ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

СИМОНЯН В. В.

§ 1. Постановка задачи

Пусть упругое пространство составлено из двух полупространств ($z>0$, $z<-2h$) одинакового материала, соединенных между собой посредством слоя ($-2h\leqslant z\leqslant 0$) из другого материала. Слой расслаблен цилиндрическим отверстием ($r=R$, $-2h\leqslant z\leqslant 0$). Между граничными плоскостями слоя и двух полупространств на участках $r>R_1>R$ имеет место полное сцепление, а на кольцевых областях $R<r<R_1$ имеются трещины. На боковой поверхности и на торцах цилиндрической полости действует нормальное давление постоянной интенсивности.

Следует определить распределение напряжений на контактных поверхностях слоя с полупространствами.

В силу симметрии будем рассматривать напряженное состояние только в половине области составного пространства, а именно: в составном полупространстве ($-h<z<\infty$) с цилиндрической выемкой глубины h (фиг. 1). Таким образом, решается задача пространственного слоя с цилиндрическим отверстием, сцепленным с полупространством. Другие задачи для полупространства и пространственных слоев рассматривались в работах [9, 11—13, 15].

Условимся все величины, относящиеся к полупространству ($z>0$), отмечать индексом 1, а величины, относящиеся к слою с цилиндрическим отверстием ($-h\leqslant z\leqslant 0$, $R\leqslant r<\infty$), —индексом 2.

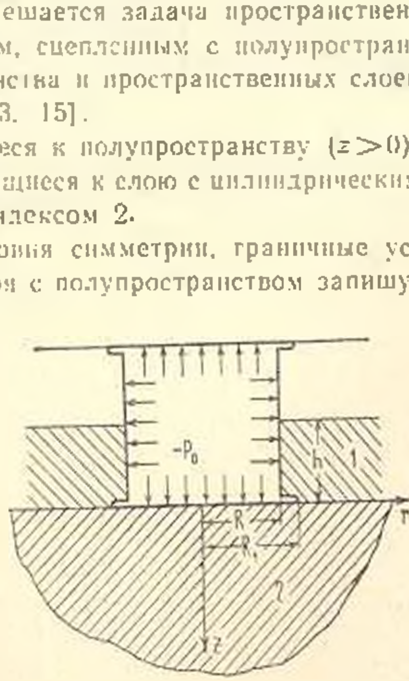
При такой постановке задачи условия симметрии, граничные условия и условия полного сцепления слоя с полупространством запишутся в виде

$$U_z^{(1)}(r,-h)=0,\quad \tau_{rz}^{(1)}(r,-h)=0$$
$$(R\leqslant r<\infty) \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(R,z)=0,\quad \sigma_r^{(1)}(R,z)=-p_0$$
$$(-h\leqslant z\leqslant 0) \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=0,\quad \sigma_z^{(2)}(r,0)=-p_0$$
$$(0\leqslant r<R) \tag{1.3}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r)$$
$$(R\leqslant r<\infty) \tag{1.4}$$



Фиг. 1

$$\sigma_z^{(1)}(r,0)=\sigma_z^{(2)}(r,0)=p(r) \qquad (R\leqslant r<\infty) \tag{1.5}$$

$$U_z^{(1)}(r,0)=U_z^{(2)}(r,0); \quad U_r^{(1)}(r,0)=U_r^{(2)}(r,0) \quad (R_1\leqslant r<\infty) \tag{1.6}$$

Входящие в условия (1.4) и (1.5) функции $p(r)$ и $\tau(r)$ —контактные нормальные и касательные напряжения, действующие на плоскости сцепления $z=0$, которые подлежат определению.

Решение задачи построим с помощью бигармонической функции А. Лява, которую для области (1) ищем в виде суммы интеграла Вебера [16] и ряда Фурье [1, 3, 4]

$$\Phi_1(r,z)=\int_0^\infty [A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda z+B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda z+C(\lambda)\lambda z\operatorname{sh}\lambda z+D(\lambda)\lambda z\operatorname{ch}\lambda z]\,W_0(\lambda r)d\lambda+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty [A_k K_0(\lambda_k r)+B_k\lambda_k r K_1(\lambda_k r)]\sin\lambda_k z+Dz\ln r$$

$$(R\leqslant r<\infty,\ -h\leqslant z\leqslant 0) \tag{1.7}$$

а для полупространства—в виде интеграла Ханкеля

$$\Phi_2(r,z)=\int_0^\infty \exp(-\lambda z)J_0(\lambda r)[E(\lambda)+\lambda zF(\lambda)]d\lambda, \quad (z>0,\ 0\leqslant r<\infty) \tag{1.8}$$

Здесь $J_n(x)$ —функции Бесселя первого рода от действительного аргумента. $K_n(x)$ —функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента, функция $W_n(x)$ определяется соотношением

$$W_n(x)=J_n(x)Y_1(\lambda R)-Y_n(x)J_1(\lambda R) \tag{1.9}$$

где $Y_n(x)$ —функции Бесселя второго рода от действительного аргумента,

$$W_1(\lambda R)=0; \quad W_0(\lambda R)=-2/\pi R\lambda; \quad \lambda_k=k\pi/h$$

Пользуясь известными формулами, выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию Лява, и удовлетворяя граничным условиям (1.1)—(1.5), все неизвестные весовые функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ выражаются через трансформанты Вебера и Ханкеля от неизвестных контактных напряжений $p(r)$, $\tau(r)$ и неизвестные коэффициенты разложения B_k.

Удовлетворяя последним двум условиям сцепления (1.6), получим интегральные уравнения относительно неизвестных контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$

$$G_2\int_0^\infty \frac{W_0(\lambda R)[(1-2\nu_1)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h]d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^\infty t\tau(t)\,W_1(\lambda t)dt+$$

$$+2(1-\nu_1)G_2\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^2\lambda h\,W_0(\lambda r)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^\infty tp(t)\,W_0(\lambda t)dt+$$

$$+4(1-\nu_1)\,G_2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 B_k^*\int_0^{\infty}\frac{\lambda^3\operatorname{sh}^2\lambda h\,W_0(\lambda R)\,W_0(\lambda r)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}=$$

$$=-2G_1(1-\nu_2)\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}tp(t)J_0(\lambda t)\,dt+(1-2\nu_2)G_1\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\times$$

$$\times\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)J_1(\lambda t)\,dt+2(1-\nu_2)G_1p_0\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\int_0^{R}tJ_0(\lambda t)\,dt \tag{1.10}$$

$$2(1-\nu_1)\int_0^{\infty}\frac{W_1(\lambda r)\operatorname{ch}^2\lambda h\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)W_1(\lambda t)\,dt+$$

$$+G_2\int_0^{\infty}\frac{[(1-2\nu_1)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_1(\lambda r)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}tp(t)W_0(\lambda t)\,dt+$$

$$+2G_2\sum_{k=1}^{\infty}B_k^*\left\{\lambda_k^2\int_0^{\infty}\frac{\lambda^3W_1(\lambda r)[(1-2\nu_1)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_0(\lambda R)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2(1-\nu_1)}{RK_1(\lambda_kR)}+\frac{\lambda_kK_0(\lambda_kR)}{K_1^2(\lambda_kR)}\right]K_1(\lambda_kR)+\frac{\lambda_krK_0(\lambda_kr)}{RK_1(\lambda_kr)}\right\}=$$

$$=-(1-2\nu_2)G_1p_0\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_0^{R}tJ_0(\lambda t)\,dt+G_1(1-2\nu_1)\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}tp(t)\times$$

$$\times J_0(\lambda t)\,dt-2G_1(1-\nu_2)\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)J_1(\lambda t)\,dt \tag{1.11}$$

где $\Delta(\lambda)=J_1^2(\lambda R)+Y_1^2(\lambda R)$, $\Omega(\lambda)=\lambda h+\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h$, $B_k^*=\lambda_k^2RK_1(\lambda_kR)B_k$

Добавляя к интегральным уравнениям (1.10) и (1.11) уравнение для коэффициента B_k

$$M(\lambda_k)B_k^*=4\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_k^2\lambda_p^2B_p^*\int_0^{\infty}\frac{\lambda^4W_0^2(\lambda R)\operatorname{sh}^2\lambda h\,d\lambda}{\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2(\lambda^2+\lambda_p^2)^2}+$$

$$+2\lambda_k^2\int_0^{\infty}\frac{W_0(\lambda R)\operatorname{sh}^2\lambda h\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}\int_{R_1}^{\infty}tp(t)\,W_0(\lambda t)\,dt+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{W_0(\lambda R)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Omega(\lambda)+\lambda^2\operatorname{sh}2\lambda h]}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)\,W_1(\lambda t)\,dt \tag{1.12}$$

где введено обозначение

$$M(\lambda_k)=\frac{\lambda h}{2}\left[1+\frac{2(1-\nu_1)}{\lambda_k^2R^2}-\frac{K_0^2(\lambda_kR)}{K_1^2(\lambda_kR)}\right] \tag{1.13}$$

получим два интегральных уравнения и бесконечную систему, где неизвестными являются контактные напряжения $p(r)$, $\tau(r)$ и коэффициент B_k.

Далее используем следующие известные соотношения для бесселевых функций:

$$J_0(\lambda t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty\frac{\sin\lambda x\,dx}{\sqrt{x^2-t^2}},\quad J_1(\lambda t)=-\frac{2}{\pi t}\int_t^\infty\frac{x\cos\lambda x\,dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.14}$$

$$W_1(\lambda t)=-\frac{2}{\pi t}\int_t^\infty\frac{x[\cos\lambda x\,Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x\,J_1(\lambda R)]dx}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$W_0(\lambda t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty\frac{[\sin\lambda x\,Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x\,J_1(\lambda R)]dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.15}$$

После подстановки выражений (1.14) и (1.15) в интегральные уравнения (1.10) и (1.11), полученные в новых интегральных уравнениях внутренние интегралы преобразуем следующим образом:

$$\int_{R_1}^\infty tp(t)J_0(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty H(x)\sin\lambda x\,dx;\quad \int_{R_1}^\infty t\tau(t)\,J_1(\lambda t)\,dt=\int_{R_1}^\infty S(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$\int_{R_1}^\infty tp(t)\,W_0(\lambda t)\,dt=\int_{R_1}^\infty H(x)[\sin\lambda x\,Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x\,J_1(\lambda R)]\,dx$$

$$\int_{R_1}^\infty t\tau(t)\,W_1(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty S(x)[\cos\lambda x\,Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x\,J_1(\lambda R)]dx \tag{1.16}$$

Здесь введены новые функции

$$H(x)=\frac{2}{\pi}\int_{R_1}^x\frac{tp(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}};\quad S(x)=-\frac{2x}{\pi}\int_{R_1}^x\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.17}$$

С помощью формул (1.17) интегральные уравнения (1.10) и (1.11) запишутся относительно новых функций $H(x)$ и $S(x)$, которые представляют собой интегралы Абеля от неизвестных контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$.

Далее, применяя к первому интегральному уравнению оператор

$$L_1(f)=\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{rf(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

а к второму — оператор

$$I_2(f)=\frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]$$

и учитывая следующие известные соотношения [8]:

$$\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{rW_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-[\sin\lambda y Y_1(\lambda R)+\cos\lambda y J_1(\lambda R)]$$

$$\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{rJ_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\sin\lambda y;\quad \frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{J_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=\cos\lambda y$$

$$\frac{d}{dy}\left[y\int_y^{\infty}\frac{W_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=\cos\lambda y Y_1(\lambda R)-\sin\lambda y J_1(\lambda R) \qquad (1.18)$$

получим следующие интегральные уравнения:

$$\mu_1 H(y)=\frac{\mu_2}{\pi}\int_{R_1}^{\infty}S(x)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\int_{R_1}^{\infty}K_1(x,y)H(x)dx+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}K_2(x,y)S(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(1)}(y)B_k^*+f(y)$$

$$\mu_1 S(y)=\frac{\mu_2}{\pi}\int_{R_1}^{\infty}H(x)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\int_{R_1}^{\infty}S(x)K_3(x,y)dx+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}H(x)K_4(x,y)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(2)}(y)B_k^* \qquad (1.19)$$

Здесь введены обозначения

$$\mu_1=1+\frac{(1-\nu_1)G_2}{(1-\nu_2)G_1};\quad \mu_2=\frac{(1-2\nu_2)G_1-(1-2\nu_1)G_2}{2(1-\nu_2)G_1}$$

$$K_1(x,y)=(1-\mu_1)\int_0^{\infty}\left\{\frac{I_1(\lambda R)\exp(-(x+y)\lambda)}{K_1(\lambda R)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\exp(-2\lambda h)-1-2\lambda h)S_2(\lambda x)S_2(\lambda y)}{\pi\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\right\}d\lambda$$

$$K_2(x,y)=\frac{2h}{\pi}(\mu_1-1)\int_0^{\infty}\frac{\lambda S_2(\lambda y)S_1(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}$$

$$K_4(x,y)=\frac{2h(\mu_1-1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda S_1(\lambda y)S_2(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}$$

$$\chi_k^{(1)}(y)=\frac{4(1-\mu_1)\lambda_k^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{W_0(\lambda R)\,\mathrm{sh}^2\lambda h\,S_2(\lambda y)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2};\quad f(y)=\frac{2p_0(\mu_1-1)}{\pi}\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\chi_k^{(2)}(y)=\frac{4\lambda_k^2}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2S_1(\lambda y)\left[(1-2\nu_1)\,\mathrm{sh}\lambda h\,\mathrm{ch}\lambda h-\lambda h\right]W_0(\lambda R)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}-$$

$$-\frac{G_2}{2(1-\nu_1)G_1}\left[2\nu_1-1-\lambda_k y-\frac{\lambda_k K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k R)}\right]\frac{\exp(-\lambda_k y)}{K_1(\lambda_k R)}$$

$$\begin{aligned}&S_1(\lambda x)=\cos\lambda x\,Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x\,J_1(\lambda R)\\&S_2(\lambda x)=\sin\lambda x\,Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x\,J_1(\lambda R)\end{aligned}\tag{1.20}$$

Заметим, что при $R_1=R$ ядра $K_1(x, y)$ и $K_3(x, y)$ имеют неподвижную особенность вида $\dfrac{1}{x+y-2R}$. При $R_1>R$ все ядра $K_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ в системе интегральных уравнений (1.19) регулярны.

Для определения постоянной D получим уравнение

$$\frac{D}{R^2}+p_0=-\frac{1}{k}\int\limits_{R_1}^\infty S(x)\,dx\int\limits_0^\infty\frac{S_1(\lambda x)\,W_2(\lambda R)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)}\tag{1.21}$$

Перейдем в системе интегральных уравнений (1.19) к безразмерным координатам $(R/x,\ R/y)$ и введем новые обозначения

$$H^*(x)=RH(R/x)/x;\quad S^*(x)=RS(R/x)/x$$

Тогда, продолжая функции $H^*(x)$ и $S^*(x)$ на отрицательную область значений аргумента соответственно четным и нечетным образом $H^*(-x)=H^*(x)$; $S^*(-x)=-S^*(x)$, вместо интегральных уравнений (1.19) получим интегральные уравнения такого вида:

$$H^*(y)+\frac{\mu_2}{\pi\mu_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{S^*(x)dx}{y-x}=\int\limits_{-1}^{1}H^*(x)\,K_1^*(x, y)dx+\int\limits_{-1}^{1}S^*(x)\,K_2^*(x, y)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(1)*}(y)B_k^*+f^*(y)\tag{1.22}$$

$$S^*(y)-\frac{\mu_2}{\pi\mu_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{H^*(x)dx}{y-x}=\int\limits_{-1}^{1}S^*(x)\,K_3^*(x, y)dx+\int\limits_{-1}^{1}H^*(x)K_4^*(x, y)+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(2)*}(y)B_k^*\tag{1.23}$$

а из уравнения (1.12), на основании тех же преобразований, получим

$$B_k^*=\sum_{p=1}^\infty a_{kp}B_p^*+\int\limits_{-1}^{1}S^*(x)Q_k^{(1)}(x)dx+\int\limits_{-1}^{1}H^*(x)Q_k^{(2)}(x)dx;\ k=1, 2, \ldots\tag{1.24}$$

где

$$K_i(x,y)=\frac{K_i\left(\frac{1}{|x|},\frac{1}{|y|}\right)}{2|xy|},\quad i=1,2,3,4;\quad f^*(y)=f\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|$$

$$\chi_k^{(1)*}(y)=\chi_k^{(1)}\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|;\qquad \chi_k^{(2)*}(y)=\chi_k^{(2)}\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|$$

$$Q_k^{(1)}(x)=\frac{1}{M(\lambda_k)|x|}\int_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Omega(\lambda)+\lambda_k^2\mathrm{sh}^4\lambda h]S_1(\lambda/|x|)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}$$

$$Q_k^{(2)}(x)=\frac{1}{M(\lambda_k)|x|}\int_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)S_2(\lambda/|x|)\mathrm{sh}^2\lambda h d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}\qquad(1.25)$$

Итак, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений (1.22) и (1.23), а также к бесконечной системе (1.24).

§ 2. Сведение решения задачи к системе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Введем новую комплекснозначную функцию

$$\varphi(x)=H^*(x)+iS^*(x)\qquad(2.1)$$

Умножая интегральное уравнение (1.23) на i и складывая с интегральным уравнением (1.22), получим

$$\varphi(y)-\frac{\theta}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{y-x}=\int_{-1}^{1}\varphi(x)K(x,y)dx-\int_{-1}^{1}\overline{\varphi(x)}P(x,y)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k(y)B_k^*+f^*(y)$$

где (2.2)

$$\theta=\frac{\mu_2}{\mu_1};\quad K(x,y)=\frac{1}{2}[K_1^*(x,y)-iK_2^*(x,y)+K_3^*(x,y)+iK_4^*(x,y)]$$

$$P(x,y)=\frac{1}{2}[K_1^*(x,y)+iK_2^*(x,y)-K_3^*(x,y)+iK_4^*(x,y)]$$

$$\chi_k(y)=\chi_k^{(1)*}(y)+i\chi_k^{(2)*}(y)\qquad(2.3)$$

Таким образом, решение задачи сведено к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Решение уравнения (2.2) ищем в виде ряда по ортогональным многочленам Якоби [7]

$$\varphi(x)=\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\qquad(2.4)$$

где $\omega(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{\alpha}$, $|\mathrm{Re}\,\alpha|<1$, $\alpha=-i\gamma$, $\gamma=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,i\theta$

Далее, пользуясь известным функциональным соотношением для многочленов Якоби [7, 10] и условием ортогональности многочленов Якоби, сведем уравнение (2.2) к бесконечной системе

$$X_n=\sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{nm}+\sum_{m=1}^{\infty} \bar{X}_m B_{nm}+\sum_{k=1}^{\infty} B_k^* D_{kn}+E_n^{(0)} X_0+E_n^{(1)} \tag{2.5}$$

где

$$A_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)\,dy \int_{-1}^{1} \omega(x) P_m^{(\alpha,-\alpha)}(x) K(x, y)\,dx$$

$$B_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)\,dy \int_{-1}^{1} \omega(x) P_m^{(-\alpha,\alpha)}(x) P(x, y)\,dx$$

$$D_{kn}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y) \chi_k(y)\,dy; \quad E_n^{(0)}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y) b(y)\,dy$$

$$E_n^{(1)}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y) f^*(y)\,dy \tag{2.6}$$

$$b(y)=\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)\,dy \int_{-1}^{1} \left[\omega(x) P_0^{(\alpha,-\alpha)}(x) K(x, y)+\omega(x) P_0^{(-\alpha,\alpha)}(x) P(x,y)\right] dx$$

$$\omega_1(y)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{\alpha}; \quad c_n=\frac{2\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(2n-1)\Gamma^2(n)}$$

Уравнение (1.24) примет вид

$$B_k^*=\sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} B_p^*+\sum_{n=0}^{\infty} X_n F_{kn}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty} F_{kn}^{(2)} \bar{X}_n, \quad k=1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

где

$$F_{kn}^{(1)}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\left[Q_k^{(2)}(x)-iQ_k^{(1)}(x)\right] dx$$

$$F_{kn}^{(2)}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)\left[Q_k^{(1)}(x)+iQ_k^{(2)}(x)\right] dx$$

Итак, решение задачи окончательно сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7).

