вдоль этой линии. Зависимость  $k_j'(b)$  от величины параметра  $c$  представляла в правых частях фиг. 2, 3.

Установлено, что при  $k = 0,0001$  значения  $k_1^1$  с относительной точностью не более 1% совпадают с коэффициентом  $k_1$ , соответствующей задаче для трещины [7]. При  $k = 10000$ ,  $a = 8$  получаем решение задачи для абсолютно жесткого включения в однородной изотропной плоскости [8].



Фиг. 2



Фиг. 3

Соответствующие результаты для включения, локализованного в матрице из эпоксида, содержатся в табл. 1, 2.

Таблица

x	$k_1^+(b)$			$k_1^-(b)$		
	0.0001	0.1	0.5	2	10	10000
2.0	0.9616	0.4264	0.1172	0.01753	0.04638	0.06662
1.8	0.9566	0.4277	0.1172	0.01754	0.04645	0.06677
1.6	0.9506	0.4268	0.1171	0.01755	0.04653	0.06695
1.4	0.9433	0.4258	0.1170	0.01756	0.04663	0.06717
1.2	0.9343	0.4245	0.1169	0.01758	0.04675	0.06747
1.0	0.9231	0.4230	0.1168	0.01761	0.04692	0.06785
0.8	0.9090	0.4210	0.1167	0.01763	0.04714	0.06835
0.6	0.8910	0.4185	0.1165	0.01767	0.04745	0.06914
0.4	0.8680	0.4154	0.1162	0.01773	0.04792	0.07031
0.2	0.8387	0.4114	0.1160	0.01782	0.04871	0.07241

Таблица 2

x	$k_1^+(b)$			$k_1^-(b)$		
	0.0001	0.1	0.5	2	10	10000
0.1	0.8124	0.3581	0.08753	-0.02213	-0.08939	-0.1748
0.3	0.8339	0.3642	0.08939	-0.01812	-0.07303	-0.1572
0.5	0.8684	0.3818	0.10051	-0.01053	-0.05344	-0.1022
0.7	0.8975	0.398	0.11244	-0.00195	-0.03759	-0.0707
0.9	0.9211	0.4162	0.12375	0.00712	-0.02108	-0.03419
1.1	0.9382	0.429	0.13325	0.01617	-0.00553	-0.0192
1.3	0.9479	0.4372	0.13999	0.02454	0.00778	0.01814
1.5	0.9493	0.4339	0.14344	0.03160	0.01646	0.04177
1.7	0.9427	0.4261	0.14453	0.03744	0.02815	0.04595
1.9	0.9288	0.4154	0.1463	0.04252	0.03615	0.05044

ԿՏՈՐ ԱՌԻ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԻՆՈՒ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԲԱՐԱՆ ԱՌԱՋՊԱԿԱՆ ՆԵՐՊՐԱԿԻ ՓՈՆԵԱԶՎԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԱԲԻ ՀՆՏ

Գ. Վ. ԳՐԵՎՅԱՆՑ, Ա. Ա. ՆՎՍԻՆՆՅԱՍ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Մ

Ստացված է երկու իրար զուգված դժային առաձգական տարասևն կիսա-հարթությունների խնդրի լուծումը, որոնք պարունակում են զոդման զծի երկայնքով ճաթ. ինչպես նաև կիսահարթություններից որևէ մեկում ճաթին ներդրակը կարող է հատել միջֆազային ճաթը: Մեկին ինտեգրալ ձևափոխության օգտագործումով կառուցված է լուծող ինտեգրալ համասարումների սխեմները: Թվային արդյունքները ներկայացված են լարումների ինտենսիվության գործակիցների համար:

# INTERACTION OF THE THIN ELASTIC INCLUSION WITH CRACK IN BONDED HALF-PLANES

D. V. GRILITSKI, A. A. JEVUSHENKO

## С у м м а р у

The solution is given for two bonded isotropic linearly elastic half-planes of different elastic properties having a crack along the interface as well as a perpendicular inclusion in one of the half-planes which may intersect the interface crack. The appropriate integral equations have been developed through the use of Mellin transforms.

Numerical results are presented for the stress intensity factors.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела тонкостенным гибким включением.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 2, № 6, с. 19—29.
2. Coker E., Pilon L. N. A treatise on photo-elasticity. 2d ed., Cambridge University Press: 1957. 720 p.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования и задачи теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1968, т. 1. 343 с.
5. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations.—Quart. Appl. Math., 1972, vol. 2, № 4, p. 525—534.
6. Ioakimidis N. I., Theocaris P. S. Numerical solution of Cauchy type singular integral equations by use of the Lobatto-Jacobi numerical integration rule.—Appl. Mathematika, 1978, vol. 23, № 6, p. 439—452.
7. Corie J. G., Venezia W. A. Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material. Int. J. Eng. Sci., 1977, vol. 15, № 1, p. 1—17.
8. Сулим Г. Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине.—Физ.-хим. механика материалов, 1981, № 3, с. 61—68.

Львовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26.1.19

УДК 534.221

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О СОУДАРЕНИИ ТЕЛ,  
 ОГРАНИЧЕННЫХ УПРУГИМИ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

МАРТИРОСЯН А. И., САФАРЯН Ю. С.

Решение задачи о соударении стержней со свободными поверхностями методом Смирнова—Соболева дано в [1, 2]. Задачи о соударении плоских и осесимметричных тел при наличии смешанных условий методом интегральных преобразований решены в [3, 4]. Применением метода обращения интегральных преобразований [5, 6] решение приводится к форме Смирнова—Соболева. Вместе с тем асимптотика решения получается значительно проще, чем в [1]. Задачи для точечных импульсов методом плоских волн были рассмотрены в [10]. Решения динамических задач теории упругости методом интегральных преобразований даны в [6], [7], [8], [9].

Рассматривается задача о соударении двух полушаров с упругими постоянными  $\lambda, \mu, \nu$  и высотой  $2h$ , ограниченных с обеих сторон упругими полуплоскостями  $|y| \geq h$ , имеющими упругие постоянные  $\lambda, \mu, \nu$ . В результате соударения образуется слой высотой  $2h$  между упругими полуплоскостями. Левая полушаровка движется вдоль жесткой заделки  $x < 0$ , а правая — между полуплоскостями.

Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u = -h, \quad v = v', \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}', \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}', \quad x > 0 \\ v' = v = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}' = 0, \quad x < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, v$  — компоненты перемещений по осям  $X, Y$  в полуплоскостях,  $\sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  — тензора напряжений, штрих обозначает величины, относящиеся к слою. Условия на ребре имеют вид  $u, v, u', v' = O(\sqrt{x^2 + (y - |h|)^2})$  при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ . Для случая  $h = \infty$  решение одномерно и имеет вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0}{a} \left( t - \frac{|x|}{a'} \right), \quad v_0 = 0 \quad (2)$$

где  $a' = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $V_0$  — скорость полушаров до соударения, начало координат  $O$  выбрано в середине слоя, ось  $x$  направлена по его средней линии, ось  $y$  — вверх.

В силу симметрии рассматривается движение слоя и полуплоскос-

тей для  $y \geq 0$ , причем высота  $h$  считается значительно меньше характерной длины  $at$ . Рассмотрена асимптотика решения для  $|x|$ , значительно больших  $h$ .

Для перемещений имеет место

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

где  $\varphi, \psi$  удовлетворяют волновым уравнениям со скоростями  $a, b$

$$a = \sqrt{\frac{t + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \rho - \text{плотность среды.}$$

В силу четности  $u$  и нечетности  $v$  по  $y$ , можно рассматривать решение  $y \geq 0$  и полагать для преобразований по Лапласу по переменной  $t$  ( $t$  — время)

$$\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_1(y-h))d\bar{\alpha}, \quad \bar{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} B \exp(i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_2(y-h))d\bar{\alpha} \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}' = \int_{-\infty}^{\infty} A' \exp(i\bar{\alpha}x) \cos \bar{\beta}_1 y d\bar{\alpha} + \varphi_0, \quad \bar{\psi}' = \int_{-\infty}^{\infty} B' \exp(i\bar{\alpha}x) \sin \bar{\beta}_2 y d\bar{\alpha} + \psi_0$$

где  $\varphi_0, \psi_0$  есть решение одномерной задачи в предположении, что слой вырождается в плоскость ( $h = \infty$ ), даваемое формулой (1)

$$\bar{\beta}_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\beta}_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad c_1 = a', \quad c_2 = b'$$

$\omega = is$  — частота,  $s$  — параметр преобразования Лапласа. Введем в слое возмущенные перемещения  $u' = u_0 + u'$ ,  $v' = V'$ . Можно получить при малых  $y$

$$\bar{U}, \bar{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}, \bar{V} \exp(i\bar{\alpha}x) d\bar{\alpha}, \quad \bar{U} = i(\bar{\alpha}A + \bar{\beta}_2 B), \quad \bar{V} = i(\bar{\beta}_1 A - \bar{\alpha} B)$$

$$\frac{\partial_{xy}}{\rho} = -\omega^2 A + 2b^2 \bar{\alpha}^2 A + 2b^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 B$$

$$\frac{\partial_{yy}}{\rho} = (2b'^2 \bar{\alpha}^2 - \omega^2) A' - 2b'^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_1 B' + \tau_{0yy}$$

$$\frac{\partial_{xy}}{\rho} = b^2 \left( 2\bar{\alpha}^2 - \frac{\omega^2}{b^2} \right) B - 2\bar{\alpha} \bar{\beta}_1 A, \quad \frac{\partial_{xy}}{\rho'} = \nu \left( 2\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 B' - 2i\bar{\alpha} \bar{\beta}_1^2 A' - \frac{\omega^2}{b'^2} \bar{\beta}_1 B' \right)$$

$$u' = A' i\bar{\alpha} + \bar{\beta}_2 B' + u_0, \quad V' = (-A' \bar{\beta}_1 - B' i\bar{\alpha} \bar{\beta}_1) y$$

где

$$\bar{u}_0 = \frac{V_0}{2\tau a' \omega i \bar{\tau} \left( \frac{\omega}{a'} - \bar{\tau} \right)}, \quad \kappa > 0, \quad \sigma_{0xy} = (a'^2 - 2b'^2) \bar{u}_0 \bar{\tau}$$

Введем аналитические функции  $\bar{z}$  в верхней и нижней полуплоскостях

$$\Omega^+ = \bar{z}_{xy} - \bar{z}_{xy}^-, \quad U^+ = \bar{U} - \bar{U}^-$$

$$\bar{z}_{xy}^+ = \bar{z}_{xy} - \bar{z}_{xy}^-, \quad V^+ = \bar{V} - \bar{V}^-$$

Условия (1) можно записать в виде

$$(2b'^2 a'^2 - \omega^2) A' \bar{a}' - 2b'^2 i \bar{\tau} \bar{z} B' \bar{a}' - \rho' (a'^2 - 2b'^2) \bar{u}_0 \bar{a}' + \Omega^+ =$$

$$- \rho' (-\omega^2 + 2i b'^2 \bar{z}) A + 2b'^2 \bar{z} \bar{z}_1 B$$

$$i \bar{z} A' + \bar{z}_1 B' + \bar{u}_0, \quad U^+ = (\bar{\tau} A + \bar{z}_1 B) i \quad (6)$$

$$h(\bar{z}_1 A' - i B' \bar{z}_1^2) - V^+ = -i(\bar{z}_1 A - \bar{z} B)$$

$$b^2 \rho' \left[ \left( 2\bar{z}^2 - \frac{\omega^2}{b^2} \right) B - 2i \bar{z} \bar{z}_1 A \right] - b'^2 \rho' \left( 2\bar{z}^2 \bar{z}_1 B_1 - 2i \bar{z} \bar{z}_1^2 A_1 - \frac{\omega^2}{b'^2} \bar{z}_1 B_1 \right) = \sigma_{xy}^-$$

Положим  $A' = A_1' + A_2'$ ,  $B' = B_1' + B_2'$ ,  $\sigma_{xy}^- = \sigma_{0xy}^- + \sigma_{1xy}^-$

где  $A_1', B_1' = O(1)$ ,  $A_2', B_2' = O(h)$ ,  $\sigma_{0xy}^- = O(h)$ ,  $\sigma_{1xy}^- = O(h^2)$

Из (6) можно получить, что  $A$  и  $B$  имеют порядок  $h$ . Решая уравнения (6) в порядке единицы методом Винера-Хопфа, можно найти

$$\frac{\sigma_{0xy}^-}{\omega} = h a'^2 \bar{z}_1^2 \bar{u}_0, \quad U^+ = \Omega^+ = 0, \quad V^+ = 0, \quad A_1 = \frac{a'^2}{\omega^2} i \bar{\tau} \bar{u}_0, \quad B_1 = -\frac{a'^2 \bar{z}_1^2 \bar{u}_0}{\omega^2 \bar{z}_1^2}$$

Подставляя полученные значения в (5), можно заметить, что слагаемые с  $A_1, B_1$  сокращаются со слагаемыми, содержащими индекс 0. Тогда в порядке  $h$  можно получить из (6)

$$A = -\frac{\rho'}{\omega} \frac{h a'^2 \bar{z}_1^2 \bar{u}_0}{\omega^2 \bar{z}_1^2}, \quad B = -\frac{\rho'}{\omega} \frac{h a'^2 \bar{z}_1^2 \bar{u}_0}{\omega^2} \quad (7)$$

$$A_2 = \frac{b'^2}{\omega^2 h \bar{z}_1^2} \left[ \frac{i \bar{\tau}}{\rho' b'^2} \sigma_{1xy}^- + \left( 2\bar{z}^2 - \frac{\omega^2}{b'^2} \right) V^+ \right], \quad B_2 = \frac{b'^2}{h \omega^2 \bar{z}_1^2} \left( 2i \bar{\tau} V^+ - \frac{\sigma_{1xy}^-}{\rho' b'^2} \right)$$

Подставляя (7) в первое и второе уравнения (6), получим уравнение Винера-Хопфа и после исключения  $\bar{z}_{xy}$  получим уравнение

$$\frac{a'^2 V^+}{h} + \frac{\Omega^+}{\rho'} - (a'^2 - 2b'^2) i \bar{\tau} U^+ = f(\bar{z}) \quad (8)$$

$$f(\bar{z}) = \frac{h a'^2 \bar{z}_1^2 \bar{u}_0}{\omega^2 \bar{z}_1^2} \left[ b'^2 \left( \frac{\omega^2}{b'^2} - 2\bar{z}^2 - 2\bar{z} \bar{z}_1^2 \right) - \frac{\rho'}{\omega} (a'^2 - 2b'^2) (\bar{z}^2 + \bar{z}_1 \bar{z}_1^2) \right] \bar{u}_0$$

Согласно [7] можно записать представление функции  $f(z)$  в виде

$$f(z) = f^-(z) + f^+(z), \quad \text{где } f^-(z) = \frac{1}{\omega} \chi(z), \quad z = z_0$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = & -\frac{a' \rho' (a'^2 - 2b'^2) h V_0}{2\pi^2 i \rho} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{\left(\xi + \frac{1}{a'}\right) \xi^2 d\xi}{\gamma_1(\xi - z)} + \frac{b^2 a' V_0 h}{2\pi^2 i} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{\chi(\xi) \left(\frac{1}{a'} + \xi\right) d\xi}{\gamma_1(\xi - z)} \\ & + \frac{a' V_0 h b^2}{2\pi^2 i} \int_{b^{-1}}^{\infty} \frac{[\chi(\xi) + 2\gamma_1 \gamma_2] \left(\xi + \frac{1}{a'}\right) d\xi}{(\xi - z) \gamma_1} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{V_0 (a'^2 - 2b'^2) h a'}{2\pi^2 i} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi^2 - \gamma_1 \gamma_2) \left(\frac{1}{a'} + \xi\right) d\xi}{\gamma_1(\xi - z)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{z^2 - \frac{1}{a'^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{z^2 - \frac{1}{b^2}}, \quad |z| h \ll 1$$

