ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 4, 1986 Механика

УДК 539.3.624.131+539.215

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ-ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

АГАЛОВЯН Л. А., АДАМЯН С. Х.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропного двухслойного прямоугольника, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости, когда упругие коэффициенты переменны, при смешанных граничных условиях на продольных кромках. Получены формулы, позволяющие определять искомые величины с наперед заданной асимптотической точностью. Указаны случаи, когда можно получить точное решение внутренней задачи. Когда упругие характеристики слоев постоянны, соответствующие задачи для двухслойной полосы и пластинок решены в [4, 5]. В работе проведен асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния слоистой полосы-прямоугольника в зависимости от закона изменения упругих модулей. Класс из рассмотренных более общих задач описывает модель сжимаемого слоя с переменными упругими характеристиками в теории оснований и фундаментов (модель Власова-Леонтьева, Егорова К. Е., Клейна Г. К.).

1. Требуется определить напряженно-деформированное состояние двухслойного прямоугольника $\Omega=\{(x, y): x\in[0, a], -h\leqslant y\leqslant h, 2h=h_1+h_2\ll a\}$, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Толщина первого слоя — h_1, второго — h_2; $h_1+h_2=2h$. Слои анизотропные и в плоскости каждой полосы анизотропия общего вида. Считается, что упругие коэффициенты a_{ik} — интегрируемые функции от поперечной координаты ($a_{ik}=a_{ik}(\eta)$). Пусть на нижней грани $y=-h$ заданы значения перемещений $u(-h)=u^-$, $v(-h)=v^-$ (в частности, $u^-=v^-=0$), а при $y=+h$ — одна из комбинаций следующих условий:

$$u(h)=u^+(\xi), \qquad v(h)=v^+(\xi) \tag{1.1}$$

$$v(h)=v^+(\xi), \qquad \sigma_{xy}(h)=\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}^+(\xi), \quad (\varepsilon=h/a) \tag{1.2}$$

$$u(h)=u^+(\xi), \qquad \sigma_y(h)=\varepsilon^{-1}\sigma_y^+(\xi), \quad (\xi=x/a) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{xy}(h)=\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}^+(\xi), \quad \sigma_y(h)=\varepsilon^{-1}\sigma_y^+(\xi) \tag{1.4}$$

Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечаются сверху индексом (1), нижнему слою — индексом (2). Указанное решение должно удовлетворять граничным и контактным условиям, а также условиям при $x=0,\ a$.

Перейдем к безразмерным переменным $\xi=x/a$, $\zeta=y/h$, и качестве неизвестных выберем напряжения слоев $\sigma_{jk}^{(i)}$ и безразмерные перемещения $U^{(i)}=u^{(i)}/a$, $V^{(i)}=v^{(i)}/a$ $(i=1,\ 2)$.

Поскольку отнесенная к безразмерным координатам соответствующая система уравнений теории упругости сингулярно возмущенная, ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев [1, 2]. Решение внутренней задачи отыщем в виде [3]

$$\sigma_{jk}^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(i)s},\quad U^{(i)}=\varepsilon^{s}U^{(i)s},\quad s=\overline{0,\ N} \tag{1.5}$$

Здесь и далее обозначение $s=\overline{0,\ N}$ означает суммирование по повторяющемуся индексу s от нуля до N, N — число приближений. Подставив (1.5) в уравнения теории упругости, приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему относительно $\sigma_{jk}^{(i)s}$ и $U^{(i)s}$. Проинтегрировав эту систему, для искомых компонентов напряжений и перемещений получим

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta),\quad \sigma_{y}^{(s)}=\sigma_{y0}^{(s)}(\xi)+\sigma_{y}^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{x}^{(s)}=-(a_{12}\sigma_{y0}^{(s)}+a_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})a_{11}^{-1}+\sigma_{x}^{*(s)}$$

$$U^{(s)}=\sigma_{y0}^{(s)}\int_{0}^{\zeta}A_{16}(\zeta)d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{0}^{\zeta}A_{66}(\zeta)d\zeta+u^{(s)}(\xi)+u^{*(s)}(\xi,\zeta) \tag{1.6}$$

$$V^{(s)}=\sigma_{y0}^{(s)}\int_{0}^{\zeta}A_{11}(\zeta)d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{0}^{\zeta}A_{16}(\zeta)d\zeta+v^{(s)}(\xi)+v^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

где

$$u^{*(s)}(\xi,\zeta)=\int_{0}^{\zeta}\left[a_{16}\sigma_{x}^{*(s)}+a_{26}\sigma_{y}^{*(s)}+a_{66}\sigma_{xy}^{*(s)}-\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$v^{*(s)}(\xi,\zeta)=\int_{0}^{\zeta}[a_{12}\sigma_{x}^{*(s)}+a_{22}\sigma_{y}^{*(s)}+a_{26}\sigma_{xy}^{*(s)}]\,d\zeta$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)}=-\int_{0}^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{x}^{(s-1)}}{\partial\xi}\,d\zeta,\qquad \sigma_{y}^{*(s)}=-\int_{0}^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi}\,d\zeta$$

$$\sigma_{x}^{*(s)}=-(a_{12}\sigma_{y}^{*(s)}+a_{16}\sigma_{xy}^{*(s)})a_{11}^{-1}+a_{11}^{-1}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} \tag{1.7}$$

$$A_{11}=(a_{11}a_{22}-a_{12}^{2})a_{11}^{-1},\quad A_{16}=(a_{11}a_{26}-a_{12}a_{16})a_{11}^{-1},\quad A_{66}=(a_{11}a_{66}-a_{16}^{2})a_{11}^{-1}$$

а всем величинам, зависящим от ζ, надо приписать индекс (1), если они относятся к первому слою и индекс (2) — ко второму, в частности,

$$A_{ik}(\zeta)=\begin{cases} A_{ik}^{(1)}(\zeta) & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1 \\ A_{ik}^{(2)}(\zeta) & -1\leqslant\zeta<\zeta_0 \end{cases} \qquad \sigma_{ik}(\xi,\zeta)=\begin{cases} \sigma_{ik}^{(1)}(\xi,\zeta) & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1 \\ \sigma_{ik}^{(2)}(\xi,\zeta) & -1\leqslant\zeta<\zeta_0 \end{cases}$$

Функции $\sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)$, $\sigma_{y0}^{(s)}(\xi)$, $u^{(s)}(\xi)$, $v^{(s)}(\xi)$ — одни и те же для обоих слоев и подлежат определению. На линии раздела слоев $\zeta=\zeta_0=(h_2-h_1)/(h_2+h_1)$ удовлетворены условия упругого контакта $\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(2)}$, $\sigma_y^{(1)}=\sigma_y^{(2)}$, $U^{(1)}=U^{(2)}$, $V^{(1)}=V^{(2)}$.

Покажем это для напряжения σ_{xy}, для остальных величин доказательство можно провести аналогичным образом. Из (1.7) имеем

$$\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta)=-\int\limits_0^{\zeta_0}\frac{\partial\sigma_x^{(1),s-1}}{\partial\xi}d\zeta-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial\sigma_x^{(1),s-1}}{\partial\xi}d\zeta$$

следовательно,

$$\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta_0)=-\int\limits_0^{\zeta_0}\frac{\partial\sigma_x^{(2),s-1}}{\partial\xi}d\zeta=\sigma_{xy}^{(2),s}(\xi,\zeta_0)$$

отсюда и из первого соотношения (1.6) вытекает $\sigma_{xy}^{(1),s}(\xi,\zeta_0)=\sigma_{xy}^{(2),s}(\xi,\zeta_0)$.

2. Удовлетворив граничным условиям при $\zeta=\pm1$, в случае задачи (1.1) имеем

$$\sigma_{xy0}^{(s)}=\left(\varphi^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta-f^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\Big/\Delta,\quad \sigma_{y0}^{(s)}=\left(f^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta-\varphi^{(s)}\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\Big/\Delta$$

$$u^{(s)}(\xi)=u^{-(s)}+f^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta+$$

$$+\varphi^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta-u^{*(s)}(\xi,-1)$$

$$v^{(s)}(\xi)=v^{-(s)}+f^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta+ \tag{1.8}$$

$$+\varphi^{(s)}\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta\right)\right]\Big/\Delta-v^{*(s)}(\xi,-1)$$

где

$$\varphi^{(s)}=U^{+(s)}-U^{-(s)}-[u^{*(s)}(\xi,1)-u^{*(s)}(\xi,-1)]$$

$$f^{(s)}=V^{+(s)}-V^{-(s)}-[v^{*(s)}(\xi,1)-v^{*(s)}(\xi,-1)]$$

$$\Delta=\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)^2 \tag{1.9}$$

$$U^{\pm(0)}=u^{\pm}/a,\quad V^{\pm(0)}=v^{\pm}/a,\quad U^{\pm(s)}=V^{\pm(s)}=0\quad (s\neq0)$$

Затем по формулам (1.5), (1.6), (1.7) определяются все величины внутреннего напряженно-деформированного состояния. В ряде случаев можно получить точное решение внутренней задачи. Например, когда

$u^-=v^-=0$, $u^+=\text{const}$, $v^+=\text{const}$, получим решение

$$\sigma_{xy}^{(i)}=(h\Delta)^{-1}\left(u^+\int_{-1}^{1}A_{11}d\zeta - v^+\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)$$

$$\sigma_{y}^{(i)}=(h\Delta)^{-1}\left(v^+\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta - u^+\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)$$

$$\sigma_{x}^{(i)}=(h\Delta a_{11}^{(i)})^{-1}\left[u^+\left(a_{16}^{(i)}\int_{-1}^{1}A_{11}d\zeta - a_{12}^{(i)}\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)+\right.$$

$$\left.+v^+\left(a_{12}^{(i)}\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta - a_{16}^{(i)}\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]$$

$$u=\Delta^{-1}\left\{u^+\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)-\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]-\right.$$

$$\left.-v^+\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int_{\zeta}^{1}A_{16}d\zeta\right)-\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{\zeta}^{1}A_{66}d\zeta\right)\right]\right\}$$

$$\tag{1.10}$$

$$v=\Delta^{-1}\left\{v^+\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]+\right.$$

$$\left.+u^+\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{\zeta}^{1}A_{11}d\zeta\right)-\left(\int_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int_{\zeta}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]\right\}$$

где

$$\int_{-1}^{\zeta}A_{jk}d\zeta=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{\zeta}A_{jk}^{(1)}d\zeta & -1\leqslant\zeta<\zeta_0\\ \displaystyle\int_{-1}^{\zeta_0}A_{jk}^{(1)}d\zeta+\int_{\zeta_0}^{\zeta}A_{jk}^{(2)}d\zeta & \zeta_0\leqslant\zeta\leqslant 1\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}A_{jk}d\zeta=\int_{-1}^{\zeta_0}A_{jk}^{(1)}d\zeta+\int_{\zeta_0}^{1}A_{jk}^{(2)}d\zeta \tag{1.11}$$

Точные решения можно выписать и тогда, когда u^+, v^+ есть полиномы.

Рассмотрим некоторые, часто встречающиеся в приложениях [6, 7, 8], случаи изменения модулей упругости.

а) Пусть $E^{(1)}=E_1\approx\text{const}$, $\nu^{(1)}=\nu_1\approx\text{const}$, $E^{(2)}=E_2\exp(-k(\zeta-\zeta_0))$

$$\nu^{(2)}=\nu_2\approx\text{const} \tag{1.12}$$

тогда решение (1.10), считая слои изотропными, примет вид

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}E_2[2(1+\nu_2)hF(k,\zeta_0,n)]^{-1},\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(2)}=u^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))][kF(k,\zeta_0,n)]^{-1}$$

$$v^{(2)}=v^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))][kF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(1)}=u^{+}[\varphi(k,\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)n][F(k,\zeta_0,n)]^{-1} \tag{1.13}$$

$$v^{(1)}=v^{+}[\varphi(k,\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)m][F(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

где

$$n=\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\,\frac{E_2}{E_1},\quad m=\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\,n$$

$$F(k,\zeta_0,n)=\varphi(k,\zeta_0)+(1-\zeta_0)n,\quad \varphi(k,\zeta_0)=[1-\exp(-k(1+\zeta_0))]k^{-1} \tag{1.14}$$

Проведем некоторый анализ решения (1.13) в зависимости от параметра k.

При $k=0$ получаем решение задачи (1.1), когда упругие коэффициенты обоих слоев постоянны [4]:

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}\left[\frac{2(1+\nu_2)}{E_2}h_2+\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}h_1\right]^{-1},\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1},\quad u^{(2)}=u^{+}(y+h)\frac{1+\nu_2}{E_2}\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\frac{1+\nu_1}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$\tag{1.15}$$

$$u^{(1)}=u^{+}\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1+\nu_1}{E_1}\right]\left[\frac{1+\nu_2}{E_2}h_2+\frac{1+\nu_1}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$v^{(2)}=v^{+}(y+h)\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

$$v^{(1)}=v^{+}\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\right]\left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2}h_2+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h_1\right]^{-1}$$

При $k\gg 1$ из (1.13) вытекает

$$\sigma_{xy}^{(i)}=u^{+}E_1/[2h_1(1+\nu_1)],\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_1/[h_1(1-\nu_1^2)],\quad \sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_1/[h_1(1-\nu_1^2)] \tag{1.16}$$

$$u^{(2)}\approx 0\quad u^{(1)}=u^{+}\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1}{h_1}$$

$$v^{(2)}\approx 0\quad v^{(1)}=v^{+}\left(y-\frac{h_2-h_1}{2}\right)\frac{1}{h_1}$$

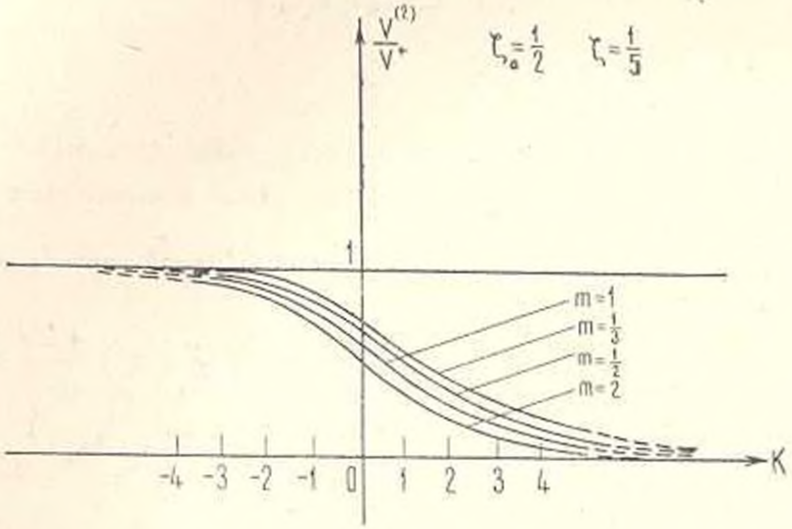
(1.16) имеет очевидную физическую интерпретацию: чем жестче становится второй слой, тем меньше становятся перемещения этого слоя. Когда $k\ll -1$

$$\sigma_{xy}^{(i)}\approx 0,\quad \sigma_y^{(i)}\approx 0,\quad \sigma_x^{(i)}\approx 0,\quad u^{(i)}=u^{+},\quad v^{(i)}=v^{+},\quad (\zeta\neq -1) \tag{1.17}$$