После численного решения бесконечных систем (2.5) и (2.7) все искомые величины будут определены.

Неизвестный коэффициент X_0 определяется из условия равновесия слоя

$$X_0=-\frac{R^{*}\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma\, p_0}{2\pi\gamma}$$

§ 3. Исследование бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7)

Рассмотрим первое из ядер бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.5)

$$A_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1}\omega_1(y)P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)dy\int_{-1}^{1}\omega(x)P_m^{(\alpha,-\alpha)}(x)K(x, y)dx \tag{3.1}$$

где ядро $K(x, y)$ определяется по второй формуле (2.3).

Используя формулу Родрига для ортогональных многочленов Якоби [17] и интегрируя по частям в интеграле (3.1), получим

$$A_{nm}=\frac{1}{2mc_n(2n-2)}\int_{-1}^{1}P_{m-1}^{(\alpha+1,-\alpha-1)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{-\alpha+1}dx\int_{-1}^{1}(1+y)^{\alpha+1}\times$$

$$\times(1-y)^{-\alpha+1}P_{n-2}^{(-\alpha+1,\alpha+1)}(y)\frac{\partial^2K^*(x, y)dy}{\partial x\partial y} \tag{3.2}$$

Сделав замену переменных

$$x=\cos\theta,\quad y=\cos\varphi;\quad 0<\theta<\pi;\quad 0<\varphi<\pi \tag{3.3}$$

и используя асимптотические представления многочленов Якоби для больших n [17], а также асимптотическое представление функций $\Gamma(n)$ для больших n [17], получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I}{m\sqrt{m-1}} \tag{3.4}$$

где

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{(1-\cos\theta)^{\alpha+1}(1+\cos\theta)^{-\alpha+1}(1-\cos\varphi)^{-\alpha-1}(1+\cos\varphi)^{\alpha+1}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\alpha+\frac{1}{2}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2K^*(\cos\theta, \cos\varphi)}{\partial\theta\partial\varphi}\right|d\theta d\varphi \tag{3.5}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I}{\sqrt{n-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m-1}}=0 \tag{3.6}$$

то следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|=0 \tag{3.7}$$

Тем же путем строятся аналогичные оценки для всех коэффициентов бесконечной системы (2.5) и (2.7).

Таким образом, показывается, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7) квазивполне регулярна.

Для выделения особенностей контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$ у границы зоны контакта, на основании формул обращения Абеля напряжения $p(r)$ и $\tau(r)$ представим в виде

$$p(r)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-R_1^2}}\left[\cos\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}X_n P_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}X_n P_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)\right]+\theta_1(r) \tag{3.8}$$

$$\tau(r)=-\frac{1}{r\sqrt{r^2-R_1^2}}\left[\cos\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}X_n P_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}X_n P_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)\right]+\theta_2(r) \tag{3.9}$$

Из формул (3.8) и (3.9) видно, что контактные нормальные и касательные напряжения у границы зоны контакта имеют корневую особенность с осциллирующими множителями $\cos\left[\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\right]$ и $\sin\left[\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\right]$ [18].

В случае однородного пространства с цилиндрической полостью решение задачи сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма II рода и к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С помощью ортогональных многочленов Лежандра, решение задачи окончательно сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [14].

§ 4. Численный пример

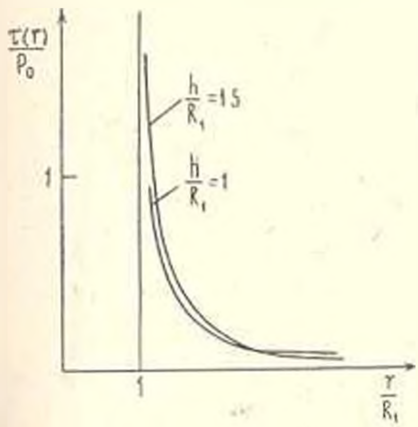
Для напряженного состояния однородного пространства с цилиндрической полостью, когда на поверхности полости действует равномерное давление, проведены расчеты на ЭВМ. Решена система линейных уравнений из 24-х неизвестных. Результаты расчетов по определению контактных напряжений представлены в табл. 1.

Таблица 1

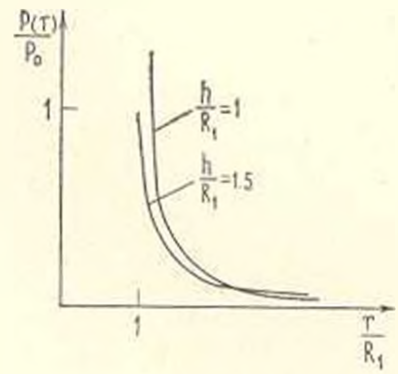
r/R_1	$p(r)/p_0$		$\tau(r)/p_0$	
	$\frac{h}{R_1}=1;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1{,}5;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1{,}5;\ \nu=0{,}3$
1,01	7,6432	5,1182	3,8307	2,9815
1,03	3,8762	2,1324	2,9011	2,0912
1,05	2,3644	1,9961	1,7724	1,3445
1,07	2,1065	1,6351	1,3278	1,0827
1,09	1,6084	1,1763	1,0442	0,9440
1,5	0,2286	0,1812	0,1057	0,0491
2,0	0,1834	0,1423	0,0893	0,0758
2,5	0,1261	0,1373	0,0452	0,0609
3	0,1051	0,1212	0,0140	0,0352

Распределение контактных напряжений иллюстрируется также на фиг. 2 и 3.

Опираясь на результаты вычислений, можно сделать некоторые выводы относительно поведения контактных напряжений на линии сцепления слоя с цилиндрической полостью с полупространствами:



Фиг. 2



Фиг. 3

1. Для любой глубины цилиндрической полости и для любого значения коэффициента Пуассона оба напряжения имеют особенности у границы зоны контакта. Вследствие этого контактные напряжения резко возрастают при приближении к границе зоны контакта.

2. При уменьшении глубины цилиндрической полости контактные нормальные и касательные напряжения возрастают

Автор выражает благодарность Абрамяну Б. Л. и Макаряну В. С. за внимание к работе.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՌՈՉՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Վ. Վ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գլանային խոռոչով անհամասեռ տարածության համար առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ խոռոչի պատերի վրա ազդում է հավասարաչափ բեռ։ Խնդրի լուծումը փնտրվում է Լյավի բիհարմոնիկ ֆունկցիաների օգնությամբ։ Խնդրի լուծումը բերվում է անվերջ գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծմանը։ Մասնավոր դեպքում, երբ տարածությունը համասեռ է, կատարված է թվային հաշվարկ կոնտակտային նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման բնույթը պարզելու համար։

AN AXISYMMETRICAL PROBLEM FOR A NONHOMOGENEUS SPACE WITH A CYLINDRICAL CAVITY

V. V. SIMONIAN

Summary

An axisymmetrical problem for a nonhomogeneus space with a cylindrical cavity is considered. It is assumed that the load of p_0 intensivity

acts upon the surface of the cylindrical cavity. The solution of the problem is built with the help of Love biharmonic functions. The solution of the problem is reduced to the infinite systems of linear algebraic equations. In particular when the space is homogeneus calculations for the normal and tangential stresses are made at the points of contact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.— Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1959, т. 22, № 2, с. 3—13.
2. *Васильев В. З.* Напряжения в упругом изотропном полупространстве вблизи торца вертикальной цилиндрической выемки.—ПМ, АН УССР, 1967, т. 3, № 7, с. 109—117.
3. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра.—Докл. АН Арм. ССР. 1958, т. *26*, №2, с. 65—72.
4. *Макарян В. С., Папоян С. О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1980, т. *33*, №1, с. 3—11.
5. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976, т. *29*, №5, с. 3—11.
6. *Srivastav P., Narain Prem* Stress distribution to pressurized exterior crak in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity.—Intern. J. Engng. Sci., 1966, v. 4, №6, p. 689—697.
7. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного пространства при наличии сцепления.—ПММ, 1973, т. *37*, вып. 6, с. 1109—1116.
8. *Бейтман Г. и Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками.—ПММ, 1972, т. *36*, вып. 5, с. 770—780.
10. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби.—ПММ, 1966, т. *30*, вып. 3, с. 564—569.
11. *Srivastav R. P.* A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and second kind.—Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2, 1964, v. 14, №2, p. 25—36.
12. *Шапиро Г. С.* К вопросу об определении напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки.—Изв. АН СССР, ОТН, 1941, №5, с. 105—109.
13. *Айзенберг Д. Ю., Шапиро Г. С.* О передаче давления через слой, имеющий цилиндрическое отверстие.—Инж. сборник, 1950, №7, с. 65—69.
14. *Симонян В. В.* Осесимметричная задача для пространства с цилиндрической полостью.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. *72*, №4, с. 244—250.
15. *Симонян В. В.* Об одной осесимметричной задаче для пространства с цилиндрической полостью. В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела.—Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981, с. 238—243.
16. *Титчмарш Э.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго рода. Часть 1.—М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
18. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения.—Докл. АН СССР, 1937, т. *17*, №4, с. 173—178.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
28.I.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ПЕТРОСЯН Л. Г.

Интерес к гидродинамическим задачам, в которых рассматриваются движения жидкостей, приобретающих во внешнем магнитном поле значительную намагниченность («магнитные жидкости»), вызван возможными техническими применениями.

О создании и исследовании стабильных намагничивающихся жидкостей достаточно подробно изложено в обзорной работе [1]. Экспериментальными исследованиями магнитных жидкостей обнаружен целый ряд интересных явлений.

Ниже рассматривается распространение нелинейных волн в намагничивающейся жидкости.

Уравнения двумерных нестационарных коротких волн*, описывающие резкое изменение параметров среды в окрестности фронтов волн, для газовой динамики были получены в работе [2]. Учет вязкости для классических (симметричных) жидкостей был выполнен в [3]. Распространение волн в электропроводящей жидкости в магнитном поле для классических жидкостей рассмотрено в [4, 5]. Изучение задач распространения ударных волн в жидкостях, содержащих пузырьки газа, проводится в [6—11]. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры с учетом взаимовлияния пузырьков (с учетом влияния окружающего ансамбля других пузырьков на динамику его радиального движения) и теплообмена в процессах межфазного взаимодействия дано в работах [12, 13]. Построению общего вида уравнения коротких волн в теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений посвящены работы [14, 15]. Обобщение полученных ранее уравнений модуляции и их исследования [16] для более сложных сред, к каковым относится электропроводящая жидкость в магнитном поле с несимметричным тензором напряжений, содержащая газовые пузырьки, дается в работах [17, 18].

Представляет интерес применение развитой нелинейной теории волновых движений к намагничивающимся жидкостям в магнитном поле, содержащим газовые пузырьки, с целью выяснения роли эффектов намагничивания и газовых пузырьков на форму уравнений коротких волн и уравнений модуляции.

В настоящей работе дается построение общего вида уравнений

* Термин «короткие волны» был введен в работе [2] для выделения областей в окрестности волны, где параметры движения резко изменяются.

коротких волн для магнитной жидкости, содержащей пузырьки газа, в магнитном поле. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн. Дается упрощение уравнений модуляции для типично дифракционной задачи, в которой определяющими являются производные вдоль волны. Приводится условие фокусирования узких пучков.

1. Уравнение коротких волн магнитных жидкостей с пузырьками газа. Рассмотрим магнитную жидкость с пузырьками газа, магнитная проницаемость которой постоянна и отличается от магнитной проницаемости несущей магнитной жидкости.

Различие в магнитных свойствах жидкости и газа можно описать зависимостью магнитной проницаемости смеси μ от концентрации газа β: $\mu=\mu(\beta)$. Магнитная жидкость рассматривается как гомогенная среда, представляющая модель жидкости с пузырьками газа, в которой пренебрегают всеми эффектами, связанными с пузырьковой структурой газо-содержания, за исключением сжимаемости [6].

Уравнения движения непроводящих магнитных жидкостей с пузырьками совершенного газа имеют вид [1]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0 \qquad (1.1)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla p+\rho\nabla\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right) \qquad (1.2)$$

$$\nabla\times\vec{H}=0, \quad \nabla\cdot(\mu\vec{H})=0 \qquad (1.3),\ (1.4)$$

При записи уравнения (1.2) было использовано следующее из (1.3) уравнение:

$$\frac{\nabla\vec{H}^2}{2}-(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}=0$$

Здесь ρ — массовая плотность смеси, p — давление смеси, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, ∇ — пространственный градиент, $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени.

Обозначим величины, относящиеся к газовой фазе, индексом g, а жидкости — индексом f: например, ρ_f и ρ_g означают плотности жидкости и газа соответственно. Определим β как объем газа в единице объема смеси, тогда для плотности смеси имеем [6]

$$\rho=\rho_f(1-\beta)+\rho_g\beta \qquad (1.5)$$

Если допустить, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, то массу газа в единице массы смеси можно считать постоянной [6]

$$(1-\beta)/\beta\rho_g=\mathrm{const} \qquad (1.6)$$

В континуальной теории вкладом газа в массовую плотность обычно пренебрегают, тогда взамен (1.5) запишем [6]

$$\rho \approx \rho_l(1-\beta) \tag{1.7}$$

Так как жидкость несжимаема, а для газа имеем уравнение состояния совершенного газа, то в случае политропического процесса можно записать

$$\rho_l=\mathrm{const}, \quad p_g^{1/n}R^3=\mathrm{const}, \quad \rho_g/p_g^{1/n}=\mathrm{const} \tag{1.8}$$

где n—показатель политропы, причем при $n=1$ имеем изотермический процесс, а при $n=\gamma^*$—адиабатический процесс; R—радиус пузырька.

Связь между давлением в смеси p и давлением в газе p_g возьмем в следующем виде [6]:

$$p_g=p+\rho_l R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{4\nu\rho_l}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{3\rho_l}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \tag{1.9}$$

где ν—кинематическая вязкость смеси.

Здесь принято, что связь (1.9) между p и p_g существует и в смеси.

Исключая p из уравнений (1.2), согласно (1.9) получим

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla p_g-(1-\beta)\nabla\left[\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right]+\rho_l R\nabla\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{4\nu\rho_l}{R}\nabla\frac{dR}{dt} \tag{1.10}$$

где в членах с дисперсией и диссипацией удержаны величины основного порядка.

Из соотношений (1.6)—(1.8) имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta}=\frac{d\mu}{d\rho}\frac{d\rho}{d\beta}\approx-\rho_l\frac{\partial\mu}{\partial\rho}, \quad \frac{d\beta}{d\rho_g}=-\frac{(1-\beta)\beta}{\rho_g}$$

$$\frac{\nabla\rho_g}{\rho_g}=\frac{1}{n}\frac{\nabla p_g}{p_g}, \quad \nabla\rho=-\rho_l\nabla\beta, \quad \nabla\rho_g=\frac{\rho_g}{\beta\rho_l(1-\beta)}\nabla\rho \tag{1.11}$$

Из третьего и пятого уравнений (1.11) получим

$$\nabla p_g=a_*^2\nabla\rho, \quad a_*^2=\frac{p_g}{\rho_l}\frac{n}{(1-\beta)\beta} \tag{1.12}$$

где a_*—скорость звука в жидкости с пузырьками.

Условия (обобщенные) совместности на волнах получаются следующей заменой [19] в уравнениях (1.1), (1.8), (1.10), (1.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}\to-\iota\delta, \quad \nabla\to\vec{n}\delta, \quad \iota=-\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \vec{n}=\nabla F \tag{1.13}$$

Здесь $\delta=\dfrac{\partial}{\partial F}$—производная по нормали к волне, ι—нормальная скорость волны, $\vec{n}$—единичный вектор нормали к волне, $F=F(x, y, z, t)$—уравнение поверхности волны. Как показано в [14, 15], при вычислении слагаемых, соответствующих малым диссипативным членам, следует оставлять только производные по нормали к волне.

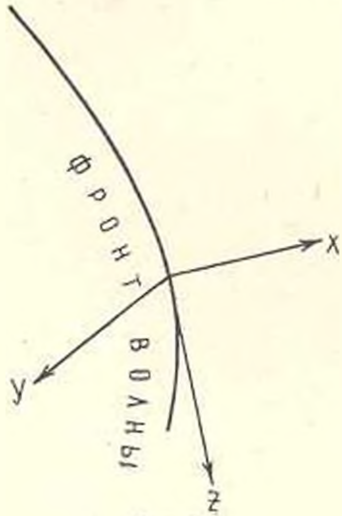
Предположено, что производные по касательной намного меньше производных по нормали

Обычно соотношение (1.13) используется для гиперболических уравнений [19], однако, как показано в [15, 20], их можно использовать при записи обобщенных условий совместности, в результате применения которых диссипативные члены формально включаются в формулу для нормальной скорости волны.

$$c_n\delta\rho-\rho\delta U_n=0 \tag{1.14}$$

$$-\rho c_n\delta\vec{v}=-\vec{n}a_*^2\delta\rho-(1-\beta)\vec{n}\delta\left[\frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right]+\rho_f R\vec{n}c_n^2\delta^2R-\frac{4\nu}{R}\rho_f c_n\vec{n}\delta^2R \tag{1.15}$$

$$\delta\rho=-\rho_f\delta\beta,\quad \delta R=-\frac{R}{3np_g}\delta p_g,\quad \delta p_g=np_g\frac{\delta\rho}{\beta\rho_f(1-\beta)} \qquad (1.16),(1.17),(1.18)$$



Фиг. 1

где $c_n=\iota-U_n$ — нормальная скорость волны относительно частицы, U_n—проекция скорости частицы на нормаль к волне.