Решение уравнения Винера—Хопфа (8) имеет вид

$$V^- = \frac{h}{a'^2} f^-(z) \quad (10)$$

Подставляя  $V^-$  в вышеуказанную систему Винера-Хопфа, получим уравнения

$$\frac{\sigma_{1xy}^-}{a'^2 h \rho' \left(\bar{z} - \frac{\omega}{a'}\right)} + \left(\frac{\omega}{a'} + \bar{z}\right) U^+ = f_1(\bar{z}) + \frac{i \bar{z} (a'^2 - 2b'^2) f^-(\bar{z})}{a'^4 \left(\frac{\omega}{a'} - \bar{z}\right)} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{h V_0}{\pi a'^2 b^2 \bar{z}} \quad (11)$$

где

$$f_1(\bar{z}) = -\frac{i \rho'}{\rho} h a'^2 \bar{\gamma}_1^2 \left(\frac{\omega}{a'} + \bar{z}\right) \left(\bar{z}^2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2\right) \frac{\bar{u}_0}{\omega^2 \bar{\gamma}_1} + \frac{\rho' h V_0}{\rho \pi a'^2 b^2 \bar{z}} \quad (12)$$

Записывая снова  $f_1(\bar{z}) = f_1^-(\bar{z}) + f_1^+(z)$  и решая уравнения Винера-Хопфа, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^- = & -\frac{\rho' h l (a'^2 - 2b'^2) f^-(\bar{z})}{a'^2 b^2} - \rho' a'^2 h \left(\frac{\omega}{a'} - \bar{z}\right) f_1^-(\bar{z}) \\ f_1^-(\bar{z}) = & \frac{\gamma_1(z)}{\omega}, \quad \gamma_1(z) = -\frac{\rho' h V_0 a'}{\rho \pi^2} \left\{ \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{\left(\frac{1}{a'} + \xi\right) \xi^2 d\xi}{\gamma_1(\xi - z)} + \right. \\ & \left. + \int_{b^{-1}}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a'} + \xi\right)^2 (\xi^2 - \gamma_1 \gamma_2)}{\xi \gamma_1(\xi - z)} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (10) — (13) в (7) и используя (5), можно получить

$$U' = \frac{1}{\omega^2} \frac{\gamma_1(z)}{1 + z}, \quad V' = \frac{1}{a^2 \omega} \gamma(z) y \quad (14)$$

Поскольку  $\frac{\partial L''}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(z) i z dz}{a'^{-1} + z}$ , применяя метод обращения интегральных преобразований [5], получим решение в форме Смирнова-Соболева

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = - \frac{2 \operatorname{Re} i \gamma_1\left(\frac{t}{x}\right)}{x\left(a'^{-1} + \frac{t}{x}\right)} \frac{t}{x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = - \frac{2}{x} \operatorname{Re} \frac{1}{a'^2} \gamma\left(\frac{t}{x}\right) \quad (15)$$

Как видно из (9) и (13), при  $z < \frac{1}{a}$  интегралы не содержат полюсов, причем  $\gamma(z)$  мнимое, а  $\gamma_1(z)$ , действительное решение (15), равно нулю. Подобным же образом можно показать равенство нулю членов в (15), соответствующих при  $z < \frac{1}{b}$  неособым интегралам. Таким образом, имеются в слое продольные и поперечные волны со скоростями  $a, b$ , которые соответствуют полуплоскостям. Асимптотика решения задачи соударения полуплоско, ограниченных упругими полуплоскостями, имеет порядок  $h$  и волны в слое имеют те же скорости, что и в полуплоскостях. В отличие от этого, при  $\mu = 0$ , то есть для жидких полуплоскостей, также как и в случае отсутствия вещества в них, можно показать, что  $A, B = 0$ .  $\beta_3 \rightarrow \infty$ , система (6) вырождается, при этом  $\frac{\partial u'}{\partial x}$  не мало и решение соответствует волнам в пластинках [3].

В случае отсутствия смешанных граничных условий  $\Omega = V^- = 0$ , и асимптотика решения примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} &= - 2 \operatorname{Re} \frac{V_0 h \left[ \frac{t^2}{x^2} - \gamma_{11}\left(\frac{t}{x}\right) \gamma_{12}\left(\frac{t}{x}\right) \right]}{\pi x \gamma_{11}\left(\frac{t}{x}\right)} \\ \frac{\partial v'}{\partial y} &= 2 \operatorname{Re} \frac{V_0 h}{\pi x \gamma_{11}\left(\frac{t}{x}\right)} \left[ \left( \frac{t^2}{x^2} - \gamma_{11}\left(\frac{t}{x}\right) \gamma_{12}\left(\frac{t}{x}\right) \right) \left( 1 - \frac{2b'^2}{a'^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a'^2} \frac{\rho}{\rho'} \left[ 1 - 2b'^2 \frac{t^2}{x^2} + 2b'^2 \gamma_{11}\left(\frac{t}{x}\right) \gamma_{12}\left(\frac{t}{x}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

Вновь следует, что при  $h \approx 0$  решение в слое мало и скорости волн

равны  $a$  и  $b$ . Для  $\Delta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}$  получается решение, содержащее слагаемые, соответствующие волнам со скоростями  $a, b$ . В то же время при  $b=0$  получается асимптотика решения, для которой  $\frac{\partial u'}{\partial x}$  немало и совпадает с полученным другим методом решением [1]. Для малых  $x$  задача двумерна и требуется решение методом рекуррентных соотношений [3, 4].

В полуплоскости  $y > h$ ,  $A = -\frac{h}{i\omega} (\bar{\sigma}_1^2 A' + i\bar{\sigma}_1^2 B')$ , тогда в порядке  $u_0$  можно получить при  $\alpha = 0$

$$A' = \frac{\sigma_{0yy} b'^2}{\rho' D} \left( \frac{\omega^2}{b'^2} - 2\alpha^2 \right), \quad B' = -\frac{2ix \bar{\sigma}_1^4}{\bar{\sigma}_1^2 \rho' D} \sigma_{0yy}$$

$$D = \frac{\omega^2}{b'^2} \left( \omega^2 - 4x^2 b'^2 + \frac{4b'^4}{a'^2} x^2 \right)$$

Вычисляя вычет при  $\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{c_0}$ , где  $c_0 = 2b' \sqrt{1 - \frac{b'^2}{a'^2}}$  есть скорость пластинчатых волн, можно получить асимптотику решения, которая совпадает с решением соударения при наличии свободных поверхностей, имеющим вид [1], [3]

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{V_0}{c_0} \alpha \left( \frac{t}{c_0} - \frac{x}{c_0} \right), \quad z' = \frac{2b'^2}{a'^2} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

где  $\alpha(x)$  — единичная функция. В жидкости из (6) можно получить

$$A = \frac{ihV_0 k'}{\pi \omega^2 \bar{\sigma}_1^2 a'^2 (1 - c_0^2 \alpha^2)}, \quad k' = \omega^2 - 2b'^2$$

Тогда из  $\frac{\partial u}{\partial x}$  можно получить, обратив формулу для интегральных преобразований [5], решение в виде

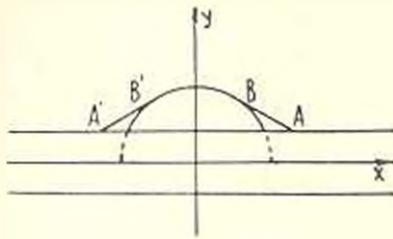
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{Re} \frac{2x^2 h V_0 k'}{\pi a'^2 (1 - c_0^2 \alpha^2) \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a'^2}}}, \quad z_1 = \frac{tx + t(y-h) \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a'^2}}}{r^2}$$

Вблизи волны  $r \approx at$ ,  $z_1 \approx \frac{x}{a^2 t}$ ,  $\bar{\sigma}_1^2 \approx \frac{y-h}{a^2 t}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x^2 h V_0 k'}{\pi a'^2 (1 - c_0^2 \alpha^2) \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a'^2}}}$$

При  $c_0 > a$  имеется плоская волна  $AB$  (фиг. 1)

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{c_0^2 - a^2}}{c_0 a}, \quad t - \alpha_0 x - \beta_0 (y - h) = 0, \quad \text{которая касается волны } r = at.$$



Фиг. 1.

Можно получить решение на волне  $AB$  в виде

$$u = \frac{h \sqrt{c_0^2 - a^2} k'}{c_0 t^2 k} z [t - \alpha_0 x - \beta_0 (y - h)]$$

Авторы благодарят А. Г. Багдосва за ценные советы.

**ԱՌՔԶԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐՔՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԱՔՀՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ  
ՄԱՐՄՈՎՅԱՆԵՐԻ ԲԱԽՄԱՆ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ**

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ՍԱԳԱՐՅԱՆ

**Ո Ւ Վ Ո Ւ Ն**

Գիտարկվում է  $2h$  բարձրություն  $k$  և  $k'$ ,  $c$  և  $c'$  առաձգական հաստատուններ ունեցող կիսաշերտերի բախման խնդիրը, որոնք սահմանափակված են  $x, y, z$  պորձակիցների ունեցող առաձգական կիսահարթություններով: Չախ կիսաշերտը շարժվում է պինդ ամրացման ուղղությամբ, իսկ այդ կիսահարթությունների միջև խառն եղբային պայմաններով խնդրի լուծումը որոշվում է Վինկեր-Հոֆի մեթոդով և ինտեգրայ ձևափոխությունների շրջմամբ: Փանված է լուծման ասիմպտոտիկան փոքր  $h$ -ի համար, ընդ որում ի տարբերություն հեղուկ կիսահարթությունների դեպքի, որոնց համար շերտում օտարավում է երկայնական սալաձև ալիքներ, առաձգական կիսահարթությունների համար շերտում կլինեն առաձգական կիսահարթություններում զտեվող ալիքների արագություններին հավասար արագությամբ ալիքներ և լուծումը համեմատական է  $h$ -ին:

**THE SOLUTION OF MIXED PROBLEM OF IMPACT OF BODIES  
BOUNDED BY ELASTIC HALF-PLANES**

A. N. MARTIROSIAN, Y. S. SAFARIAN

**S u m m a r y**

The problem of impact of two semistrips with elastic constants  $k, k', c, c'$  and depth  $2h$  bounded by elastic half-planes having elastic coeff-

cients  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  is considered. The left semistrip moves along a rigid wall and right-between half-planes. The solution of the mixed boundary problem is determined by the Wiener-Hopf method and by inversion of integral transformation. The asymptotics of the solution for small  $h$  is obtained. In contrast to the case of fluid half-planes, for which the longitudinal plane waves propagate in the strip. In the case of elastic half-planes waves will occur in the strip with the speed of waves in elastic half-planes and the solution proportional to  $h$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малков М. А. Асимптотика двумерной задачи об ударе соударении стержней — ПММ, 1958, т. 32, вып. 3.
2. Малков М. А. Двумерная задача об ударе соударении стержней — Докл. АН СССР, 1965, т. 148, вып. 4.
3. Бигдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Задача соударения стержней при смешанных условиях — ДАН СССР, 1976, т. 223, № 3.
4. Бигдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А. Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами — Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1978, 75—84.
5. Бигдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости — Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, 13—23.
6. Слепян Л. И. Нестационарные волны. М.: Судпромгиз, 1962.
7. Нобл В. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962.
8. Сигомонян А. Я., Поручиков В. В. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1970.
9. Бигдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы. — МТТ, 1976, № 1.

Армянский педагогический институт  
им. Х. Абовяна

Получено в редакцию  
13.IX 1983

УДК 539.3 : 678.067

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ  
УПРУГОЙ ТРУБЕ

ДОРОГИНИН В. В.

В настоящей работе для решения задачи о плоской деформации периодически неоднородной по толщине цилиндрической ортогональной трубы применен асимптотический метод осреднений [1, 2], сводящий неоднородную задачу к последовательности задач для однородной анизотропной трубы с эффективными модулями упругости. В отличие от теории эффективного модуля [3], уже нулевое приближение по методу осреднений учитывает локальные напряжения, обусловленные неоднородностью материала. В работе [4] исследована зависимость погрешности нескольких асимптотических приближений от числа слоев и степени неоднородности материала для трубы, нагруженной равномерным внутренним давлением. Ниже аналогичное исследование в нулевом приближении проведено для случая неравномерной нагрузки различной степени локализации.

Малым параметром  $\epsilon$  в данной задаче является отношение безразмерной толщины трубы к числу периодов структуры, укладываемых по толщине трубы. Ограничившись в асимптотических разложениях для напряжений  $\sigma_{ij}$  слагаемыми нулевого порядка по  $\epsilon$ , получим нулевое приближение [4]

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(e)}, \quad i, j = 1, 2$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = \frac{C_{1122} \sigma_{11}^{(e)}}{C_{1111}} + \frac{(D_{1111} \sigma_{22}^{(e)} - D_{1122} \sigma_{11}^{(e)}) (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2)}{C_{1111} (D_{1111} D_{2222} - D_{1122}^2)} \quad (1)$$

Здесь индексам 1, 2 соответствуют полярные координаты  $\alpha_1 = r$ ,  $\alpha_2 = \theta$ , индекс (э) обозначает решение по теории эффективного модуля,  $C_{ijkl}$  — модули упругости,  $D_{ijkl}$  — эффективные модули упругости [2]. В случае изотропных слоев с модулем сдвига  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  соотношение (1) упрощается

$$\sigma_{22}^{(0)} = \frac{\mu}{(1-\nu) \langle \frac{\mu}{1-\nu} \rangle} \left( \sigma_{22}^{(e)} - \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \sigma_{11}^{(e)} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11}^{(e)} \quad (2)$$

где через  $\langle \varphi \rangle$  обозначено какое-либо осреднение периодической функции  $\varphi$  по периоду.

Зависимость погрешности приближенных решений от характера внешней нагрузки исследуем на следующей задаче. Труба с внутрен-

ним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , состоящая из  $2M$  периодически чередующихся однородных изотропных склеенных между собой слоев, находится под действием внешней нормальной ступенчатой нагрузки

$$\tau_{\theta}|_{r=b} = \begin{cases} p, & \text{если } \beta < 0 \leq \pi - \beta, \quad \pi + \beta \leq \theta \leq 2\pi - \beta \\ -\left(\frac{\pi}{2\beta} - 1\right), & \text{если } -\beta < \theta < \beta, \quad \pi - \beta < \theta < \pi + \beta \end{cases} \quad (3)$$

Угол  $\beta$ , характеризующий степень неравномерности нагрузки, варьируется от  $\pi/4$  до 0.

Решение подобной задачи для однородной ортотропной трубы в рядах Фурье дано в работе [5]. В частности, формулы для кольцевых напряжений имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 c_{ki} (z_{ki} - 1) r^{z_{ki}} \cos k\theta \quad (4)$$

Здесь  $c_{ki}$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий,  $z_{ki}$  — корни характеристического уравнения

$$z^4 - 2z^3 + (1 + \gamma)z^2 - 2z + 1 = 0, \quad \gamma = 2 \left( \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \right); \quad \delta = \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{1-2\nu}{\mu(1-\nu)} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle$$

Поскольку  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  и

$$\delta^2 - 4\delta = 4 \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{\nu}{(1-\nu)} \left( \frac{1}{\mu} - \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle \right) \right\rangle \geq 0$$

то корни характеристического уравнения действительные. Кратные корни могут быть лишь при  $k=1$  или  $k^2 + (\delta-1)^2 = 0$ . Оба эти случая в рассматриваемой задаче невозможны, так как в разложении нагрузки (3) в ряд Фурье отсутствуют слагаемые с  $k=0$  или  $k=1$ .

$$\tau_{\theta\theta}|_{r=b} = -2 \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{\sin k\beta \cos k\theta}{k\beta}$$

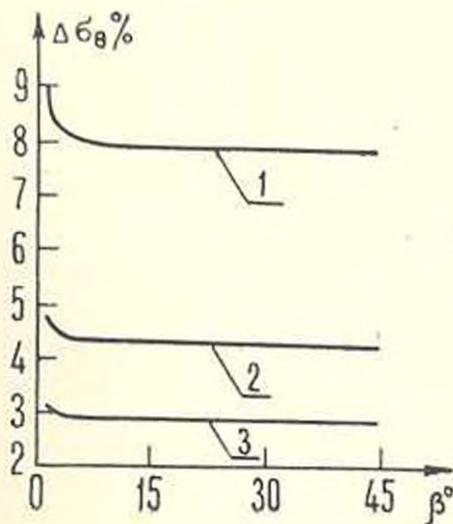
При вычислениях в этом ряду удерживалось 50 членов.