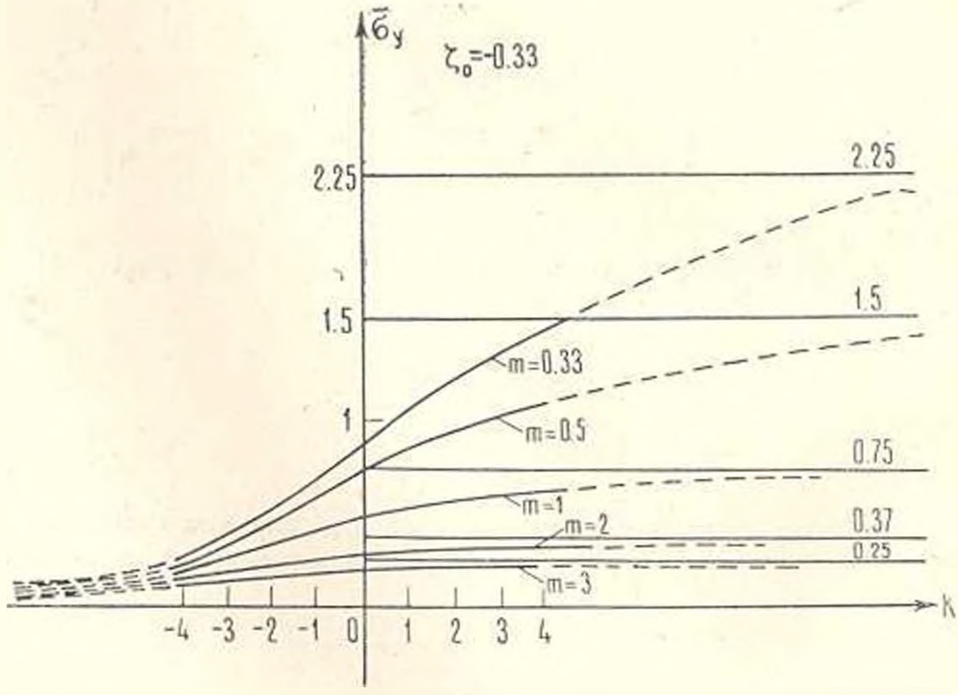
При очень же малой жесткости второго слоя, в силу (1.17), напряжения в слоях близки к нулю, то есть основание перестает сопротивляться. Зависимость напряжений и перемещений от параметров k, m для некоторых сечений ζ показана на фиг. 1, 2, где

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y^{(2)} / [\pi^4 E_2 (1 - \zeta_1^2) \theta]$$

б) Рассмотрим случай кусочно-линейного изменения модуля упругости по толщине.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть $\quad E^{(1)}=E_1\approx\mathrm{const}, \quad \nu^{(1)}=\nu_1\approx\mathrm{const}$

$$E^{(2)}=[E_2+E_3\zeta_0+(E_2-E_3)\zeta](\zeta_0+1)^{-1} \quad \nu^{(2)}=\nu_2\approx\mathrm{const} \tag{1.18}$$

Решением задачи (1.1), вытекающим из (1.10), будет

$$\sigma_y^{(1)}=v^+E_2[(1-\nu_2^2)hD(c,\zeta_0,m)]^{-1}, \quad \tau_{xy}^{(1)}=u^+E_2[2(1+\nu_2)hD(c,\zeta_0,n)]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(1)}=\nu_1 v^+E_2[(1-\nu_2^2)hD(c,\zeta_0,m)]^{-1}, \quad u^{(2)}=[u^+(\zeta_0+1)\ln(E^{(2)}/E_3)]\times$$

$$\times[(1-c)D(c,\zeta_0,n)]^{-1}, \quad u^{(1)}=u^+[(\zeta_0+1)f(c)+n(\zeta-\zeta_0)][D(c,\zeta_0,n)]^{-1} \tag{1.19}$$

$$v^{(2)}=[v^+(\zeta_0+1)\ln(E^{(2)}/E_3)][(1-c)D(c,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$v^{(1)}=v^+[(\zeta_0+1)f(c)+m(\zeta-\zeta_0)][D(c,\zeta_0,m)]^{-1}$$

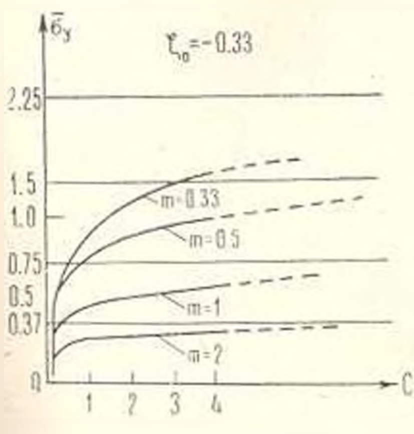
где $\quad c=E_3/E_2, \quad f(c)=(\ln c)/(c-1), \quad D(c,\zeta_0,n)=(\zeta_0+1)f(c)+n(1-\zeta_0)$

$$n=\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\,\frac{E_2}{E_1}, \qquad m=\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\,n$$

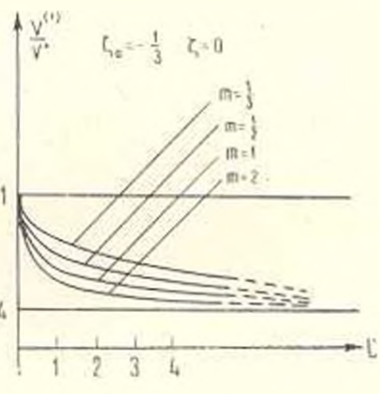
Изучим (1.19) в зависимости от параметра c. При $c=1$, $E_2=E_3$ и получаем формулы (1.15). Когда $c\gg1$, то есть $E_3\gg E_2$, получим снова (1.16) с той лишь разницей, что асимптотика (1.16) устанавливается в первом случае намного быстрее.

Если $c\ll1$, $E_3\ll E_2$, получим формулы (1.17), но в этом случае асимптотика устанавливается довольно медленно.

Зависимость напряжений и перемещений от параметров c, m на некоторых площадках ζ показана на фиг. 3, 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Приведем решение задачи, соответствующей условиям (1.2). Удовлетворим граничным условиям (1.2), будем иметь

$$\tau_{xy0}^{(s)}=\tau_{xy}^{+(s)}-\tau_{xy}^{*(s)}(\xi,1)$$

$$\sigma_{y0}^{(s)}=\left[v^{+(s)}-v^{-(s)}-(v^{*(s)}(\xi,1)-v^{*(s)}(\xi,-1))-\tau_{xy0}^{(s)}\int_{-1}^{1}A_{16}(\zeta)d\zeta\right]\Big/\int_{-1}^{1}A_{11}d\zeta \tag{2.1}$$

$$u^{(s)}(\xi)=u^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{66}d\zeta-u^{*(s)}(\xi,-1)$$

$$v^{(s)}(\xi)=v^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{11}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int\limits_{-1}^{0}A_{16}d\zeta-v^{*(s)}(\xi,-1)$$

Подставив (2.1) в (1.6), получим окончательное решение, в частности, когда $v^{+}=\mathrm{const}$, $\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}^{+}=\tau^{+}=\mathrm{const}$, имеем

$$\sigma_{xy}=\tau^{+};\quad \sigma_y=v^{+}\left(h\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}-\tau^{+}\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}$$

$$\sigma_x=-a_{12}v^{+}\left(a_{11}h\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+a_{16}\tau^{+}\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(a_{11}\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}$$

$$u=v^{+}\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+\tau^{+}h\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1} \qquad (2.2)$$

$$v=v^{+}\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}+\tau^{+}h\left[\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\int\limits_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\right]\left(\int\limits_{-1}^{1}A_{11}d\zeta\right)^{-1}$$

Если слои изотропные, решение (2.2) для случая (1.12) примет вид

$$\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+};\quad \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$\sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(2)}=2(1+\nu_2)\tau^{+}h[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))]E_2^{-1}k^{-1}$$

$$u^{(1)}=2(1+\nu_2)E_1^{-1}[\varphi(k,\zeta_0)+n(\zeta-\zeta_0)]\tau^{+}h \qquad (2.3)$$

$$v^{(2)}=v^{+}[\exp k(\zeta-\zeta_0)-\exp(-k(1+\zeta_0))][kF(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$v^{(1)}=v^{+}[\varphi(k,\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)m][F(k,\zeta_0,m)]^{-1}$$

Нетрудно провести анализ этого решения в зависимости от k. В случае же (1.18) получается

$$\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+};\ \sigma_y^{(i)}=v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hD(c,\zeta_0,m)]^{-1},\ \sigma_x^{(i)}=\nu_i v^{+}E_2[(1-\nu_2^2)hD(c,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$u^{(2)}=2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)\tau^{+}h[\ln(E^{(2)}/E_3)](E_2-E_3)^{-1} \qquad (2.4)$$

$$u^{(1)}=[2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)E_2^{-1}f(c)+2(1+\nu_1)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\tau^{+}h$$

$$z^{(1)}=[(\zeta_0+1)v^{+}\ln(E^{(2)}/E_1)][(1-c)D(c,\zeta_0,m)]^{-1}$$

$$v^{(1)}=v^{+}[(\zeta_0+1)f(c)+m(\zeta-\zeta_0)][D(c,\zeta_0,m)]^{-1}$$

3. Приведем решение задачи, соответствующей условиям (1.3). Удовлетворив условиям (1.3), будем иметь

$$\sigma_{y0}^{(s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(s)}(\xi,1)$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)}=\left[u^{+(s)}-u^{-(s)}-u^{*(s)}(\xi,1)+u^{*(s)}(\xi,-1)-\sigma_{y0}^{(s)}\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right]\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}$$

$$u^{(s)}(\xi)=u^{+(s)}-\sigma_{y0}^{(s)}\int_{0}^{1}A_{16}d\zeta-\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{0}^{1}A_{66}d\zeta-u^{*(s)}(\xi,1) \tag{3.1}$$

$$v^{(s)}(\xi)=v^{-(s)}-\sigma_{y0}^{(s)}\int_{0}^{-1}A_{11}d\zeta-\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{0}^{-1}A_{16}d\zeta-v^{*(s)}(\xi,-1)$$

$$\sigma_y^{+(0)}=\sigma_y^{+},\quad \sigma_y^{+(s)}=0,\quad (s\neq 0)$$

Подставив (3.1) в (1.6), получаем окончательное решение. Когда

$u^{-}=v^{-}\equiv 0,\quad \varepsilon^{-1}\sigma_y^{+}=\sigma_2^{+}=\mathrm{const},\quad u^{+}=\mathrm{const}$, имеем

$$\sigma_y=\sigma_2^{+}$$

$$\sigma_{xy}=u^{+}\left(h\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}-\sigma_2^{+}\left[\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right]\left[\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right]^{-1}$$

$$\sigma_x=-a_{16}u^{+}\left[ha_{11}\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right]^{-1}-\sigma_2^{+}\left[a_{12}\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta-a_{16}\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right]\left(a_{11}\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}$$

$$u=u^{+}\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}+\sigma_2^{+}h\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)\right]\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1} \tag{3.2}$$

$$v=u^{+}\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}+\sigma_2^{+}h\left[\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-1}^{1}A_{16}d\zeta\right)\left(\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)\right]\left(\int_{-1}^{1}A_{66}d\zeta\right)^{-1}$$

4. В задаче, соответствующей условиям (1.4), имеем

$$\sigma_{xy0}^{(s)}=\sigma_{xy}^{+(s)}-\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\ 1),\quad \sigma_{y0}^{(s)}=\sigma_{y}^{+(s)}-\sigma_{y}^{*(s)}(\xi,\ 1)$$

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\xi)&=u^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int_{-1}^{0}A_{16}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{-1}^{0}A_{66}d\zeta-u^{*(s)}(\xi,\ -1)\\ v^{(s)}(\xi)&=v^{-(s)}+\sigma_{y0}^{(s)}\int_{-1}^{0}A_{11}d\zeta+\sigma_{xy0}^{(s)}\int_{-1}^{0}A_{16}d\zeta-v^{*(s)}(\xi,\ -1)\end{aligned}\tag{4.1}$$

В частности, при $\varepsilon^{-1}\sigma_{xy}^{+}=\tau^{+}=\text{const}$, $\varepsilon^{-1}\sigma_{y}^{+}=\sigma_{2}^{+}=\text{const}$, $u^{-}=v^{-}=0$ получаем замкнутое решение

$$\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+},\quad \sigma_{y}^{(i)}=\sigma_{2}^{+},\quad (i=1,\ 2),\quad \sigma_{x}^{(i)}=-(a_{12}^{(i)}\sigma_{2}^{+}+a_{16}^{(i)}\tau^{+})(a_{11}^{(i)})^{-1}$$

$$u=\left(\sigma_{2}^{+}\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta+\tau^{+}\int_{-1}^{\zeta}A_{66}d\zeta\right)h,\quad v=\left(\sigma_{2}^{+}\int_{-1}^{\zeta}A_{11}d\zeta+\tau^{+}\int_{-1}^{\zeta}A_{16}d\zeta\right)h\tag{4.2}$$

Эта задача описывает упругое основание—фундамент по модели сжимаемого слоя [6—8]. Из (4.2), считая слои изотропными, когда модуль упругости изменяется по закону (1.12), получаем

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+},\quad \sigma_{y}^{(i)}=\sigma_{2}^{+},\quad \sigma_{x}^{(i)}=\nu_{i}\sigma_{2}^{+}\\ &u^{(2)}=2(1+\nu_{2})\tau^{+}h\,[\exp k(\zeta-\zeta_{0})-\exp\,(-k(1+\zeta_{0}))](E_{2}k)^{-1}\\ &u^{(1)}=2(1+\nu_{2})E_{2}^{-1}[\varphi(k,\ \zeta_{0})+n(\zeta-\zeta_{0})]\tau^{+}h\\ &v^{(2)}=(1-\nu_{2}^{2})\sigma_{2}^{+}h[\exp k(\zeta-\zeta_{0})-\exp(-k(1+\zeta_{0}))](E_{2}k)^{-1}\\ &v^{(1)}=(1-\nu_{2}^{2})\sigma_{2}^{+}h[\varphi(k,\ \zeta_{0})+m(\zeta-\zeta_{0})]E_{2}^{-1}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Если упругие коэффициенты обоих слоев постоянны ($k=0$)

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+}\quad \sigma_{y}^{(i)}=\sigma_{2}^{+}\quad \sigma_{x}^{(i)}=\nu_{i}\sigma_{2}^{+}\\ &u^{(2)}=2(1+\nu_{2})\tau^{+}h(\zeta+1)E_{2}^{-1}\\ &u^{(1)}=[2(1+\nu_{2})(\zeta_{0}+1)E_{2}^{-1}+2(1+\nu_{1})(\zeta-\zeta_{0})E_{1}^{-1}]\tau^{+}h\\ &v^{(2)}=(1-\nu_{2}^{2})\sigma_{2}^{+}h(\zeta+1)E_{2}^{-1}\\ &v^{(1)}=[(1-\nu_{2}^{2})(\zeta_{0}+1)E_{2}^{-1}+(1-\nu_{1}^{2})(\zeta-\zeta_{0})E_{1}^{-1}]\sigma_{2}^{+}h\end{aligned}\tag{4.4}$$

При $k\gg1$

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy}^{(i)}=\tau^{+},\quad \sigma_{y}^{(i)}=\sigma_{2}^{+},\quad \sigma_{x}^{(i)}=\nu_{i}\sigma_{2}^{+},\quad u^{(2)}\approx0,\quad v^{(2)}\approx0\\ &u^{(1)}=2(1+\nu_{1})E_{1}^{-1}(\zeta-\zeta_{0})\tau^{+}h,\quad v^{(1)}=(1-\nu_{1}^{2})E_{1}^{-1}(\zeta-\zeta_{0})\sigma_{2}^{+}h\end{aligned}\tag{4.5}$$

То есть чем жестче второй слой, тем близки к нулю перемещения этого слоя. Используя это свойство и заранее ставив ограничение на возможную осадку, можно найти ту глубину, начиная с которой основание можно считать абсолютно жестким.