Отметим, что $d^2R/dt^2=c_n^2\delta^2R$.

Выберем ось x по нормали к волне, а y и z — по касательной к ней (фиг. 1).

Из уравнения (1.3) можно получить

$$\delta H_y=\delta H_z=0 \text{ или } \delta\vec{H}_t=0 \tag{1.19}$$

где $\vec{H}_t$—тангенциальный вектор к волне.

Из уравнения (1.4) с учетом того, что в силу (1.11)

$$\delta\mu=\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\partial\beta=-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\delta\rho$$

можно получить

$$-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}H_n\delta\rho+\mu\delta H_n=0$$

или

$$\delta H^2=2H_n^2\frac{1}{\rho_f}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\delta\rho \tag{1.20}$$

Здесь было использовано тождество $\delta H^2=\delta(H_y^2+H_z^2)=2H_n\delta H_n$. Из уравнений (1.14)—(1.19) и (1.21) получим

$$c_n^2=a_*^2-(1-\beta)\frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}\frac{1}{\rho_f}+(1-\beta)\frac{H_n^2}{4\pi\rho_f\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2+$$
$$+\frac{R^2c_n^2}{3\beta(1-\beta)}\frac{\delta^2U_n}{\delta U_n}-\frac{4\nu c_n}{3\beta(1-\beta)}\frac{\delta^2U_n}{\delta U_n} \tag{1.21}$$

Обозначим $\beta=\beta_0+\beta'$, $R=R_0+R'$, $\rho=\rho_0+\rho'$, $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$, $a_*=a_{*0}+a_*'$.

$c_n = c + c'$, $\rho = \rho_0(\beta_0) + \frac{\partial \rho_0}{\partial \beta_0}\beta'$, $p = p_0 + p'$, где штрих означает малые возмущения, произведенные волной, перед которой вектор скорости частиц невозмущенного движения $\vec{V}_0 = 0$.

Условия совместности имеют место и для возмущений, поэтому из (1.19) можно получить, что $H_\tau' = 0$.

Известно, что [18]

$$a_*' = \varkappa^0 U_n', \quad \varkappa^0 = \left| \frac{\partial(\rho a_*)}{a_* \partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0,\, a_*=a_{*0}} \tag{1.22}$$

Для получения уравнения движения среды вблизи волны (уравнение коротких волн) можно использовать метод [20], основанный на записи уравнения для произвольной среды и конкретизации коэффициентов для данной среды.

Уравнение коротких волн для произвольной нелинейной диссипативной диспергирующей среды можно записать в виде [14, 17, 18]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(u) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right]$$

$$L = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\alpha_k \Delta_{\alpha_k}} \left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] \tag{1.23}$$

Здесь $dx = H_1 d\tau$; $H_1 = c + U_{n0}$ — нормальная скорость для невозмущенной волны (в данной задаче $U_{n0} = 0$); $\tau = \tau_1(x, y, z) - t$ — время пробега от волны до данной точки (эйконал) в линейной задаче: α_1, α_2, α_3 — компоненты волнового вектора в системе координат x, y, z; $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ — дисперсионное уравнение в линейной задаче; Φ — значение u для лучевого решения; $u = U_n'$ — возмущенное значение проекции на нормаль к волне скорости частицы; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Значение коэффициентов в правой части (1.23) можно найти, используя формулу для нормальной скорости волны в нелинейной диссипативной задаче, определяемую из условий совместности на волне, записанных в виде [18]

$$c_n = c + \gamma U_n' + D' \frac{\delta^2 U_n'}{\delta U_n'} + E' \frac{\delta^3 U_n'}{\delta U_n'} \tag{1.24}$$

где значения γ, D', E' можно получить из (1.21).

Заметим, что

$$\delta = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau}, \; D = \frac{D'}{H_1}, \; E = \frac{E'}{H_1^2}, \; \Gamma = \gamma + 1$$

Для нахождения коэффициентов с производными по y и z в $L(u)$ следует использовать уравнение (1.21), записанное для линейной задачи без диссипации и дисперсии в виде

$$c^2 = a^2_{*0} - (1-\beta_0)\frac{H^2_{*}}{8\pi}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}\frac{1}{\rho_f} + (1-\beta_0)\frac{H^2_{*0}}{4\pi\rho_f\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2 \qquad (1.25)$$

где

$$c^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i^2}, \quad H_{*0} = \frac{H_{x0}\alpha_1 + H_{y0}\alpha_2 + H_{z0}\alpha_3}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i^2}}$$

Здесь учтено, что в невозмущенной среде $\vec{V}_0=0$.

Учитывая вышеизложенное, (1.25) можно записать в виде

$$1 - \frac{(1-\beta_0)}{4\pi\rho_f\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2(\alpha_1 H_{x0} + \alpha_2 H_{y0} + \alpha_3 H_{z0})^2 =$$

$$= \left\{a^2_{*0} - (1-\beta_0)\frac{H^2_{*}}{8\pi}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}\frac{1}{\rho_f}\right\}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) \qquad (1.26)$$

В подвижной системе координат, связанной с волной, $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_3 \approx 0$. Тогда скорость волны будет [14]

$$H_1 = c \approx \frac{1}{\alpha_1}, \quad \text{а} \quad \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\alpha_k\Delta_{\alpha_k}} \approx \frac{1}{\alpha_1}$$

Учитывая малость α_2, α_3 вблизи оси x, можно получить

$$-d\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\alpha_1 = \left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1-\beta_0}{\rho_f}\frac{M^2}{4\pi\mu_0 d^2}H^2_{y0} + M\left\{\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)\frac{H^2_{x0}H^2_{y0}}{\rho_f^2(4\pi\mu_0)^2 d^2} + 1\right\}$$

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3} = -\frac{(\partial\mu_0/\partial\beta_0)^2(1-\beta_0)M}{d^2 8\pi\mu_0\rho_f}H_{y0}H_{z0}$$

$$d = M + \left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f}H^2_{x0}, \quad M = a^2_{*0} - \frac{H^2_{0}}{8\pi}\frac{1-\beta_0}{\rho_f}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} \qquad (1.27)$$

Выражение для $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_3^2$ получится из первого уравнения (1.27) с заменой в правой части H_{y0} на H_{z0}

Из условий совместности (1.14), (1.16)—(1.18) можно получить

$$\beta' = \frac{1-\beta_0}{c}U'_n$$

а из (1.20)

$$H'_n = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\frac{1-\beta_0}{c}U'_n H_{n0}$$

Учитывая эти соотношения, из (1.24), подставляя c_n в равенство (1.21), находим для γ, D', E' следующие выражения:

$$\gamma = \frac{a_{*0}}{c}a^0 - \frac{1-\beta_0}{2c^2}\frac{1}{\rho_f 8\pi}\left| H^2_0\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} - (1-\beta_0)\frac{\partial^3\mu_0}{\partial\beta_0^3}H^2_0 - \right.$$

$$\left. -2H^2_{n0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1}{\mu_0} + 6(1-\beta_0)\frac{1}{\mu_0}H^2_{n0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} - 6(1-\beta_0)H^2_{n0}\frac{1}{\mu_0^2}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^3\right|$$

$$D' = -\frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0)}, \qquad E' = \frac{R^2 c}{6\beta_0(1-\beta_0)} \tag{1.28}$$

2. *Уравнение для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн.* Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение $\Phi=\text{const}$.

Ищем решение уравнения (1.23) в виде волн

$$u=U_0+\frac{1}{2}\left[U_1\exp(i\theta-m\alpha^2t)+\overline{U}_1\exp(-i\theta-m\alpha^2t)+\right.$$

$$\left.+U_2\exp(2i\theta-2m\alpha^2t)+\overline{U}_2\exp(-2i\theta-2m\alpha^2t)\right] \tag{2.1}$$

где $\theta=\alpha\xi-\omega t$; $\alpha=\alpha_1\omega_0/H_1$; ω_0—частота в неподвижной системе координат; m—коэффициент затухания; U_0, U_1, U_2—медленно меняющиеся амплитуды; $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$—комплексно-сопряженные функции.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.23) и приравнивая e^0, $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$, получим

$$\frac{\partial^2U_0}{\partial t\partial\xi}-\frac{1}{2}L(U_0)=-\frac{1}{H_1}\left[\Gamma\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U_0\frac{\partial U_0}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{4}\Gamma\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(U_1\overline{U}_1)\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-2m\alpha^2t)+D\frac{\partial^3U_0}{\partial\xi^3}+E\frac{\partial^4U_0}{\partial\xi^4}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2U_1}{\partial t\partial\xi}-\frac{\partial U_1}{\partial\xi}(i\omega+m\alpha^2)+i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial t}+\omega\alpha U_1-i\alpha^3mU_1-$$

$$-\frac{1}{2}L(U_1)=-\frac{1}{H_1}\left[-\Gamma\alpha^2U_0U_1-\Gamma\frac{1}{2}\alpha^2\overline{U}_1U_2\exp(-2m\alpha^2t)+\right.$$

$$\left.+3Di\alpha\frac{\partial^2U_1}{\partial\xi^2}-3D\alpha^2\frac{\partial U_1}{\partial\xi}-Di\alpha^3U_1-6E\alpha^2\frac{\partial^2U_1}{\partial\xi^2}-4Ei\alpha^3\frac{\partial U_1}{\partial\xi}+\alpha_4EU_1\right] \tag{2.3}$$

$$4\alpha\omega U_2-4i\alpha^3mU_2+2i\alpha\frac{\partial U_2}{\partial t}+\left(\frac{1}{H_1}E\alpha^32i-2m\alpha^2\right)\frac{\partial U_2}{\partial\xi}-\frac{1}{2}L(U_2)=$$

$$=-\frac{1}{H_1}\left[-\alpha^2U_1^2\Gamma-8i\alpha^3U_2D+16\alpha^4U_2E\right] \tag{2.4}$$

Приравнивая в (2.3) члены, содержащие U_1, получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega=-\frac{1}{H_1}E\alpha^3, \quad m=-\frac{1}{H_1}D \tag{2.5), (2.6}$$

Из уравнения (2.4), с учетом (2.5) и (2.6), можно получить $U_2\sim\varepsilon^2$ (ε—малая величина порядка U_1). Для простоты рассмотрим случай, когда $E\alpha^3\gg1$, тогда можно отбросить слагаемые с производными от U_2. Уравнение (2.3) после подстановки (2.4)—(2.6) примет вид

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t\,\partial\tau} + i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial\tau}\left[-\frac{3}{H_1}Ei\alpha^2 - \frac{2}{H_1}D\alpha^3\right] + \frac{1}{H_1}(3Di\alpha - 6E\alpha^2)\frac{\partial^2 U_1}{\partial\tau^2} =$$

$$= \frac{1}{H_1}\left(\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma^2\alpha^2\bar{U}_1 U_1^2\exp(-2m\alpha^2 t)}{-4Di\alpha + 12E\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}L(U_1) \qquad (2.7)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член $i\alpha U_1\dfrac{\partial\ln\Phi}{\partial t}$.

3. Уравнения для амплитуд в задаче стационарной дифракции. Пусть размеры области по y и z имеют порядок $\sqrt{1/\alpha}$, что является типичным для задач дифракции узких пучков, тогда из уравнения (2.2) можно получить $U_0 \sim \varepsilon^2/\alpha$, соответствующий член U_0 в уравнении (2.3) можно отбросить. Поскольку задача стационарная и имеет место $(\partial U_1/\partial t) = (\partial U_1/\partial t)_{x_k} + \partial U_1/\partial\tau_1$, что следует из $\tau = \tau_1(x_k) - t$, где x_k — исходная система координат, то $(\partial U_1/\partial t)_{\tau_1} = 0$, причем $(\partial U_1/\partial t) = \partial U_1/\partial\tau_1$. Для дифракционных задач $\partial^2 U_1/\partial\tau_1^2$ можно отбросить по сравнению с $\partial^2 U_1/\partial y^2$, следовательно, уравнение (2.7) примет вид (в дальнейшем индекс при τ опущен)

$$i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial\tau}\left(1 - \frac{3}{H_1}E\alpha^2 + \frac{2}{H_1}D\alpha i\right) = \frac{1}{2H_1}\,\frac{\Gamma^2\alpha^2 U_1|U_1|^2\exp(-2m\alpha^2 t)}{-4D\alpha i + 12E\alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha_1}\left[\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\,\partial z}\right] \qquad (3.1)$$

положим

$$U_1 = ae^{i\varphi}$$

где a — амплитуда, φ — фаза. При этом можно получить систему уравнений для a и φ.

Можно искать решение задачи узких пучков для точных уравнений (2.3) и (2.4), полагая в них $U_2 = be^{i\psi}$ и получив систему четырех уравнений для a, φ и b, ψ; при этом следует считать

$$a = \frac{K(\tau)}{f}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \qquad b = \frac{K'(\tau)}{F}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 F^2}\right)$$

$$\varphi = \sigma(\tau) + k\frac{y^2}{2}, \qquad \psi = \Sigma(\tau) + k'\frac{y^2}{2}$$

и получить обыкновенные дифференциальные уравнения для f, F, σ, Σ, k, k', K, K'.

В задаче о пучках с осевой симметрией получается решение [17], из которого следует, что для сред, в которых $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 > 0$, выпуклые волны фокусируются.

Для простоты выберем магнитное поле по оси пучка x, тогда из (1.27) получится, что $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2\partial\alpha_3 = 0$, $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 = \partial^2\alpha_1/\partial\alpha_3^2$. В случае, когда $M < 0$ и $d > 0$ (что означает $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 > 0$) будет иметь место фокусирование пучков. Хотя указанное условие означает, что в силу (1.5) для точечных волн $c^2>0$ только внутри некоторого угла вблизи оси x, и в этом смысле волны вне угла неустойчивые, тем не менее для узких пучков $H_n \approx H_x$ условие устойчивости выполнено.

ՄԱԳՆԻՍԱՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱՂԴՈԵՎ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է մագնիսական դաշտում գտնվող, գազի պղպջակներ պարունակող, մագնիսական հեղուկի համար կարճ ալիքների հավասարումների ընդհանուր տեսքի կառուցումը։ Ստացված են քվազիմոնոքրոմատիկ ալիքների դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդների և ֆազերի հավասարումները։ Տիպիկ դիֆրակցիոն խնդիրների համար տրվում է մոդուլյացիայի հավասարումների պարզեցումը, որում որոշիչ են հանդիսանում ըստ ալիքի երկարության ածանցյալները։ Բերվում է նեղ փնջերի ֆոկուսացման պայմանը։

THE PROPAGATIONS OF NONLINEAR WAVES IN MAGNETIZED FLUID

A. G. BAGDOEV, L. G. PETROSSIAN

Summary

The construction of general form of equations of short waves in magnetic fluid with gas bubbles in the magnetic field is given. The equations of slow varying amplitudes and phases of quasimonochromatic waves are obtained. The simplification of equations of modulations for typical diffraction problems, in which the greatest is the differentiation along the wave, is rendered. The conditions of narrow bundle focusing are carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.—Итоги науки и техники, сер.Механика жидкости и газа, М.: т. *16*, с. 76—208.
2. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
3. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.—ПММ, 1969, т. *33*, № 1, с. 162—168.
4. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике.—Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. *55*, № 5, с. 273—280.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Ж. выч. мат. и матем. физики, 1972, т. *12*, № 6, с. 1512—1529.
6. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.—В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.

7. *Crespo A.* Sound and shock waves in liquids containing bubbles.—Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 11, p. 2274.
8. *Бэтчелор Дж. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.—Сб. пер. Механика, 1968, № 3, с. 65—84.
9. *Кедринский В. К.* Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.—ПМТФ, 1968, № 4, с. 29—34.
10. *Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде.—Докл. АН СССР, 1972, т. *207*, № 2, с. 313—315.
11. *Noordzij L.* Shock waves in bubble-liquid mixtures.—Phys. Comm., 1971, v. 3, № 1.
12. *Когарко Б. С.* Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации.—Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 4, с. 779—782.
13. *Паркин Б. Р., Гилмор Ф. Р., Броуд Г. Л.* Ударные волны в воде с пузырьками воздуха.—В сб.: Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974, с. 152—258.
14. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды.—ЖТФ, 1980, т. *50*, вып. 12, с. 2504—2511.
15. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями.—ЖТФ, 1980, т. *50*, вып. 12, с. 2512—2519.
16. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1, с. 133—143.
17. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. *36*, № 5, с. 3—16.
18. *Bagdoev A. G., Petrossian L. G.* The propagation of quasimonochromatic nonlinear modulation waves in micropolar electroconducting gas fluid mixture.—Modelling, Simulation and Control, A, AMSE, Press, 1984, v. 1, № 1, p. 1—29.
19. *Jeffery A., Taniuti T.* Nonlinear wave propagation.—New York—London: Acad. Press, 1964. 369 p.
20. *Багдоев А. Г.* Уравнение нелинейной вязкотермомагнитной среды вблизи фронтов волн.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. *27*, № 1, с. 63—77.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
7.XII.1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

УДК 539.374

ВВИНЧИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНУЮ ТРУБУ

АКОПЯН Г. А.

Рассматривается соосное внедрение с одновременным вращением вокруг своей оси жесткого цилиндрического тела в анизотропную, идеально-жестко-пластическую трубу, материал которого подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла [1]. Подобная картина пластического деформирования встречается при клинопрессовой сварке разнородных труб [2]. Технологическая схема такого рода сварки представляет собой предварительный нагрев и соосное впрессовывание трубы из более твердого материала с монотонно возрастающим по оси внешним диаметром в трубу из более мягкого материала, помещенную в плотную недеформируемую цилиндрическую прессформу. Процесс соединения материалов происходит в твердой фазе, причем физический контакт образуется за счет пластической деформации более мягкого материала, вызывающей пластические деформации в приповерхностном весьма тонком слое трубы из более твердого материала. Заметных объемных формоизменений этой трубы в процессе впрессовывания не наблюдается.