Приближенные решения сравнены с точным, полученным методом начальных параметров [6]. Погрешность оценивалась по норме

$$\Delta \tau_{\theta} = \max_{r,b} \left| \tau_{\theta}^{\text{теор}}(r, b) - \tau_{\theta}^{\text{прибл}}(r, b) \right| = \max_{r,b} \left| \tau_{\theta}^{\text{теор}}(r, b) \right|$$

Для трубы относительной толщины  $b/a = 1.1$ , состоящей из стальных и свинцовых слоев ( $\mu_1/\mu_2 = 15$ ;  $\nu_1 = 0.3$ ;  $\nu_2 = 0.46$ ), погрешность решения по теории эффективного модуля оказалась примерно на порядок больше погрешности нулевого приближения по методу осреднений, составляющей в широком диапазоне изменения параметров  $\beta$ ,  $M$  3–9%. Однако, как видно из фигуры, при уменьшении угла  $\beta$  настолько, что участок действия локальной нагрузки сужается до величины, равной 2–3 периодам структуры, погрешность резко возрастает.

Таким образом, нулевое приближение по методу осреднений весьма эффективно для всех нагрузок, кроме сосредоточенных, и тем эффективнее, чем больше слоев в трубе. В случае сосредоточенных нагрузок для применения метода осреднений нужно предварительно выделить особенности решения.



Փյս. 1

Այսր Բլաղոարեն քրոֆեսսորս Բ. Է. ՈսԲոդրե չա քլոդոտվորնե օսսջոճոննա րադոյա.

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ ԸԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՐԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ. Վ. ԴՈՐՈԳԻՆԻՆ

Ֆ ի Ն Պ Ֆ Ո Ւ Մ

Ըստ շառավղի պարբերաբար անհամասեռ առաձգական խողովակի հարթ դեֆորմացիոն խնդիրը լուծված է միջինացված ասիմպտոտիկ մեթոդով և ճիշտ, սկզբնական պարամետրերի մեթոդով Ցույց է տրված, որ միջինացված մեթոդի զրոյական մոտափոխությունը տալիս է լավ ճշտության խնդրի ուժային և երկրաչափական պարամետրերի փոփոխման լայն դիապազոնում:

ON THE DETERMINATION OF STRESSES IN A MULTILAYER ELASTIC TUBE

V. V. DOROGININ

S u m m a r y

The plane strain problem has been solved for periodically inhomogeneous along the radius elastic tube both with the asymptotic method

of homogenization and exactly with the initial parameter method. It has been shown that zero-order approximation render high accuracy in a wide range of change of force and geometric parameters of the problem.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бихвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными в быстро осциллирующими коэффициентами.—ДАН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516—519.
2. Победра Б. Е., Горбачев В. И. О статических задачах упругих композитов.—Вестник МГУ, математика, механика, 1977, № 5, с. 101—110.
3. Механика композиционных материалов.—М.: Мир, 1978. 556 с.
4. Горбачев В. И. Об упругом равновесии цилиндрической неоднородной по толщине трубы под действием поверхностных нагрузок и перемещений.—Проблемы прочности, 1979, № 5, с. 79—83.
5. Дорожкин В. В. О плоской деформации бесконечной цилиндрической ортотропной трубы.—Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1980, т. 33, № 4, с. 77—79.
6. Швалков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред.—Киев—Одесса: Вища школа, 1977. 216 с.

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Поступила в редакцию  
3.11.1983

УДК 533.6

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ  
 ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

ДАНОЯН Э. И., СИМОНЯН А. М.

Задача распространения магнитоупругих волн Рэлея рассмотрена в работах [1—4]. Волны Рэлея для случая однокомпонентного магнитного поля рассмотрены в [1], где предполагается, что внешнее магнитное поле проникает в вакуум. Для двухкомпонентного магнитного поля волны Рэлея рассмотрены в работах [2, 4]. В [2] предполагается, что внешнее магнитное поле не может проникать в вакуум, вследствие чего на границе упругой среды возникает магнитное давление, приводящее к возникновению начальных напряжений. Окончательные уравнения и граничные условия работы [2], как отмечается и [4], получены в некорректном виде. В работе [4] рассматриваются двухпорционные поверхностные волны в случае проникновения внешнего поля в вакуум, причем в граничных условиях не учитываются члены, связанные с напряжениями Максвелла в вакууме. В работе [3] исследуется поведение волн Рэлея в продольном магнитном поле с учетом магнитного давления.

В настоящей работе, учитывая влияние начальных напряжений, обусловленных действием магнитного давления, исследуется существование поверхностных волн Рэлея в идеально проводящем упругом полупространстве при наличии поперечного магнитного поля.

Показывается, что для любой упругой среды возможна только одна скорость распространения магнитоупругих волн Рэлея. Найдена критическая величина напряженности магнитного поля, зависящая от коэффициента Пуассона, превышение которого приводит к исчезновению поверхностных волн.

§ 1. Рассматривается упругая изотропная идеально проводящая среда, ограниченная плоскостью  $Ox_1x_3$ . Ось  $Ox_2$  направлена по внешней нормали к границе среды. Предполагается, что среда находится во внешнем магнитном поле, вектор напряженности которого определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \{0, 0, H_{03} = \text{const}\} \quad \text{при } x_2 \leq 0 \\ \vec{H}_0 &= 0 \quad \text{при } x_2 > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что на поверхности упругой среды  $x_2 = 0$  задан-

ное магнитное поле удовлетворяет следующим граничным условиям [1—5]:

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{H}_0 \times \vec{n} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_0^{(s)} \quad (1.2)$$

где  $\vec{n} = \vec{i}_2$  — единичный вектор внешней нормали к границе среды,  $\vec{J}_0^{(s)}$  — вектор плотности поверхностного тока,  $c$  — скорость света в вакууме.

Согласно (1.1), (1.2), плотность поверхностного тока определяется формулой:

$$\vec{J}_0^{(s)} = \frac{c}{4\pi} H_{0z} \vec{i}_1 \quad (1.3)$$

где  $\vec{i}_k$  — единичные векторы выбранной системы координат.

На границе среды магнитное поле, благодаря поверхностному току (1.3), создает давление, которое направлено вдоль внешней нормали к границе среды и определяется следующим выражением [1—5]:

$$P_0 = \frac{\nu H_0^2}{8\pi} \quad (1.4)$$

где  $\nu$  — магнитная проницаемость упругой среды.

Согласно (1.4) граничные условия для упругих напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{22}^0 = P_0, \quad \sigma_{21}^0 = 0, \quad \sigma_{23}^0 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (1.5)$$

Откуда следует, что под действием магнитного давления упругое полупространство находится в следующем начальном напряженном состоянии:

$$\sigma_{22}^0 = P_0, \quad \sigma_{11}^0 = \sigma_{33}^0 = \frac{\nu}{1-\nu} P_0, \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{23}^0 = \sigma_{13}^0 = 0 \quad (1.6)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона среды.

§ 2 Для описания распространения поверхностной плоской магнитоупругой волны вдоль границы полупространства  $x_2 = 0$  будем исходить из линеаризованных уравнений теории магнитоупругости идеально проводящей среды при наличии начального напряженного состояния. Представляя компоненты возмущенного электромагнитного поля, тензора упругих напряжений и вектор упругого перемещения в виде

$$E_1, H_{0z} + h_1, \quad u_{0z} + u_1, \quad \sigma_{12}^0 + \sigma_{12} \quad (2.1)$$

и предполагая возмущения малыми, основные уравнения магнитоупругости после линеаризации можно записать в виде [6—10]:

уравнения движения среды —

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \tau_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\nu}{4\pi} \{ \text{rot rot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \} \times \vec{H}_0 \}_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} (\lambda_{12} \lambda_{12} - 2G_{12} \lambda_{12}) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \right) \quad (2.3)$$

векторы индуцированного электромагнитного поля в среде—

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{c} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right), \quad \vec{h} = \text{rot} (\vec{u} \times \vec{H}_0) \quad (2.4)$$

уравнения Максвелла для вакуума—

$$\Delta \vec{E}^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^*}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{h}^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

Здесь индексом 0 отмечены невозмущенные значения рассматриваемых величин, а без индекса—их значения в волне, знак \* относится к вакууму,  $\rho$ —плотность среды,  $\epsilon_0$  и  $G$ —постоянные Ляме,  $\delta_{ik}$ —символ Кронекера.

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что поверхностная волна распространяется в направлении оси  $Ox_1$ , то есть будем искать решения уравнений (2.2), (2.5) в виде

$$u_i = u_i(x_1, x_2, t), \quad u_3 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{E}^* = \vec{E}^*(x_1, x_2, t), \quad \vec{h}^* = \vec{h}^*(x_1, x_2, t) \quad (2.7)$$

В силу (2.6), (2.7) из (2.2) — (2.4) получаем следующие уравнения, описывающие распространение поверхностных волн:

$$a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + d_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

$$e_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + b_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

и соотношения, определяющие значения индуцированного магнитного поля в среде

$$h_1 = h_2 = 0, \quad h_3 = -H_{03} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (2.9)$$

В (2.8) приняты следующие обозначения:

$$a_1 = a_0 + (2 + \gamma)x, \quad b_1 = a_0 + 3x, \quad c_1 = c_0 + 2x, \quad c_2 = a_0 - d_0, \quad d_1 = d_0 + x, \quad e_1 = d_0 + x \\ a_0 = \frac{\epsilon_0 + 2G}{\rho}, \quad d_0 = \frac{G}{\rho}, \quad x = \frac{\gamma}{1 - \gamma} = 1 - 2\gamma, \quad \gamma = \frac{d_0}{a_0}, \quad x = \frac{p_0}{\epsilon_0}, \quad p_0 = \frac{\rho H_0^2}{8} \quad (2.10)$$

$$\text{где } 0 < \gamma < 0,5, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \gamma < 0,5 \quad (2.11)$$

Согласно [1—3, 8], на поверхности упругого полупространства должны выполняться следующие линеаризованные граничные условия:

$$u_i \left( z_{,i} + z_{,i}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_{i,j}} \right) = p_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

где  $p_i$ —возмущения компонент поверхностной силы электромагнитного

происхождения, определяемые, в силу (1.1), (2.9), следующим образом [9]:

$$p_i = \lambda_2 \vec{H}_0 \cdot \vec{h} - \gamma_0^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \quad (2.13)$$

Здесь  $\gamma_0^0$  — компоненты тензора напряжений Максвелла в среде в начальном состоянии [3].

Заметим, что в (2.13) члены, связанные с предельными значениями возмущенного электромагнитного поля в вакууме, отброшены как величины более высокого порядка. Это упрощение является следствием отсутствия внешнего магнитного поля в вакууме. Таким образом, при вышеприведенных допущениях внутренняя задача магнитоупругости полностью отделяется от внешней задачи.

Принимая во внимание соотношения (1.5), (1.6), (2.6), (2.9), (2.13), граничные условия (2.12) на поверхности среды  $x_2 = 0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{-\partial u_2}{x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= 0 \\ b_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + (c - d_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $b_2 = a_2 + 2a_1$ .

§ 3. Будем искать решение уравнений (2.8) в виде

$$u_s = A_s \exp(\beta x_2) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \quad (s=1, 2) \quad (3.1)$$

соответствующем распространению вдоль положительной оси  $Ox_1$  синусоидальной поверхностной волны с частотой  $\omega$ , волновым числом  $k$ , фазовой скоростью  $V_p = \omega/k$  и амплитудой, зависящей от координаты  $x_2$ . Здесь  $A_s$  — некоторые постоянные,  $\beta$  — корень характеристического уравнения системы (2.8).

Решение (3.1) соответствует волне, амплитуда которой убывает с ростом расстояния от границы среды, если имеет место условие

$$\operatorname{Re} \beta > 0 \quad (3.2)$$

где величина  $\operatorname{Re} \beta$  определяет скорость затухания волны.

Подставляя (3.1) в уравнения (2.8), получим

$$K_j(\beta) A_s = 0 \quad (j, s=1, 2) \quad (3.3)$$

где

$$K_{11} = d_2 \beta^2 - a_2 k^2 + \omega^2, \quad K_{12} = K_{21} = -i c_1 \beta^2, \quad K_{22} = b_1 \beta^2 - e_2 k^2 + \omega^2 \quad (3.4)$$

На условия совместности уравнений (3.3) получаем следующее характеристическое уравнение для системы (2.8):

$$b_1 d_2 \beta^4 - p_3(\omega, k) \beta^2 + r_3(\omega, k) = 0 \quad (3.5)$$

где

$$p_3 = (b_2 + d_2) \omega^2 - l_2 k^2, \quad l_2 = d_2 e_2 + a_2 b_1 - c_1^2, \quad r_3 = (a_2 k^2 - \omega^2)(e_2 k^2 - \omega^2) \quad (3.6)$$

Отсюда получаем характеристические корни

$$\beta_j = \sqrt{p_j(\omega, k) + (-1)^j \sqrt{q_j(\omega, k)}} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1^2 - 4b_3 d_3 c_3 - D_3 k^4 - 2M_3 k^2 \omega^2 + B_3^2 \omega^4 \\ D_3 &= D_3^* - 4\omega_3 d_3 c_3, \quad M_3 = (b_3 + d_3)N_3 - (a_3 d_3 - b_3 c_3)B_3 \\ A_3 &= A_3 B_3 - c_3, \quad A_3 = a_3 - e_3, \quad B_3 = b_3 - d_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Под (3.7) понимаются те корни, которые удовлетворяют условию (3.2).

Следовательно, общее решение системы (2.8), соответствующее корням (3.7), получим в виде

$$u_s = A_s^{(j)} \exp(\beta_j x_s) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \quad (s, j = 1, 2) \quad (3.9)$$

причем постоянные  $A_s^{(j)}$  ( $s, j = 1, 2$ ), согласно (3.3), удовлетворяют соотношениям

$$A_{1s}(\beta_j) A_s^{(j)} = 0, \quad K_{1s}(\beta_j) A_s^{(j)} = 0, \quad (s = 1, 2) \quad (3.10)$$

Подставляя решение (3.9) в граничные условия (2.14), получим

$$L_{1j}(\beta_j) A_s^{(j)} + L_{2j}(\beta_j) A_s^{(j)} = 0 \quad (s, j = 1, 2) \quad (3.11)$$

где приняты следующие обозначения:

$$L_{11} = \beta, \quad L_{12} = ik, \quad L_{21} = ik(c_3 - d_3), \quad L_{22} = d_3 \beta \quad (3.12)$$

Условие совместности уравнений (3.10), (3.11), определяющее фазовую скорость распространения поверхностной волны, можно представить в виде

$$\Delta = k\omega^3 \frac{c_3 \sqrt{a_3}}{b_3 \sqrt{d_3}} i_1^0(\theta) [i_1(\theta) - i_2(\theta)] R_3(\theta) = 0 \quad (3.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta &= k\omega, \quad \beta = -i\omega, \quad i_1^0(\theta) = \sqrt{\frac{1}{a_3} - \theta^2} \\ i_2^0(\theta) &= \sqrt{\frac{1}{c_3} - \theta^2}, \quad i_3(\theta) = \sqrt{\frac{p_3(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_3(\theta)}}{2b_3 d_3}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$R_3(\theta) = \sqrt{a_3 d_3} g_1(\theta) i_1^0(\theta) + \sqrt{b_3 c_3} g_2(\theta) i_2^0(\theta)$$

$$p_3(\theta) = b_3 + d_3 - \theta^2, \quad q_3(\theta) = D_3 \theta^4 - 2M_3 \theta^2 + B_3^2$$

$$g_1(\theta) = -\bar{d}_3 + [\bar{b}_3(e_3 - c_3) + b_3(c_3 - d_3)] \theta^2$$

$$g_2(\theta) = -\bar{b}_3 + [\bar{b}_3 c_3 + (d_3 - c_3)(c_3 - d_3)] \theta^2$$

Рассмотрим при каких значениях  $\theta$ , обращающих в нуль определитель  $\Delta$ , существуют волны Рэлея.