Когда $k\ll-1$

$$\sigma_{xy}^{(l)} = \tau^{+}, \quad \sigma_y^{(l)} = \sigma_2^{+}, \quad \sigma_x^{(l)} = \nu_l \sigma_2^{+}, \quad u^{(l)} \gg 1, \quad v^{(l)} \gg 1, \quad (\zeta \neq -1) \tag{4.6}$$

Чем меньше становится жесткость второго слоя, тем быстрее падает его сопротивляемость и возникают достаточно большие перемещения. При (1.18) имеем

$$\begin{gathered}
\sigma_y^{(l)} = \sigma_2^{+}, \quad \sigma_{xy}^{(l)} = \tau^{+}, \quad \sigma_x^{(l)} = \nu_l \sigma_2^{+} \\
u^{(2)} = 2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)\tau^{+} h [\ln(E^{(2)}/E_3)](E_2 - E_3)^{-1} \\
u^{(1)} = [2(1+\nu_2)(\zeta_0+1)E_2^{-1} f(c) + 2(1+\nu_1)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\tau^{+} h \\
v^{(2)} = (\zeta_0+1)(1-\nu_2^2)\sigma_2^{+} h [\ln(E^{(2)}/E_3)](E_2 - E_3)^{-1} \\
v^{(1)} = [(1-\nu_2^2)(\zeta_0+1)E_2^{-1} f(c) + (1-\nu_1^2)E_1^{-1}(\zeta-\zeta_0)]\sigma_2^{+} h
\end{gathered} \tag{4.7}$$

5. Решения (4.3), (4.4), (4.7) позволяют судить о поведении основания под действием внешней нагрузки и провести сопоставления с известными моделями оснований. По модели основания Винклера—Фусса есть прямая пропорциональная зависимость между контактным давлением и соответствующим перемещением ($\sigma_y = Kv$). На основе точного решения уравнений теории упругости было показано [4], и это вытекает также из (4.4), что в случае равномерной нормальной нагрузки, действительно, на линии контакта $\zeta = \zeta_0$ двух слоев имеет место вышеуказанная пропорциональность с известным [6.9] коэффициентом постели

$$K_0 = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)h_2} \tag{5.1}$$

Возникает естественный вопрос: сохраняется ли эта пропорциональная зависимость при переменных модулях упругости у основания, то есть когда основание с глубиной твердеет или ослабевает. Из (4.3) вытекает, что пропорциональность нормальной реакции и соответствующего перемещения сохранятся, однако в качестве коэффициента постели выступает

$$K = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)h_2} \, \frac{k_1}{1-\exp(-k_1)} = K_0 \, \frac{k_1}{1-\exp(-k_1)} \tag{5.2}$$

где $k_1=(Kh_2)/h$ характеризует изменение модуля упругости по глубине основания.

В силу (1.12) это изменение запишется в виде

$$E^{(2)} = E_2 \exp[-k_1(y-y_0)/h_2] \tag{5.3}$$

то есть модуль меняется в пределах $[E_2, \; E_2 \exp k_1]$.

Если модуль упругости основания меняется по формуле (1.18), то из (4.7) следует

$$K = K_0 \, \frac{c-1}{\ln c} \tag{5.4}$$

В табл. 1 приведены значения отношения K/K_0 в зависимости от значений k_1, c. Оттуда следует, что с увеличением жесткости основания коэффициент постели K по сравнению с обычным коэффициентом K_0 увеличивается, при уменьшении же жесткости коэффициент постели уменьшается. Когда упругий модуль основания постоянен, предельным переходом $k_1 \to 0$, $c \to 1$ из (5.2) и (5.4) получим известный коэффициент K_0, $(K \to K_0)$

Таблица 1

k_1	−100	−50	−30	−10	−5	−3	−1	0	1	3	5	10	20	50
K_1/K_0	$8\cdot10^{-42}$	$1.3\cdot10^{-20}$	$27\cdot10^{-12}$	$4\cdot10^{-4}$	0.03	0.15	0.6	1	1.6	3.15	5	10	20	50
c	0.01	0.02	0.03	0.09	0.13	0.2	[illegible]	0.5	1	5	10	20	50	100
K/K_0	0.21	0.25	0.28	0.39	0.44	0.5	0.6	0.72	1	2.5	3.9	6.3	12.5	21

Как и в случае однородного основания [4], если нормальная нагрузка не остается постоянной, точки контакта получают дополнительные тангенциальные перемещения, а также возникают касательные напряжения. Однако, главным все же остается Винклеровское слагаемое.

Полученное выше решение и проведенные рассуждения справедливы, начиная с некоторого расстояния от вертикальных сечений $x=0$, a, равного зоне затухания концевых эффектов (погранслой). Вблизи же этих сечений возникает пограничный слой. В этих местах модель Винклера-Фусса и любая прикладная модель, использующая понятие коэффициента постели, перестают быть справедливыми. Пограничный слой можно изучить способом, изложенным в [10].

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐՈՎ ԵՐԿՇԵՐՏ ՇԵՐՏ-ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Խ. ԱԴԱՄՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի պայմաններում գտնվող անիզոտրոպ երկշերտ ուղղանկյան լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ երկայնական եզրերի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ և առաձգական գործակիցները փոփոխական են։ Ստացված են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս որոշել փնտրվող մեծությունները նախօրոք տրված ասիմպտոտիկ ճշտությամբ։ Բերված են դեպքեր, երբ կարելի է ստանալ ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Կատարված է շերտավոր ուղղանկյան լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի անալիզ կախված առաձգական մոդուլների փոփոխման օրենքից։

ON THE STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYER STRIPE-RECTANGLE WITH VARIABLE ELASTIC CHARACTERISTICS

L. A. AGALOVIAN, S. Kh. ADAMIAN

Summary

The determination of stress-strain state for an anisotropic two-layer rectangle with variable elastic characteristics is considered. The mixed boundary conditions on the longitudinal sides of the stripe are given.

The formula allow to determine all unknown values with given asymptotic exactness in advance.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 667—686.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.—Межвузов. сб. Механика. Изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7—12.
4. *Агаловян Л. А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера.—В сб.: XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. I. Таллин: 1983, с. 13—18.
5. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Асимптотические решения одного класса смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластинок и гипотеза Винклера-Фусса.—Материалы II Всес. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Т. 1. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, с. 30—35.
6. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкции на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 620 с.
7. *Егоров К. Е.* О деформации основания конечной толщины.—Основания, фундаменты и механика грунтов, 1961, № 1, с. 4—6.
8. *Клейн Г. К.* Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании.—Тр. МИСИ им. В. В. Куйбышева. 1956.
9. *Власов В. З.* и *Леонтьев.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
10. *Агаловян Л. А.* Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач.—Межвузов. сб. Механика. Изд-во ЕГУ, 1984. вып. 3, с. 51—58.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.VIII.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 536.1

УРАВНЕНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН ДЛЯ СМЕСИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДОЕВ А. Г., ГУРГЕНЯН А. А.

В связи с развитием в последнее время газодинамических лазеров несомненно представляет большой практический интерес изучение нелинейных волновых процессов в окрестностях слабых ударных волн, распространяющихся в диспергирующих средах с малой диссипацией. Учет соответствующих членов с высшими производными, а также допущение о медленном изменении амплитуды, волнового числа и других величин, характеризующих волну на расстояниях и за время одного периода колебания, приводит к совершенно новым эффектам, таким как самофокусировка волновых лучей, интенсивно изучаемая в настоящее время.

Как указывается в работе [1], при работе газодинамических лазеров в потоке возможно появление жидких и твердых частиц конденсата, нарушающих гомогенность активной среды. Распространение ударных волн в таких средах имеет диссипативный и дисперсионный характер. Все эти факторы в той или иной мере влияют на мощность генерации и фазовые характеристики излучения.

Оценку этих факторов можно получить рассмотрением приближенных нелинейных уравнений движения жидкости в областях более интенсивного изменения параметров среды (области коротких волн).

Получение нелинейных уравнений коротких волн для произвольной среды дается в работах [2, 3]. Конкретизация коэффициентов этих уравнений для магнитной газодинамики, а также химически активной среды в магнитном поле как для стационарных, так и для нестационарных задач дается в [4, 5, 6].

В настоящей статье, в первой части, дается получение этих уравнений для реальной смеси с пузырьками газа и при наличии твердых сферических включений под действием внешнего магнитного поля.

Во второй части статьи выводится уравнение модуляции и интегрируется для осесимметричной задачи, что дает возможность исследования самофокусировки волновых пучков.

1. Получение уравнений коротких волн. Для произвольной недиссипативной среды эти уравнения имеют вид [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}\right)-u\frac{d\ln\varphi}{dt}=$$

$$=-(\lambda+1)\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\tau};\quad\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial v_{x_2}}{H_1\partial\tau};\quad\frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\partial v_{x_3}}{H_1\partial\tau}\qquad(1.1)$$

где u—проекция на нормаль к волне возмущенной скорости частиц, t—время, H_1—нормальная скорость волны в линейном приближении, v_{y_1}, v_{z_1}—функции, смысл которых выясняется из проекций уравнения среды на направления y, z, касательные к волне, τ—время пробега волны в линейном приближении от ее положения в момент t до данной точки (эйконал), $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$—дисперсионное уравнение, x_2, x_3—координаты, отсчитываемые вдоль волны, φ—лучевое решение, $(\nu+1)u$ дает нелинейный добавок в формуле нормальной скорости волны, а также включает формально диссипативные эффекты.

Вначале рассмотрим задачу определения вида уравнения (1.1) для химически активной смеси с пузырьками газа во внешнем однородном магнитном поле с напряженностью B_0. Причем предполагаем, что происходит только одна химическая реакция.

Уравнения движения такой среды можно взять в виде [7, 8]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \frac{1}{2\pi\rho}\operatorname{rot}\bar{H}\times\bar{H} +$$

$$+ \frac{\eta}{\rho}\Delta\bar{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}$$

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\bar{v}\times\bar{H}) = -\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot}\bar{H})$$

$$\operatorname{div}\bar{H} = 0$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} + Q\frac{dq}{dt} = k\Delta T + \sum\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)(\operatorname{div}\bar{v})^2 +$$

$$+ \frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\bar{H})^2 + \rho D\Omega \operatorname{div} A + DA[-\mu\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\Omega\rho + \mu\rho)]$$

$$(1.2)$$

$$\rho\mu\frac{dc}{dt} - Q\frac{dq}{dt} = \mu\operatorname{div}(\rho DA), \quad Tds = de + pdV - \mu dc$$

$$\rho = \rho_f(1-\beta); \quad p_g R^{3\gamma} = \text{const}, \quad \frac{p_g^{1/3\gamma}}{\rho_f(1-\beta)} = \text{const}$$

где p—давление в смеси, p_g—давление в газовом пузырьке, ρ—плотность смеси, ρ_f—плотность в жидкости, v—скорость, T—температура, s—энтропия, Q—средство химической реакции, μ—химический потенциал, c—концентрация, η, ζ—коэффициенты вязкости, ν_m—коэффициент магнитной вязкости.

Предполагая, что газовая и жидкая фазы движутся с одинаковой скоростью и считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними и пульсации пузырька описать уравнением [8]

$$p_g - p = \rho_f R_0\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2}\rho_f\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 + \frac{4}{R}\eta\frac{\partial R}{\partial t} \tag{1.3}$$

При течении релаксирующих сред различаются квазизамороженный и квазиравновесный процессы распространения возмущений и соответственно различные скорости звука a_f, a_e. Несомненный интерес представляют среды, в которых предельные скорости близки друг другу [9]. Исследуем квазиравновесный случай, остальные получаются аналогично.

В этом случае основными переменными считаются плотность ρ, давление p и химическое средство Q. Используя уравнение [9]

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q} \left| dp - a_e^2 d\rho - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s} dQ \right| \tag{1.4}$$

а также (1.3), систему уравнений (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{dp_g}{dt} + \rho a_e^2 \operatorname{div} \bar{v} = \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s} \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^{-1}_{\rho,Q} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\Delta p_g - \frac{R_0^2}{3\gamma p_{g_0}(1-\beta_0)} \nabla \frac{\partial^2 p_g}{\partial t^2} - \frac{4}{R} \nu \frac{R_0}{3\gamma p_{g_0}} \nabla \frac{\partial p_g}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \bar{H} \times \bar{H} + \frac{\varkappa}{\rho} \nabla \bar{v} + \frac{1}{\rho}\left(\xi + \frac{\varkappa}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{v}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\bar{v} \times \bar{H}) = \nu_m \nabla^2 \bar{H}, \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{Q}{\rho T}\frac{dq}{dt} = \frac{k}{\rho T}\Delta T + \frac{D\Omega}{T}\left(\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T + \frac{k_p}{p}\Delta p\right)$$

$$\frac{dc}{dt} - \frac{\nu}{\rho}\frac{dq}{dt} = D\left(\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T + \frac{k_p}{p}\Delta p\right)$$

где

$$A = \operatorname{grad} c + \frac{k_T}{T}\operatorname{grad} T + \frac{k_p}{p}\operatorname{grad} p, \quad \Omega = k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c} \tag{1.5}$$

Переходя в уравнениях (1.5) к системе подвижных координат x_1, x_2, x_3, связанной с волной, где x_1 направлено по нормали к волне, плоскость x_1x_2 проходит через начальное магнитное поле B_0, ось x_3 перпендикулярна магнитному полю, и оставляя в правых частях величины основного порядка, можно получить уравнение нелинейных характеристик, заменяя $\frac{\partial}{\partial t} \to -\lambda\delta$, $\nabla \to \vec{n}\delta$, $\Delta \to \delta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$, где $\vec{n}$ — единичный вектор по нормали к характеристической поверхности, λ — нормальная скорость распространения

$$-c_n\delta p_g + \rho a_e^2 \delta u = \Phi_1, \quad -c_n\delta\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{n}\,\delta p_g - \frac{H_n}{4\pi\rho}\delta\vec{H} + \frac{1}{8\pi\rho}\vec{n}\delta H^2 = \vec{\Phi}_2 \tag{1.6}$$

$$-c_n\delta\vec{H} - H_n\delta\vec{v} + \vec{H}\delta u = \vec{\Phi}_3, \quad \delta H_n = 0$$

где

$$\Phi_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^{-1}_{\rho,Q}\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\Phi}_2=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\rho}\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\vec{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{4}{R}\cdot\frac{R_0}{3\gamma p_{g_0}}\lambda\vec{n}\partial^2 p_g- \tag{1.7}$$

$$-\frac{R_0^2}{3\gamma p_{g_0}(1-\beta_0)}\lambda^2\vec{n}\partial^3 p_g,\quad \vec{\Phi}_3=\nu_m\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x_1^2}$$

c_n—скорость распространения магнитозвуковой волны для недиссипативной среды.