§ 1. Основные уравнения задачи. 1. Общие соотношения теории анизотропного идеального жестко-пластического течения в цилиндрических координатах в обычных обозначениях имеют вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0
\end{aligned}\tag{1.1}$$

условие текучести Мизеса-Хилла

$$F_0(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+G_0(\sigma_z-\sigma_r)^2+H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+L_0\tau_{\theta z}^2+M_0\tau_{rz}^2+N_0\tau_{r\theta}^2=1\tag{1.2}$$

зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещения и напряжений

$$\xi_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\Omega[H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_r-\sigma_z)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega[F_0(\sigma_\theta - \sigma_z) + H_0(\sigma_\theta - \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \Omega[F_0(\sigma_z - \sigma_\theta) + G_0(\sigma_z - \sigma_r)]$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = N_0\tau_{r\theta}\Omega \tag{1.3}$$

$$2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = L_0\tau_{\theta z}\Omega$$

$$2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = M_0\tau_{rz}\Omega$$

2. Компоненты напряжений и скоростей перемещений можно представить через произвольные функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ в следующем виде:

$$\sigma_r = -2A - 2Bz - 2C\theta + \int_a^r \left[2\mu(F+G)\varphi' - \lambda\left(Ff' - G\frac{f}{r}\right)\right]\frac{\Omega_*}{r}\,dr$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \Omega_*\left[2\mu(F+G)\varphi' - \lambda\left(Ff' - G\frac{f}{r}\right)\right], \quad \tau_{r\theta} = C + \frac{D}{r^2}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \Omega_*\left\{2\mu F\varphi' - \lambda\left[(F+H)f' + H\frac{f}{r}\right]\right\}, \quad \tau_{rz} = Br + \frac{E}{r}$$

$$\tau_{\theta z} = 2L\Omega_*\left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(fr)'\right], \quad u = (\lambda f - 2\mu\varphi)\exp(\lambda z + \mu\theta) \tag{1.4}$$

$$v = 2(r\varphi)'\exp(\lambda z + \mu\theta) + Kr, \quad w = -\frac{1}{r}(rf)'\exp(\lambda z + \mu\theta) + T$$

где λ, μ, a—заданные постоянные; A, B, C, D, E, K, T—произвольные постоянные и введены обозначения

$$\Omega_* = \sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 + N_0\tau_{r\theta}^2}\left\{(G+F)(\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - 2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f' - 2\mu\varphi')(rf)' + \right.$$

$$\left. + (H+G)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2 + 4L\left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\right\}^{-1/2}$$

$$F = \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = L_0^{-1}, \quad M = M_0^{-1}, \quad N = N_0^{-1}$$

$$\Delta = F_0G_0 + G_0H_0 + H_0F_0$$

Уравнения (1.4) будут решением системы уравнений (1.1)–(1.3), если функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{1+\lambda^2r^2}{r^2}f + 2\mu\lambda\varphi + \frac{M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}\left\{(G+F)(\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - \right.$$

$$-2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f'-2\mu\varphi')(rf)'+(G+H)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2+4L\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\Big\}^{1/2}=0$$

$$\varphi''+\frac{\varphi'}{r}-\frac{1+\mu^2}{r^2}\varphi+\frac{\lambda\mu}{2r^2}f-\frac{N_0\tau_{r\theta}}{2r\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\Big\{(G+F)(\lambda f'-2\mu\varphi')^2- \tag{1.5}$$

$$-2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f'-2\mu\varphi')(rf)'+(G+H)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2+4L\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\Big\}^{1/2}=0$$

Полученная система уравнений кроме своих постоянных содержит еще четыре произвольные постоянные, входящие в функции $\tau_{r\theta}$ и τ_{rz}. Характер течения пластической массы на граничных поверхностях тела определяет краевые условия для этой системы, а из условий, накладываемых на указанные касательные напряжения на этих поверхностях, находятся произвольные постоянные, содержащиеся в этих выражениях. Гидростатическая постоянная A определяется из условия равновесия тела в продольном направлении. Решение (1.4) может представлять, в частности, пространственное деформирование пластического материала между шероховатыми жесткими сближающимися поверхностями $R_i=a_i+b_i\exp(\lambda z+\mu\theta)$, где a_i и b_i —положительные заданные постоянные.

3. В случае осесимметричного деформирования имеем $C=\mu=0$. Вводя обозначение $(r\varphi)'=\psi(r)$, для компонентов напряжений из (1.4) имеем

$$\sigma_r=-2A-2Bz-\varkappa\int_a^r\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\frac{\omega}{r}\,dr,\quad \varkappa=\operatorname{sign}\lambda$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r-\varkappa\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\omega,\quad \sigma_z=\sigma_r-\varkappa\left[(F+H)f'+H\frac{f}{r}\right]\omega \tag{1.6}$$

$$\tau_{\theta z}=2L\psi\omega,\quad \tau_{r\theta}=\frac{D}{r^2},\quad \tau_{rz}=Br+\frac{E}{r}$$

где обозначено

$$\omega=\frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(G+H)\frac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}} \tag{1.7}$$

Компоненты скоростей перемещений

$$u=f\exp(\lambda z),\quad v=\zeta r+2\psi\exp(\lambda z),\quad w=-\frac{1}{r}(rf)'\exp(\lambda z)+T \tag{1.8}$$

Вместо (1.5) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

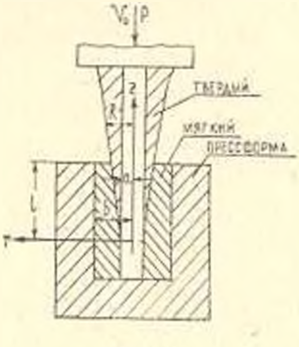
$$f''+\frac{f'}{r}-\frac{1+\lambda^2r^2}{r^2}f+\frac{\varkappa M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\times$$

$$\times\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(G+H)\frac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}=0$$

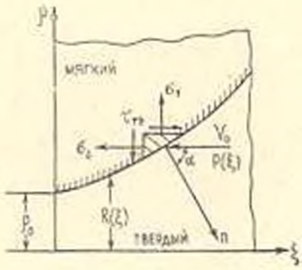
$$\psi'-\frac{\psi}{r}-\frac{\omega N_0\tau_{r0}}{2\sqrt{1-M_0\tau_r^2-N_0\tau_{r0}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(G+H)\frac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}=0 \tag{1.9}$$

Будем отличать внутреннее и внешнее внедрение в зависимости от того жесткий элемент впрессовывается с внутренней или с внешней стороны по отношению к элементу из более мягкого материала.

§ 2. *Внутреннее ввинчивание*. Пусть в абсолютно жесткую цилиндрическую прессформу плотно помещена цилиндрическая труба из идеально-жестко-пластического анизотропного материала с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, а в нее соосно впрессовывается, совершая одновременно вращательное движение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1, цилиндрическая труба из значительно более твердого материала с переменным внешним радиусом $R(z)=$ $=a+\nu u_1\exp\left(\nu\frac{z}{b}\right)$, где ν и u_1—заданные положительные постоянные (фиг. 1). Материал этой трубы считаем недеформируемым.



Фиг. 1



Фиг. 2

Цилиндрическую координатную систему закрепляем с жесткой трубой так, чтобы плоскость $z=0$ прошла через входное торцевое сечение, а положительное направление оси z—по оси труб, против направления движения. Полагаем, что вращение жесткой трубы происходит в сторону возрастания полярной координаты θ. Считаем, что материал деформируемой анизотропной трубы по всей толщине в области $z>0$ переходит в чисто пластическое состояние, а торец $z=l$ этой трубы считаем свободным от внешних сил.

Введем обозначения: $u_0=\frac{u_1}{b}$, $\lambda=\frac{\nu}{b}$, $\rho_0=\frac{a}{b}$, безразмерные координаты $\rho=\frac{r}{b}$, $\xi=\frac{z}{b}$ и функции

$$R(z)=bR_*(\xi),\quad f(r)=b^2f_*(\rho),\quad \psi(r)=b\psi_*(\rho)$$

где $R_*(\xi)=\rho_0+\nu u_0e^{\nu\xi}$.

После преобразования формул (1.6)—(1.7), опуская в дальнейшем знак $_*$, для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_r = -2A - 2B\xi - \int\limits_{\rho_0}^{\rho}\left(Ff' - G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}\,d\rho$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \left(Ff' - G\frac{f}{\rho}\right)\omega, \quad \sigma_z = \sigma_r - \left[(F+H)f' + H\frac{f}{\rho}\right]\omega \tag{2.1}$$

$$\tau_{\theta z} = 2L\psi\omega, \quad \tau_{r\theta} = \frac{D}{\rho^2}, \quad \tau_{rz} = B\rho + \frac{E}{\rho}$$

причем

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\dfrac{f'f}{\rho} + (G+H)\dfrac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2}}$$

Компоненты скоростей перемещений в новых обозначениях будут

$$u = \nu f(\rho)\exp(\nu\xi), \quad v = K\rho + 2\psi(\rho)\exp(\nu\xi), \quad w = -\frac{1}{\rho}(\rho f)'\exp(\nu\xi) + T \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем скорости перемещений отнесены к b.

Система дифференциальных уравнений (1.9) в новых переменных перепишется в виде

$$f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f + \frac{\nu M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 + N_0\tau_{r\theta}^2}} \times$$

$$\times\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0$$

$$\psi' - \frac{\psi}{\rho} - \frac{\nu N_0\tau_{r\theta}}{2\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0 \tag{2.3}$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также принимая за нормальную скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ радиальную скорость перемещения $u(\rho_0, \xi)$, для функции $f(\rho)$ будем иметь граничные условия

$$f(\rho_0) = u_0 V_0 = u_*, \quad f(1) = 0 \tag{2.4}$$

где V_0—скорость внедрения.

На контактной поверхности между жесткой и деформируемой трубами принимаем условие $v = \beta V$, где $V = \omega_1 R$—линейная скорость (в долях b) точки внешней поверхности жесткой трубы, β—параметр, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, зависящий от скорости вращения, шероховатости поверхностей, физико-механических свойств материалов и определяемый из эксперимента. Используя принятое условие и выражение v из (2.2), находим $K = \beta\omega_1$ и значение

$$\psi(\rho_0) = \frac{\nu}{2}\beta\omega_2 m_0 \qquad (2.5)$$

Принимаем, что степени шероховатости на внутренних и внешних поверхностях в продольных и кольцевых направлениях, соответственно, заданы и равны m_1, $-q_1$ и m_2, $-q_2$, причем $m_i, q_i > 0$ и подчиняются условию $m_i^2 + q_i^2 \leq 1$. Используя эти граничные условия, находим

$$B = \frac{m_2 - \rho_0 m_1}{1 - \rho_0^2}, \quad E = \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2}\rho_0, \quad D = -q_2 - \rho_0^2 q_1 \qquad (2.6)$$

При одинаковой шероховатости на контактных поверхностях, то есть при $\rho = \rho_0$ и $\rho = 1$, степени шероховатости одинаковы по всем направлениям и равны соответственно m_1 и m_2. Можно положить

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{m_1 v}{\sqrt{v^2 + w^2}}, \quad \tau_{rz} = \frac{m_1 w}{\sqrt{v^2 + w^2}} \quad \text{при } \rho = \rho_0.$$

Полагая $K = T = 0$ и учитывая выражения для $\tau_{r\varphi}$ и τ_{rz} в (2.1), из формул (2.2) находим

$$B = \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\frac{\rho_0 m_1\left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0}\right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4}\left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}} - \frac{m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4}f'^2(1)}}\right\}$$

$$E = -\frac{\rho_0}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\frac{m_1\left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0}\right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4}\left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}} - \frac{\rho_0 m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4}f'^2(1)}}\right\}$$

$$D = -\frac{m_1\rho_0^2\psi(\rho_0)}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4}\left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}} = -\frac{m_2\psi(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4}f'^2(1)}}$$

Последнее равенство и (2.4) являются граничными условиями для системы уравнений (2.3). При отсутствии вращения $\psi(\rho) = D = 0$ и формулы для B и E совпадают с соответствующими выражениями (2.6).

Торец деформируемой трубы $\zeta = \zeta_0 - l/b$ свободен от нормальных сил, следовательно,

$$\int_{\rho_0}^{1} \sigma_z(\rho, \zeta_0)\rho\, d\rho = 0 \qquad (2.7)$$

Подставляя выражение σ_z из (2.1) и производя интегрирование по частям в полученном двухкратном интеграле, найдем

$$A = -B\zeta_0 - \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H + F + \frac{F}{\rho^2}\right)f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho\, d\rho$$

Используя выражения компонентов скоростей перемещений, легко проверить, что условие сохранения количества масс—

$$\rho_0\int_0^{\xi_0} u(\rho_0, \xi)\,d\xi = \int_{\rho_0}^{1} [w(\rho, \xi_0) - w(\rho, 0)]\,\rho\,d\rho$$

выполняется тождественно.

Из условия равновесия элемента на контактной поверхности трубы $\rho = R(\xi)$ (фиг. 2) для абсолютного значения давления по оси имеем

$$p(\xi) = -\sigma_\rho(\rho_0, \xi)\cos\alpha + \tau_{\rho z}(\rho_0)\sin\alpha$$

причем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Суммарная осевая сила, приходящаяся на эту поверхность, то есть сила впрессовывания будет

$$P = 2\pi b^2 \int_0^{\xi_0} R(\xi)\sqrt{1+R'^2(\xi)}\,p(\xi)\,d\xi \tag{2.8}$$

Подставляя выражения для $R(\xi)$ и $p(\xi)$ и производя интегрирование, находим

$$P/\pi b^2 = 2\rho_0 m_1\xi_0 + 2u_0(e^{\nu\xi_0}-1)(m_1+\nu\rho_0 S) + \nu^2u_0^2S(e^{2\nu\xi_0}-1) +$$
$$+ 4B\rho_0u_0[1+e^{\nu\xi_0}(\nu\xi_0-1)] + Bu_0^2[1+e^{2\nu\xi_0}(2\nu\xi_0-1)] \tag{2.9}$$

причем $S = Q - 2B\xi_0$, где

$$Q = -\frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f' + \left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho\,d\rho +$$
$$+\left[(F+H)f'(\rho_0) + H\frac{u_0}{\rho_0}\right]\omega(\rho_0)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции, входящие в (2.9), и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P = 2\pi b^2\xi_0(\rho_0+\nu u_0)(m_1+\nu^2u_0Q) \tag{2.10}$$

Вращающий момент определится по формуле

$$M^* = 2\pi b^3 q_1\int_0^{\xi_0}(\rho_0+\nu u_0e^{\nu\xi})^2\sqrt{1+\nu^4u_0^2e^{2\nu\xi}}\,d\xi \tag{2.11}$$

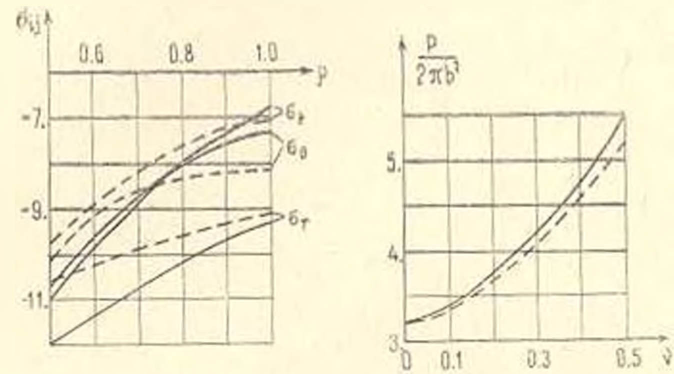
Получено численное решение системы дифференциальных уравнений (2.3) с краевыми условиями (2.4), (2.5), при следующих значениях параметров:

$\nu=0{,}2$; $\xi=0$, $\xi_0=8$, $V_0=1$; $u_0=0{,}25$; $\rho_0=0{,}5$; $m_1=0{,}8$; $m_2=0{,}1$; $q_1=0{,}5$

$$q_2=0{,}125;\ \beta=0{,}5;\ \omega_1=1;\ F/M=5;\ G/M=2;\ H/M=0{,}5;\ L/M=1{,}5;$$
$$N/M=2{,}5$$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (2.1), (2.10) на фиг. 3 построены графики напряжений и силы впрессовывания. Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впрессовывания для изотропной трубы. Как видно из графиков, анизотропия существенно влияет на напряженное состояние и на величину силы впрессовывания.

1. При весьма малых значениях ν в системе уравнений (2.3), принимая $\nu=0$, приходим к двум отдельным дифференциальным уравнениям



Фиг. 3

$$f''+\frac{f'}{\rho}-\frac{f}{\rho^2}=0,\quad \psi'-\frac{\psi}{\rho}=0 \tag{2.12}$$

решения которых при краевых условиях (2.4) и (2.5) соответственно будут

$$f=\frac{\rho_0 m_*}{1-\rho_0^2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right),\quad \psi=\frac{\nu}{2}\beta m_1 m_0\frac{\rho}{\rho_0} \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в формулы напряжений (2.1), получим

$$\sigma_r=-\frac{2(\rho_0 m_1-m_2)}{1-\rho_0^2}(\xi_0-\xi)-\frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+\frac{2(F-G)}{\rho^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{F+G}{\rho^4}\right]\omega_0\rho d\rho+\int_{\rho_0}^{1}\left(F-G+\frac{F+G}{\rho^2}\right)\frac{\omega_0}{\rho}d\rho,\quad \sigma_\theta=\sigma_r+\left(F-G+\frac{F+G}{\rho^2}\right)\omega_0$$
$$\sigma_z=\sigma_r+\left(F+2H+\frac{F}{\rho^2}\right)\omega_0,\quad \tau_{rz}=\frac{m_2-\rho_0 m_1}{1-\rho_0^2}\frac{\rho_0}{\rho}-\frac{\rho_0 m_1-m_2}{1-\rho_0^2}\rho \tag{2.14}$$

$$
\omega_0 = \frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{F+G+4H+(F-G)\frac{2}{\rho^2}+\frac{F+G}{\rho^4}+L\alpha^2\rho^2}}, \quad \tau_{r\theta}=-q_1\frac{\rho_0^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\theta z}=L\alpha\rho\omega_0
$$

$$
\alpha=\nu\beta\omega_1\left(\frac{1}{\rho_0^2}-1\right)
$$

Скорости перемещений согласно (2.2) будут

$$
u=\frac{\nu\rho_0 u_*}{1-\rho_0^2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)e^{\nu\xi}, \quad v=\beta\omega_1\rho\left(1+\nu\frac{u_*}{\rho_0}e^{\nu\xi}\right)
$$

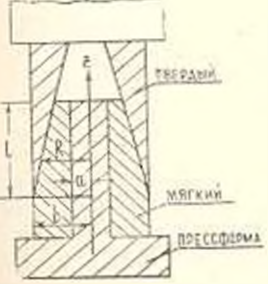
$$
w=-\frac{2u_*\rho_0}{1-\rho_0^2}e^{\nu\xi}+T \tag{2.15}
$$

Сила впрессовывания и момент вращения определяются по (2.9) и (2.11), причем значение Q определится по формуле

$$
Q=-\frac{F+(F+2H)\rho_0^2}{\rho_0^2}\omega_0(\rho_0)+\frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+\frac{2(F-G)}{\rho^2}+\frac{F+G}{\rho^4}\right]\omega_0\rho d\rho
$$

§ 3. *Внешнее ввинчивание.* Пусть теперь цилиндрическая труба с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, из идеально-жестко-пластического ортотропного материала плотно насажена на недеформируемую трубу (прессформа), на которую с наружной стороны соосно впрессовывается, одновременно вращаясь вокруг своей оси в положительном направлении с угловой скоростью ω_1, труба из значительно более твердого материала с внутренним, монотонно возрастающим по оси трубы относительным радиусом $R=1-\nu u_*\exp(\nu\xi)$. Материал этой трубы считаем абсолютно жестким, а координатную систему закрепляем с ней как в случае внутреннего внедрения (фиг. 4). Принимаем, что деформируемая труба по всей толщине при $z>0$ переходит в чисто пластическое состояние.