Из (3.13) видно, что этот вопрос сводится к исследованию нулей функций  $\lambda_1^0(\theta)$ ,  $\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)$  и  $R_3(\theta)$  при выполнении условия  $\text{Im} \lambda_k(\theta) > 0$ . Аналогично [11] можно показать, что волны Рэлея, соответствующие нулям функций  $\lambda_1^0(\theta)$  и  $\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)$ , не существуют.

Таким образом, определение скорости поверхностной волны Рэлея сводится к нахождению корней  $\theta_R$  уравнения Рэлея  $R_3(\theta) = 0$ , причем таких, которые удовлетворяют условию

$$\text{Im} \lambda_k(\theta_R) > 0 \quad (3.15)$$

§ 4. Так как функции  $\lambda_1(\theta)$ ,  $\lambda_2(\theta)$ ,  $\lambda_1^0(\theta)$  и  $\lambda_2^0(\theta)$ , входящие в решения (3.9) и в выражение функции Рэлея  $R_3(\theta)$ , многозначны, то следует соответствующим образом выбрать их однозначные ветви. Рассматривая вышеуказанные функции на всей комплексной плоскости  $\theta$ , мы будем фиксировать их значения условием, чтобы они были положительными при  $\theta = \theta_0$ , где  $\theta_0$  — достаточно малая положительная величина [11, 12].

Очевидно, что функция  $\lambda_k^0(\theta)$  однозначна на комплексной плоскости  $\theta$  с разрезом вдоль вещественной оси

$$-\bar{\theta}_k < \theta < \bar{\theta}_k \quad (k=1, 2) \quad (4.1)$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{1}{\sqrt{c_2}} \quad (4.2)$$

Далее, внутренний радикал, входящий в выражения функций  $\lambda_k(\theta)$ , имеет четыре точки разветвления, определяемые выражениями

$$\theta = \pm \theta_k^0, \quad \theta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{D_3}} \quad (4.3)$$

Следовательно, все четыре корня  $\pm \theta_k^0$  могут быть или мнимыми, или вещественными в зависимости от знака величины  $D_3$  ( $M_3 < 0$ ). В соответствии с этим внутренний радикал выражений  $\lambda_k(\theta)$  будет однозначной функцией на плоскости  $\theta$  с разрезами, соединяющими точки  $\pm \theta_k^0$  между собой через бесконечно удаленную точку.

Из выражения  $\lambda_k(\theta)$  (3.14) следует, что существование и количество точек разветвления функций  $\lambda_k(\theta)$  зависит от знаков величин

$$A_3 = a_2 - c_2 > 0, \quad K_3 = A_3 b_3 - c_2^2 > 0, \quad S_3 = A_3 d_3 + c_2^2 > 0 \quad (4.4)$$

причем можно показать [12, 13], что точками разветвления для внешних радикалов  $\lambda_k(\theta)$  будут точки  $\pm \bar{\theta}_1$  при  $k=1$  и  $\pm \bar{\theta}_2$  при  $k=2$ .

Для  $g_1(\theta)$  и  $g_2(\theta)$  имеем

$$g_k(\theta) \leq 0 \quad \text{при} \quad \theta \leq \theta_k^0 \quad (k=1, 2) \quad (4.5)$$

где

$$\theta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a_0 + 2x}{2(x-1)x^2 + [a_0(x-1) - 2a_0]}}}$$

$$b_1^* = \sqrt{\frac{a_0 + 2x}{2(x+1)^2 + [a_0(x+1) + 6d_0]x + 4d_0(a_0 - d_0)}} \quad (4.6)$$

Сравнивая  $b_1^*$  с параметрами  $\bar{b}_k$  в зависимости от  $\gamma$  и  $x$ , получим

$$0 < \bar{b}_1 < b_1^* < \bar{b}_2 < b_1^* < \infty \quad \text{при} \quad 0 < x < x_*, \\ 0 < \bar{b}_1 < b_1^* < b_1^* \leq \bar{b}_2 < \infty \quad \text{при} \quad x_* \leq x < \infty \quad (4.7)$$

где

$$x_*(\gamma) = a_0 \frac{-(1-4\gamma) \pm \sqrt{1+16\gamma^2}}{4}$$

Из выражения  $i_1^*(b)$  и  $g_1(b)$  следует, что в промежутке  $0 < b^2 < \bar{b}_1$ , согласно (4.1) и (4.5), функция  $R_3(b)$  положительна. В промежутке  $\bar{b}_1 < b^2 < \bar{b}_2$  функция  $R_3(b)$  становится комплексной и, очевидно, не обращается в нуль. В промежутке  $\bar{b}_2 < b^2 < \infty$   $R_3(b) = -i\bar{R}(b)$ , а в промежутке  $-\infty < 0 < -\bar{b}_2$   $R_3(b) = i\bar{R}_3(b)$ , где

$$R_3(b) = \sqrt{a_3 d_3} g_1(b) \sqrt{b^2 - \bar{b}_1} + \sqrt{b_3 e_3} g_2(b) \sqrt{b^2 - \bar{b}_2},$$

причем в этом выражении радикалы считаются арифметическими.

На основании вышеприведенных результатов приходим к следующему заключению:

а) уравнение Рэлея  $R_3(b) = 0$  для каждого  $\gamma$  и  $x$  либо имеет один корень, удовлетворяющий условию (3.15), либо не имеет корней, удовлетворяющих этому условию, то есть в любой упругой среде в зависимости от величины напряженности внешнего магнитного поля либо распространяется поверхностная волна с единственной скоростью, либо такой волны не существует;

б) скорость распространения поверхностной волны зависит от параметров  $\gamma$  и  $x$ , причем для каждого  $\gamma$  с увеличением магнитного поля скорость распространения увеличивается, оставаясь меньше, чем скорость медленных магнитоупругих волн;

в) скорость поверхностных магнитоупругих волн не зависит от частоты колебаний и поэтому эти волны, как и упругие поверхностные волны, распространяются без дисперсии;

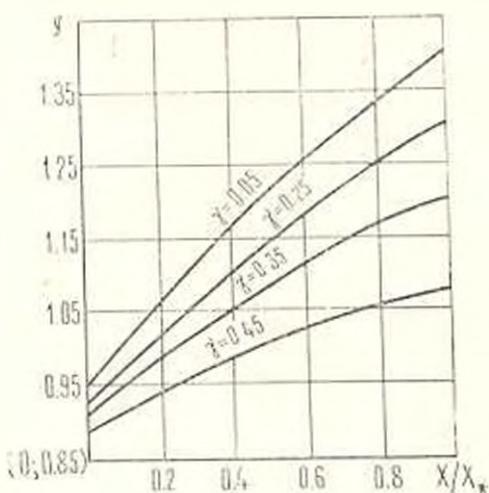
г) для любой среды (для любого  $\gamma$ ) существует такое критическое значение внешнего магнитного поля  $x_*(\gamma)$ , превышение которого приводит к исчезновению поверхностных волн.

Легко показать, что глубина проникновения волны Рэлея  $h^*$  (то есть глубина, на которой амплитуда волны падает в  $1/e$  раз), связанной с медленными возмущениями, определяется выражением  $h^* = 1/\beta_2(\theta_R)$ .

С увеличением величины напряженности внешнего магнитного поля (то есть с увеличением параметра  $x$ )  $\beta_2(\theta_R)$  убывает, стремясь к нулю при  $x \rightarrow x_*$ , или, что то же самое, при  $x \rightarrow x_* h^*$ , увеличиваясь, стремится к бесконечности. Это значит, что при увеличении величины внешнего магнитного поля глубина проникновения волны Рэлея увеличивается.

ется и в пределе, когда поле достигает своего критического значения, глубина проникновения стремится к бесконечности, а волны Рэлея превращаются в объемные волны.

На основе численного анализа приведены таблицы и графики зависимости скорости волны Рэлея от величины напряженности магнитного поля при различных коэффициентах Пуассона. Приняты следующие обозначения:  $X = \kappa/d_0$ ;  $X_* = \kappa_*/d_0$ ;  $Y = V_R/V\bar{d}_0$ .



Фиг. 1

Таблица 1

$X/X_*$	0.05	0.25	0.35	0.45
0.0	0.95	0.93	0.92	0.90
0.1	1.00	0.97	0.94	0.91
0.2	1.05	0.99	0.96	0.92
0.3	1.10	1.03	0.99	0.94
0.4	1.15	1.06	1.00	0.96
0.5	1.19	1.1	1.03	0.97
0.6	1.23	1.11	1.05	0.98
0.7	1.27	1.14	1.07	0.99
0.8	1.31	1.17	1.10	1.00
0.9	1.34	1.19	1.11	1.02
1.0	1.38	1.22	1.13	1.03
1.1	1.41	1.24	1.15	1.04
1.2	—	1.26	1.16	1.05
1.3	—	1.28	1.18	1.06
1.4	—	1.30	1.19	1.08
1.5	—	—	1.20	1.10
$X_*$	1.41	1.31	1.21	1.10

Легко показать, что при  $\kappa=0$ , то есть при отсутствии магнитного поля уравнение Рэлея  $R_3(\beta)=0$  превращается в уравнение, которое, как показано в [11], равносильно уравнению Рэлея для изотропной среды. Как видно из (1.7), поведение корней уравнения Рэлея изучено также при  $\kappa=0$ . Этот факт отражен на фиг. 1.

В конце заметим, что имеет смысл отдельно исследовать волны Рэлея при двухкомпонентном магнитном поле с учетом начального магнитного давления.

Авторы благодарят профессора Багдасаряна Г. Е. за постановку задачи и обсуждение результатов.

ՌԵԴԱԿՏՈՐՆԵՐՆԵՐԻ ԿՈՄԻՏԵՍԻ ՆԱԿԱՐԱԿՆԵՐԸ  
 ԱՏՆԱԿԱՆ ԻՌԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱՌՈՒՅՈՒԹՅԱՆԲ

Զ. Ն. ԳԱՆՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՍԻՐՈՅԱՆ

Ս. Վ. Փ Ո Փ Ո Ս

Աշխատանքում հաշիի առնելով մադիսական դաշտի անձամասեղության պայմանավորված սկզբնական լարումների ազդեցությունը, ուսումնասիրվում է Ռեյլի մակերևութային ալիքների դաշտային իդեալական-հաղորդիչ

առաձգական կիսատարածությունում լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր առաձգական միջավայրի համար հնարավոր է մակերևութային ալիքի տարածման միայն մեկ արագություն, ընդ որում մագնիսական դաշտի շարժման մեծացմանը զուգընթաց, այդ արագությունը մեծանում է, մնալով փոքր ծավալային դանդաղ մագնիսա-առաձգական ալիքի արագությունից: Գտնվում է Պուասսոնի դորժակցից կախված մագնիսական դաշտի շարժման կրիտիկական արժեքը, որի գերազանցումը բերում է կեղծ մակերևութային ալիքի վերացմանը: Մի րանի նյութերի համար թվապես ուսումնասիրված է մակերևութային ալիքի արագության կախվածությունը արտաքին մագնիսական դաշտի արժեքից:

## THE SURFACE MAGNETOELASTIC RAYLEIGH WAVES IN THE TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

Z. N. DANOVAN, A. M. SIMONIAN

### S u m m a r y

Taking into account the effect of initial stresses stipulated by inhomogeneity of the magnetic field, the existence of Rayleigh surface waves has been investigated in the presence of a perfectly conducting elastic semi-space in the transversal magnetic field. It has been shown that for any elastic medium there exists only a single propagation velocity for the surface magnetic-elastic wave. The magnetic field critical value which depends on the Poisson ratio has been found, beyond which the surface wave vanishes.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Katski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of a perfect conductor. — Proc. Vibration Probl, 1960, № 5, p. 63-80.
2. Долбин Н. И. Распространение упругих поверхностных волн в полупространстве, находящемся в магнитном поле. — ПМТФ, 1963, № 1, с. 84-87.
3. Багдасарян Г. Е., Данолян Э. Н. Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея. — Механика, изд. ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 31-37.
4. Викторова И. А. Упругие волны в твердом полупространстве с магнитным полем. — ДАН СССР, 1975, т. 221, № 5, с. 1069-1072.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.—Л.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
6. Yu C. P., Tang S. Magnetoelastic waves in initially stressed conductors. — ZAMP, 1959, № 6, p. 766-775.
7. Малорд Ф. Г. К теории распространения магнитоупругих волн в предварительно деформированных проводящих телах. ПМ, 1977, т. 13, № 7, с. 113-116.
8. Новожилов В. В. Теория упругости. М.: Строиниздат, 1958. 370 с.

9. *Амбарцумян С. А., Бигдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластины. М.: Наука, 1977. 272 с.
10. *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитоупругих средах. Киев: Наукова думка, 1975. 164 с.
11. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, № 17, с. 28—71.
12. *Даноян Э. Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих волн от точечного источника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, с. 20—33.
13. *Даноян Э. Н.* Исследование распространения магнитоупругих волн в изотропных и анизотропных средах. Кандидатская диссертация, 1982. 183 с.

Институт механики АН Армянской ССР  
Институт математических машин  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
31.III 1983

УДК 539.113

ИЗГИБ СЛЕГКА ИЗОГНУТОГО ОДНОРОДНОГО  
 АНИЗОТРОПНОГО БРУСА

МИНАСЯН Р. С.

В статье [1] П. М. Риз исследовал напряженное состояние слегка изогнутого однородного изотропного бруса при различных видах деформаций. В настоящей статье решается задача изгиба такого же бруса в плоскости, перпендикулярной плоскости кривизны оси бруса, из анизотропного материала\*.

1. *Постановка задачи.* Положим брус из анизотропного материала с одной плоскостью упругой симметрии (13 упругих постоянных), ось которого — плоская кривая второго порядка, отнесен к прямоугольной, прямолинейной системе координат  $xOy$  с началом в центре тяжести нижнего (закрепленного) основания. Оси  $Ox$  и  $Oy$  — главные, центральные. Брус ограничен двумя основаниями  $z=0$  и  $z=l$  и боковой поверхностью [1]

$$f\left(x + k \frac{z^2}{2}, y\right) = 0 \quad (1.1)$$

Упругие постоянные бруса обозначим через  $E, A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), коэффициенты Пуассона —  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 4$ ).

Объемные, а также поверхностные силы на боковой поверхности отсутствуют, а все силы, приложенные к верхнему основанию, в зависимости от рассматриваемой задачи, приводятся или к паре сил в плоскости  $yOz$  или к силе, параллельной оси  $Oy$ .

Задачу решаем в линейной постановке, полагаем, что компоненты деформаций с достаточной точностью определяются линейными членами, напряжения не превосходят предел пропорциональности и определяются известными формулами [2], [5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \sum_j A_{ij} e_{ij} + A_{i4} e_{12}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 4; \quad \varepsilon_{34} = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{3j} &= A_{34} e_{2j} + A_{44} e_{1j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 4 + i, \quad j = 3 - i \end{aligned} \quad (1.2)$$

причем

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

где  $u_i$  — смещения:  $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

\* П. М. Риз подобную задачу не рассматривал.