Решая (1.6) относительно δv, можно получить

$$-c_n\delta\vec{v}+\frac{\vec{n}}{\rho c_n}(\rho a_e^2\delta v_n-\Phi_1)-\frac{H_n}{4\pi\rho}\left(-\frac{H_n}{c_n}\delta\vec{v}+\frac{H}{c_n}\delta v_n-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_n}\vec{\Phi}_3\right)+\frac{\vec{n}}{4\pi\rho}\left\{-\frac{H_n}{c_n}\left[\frac{H_n}{\rho c_n^2}(\rho a_e^2\delta v_n-\Phi_1)-\frac{\vec{\Phi}_3\vec{H}}{c_n}\right]+\frac{H^2}{c_n}\delta v_n-\frac{\vec{\Phi}_3\vec{H}}{c_n}\right\} \tag{1.8}$$

Проектируя это уравнение на нормаль к волне, получим

$$c_n^4-c_n^2\left(a_e^2+\frac{H^2}{4\pi\rho_0}\right)+\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}a_e^2=\frac{1}{\delta v_n}\Phi \tag{1.9}$$

где

$$\Phi=\left(\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}-\frac{c_n^2}{\rho_0}\right)\Phi_1+\frac{H_n}{4\pi\rho_0}c_n^2\Phi_{3n}+\frac{H_n c_n}{4\pi\rho_0}\vec{\Phi}_2\vec{H}-\frac{c_n^2}{4\pi\rho_0}\vec{\Phi}_3\vec{H}-\Phi_{2n}c_n^3$$

Вводя обозначения

$$\vec{v}=\vec{v}+\vec{u},\quad p=P+p',\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad T=T_0+T'$$

$$\vec{H}=\vec{B}_0+\vec{b},\quad c_n=C_n+(\lambda+1)u_n,\quad a_e=a_{e_0}+(\alpha^0-1)\frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{1.10}$$

$$\alpha^0=\left(\frac{\partial\rho a}{a\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}$$

где u, ρ', p', T', b—есть малые возмущенные значения и учитывая, что $\partial/\partial x_1\gg\partial/\partial x_2\gg\partial/\partial x_3$, можно в порядке $\partial u/\partial x_1$ получить условия совместности на линейных характеристиках для недиссипативной среды в виде ($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ и принято $B_{0z}=0$)

$$u_x=C_n\frac{p'}{\rho_0 a_0},\quad u_y=-\frac{B_{0x}}{B_{0y}C_n}(C_n^2-a_0^2)\frac{p'}{\rho_0 a_0},\quad b_y=\frac{4\pi\rho_0}{B_{0y}}(C_n^2-a_0^2)\frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{1.11}$$

Используя (1.11), из (1.9) можно найти

$$\lambda+1=\alpha^0\frac{C_n^2-a_1^2}{\Omega_1}+\frac{3}{2}\frac{C_n^2-a_0^2}{\Omega_1}+\frac{1}{C_n\Omega_1 u_n}\frac{\Phi}{\delta u_n},\quad \Omega_1=2C_n^2-a_0^2-a_1^2 \tag{1.12}$$

Чтобы вычислить диссипативный член Ф, допускается аналитическая зависимость q от Q [9]

$$\frac{dq}{dt}=-H(\rho,c)Q,\quad H(\rho,c)=\frac{H'}{\tau'},\quad H'\sim 1 \tag{1.13}$$

Учитывая, что для квазиравновесного процесса $L/c_n\tau' \gg 1$, где L и τ' — характерные длина и время, и $Q \ll q$, а также зависимость

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\rho,Q} \left| dp - \frac{1}{\varkappa_e}\, a_e^2 d\rho - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,T} dQ \right|; \quad \varkappa_e = \frac{C_{p,Q}}{C_{v,Q}}$$

нетрудно получить условия совместности для c, T, Q, q

$$c' = \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{Q,s} p', \quad T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{Q,\rho} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right) p', \quad Q = \frac{C_n}{H_1} \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$q' = \frac{\rho_0}{\nu} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{Q,s} \frac{1}{a_e^2} p', \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{C_n^2}{H_1} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \tag{1.14}$$

и диссипативный член Φ в виде

$$\Phi = A \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + A^* \frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} \tag{1.15}$$

где

$$A = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0^2} - \frac{C_n^2}{\rho_0}\right) A_1 - \frac{1}{4\pi\rho_0} A_2 + A_3$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q}^{-1} \left| \frac{k}{\rho_0 T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\rho,Q} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right) + \frac{L\Omega}{T_0} \left| \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{Q,s} \frac{1}{a_0^2} + \frac{k_p}{p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_T}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{Q,\rho} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right) \right| \right| - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s} \frac{C_n^2}{H_1} \frac{\rho_0}{\nu} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{s,Q} \frac{1}{a_0^2}$$

$$A_2 = 4\pi\nu_m \frac{C_n^2 (C_n^2 - a_0^2)}{a_0^2}$$

$$A_3 = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - C_n^2\right) \left| \frac{1}{\rho_0} \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{C_n^2}{\rho_0 a_n^2} + \frac{4}{3} \frac{\nu\lambda C_n}{\gamma p_{K*}} - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_n^2 - a_0^2}{\rho_0 a_0^2} \right|, \quad A^* = -\frac{R_0^2 \rho^2 C_n}{3\gamma p_{K*}(1 - \beta_0)} \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - C_n^2\right)$$

Нелинейное уравнение коротких волн (1.1) окончательно принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial v_{x3}}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_3}\right) - u \frac{d \ln \psi}{dt} =$$

$$= \Pi_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \Pi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}; \quad \frac{\partial v_{x2}}{H_1 \partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_{x3}}{H_1 \partial \gamma} = \frac{\partial u}{\partial x_3} \tag{1.16}$$

где обозначено

$$\Pi_1 = -\alpha^0 \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2} \frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1}; \quad \Pi_2 = -\frac{A}{C_n^2 \Omega_1} \rho_0 a_0^2, \quad \Pi_3 = -\frac{A^*}{C_n^2 \Omega_1} \rho_0 a_0^2$$

Дифференцируя уравнение (1.16) по x_1, где $x_1 = H_1\tau$, можно записать его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \right) -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{d \ln \psi}{dt} = \Pi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \Pi_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \qquad (1.17)$$

Как видно из (1.17), влияние пузырьков в жидкости добавляет в уравнение коротких волн (1.1) третью производную неизвестной функции по x_1 с коэффициентом Π_3.

Коэффициенты $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}$ вычисляются аналогично [4] при помощи уравнений характеристик для линейной недиссипативной среды и имеют вид

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_x^2 - B_z^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^4 a_1^4 \frac{B_z^2 (B^2 - B_x^2 - B_z^2)(6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^3 \Omega_1^3}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_x^2 - B_y^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^4 a_1^4 \frac{B_y^2 (B^2 - B_x^2 - B_y^2)(6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^2 \Omega_1^3}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = C_n a_0^2 a_1^2 \frac{B_z B_y}{B^2} \; \frac{3a_0^2 + 3a_1^2 - 2C_n^2}{\Omega_1^3} \qquad (1.18)$$

Лучевое решение ψ, входящее в уравнение (1.17), как показано в [3], можно получить из уравнения сохранения адиабатического инварианта [10]

$$\rho_0 \Sigma v^2 \frac{H_1}{C_n} = \mathrm{const}$$

где Σ есть площадь фронта волны внутри лучевой трубки, v—возмущенное значение скорости частицы.

Рассмотрим как повлияет на вид уравнений коротких волн появление в смеси твердых частиц.

Шарик совершает движение, уравнение которого по направлению нормали к волне можно записать в виде [12, 13]

$$\frac{du_l}{dt} + \xi_1 \left(\frac{du_l}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \eta_1 (u_l - u) = 0$$

$$\xi_1 = \frac{\rho}{\rho_L} \frac{2 + k^4 R_1^4}{4 + k^4 R_1^4}, \qquad \eta_1 = \frac{\rho}{\rho_L} \frac{k^3 R_1^3 \omega}{4 + k^4 R_1^4} \qquad (1.19)$$

где u_l—скорость центра шарика по нормали к волне, u—скорость жидкости, ρ—плотность смеси, ρ_L—плотность шарика, R_1—радиус шарика, намного меньший, чем длина волны, k—волновое число падающей волны, ω—частота колебаний шарика. При появлении шариков в уравнениях движения (1.5) (в правой части второго уравнения) нужно добавить $-\beta_1 \rho_L \frac{du_l}{dt} \cdot \vec{n}$ и ρ заменить на $\rho(1-\beta_1)$, где β_1—концентрация твердых частиц в смеси.

Учитывая, что $kR_1 \ll 1$, из (1.19) можно получить условие совместности на волне в виде

$$
\delta u_l = (K_1 + K_2)\delta u + K_3 u, \quad K_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}}
$$

$$
K_2 = \frac{\rho}{\rho_L}\frac{k^3 R_1^3}{(4 + k^4 R_1^4)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}\right)^2}, \quad K_3 = \frac{-\eta_1}{C_n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}\right)^2} \tag{1.20}
$$

Так как K_1 — немалая величина, то первый член $K_1\delta u$ в (1.20) войдет в левую часть условия совместности (1.6), а остальные слагаемые добавятся в диссипативный член Φ_2.

Вследствие этого в уравнении (1.9) для скорости волны a_l нужно заменить на $a_l/(1-b)(1-\beta_1)$, а Φ — на $\Phi/(1-b)$, где $b = \rho_L\beta_1 K_1/\rho(1-\beta_1)$.

Окончательно диссипативный член с учетом твердых шарообразных частиц запишется в виде

$$
\Phi = A\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + A^*\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} + B\frac{\partial p}{\partial x_1} + Cp \tag{1.21}
$$

где A и A^* определяются по (1.15), а B и C имеют следующий вид:

$$
B = -\frac{\rho_L\beta_1 K_1}{\rho_0(1-\beta_1)}\frac{C_n^2}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{B_{0r}^2}{4\pi\rho_0(1-\beta_1)} - C_n^2\right)
$$

$$
C = \frac{\rho_L\beta_1 K_3}{\rho_0(1-\beta_1)}\frac{C_n^3}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{B_{0r}^2}{4\pi\rho_0(1-\beta_1)} - C_n^2\right) \tag{1.22}
$$

Уравнение коротких волн (1.17) в этом случае запишется

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_1} - \frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\,\partial\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_3}\right) -
$$

$$
-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{d\ln\beta}{dt} = \Pi_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \Pi_2\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} +
$$

$$
+ \Pi_4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Pi_5\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \Pi_1 = -\alpha^0\frac{C_n^2 - a_1^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2}\frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} \tag{1.23}
$$

$$
\Pi_2 = -\frac{A}{C_n\Omega_1(1-b)}, \quad \Pi_3 = -\frac{A^*}{C_n\Omega_1(1-b)}, \quad \Pi_4 = -\frac{B}{C_n\Omega_1(1-b)}
$$

$$
\Pi_5 = -\frac{C}{C_n\Omega_1(1-b)}
$$

2. *Нелинейное уравнение модуляции.* Общий подход получения уравнений для модулированных колебаний в нелинейной слабо диссипативной диспергирующей среде дается в [3, 10, 11].

Здесь рассматривается задача о получении нелинейного уравнения модуляций для уравнений коротких волн (1.23) прямым путем, полагая

$$u = U_0 + U_1 \exp(i\tau - \alpha t) + U_1^* \exp(-i\tau - \alpha t) + U_2 \exp(2i\tau - 2\alpha t) + \ldots \quad (2.1)$$

где $u_j(r, t)$ есть медленно меняющаяся функция от аргументов, что эквивалентно с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) предположению о больших значениях ω (частота линейной задачи), τ — невозмущенный эйконал, U_j^* — комплексно сопряжена U_j.

Подставляя (2.1) в (1.23) и учитывая, что производные от экспоненциального множителя по порядку превосходят производные от функций U_j, а также соотношение $\omega = -\partial\tau/\partial t$, $k = \partial\tau/\partial x_1$, можно получить в основном порядке уравнение для слагаемых при $\exp(i\tau)$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U_1}{\partial t} ik - U_1(i\omega + \alpha)ik + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(i\omega + \alpha) - \\
-\frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\
-\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{d \ln \varphi}{dt} + \Pi_1 (k^2 U_0 U_1 - U_1^* U_2 k^2 \exp(-2\alpha t)) - \\
-\Pi_2 \left(3ik \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - 3k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - ik^3 U_1 \right) - \Pi_3 \left(U_1 k^4 - 6ik^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - \right. \\
\left. -4ik^3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - \Pi_4 \left(2ik \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - k^2 U_1 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \right) - \Pi_5 \left(ikU_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = 0
\end{gathered} \quad (2.2)$$

Приравнивая коэффициенты при U_1 в (2.2), найдем дисперсионные соотношения для линейной задачи

$$\omega = \Pi_3 k^3 - \Pi_4 k, \quad \alpha = \Pi_2 k^2 - \Pi_5 \quad (2.3)$$

В порядке $\exp(2i\tau)$ найдем из (1.23)

$$U_2 = (D_1 + iD_2) U_1^2 \quad (2.4)$$

где

$$\begin{gathered}
D_1 = -\frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k(\omega - 2k^3 \Pi_3 + k\Pi_4)}{(\omega - 2k^3 \Pi_3 + k\Pi_4)^2 + \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)^2} \\
D_2 = \frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)}{(\omega - 2k^3 \Pi_3 + k\Pi_4)^2 + \left(k^2 \Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2} \Pi_5 \right)^2}
\end{gathered} \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.2), учитывая, что для дифракционных задач можно считать $U_0 = 0$ и отбрасывая несущественные вторые производные по x_1, можно получить нелинейное уравнение модуляции

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(-i\omega-\alpha+3k^2\Pi_2+4ik^3\Pi_3-2ik\Pi_4-\Pi_3)+ik\frac{\partial U_1}{\partial t}-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2\partial x_3}\right)+k^2\Pi_1(D_1+iD_2)U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.6}$$

Если перейти в (2.6) к новым переменным $x_1=x-H_1t$, для которых имеет место

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x_1-\mathrm{const}}=\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x-\mathrm{const}}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{dX_1}{dt} \tag{2.7}$$

и положить $\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x-\mathrm{const}}=0$, то уравнение модуляции для стационарных задач принимает вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}(C_1+iC_2)-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\Pi_1k^2(D_1+iD_2)U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.8}$$

где

$$C_1=-\alpha+3k^2\Pi_2-\Pi_3,\quad C_2=-\omega+kH_1+4k^3\Pi_3-2k\Pi_4 \tag{2.9}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу в случае, когда начальное магнитное поле направлено по оси x, то есть $H_0=B_{0x}$, $B_y=B_z=0$.

В этом случае коэффициенты в уравнении модуляции (2.8) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}=-\frac{C_a^2}{\Omega_1},\quad \Omega_1=2C_a^2-a_0^2-a_*^2 \tag{2.10}$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}$, уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(C_1+iC_2)-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)+$$

$$+\Pi_1(D_1+iD_2)k^2U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.11}$$

Представляя U_1 в виде $U_1=a\exp(i\varphi)$, учитывая что $C_1\ll C_2$, $D_1\gg D$ и отделяя действительные и мнимые части (2.11), получим

$$-C_2a\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}\right)-a^3D_1\exp(-2\alpha t)=0$$

$$C_2\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(2\frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{a}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-a^3D_2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.12) полностью определяет эволюцию огибающей волны, характеризующейся величинами a и φ. Эти уравнения следуют также из общей теории Витема [10].

Ищем решение этих уравнений в виде

$$a = \frac{a_0}{f(x)}\exp(-r^2/2r_0^2 f^2), \quad \varphi = \sigma(x) + \frac{r^2}{2R(x)} \tag{2.13}$$

где $f(x)$ задает профиль волны, kR—радиус кривизны.

Вычисляя производные и подставляя в (2.12), можно для R, f получить уравнения

$$\frac{1}{R} = -\left(\frac{f'}{f} + \exp(-2\alpha t)\frac{a_0^2}{f^3}\frac{D_2}{C_2}\right)\frac{C_2}{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}}; \quad f'' - \varkappa\frac{1}{f^3} = 0 \tag{2.14}$$

где

$$\varkappa = \frac{1}{C_2^2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\right)^2\frac{1}{r_0^4} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{a_0^2\Pi_1 k^2}{r_0^2}\frac{D_1}{C_2^2}\exp(-2\alpha t) - a_0^4\frac{D_2^2}{C_2^2}\exp(-4\alpha t)\Pi_1 k^4$$

Интегрируя второе уравнение (2.14) при условии: $f_0 = 1$ при $x = 0$, получим

$$x = -\frac{\sqrt{f^2(f_0'^2 + \varkappa) - \varkappa} + f_0'}{f_0'^2 + \varkappa} \tag{2.15}$$

Отсюда определяется $x_f = -\frac{\sqrt{-\varkappa} + f_0'}{f_0'^2 + \varkappa}$, то есть фокусное расстояние действительно при $\varkappa < 0$, а это означает, что $D_1/C_2 < 0$

$$2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{a_0^2}{r_0^2}\frac{D_1}{C_2^2}\exp(-2\alpha t) > \frac{1}{C_2^2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\right)^2$$

Итак, получим, что если $a_0^2 > \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{1}{D_1}r_0^2\exp(2\alpha t)$, $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2} > 0$, то исходная волна может распадаться на ряд пучков, которые неограниченно сжимаются на расстоянии, определяемом по формуле $x = x_f$. Все эти эффекты наблюдаются в оптике при прохождении интенсивных лазерных пучков через среды.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԽԱՌՆՈՒՐԴԻ ՀԱՄԱՐ ԿԱՐՃ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ալիքների տարածման խնդիրը խառնուրդում (գազ-հեղուկ, կարծր մասնիկներ)։

Արտածված է կարճ ալիքների հավասարումը և կվազիմոնոխրոմատիկ ալիքների համար ստացված է մոդուլյացիայի հավասարումը։

Առանցքասիմետրիկ գաուսյան փնջերի համար դիսիպատիվ միջավայրում ստացված է լուծումը, գտնված է նաև ֆոկուսային հեռավորությունը։

THE EQUATION OF SHORT WAVES FOR MIXTURE IN THE MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, A. A. GOURGENIAN

S u m m a r y

The problem of propagation of waves in a mixture of gas-fluid and rigid particles is investigated. The equation of short waves is derived and for quasimonochromatic waves an equation of modulation has been obtained. A solution has been recieved for axial symmetrical Gaussian narrow bundles of dissipative medium. The focus distance has been also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лосев С. А.* Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977. 335 с.
2. *Багдоев А. Г. и Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Ж. вычис. матем. и физики, 1972, т. *12*, №6, с. 1512—1529.
3. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1982. 307 с.
4. *Bagdoev A. G., Gurgenian A. A.* On the definition of simplified nonlinear equation. Institute di mecanica applicate del politecnico di Torino, nota tecnica, 113, 1976, p. 1—18.
5. *Bagdoev A. G., Petrosian L. G.* The propagation of quasimonocromatic nonlinear modulation waves in micropolar electroconducting gas-fluid mixture.—Modelling Simulation control, A AMSE Press, 1984, v. 1, № 184, p. 1—20.
6. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. *26*, № 6, с. 3—17.
7. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
8. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.— В сб: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
9. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред.—ПММ, 1971, т. *35*, вып. 6, с. 1023—1037.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
12. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
13. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.VII. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 539.374

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНУЮ ТРУБУ

АКОПЯН А. Г., ЗАДОЯН М. А.