Заменяя в выражениях (2.1)—(2.2) знаки функции $f(\rho)$ и $\psi(\rho)$, для компонентов напряжений получим



Фиг. 4

Фиг. 5

$$\sigma_r = -2A - 2B\zeta + \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \left(Ff' - G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}\,d\rho$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left(Ff' - G\frac{f}{\rho}\right)\omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + \left[(F+H)f' + H\frac{f}{\rho}\right]\omega \tag{3.1}$$

$$\tau_{\theta z} = -2L\psi\omega, \quad \tau_{r\theta} = \frac{D}{\rho^2}, \quad \tau_{rz} = B\rho + \frac{E}{\rho}$$

причем

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\dfrac{f'f}{\rho} + (G+H)\dfrac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2}}$$

Соответственно, для компонентов скоростей перемещений (в долях b) будем иметь

$$u = -\nu f(\rho)e^{\nu\zeta}, \quad v = K\rho - 2\psi(\rho)e^{\nu\zeta}, \quad w = \frac{1}{\rho}(\rho f)'e^{\nu\zeta} + T \tag{3.2}$$

Система дифференциальных уравнений (2.3) примет вид

$$f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f - \frac{\nu\tau_{rz}M_0}{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}} \times$$
$$\times \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0 \tag{3.3}$$
$$\psi' - \frac{\psi}{\rho} + \frac{\nu N_0\tau_{r\theta}}{2\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также из того, что нормальная скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\zeta)$ заменяется радиальной $u(\rho, \zeta)$, для функции $f(\rho)$ имеем граничные условия

$$f(\rho_0) = 0, \quad f(1) = u_0V_0 = u_* \tag{3.4}$$

Далее на контактной поверхности $\rho = 1$ принимаем условие $v = \beta V$, где $V = \omega_1 R$ — линейная скорость точки внутренней поверхности жесткой трубы, находим $K = \beta\omega_1$ и значение

$$\psi(1) = \frac{\nu}{2}\beta\omega_1 u_0 \tag{3.5}$$

Граничные значения τ_{rz} и $\tau_{r\theta}$ на внутреннем и на внешнем поверхностях в продольном и в кольцевом направлениях считаем известными $-m_1$, q_1 и $-m_2$, q_2, соответственно, где m_i, $q_i > 0$ и очевидно $m_i^2 + q_i^2 \leqslant 1$.

Используя эти граничные условия, находим

$$B=\frac{\rho_0 m_1-m_2}{1-\rho_0^2},\quad E=\frac{\rho_0 m_2-m_1}{1-\rho_0^2}\rho_0,\quad D=q_3=q_1\rho_0^2 \tag{3.6}$$

Из статического условия (2.7) определяем

$$A=-B\xi_0+\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f'+\left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho d\rho$$

Легко убедиться, что условие сохранения количества масс удовлетворяется тождественно.

Из условия равновесия элемента вблизи контактной поверхности $\rho=R(\xi)$ (фиг. 5) для абсолютного значения осевого давления получим

$$p(\xi)=-\sigma_z(1,\xi)\cos\alpha-\tau_{rz}(1)\sin\alpha \tag{3.7}$$

причем

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+R'^2}},\quad \cos\alpha=-\frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Сила впрессовывания определяется по формуле (2.8), где следует положить $R=1-\nu u_0 e^{\nu\xi}$, а значение $p(\xi)$—согласно (3.7). Находим

$$P/\pi b^2=2\xi_0 m_2+2u_0(e^{\nu\xi_0}-1)(\nu S-m_2)-\nu^2u_0^2S(e^{2\nu\xi_0}-1)+$$
$$+4Bu_0[1+e^{\nu\xi_0}(\nu\xi_0-1)]-B\nu u_0^2[1+e^{2\nu\xi_0}(2\nu\xi_0-1)] \tag{3.8}$$

где $S=Q-2B\xi_0$, причем

$$Q=\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f'+\left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho d\rho-$$
$$-\int\limits_{\rho_0}^{1}\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}d\rho-[(F+H)f'(1)+Hu_0]\omega(1)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

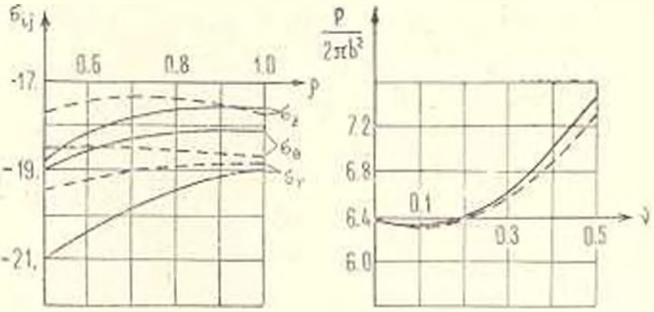
$$P/\pi b^2=2\xi_0(1-\nu u_0)(m_2+\nu^2u_0Q) \tag{3.9}$$

Вращающий момент будет

$$M^*=2\pi b^3q_2\int\limits_0^{\xi_0}(1-\nu u_0e^{\nu\xi})^2\sqrt{1+\nu^4u_0^2e^{2\nu\xi}}\,d\xi$$

1. При весьма малых значениях ν система (3.3) сводится к дифференциальным уравнениям (2.12), решения которых при граничных условиях (3.4) и (3.5) будут

$$f=\frac{\rho_0u_0}{1-\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{\rho_0}{\rho}\right),\quad \varphi=-\frac{\nu}{2}\beta\omega_1u_0\rho$$



Фиг. 6

Формулы напряжений (3.1) примут вид

$$\sigma_r = -\frac{2(m_2-\rho_0 m_1)}{1-\rho_0^2}(\xi_0-\xi) - \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+(F-G)\frac{1+\rho_0^2}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^4}\right]\omega_0\rho\,d\rho + \int_{\rho_0}^{\rho}\left[F-G+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^4}\right]\frac{\omega_0}{\rho}\,d\rho$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left[F-G-(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\omega_0, \quad \sigma_z = \sigma_r + \left[F+2H+F\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\omega_0$$

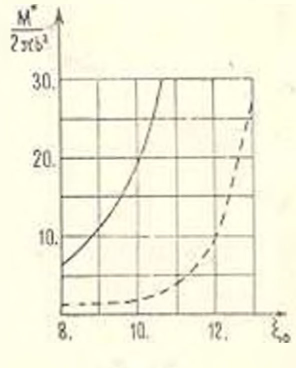
$$\tau_{rz} = \frac{\rho_0 m_2 - m_1}{1-\rho_0^2}\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{m_2-\rho_0 m_1}{1-\rho_0^2}\rho, \qquad \tau_{r\theta} = q_1\frac{\rho_0^2}{\rho^2}$$

$$\tau_{\theta z} = -L\alpha\omega_0, \quad \alpha = \nu\beta\omega_1(1-\rho^2)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{F+G+4H+2(F-G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}+(F+G)\frac{\rho_0^4}{\rho^4}+L\alpha^2\rho^2}}$$

Скорости перемещений, соответственно, будут



Фиг. 7

$$u_0 = -\frac{\nu u_* \rho_0}{1-\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\exp(\nu\xi)$$

$$v = \beta\omega_1\rho(1+\nu u_0\exp(\nu\xi)), \quad w = \frac{2u_*}{1-\rho_0^2}\exp(\nu\xi)+T$$

Сила впрессовывания определится по формуле (3.9), причем

$$Q = \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+(F-G)\frac{1+\rho_0^2}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^4}\right]\omega_0\rho\,d\rho - \int_{\rho_0}^{1}\left[F-G+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\frac{\omega_0}{\rho}\,d\rho -$$

$$-\frac{[2H+F(1+\rho_0^2)]\sqrt{1-M_0m_2^2-N_0q_2^2}}{\sqrt{F+G+4H+2(F-G)\rho_0^2+(F+G)\rho_0^4+L\alpha^2}}$$

Численное решение системы дифференциальных уравнений (3.3) с краевыми условиями (3.4), (3.5) получено при следующих значениях параметров

$\alpha=0{,}2$; $\xi=0$; $\xi_0=8$; $V_0=1$; $u_0=0{,}25$; $\rho_0=0{,}5$; $m_1=0{,}1$; $m_2=0{,}8$; $q_1=0{,}5$ $q_2=0{,}125$; $\beta=0.5$; $\omega_1=1$; $F/M=5$; $G/M=2$; $H/M=0.5$; $L/M=1{,}5$; $N/M=2{,}5$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (3.1) и (3.9) построены графики напряжений и силы впрессовывания (фиг. 6). Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впрессовывания для изотропной трубы. Из графиков видно влияние анизотропии на напряженное состояние и силу впрессовывания. На фиг. 7 показан график изменения крутящего момента M^* в зависимости от глубины внедрения ξ_0 в случае внутреннего (сплошная линия) и внешнего внедрения (пунктирная линия).

ԿՈՇՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐՊՏՈՒՏԱԿՈՒՄԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է սեփական առանցքի շուրջը պտտումով կոշտ գլանային մարմնի ներդրումը անիզոտրոպ իդեալական-կոշտ-պլաստիկ խողովակի մեջ, որի նյութը ենթարկվում է Միզեսի-Հիլլի հոսունության պայմանին։ Լուծման մեջ դեֆորմացիաների արագությունների անընդհատ ֆունկցիա է շառավղային և երկայնական կոորդինատներից։ Ստացված են գլանային անիզոտրոպ խողովակի մեջ առաջացած լարումները, ներդրման ուժը և պտտող մոմենտը որոշող արտահայտությունները։ Դիտարկված է արտաքին և ներքին ներդրումը։ Բերված են թվային օրինակներ։

THE SCREW DISPLACEMENT OF A RIGID CYLINDRICAL BODY IN A PLASTIC ANISOTROPIC PIPE

A. G. HACOBIAN

S u m m a r y

The penetration of a rigid cylindrical body with simultaneous rotation around its axis in an anisotropic ideal rigid plastic pipe is considered, the material of which obeys the Mises-Hill flow criterion. In the solution the tensor of speed strain is a function of radial and longitudinal coordinates. We have obtained relations which determine the stress appearing in a cylindrical anisotropic pipe as well as the penetration force and the rotating moment. Internal and external penetration are considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
2. *Шоршоров М. Х., Колесниченко В. А., Алехин В. П.* Клинопрессовая сварка давлением разнородных материалов. М.: Металлургия, 1982. 112 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.IV.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

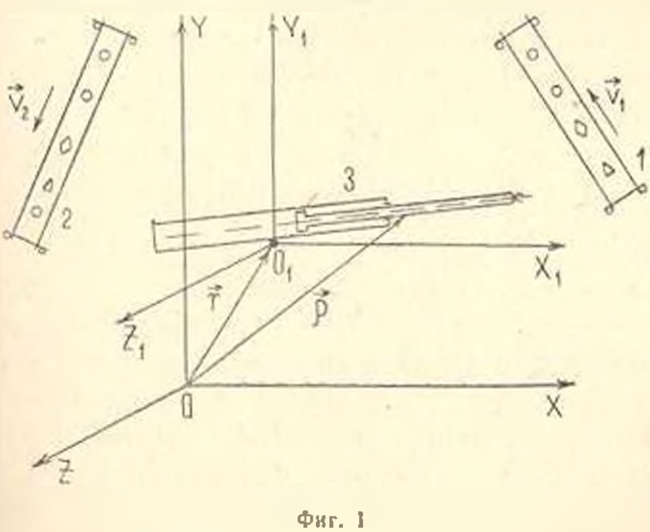
УДК 62.50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА, ОБСЛУЖИВАЕМОГО МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ

ГУКАСЯН А. А.

Во многих областях современной техники при создании гибких автоматизированных линий широко используются манипуляционные роботы для выполнения различных технологических операций. Разработка эффективных режимов управления роботами представляет собой актуальную задачу. Вопросы математического моделирования, а также построения алгоритмов управления движением манипуляторов изложены в работах [1—6] и др. В работе на основе известных методов теории оптимального управления исследуются вопросы математического моделирования технологического процесса, где одним из основных элементов является манипулятор. Приведена постановка и некоторые частные решения задачи оптимального обслуживания манипулятором конвейеров.

1. Описание управляемого процесса. Рассматривается управляемый технологический процесс, который состоит из главного конвейера 1, вспомогательного конвейера 2, манипулятора 3 (фиг. 1). Задача манипулятора состоит в том, что он должен оптимальным образом переложить нужные детали с главного конвейера на вспомогательный конвейер. Для описания этого процесса введем инерциальную $OXYZ$ и не-



Фиг. 1

инерциальную (связанную с манипулятором) $O_1X_1Y_1Z_1$ системы координат. Пусть главный конвейер движется относительно системы $OXYZ$ со скоростью v_1, а вспомогательный конвейер—со скоростью v_2. Манипулятор, обслуживающий работу конвейеров, в общем случае может быть многозвенным. Здесь рассматривается только управляемое движение последнего звена манипулятора при заданном движении его основания. Все движения рассматриваются в плоскости XOY. Последнее звено манипулятора состоит из направляющего цилиндра и руки (стрелы) со схватом. Манипулятор имеет две степени подвижности, отвечающие перемещению стрелы вдоль направляющей и повороту направляющей вокруг оси вращения. Указанные движения осуществляются при помощи линейного электромеханического привода и пневмопривода. Электромеханический привод расположен в основании (в точке O_1) и содержит двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Обобщенные координаты, соответствующие степеням подвижности, следующие: φ—угол поворота направляющей, θ—угол поворота ротора электродвигателя относительно оси вращения O_1Z_1 ($\theta=n\varphi$), n—коэффициент передачи редуктора электропривода, $x(t)$—расстояние центра масс стрелы до оси вращения в момент времени t. Управление системой осуществляется при помощи момента электромагнитных сил $M(t)$, приложенных к ротору электродвигателя относительно оси его вращения, и силы $p(t)$ пневмопривода, приложенной к стреле и направленной вдоль оси отверстия направляющей.

Введем обозначения: l—полная длина стрелы, m_1—масса ротора электродвигателя, I_1—момент инерции ротора относительно его центра масс, m_2—масса цилиндра, I_2—момент инерции цилиндра относительно оси, параллельной OZ и проходящей через его центр масс, m_3—масса стрелы; I_3—момент инерции стрелы относительно оси, параллельной OZ и проходящей через ее центр масс, $\vec{\omega}$—вектор угловой скорости вращения цилиндра, $\vec{r}$—радиус-вектор основания последнего звена манипулятора относительно точки O, $\vec{\rho}$—радиус-вектор центра масс стрелы относительно точки O.

В неинерциальной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ векторы $\vec{r}, \vec{\rho}, \vec{\omega}$ имеют следующие координатные представления:

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{\rho} = \begin{Vmatrix} x_0(t) + x(t)\cos\varphi \\ y_0(t) + x(t)\sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}.$$

Положение детали на главном конвейере и ее скорость, а также местоположение детали на вспомогательном конвейере и ее скорость в системе $O_1X_1Y_1Z_1$ определим соответственно угловыми (φ_*, $\dot{\varphi}_*$), (φ_{**}, $\dot{\varphi}_{**}$) и линейными (l_*, $\dot{l}_*$), (l_{**}, $\dot{l}_{**}$) переменными.

2. *Уравнения движения.* Уравнения Лагранжа, описывающие движение манипулятора, имеют вид

$$[I + 4m_3x^2 + (m_1n^2 + m_2 + m_3)(x_0^2 + y_0^2) + 4m_3x(y_0\sin\varphi + x_0\cos\varphi)]\ddot{\varphi} +$$
$$+ m_3(x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi)\ddot{x} + [8m_3x + 4m_3(y_0\sin\varphi + x_0\cos\varphi)]\dot{x}\dot{\varphi} +$$

$$+[2(m_1 n^2+m_2+m_3)(x_0\dot x_0+y_0\dot y_0)+4m_3x(\dot y_0\sin\varphi+\dot x_0\cos\varphi)]\dot\varphi+$$
$$+2m_3\dot x(y_0\cos\varphi-x_0\sin\varphi)+2m_3x(\dot y_0\cos\varphi-\dot x_0\sin\varphi)\dot\varphi^2+$$
$$+(m_1 n+m_2+m_3)(x_0\ddot y_0-y_0\ddot x_0)=M(t) \tag{2.1}$$

$$m_3\ddot x+m_3(x_0\sin\varphi-y_0\cos\varphi)\ddot\varphi-m_3(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)\dot\varphi^2-$$
$$-4m_3x\dot\varphi^2+m_3(\ddot x_0\cos\varphi+\ddot y_0\sin\varphi)-2m_3(\dot y_0\cos\varphi-\dot x_0\sin\varphi)\dot\varphi=P(t)$$

где $I=n^2I_1+I_2+I_3$; $\dot x_0$, $\dot y_0$, $\ddot x_0$, $\ddot y_0$ — соответственно проекции вектора скорости и ускорения основания в системе координат $OXYZ$.

К уравнениям (2.1) добавим уравнение электродвигателя [7]:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+kn\dot\varphi=u \tag{2.2}$$

Здесь L — коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя, i — ток в цепи ротора, R — электрическое сопротивление обмотки ротора электродвигателя, u — напряжение. Между моментом сил $M(t)$, развиваемым электроприводом, и током i имеется следующая связь: $M=ki$, где k — коэффициент пропорциональности между электрическим током в цепи ротора электродвигателя и моментом.