Обратные формулы представятся так:

$$e_{ii} = E^{-1} \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad e_{11} = e_{22}$$

$$e_{33} = \gamma_{31}^{-1} (\tau_{31} - \gamma_{11} \tau_{31}), \quad i = 1, 2, \quad \mu_{31} = A_{31} - \gamma_{11} A_{31}, \quad \mu_{31} \gamma_{12} = \mu_{32} \gamma_{11} \quad (1.4)$$

$$\mu_{31} = A_{31} - \gamma_{11} A_{31}, \quad \alpha = 4 - i, \quad j = 3 - i$$

В формулах (1.4), как и в нижеприведенных (1.5), с одинаковыми индексами следует приписывать знак плюс, а с различными — минус.

Между  $A_{ij}$ ,  $E$  и  $\sigma_{ij}$  имеют место зависимости

$$\sum_j A_{ij} \sigma_{ij} = E, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_j A_{2j} \sigma_{2j} = 0, \quad j = 1, 3, 4$$

$$\sum_j A_{ij} \sigma_{jj} = 0, \quad j = 2, 3, 4, \quad \sum_j A_{3j} \sigma_{3j} = 0, \quad j = 1, 2, 4, \quad (1.5)$$

$$\sum_j A_{ij} \sigma_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

при этом  $\sigma_{33} = 1$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_{34}$ .

Искомые компоненты напряжений  $\tau_{ij}$  должны удовлетворять уравнениям упругого равновесия в области  $V$ , занятой бруском

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

граничным условиям на боковой поверхности

$$\sum_j \tau_{ij} \cos(n, x_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

где  $n$  — нормаль к боковой поверхности (внешняя по отношению к области  $V$ ).

На верхнем основании  $z = l$  усилия должны приводиться к заданным внешним силовым факторам.

2. *Некоторые формулы преобразования.* Введем новую систему координат [1]

$$\xi = x + k \frac{z^2}{2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \quad (2.1)$$

тогда рассматриваемый слегка изогнутый брус в пространстве  $x, y, z$  перейдет в призматический, ограниченный боковой поверхностью  $f(\xi, \eta) = 0$ , с основаниями — нижним  $\zeta = 0$  и верхним  $\zeta = l$ .

В формулах (2.1)  $k^*$  — настолько малый параметр, что во всех последующих вычислениях членами с множителем  $k^*$  во второй и выше степени пренебрегаем.

Обозначим поперечное сечение бруса в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$  через  $S$ , а его контур — через  $L$ .

Зависимость между частными производными, а также между направляющими косинусами при переходе из пространства  $x, y, z$  в пространство  $\xi, \eta, \zeta$ , с указанной выше точностью, представится так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + k \zeta \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad i=1, 2 \quad (2.2)$$

$$\cos(n, x_i) = \cos(n, \xi_i), \quad \cos(n, z) = k \zeta \cos(n, \xi) \quad (2.3)$$

при этом как здесь, так и в дальнейшем  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$ ,  $\xi_3 = \zeta$ .

3. *Задача изгиба парой сил.* Положим, что все заданные силы, приложенные к верхнему основанию, приводятся к паре сил с моментом  $M$ , расположенной в плоскости  $yOz$ . Решение задачи в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$  в смещениях ищем в виде [5]

$$u = \beta f_1 + \beta k u', \quad v = \beta \left( f_2 + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) + k \beta v', \quad w = -\beta \zeta + \beta k w' \quad (3.1)$$

причем

$$f_1 = \tau_1 \xi \eta + \frac{1}{2} \tau_2 \zeta^2, \quad f_2 = \frac{1}{2} (\tau_2 \eta^2 - \tau_1 \zeta^2) \quad (3.2)$$

$u', v', w'$  — неизвестные смещения,  $\beta = MJ_{11}^{-1}$ ;  $J_{11} = EJ$  — жесткость бруса при изгибе в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$  относительно оси  $O\xi$ .

Вычислив компоненты деформаций, соответствующие смещениям (3.1), используя формулы преобразования (2.2), в соответствии с формулами (1.2) получим

$$\tau_{ij} = \beta k \tau_{ij}^{(0)}, \quad i, j=1, 2, \quad \tau_{33} = -\beta E \tau_1 + \beta k \tau_{33}^{(0)}, \quad \tau_{3\alpha} = \beta k (\tau_1 A_\alpha^* + \tau_{3\alpha}^{(0)}) \quad (3.3)$$

$$A_\alpha^* = A_{3\alpha} \tau_1 - A_{33} \tau_2, \quad \alpha = 4, 5$$

где  $\tau_{ij}^{(0)}$  — напряжения, соответствующие смещениям\*  $u', v', w'$ .

Уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7), с указанной выше точностью, представляются так:

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} + A_i^* \tau_1 = 0, \quad \sum_j \frac{\partial \tau_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} = 0, \quad i, j=1, 2, 3 \quad (3.4)$$

в области  $V$ , занятой бруском;

$$\sum_j \tau_{ij}^{(0)} \cos(n, \xi_j) = 0, \quad \sum_j \tau_{3j}^{(0)} \cos(n, \xi_j) + \tau_1 \left[ \tau_1 \sum_j A_j^* \cos(n, \xi_j) - E \tau_1 \cos(n, \xi) \right] = 0 \quad (3.5)$$

на контуре  $L$  сечения  $S$ .

Задачу определения неизвестных напряжений  $\tau_{ij}^{(0)}$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия (3.4) и граничным условиям (3.5), решим полуобратным методом Сен-Венана. Примем

$$\tau_{11}^{(0)} = -\epsilon (\tau_1 \xi^2 + \tau_2) + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{12}^{(0)} = -\frac{1}{2} E \eta^2 + \epsilon^{(0)} \tau_1 \xi - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \quad (3.6)$$

$$\tau_{33}^{(0)} = \tau_1 E + E \tau_2 + E \sum_j \beta_j^{(0)} \xi_j, \quad \tau_{3\alpha}^{(0)} = \tau_1 [ \epsilon^{(0)} \tau_2 + (2-i) E \tau_1 - \tau_1 A_\alpha^* ]$$

\* Термины «напряжение» и «смещение» здесь применяются условно. В действительности, напряжениями и смещениями будут соответствующие величины, умноженные на  $\beta k$ .

где

$$L_{33}^{(0)} = \epsilon^{(0)} \sum_j z_i z_i^{(0)} + z_3 \left( z_1 z_1^{(0)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_1^2} \right)$$

$$z_i^{(0)} = A_{33} z_i - \frac{1}{2} z A_{33} z_i, \quad z_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} (A_{33} z_1^2 - A_{33} z_2^2) - A_{34} z_2$$

$$z_{ij}^{(0)} = \sum_l A_{3l} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_l^2} - z_l^2 \right), \quad i = 1, 2, \quad j = 3-i, \quad z = (-1)^i \quad (3.7)$$

$\Phi$  — известная функция кручения [5].

Непосредственной подстановкой  $z_i^{(0)}$  убеждаемся, что уравнения равновесия (3.4) удовлетворяются.

Из граничных условий (3.5) получим

$$\frac{\partial l^{(0)}}{\partial z_i} = z \int \left[ \frac{1}{2} E \gamma_i^2 \cos(n, z_i) + \epsilon^{(0)} T_i^{(0)} \right] ds \quad (3.8)$$

на контуре  $L$ ,  $i = 1, 2, \quad j = 3-i$ , где

$$T_i^{(0)} = z_{ij}^{(0)} \cos(n, z_i) - z_{ij}^{(0)} \cos(n, z_j) \quad (3.9)$$

Компоненты деформаций, соответствующие напряжениям (3.6), удовлетворяют условиям совместности Сен-Венана [3] при

$$L: \Phi^{(0)} = -EI^* + z_{11} \quad (3.10)$$

причем

$$L^{(0)} = \sum_j \left( z_{11} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2z_{12} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right) + (z_{11} - 2z_{12}) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2 \partial z_1^2}$$

$$I^* = \epsilon^{(0)} \left[ \sum_j \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} (z_{1j}^{(0)} - z_{2j}^{(0)}) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} (z_{12}^{(0)} + z_{21}^{(0)}) \right] \quad (3.11)$$

В формулах (3.11)  $z_{11}^{(0)} = -z_{11} z_{11}^{(0)} + z_{12} z_{11}^{(0)} + z_{21} z_{11}^{(0)}$ ,  $z_{12}^{(0)} = \sum_l z_{1l} z_{1l}^{(0)} - z_{1l} z_{12}^{(0)}$

$$z_{ij} = z_{ij} - z_i^2, \quad z_{ij} = z_{ij} + z_i z_j, \quad i = 1, 2, \quad j = 3-i \quad (3.12)$$

Итак, рассматриваемая задача приведена к бигармонической задаче в области  $S$  поперечного сечения бруса в пространстве  $\xi, \eta, z$ .

Разрешимость ее обеспечена [3]:  $\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z_i}$  ( $i = 1, 2$ ) однозначны при обходе контура  $L$ . Однозначны также  $\Phi^{(0)}$  при обходе того же контура при

$$\epsilon^{(0)} = J_{33} D^{-1}, \quad D = \iint_S [A_{33} z_i^2 (\varphi_i^2 - z_i) - A_{33} z_i (\varphi_i - z_i) + A_{34} (z_1^2 - z_2^2)] d^2 d\tau$$

где  $D$  — жесткость бруса при кручении.

На основании  $z = l$  усилия приводятся к заданной паре сил с моментом  $M$  при  $z^{(0)} = (ES)^{-1} \iint_S E \gamma_{33}^2 d^2 d\tau$ ,  $z_i^{(0)} = -(ES)^{-1} \iint_S E \gamma_{33}^{(0)} z_i d^2 d\tau$ ,

$i = 1, 2, \quad j = 3-i$

4. *Задача изгиба поперечной силой.* Положим на основании  $z=l$  все заданные силы приводятся к силе  $W$ , параллельной оси  $Oy$ . Если воспользоваться заменой координат в соответствии с (2.1), то получим брус, ограниченный цилиндрической поверхностью и изгибаемый силой  $W$ , параллельной оси  $Ox$ .

Зададимся решением рассматриваемой задачи в смещениях в виде [5]

$$\begin{aligned}
 u &= \gamma[(l-z)f_1 + kv'] - \tau_1 z, & v &= \gamma \left[ (l-z)f_2 - \frac{1}{2} \left( l^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) + kv' \right] + \tau_2 z, \\
 w &= \gamma \left[ \psi - \left( l^2 z - \frac{1}{2} z^3 \right) + kv' \right] + \tau_3 z
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $f_1, f_2$  даны формулами (3.2)

$$\psi = \chi - \tau_3 z, \quad \gamma = J_{31}^{-1} W, \quad \tau = \gamma D^{-1} \int_S \int_S (\tau_{31}^{(0)} - \tau_{32}^{(0)}) d\xi d\eta$$

$\psi$  и  $\chi$  — известные функции, соответственно кручения и изгиба [5]. Значения  $J_{31}$  и  $D$  приведены выше,  $\tau_{31}^{(0)}$  — формулами (4.3).

Повторяя вышеспользованную последовательность вычислений, получим

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= k\gamma(A_{33}H_1 + \tau_{11}), & \tau_{12} &= k\gamma(A_{31}H_1 + \tau_{12}), & \tau_{23} &= -\gamma l(l-z)\tau + k\gamma(A_{33}H_1 + \tau_{23}) \\
 \tau_{31} &= \tau_{31}^{(0)} + \gamma \tau_{31}^{(0)} + k_1 \left[ \tau(l-z)A_1^* + \tau_1^{-1} A_{31} \tau + \tau_{31} \right]
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$H = \psi_1 + \tau_1^{-1} \tau_2, \quad \tau_{31}^{(0)} = A_{33} \tau_{31}^* + A_{36} \tau_{32}^*, \quad \tau_{32}^* = \frac{\partial \psi}{\partial z_2} - f_2 \quad (4.3)$$

Уравнения равновесия, соответствующие напряжениям (4.2), представляются так:

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial z_j} + \tau \left[ (A_{31} + A_{33}) \frac{\partial H}{\partial z_1} + (A_{13} + A_{31}) \frac{\partial H}{\partial z_2} \right] + (l-3z)\tau_1 A_1^* + 3\tau_1^{-1} A_{31} \tau = 0 \\
 \sum \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z_1} - A_{31} H = 0
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

в области  $V$ , занятой бруском, граничные условия

$$\begin{aligned}
 \sum \tau_{ij} \cos(n, z_j) + \tau \left\{ [A_{31}(2-l) - A_{31}(l-1)] H_1 + \tau_{31}^{(0)} + \tau_1^{-1} \tau_{31}^{(0)} \right\} \cos(n, z_1) + \\
 + (2-l) A_{31} H_1 \cos(n, z_1) = 0
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sum \tau_{ij} \cos(n, z_j) + \tau(l-z) \left[ \tau_1 \sum_j A_j^* \cos(n, z_j) - E \tau \cos(n, z_1) \right] + \tau_1^{-1} \tau_{31} \sum_j A_{3j} = 0$$

на контуре  $L$  сечения  $S$ :  $i, j = 1, 2, \quad x = 4+i$ .

Итак, задача свелась к определению шести компонентов напряжений  $\tau_{ij}$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия (4.4), граничным условиям (4.5), а компоненты деформаций, соответствующие  $\tau_{ij}$ , — шести условиям совместности Сен-Венана.

Как и предыдущую, задачу решаем полуобратным методом, при этом с целью максимального упрощения воспользуемся решением задачи изгиба парой. Итак, примем

$$\tau_{ii} = \tau \left( z_{ii}^{(0)} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i^2} \right) + L_i^{(0)}, \quad \tau_{12} = \tau \left( z_{12}^{(0)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + E \tau^2 + L_{12}^{(0)}, \quad i=1, 2$$

$$\tau_{33} = \tau (T_{33} - \tau_{33}^* - \alpha E) + l \left( z_{33}^{(0)} + \frac{1}{2} z_{33}^* \right) + E (\tau^* + \sum_i z_i z_i) \quad (4.6)$$

$$\tau_{3i} = \tau [z_i A_i^* - (2-i) E z_i] + U_{3i} + L_i^{(0)} \omega + \tau \tau^{-1} A_{3i} z_i^2 + L_{3i}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha l z_i + \frac{1}{2} \epsilon^{(0)} z_i z_{33}^{(0)}$$

где

$$z_{11}^{(0)} = A_{33} f_1 + A_{36} f_2 - (A_{11} + A_{33}) H + \tau_1^{-1} A_1^* - \epsilon^{(0)} z_{11}^{(0)}$$

$$z_{22}^{(0)} = \frac{1}{2} A_{33} z_1^2 - A_{36} z_1 z_2 - \tau_2^{-1} A_{33} z_2 - (A_{22} + A_{33}) H - \epsilon^{(0)} z_{22}^{(0)}$$

$$z_{12}^{(0)} = -(A_{33} + A_{36}) H + \epsilon^{(0)} z_{12}^{(0)}, \quad \tau_{33}^* = (\tau_{11}^{-1} E + 2\tau_3) z_3 - \tau_3 \alpha^2 E^2 z^2$$

$$T_{33} = \sum_i z_i \left( z_{ii}^{(0)} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i^2} \right) + z_4 \left( z_{12}^{(0)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_1 \partial z_2} \right)$$

причем

$$U_{3i} = A_{3i} U_i + A_{33} U_{3i}, \quad L_i^{(0)} = A_{3i} \frac{\partial}{\partial z_i} + A_{33} \frac{\partial}{\partial z_3} \quad (4.7)$$

$$U_i = \int \left| P_i dz_i + dz_i \int \left| \frac{\partial P_i}{\partial z_i} dz_i + \left( \frac{\partial X_j}{\partial z_i} - \frac{\partial P_j}{\partial z_i} \right) dz_j \right| \right|, \quad i=1, 2, \quad j=3-i$$

$$P_i = E^{-1} \left( P_{ii}^{(0)} + \tau_{ii} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i^2} - \tau_{ii} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i^2} - \tau_{ii} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i \partial z_j} \right)$$

$$X_j = E^{-1} \left( X_j^{(0)} - \tau_{33} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i \partial z_j} - \sum_i \tau_{ii} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z_i^2} \right)$$

Значения  $z_{ij}^{(0)}$  даны формулами (3.6),  $\tau_{ij}$  — формулами (3.12); в формулах (4.7)

$$P_{ii}^{(0)} = \tau_1 \tau_{33}^* + \tau_{ii} z_{ii}^{(0)} - \tau_{ii} z_{ii}^{(0)} - \tau_{ii} z_{12}^{(0)}, \quad X_j^{(0)} = \tau_4 \tau_{33}^* + \tau_{33} z_{12}^{(0)} - \sum_i \tau_{ii} z_{ii}^{(0)}$$

Непосредственной подстановкой  $z_{ij}$  убеждаемся, что первое и второе уравнения равновесия (4.4) удовлетворяются. Из третьего получим

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} (L_i^{(0)} \omega) = \tau_{33}^* - T_{33} - A_{33} H - \sum_i \frac{\partial U_{3i}}{\partial z_i}, \quad i=1, 2 \text{ в области } S \quad (4.8)$$

Условия совместности Сен-Венана [3] будут удовлетворены, если примем

$$L_i^{(0)} \Phi^{(0)} = - \sum_j \frac{\partial^2 P_{ij}^{(0)}}{\partial z_j^2} + \frac{\partial X_j^{(0)}}{\partial z_i \partial z_j}, \quad i=1, 2, \quad j=3-i \text{ в области } S, \quad (4.9)$$

значение  $L_i^{(0)}$  дано формулой (3.11).