Рассматривается соосное внедрение жесткого цилиндрического тела в анизотропную, идеально-жестко-пластическую трубу, материал которого подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла [1]. Подобная картина пластического деформирования встречается при клинопрессовой сварке разнородных труб [2]. Технологическая схема такого рода сварки представляет собой предварительный нагрев и соосное впрессовывание трубы из более твердого материала с монотонно возрастающим по оси внешним диаметром в трубу из более мягкого материала, помещенную в плотную недеформируемую цилиндрическую прессформу. Процесс соединения материалов происходит в твердой фазе, причем физический контакт образуется за счет пластической деформации более мягкого материала, вызывающей пластические деформации в приповерхностном весьма тонком слое трубы из более твердого материала. Заметных объемных формоизменений этой трубы в процессе впрессовывания не наблюдается.

Пластическое состояние цилиндрически анизотропного материала рассмотрено в работе [3]. В работах [4—9] изучено пластическое состояние анизотропной цилиндрической трубы, подверженной внутреннему давлению [4], внутреннему и внешнему давлению [5], закрепленной по краям и нагруженной внутренним давлением [6], с открытыми и закрытыми концами под внутренним давлением [7], под действием внутреннего давления и осевой силы [8], находящейся под совместным действием внутреннего давления, осевой силы и крутящего момента [9]. Задача о внедрении жесткого цилиндрического тела в идеально пластическую изотропную трубу рассмотрена в работе [10].

В отличие от перечисленных работ, в решении, рассматриваемом в настоящей работе, тензор скоростей деформаций является функцией от радиальной и продольной координат.

1. Основные уравнения задачи. Общие соотношения теории анизотропного идеального жестко-пластического течения в цилиндрических координатах в обычных обозначениях имеют вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0 \qquad (1.1)$$

условие текучести Мизеса-Хилла

$$F_0(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+G_0(\sigma_z-\sigma_r)^2+H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+L_0\tau_{\theta z}^2+M_0\tau_{rz}^2+N_0\tau_{r\theta}^2=1 \qquad (1.2)$$

зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещения и напряжений

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\Omega[H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_r-\sigma_z)],\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\Omega[F_0(\sigma_\theta-\sigma_z)+$$

$$+H_0(\sigma_\theta-\sigma_r)],\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\Omega[F_0(\sigma_z-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_z-\sigma_r)]$$

$$2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=N_0\tau_{r\theta}\Omega,\quad 2\gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=L_0\tau_{\theta z}\Omega \qquad (1.3)$$

$$2\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}=M_0\tau_{rz}\Omega$$

Компоненты напряжений удобно представить в виде

$$\sigma_\theta=\sigma_r-\frac{1}{\Omega}[(F+G)\varepsilon_r+G\varepsilon_z],\quad \sigma_z=\sigma_r-\frac{1}{\Omega}(F\varepsilon_r-H\varepsilon_z)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{2N}{\Omega}\gamma_{r\theta},\quad \tau_{\theta z}=\frac{2L}{\Omega}\gamma_{\theta z},\quad \tau_{rz}=\frac{2M}{\Omega}\gamma_{rz} \qquad (1.4)$$

$$\Omega=\sqrt{(F+G)\varepsilon_r^2+2G\varepsilon_r\varepsilon_z+(G+H)\varepsilon_z^2+4L\gamma_{\theta z}^2+4M\gamma_{rz}^2+4N\gamma_{r\theta}^2}$$

где

$$F=\frac{F_0}{\Delta},\quad G=\frac{G_0}{\Delta},\quad H=\frac{H_0}{\Delta},\quad L=L_0^{-1},\quad M=M_0^{-1};\quad N=N_1^{-1}$$

$$\Delta=F_0G_0+G_0H_0+H_0F_0$$

Скорости перемещений и компоненты напряжений можно выразить через неизвестную функцию $f(r)$:

$$\sigma_\theta=\sigma_r-\varkappa\omega\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right),\quad \sigma_z=\sigma_r-\varkappa\omega\left[(F+H)f'+H\frac{f}{r}\right]$$

$$\sigma_r=-2A-2Bz-\varkappa\int_a^r\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\frac{\omega}{r}dr,\quad \tau_{rz}=Br+\frac{C}{r},\quad \varkappa=\mathrm{sign}\,\lambda,\quad \tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=0$$

$$\omega=\frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(H+G)\frac{f^2}{r^2}}} \qquad (1.5)$$

$$u=\lambda f(r)e^{\lambda z},\quad w=-\frac{1}{r}(rf)'e^{\lambda z}+D,\quad v=0 \qquad (1.6)$$

где λ, α—заданные постоянные, A, B, C, D—произвольные постоянные.

Приведенные выражения напряжений (1.5) и скоростей перемещений (1.6) будут решениями системы уравнений (1.1)—(1.3), если функция $f(r)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{1+\lambda^2 r^2}{r^2}f + \frac{\omega M_0 \tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{r} + (G+H)\frac{f^2}{r^2}} = 0 \qquad (1.7)$$

Полученное уравнение кроме двух своих содержит еще две произвольные постоянные, входящие в функцию τ_{rz}. Характер течения пластической массы на граничных поверхностях тела определяет краевые условия для этого уравнения, а из условий, накладываемых на указанное касательное напряжение на этих поверхностях, находятся произвольные постоянные, содержащиеся в этом выражении. Гидростатическая постоянная A определяется из условия равновесия тела в продольном направлении.

Будем отличать внутреннее и внешнее внедрение в зависимости от того, впрессовывается ли жесткий элемент с внутренней или с внешней стороны по отношению к элементу из более мягкого материала.

2. *Внутреннее внедрение.* Пусть в абсолютно жесткой цилиндрической прессформе плотно помещена цилиндрическая труба из анизотропного идеального жеско-пластического материала с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, а в нее соосно впрессовывается цилиндрическая труба из значительно более твердого материала с переменным внешним радиусом $R(z)=a+\nu u_1\exp(\nu z/b)$, где ν и u_1—заданные положительные постоянные (фиг. 1). Материал этой трубы считаем недеформируемым.

Цилиндрическую координатную систему закрепляем с жесткой трубой так, чтобы плоскость $z=0$ прошла через входное торцевое сечение, а положительное направление оси z—по оси труб против направления движения. Считаем, что материал деформируемой трубы по всей толщине в области $z>0$ переходит в чисто пластическое состояние, а торец $z=l$ этой трубы считаем свободным от внешних сил.

Введем обозначения: $u_0=u_1/b$, $\lambda=\nu/b$, $\rho_0=a/b$, безразмерные координаты $\rho=r/b$, $\zeta=z/b$ и функции

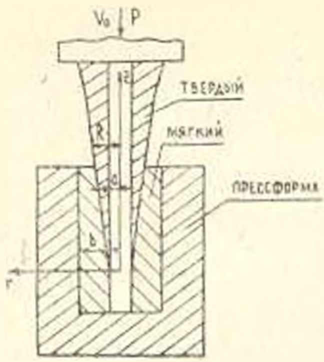
$$f(r)=b^2 f_*(\rho), \quad R(z)=bR_*(\zeta)$$

где

$$R_*(\zeta)=\rho_0+\nu u_0\exp(\nu\zeta)$$

После преобразования формул (1.5), отпуская в дальнейшем знак $*$, для компонентов напряжений получим

$$\sigma_r=-2A-2B\zeta-\int_{\rho_0}^{\rho}\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}\,d\rho, \quad \sigma_\theta=\sigma_r-\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\omega$$



Фиг. 1

$$\sigma_z = \sigma_\rho - \left[(F+H)f' + H\frac{f}{\rho}\right]\omega$$

$$\tau_{\rho z} = B\rho + \frac{C}{\rho}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\rho\theta} = 0 \tag{2.1}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0\tau_{\rho z}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2}}}$$

Компоненты скоростей перемещений в новых обозначениях будут

$$u = \nu f(\rho)\exp(\nu\xi)$$

$$w = -\frac{1}{\rho}(\rho f)'\exp(\nu\xi) + D, \quad v = 0 \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем скорости перемещений отнесены к b.

Дифференциальное уравнение (1.7) в новых переменных перепишется в виде

$$f'' + \frac{1}{\rho}f' - \frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f +$$

$$+ \frac{\nu M_0\tau_{\rho z}}{\sqrt{1-M_0\tau_{\rho z}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2}} = 0 \tag{2.3}$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также принимая за нормальную скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ радиальную скорость перемещения $u(\rho_0, \xi)$, для функции $f(\rho)$ будем иметь граничные условия

$$f(\rho_0) = u_0 V_0 = u_*, \quad f(1) = 0 \tag{2.4}$$

где V_0 — скорость внедрения.

Принимаем, что степени шероховатости в продольном направлении на внутренних и внешних поверхностях заданы и равны соответственно m_1 и m_2, причем $m_i > 0$. Используя эти граничные условия, находим

$$B = \frac{m_2 - \rho_0 m_1}{1-\rho_0^2}, \quad C = \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1-\rho_0^2}\rho_0 \tag{2.5}$$

Торец деформируемой трубы $\xi = \xi_0 = \frac{l}{b}$ свободен от нормальных сил, следовательно

$$\int_{\rho_0}^{1} \sigma_z(\rho, \xi_0)\rho\, d\rho = 0 \tag{2.6}$$

Подставляя сюда σ_z из (2.1) и производя интегрирование по частям в полученном двухкратном интеграле, найдем

$$A = -B\xi_0 - \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \int_{\rho_0}^{1} \left\{ \left[2H + F\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) \right] f' + \right.$$

$$\left. + \left[2H + G\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right) \right] \frac{f}{\rho} \right\} \omega\rho d\rho \qquad (2.7)$$

Используя выражения компонентов скоростей перемещений, легко проверить, что условие сохранения количества масс

$$\rho_0 \int_0^{\xi_0} u(\rho_0, \xi) d\xi = \int_{\rho_0}^{1} [w(\rho, \xi_0) - w(\rho, 0)] \rho d\rho \qquad (2.8)$$

выполняется тождественно.

Из условия равновесия элемента на контактной поверхности трубы $\rho = R(\xi)$ (фиг. 2) для абсолютного значения давления по оси имеем

$$p(\xi) = -\sigma_z(\rho_0, \xi)\cos\alpha + \tau_{rz}(\rho_0)\sin\alpha \qquad (2.9)$$

причем

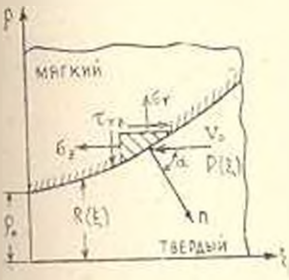
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Суммарная осевая сила, приходящаяся на эту поверхность, то есть сила впрессовывания, будет

$$P = 2\pi b^2 \int_0^{\xi_0} R(\xi)\sqrt{1+R'^2(\xi)}\, p(\xi) d\xi \qquad (2.10)$$

Подставляя выражения для $R(\xi)$ и $p(\xi)$ и производя интегрирование, находим

$$P/\pi b^2 = 2\rho_0\xi_0 m_1 + 2u_0(\exp(\nu\xi_0)-1)(m_1+\nu\rho_0 S) +$$
$$+ \nu^2 u_0 S(\exp(2\nu\xi_0)-1) + 4B\rho_0 u_0[1+\exp(\nu\xi_0)\times$$
$$\times(\nu\xi_0-1)] + B\nu u_0^2[1+\exp(2\nu\xi_0)(2\nu\xi_0-1)] \qquad (2.11)$$



Фиг. 2

причем $S = Q - 2B\xi_0$, где

$$Q = -\frac{1}{1-\rho_0^2} \int_{\rho_0}^{1} \left\{ \left[2H + F\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) \right] f' + \right.$$

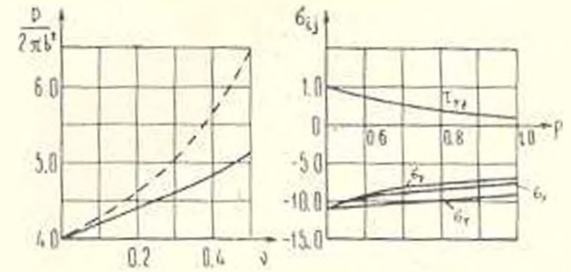
$$+ \left[2H + G\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right) \right] \frac{f}{\rho} \Big\} \omega\rho d\rho +$$

$$+ \left[(F+H)f'(\rho_0) + H\frac{u_0}{\rho_0} \right] \omega(\rho_0) \qquad (2.12)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции, входящие в (2.11), и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P = 2\pi b^2 \xi_0(\rho_0 + \nu u_0)(m_1 - \nu^2 u_0 Q) \qquad (2.13)$$

Получено численное решение дифференциального уравнения (2.3) с краевыми условиями (2.4) при следующих значениях параметров: $\nu = 0{,}2$; $\xi = 0$, $\xi_0 = 8$; $V_0 = 1$; $u_0 = 0{,}25$; $\rho_0 = 0{,}5$; $\gamma = 1$; $m_1 = 1$; $m_2 = 0{,}2$; $F/M = 3$; $G/M = 2$, $H/M = 1{,}5$. На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022 по формулам (2.1), (2.13), на фиг. 3 построены графики напряжений и силы впрессовывания. Для сравнения пунктирной линией показан график силы впрессовывания для изотропной трубы. Как видно из графика, анизотропия существенно влияет на величину силы впрессовывания.



Фиг. 3

3. *Внешнее внедрение*. Пусть теперь цилиндрическая труба с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, из анизотропного идеального жестко-пластического материала плотно насажена на недеформируемую трубу (прессформа), на которую с наружной стороны соосно впрессовывается труба из значительно более твердого материала с внутренним, монотонно возрастающим по оси трубы, относительным радиусом $R = 1 - \nu u_0 \exp(-\xi)$. Материал этой трубы считается абсолютно жестким, а координатную систему закрепляем с ним как в случае внутреннего внедрения (фиг. 4). Принимаем, что деформируемая труба по всей толщине при $\xi > 0$ переходит в чисто пластическое состояние.