3. *Постановка задачи оптимального управления.* Пусть в момент времени T_1 (T_1 задано) положение и скорость детали на главном конвейере относительно системы $O_1X_1Y_1Z_1$ определяются величинами (φ_*, l_*), $(\dot\varphi_*, \dot l_*)$. Требуется, чтобы манипулятор оптимальным образом подошел к детали за время $t\in[T_0, T_1]$ (в момент времени T_1 происходит захват детали) и оптимальным образом за время $t\in[T_1, T_2]$ переложил деталь на ее местоположение на вспомогательном конвейере. После этого манипулятор должен оптимальным образом совершить обратное движение и повторить цикл. Предполагаем, что масса переносимых деталей мала по сравнению с массами основных частей манипулятора и ею можно пренебречь.

Задачу управления движением системы (2.1), (2.2) можно сформулировать следующим образом. Требуется найти управляющие функции в виде программы $u=u(t)$, $p=p(t)$ или в виде синтеза $u=u(t, \varphi^0, \dot\varphi^0)$, $p=p(t, x^0, \dot x^0)$ такие, чтобы в некоторый момент времени $t=T_1$ или $t=T_2$ ($T_1, T_2<\infty$) выполнялись заданные конечные условия

$$\varphi(T_1)=\varphi_*,\quad \dot\varphi(T_1)=\dot\varphi_*,\quad x(T_1)=l_*,\quad \dot x(T_1)=\dot l_* \tag{3.1}$$

или

$$\varphi(T_2)=\varphi_{**},\quad \dot\varphi(T_2)=\dot\varphi_{**},\quad x(T_2)=l_{**},\quad \dot x(T_2)=\dot l_{**}$$

На функции u и p могут быть наложены дополнительные условия: ограниченность, гладкость и др., то есть управляющие функции u и p выбираются из некоторого допустимого класса $u\in\{U\}$, $p\in\{P\}$. Кроме того, потребуем, чтобы достигал минимума функционал, характеризующий качество управления $J=J[U, P]\to\min\limits_{u,p}$ или $J=T\to\min\limits_{u,p}$

Функции $\ddot x_0(t)$, $\ddot y_0(t)$ также могут быть заданы как кинематическое управление и выбраны из условий

$$\dot{\vec r}=\vec v,\quad \dot{\vec v}=\vec w,\quad \vec w\in\{W\}$$

Здесь $\{W\}$ — заданное множество; управление w может быть выбрано из условия оптимальности совместно с u и p:

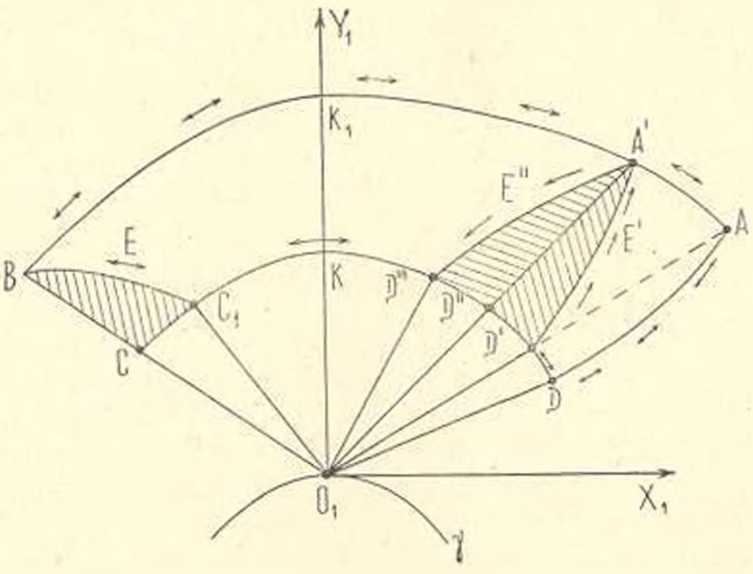
$$J=J|U,\ P,\ W|\to\min_{u,p,w};\quad J=T\to\min_{u,p,w} \tag{3.2}$$

С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка. Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение. Сформулируем этот критерий следующим образом. Пусть решение задачи оптимального управления движением системы (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) не единственно, то есть оптимальные управления $u_{опт}$, $p_{опт}$, $w_{опт}$ принадлежат некоторым множествам оптимальных управлений $u_{опт}\in\{U_{опт}\}$, $p_{опт}\in\{P_{опт}\}$, $w_{опт}\in\{W_{опт}\}$. Обозначим через s максимальную площадь области, заметаемой манипулятором при оптимальном управлении. Требуется найти такие оптимальные управления $u^*_{опт}\in\{U_{опт}\}$, $p^*_{опт}\in\{P_{опт}\}$, $w^*\in\{W_{опт}\}$, которые обеспечивают минимальное значение s

$$s^*=s(u^*,\ p^*,\ w^*)=\min_{u_{опт},p_{опт},w_{опт}} s(U_{опт},\ P_{опт},\ W_{опт}) \tag{3.3}$$

Ниже рассматривается случай, когда основание манипулятора (точка O_1) движется по окружности.

4. *Алгоритм решения задачи оптимального обслуживания.* Изменение кинематики манипулятора при часто встречающемся управлении схематично указано на фиг. 2. Основание манипулятора, точка O_1, совершает движение по заданной траектории γ, а кромка направляющего цилиндра двигается по траектории DKC. Пусть решение задачи



Фиг. 2

оптимального обслуживания принадлежит классу одновременного управления по двум степеням подвижности. Во время перехода схвата манипулятора из точки A, где находится деталь, в точку B ее местоположения, при одновременном повороте и движении стрелы (в начальный момент времени $x(T_0)=x(T_1)=0$) манипулятора максимальная заметаемая площадь (s_1) равна площади области $O_1DAK_1BCO_1$. Рассматриваем также решение задачи оптимального обслуживания в классе управлений, когда происходит поэтапное включение приводов, то есть поворот стрелы и ее движение происходят поочередно. В этом случае допускается захват детали в окружности точки A, то есть в точке A'. Сначала оптимально поворачиваем направляющий цилиндр до определенного угла (кромка направляющего цилиндра совпадает с точкой D'), потом происходит оптимальное движение стрелы с угловой скоростью движения конвейера до совпадения схвата с точкой A'. После чего аналогично происходит поэтапное оптимальное движение стрелы до совпадения положения схвата с точкой B. В этом случае максимальная заметаемая площадь (s_2) равна площади области $O_1DD'E'A'E''D''KC_1EBCO_1$, где $s_2 < s_1$. Поэтому для удовлетворения (частичного удовлетворения) условию (3.3) необходимо пользоваться управлением второго типа, который дает возможность упростить уравнение движения (2.1).

Сформулируем задачи оптимального управления движением, которые необходимо решать на каждом этапе. Пусть в начальный момент времени $t=T_0$ стрела находится в полном выдвинутом положении и $x=0$. Основание манипулятора (точка O_1) двигается по окружности $x_0=a\cos\alpha(t)$, $y_0=a\sin\alpha(t)$; $\alpha(t)$ изменяется линейным образом $\alpha(t)=k_1t+k_2$, тогда первое уравнение (2.1) принимает вид

$$(I+ma^2)\ddot{\varphi}+m'a^2k_1=M(t) \tag{4.1}$$

где $I=I_1n^2+I_2+I_3$, $m=m_1n^2+m_2+m_3$, $m'=m_1n+m_2+m_3$

Учитывая, что $M=ik$, из (4.1) и (2.2) получим

$$\dddot{\varphi}+a_1\ddot{\varphi}+a_2\dot{\varphi}=v(t) \tag{4.2}$$

где

$$a_1=R/L,\ a_2=nk^2/L(I+ma^2),\ v(t)=(ku-a^2k_1m'R)/L(I+a^2m) \tag{4.3}$$

Из описания алгоритма управления следует, что на первом этапе управления необходимо оптимальным образом повернуть направляющий цилиндр, движение которого описывается уравнением (4.1). Задачу на этом этапе можно сформулировать следующим образом: пусть в начальный момент времени $t=T_0$ положение направляющего цилиндра определяется величинами ($T_0=0$)

$$\varphi(0)=\varphi_0,\quad \dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_0,\quad \ddot{\varphi}(0)=\ddot{\varphi}_0 \tag{4.4}$$

требуется найти такое оптимальное управление $v(t)\in\{V\}$, которое обеспечивает приведение системы (4.2), (4.4) за время $t\in[0,T_1]$ из начального состояния в заданное конечное состояние

$$\varphi(T_2)=\varphi_*,\ \dot\varphi(T_1)=\dot\varphi_*,\ \varphi(T_1)=\bar\varphi_* \qquad (4.5)$$

с минимизацией в процессе управления функционала

$$J=\int_0^{T_1} v^2(t)dt\to\min_{v(t)} \qquad (4.6)$$

Функция Гамильтона задачи (4.2)–(4.6) имеет вид [8]

$$H=-v^2+p_1q_2+p_2q_3+(v-a_1q_3-a_2q_2)p_3$$

где $q=(q_1,\ q_2,\ q_3)$—вектор вспомогательных переменных, $p=(-1,\ p_1,\ p_2,\ p_3)$—вектор сопряженных переменных и удовлетворяют уравнениям:

$$\dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (4.7)$$

В соответствии с принципом максимума оптимально управляющая функция представляется в следующем виде:

$$v(t)=B_3(C_1\lambda_1\exp(\lambda_1 t)+C_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t)+C_3) \qquad (4.8)$$

здесь $\lambda_{1,2}=\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2},\quad a_1^2>4a_2,\quad B_3=1/2a_2$

Функция $\varphi(t)$ определяется из (4.2) и с учетом (4.8) принимает вид

$$\varphi(t)=A_1+A_2\exp(-\lambda_2 t)+A_3\exp(-\lambda_1 t)+C_1\exp(\lambda_1 t)+C_2\exp(\lambda_2 t)+C_3B_3t \qquad (4.9)$$

где $B_1=B_3/(\lambda_1^2-a_1\lambda_1-a_2)\quad B_2=B_3/(\lambda_2^2-a_1\lambda_2+a_2)$

Постоянные A_i, C_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ определяются из условий (4.4), (4.5). Из (4.3) и (4.8) следует, что оптимальное изменение электрического напряжения, подаваемого на вход электродвигателя, имеет вид

$$u(t)=LB_3(l+a^2m)(C_1\lambda_1\exp(\lambda_1 t)+C_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t)+C_3)k+a^2k_1m'R/k \qquad (4.10)$$

На втором этапе происходит поворот направляющего цилиндра со скоростью $\dot\varphi_*$ и одновременно оптимальное выдвижение стрелы. Второе уравнение системы (2.1) в этом случае принимает вид

$$m_3\ddot x-m_3(x_0\cos\varphi_*+y_0\sin\varphi_*)\dot\varphi_*^2-4m_3x\dot\varphi_*^2+m_3(\ddot x_0\cos\varphi_*+\ddot y_0\sin\varphi_*)-$$

$$-2m_3(\dot y_0\cos\varphi_*-\dot x_0\sin\varphi_*)\dot\varphi_*=p(t),\quad |p(t)|\leqslant P_0 \qquad (4.11)$$

Пусть величины $\varphi_*(t)$, $\dot\varphi_*(t)$ имеют порядок ε $(\varepsilon\ll 1)$, $t\in[T_1,\ T_2]\sim 1$, тогда, обозначая через $\bar\varphi_*$ среднюю величину угла поворота цилиндра во время движения стрелы, можно в первом приближении уравнение (4.11) записать в виде

$$\ddot x(t)=F(t) \qquad (4.12)$$

где $F(t)=p(t)/m_3-W_0',\quad W_0'=\ddot x_0\cos\bar\varphi_*-\ddot y_0\sin\bar\varphi_*$

Если обозначить через F_0 величину P_0/m_3, ограничение на $F(t)$ принимает вид

$$-F_0 - W_0 \leqslant F(t) < F_0 - W_0 \tag{4.13}$$

Ставится следующая задача оптимального быстродействия. Пусть в начальный момент времени $t = T_1$ положение стрелы определяется соотношениями

$$x(T_1) = 0, \quad \dot{x}(T_1) = 0 \tag{4.14}$$

Требуется найти такое оптимальное программное управление $F(t)$, которое за кратчайшее время обеспечивает приведение системы (4.12), (4.13) из начального состояния (4.14) в заданное конечное положение.

$$x(T_2) = l_0(T_2) - l/2, \quad \dot{x}(T_2) = \dot{l}_0(T_2) \tag{4.15}$$

Здесь, более того, можно исследовать задачу оптимального синтеза о быстрейшем попадании в начало координат из произвольного начального состояния [8].

Обозначая $x(t) = q^1$, $\dot{x}(t) = q^2$, уравнение (4.12) можно написать в виде

$$\dot{q}^1 = q^2, \quad \dot{q}^2 = F(t) \tag{4.16}$$

Функция Гамильтона H в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = p^1 q^2 + p^2 (P(t)/m_3 - W_0) \tag{4.17}$$

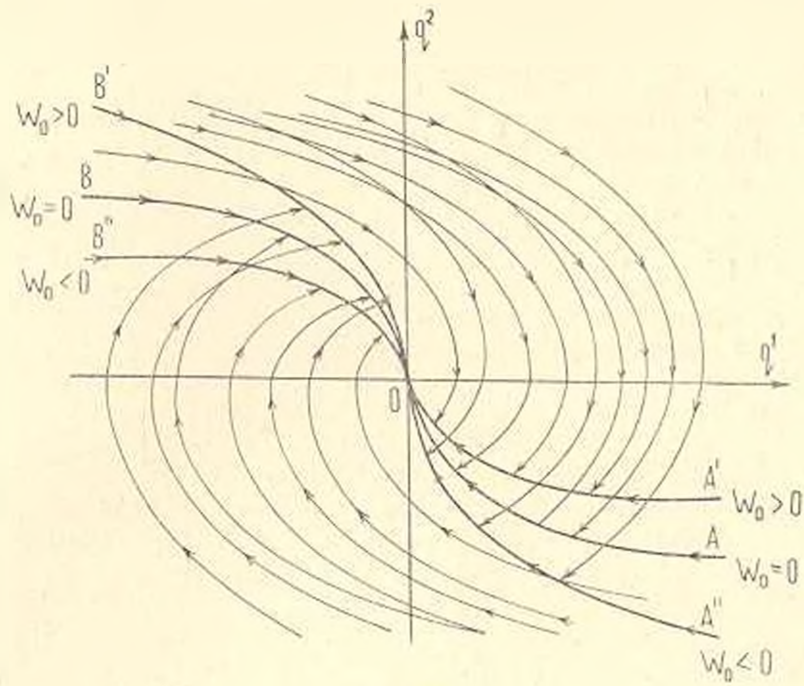
Для вспомогательных переменных p^1, p^2 получаем: $p^1 = c_1$, $p^2 = c_2 - c_1 t$ (c_1, c_2 — постоянные). Оптимальное управление $F(t)$ зависит от $\operatorname{sign}(c_2 - c_1 t)$ и является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $\pm F_0 - W_0$. Для отрезка времени, на котором $F = F_0 - W_0$, имеем

$$q^1 = \frac{1}{2}(q^2)^2/(F_0 - W_0) - c_2^2/2(F_0 - W_0) + c_1 \tag{4.18}$$

Аналогично, для отрезка времени, на котором $F = -F_0 - W_0$, получаем

$$q^1 = -\frac{1}{2}(q^2)^2/(F_0 + W_0) + c_{3,1}^2/2(F_0 + W_0) + c_{1,1} \tag{4.19}$$

На фиг. 3 в случае $F_0 > W_0$ изображено все семейство полученных фазовых траекторий, где AO, $A'O$, $A''O$ — соответственно дуги параболы $q^1 = (q^2)^2/2(F_0 - W_0)$ при $W_0 = 0$, $W_0 > 0$, $W_0 < 0$, расположенные в нижней полуплоскости q^1, q^2; BO, $B'O$, $B''O$ — соответственно дуги параболы $q^1 = -(q^2)^2/2(F_0 + W_0)$ при $W_0 = 0$, $W_0 > 0$, $W_0 < 0$, расположенные в верхней полуплоскости q^1, q^2. Линиями переключения управляющей функции $F(t)$ являются AOB, $A'OB'$, $A''OB''$. Обозначая через $v(q^1, q^2) = v(q(t))$ функцию, заданную на фазовой плоскости q^1, q^2, можно решение рассматриваемой задачи истолковать следующим образом:



Фиг. 3

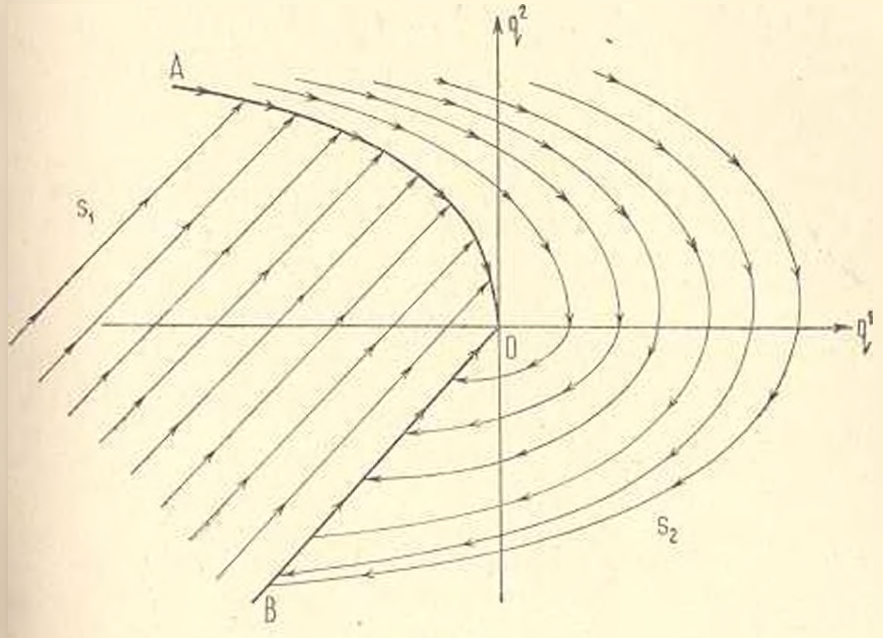
$$v(q(t)) = \begin{cases} F_0 - W_0 & \text{при } W_0 = 0 \text{ ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 = 0 \text{ выше линии } AOB \text{ и на дуге } BO \\ F_0 - W_0 & \text{при } W_0 > 0 \text{ ниже линии } A'OB' \text{ и на дуге } A'O \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 > 0 \text{ выше линии } A'OB' \text{ и на дуге } B'O \\ F_0 - W_0 & \text{при } W_0 < 0 \text{ ниже линии } A''OB'' \text{ и на дуге } A''O \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 < 0 \text{ выше линии } A''OB'' \text{ и на дуге } B''O \end{cases}$$

На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра $F(t)$ равно $v(q(t))$ в той точке, в которой в момент t находится фазовая точка. Фазовые траектории состоят из двух кусков парабол, примыкающих друг к другу.