Подставляя  $\tau_{ij}$  в граничные условия (1.5), получим

$$\sum_{\tau} (L_i^{(2)} \omega) \cos(n, \xi_i) = \sum_{\tau} \left( U_{3i} + \frac{1}{2} a E \tau_i \right) \cos(n, \xi_i) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi_i} = \int_S \left\{ E \tau_i^2 + A_{33}(\psi_i - f_i) - A_{33} f_i + \tau_i^{-1} A_{33}(\tau_i^2 + \xi_i) - \tau_i^{-1} A_{33} \tau_i \right\} \cos(n, \xi_i) +$$

$$+ \left\{ \tau_i^{-1} A_{33}(\varphi_i - \xi_i) - A_{33}(\psi_i + \tau_i \xi_i) + \frac{1}{2} A_{33} \tau_i \tau_i^2 \right\} \cos(n, \tau_i) - c^{(1)} T_i^{(1)} \Big| ds \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \tau_i} = \int_S \left\{ -A_{33}(\psi_i + \tau_i^{-1} \varphi_i) \cos(n, \xi_i) + A_{33}(H - l \tau_i^2) \cos(n, \tau_i) + c^{(1)} T_i^{(1)} \right\} ds$$

на контуре  $L$  сечения  $S$ ; значения  $T_i^{(1)}$  приведены выше.

Итак, рассматриваемая задача в пространстве  $\xi, \eta, \xi$  свелась к двум плоским граничным задачам теории упругости в области  $S$ : гармонической—определению  $\omega$ , и бигармонической—определению  $\Phi^{(1)}$ . Первая определяется условиями (4.8) и (4.10), вторая—условиями (4.9) и (4.11).

Разрешимость гармонической задачи обеспечена при  $a = - (ES)^{-1} \int_S \int_S (\tau_{33}^* - T_{33} - A_{33} H) d\xi d\tau$

Что касается бигармонической, то как показывает проверка  $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi_i}$ , а также сама функция  $\Phi^{(1)}$  однозначны при обходе контура  $L$  сечения  $S$  при  $c^{(1)} = J_{11} D^{-1}$ .

Усилия на основании  $z=l$  приводятся к заданной силе  $W$ . При этом

$$z^* = \frac{1}{2} l \tau_{33}^{-1} J_{11} \cdot S$$

$$\beta_j^{(1)} = - (ES)^{-1} l \int_S \int_S \left( A_{33} H + T_{33} - \frac{1}{2} \tau_{33}^* \right) \xi_j d\xi d\tau, \quad i=1, 2, \quad j=3-i$$

Используя известные приемы, легко вычислить смещения  $u', v', w'$ , соответствующие  $\tau_{ij}$  (зависимость между  $\tau_{ij}$  и  $e_{ij}$  линейная, причем

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}, \quad i, j=1, 2)$$

Полную систему напряжений в пространстве  $\xi, \tau, \tau$  получим, если значения  $\tau_{ij}$  по формулам (4.6) подставим в формулы (4.2).

5. *Заключение.* Рассмотренные задачи изгиба парой сил и изгиба силой слегка изогнутого бруса в плоскости, перпендикулярной плоскости кривизны оси бруса, приводятся к плоским граничным задачам теории упругости в плоскости поперечного сечения бруса: первая к бигармонической, вторая—к гармонической и бигармонической.

Даны значения всех шести компонентов напряжений. Как и следовало ожидать, в рассматриваемых случаях имеет место закручивание бруса (члены с множителем  $\varepsilon^{(j)}$ ). Гипотеза отсутствия подавливания продольных волокон друг на друга не имеет места (наличие напряжений  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ).

## ՅԵՅԵՎԱԿ ԿՈՐԱՅԱԿ ԸՍՄԱՍԵԻ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ԶՈՂԻ ԶԳՈՒՄԸ

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

*Տրվում է բևեռակի կորացված նամասեռ անիզոտրոպ ձողի ձգման խնդրի լուծումը ձողի առանցքի կորության հարթությանը ուղղահայաց հարթության մեջ:*

*ԱՆՎՆՆԱՆԻ կրթակազարձ եղանակի օգտագործումով խնդրի լուծումը բերվել է բիհարմոնիկ և հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշմանը:*

## ON BENDING OF A HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SLIGHTLY BENT BEAM

R. S. MINASIAN

S u m m a r y

The solution to a problem for the bending of a homogeneous anisotropic beam is obtained by means of the Sen-Venant method where the axis of the beam is a plane curve of a second order.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Риз П. М.* Деформации стержней со слабо изогнутой осью — ДАН СССР, 1939, т. 24, вып. 2.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, с. 22—32, 87—88, 317—320.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание пятое. М.—Л.: Наука, 1966, с. 51—61, 106—115, 313—317.
4. *Минасян Р. С.* К решению задачи об упругом равновесии составного цилиндрического бруса. Уч. запiski АзИИЕФТЕХИМ, 1972, № 6.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. Перевод с четвертого английского издания. М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935, с. 170—175, 315—361.

Азербайджанский институт нефти  
и химии им. М. Азизбекова

Поступила в редакцию  
30.IX.1982

УДК 519.6

ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ  
 ПРИ  $m$  ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГАБРИЕЛЯН М. С.

Рассматриваются вопросы определения стратегий из различных классов для задач сближения и уклонения при  $m$  целевых множествах на базе программных конструкций. Выделяются регулярные случаи соответствующих задач и определяются экстремальные стратегии из соответствующих условий минимакса или максимина. Самым широким классом стратегий, используемых здесь, является класс кусочно-позиционных стратегий.

§ 1. Программное поглощение  $m$  целей

Пусть задана система уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \quad (1.1)$$

где  $x \in R^n$ ;  $u \in P \subset R^r$ ,  $v \in Q \subset R^s$ .

Предполагается, что функция  $f(\cdot)$  удовлетворяет всем условиям, приведенным в [1], а  $P$  и  $Q$  — заданные компакты. Предположим, что заданы замкнутые и ограниченные множества  $M_k$  ( $k \in I = (1, \dots, m)$ ) в  $R^{n-1}$ . Предполагается, что в отличие от постановки задач в [1]  $N = R^{n-1}$ .

Пусть также заданы моменты времени  $\theta_k$ ,  $k \in I$ , такие, что  $t_0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_m$ .

Предполагается также, что

$$M_i \cap \{(t, x) : t = t_i, x \in R^{n-1}\} \neq \emptyset; \quad t_i \in [t_0, \theta_i] \quad i \in I \quad (1.2)$$

Определим программные управления и движения для отрезка времени  $t \in [t_0, \theta_m]$  точно так, как в [2] (стр. 125). Сформулируем следующие вспомогательные задачи:

**Задача 1.1.** Заданы  $t_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$ , с. множества  $M_k$   $k \in I$ , удовлетворяющие условию (1.2), начальная позиция  $(t_*, x_*) \in [\theta_{i-1}, \theta_i) \times R^n$ , параметры  $(x_1, \dots, x_{i-1}) \in R^{(i-1)n}$  и выбрана  $\{\gamma_i | t_*, \theta_m\}_n$ . Среди  $\gamma_i \in \{\gamma_i | t_*, \theta_m\}_n$  требуется найти минимизирующее управление  $\gamma_i^*(t_* \leq t < \theta_m, t \neq \theta_i)$ , которое удовлетворяет следующему условию:

$$\rho((\theta_j, x_j, p_j^0) \quad j=1, \dots, l-1; (\theta_j, x((\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j^0)), p_j^0) \quad j=l, \dots, m) = \\ = \min_{\gamma_j \in \{^1 \gamma_j, ^2 \gamma_j\}} \rho((\theta_j, x_j, p_j^0) \quad j=1, \dots, l-1; (\theta_j, x((\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j^0)), p_j^0) \quad j=l, \dots, m)$$

где (1.3)

$$\rho((\theta_j, x_j, p_j^0) \quad i \in I) = \min \{ \omega((\theta_j, x_i, p_i) \quad i \in I) : p_i \in M_i(\theta_i), k \in I \}.$$

Функция  $\omega : [t_*, \infty) \times R^n \times R^n \times \dots \times [t_*, \infty) \times R^n \times R^n \rightarrow R^1$  непрерывна и в области  $\omega(\{t_k, x_k, p_k\}) > c$  имеет непрерывные частные производные по всем аргументам  $\{t_k, x_k\}$ . Параметры  $x_j \quad j=1, \dots, l$  фиксируем.

Решение задачи 1.1 всегда существует, так как функция  $\omega(\cdot)$  (1.3) зависит от всех аргументов непрерывно, а переменные  $x_j = x_j(\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j)$  зависят непрерывно от программных управлений-мер  $\gamma_j(t_* \leq t < \theta_j)$ , множество которых замкнуто и компактно в себе в слабой топологии.

**Задача 1.2.** Заданы  $t_* < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$ ,  $c$ , множества  $M_k \quad k \in I$ , удовлетворяющие условию (1.2), начальная позиция  $(t_*, x_*) \in [t_*, \theta_1) \times R^n$ , параметры  $(x_1, \dots, x_{l-1}) \in R^{(l-1)n}$ . Требуется найти максимальное оптимальное программное управление  $\gamma_j^{00}(t_* \leq t < \theta_j, t \neq \theta_k)$ , которое удовлетворяет следующему условию максимина:

$$\rho((\theta_j, x_j, p_j^0) \quad j=1, \dots, l-1; (\theta_j, x((\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j^{00}), p_j^0) \quad j=l, \dots, m) = \\ = \max \min \rho((\theta_j, x_j, p_j^0) \quad j=1, \dots, l-1; (\theta_j, x((\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j), p_j^0) \quad j=l, \dots, m) = \\ = z^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, \{\theta_k\})$$

Здесь также параметры  $x_j \quad (j=1, \dots, l-1)$  полагаются постоянными.

Для доказательства существования решения задачи 1.2 достаточно показать, что максимум в (1.4) достигается. Каждое из областей достижимости  $G_j = \{x : x(\theta_j, t_*, x_*, \gamma_j), \gamma_j \in \{^1 \gamma_j, ^2 \gamma_j\}\}$  замкнуто в  $R^n$  и изменяется непрерывно по метрике Хаусдорфа зависимо от  $\gamma_j$  второго игрока [2] (стр. 131—132). Функционал  $\min \{ \min \{ \omega((\theta_j, x_i, p_i) \quad i=1, \dots, m) : p_i \in M_i(\theta_i); i=1, \dots, m \} : x_i \in G_j; j=l, \dots, m \}$  зависит от  $G_j$  непрерывно, так как множества  $M_1, \dots, M_m$  замкнуты. Следовательно, этот функционал непрерывно зависит от программных управлений  $\gamma_j$  второго игрока. Из замкнутости и компактности в себе в слабой топологии программных управлений второго игрока вытекает, что максимум в (1.4) достигается.

## § 2. Принцип минимума и правило максимина для задачи сближения с $n$ целевыми множествами

Сформулируем принцип минимума. Предположим, что функция  $f(t, x, u, v)$  имеет непрерывные частные производные по  $x^i \quad (i=1, \dots, n)$ . Принцип минимакса для задачи сближения будет:

Лемма 2.1. Оптимальное управление  $x_j^0(t_*, t \in \Theta_m)$ ,  $(\Theta_{l-1} \leq t_* \leq \Theta_l, \Theta_0 = t_0)$ , разрешающее задачу 1.1 и порожденное им оптимальное программное движение при условии

$$\min_{p_j^0} \rho((\Theta_j, x_j, p_j^0) \quad j=1, \dots, l-1; (\Theta_l, x(\Theta_l, t_*, x_*, \tau_{(j)}, p_j^0) \quad j=l, \dots, m) \geq \epsilon$$

$$\tau_{(j)} \in \tau_{(j)}^0 \quad (2.1)$$

удовлетворяет равенству

$$\int_{\bar{p}} \int_{\bar{Q}} \bar{s}_k(t) f(t, x^0(t), u, v) \tau_{(k)}^0(du, dv) = \int_Q \min_{u \in P} \bar{s}_k(t) f(t, x^0(t), u, v) \nu_k(dv)$$

$$(2.2)$$

при почти всех  $t \in [t_*, \Theta_m] \setminus \cup_{k=1}^l (\Theta_{k-1}, \Theta_k)$ ,  $k \geq l$ ,  $\nu_k(dv) = \int_{\bar{p}} \tau_{(k)}^0(du, dv)$ ;

$\bar{s}_k(t) = \sum_{j=k}^m s_j(t)$ , где  $s_j(t)$  - решение дифференциального уравнения

$$\dot{s}_j(t) = -L'(t) s_j(t) \quad (2.3)$$

с краевым условием

$$s_j(\Theta_j) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, p_1^0, \dots, p_{j-1}^0, x_j, p_j^0, \dots, p_m^0)} \quad (2.4)$$

Переменные  $x_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, l-1$ ) считаются постоянными. Матрица определяется равенством

$$L(t) = \int_{\bar{p}} \int_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0(t)} \tau_{(k)}^0(du, dv) \quad (2.5)$$

а  $p_j^0 \in M_j(\Theta_j)$  ( $j=1, \dots, m$ ) - векторы, на которых достигается минимум в (1.3).

Напомним план доказательства леммы 2.1. Из определения функций  $\omega((\Theta_l, x_l, p_l)$  и  $\rho(\cdot)$  (1.3) следует, что при  $t_* \in (\Theta_{l-1}, \Theta_l)$ ,  $t \in [t_*, \Theta_m] \setminus \cup_{k=1}^l (\Theta_{k-1}, \Theta_k)$  ( $k \geq l$ ) элементарное изменение функционала  $\omega(\cdot)$  в зависимости от элементарного изменения программных управлений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \sum_{j=k}^m \left. \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, p_1^0, \dots, p_{j-1}^0, x_j, p_j^0, \dots, p_m^0)} \cdot \delta x_j(t) \\ &= \sum_{j=k}^m \left. \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_{(t_*)} \delta x_j(t_*) + \int_{t_*}^t \int_{\bar{p}} \int_{\bar{Q}} \sum_{j=k}^m \left. \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_{(t)} S(t, \tau) \times \\ &\quad \times f(\tau, x_\alpha(\tau), u, v) \tau_j(du, dv) d\tau - \sum_{j=k}^m s_j'(t, t_*) \delta x_j(t_*) + \\ &\quad + \int_{t_*}^t \int_{\bar{p}} \int_{\bar{Q}} \sum_{j=k}^m s_j(t, \tau) f(\tau, x_\alpha(\tau), u, v) \delta \tau_j(du, dv) d\tau \end{aligned}$$

где  $s_j(t, \tau) = \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_1 S(t, \tau)$ , а  $S(t, \tau)$  — фундаментальная матрица решений уравнения

$$d/d\tau S(t, \tau) = -L'(\tau)S'(t, \tau) \quad (S(t, t) = E)$$

Затем, исходя от обратного, точно такими же рассуждениями, как при доказательстве леммы 36.1 из [2], приходим к противоречию, которое и доказывает лемму 2.1.