Заменяя в выражениях (2.1)—(2.2) знак функции $f(\rho)$, для компонентов напряжения получим

$$\sigma_r = -2A - 2B\xi + \int_{\rho_0}^{\rho} \left(Ff' - G\frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho}\, d\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + \left(Ff' - G\frac{f}{\rho} \right) \omega$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left[(F+H)f' + H\frac{f}{\rho} \right] \omega, \quad \tau_{rz} = B\rho + \frac{C}{\rho}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \qquad (3.1)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0 \tau_{rz}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\dfrac{f'f}{\rho} + (G+H)\dfrac{f^2}{\rho^2}}}$$

Соответственно для компонентов скоростей перемещений (в долях b) будем иметь

$$u = -\nu f(\rho)\exp(\nu\xi), \quad w = \frac{1}{\rho}(\rho f)'\exp(\nu\xi) + D, \quad v = 0 \tag{3.2}$$

Дифференциальное уравнение (2.3) примет вид

$$f'' + \frac{1}{\rho}f' - \frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f - \frac{\nu\tau_{rz}M_0}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{ff'}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2}} = 0 \tag{3.3}$$

Исходя из допущений о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также из того, что нормальная скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ заменяется радиальной $u(1, \xi)$, для функции $f(\rho)$ находим граничные условия

$$f(\rho_0) = 0, \quad f(1) = u_0 V_0 = u_* \tag{3.4}$$

Граничные значения τ_{rz} на внутренней и на внешней поверхностях считаем известными, соответственно, $-m_1$ и $-m_2$, где $m_i > 0$. Используя эти граничные условия, находим

$$B = \frac{\rho_0 m_1 - m_2}{1-\rho_0^2}, \quad C = \frac{\rho_0 m_2 - m_1}{1-\rho_0^2}\rho_0 \tag{3.5}$$

Из статического условия (2.6) определяем

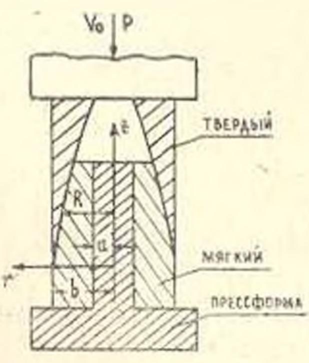
$$A = -B\xi_0 + \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int_{\rho_0}^{1}\left\{\left[2H + F\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]f' + \left[2H + G\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\frac{f}{\rho}\right\}\omega\rho d\rho \tag{3.6}$$

Из условия равновесия элемента вблизи контактной поверхности $\rho = R(\xi)$ (фиг. 5) для абсолютного значения осевого давления получаем

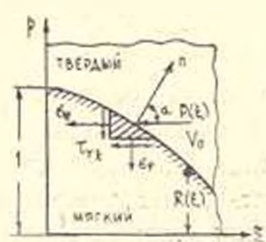
$$p(\xi) = -\sigma_z(1, \xi)\cos\alpha - \tau_{rz}(1)\sin\alpha \tag{3.7}$$

причем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-R'^2}}, \quad \cos\alpha = -\frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Сила впрессовывания определяется по формуле (2.10), где следует положить $R = 1 - \nu u_0 e^{\xi}$, а $p(\xi)$—согласно (3.7). После вычисления находим

$$P/\pi b^2 = 2\xi_0 m_2 + 2u_0(\exp(\nu\xi_0) - 1)(\nu S - m_2) - \nu^2 u_0^2 S(\exp(2\nu\xi_0) - 1) +$$

$$+ 4Bu_0[1 + \exp(\nu\xi_0)(\nu\xi_0 - 1)] - B\nu u_0^2[1 + \exp(2\nu\xi_0)(2\nu\xi_0 - 1)] \tag{3.8}$$

где $S = Q - 2B\xi_0$, причем

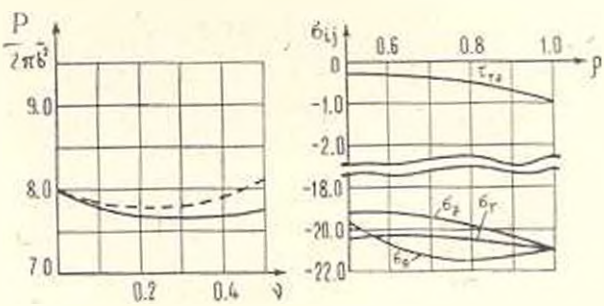
$$Q = \frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left\{\left[2H + F\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right]f' + \left[2H + G\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\right]\frac{f}{\rho}\right\}\omega\rho\, d\rho -$$

$$- \int_{\rho_0}^{1}\left(Ff' - G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}\, d\rho - [(F+H)f'(1) + Hu_0]\,\omega(1)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции и ограничиваясь первыми двумя членами, получаем

$$P = 2\pi b^2\xi_0(1 - \nu u_0)(m_2 + \nu^2 u_0 Q) \tag{3.9}$$

Численное решение дифференциального уравнения (3.3) с граничными условиями (3.4) получено при следующих значениях параметров: $\nu = 0{,}2$; $\xi = 0$; $\xi_0 = 8$; $V_0 = 1$; $u_0 = 0{,}25$; $\rho_0 = 0{,}5$; $\rho = 1$; $m_1 = 0{,}2$; $m_2 = 1$; $F/M = 0{,}5$; $G/M = 5$; $H/M = 0{,}8$. На фиг. 6 показаны результаты численных расчетов, выполненных по формулам (3.1), (3.9) для напряжений и силы впрессовывания. Для сравнения пунктирной линией показан график силы впрессовывания для изотропной трубы. График свидетельствует о существенном влиянии анизотропии на величину силы впрессовывания.



Фиг. 6

4. *Случай цилиндрических слоев.* Полученные в предыдущих параграфах результаты можно применять при внедрении разнородных анизотропных цилиндрических слоев.

1. Пусть цилиндрический слой из анизотропного идеального жесткопластического материала плотно помещен в прессформе, состоящей из недеформируемой цилиндрической поверхности $r = b$, идеально-гладких жестких осевых плоскостей $\theta = \pm\theta_0$ и в него соосно впрессовывается

цилиндрический слой из значительно более твердого материала с наружным относительным радиусом $R=\rho_0+m_0e^{\xi_0}$ и ограниченным осевыми сечениями $\theta=\pm\theta_0$. Напряженное состояние и поле скоростей перемещений деформируемого слоя определяется согласно формулам (2.1) — (2.2), а сила впрессовывания будет $\frac{\theta_0}{\pi}P$, где P определяется по формуле (2.11) или (2.13).

2. При внешнем внедрении полагаем, что цилиндрический слой из мягкого, анизотропного материала помещен в прессформе, которая ограничена недеформируемой поверхностью $\rho=1$, жесткими идеально гладкими осевыми плоскостями $\theta=\pm\theta_0$ и в него соосно вдавливается цилиндрический слой из значительно более твердого материала с внутренним относительным радиусом $R=1-m_0\exp(\xi_0)$ и с осевыми сечениями $\theta=\pm\theta_0$. Формулы напряжений и скоростей перемещении определяются по (3.1) — (3.2), а сила впрессовывания будет $\frac{\theta_0}{\pi}P$, где P дается согласно (3.8) или (3.9).

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄԵՋ ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԿՈՇՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԴՐՈՒՄԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կոշտ գլանային մարմնի ներդրումը անիզոտրոպ, իդեալական-կոշտ պլաստիկ խողովակի մեջ, որի նյութը ենթարկվում է Միզես-Հիլլի հոսունության պայմանին։ Լուծման մեջ դեֆորմացիաների արագությունների տենզորը ֆունկցիա է շառավղային և երկայնական կոորդինատներից։ Ստացված են գլանային անիզոտրոպ խողովակի մեջ առաջացած լարումները և ներդրման ուժը որոշող առնչությունները։ Դիտարկված է արտաքին և ներքին ներդրումը։ Լուծումը կարելի է օգտագործել տարասեռ անիզոտրոպ գլանային շերտերի ներդրման համար։ Բերված են թվային օրինակներ։

THE PENETRATION OF A RIGID CYLINDRICAL BODY IN A PLASTIC ANISOTROPIC PIPE

A. G. HACOBIAN, M. A. ZADOYAN

Summary

The penetration of a rigid cylindrical body in an anisotropic, ideal-rigid plastic pipe is considered, the material of which obeys the Mises-Hill flow criterion. In the solution the tensor of the speed of strain is a function of radial and longitudinal coordinates. We have obtained relations which determine the stress appearing in a cylindrical anisotropic pipe and the penetration force. Internal and external penetration is considered. The solution may be applied to the penetration of heterogeneous anisotropic cylindrical layers. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. *Шоршоров М. Х., Колесниченко В. А., Алехин В. П.* Клинопрессовая сварка давлением разнородных металлов. М.: Металлургия, 1982. 112 с.
3. *Матченко Н. М., Толоконников О. Л.* Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности цилиндрически анизотропных материалов.—В сб.: Работы по механике сложных сред. Тула: ТПИ, 1971, с. 105—112.
4. *Колмогоров В. Л., Соловей В. Д.* К предельной нагрузке анизотропной трубы под внутренним давлением.—Прикл. механика, 1975, т. *11*, вып. 7, с. 79—88.
5. *Betten Josef, Frosch Hans-Georg.* Elastisch-plastisches Verhalten dickwandiger Zylinder unter Berücksichtigung der plastischen Anisotropie und der plastischen Kompressibilität.—Forsch. Ingenieurw., 1983, v. 49, № 1, p. 112—116.
6. *Chater E., Neale K. W.* Large strain inelastic behaviour of cylindrical tubes.—Internat. J. Solids and Struct., 1983, v. 19, № 8, p. 709—724.
7. *Sugimoto Masakatsu, Itakura Yoshikiyo, Saito Koichi.* Изучение пластического поведения труб из анизотропного материала с открытыми и закрытыми концами под внутренним давлением.—Нихон кикаи гаккаи ромбунсю. Trans. Jap. Soc. Mech. Engng, 1973, v. 39, № 328, p. 3609—3618.
8. Бочарова С. А. Напряженное состояние цилиндра из анизотропного материала под действием внутреннего давления и осевой силы при больших пластических деформациях.—Изв. вузов. Машиностроение, 1971, №7, с. 5—10.
9. *Задоян М. А.* О некоторых решениях уравнений пластического течения анизотропной среды.—Инж. ж. МТТ, 1966, №2, с. 91—96.
10. *Задоян М. А.* Внедрение жесткого цилиндрического тела в идеально пластическую трубу.—Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №5, с. 98—108.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
28.I.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 534.221

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

САФАРЯН Ю. С.

Рассматриваются задачи о соударении полубесконечных плоских тел, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями и граничащих с упругой полуплоскостью с иными упругими постоянными, которые решаются методом интегральных преобразований, а при смешанных условиях —применением метода Винера-Хопфа и последующим приведением решения к форме Смирнова-Соболева [1].

Решение задачи о соударении прямых упругих углов в предположении, что граница тел после соударения остается свободной от напряжений, методом [1] дано в [2].

Для тел, имеющих конечную высоту, задача решена в [2]. Задача о соударении упругих прямых углов при смешанных граничных условиях на границе тел решена в [2], [4].

§ 1. Соударение упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии скольжения

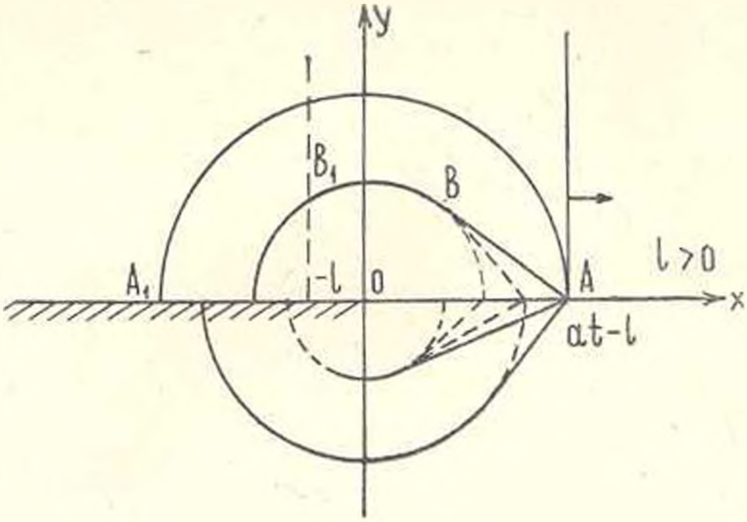
Рассмотрим формулировку граничной задачи соударения полубесконечных упругих тел, ограниченных поверхностями прямых двугранных углов, граничащих с упругим полупространством (фиг. 1). Для тел, неограниченных в обе стороны, задача одномерна по x, где ось x направлена вдоль поверхности тел параллельно скоростям их движения, и для проекций перемещений u, v на оси x,y имеет место [4]

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=-v_0\sigma(x-at)+v_0\sigma(-x-at),\quad \frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{v_0}{a}\sigma(at-|x|),\quad v_0=0 \tag{1.1}$$

Вводя двумерные возмущения одномерных решений $U=u-u_0$, $V=v$, можно записать уравнения движения для упругух сред при $y>0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

Уравнения движения упругих тел в полупространстве $y<0$ имеют вид



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+b_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+(a_1^2-b_1^2)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}=b_1^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+a_1^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+(a_1^2-b_1^2)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y} \tag{1.3}$$

где a, b—скорости продольных и поперечных волн в соударяющихся телах, $\sigma(x)$—единичная функция, a_1, b_1—скорости продольных и поперечных волн в нижнем полупространстве.

При $y=0$, $-\infty<x<\infty$ удовлетворяются следующие граничные условия:

$$\sigma_{yy}-\rho\,\frac{kv_0\sigma\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{a}=\sigma_{1yy},\quad \sigma_{xy}=\sigma_{1xy}=0,\quad V=V_1$$

где

$$\sigma_{yy}=\left(k\frac{\partial U}{\partial x}+a^2\frac{\partial V}{\partial y}\right)\rho,\quad \sigma_{1yy}=\left(k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+a_1^2\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\rho_1$$

$$\sigma_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x},\quad \sigma_{1xy}=\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x},\quad k=a^2-2b^2$$

Решение для случая $a=b=0$ получено в [2]. Переходя к преобразованиям Лапласа $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$ от U, V, U_1, V_1 по t, граничные условия можно записать в виде

$$k\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}+a^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}-k\frac{v_0}{as}\exp(-|x|s/a)=\frac{\rho_1}{\rho}\left(k_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x}+a_1^2\frac{\partial\overline{V}_1}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial y}+\frac{\partial\overline{V}_1}{\partial x}=0,\quad \overline{V}=\overline{V}_1 \tag{1.4}$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, ρ, ρ_1—плотности соответствующих сред.

Ищем решение уравнений (1.2), (1.3), записанных для $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, в виде

$$\overline{U}_1;\ \overline{V}_1=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{U}_1^{(n)};\ \overline{V}_1^{(n)}\exp i(\overline{\alpha}x+\overline{\beta}_n y)d\overline{\alpha}$$

$$\overline{U};\ \overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{U}^{(n)};\ \overline{V}^{(n)}\exp i(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}_n y)d\overline{\alpha} \tag{1.5}$$

где

$$\overline{V}^{(n)}=\frac{a^2\overline{\gamma}_1^2-b^2\overline{\gamma}_n^2}{(a^2-b^2)\overline{\alpha}\overline{\gamma}_n}\overline{U}^{(n)},\quad \overline{V}_1^{(n)}=\frac{a_1^2\overline{\beta}_1^2-b_1^2\overline{\beta}_n^2}{(a_1^2-b_1^2)\overline{\alpha}\overline{\beta}_n}\overline{U}_1^{(n)} \tag{1.6}$$

$$\overline{\gamma}_n=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\overline{\alpha}^2}\,,\quad \overline{\beta}_n=-\sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1n}^2}-\overline{\alpha}^2},\quad n=1,\ 2,\quad \begin{matrix}c_1=a & c_{11}=a_1\\ c_2=b, & c_{12}=b_1\end{matrix}$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и проводя обратное преобразование Фурье по x, получим

$$\frac{b^2\overline{\chi}}{\overline{\alpha}}\overline{U}^{(1)}-2b^2\overline{\alpha}\,\overline{U}^{(2)}-\frac{kv_0}{\pi a^2\left(\overline{\alpha}^2-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\overline{\alpha}\,i}=\frac{\rho_1}{\rho}\left(\frac{b_1^2\overline{\chi}_1}{\overline{\alpha}}\overline{U}_1^{(1)}-2b_1^2\overline{\alpha}\,\overline{U}_1^{(2)}\right)$$

$$2\overline{\gamma}_1\overline{U}^{(1)}+\frac{\overline{\chi}}{\overline{\gamma}_2}\overline{U}^{(2)}=0,\quad 2\overline{\beta}_1\overline{U}_1^{(1)}+\frac{\overline{\chi}_1}{\overline{\beta}_2}\overline{U}_1^{(2)}=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\overline{\gamma}_1}{\overline{\alpha}}\overline{U}^{(1)}-\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}_2}\overline{U}^{(2)}=\frac{\overline{\beta}_1}{\overline{\alpha}}\overline{U}_1^{(1)}-\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}_2}\overline{U}_1^{(2)}=0$$

где

$$\overline{\chi}=\frac{\omega^2}{b^2}-2\overline{\alpha}^2=\overline{\gamma}_2^2-\overline{\alpha}^2,\quad \overline{\chi}_1=\overline{\beta}_2^2-\overline{\alpha}^2$$

Решение системы (1.7) имеет вид

$$\overline{U}^{(1)}=-\frac{ikv_0\overline{\alpha}\,\overline{\chi}}{\pi a^2\overline{\gamma}_1^2R^1(\overline{\alpha})},\qquad \overline{U}^{(2)}=\frac{2ikv_0\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}_2}{\pi a^2\overline{\gamma}_1R^1(\overline{\alpha})}$$

$$\overline{U}_1^{(1)}=-\frac{ib_1^2kv_0\overline{\alpha}\,\overline{\chi}_1}{\pi b^2a^2\overline{\beta}_1\overline{\gamma}_1R^1(\overline{\alpha})},\quad \overline{U}_1^{(2)}=\frac{2ib_1^2kv_0\overline{\alpha}\,\overline{\beta}_2}{\pi a^2b^2\overline{\gamma}_1R^1(\overline{\alpha})} \tag{1.8}$$

где $R^1(\overline{\alpha})=b^2(\overline{\chi}^2+4\overline{\alpha}^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2)-\frac{\rho_1}{\rho}\frac{b_1^2}{b^2}\frac{\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1}(\overline{\chi}_1^2+4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2)$

Предположено, что корни $R^1(\overline{\alpha})$ являются действительными. Подставляя (1.8) в (1.5), получим решение поставленной задачи, периодическое во времени.