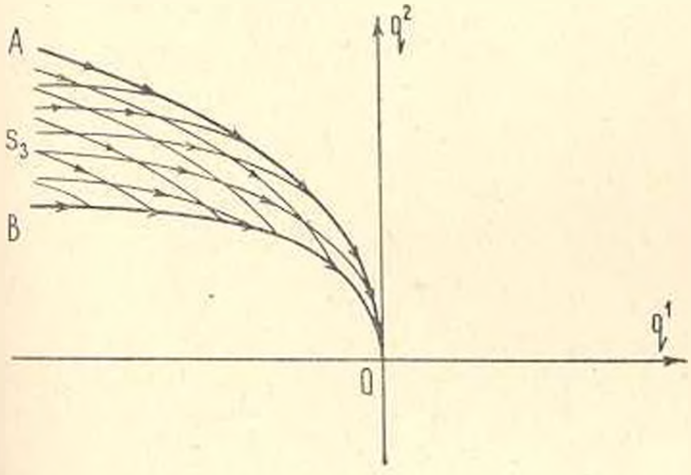
В случае $F_0 = W_0$, $W_0 > 0$ для отрезка времени, на котором $F = 0$, фазовые траектории представляют собой прямые линии $q^1 = q^2 t + c_1$, а для отрезка времени, на котором $F = -F_0 - W_0$, — параболы (1.19). На фиг. 4 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий. Линией переключения управляющей функции является кривая AOB, где AO — дуга параболы $q^1 = -(q^2)^2/2(F_0 + W_0)$, а BO — кусок линии $q^1 = q^2 t$, которые проходят через начало координат. Решение задачи представим в виде синтеза

$$v(q(t)) = \begin{cases} 0 & \text{в области } s_1 \text{ и на линии } BO \\ -F_0 - W_0 & \text{в области } s_2 \text{ и на линии } AO \end{cases} \qquad (1.20)$$

где через s_1 обозначена внутренняя открытая область на плоскости q^1Oq^2, заключенная между кривыми AO и BO, а через s_2 — внешняя открытая область. В случае $F_0 = W_0$, $W_0 > 0$ на каждой оптимальной траектории значение оптимального управления $F(t)$ равно $v(q(t))$.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 изображено семейство фазовых траекторий задачи (4.16)—(4.19) в случае $F_0 < W_0$, $W_0 > 0$, где AO и BO — соответственно, дуги парабол $q^1 = (q^2)^2/2(F_0 - W_0)$ и $q^1 = -(q^2)^2/2(F_0 + W_0)$, которые проходят через начало координат. Из решения видно, что в этом случае задача оптимального быстродействия имеет решение только для тех начальных условий, которые находятся в полуоткрытой области, ограниченной линиями AO и BO.

При помощи функции $v(q(t))$ решение задачи оптимального управления можно представить в виде

$$v(q(t))=\begin{cases} F_0-W_0 \text{ при } F_0<W_0,\ W_0>0 \text{ в области } s_3 \text{ и на дуге } AO \\ -F_0-W_0 \text{ при } F_0<W_0,\ W_0>0 \text{ в области } s_3 \text{ и на дуге } BO \end{cases} \tag{4.21}$$

где s_3—открытая область, ограниченная линиями AO и BO. Из (4.21) следует, что в области s_3 решение задачи быстродействия не единственно, то есть внутри s_3 можно двигаться по законам (4.18) и (4.19) до попадания на линию переключения AO, BO. На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра $F(t)$ (в произвольный момент времени t) равно $v(q(t))$ из (4.21).

Остальные этапы движения манипулятора, которые связаны с вдвижением стрелы и поворотом направляющего цилиндра, аналогичны задачам первого и второго этапа.

Заключение. Рассмотрен процесс оптимального обслуживания манипулятором конвейеров, который может являться участком автоматизированной линии. При некоторых предположениях сформулирована задача оптимального обслуживания с разными критериями оптимальности. Приведено описание оптимального решения одного цикла поэтапного управления манипулятором.

ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՑԻՈՆ ՌՈԲՈՏՈՎ ՍՊԱՍԱՐԿՎՈՂ ՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՊՐՈՑԵՍԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ամփոփում

Օպտիմալ ղեկավարման հայտնի մեթոդներով հետազոտվում է տեխնոլոգիական պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման հարցեր, որը բաղկացած է գլխավոր կոնվեյերից, միջանկյալ կոնվեյերից և մանիպուլյատորից: Ձևակերպված է կոնվեյերներին մանիպուլյատորով օպտիմալ մատակարարման ընդհանուր խնդիրը: Բերված է մանիպուլյատորի էտապ առ էտապ ղեկավարման մի ցիկլի օպտիմալ մոտավորման խնդրի լուծումը: Որպես օպտիմալության չափանիշ ընդունված է էներգետիկ ծախսերի և անցման պրոցեսի ժամանակի մինիմիզացիան:

A PROBLEM OF OPTIMAL MODELLING OF TECHNOLOGICAL PROCESSES SERVED BY A MANIPULATOR ROBOT

A. A. GUKASIAN

Summary

On the basis of known methods of optimal control, the questions of mathematical modelling of the area of technological processes are investigated, which consists of the main conveyor, auxilliary conveyor and a manipulator. The general problem of optimal service by means of the manipulator of the conveyor with various criteria of optimization

has been formulated. The solutions of optimal service of a single cycle of periodical control by a manipulator has been given, when its base moves about the circle. As a criteria of optimization the minimization of energetic expense and time of shift process has been accepted.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. *Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. В.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
3. *Коренев Г. В.* Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. М.: Наука, 1979. 448 с.
4. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н., Каплунов А. А.* Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами. М.: Препринт №218, ИПМ АН СССР, 1983. 72 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.— Изв. АН СССР, МТТ, 1983, №4, с. 101—113.
6. *Вукобратович М., Потконяк В.* Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, №5, с. 131—141.
7. *Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С.* Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 615 с.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
22.IV.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

УДК 539.374

СХОДИМОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ С НЕОДНОРОДНЫМ СТАРЕНИЕМ

КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В., МАКАРОВА Н. С.

При решении конкретных задач нелинейной вязкоупругости с неоднородным старением, когда возраст материала зависит от координат, возникает необходимость в оценке точности предлагаемого решения, сходимости метода последовательного приближения. В этом случае могут быть использованы приводимые ниже оценки. В работах [1, 2] доказывается сходимость метода (упругих решений) линейных вязкоупругих приближений [1] и метода последовательных приближений с интегральными преобразованиями [2] для нелинейных задач.

1. Пусть связь компонент девиатора напряжений S_{ij} с компонентами девиатора деформаций для определенности соответствует несжимаемой изотропной кубически нелинейной вязкоупругой среде в случае неоднородного старения

$$S_{ij}(t) = \sum_{q=1}^{N} 2[R_{10}^{(q)} \cdot R_2^{(q)} \otimes e_{ij} + R_{30}^{(q)} (R_4^{(q)} \otimes e_{..})^2 R_1^{(q)} \otimes e_{ij}] \tag{1.1}$$

Здесь и ниже приняты обозначения

$$R \otimes e = \int_{-0}^{t} R(t-\tau)\, de(\tau), \quad R(-0)=0, \quad e(-0)=0, \quad (e_{..})^2 = e_{ij} e_{ij}$$

$$R_{p0}^{(q)} = R_p^{(q)}(t-\tau^0(x)), \quad p=1;\ 3 \tag{1.2}$$

В формулах (1.1) $R_p^{(q)}(t)$ $(p=1;3)$ — функции, определяющие старение; $\tau^0(x)$ — момент изготовления материала в окрестности точки x [3]; $R_2^{(q)}(t)$, $R_4^{(q)}(t)$ — функции влияния, определяющие релаксационные свойства. Для композиционных неоднородных материалов функции влияния зависят явно от координат x. Значок $\otimes$ обозначает действие интегрального свертывания. Четвертое равенство (1.2) определяет скалярный квадрат компонент тензора.

Уравнения равновесия, связь деформаций с перемещениями, граничные условия в напряжениях на части поверхности Σ_σ и в перемещениях на части поверхности Σ_u запишутся в виде

$$S_{ij,j} = f_i; \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad e_{ii} = 0$$

$$S_{ij} n_j = P_i, \ x \in \Sigma_\sigma; \quad u_i = u_{i0}, \ x \in \Sigma_u \tag{1.3}$$

$$f_i=-\rho F_i-\frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha,i}\,;\quad \mathcal{F}_i=P_i-\frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}n_i$$

Здесь ρ—плотность массы, F_i—удельная массовая сила, $\sigma_{\alpha\beta}$—компоненты тензора напряжений, P_i—заданный на поверхности $\sum_\sigma$ с нормалью n_j вектор напряжений, u_{i0}—заданные на поверхности $\sum_u$ смещения.

Для решения полученной краевой задачи (1.1), (1.3) определим M (модифицированное) преобразование Лапласа-Карсона девиатора напряжений S_{ij}, задаваемого (1.1):

$$(MS_{ij})(p)=\sum_{q=1}^{N}2e^{*}_{ij}(p)\{R^{(q)}_{10}(p)R^{(q)*}_{1}(p)+R^{(q)}_{30}(p)[R^{(q)*}_{3}(p)]^{3}(e^{*}_{kl}(p))^{2}\}\quad(1.4)$$

Здесь и ниже индексом * обозначается преобразование Лапласа-Карсона с параметром p. Заметим, что в (1.3) в силу последнего равенства (1.2)

$$R^{(q)*}_{l0}(p)=R^{(q)*}_{l}(p)\exp[-p\tau^{0}(x)],\quad l=1;\ 3$$

По (1.3) для связей $S_{ij}-e_{ij}$—суммы последовательных многократных сверток M-преобразование будет преобразованием Лапласа-Карсона, а для суммы произведений сверток (1.1), вообще говоря, отличным от последнего.

Поставим в соответствие краевой задаче (1.1), (1.3) краевую задачу фиктивной кубически нелинейной упругости с определяющим соотношением (1.4)

$$(MS_{ij})_{,j}=Mf_i;\quad e^{*}_{ij}=\frac{1}{2}(u^{*}_{i,j}+u^{*}_{j,i}),\quad e^{*}_{ii}=0$$

$$(MS_{ij})n_j=M\mathcal{F}_i,\quad x\in\sum_\sigma;\ u^{*}_i=u^{*}_{i0},\quad x\in\sum_u$$

Чтобы определить Mf_i и $M\mathcal{F}_i$, будем пользоваться рекуррентными формулами, связывающими величины при ν-ом и $(\nu-1)$-ом приближениях:

$$Mf^{(\nu)}_i=f^{*}_i+Mf^{(\nu-1)}_i-f^{(\nu-1)*}_i;\quad M\mathcal{F}^{(\nu)}_i=\mathcal{F}^{*}_i+M\mathcal{F}^{(\nu-1)}_i-\mathcal{F}^{(\nu-1)*}_i\quad(1.6)$$

$$f^{(\nu-1)}_i=S^{(\nu-1)}_{ij,j};\ \mathcal{F}^{(\nu-1)}_i=S^{(\nu-1)}_{ij}n_j;\ f^{(-1)}_i=0;\ Mf^{(-1)}_i=0;\ \mathcal{F}^{(-1)}_i=0;\ M\mathcal{F}^{(-1)}_i=0$$

Для реализации итерационного процесса необходимо в (1.4), (1.5) Mf_i, $M\mathcal{F}_i$, MS_{ij}, e^{*}_{ij}, u^{*}_i заменить соответственно на $Mf^{(\nu)}_i$, $M\mathcal{F}^{(\nu)}_i$, $MS^{(\nu)}_{ij}$, $e^{(\nu)*}_{ij}$, $u^{(\nu)*}_i$. После определения из (1.4), (1.5), (1.6) $e^{(\nu)*}_{ij}$, $u^{(\nu)*}_i$ при помощи обратного преобразования Лапласа-Карсона находятся $e^{(\nu)}_{ij}$, $u^{(\nu)}_i$. Выражения $e^{(\nu)}_{ij}$ подставляются в (1.1) для определения $S^{(\nu)}_{ij}$. Далее $S^{(\nu)}_{ij}$ подставляются в третье и четвертое равенства (1.6) для нахождения $f^{(\nu)}_i$, $\mathcal{F}^{(\nu)}_i$ и т. д. Положив в (1.6), а также в других уравнениях $\nu=\infty$ и сделав над вторым и пятым равенствами (1.5) обратное преобразование Лапласа-Карсона L^{-1}_{*}, с учетом использования

(1.1) для определения S_{ij} получим, что после бесконечного числа приближений система уравнений (1.1), (1.3) удовлетворяется. Но еще необходимо выяснить, при каких условиях итерационный процесс сходится к единственному решению. Только сходимость и скорость сходимости зависят от вида M-преобразования. Например, в качестве M-преобразования (1.1) можно было бы взять линейную по e_{ij} часть (1.4).

2. Для доказательства сходимости итерационного процесса необходимо записать уравнения (1.3) в интегральном по пространству виде

$$\int\limits_V (MS_{ij})^{1/*}(u)e_{ij}(v)dV=\int\limits_{\Sigma_3} \mathcal{P}_i v_i d\Sigma - \int\limits_V [f_i v_i + S_{ij}^{\wedge}(u)e_{ij}(v)]dV \tag{2.1}$$

В формуле (2.1) фигурирует основная вектор-функция v_i, удовлетворяющая на Σ_u условию: $v_i=0$, $x\in\Sigma_u$, а

$$S_{ij}^{\wedge}(u)=S_{ij}(u)-(MS_{ij})^{1/*}(u) \tag{2.2}$$

Делая над (1.4) обратное преобразование Лапласа-Карсона $1/_*$, найдем явный вид вспомогательных напряжений $(MS_{ij})^{1/*}$, входящих в (2.1), (2.2):

$$(MS_{ij})^{1/*}=\sum_{q=1}^{\Lambda} 2e_{ij}\otimes[R_{30}^{(q)}\otimes R_2^{(q)}+R_{30}^{(q)}\otimes R_4^{(q)}\otimes(R_1^{(q)}\otimes e_{ij}\otimes)^2] \tag{2.3}$$

Здесь и ниже введено обозначение

$$(e_{ij}\otimes)^2=e_{ij}\otimes e_{ij},\quad (R\otimes)^2=R\otimes R \tag{2.4}$$

Если подставить (2.2) в (2.1), то после уничтожения подобных членов со вспомогательными напряжениями, получается тождественное выражение с использованием формул Коши для $e_{ij}(v)$, условия $v_i=0$, $x\in\Sigma_u$, первого и четвертого соотношений (1.3). Правая и левая части (2.1) могут быть представлены в виде скалярных произведений

$$(Q_1u,\ v)=(Q_2u,\ v) \tag{2.5}$$

$$(u,\ v)=\int\limits_V e_{ij}(u)e_{ij}(v)dV;\quad \|u\|^2=(u,\ u) \tag{2.6}$$

Запишем два разных условия сходимости а) и б). Если для любых дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций u_1, u_2 выполняются условия

а)

$$L_1\equiv\{|MS_{ij}(u_1)|^{1/*}-|MS_{ij}(u_2)|^{1/*}\}^2\geqslant q_0^2[e_{ij}(u_1-u_2)]^2,\quad q_0>0 \tag{2.7}$$

$$L_2\equiv|S_{ij}^{\wedge}(u_1)-S_{ij}^{\wedge}(u_2)|^2\leqslant q_1^2[e_{ij}(u_1-u_2)]^2,\quad q_1\geqslant 0 \tag{2.8}$$

или

б)

$$L_3\equiv\{|MS_{ij}(u_1)|^{1/*}-|MS_{ij}(u_1)|^{1/*}\}^2\leqslant(q_0')^2|e_{ij}(u_1-u_2)|^2,\quad q_0'\geqslant 0 \tag{2.9}$$

$$L_4\equiv|S_{ij}^{\wedge}(u_1)-S_{ij}^{\wedge}(u_2)|^2\geqslant(q_1')^2[e_{ij}(u_1-u_2)]^2,\quad q_1'>0 \tag{2.10}$$

и кроме того, начальное приближение $u^{(0)}$ таково, что

$$\|u^{(0)}\| < \frac{1-q}{q} r, \quad r \geqslant \|u - u^{(0)}\| \tag{2.11}$$

$$1 > q = \begin{cases} q_1/q_0 & \text{для а)} \\ q_0/q_1 & \text{для б)} \end{cases} \tag{2.12}$$

то метод последовательных приближений сходится к единственному решению.

Рассмотрим случай а). Соотношения (2.5) можно записать в обобщенном виде:

$$u = Qu, \quad Q = Q_1^{-1} Q_2$$

Из определения нормы и из условий (2.7), (2.8) получим

$$(Q_2 u_1 - Q_2 u_2, v)^2 \leqslant q_1^2 \|u_1 - u_2\|^2 \|v\|^2 \tag{2.13}$$

$$\|Q_2 u_1 - Q_2 u_2\| \leqslant q_1 \|u_1 - u_2\| \tag{2.14}$$

$$\|Q_1 u_1 - Q_1 u_2\|^2 \geqslant q_0^2 \|u_1 - u_2\|^2 \tag{2.15}$$

Из (2.15) и определения обратного оператора Q_1^{-1} вытекает

$$\|Q_1^{-1} u_1 - Q_1^{-1} u_2\| \leqslant \frac{1}{q_0} \|u_1 - u_2\| \tag{2.16}$$

Если в (2.16) вместо u_1, u_2 поставить соответственно $Q_2 u_1$, $Q_2 u_2$ и учесть (2.14), получим

$$\|Qu_1 - Qu_2\| \leqslant q \|u_1 - u_2\|, \quad q = \frac{q_1}{q_0} < 1 \tag{2.17}$$

Следовательно, оператор Q является сжимающим.

Аналогично в случае условий б) оператор Q' также будет сжимающим [2]: $Q'u = u$, $Q' = (Q_2)^{-1} Q_1$, где Q_1', Q_2' — операторы левой и правой части уравнения, получаемого из (2.1) переносом влево первых двух слагаемых в правой части.

Кроме того, по (2.11), (2.17) оператор Q (аналогично Q') переводит шар радиуса r с центром в точке $u^{(0)}$ в себя:

$$\|Qu - u^{(0)}\| \leqslant \|Qu - Qu^{(0)}\| + \|Qu^{(0)} - u^{(0)}\| \leqslant qr + q\frac{1-q}{q} r = r, \quad u^{(0)} = Q0.$$

Из принципа сжатых отображений вытекает, что предлагаемый метод последовательных приближений сходится к единственному решению. В работе [2] доказывается сходимость при более частных условиях, чем (2.8), (2.9).