Выделим регулярный случай для задачи сближения со всеми множествами. Назовем элементарную программу  $[\gamma_{ij}, [t_*, \theta_m), \gamma_{ij}]_{11}$  регулярной для данной позиции  $(t_*, x_*)$  ( $t_* < \theta_m; \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, \{\theta_k\}) > c$ ), если: 1) задача 1.1 для данной позиции  $(t_*, x_*)$   $t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l)$  и набора  $(x_1, \dots, x_{l-1})$  при выборе этой программы  $[\gamma_{ij}, [t_*, \theta_m), \gamma_{ij}]_{11}$  имеет единственное по существу решение  $x_{ij}^0$ ; 2) набор векторов  $p_i^0 \in M_j(\theta_i)$   $i = 1, \dots, m$ , минимизирующий (1.3) при  $\gamma_{ij} = x_{ij}^0$  единственный.

*Лемма 2.2.* Пусть оптимальная максимизирующая элементарная программа  $[\gamma_{ij}, [t_*, \theta_m), \gamma_{ij}]_{11}$  из задачи 1.2 для данной позиции  $(t_*, x_*)$  и набора  $(x_1, \dots, x_{l-1})$ , где  $\varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, \{\theta_k\}) > c$ , регулярна. Пусть  $\gamma_k^{opt}$  и  $x^{opt}(t)$  ( $t_* \leq t < \theta_m; t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l)$ ) суть оптимальное управление и оптимальное движение, разрешающие задачу 1.2. Тогда выполняется следующее условие максимина: при почти всех  $t \in [t_*, \theta_m) \cap [\theta_{k-1}, \theta_k)$   $c \geq t$  ( $t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l)$ )

$$\int_P \int_Q \bar{s}_k(t) f(t, x^{opt}(t), u, v) \gamma_{ij}^{opt}(du, dv) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \bar{s}_k(t) f(t, x^{opt}(t), u, v) \quad (2.6)$$

при

$$\bar{s}_k(t) = \sum_{i=k}^m s_i(t) \quad (2.7)$$

где  $s_i(t)$  — решение уравнения

$$\dot{s}_i(t) = -L'(t) s_i(t); \quad L(t) = \int_P \int_Q \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^{opt}(t)} \gamma_{ij}^{opt}(du, dv) \quad (2.8)$$

с краевым условием

$$s_i(\theta_i) = \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right|_{(\theta_i, \gamma_{ij}^0); i=1, \dots, l-1; (\theta_i, \gamma_{ij}^0); j=1, \dots, m} \quad (2.9)$$

Доказательство леммы 2.2 не приводим, так как оно аналогично доказательству леммы 37.1 из [2].

### § 3. Экстремальное прицеливание

Выделим регулярный случай для задачи сближения со всеми множествами.

Ситуацию назовем регулярной, если для всякой позиции  $(t_*, x_*)$   $t_* \in [0_{l-1}, 0_l]$  из области

$$G = U \{G_i : i = 1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

$$G_1 = \{(t_*, x_*) : t_* \leq 0_1; c \leq \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, \{0_k\}) \leq c + \beta\}, \quad G_2 = \{(t_*, x_*) : 0_1 \leq t_* \leq 0_2; (0_1, x_1) \in G_1; c \leq \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \{0_k\}) \leq c + \beta\}, \dots, G_m = \{(t_*, x_*) : 0_{m-1} \leq t_* \leq 0_m; (0_{i-1}, x_{i-1}) \in G_{i-1}, \dots, (0_{m-1}, x_{m-1}) \in G_{m-1}; c \leq \varepsilon^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{m-1}, \{0_k\}) \leq c + \beta\}$$

( $\beta > 0$ ) и набора  $(0_k, x_k) \in G_k$  ( $k = 1, \dots, l-1, 1$ ) существует единственное по существу решение  $\gamma_{(0)}$  задачи 1.2, 2) набор векторов  $p_i^{(0)} \in M_1(0_1), \dots, p_m^{(0)} \in M_m(0_m)$  единственный. Сформулируем следующее утверждение:

*Лемма 3.1.* Если при выбранных  $c$  и  $\beta$  ситуация при

$$\gamma((0_k, x_k, p_k^{(0)})) \quad k = 1, \dots, l-1; \quad (0_k, x((0_k, t_*, x_*, \gamma_{(0)}), p_k^{(0)})) \quad k = 1, \dots, m) = \text{min} \{m((0_k, x_1, p_k)) \quad k = 1, \dots, l-1; \quad (0_k, x((0_k, t_*, x_*, \gamma_{(0)}), p_k)) \quad k = 1, \dots, m\}; \quad p_i \in M_i(0_i); \quad i \in I\} \quad (3.2)$$

является регулярной, то в области  $G$  (3.1)  $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_{l-1}, \{0_k\})$  функция  $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_{l-1}, \{0_k\})$  имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t}$ , и эти производные определяются равенствами

$$\left. \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x} \right|_{(t_*, x_*)} = \bar{s}_i(t_*) \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t} \right|_{(t_*, x_*)} = - \max_{i \in I} \min_{u \in P} [\bar{s}_i(t_*) f(t_*, x_*, u, v)]$$

Здесь  $\bar{s}_i(t_*)$  определяется согласно (2.7)–(2.9). Справедливость леммы 3.1 проверяется аналогично доказательству леммы 38.1 из [2], которое не приводим.

Функция  $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_{l-1}, \{0_k\})$  в регулярном случае является непрерывно дифференцируемой в области

$$G^* = \{(t, x) : (t, x) \in G; t \in (0_1, \dots, 0_m)\} \quad (3.4)$$

Составим выражение

$$\left( \frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} \right)_{t,x} = \left. \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x} \right| f(t, x, u, v) + \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t} =$$

$$= \bar{s}_i(t) f(t, x, u, v) - \max_{i \in I} \min_{u \in P} \bar{s}_i(t) f(t, x, u, v) \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при выполнении условия седловой точки для маленькой игры при любом  $(t, x) \in G^*$  (3.4) функция  $\varepsilon^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_{l-1}, \{0_k\})$  удовлетворяет условию

$$\min_{t \in P} \max_{u \in Q} \left\{ \left| \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x} \right|' f(t, x, u, v) - \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t} \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Сформулируем следующее утверждение:

**Теорема 3.1.** Пусть выполнено условие седловой точки маленькой игры, и при выбранных значениях  $c$  и  $\beta > 0$  ситуация для

$$\min \{ \rho((\bar{v}_k, x_k, p_k) \mid k \in I) : p_k \in M_k(\bar{v}_k) \}$$

регулярна. Тогда экстремальная стратегия  $U_i^{(0)} : u_i^{(0)}(t, x) \mid t \in [t_0, \bar{v}_k]$ , заданная условием

$$\max_{v \in Q} \left( \left| \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x} \right|' f(t, x, u_i^{(0)}, v) \right) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left( \left| \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x} \right|' f(t, x, u, v) \right) \quad (3.7)$$

в области  $G^*$  (3.4) и любой  $u_i^{(0)}(t, x) \in P$  вне этой области, обеспечит неравенство

$$\rho((\bar{v}_i, x \mid \bar{v}_i, t_0, x_0, U_i^{(0)} \mid p_i^{(0)} \mid i = 1, \dots, m) \leq \max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\bar{v}_k\})) \quad (3.8)$$

для любого движения  $x \mid \cdot \mid$ , порожденного стратегией  $U_i^{(0)}$ , если только  $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\bar{v}_k\}) < c + \beta$ .

Прежде чем доказать теорему 3.1, отметим, что здесь игра начинается из позиции  $(t_0, x_0)$  и в каждый момент  $\bar{v}_k$  ( $k \in I$ ) вектор  $x_k = x(\bar{v}_k)$  фиксируется, поэтому нет необходимости введения параметров  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, I-1$ .

Теперь докажем теорему 3.1.

Пусть, наоборот, при условиях теоремы 3.1 существуют  $U_i^{(0)}$  удовлетворяющие (3.7), и движение  $(t, x \mid t, t_0, x_0, U_i^{(0)} \mid)$ , для которых  $\rho((\bar{v}_i, x \mid \bar{v}_i, t_0, x_0, U_i^{(0)} \mid p_i^{(0)} \mid i = 1, \dots, m) > \max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\bar{v}_k\}))$ .

Рассмотрим систему уравнений в контингентах  $x \in F_i^{(0)}(t, x, v^*)$ , где  $F_i^{(0)}(t, x, v^*) = \text{co} \{ f : f = f(t, x, u, v^*) ; u \in \{u_i^{(0)}(t, x) \mid \text{при } t \neq \bar{v}_k \text{ и } F_i^{(0)}(t, x, v^*) = \text{co} \{ f : f = f(t, x, u, v^*) ; u \in P \mid \text{при } t = \bar{v}_k ; v^* \in Q \}$ .

Здесь каждый вектор  $u_i^{(0)}(t, x)$  и  $v^*$  удовлетворяет условию (3.7) при  $t \neq \bar{v}_k$ . Из непрерывности  $\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t} \mid (t = \bar{v}_k)$  следует, что множества  $F_i^{(0)}(\cdot)$  изменяются по  $(t, x)$  полунепрерывно сверху относительно включения, и следовательно, для любой точки  $(t_*, x_*) \in G$  существует пучок решений из абсолютно-непрерывных кривых, который компактен в себе в метрике  $C_{[t_0, \bar{v}_k]}$ . Согласно сделанному предположению среди решений пучка  $\{x(t, t_0, x_0, U_i^{(0)})\}$  должно существовать хотя бы одно решение  $x(t, t_0, x_0, U_i^{(0)})$ , для которого

$$\rho((\bar{v}_i, x(\bar{v}_i, t_0, x_0, U_i^{(0)}), p_i^{(0)} \mid i \in I) > \max(c, \varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\bar{v}_k\})).$$

При этом функция  $\varepsilon^{(0)}(t, x(t), \{\bar{v}_k\})$  по  $t$  будет абсолютно-непрерывной и возрастающей на множестве положительной меры из  $[t_0, \bar{v}_k]$ , так как  $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \{\bar{v}_k\}) < c + \beta$ . Тогда на этом множестве  $d/dt \varepsilon^{(0)}(t, x(t), \{\bar{v}_k\}) > 0$ , а это противоречит условию (3.6). Таким образом, теорема 3.1 доказана.

§ 4. Регулярные игры сближения к заданным моментам  
при  $m$  целевых множествах

Пусть  $\omega(\{t_k, x_k, p_k\})$  есть непрерывная функция от аргументов  $\{t_k, x_k, p_k\}$  и допускает непрерывные частные производные  $\partial\omega/\partial x_k^i$  ( $i=1, \dots, n; k=1, \dots, m$ ) в области пространства  $\{t_k, x_k, p_k\}$ , где  $c < \omega(\{t_k, x_k, p_k\}) < c + \beta$ ;  $p_k \in M_k(t_k)$ ,  $k \in I$ , причем  $M_k(t_k)$  замкнуты, ограничены и зависят от  $t_k \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$  непрерывно в метрике Хаусдорфа

Сформулируем следующую задачу:

**Задача 4.1.** Дана начальная позиция  $\{t_*, x_*\}$ ,  $t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l]$ , параметры  $(t_1, x_1), \dots, (t_{l-1}, x_{l-1})$ . Требуется найти минимизирующие моменты  $\tau_k^{(0)} \in [t_*, \theta_k] \cap [\theta_{k-1}, \theta_k]$ ,  $k \in I$ , максимизирующую элементарную программу  $\{x_{i+1}\}_{i=1}^n = \{x_{i+1}^j\}$ ;  $\{t_k, \max \tau_k^{(0)}\}$ ;  $\tau_k^{(0)}, x_{i+1}^j$  и в ней минимизирующее управление  $x_{i+1}^{(0)}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\min_{\{\tau_k^{(0)} \in [\theta_{k-1}, \theta_k]\}} z^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, t_1, \dots, t_{l-1}, \tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) = z^{(0)}(t_*, x_*, x_*, \dots, x_{l-1}, t_1, \dots, t_{l-1}, \tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) \quad (4.1)$$

Функция  $z^{(0)}(\cdot)$  (4.1) непрерывно зависит от  $(t_k, x_k)$ . Назовем, что ситуация является вполне регулярной в области

$$G = \cup \{G_j; j \in I\} \quad (4.2)$$

( $G_j = \{(t, x) : \theta_{j-1} \leq t \leq \theta_j, c \leq z^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_{j-1}, t_1, \dots, t_{j-1}, \tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) \leq c + \beta, (t_k, x_k) \in G_k, k = 1, \dots, j-1\}$   $j=1, \dots, m; \theta_{l_0} = t_0; \beta > 0$ )

если:

1) для каждой позиции  $(t_*, x_*) \in G$  (4.2),  $t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l]$  и набора  $(t_1, x_1), \dots, (t_{l-1}, x_{l-1})$  ( $(\theta_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha; \alpha = 1, \dots, l-1$ ) существует единственный набор  $(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)})$  и единственное управление  $x_{i+1}^{(0)}$ , удовлетворяющие условию (4.1); 2) набор векторов  $p_k^{(0)} \in M_k(t_k)$   $k=1, \dots, l-1$ ;  $p_k^{(0)} \in M_k(\tau_k^{(0)})$ ,  $k=l, \dots, m$ , минимизирующий в (1.3) (символы  $\theta_k$  заменены на  $t_k$ ,  $k=1, \dots, l-1$ ;  $\tau_k^{(0)}$   $k=l, \dots, m$ , а  $\tau_{i+1}$  на  $\tau_{i+1}^{(0)}$ ) единственный.

Во вполне регулярном случае оптимальное управление  $x_{i+1}^{(0)}$  из задачи 4.1 удовлетворяет правилу максимина (2.6)–(2.9) (с заменой символов  $\theta_k$  на  $t_k$  и  $\tau_k^{(0)}$  соответственно). Из вполне регулярности ситуации следует, что функция  $z^{(0)}$  (4.1) при  $t \neq \tau_k^{(0)}$  имеет непрерывные частные производные  $\partial z^{(0)}/\partial x$  и  $\partial z^{(0)}/\partial t$ , которые определяются равенствами

$$\left. \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} \right|_{(t_*, x_*)} = \bar{s}_i(t_*); \quad \left. \frac{\partial z^{(0)}}{\partial t} \right|_{(t_*, x_*)} = - \max_{i \in I} \min_{v \in P} |s_i(t_*) f(t_*, x_*, u, v)| \quad (4.3)$$

где вектор  $\bar{s}_i(t_*)$  определяется согласно (2.7)–(2.9), если моменты  $\theta_k$  заменить моментами  $t_k$  и  $\tau_k^{(0)}$ . Функция  $z^{(0)}(\cdot)$  (4.1) в каждой позиции  $(t, x)$  из  $G$  (4.2)  $t \neq \tau_k^{(0)}$  удовлетворяет условию

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \left( \left| \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} \right| \cdot f(t, x, u, v) + \frac{\partial z^{(0)}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.4)$$

откуда вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 4.1.** Пусть ситуация является вполне регулярной и в каждой позиции  $\{t_*, x_*\}$  из  $G$  (4.2) выполнено условие седловой точки маленькой игры. Если в начальной позиции  $\{t_0, x_0\}$  имеет место  $z^{(0)}(t_0, x_0, \tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) = z \in [c, c - \beta]$ , то экстремальная стратегия  $U_c^{(0)} = u_c^{(0)}(t, x)$ , которая в области  $G$  (4.2) при  $t_* < \tau_m^{(0)}$  определяется условием

$$\max_{v \in Q} \left( \left| \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} \right|_{(t_*, x_*)} f(t_*, x_*, u_c^{(0)}, v) \right) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left( \left| \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} \right|_{(t_*, x_*)} f(t_*, x_*, u, v) \right) \quad (4.5)$$

а в других позициях произвольным вектором  $u \in P$ , обеспечит для всех движений  $x|t = x[t_0, x_0, U_c^{(0)}]$  результат  $z(\tau_i^*, x| \tau_i^*, t_0, x_0, U_c^{(0)}) = p_i^{(0)}$   $i = 1, \dots, m) < c$  при  $\tau_k^* \in [0_{k-1}, 0_k]$   $k \in I$ .