Обратное преобразование по s, соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$U;\ V;\ U_1;\ V_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{U};\ \bar{V};\ \bar{U}_1;\ \bar{V}_1 \exp(st)\,ds \tag{1.9}$$

При применении обратного преобразования Лапласа по s введем вместо $\bar{\alpha}$ переменную α $(\bar{\alpha}=\alpha\omega)$, $s=\sigma-i\tau$, $\beta=\omega\beta$, где $\sigma>0$ и мало [3], [8], [9], [10].

При вычислении оригиналов используется контурное интегрирование и решение записывается в виде аналитической функции от переменной $\alpha=\alpha_n$, для которой выражения в экспонентах обращаются в в нуль

$$\begin{gathered} f_{n_1}(\alpha_{n_1}) = f_n(\alpha_n) = 0, \quad n = 1,\ 2 \\ f_n(\alpha) = t-\alpha x-\beta_n(\alpha)y,\ f_{n_1}(\alpha) = t-\alpha x-\gamma_n(\alpha)y \end{gathered} \tag{1.10}$$

причем комплексно-сопряженные значения $\bar{\alpha}_n$ также удовлетворяют (1.10).

Можно записать на основании (1.5), (1.9)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{U}^{(n)}(\bar{\alpha})\exp(sf_n(\alpha))\,d\bar{\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{V}^{(n)}(\bar{\alpha})\exp(sf_n(\alpha))\,d\bar{\alpha}$$

где $f_n(\alpha)$ даются (1.10).

Из решения (1.8) видно, что

$$\bar{U}^{(n)}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\omega^2}\,\bar{\bar{U}}^{(n)}(\alpha), \quad \bar{V}^{(n)}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\omega^2}\,\bar{\bar{V}}^{(n)}(\alpha)$$

где в $\bar{U}^{(n)}(\alpha)$, $\bar{V}^{(n)}(\alpha)$ положено $\omega=1$.

При этом можно записать следующие решения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{U}}^{(n)}(\alpha)\,\mathrm{sgn}\,\omega\exp(sf_n(\alpha))\,d\alpha$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{V}}^{(n)}(\alpha)\,\mathrm{sgn}\,\omega\exp(sf_n(\alpha))\,d\alpha$$

в которых сделан переход к α и формулы для $\bar{U}^{(n)}(\alpha)$, $\bar{V}^{(n)}(\alpha)$ получаются путем сокращения на ω, причем в множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено $\omega=1$, что дает новые формулы для $\bar{U}^{(n)}$, $\bar{V}^{(n)}$.

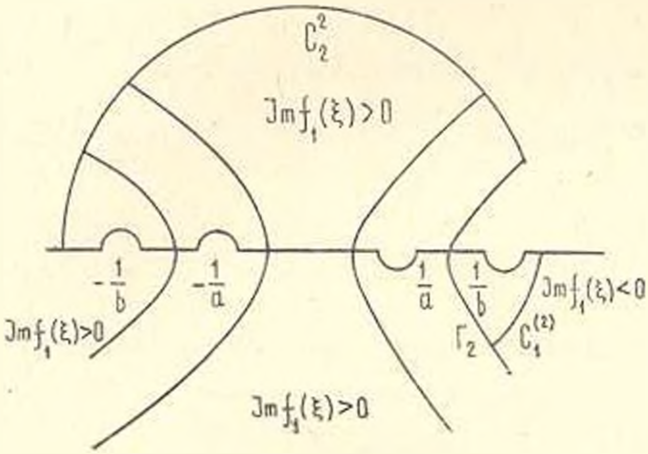
В силу малости σ можно условно контуры по α проводить по вещественной оси α с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскостях [4].

Пусть $\omega>0$. Заменим контур интегрирования $-\infty<\alpha<\infty$ на контур Γ, проходящий через указанные точки α_n, $\bar{\alpha}_n$ в направлениях $\operatorname{Im} f_n(\alpha)=0$. Для этого нужно найти области постоянных знаков $\operatorname{Im} f_n(\alpha)$. Обозначив $f_n(\alpha)=B$, где величина B вещественная, $\alpha=\xi+i\eta$, можно убедиться, что в плоскости (ξ, η) линии $f_n(\alpha)=B$ состоят из ветвей гипербол

$$c_n^2\frac{r^2}{x^2}\xi^2-c_n^2\frac{r^2}{y^2}\eta^2=1, \quad r^2=x^2+y^2$$

а также из отрезков вещественной оси $|\xi|<\frac{1}{c_n}$, $c_1=a$, $c_2=b$. Пусть $x>0$, $y>0$.

Тогда, полагая, что на положительной мнимой полуоси $\sqrt{\frac{1}{c_n^2}-\alpha^2}>0$, можно показать, что $\operatorname{Im} f_n(\alpha)<0$ в областях фиг. 2,



Фиг. 2

где проходят дуги окружности c_1^n и c_2^n. Тогда при $\omega>0$ можно заменить интегралы по вещественной оси α на интегралы по $\Gamma_n^{\pm}$. При $\omega<0$ вместо c_1^n, c_2^n берутся их дополнения до верхней и нижней полуокружностей, на которых $\operatorname{Im} f_n(\alpha)>0$. Тогда интегралы по вещественной оси α заменятся на интегралы по Γ_n в обратных предыдущим направлениях. Все внутренние интегралы поменяют знаки на обратные, а решение будет таким же, как при $\omega>0$. Для $x<0$ точки α_n, $\bar{\alpha}_n$ находятся на левых ветвях гипербол (фиг. 2). Контуры c_1^n, c_2^n заменяются симметричными относительно оси ξ и решение не изменяется. Итак, при любых ω, x, y получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{t-r/c_n}\bar{U}^{(n)}(\alpha)\exp(sf_n(\alpha))\,\frac{dB}{f_n'(\alpha)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{t-r/c_n}\bar{U}^{(n)}(\bar{\alpha})\exp(sf_n(\bar{\alpha}))\,\frac{dB}{f_n'(\bar{\alpha})}$$

где учтено, что на контуре Γ^+ величина B меняется от $-\infty$ до $t-r/c_n$. Поскольку $U^{(n)}(\alpha)$ содержит множитель i слагаемые сопряжены и можно написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{t-r/c_n}\bar{U}^{(n)}(\alpha)\exp(sf_n(\alpha))\,\frac{dB}{f_n'(\alpha)}$$

Используя формулу обращения интеграла Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{t-r/c_n}\bar{U}^{(n)}(\alpha)\,\delta(f_n(\alpha))\,\frac{dB}{f_n'(\alpha)}$$

Вычисляя полученный интеграл, можно найти

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\sum_1^2\frac{\bar{U}^{(n)}(\alpha_n)}{f_n'(\alpha_n)},\quad \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\sum_1^2\frac{\bar{U}_1^{(n)}(\alpha_{1n})}{f_{1n}'(\alpha_{1n})}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\sum_1^2\frac{\bar{V}^{(n)}(\alpha_n)}{f_n'(\alpha_n)},\quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\sum_1^2\frac{\bar{V}_1^{(n)}(\alpha_{1n})}{f_{1n}'(\alpha_{1n})}\qquad(1.11)$$

где α_n, α_{1n} находятся из уравнения (1.10) и имеют вид

$$r^2\alpha_n=tx+yi\sqrt{t^2-r^2/c_n^2}$$

$$r^2\alpha_{1n}=tx-yi\sqrt{t^2-r^2/c_{1n}^2},\quad r^2=x^2+y^2$$

Здесь $\bar{U}^{(n)}$, $\bar{V}^{(n)}$, $\bar{U}_1^{(n)}$, $\bar{V}_1^{(n)}$ дается (1.8) при $\omega=1$.

Из (1.11) можно получить значения для двумерных возмущений напряжений и перемещений при $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma_{yy}}{\rho}=\mathrm{Re}\,i\,\frac{kv_0b^2}{\pi a^2x}\,\frac{(\gamma^2+4\alpha^2\gamma_1\gamma_2)}{\gamma_1^2(\alpha)R^1(\alpha)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{2}\frac{\bar{U}^{(n)}(\alpha)}{x},\quad \alpha=\frac{t}{x}\qquad(1.12)$$

а при $x=0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma_{yy}}{\rho}=\mathrm{Re}\left[\frac{b^2kv_0\gamma^2(i\alpha_1)}{\pi a^2\gamma_1(i\alpha_1)R'(i\alpha_1)\,\alpha_1 y}-\frac{4b^2kv_0\alpha_2\gamma_2^2(i\alpha_2)}{\pi a^2\gamma_1(i\alpha_2)R'(i\alpha_2)y}\right]$$

$$\nu_n = \sqrt{\frac{t^2}{y^2} - \frac{1}{c_n^2}}, \quad n = 1, 2$$

и подобные формулы для нижней полуплоскости.

Чтобы выяснить характер напряжения важно знать значения σ_{xx} при $x = 0$

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = a^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + k \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}$$

которые после использования значений $\bar{U}$, $\bar{V}$ примут следующий вид:

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = \frac{kv_0}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\omega^2 - 2b^2\bar{\gamma}_1^2)}{R^1(\alpha)\bar{\gamma}_1^2} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}_1 y)\, d\bar{\alpha} -$$

$$- \frac{4kv_0 b^2}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^2 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 R^1(\bar{\alpha})} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}_2 y)\, d\bar{\alpha} \tag{1.13}$$

Обозначая соответственно $\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2} = \bar{\gamma}$, $\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\alpha}^2} = \bar{\gamma}$ в первых и вторых интегралах, а затем перейдя к переменной $\xi = \frac{1}{a\gamma}$, где $\gamma = \gamma_{1,2} = \frac{t}{y}$, можно получить после выделения вещественной части выражение

$$-A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} = \frac{b^8}{a^2} \frac{(1 - 2b^2/a^2\xi^2)(a^2/b^2 - 2 + 2/\xi^2)}{R_1(\xi)\sqrt{1/\xi^2 - 1}} \varepsilon(1 - \xi) +$$

$$+ \frac{b^4}{a^4} \frac{\sqrt{1/\xi^2 - a^2/b^2}}{R_2 \xi^4 \sqrt{1 - a^2/b^2 + 1/\xi^2}} \varepsilon\left(\frac{b}{a} - \xi\right), \quad A = \frac{\pi a}{\rho k v_0} \tag{1.14}$$

которое имеет удобный вид для численных расчетов.

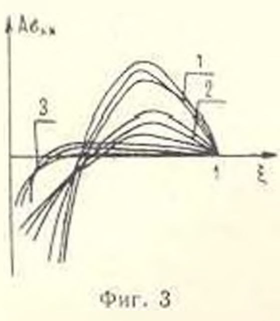
Сначала рассматриваем тот случай, когда верхние соударяющиеся тела более жесткие, чем нижняя полуплоскость. Расчеты проделаны для двух вариантов и кривые 1; 2 показаны на графиках фиг. 3 соответственно для

1) $\frac{a}{a_1} = 2$, $\frac{a}{b_1} = 4$, $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{\rho_1}{\rho} = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$

2) $\frac{a}{a_1} = 2$, $\frac{a}{b_1} = 4$, $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{\rho_1}{\rho} = 0{,}01;\ 0{,}03;\ 0{,}05$

Для случая, когда нижняя полуплоскость более жесткая, выбраны следующие значения:

3) $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{a}{b_1} = 1$, $\frac{a}{b} = 2$; $\frac{\rho_1}{\rho} = 10;\ 30;\ 50$



Фиг. 3

и графики приведены на фиг. 3.

Как видно из графиков, двумерное слагаемое в σ_{xx} вблизи фронта продольной волны положительное. Затем двумерное возмущение напряжения становится сжимающим, что имеет место до $\xi=0$. Тем не менее суммарное напряжение $\sigma_{xx}-\rho a v_0$ остается всегда сжимающим. Вблизи границы контакта сред двумерные возмущения больше одномерных. Из численных расчетов видно, что напряжение вблизи фронта продольной волны в случае, когда соударяющиеся тела более жесткие, значительно больше напряжения, когда за более жесткую принимается нижняя полуплоскость.

§ 2. *Решение смешанной задачи соударения упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии скольжения*

Можно рассматривать подобную задачу при наличии жесткой опоры $y=0$, $x<0$.

Сначала рассмотрим тот случай, когда соударение происходит на опоре. Обозначим $x=-l$ ($l\geqslant 0$) координату точки соударения (фиг. 1), которая находится на жесткой опоре, причем граничные условия можно записать в виде

$$h\frac{\partial U}{\partial x}+a^2\frac{\partial V}{\partial y}+k\frac{\partial U_0}{\partial x}=\frac{\rho_1}{\rho}\left(k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+a^2\frac{\partial V_1}{\partial y}\right),\quad x>0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial U_1}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{2.1}$$

$$V=V_1 \quad \text{при} \quad x>0;\quad V=V_1=0 \quad \text{при} \quad x<0$$

Снова переходя к преобразованиям Лапласа, выбирая решение в виде (1.5) и используя функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях $\bar{\alpha}$

$$\Omega^{+}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp(-i\bar{\alpha}x)\left[\bar{\sigma}_{1yy}-k\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x}\rho-\bar{\sigma}_{yy}\right|_{y=0}dx$$

$$V^{-}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}(\bar{V}_1)_{y=0}\exp(-i\bar{\alpha}x)dx \tag{2.2}$$

где

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x}=-\frac{v_0}{a\rho}\exp\left(-\frac{x'\rho}{a}\right),\quad x'=x+l$$

подставляя (1.5) в (2.1) и проводя обратное преобразование Фурье по x, найдем систему уравнений

$$\frac{ib^2\bar{\gamma}\bar{U}^{(1)}}{\bar{\alpha}}-2ib^2\bar{\alpha}\bar{U}^{(2)}+k\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x}=\frac{\rho_1}{\rho}\left(\frac{ib_1^2\bar{\gamma}_1\bar{U}_1^{(1)}}{\bar{\alpha}}-2ib_1^2\bar{\alpha}\bar{U}_1^{(2)}\right)+\frac{\Omega^{+}}{\rho} \tag{2.3}$$

$$2\bar{\gamma}_1\bar{U}^{(1)} + \frac{i\bar{\chi}}{\bar{\gamma}_2}\bar{U}^{(2)} = 0, \quad 2\bar{\beta}_1\bar{U}_1^{(1)} + \frac{i\bar{\chi}_1}{\bar{\beta}_2}\bar{U}_1^{(2)} = 0$$

$$V^- = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}}\bar{U}^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}_2}\bar{U}^{(2)} = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}}\bar{U}_1^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2}\bar{U}_1^{(2)}$$

Исключая из (2.3) $\bar{U}_1^{(1)}$, $\bar{U}_1^{(2)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $\bar{U}^{(2)}$, можно получить уравнения Винера-Хопфа

$$2\bar{\gamma}_2 F(\bar{\alpha}) D V^- + k\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\Omega^+}{\rho}$$

где

$$F(\bar{\alpha}) = \frac{b^4(\bar{\chi}^2 + 4\bar{\alpha}^2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2) - \rho_1/\rho\, b_1^4/\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1(\bar{\chi}_1^2 + 4\bar{\alpha}^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)}{2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\omega^2 D} \qquad (2.4)$$

$$D = \left| \frac{(a^2 - b^2)b^2}{a^2} - \frac{\rho_1}{\rho}\frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - b_1^2) \right|$$

и при $\bar{\alpha} \to \infty$ $F(\bar{\alpha}) = 1 + \frac{\text{const}}{\bar{\alpha}^2} + \ldots$

Проводится факторизация [6]

$$\ln F(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\ln F(\xi)}{\xi - \bar{\alpha}}\,d\xi = \ln F^+(\bar{\alpha}) + \ln F^-(\bar{\alpha})$$

$F(\bar{\alpha}) = F^+(\bar{\alpha})\, F^-(\bar{\alpha})$, где

$$\ln F^+(\bar{\alpha}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\ln F(\xi)}{\xi - \bar{\alpha}}\,d\xi, \quad \ln F^-(\bar{\alpha}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\ln F(\xi)\,d\xi}{\xi - \bar{\alpha}}$$

где контуры c_1, c_2 выбраны, как в [6].