3. Выясним, при каких ограничениях на функции влияния и процессы выполняются условия (2.7) — (2.12) сходимости метода последовательных приближений. Получим выражение для q_0, входящего в (2.7). Будем исходить из предположения о малости шестых степеней деформаций по сравнению со вторыми

$$[R_{34}\otimes|e_{i..}(u_l)\otimes|^2\otimes e_{i..}(u_l)]^2 \ll [R_{12}\otimes e_{i..}(u_l)]^2, \quad l=1;2 \qquad (3.1)$$

где проекционные ядра $R_{12}(t)$ и $R_{34}(t)$ определяются так:

$$R_{12}(t)=\sum_{q=1}^{N} 2R_{10}^{(q)}\otimes R_{2}^{(q)}, \quad R_{34}(t)=\sum_{q=1}^{N} 2R_{30}^{(q)}\otimes (R_{4}^{(q)}\otimes)^3 \qquad (3.2)$$

В (3.1), (3.2) кроме обозначений (1.2), (2.4) используются обозначения

$$(R_4\otimes)^3=R_4\otimes R_4\otimes R_4 \qquad (3.3)$$

С учетом оценки (3.1) и равенства (2.3) левая часть неравенства (2.7), обозначаемая через L_1, эквивалентна выражению

$$L_1=\left\{\left[R_{12}+\frac{1}{2}R_{34}\otimes[(e_{i..}(u_1)\otimes)^2+(e_{i..}(u_2)\otimes)^2]\right]\otimes e_{i.}(u_1-u_2)\right|^2+$$

$$R_{12}\otimes e_{ij}(u_1-u_2)[R_{34}\otimes[e_{\alpha\beta}(u_1+u_2)\otimes e_{\alpha\beta}(u_1-u_2)]e_{ij}(u_1+u_2)\} \qquad (3.4)$$

Для оценки (3.4) применим к первому слагаемому в (3.4) один раз теорему о среднем для интегралов Стильтьеса, а к оставшейся части— четыре раза (под знаком четырех интегралов), предполагая монотонность деформаций со временем:

$$L_1=\left\{R_{12}+\frac{1}{2}R_{34}\otimes[(e_{i..}(u_1)\otimes)^2+(e_{i..}(u_2)\otimes)^2]\right\}(\xi_0)e_{ij}(t,u_1-u_2)e_{ij}(t,u_1-u_2)+$$

$$+R_{12}(\xi_4)R_{34}(\xi_3)e_{\alpha\beta}(\xi_1,u_1+u_2)e_{\alpha\beta}(\xi_1,u_1-u_2)e_{ij}(t,u_1-u_2)e_{ij}(t,u_1+u_2)$$

$$0\leqslant\xi_r\leqslant t, \quad r=0,1,2,3,4 \qquad (3.5)$$

В (3.5) ξ_r— неопределенные времена, появляющиеся из-за использования теоремы о среднем.

Первое слагаемое в (3.5) неотрицательно. Знак второго слагаемого может быть отрицательным. Поэтому для оценки L_1 снизу оценим первое слагаемое в (3.5) снизу и вычтем оценку модуля второго слагаемого сверху, используя при этом теорему Коши-Буняковского

$$|e_{\alpha\beta}(\xi_1,u_2)e_{\alpha\beta}(\xi_1,u_1)|\leqslant|e_{\alpha\beta}(\xi_2,u_2)e_{\alpha\beta}(\xi_2,u_2)|^{1/2}[e_{pq}(\xi_1,u_1)e_{pq}(\xi_1,u_1)]^{1/2}$$

В результате получим оценку (2.7), где

$$q_0^2=\min_{\tau}\left\{R_{12}+\frac{1}{2}R_{34}\otimes[(e_{i..}(u_1)\otimes)^2+(e_{i..}(u_2)\otimes)^2]\right\}^2(\tau)-$$

$$-\max_{\tau}|R_{12}(\tau)|\max_{\tau}|R_{34}(\tau)|\varepsilon_m^2, \quad \varepsilon_m^2=\max_{\tau,x_i} e_{\alpha\beta}(u_l)e_{\alpha\beta}(u_l), \quad l=1;2 \qquad (3.6)$$

Здесь функции R_{12} и R_{34} определяются при помощи (3.2). Аналогично с учетом (2.2), (1.1), (2.3) проводится оценка L_2 левой части (2.8). Кроме условия (3.1) использовалось условие малости шестой степени e_{ij} вида

$$[R_{34}(u_l)\otimes e_{ij}(u_l)][R_{34}(u_l)\otimes e_{ij}(u_l)]\ll[R_{12}\otimes e_{ij}(u_l)][R_{12}\otimes e_{ij}(u_l)]$$

где

$$R'_{34}(u_l)\otimes=\sum_{q=1}^{N}2R_{20}^{(q)}(t)(R_3^{(q)}\otimes e_{(.}(u_l))^2(t)\cdot R_4^{(q)}\otimes \tag{3.7}$$

Ядро оператора (3.7) обозначим через $R_{31}(t,\tau,u_l)$. В результате получается оценка (2.8) для

$$q_1^2=\max_\tau[R'_{12}(t,\tau)]^2+6\max_\tau|R_{12}(t,\tau)|R_{34m}\varepsilon_m^2 \tag{3.8}$$

Здесь ε_m определяется (3.6), а

$$R'_{12}(t,\tau)=\sum_{q=1}^{N}2|R_{10}^{(q)}(t)R_2^{(q)}(\tau)-(R_{10}^{(q)}\otimes R_2^{(q)})(\tau)|$$

$$R_{34m}=2\sum_{q=1}^{N}\max_\tau|R_{30}^{(q)}(\tau)|\max_\tau|R_4^{(q)}(\tau)|^3 \tag{3.9}$$

Таким же образом можно получить оценки (2.9), (2.10). При этом

$$(q_0)^2=\max_\tau R_{12}^2(\tau)+3\max_\tau|R_{12}(\tau)|R_{34m}\varepsilon_m^2$$

$$(q_1')^2=\min_\tau\Big\{R'_{12}(t,\tau)+\frac{1}{2}|R_{31}(t,\tau,u_1)+R'_{31}(t,\tau,u_2)|-$$

$$-\frac{1}{2}R_{34}\otimes[(e_{(.}(u_1)\otimes)^2-(e_{(.}(u_2)\otimes)^2](\tau)\Big\}^2-2\max_\tau|R'_{12}(t,\tau)|R_{34m}\varepsilon_m^2 \tag{3.10}$$

Здесь $R'_{31}(t,\tau,u_l)$ — ядро оператора (3.7).

В соответствии с доказанным в п. 2 метод будет сходящимся, когда в соответствии с (2.12) параметр q будет меньше единицы. При этом q_0, q_1, q_0', q_1' определяются по (3.6), (3.8), (3.10) и зависят от функций влияния, учитывающих старение, линейной и кубически нелинейной теории. Оценки, а потому сходимость, зависят также от уровня деформаций ε_m, от характера во времени изменения деформации (квадратная скобка в (3.6) и в (3.10), ядро оператора R_{34} (3.7)). Неоднородности старения влияет на скорость сходимости не только из-за зависимости оценок от деформаций, но и явно, так как в силу обозначений (1.2) в оценки входит $\tau^0(x)$ — момент изготовления материала. От момента $\tau^0(x)$ зависят величины R_{12}, R_{31}, R'_{31}, R'_{12}, R_{34m}. При получении оценок отбрасывались инварианты шестой степени по деформациям. Заметим, что для кубической теории во внутренней энергии удерживают инварианты только до четвертой степени по деформациям. С этой степенью точности получилось, что если в линейной области материал нестареющий, то одно нулевое приближение дает практически точное решение даже, если в нелинейной области материал стареющий. Это следует из того, что при $R_{10}^{(q)}(t)=R_{10}^{(q)}h(t)$, где $h(t)$—функция Хевисайда, $R_{12}(t,\tau)=0$ в (3.9) и по (3.8), (2.12) имеем $q_1=0$ и $q=0$. Этот результат—довод в пользу использования метода M-преобразования для учета нелинейности и старения в области нелинейности наиболее быстрым образом. Метод последовательных приближений сходится за одно приближение еще в одном случае, когда $q=0$

при $q_0^{*}=0$. Из (3.10) и (3.2) вытекает, что для этого нужно, чтобы равнялось нулю линейное проекционное ядро $R_{12}(t)=0$. Это возможно, например, когда в (3.2) $N=2$, $\tau^0(x)=0$, $R_{10}^{(2)}(t)=R_2^{(1)}(t)$, $R_{20}^{(2)}(t)=$ $=-R_2^{(1)}(t)$. Практически более важными являются оценки (2.7), (2.8), (3.6), (3.8).

4. В качестве примера рассматривались процессы деформирования неоднородно стареющего бетона

$$\varepsilon=\varepsilon_{11}(t)=-\varepsilon_m[1-\exp(-\Lambda t)], \quad \varepsilon_{ij}=0, \ ij\neq 12, 21 \tag{4.1}$$

Здесь Λ—величина порядка скорости деформирования, $\varepsilon_m=10^{-3}$ — максимальная деформация. Из-за малого интервала времени рассмотрения ($\max t=50$ сут) в модели (1.1) ограничивались случаем $N=1$.

Функции релаксации напряжений бетона получались аппроксимацией моделью вида (1.1) функций релаксаций напряжений, являющихся резольвентами [4] в линейной области функций ползучести, предложенных Н. Х. Арутюняном [4]:

$$K(t, \tau)=G(\tau)+\varphi(\tau)[1-\exp(-\gamma t)]$$

$$\varphi(\tau)=C_0+A_1/(\tau+20), \quad G(\tau)=G_\infty\{1-\exp[-\beta(\tau+20)]\}$$

Здесь отсчет времени отличается от отсчета времени от незатвердевшего состояния бетона на 20 сут. Для бетона принято [5]:

$$C_0=0{,}9945\ 10^{-10}(\text{Па})^{-1}, \quad A_1=4{,}714\ 10^{-10}\ \text{сут/Па}, \quad \gamma=0{,}03\ 1/\text{сут}, \quad G_\infty=$$
$$=2{,}548\ 10^{10}\ \text{Па}, \quad \nu=0{,}17, \quad \beta=0{,}206\ 1/\text{сут}.$$

Здесь ν—постоянный коэффициент Пуассона.

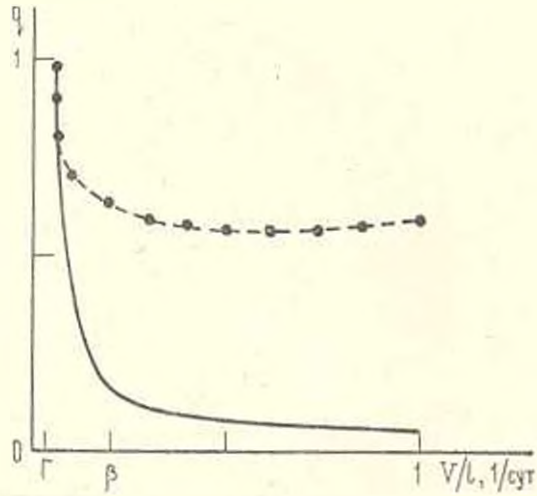
В нелинейной области сжатия бетона принято, что функции нелинейной и линейной ползучести пропорциональны с коэффициентом 10^{-18} $(\text{Па})^{-2}$, что на деформациях ε_m соответствует нелинейному эффекту в 30 %. Функция $R_{30}^{(1)}(t)$, определяющая старение в нелинейной области, принималась пропорциональной функции $R_{10}^{(1)}(t)$ старения в линейной области деформирования, а функции релаксации напряжений в нелинейной и линейной областях связывались так:

$$R_2^{(1)}(t)=[R_1^{(1)}(t)]^2$$

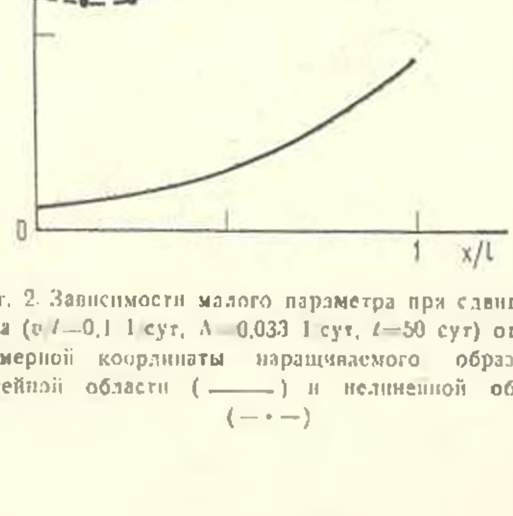
Скорость релаксации Γ функции $R_1^{(1)}(t)$ для нелинейной области деформирования отличается от γ ($\Gamma=0{,}0335$ 1/сут).

Наращивание бетона происходит с постоянной скоростью v вдоль оси x образца ($v=x/\tau^0$). Определим малый параметр q, характеризующий сходимость, по оценкам (2.12), (3.6), (3.8) в частном случае, когда $u_1=u_2$. Для такого дифференциального (см. (2.7), (2.8) при $u_1=u_2$) малого параметра в нелинейном случае оценки зависят от одной скорости деформирования Λ.

На фиг. 1—3 приводятся кривые зависимостей дифференциального малого параметра q, определяющего сходимость процесса последовательных приближений, от погонной скорости наращивания образца, от безразмерной координаты образца, от скорости деформирования в линейной и нелинейной областях неоднородно стареющего бетона в момент $t=50$ сут. На фиг. 1—2 скорости деформирования Λ выбраны в случаях наибольших значений q (для других скоростей Λ сходимость лучше). Из графиков следует, что нелинейность, вообще говоря, ухудшает сходимость. Значение q на фиг. 3 медленно изменяется в нели-

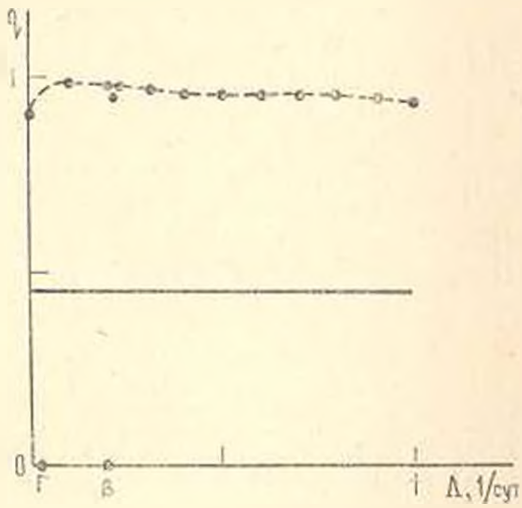


Фиг. 1. Зависимости малого параметра при сдвиге бетона ($x=l$, $\Lambda=0{,}0334$ 1/сут, $t=50$ сут) от погонной скорости его наращивания в линейной области (———) и нелинейной области (—·—)



Фиг. 2. Зависимости малого параметра при сдвиге бетона ($v/l=0{,}1$ 1/сут, $\Lambda=0{,}033$ 1/сут, $t=50$ сут) от безразмерной координаты наращиваемого образца в линейной области (———) и нелинейной области (—·—)

нейном случае кроме двух интервалов (практически меры нуль) при $\Lambda \cong \beta$ и при $\Lambda \cong \Gamma$. Достаточные оценки работы (особенно из-за слагаемых со знаком минус в (3.6)) должны быть улучшены. Недостаток оценок (2.7)—(2.10), (3.6), (3.8) заключается в том, что условие выпуклости оператора Q формулируется в сравнении функций вязкоупругости с квадратичными формами деформаций, характерных для упругости. Поэтому сходимость метода последовательных приближений, на



Фиг. 3. Зависимости малого параметра при старении бетона ($\varkappa = l$, $v/l = 0{,}1$ 1/сут, $t = 50$ сут) от скорости деформирования в линейной области (———) и нелинейной области (– · —)

самом деле, гораздо лучше, чем сходимость, определяемая малым параметром q, представленным на фиг. 1—3. Из зависимостей фиг. 1 видно, что существенная разница в скоростях сходимости в линейном и нелинейном случаях для однородно стареющего материала (большие v/l) уменьшается до нуля для материалов, полученных медленным наращиванием ($v/l < 0{,}08$ 1/сут). При больших скоростях наращивания ($v/l \geq 3$) скорость сходимости приближений практически не зависит от скорости наращивания. Сходимость в зоне образца, выполненного из мало состарившегося материала, хуже (фиг. 2). В линейном случае сходимость не зависит от скорости деформирования (фиг. 3); в нелинейном случае эта зависимость выражена практически слабо.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՒՄՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈԼՉԻԿՈՎ, Ի. Ա. ՄԱԿԱՐՈՎԱ

Ամփոփում

Անհամասեռ ծերացումով խորանարդ ու գծային մածուցիկառաձգական կոնկրետ խնդիրների լուծման ժամանակ, երբ նյութի հասակը կախված է կոորդինատներից, անհրաժեշտություն է առաջանում լուծման ճշտության

և մեթոդի զուգամիտության գնահատականներ։ Աշխատանքում ստացված են կոռիզի, ռելաքսացիայի, ծերացման պրոցեսների համար պայմաններ, որոնց կատարման դեպքում ինտեգրալ ձևափոխություններով հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը զուգամիտում է։ Արդյունքները կիրառված են դեֆորմացիայի և նյութի աճեցման աճից կախված, զուգամիտությունը որոշող փոքր պարամետրով բետոնի օրինակի վրա։

CONVERGENCE DURING NONLINEAR CREEPAGE WITH HETEROGENEOUS AGING

V. V. KOLOKOLCHIKOV, I. S. MAKAROVA

S u m m a r y

During the solution of concrete problems of cubic nonlinear visco-elasticity with heterogeneous aging, when age of the material depends on the coordinates, it becomes necessary to estimate the accuracy of the solution and the convergence of the method. In the present paper conditions for processes, relaxation nuclei and aging were obtained. During the realization of these conditions a consecutive approximation method with integral transformations has been converged. The results are illustrated on the example of concrete with the dependence of small parameter which defines the convergence. This dependence in its turn depends upon rate deformation, material rate joint during sample production, coordinates of heterogeneously aging material in the one-dimensional problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* О сходимости метода упругих решений в нелинейной вязкоупругости.—Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2, с. 307—310.
2. *Колокольчиков В. В.* О сходимости метода последовательных приближений с интегральными преобразованиями для задач нелинейной вязкоупругости.—Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 2, с. 325—329.
3. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел.—Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы ползучести. М.: Гостехиздат, 1952, 323 с.
5. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1973, 432 с.

Куйбышевский государственный
университет

Поступила в редакцию
3.IV.1981