Теорема 4.1 доказывается такими же рассуждениями, как и теорема 3.1, если  $0_k$  заменить на  $\tau_k^{(0)}$   $k \in I$ .

#### § 5. Условия стабильности в игре сближения к заданным моментам при $m$ целевых множествах

Пусть функция  $\omega(t_k, x_k, p_k)$  удовлетворяет всем условиям, приведенным в § 4. Предположим, что множества

$$M_k = \{(t, p) : 0_{k-1} \leq t \leq 0_k; p \in M_k(t)\} \quad (k \in I) \quad (5.1)$$

компактны в себе в евклидовой метрике и  $M_k(0_k) = \emptyset$ . Обозначим через  $T_k$  множество всех тех значений  $t \in [0_{k-1}, 0_k]$ , для которых сечения  $M_k(t)$  не пусты, а символом  $T_k(t_*) = T_k \cap [t_*, 0_k]$ ,  $k \in I$ .

**Задача 5.1.** Дана начальная позиция  $(t_*, x_*)$  ( $t_* \in [0_{k-1}, 0_k]$ ) и набор  $(t_1, x_1), \dots, (t_{l-1}, x_{l-1})$ . Требуется найти минимизирующие моменты  $\tau_k^{(0)} \in [0_{k-1}, 0_k]$   $k = l, \dots, m$ , максимизирующую элементарную программу  $\{\tau_i\}_{i=1}^m = \{\tau_i, [t_*, \tau_m^{(0)}], \tau_i^{(0)}, x_*\}_{i=1}^m$  и в ней минимизирующее управление  $\tau_i^{(0)}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} \min_{\tau_1, \dots, \tau_m} z^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, t_1, \dots, t_{l-1}, \tau_l, \dots, \tau_m) = \\ = z^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, t_1, \dots, t_{l-1}, \tau_l^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Задача 5.1 имеет решение, так как функция  $z^{(0)}(t_*, x_*, x_1, \dots, x_{l-1}, t_1, \dots, t_{l-1}, \tau_l, \dots, \tau_m)$  при  $\tau_k \in T_k(t_*) \cap [0_{k-1}, 0_k]$  полунепрерывна по  $(\tau_l, \dots, \tau_m)$ , а множества  $T_k(t_*) \cap [0_{k-1}, 0_k]$  замкнуты. Таким образом, функция  $z^{(0)}(\cdot)$  достигает своего минимума на каких-то значениях  $\tau_k^{(0)} \in T_k(t_*) \cap [0_{k-1}, 0_k]$ . Допустим, что для всякой позиции  $(t_*, x_*) \in G$  (4.2)

$t_* \in [\theta_{l-1}, \theta_l]$  и набора  $(t_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, l-1$ , когда  $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$  понимается в смысле (5.2), найдутся минимизирующие моменты  $\tau_k^{(0)}$  такие, что во всякой максимизирующей элементарной программе  $\{\tau_k, \{t_\alpha, x_\alpha^{(0)}\}, \tau_k^{(0)}, x_\alpha^*\}_{\Pi}$  будет существовать лишь единственное по существу минимизирующее управление  $\tau_k^{(0)}$  и единственный набор векторов

$$p_k^{(0)} \in M_k(t_k) \quad k = 1, \dots, l-1; \quad p_k^{(0)} \in M_k(\tau_k^{(0)}) \quad k = 1, \dots, m$$

минимизирующий (3.2) при замене символов  $\theta_k$  на  $t_k$  и  $\tau_k^{(0)}$  на  $\tau_k^{(0)}$ . Множество всех минимизирующих моментов  $\{\tau_k^{(0)}\}$ , удовлетворяющих вышеприведенным условиям минимакса, отвечающим данной начальной позиции  $\{t_*, x_*\}$  и набору  $(x_1, \dots, x_{l-1})$ , обозначим через  $T_k^{(0)}(t_*, x_*, t_1, x_1, \dots, t_{l-1}, x_{l-1})$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Из результатов § 2 вытекает, что при всяком  $\tau_k^{(0)} \in T_k^{(0)}(\cdot)$  минимизирующее управление  $\tau_k^{(0)}(t_*, \tau_k^{(0)})$  удовлетворяет при почти всех  $t \in [t_*, \tau_k^{(0)}]$  условию максимина (2.6) – (2.9) с заменой  $\theta_k$  на  $t_k$  и  $\tau_k^{(0)}$ .

Обозначим через  $S_k(t_*, x_*, t_1, x_1, \dots, t_{l-1}, x_{l-1}, \{\tau_k^{(0)}\})$  множество всех векторов  $\bar{s}_i(t_k)$ , определенных согласно (2.7) – (2.9) при замене  $\theta_k$  на  $\tau_k^{(0)}$  для позиции  $(t_*, x_*)$ , набора  $(t_1, x_1), \dots, (t_{l-1}, x_{l-1})$  и при всех значениях  $\{\tau_k^{(0)}\}$ . Сформулируем следующее условие:

Условие 5.1. Скажем, что выполнено это условие, если для всякой позиции  $(t_*, x_*)$  из области  $G$  (4.2) и набора

$$(t_\alpha, x_\alpha) \in G_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, l-1), \quad t_\alpha \in [\theta_{l-1}, \theta_l]$$

при  $t \in [t_*, \tau_k^{(0)}]$   $T_k(\cdot)$  и при всяком выборе вероятностной меры  $\nu(dv)$  найдется, по крайней мере, одна группа минимизирующих моментов  $\tau_k^{(0)} \in T_k^{(0)}(\cdot)$  и, по крайней мере, одна вероятностная мера  $\nu(du, dv)$ , удовлетворяющая условию

$$\int_{\Pi} \bar{s}_i(du, dv) = \nu(dv) \quad (5.3)$$

и такая, что для всех векторов  $\bar{s}_i \in S_k(\cdot)$  будет справедливо неравенство  $\int_{\Pi} \bar{s}_i f(t_*, x_*, u, v) \nu(du, dv) \leq \max_{u \in Q} \min_{v \in P} \bar{s}_i f(t_*, x_*, u, v)$  ( $i \in I$ ).

Функция  $\varepsilon^{(0)}(\cdot)$  (5.2) в точках  $\tau_k^{(0)}$  не возрастает, а фазовый вектор  $x(t)$  непрерывен, следовательно, имея в виду, что условия леммы 43.1 из [2] соблюдаются, то точно такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 43.1 из [2], приходим к выводу об  $n$ -стабильности каждого из множеств

$$W_k(t_1, \dots, t_l) = \{t, x\} : \theta_{l-1} \leq t \leq \theta_l, \text{ и } \tau_k^{(0)}(t, x, x_1, \dots, x_l, t_1, \dots, t_l, \tau_k^{(0)}, \dots, \tau_k^{(0)}) \leq \tau_k^{(0)}; \quad x \in W_{k-1}(t_1, \dots, t_l); \quad j = 0, \dots, m-1; \\ W_{-1} = R^n; \quad c \leq t \leq c + \delta \quad (5.4)$$

Таким образом, верно следующее утверждение:

**Теорема 5.1.** Пусть выполнено условие 5.1, и для всякой позиции  $(t_*, x_*) \in \Gamma$  (4.2) выполнено условие седловой точки для маленькой игры. Тогда при всяком  $\varepsilon (0 < \varepsilon < \frac{1}{3})$  КПС  $U_c^{(0)} = u_c^{(0)}(t, x)$ , экстремальная к системе множеств  $W_{j_i}(\cdot)$  (5.4), гарантирует для всякого движения  $x[t] = x[t, t_0, x_0, U_c^{(0)}]$  выполнение условия

$$\min_{\{\tau_k\}} \rho((\tau_k, x[\tau_k, t_0, x_0, U_c^{(0)}], p_k^{(0)}), k = 1, \dots, m) \leq \varepsilon \quad (5.5)$$

если только  $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \tau_1^{(0)}, \dots, \tau_m^{(0)}) \leq \varepsilon$ .

## § 6. Обобщенное экстремальное прицеливание в игре об уклонении при $m$ целевых множествах

Для простоты изложения рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v \quad (6.1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  —  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$  и  $(n \times q)$  — матрицы с непрерывными элементами при  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $u \in P$ ,  $v \in Q$  ( $P \subset R^p$ ,  $Q \subset R^q$  — заданные компакты). Пусть заданы выпуклые замкнутые и ограниченные множества  $M_k$ ,  $k \in I$  в пространстве  $R^n$ . Пусть также заданы моменты времени  $t_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$ . Пусть выполнены следующие условия:

Условие 6.1. При всех  $t \in [t_0, \tau_k]$  и  $\tau_k \in [t_0, \theta_k]$  функция

$$x_k(t, \tau_k, t) = - \left| \int_{\tau_k}^t \min_{u \in P} \{ X(\tau_k, \tau) B(\tau) u d\tau + \int_{\tau_k}^{\tau} \max_{v \in Q} \{ X(\tau_k, \tau) C(\tau) v d\tau + \min_{p \in M_k(\tau_k)} \{ p \} \right| \quad (6.2)$$

выпукла по  $t$  для всех  $k \in I$ .

Условие 6.2. Для всякого  $u$  вектора  $u \in P = \text{co} \{ u \in P_i \}$  найдется вектор  $v \in Q = \text{co} \{ v \in Q_j \}$  такой, что для всех  $t \in [t_0, \theta_m]$  и для всех векторов  $t$  будет справедливо неравенство

$$t'(B(t)u + C(t)v) \geq \min_{u \in P} t'[B(t)u] + \max_{v \in Q} t'[C(t)v] \quad (6.3)$$

Здесь  $X(t, \tau)$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{x} = A(t)x$  ( $X(t, t) = E$ ).

Построим следующую функцию Лапунова:

$$J(t, x) = \sum_{j=1}^m \int_{t_j}^{\theta_j} \frac{d\tau_j}{\tau_j^{p_j}(t, x, \tau)}; \quad t \in [\theta_{k-1}, \theta_k - \mu] \quad (\theta_0 = t_0) \quad (6.4)$$

Здесь

$$z_j^{(0)}(t, x, \theta_j) = \max_{\|y_j\| \leq 1} |t_j X(\theta_j, t)x - z_j(t, \theta_j, t_j)| \quad (6.5)$$

Единственность вектора  $J_j^{(0)}$ , минимизирующего (6.5), следует из условия 6.1,  $\mu > 0$  — сколь угодно малое число. Область  $G \subset R^{n+1}$ ,

определяемая условием  $\min_{z_j} z_j^{(0)}(t, x, z) > 0$  ( $j=1, \dots, m$ ), где опре-

делена функция  $z_j(t, x)$  (6.4), открыта и при стремлении точки  $(t, x)$  к границе этой области функция  $z_j(t, x)$  неограниченно возрастает. Область  $G$  не пересекается с множествами  $\{(t, x) : x \in M_k, t \in [t_0, t_k - \mu]\}$ .

Определим стратегию второго игрока из условия

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \int_j^{\tau_j} \frac{dz_j}{[z_j^{(0)}(t, x, z)]^2} t_j^{(0)} X(\tau_j, t) \right\} C(t) v_c |t, x| =$$

$$= \max_{v \in Q} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_j^{\tau_j} \frac{dz_j}{[z_j^{(0)}(t, x, z)]^2} t_j^{(0)} X(\tau_j, t) \right\} C(t) v$$

$$(t_k - \mu < t < t_k - \mu, t_0 = t_0, (k \in I))$$

а при  $(t, x) \in G$  положим  $\{v_c |t, x|\} = Q$ . Множества  $\{v_c |t, x|\}$ , определяемые из (6.6), полунепрерывны сверху относительно включения во  $(t, x)$ , поэтому уравнение в континуантах

$$\frac{dx(t)}{dt} \in A(t)x(t) + B(t)P + C(t)co\{v_c |t, x|\} \quad (x(t_0) = x_0) \quad (6.7)$$

имеет абсолютно-непрерывные решения. Составим производную функции  $\lambda(t, x)$  по произвольному решению  $x(t)$  уравнения (6.7), исходящему из точки  $(t_0, x_0) \in G$ . Учитывая условие 6.2 и включение  $co\{v \in \{v_c |t, x|\}\} \subseteq co\{v \in Q\}$ , заключаем, что  $d/dt \lambda(t, x(t)) < 0$ . С другой стороны, любое движение  $x|t, t_0, x_0, V_c|$ , совершаемое по стратегии  $V_c$ , определяемой из (6.6), содержится в решениях уравнения (6.7). Следовательно, функция  $\lambda(t, x(t))$  не возрастает, что и обеспечит условие  $(t, x|t) \in G$  для всякого движения  $x|t, t_0, x_0, V_c|$ .

Таким образом, верно следующее утверждение:

**Теорема 6.1.** При выполнении условий 6.1 и 6.2 стратегия  $V_c + v_c |t, x|$ , определяемая из (6.6), обеспечит уклонение всех движений  $x|t, t_0, x_0, V_c|$  от попадания на множество  $M_k$  на промежутке  $[t_0, t_k)$  при всех  $k \in I$ , если только  $\min_{z_j} z_j^{(0)}(t_0, x_0, z) > 0$  ( $k \in I$ ).

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку и ценные советы.

ԱՊՐԱՏԱԿԱՅԻՆ ՕՐԱՉՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԽՈՂԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ  
ՉԱՄԱՐ ԾՐԱԿՐԱՅԻՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻՆՆԵՐԸ

Մ. Ս. ՎԱՐՐԻՆՅԱՆ

Ս. Մ Վ Ի Ս Վ Ի Ս Ի Մ

Դիտարկվում են ծրագրային կոնստրուկցիաների հիման վրա ստրատե-  
գիաների որոշման և ստարիլ կամուրջների կառուցման հարցերը Մ նպատա-  
կային բաղմուժյունների հետ մոտեցման և նրանցից պոնև մեկից շեղման

65

խնդիրների համար: Առանձնացված են ռեզուլյար դեպքերը և համապատասխան մինիմալիստի և մաքսիմալիստի պայմաններից որոշվում են էքստրեմալ ստրատեգիաները: Ստրատեգիաներն ընտրվում են ամենանեղ դասերից: Ամենալայն դասը, որն օգտագործվում է աշատեղ, դա կտոր առ կտոր պիրալին ստրատեգիաների դասն է:

## PROGRAMME CONSTRUCTIONS FOR GAME PROBLEMS WITH $m$ AIM SETS

M. S. GABRIELIAN

### S u m m a r y

The questions of determining strategies and constructing stable bridges are considered for the problems of approaching with every set and deviation from at least one of them on the basis of programme constructions. Regular cases of given problems are singled out and extremal strategies are determined from corresponding conditions of minimax or maximin. Classes of the strategies are chosen to be the possible narrowest. The widest class of the used strategies appeared to be piece-by-piece positional strategies.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Габриелян М. С., Субботин А. И. Программы движения в встрече с  $m$  целевыми множествами. ПММ, 1979, т. 43, № 2.
2. Красовский Н. И., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15.VI.1982