Подставляя значения $F(\bar{\alpha})$ в (2.4), получим

$$2\omega^2 D\frac{i\bar{\gamma}_2^-}{\omega^2}F^-(\bar{\alpha})V^- + \frac{k}{\bar{\gamma}_2^+ F^+(\bar{\alpha})}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\Omega^+}{\rho F^+(\bar{\alpha})\gamma_2^+}$$

$$\text{где} \quad \gamma_2^+(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{\alpha}}, \quad \bar{\gamma}_2^-(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{\omega}{b} - \bar{\alpha}} \qquad (2.5)$$

$$F^+(\bar{\alpha}) = \frac{\omega/c_R + \bar{\alpha}}{\sqrt{\omega/a + \bar{\alpha}}\,\sqrt{\omega/b + \bar{\alpha}}}\exp\int_{-\omega/b_1}^{-\omega/b} \ln\frac{R(\xi)}{\bar{R}(\xi)}\frac{d\xi}{\xi - \bar{\alpha}} = F^-(-\bar{\alpha})$$

Здесь $R(\bar{\alpha}) = F(\bar{\alpha})D$.

При условии $1/a < 1/b < 1/a_1 < 1/b_1$ можно получить решение уравнения (2.5) в виде

$$V^- = \bar{V}_1 = i d_2(\bar{\alpha})\exp(i\omega l/a)$$

$$\bar{U}_1 = i\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_1}d_2(\bar{\alpha})\exp(i\omega l/a)$$

$$d_0(\bar{\alpha}) = \frac{v_0 k}{4\pi a \gamma_2^- F^+(\bar{\alpha}) D_0\left(\frac{\omega}{a} - \bar{\alpha}\right)\gamma_2^+\left(\frac{\omega}{a}\right) F^+\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

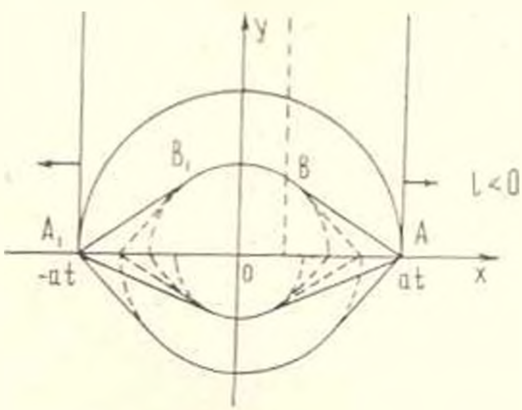
Откуда можно получить значение коэффициента интенсивности напряжения

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} = \frac{2}{\sqrt{-x}} \frac{v_0 k \sqrt{t - l/a}\, \sigma(t - l/a)}{\pi D_1 a \gamma_2^+\left(\frac{1}{a}\right) F^+\left(\frac{1}{a}\right)}, \quad y = 0$$

и для нижней полуплоскости

$$\frac{\sigma_{1xy}}{p_1} = \frac{2 v_0 k_1 \sqrt{t - l/a_1}\, \sigma(t - l/a_1)}{\sqrt{-x}\, \pi D_1^1 \gamma_2^+\left(\frac{1}{a}\right) F^+\left(\frac{1}{a}\right)}, \qquad D_1 = 2Da^2 b^2/a^2 - b^2$$

$$D_{11} = 2D_{11} a_1^2 b_1^2 / a_1^2 - b_1^2$$



Фиг. 4

Для случая, когда соударение происходит вне опоры ($l<0$) (фиг. 4), следует в формуле (2.5) заменить значение $\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}$ при $l>0$ значением

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = -\frac{v_0 \exp(i\alpha l)}{as(s^2/a^2 + \alpha^2)} + \frac{v_0 \exp(ls/a)}{as(s/a - i\alpha)}, \quad l<0$$

Решение имеет вид

$$\Omega^+ = \rho F^+(\bar{\alpha}) \gamma_2^+ G^+(\bar{\alpha}) + \frac{\rho k v_0 \exp(ls/a)}{l \omega a(\omega/a + \bar{\alpha})}$$

$$V^- = -G^-(\bar{\alpha})/2Dl\gamma_2^- F^-(\bar{\alpha})$$

где

$$G^+(\bar{\alpha}) = \frac{\omega D k v_0}{\pi a l} \int_{-a_2^{-1}}^{-a^{-1}} \frac{F^-(\xi)\gamma_1^-(\xi)\gamma_2^-(\xi)\exp(i\xi l) 2\operatorname{Re} R(\xi)\, d\xi}{|R(\xi)|^2 (\xi - \omega/a)(\xi - \bar{\alpha})\sqrt{-\xi - \omega/a}} +$$

$$+\frac{\omega D k v_0}{\pi a i}\int\limits_{-\infty}^{-b^{-1}}\frac{2F^{-}(\xi)\gamma_1^{-}(\xi)\gamma_2^{-}(\xi)\exp(i\xi l)d\xi}{(\xi-\omega/a)|R(\xi)|(\xi-\bar{\alpha})\sqrt{-\xi-\omega/a}}$$

При этом решение уравнения (2.3) примет вид $\bar{V}_1=\bar{V}=V^{-}$, $\bar{U}_1=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_1}V^{-}$

Остальные величины можно найти, как и выше.

§ 3. *Соударение упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии сцепления*

Рассматриваемую задачу можно решать при наличии сцепления вдоль границы, условие для которой имеет вид

$$k\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}+a^2\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}+k\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x}=\left(k_1\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x}+a_1^2\frac{\partial\bar{V}_1}{\partial y}\right)\frac{\rho_1}{\rho}$$

$$\rho b^2\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{V}}{\partial x}\right)=\rho_1 b_1^2\left(\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial y}+\frac{\partial\bar{V}_1}{\partial x}\right)$$

$$\bar{U}=\bar{U}_1,\quad\bar{V}=\bar{V}_1$$

Повторяя метод решения задачи 1, можно найти решения задачи в виде

$$\bar{U}^{(1)}=\frac{ik v_0\bar{\alpha}}{\pi a^2\bar{\gamma}_1 R(\bar{\alpha})}\left\{\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2}\left[\bar{\alpha}^2(\bar{\chi}_1-2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)+\frac{\omega^2}{b_1^2}\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_2\right]-\bar{\chi}(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)\right\}$$

$$\bar{U}^{(2)}=\frac{ik v_0\bar{\alpha}\bar{\gamma}_2}{\pi a^2\bar{\gamma}_1 R(\bar{\alpha})}\left[2\bar{\gamma}_1(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)-\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2}\left(2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_1-\bar{\chi}_1\bar{\gamma}_1+\bar{\beta}_1\frac{\omega^2}{b_1^2}\right)\right]$$

$$\bar{U}_1^{(1)}=\frac{ik_1 v_0\bar{\alpha}}{\pi a^2\bar{\gamma}_1^2 R(\bar{\alpha})}\left[\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2}\bar{\chi}_1(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)+2\bar{\alpha}^2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2-\bar{\alpha}^2\bar{\chi}-\frac{\omega^2}{b^2}\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_1\right]$$

$$\bar{U}_1^{(2)}=\frac{ik_1 v_0\bar{\alpha}}{\pi a^2\bar{\gamma}_1^2 R(\bar{\alpha})}\left[\frac{\omega^2\bar{\gamma}_1}{b^2}+2\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2-\bar{\chi}\bar{\beta}_1-2\bar{\beta}_1\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2}(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)\right]$$

$$R(\bar{\alpha})=b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)(\bar{\chi}^2+4\bar{\alpha}^2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)+\frac{b_1^4}{b^2}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)\times$$

$$\times(\bar{\chi}_1^2+4\bar{\alpha}^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)-\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2}\left[2b^2\bar{\alpha}^2(\bar{\chi}_1-2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2)(\bar{\chi}-2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)+\frac{\omega^4}{b_1^2}(\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_2+\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_1)\right]$$

Предположено, что функция $R(\bar{\alpha})$ имеет вещественный корень [7]. Решение задачи дается в виде (1.9), (1.11). Для краткости рассматриваем только напряжение σ_{xx} при $x=0$, которое после вышеуказанных вычислений можно получить из уравнения

$$-A\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\xi}=\frac{(1-2b^2/a^2\xi^2)}{R_1}\frac{b^4}{a^4}\left\{\frac{b_1^2\rho_1}{b^2\rho}\left[\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)\left(\frac{a^2}{b_1^2}-2+\frac{2}{\xi^2}-\right.\right.\right.$$

$$-2\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\Bigg)+\frac{a^2}{b_1^2}\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\Bigg]-$$

$$-\left(\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{2}{\xi^2}\right)\Bigg[1-\frac{1}{\xi^2}+\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\Bigg]\Bigg\}\frac{\sigma(1-\xi)}{\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}}+$$

$$+\frac{2}{\xi^4}\frac{b^6}{a^6}\frac{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-\frac{a^2}{b^2}}}{R_2\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}}\Bigg\{2\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{\xi^2}+\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\right)-$$

$$-\frac{b_1^2\rho_1}{b^2\rho}\Bigg[\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}-\left(\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{2a^2}{b^2}+\frac{2}{\xi^2}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{a^2}{b_1^2}\frac{\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}}\Bigg\}\sigma\left(\frac{b}{a}-\xi\right)$$

$$R_1=R(\alpha_1,\ \xi),\quad R_2=R(\alpha_2,\ \xi)$$

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\gamma^2},\quad \alpha_2=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\gamma^2},\quad \xi=\frac{1}{a\gamma}$$

Фиг. 5

Результаты расчетов приведены на графиках фиг. 5 соответственно для случаев более жесткой верхней и более жесткой нижней полуплоскостей.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՄԲ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՔԱՌՈՐԴ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱԽՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

ՅՈՒ. Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսաանվերջ հարթ մարմինների բախումը, որոնք շարժվում են իրար հանդեպ հավասար արագությամբ ու սահմանակցված են այ առաձգական հաստատություններով առաձգական կիսահարթությամբ։ Տեղափոխման և լարման բաղադրիչները որոշվում են ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, իսկ խառը չրային պայմանների դեպքում՝ Վիներ-Հոպֆի մեթոդի կիրառմամբ, լուծումը բերվում է Սմիրնով-Սոբոլևի տեսքի։ Կոնտակտի վրա բերված է նորմալ լարման գրաֆիկը։

SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF IMPACT ELASTIC GUARTER-PLANES, LIMITED SEMIPLANES

J. S. SAFARIAN

Summary

The problem of impact of semiinfinite plane bodies moving in opposite directions with same velocities bounded by elastic halfplane with other elastic constants are considered. The component of displacements and stress are found by the method of integral transforms and for mixed conditions by the method of Vinner-Hopf and the solution is brought to the form of Smirnov-Sobolev. The graphs of normal stresses on contact are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М.: ОНТИ, 1937, 998 с.
2. *Малков М. А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней.—Докл. АН СССР, 1965, т. 148, №4, с. 782—785.
3. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. 27 №2, с. 13—23.
4. *Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С.* Линейные и нелинейные задачи соударения упругих тел конечной высоты. Проблемы взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1984, с. 203—208.
5. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы — МТТ. 1976, №1, с. 100—110.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 279 с.
7. *Гоголадзе В. Г.* Дисперсия волн Релея в слое.—Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР, 1947, 119, с. 27—38.
8. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismigues progressives (These). Paris: 1939.
9. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. North—Holland: Publ. Co, 1973 427 p.
10. *Петрашень Г. И.* и др. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Л.: Наука, 1982, 288 с.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
10.I.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 539.3.313.014.11

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЛЯ КЛАССА НАГРУЗОК ПОДКРЕПЛЕНИЕ ОТВЕРСТИЯ В РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛОСКОСТИ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

1. Пусть в неограниченной плоской пластинке малой толщины h вырезано отверстие с гладким контуром Г, усиленное упругим безмоментным стержнем переменной жесткости $G(s)$, где s—длина дуги Г. Пластинка, занимающая область S в системе декартовых координат XY, однородна и изотропна с упругими модулями E и ν. На бесконечности заданы растягивающие напряжения

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

а подкрепление свободно от внешних усилий.

В [5] рассмотрена вариационная задача об отыскании формы Г и функции $G(s)$, доставляющих минимум величине U—суммарной потенциальной энергии упругой деформации пластинки и стержня при заданном его объеме и площади отверстия. Выведены необходимые условия стационарности функционала U в виде дополнительных соотношений для деформации стержня и напряжений на контуре пластинки.

В частности, если стержень отсутствует, то получается условие равнопрочности контура, ранее найденное в ряде работ как оптимальное для локального критерия—минимизации максимального по $(S+\Gamma)$ значения интенсивности касательных напряжений при нагрузке (1.1). Для $p=q$ наилучшим является круговое отверстие, усиленное стержнем постоянной толщины ($G(s)=G_0$).

Входящая слагаемым в U потенциальная энергия деформации пластинки определялась в [5] как интеграл от ее удельной плотности по части S, заключенной между Г и достаточно удаленным контуром, вне которого напряжения постоянны. Можно, однако, учитывать лишь энергию возмущения, вносимого отверстием в однородное поле (1.1), но вычисленную по всей области S [4]

$$2U = K\iint_S [u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \gamma_1 (u_y + v_x)^2]\,dx\,dy + \int_\Gamma (-u_s^0 y_n + v_s^0 x_n)^2 G(s)\,ds \tag{1.2}$$

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad \gamma_1 = 1-\nu$$

Здесь u, v — возмущения компонент вектора перемещения точки пластинки, u^0, v^0 — полные компоненты этого вектора для подкрепления. Нижними индексами обозначено дифференцирование по соответствующей переменной, x_n, y_n — направляющие косинусы внутренней нормали n к контуру. Первый интеграл в (1.2) существует, так как u, v в статическом случае убывает на бесконечности не хуже, чем r^{-1}, где $r^2 = x^2 + y^2$ [6].

На Г справедливы соотношения

$$Eu^0_\tau = Eu_\tau - py_n - qx_n, \quad Ev^0_\tau = Ev_\tau + qx_n + py_n \tag{1.3}$$

Нетрудно показать, что варьирование расширенного по Лагранжу функционала (1.2) с учетом (1.3) дает те же условия оптимальности, что и в [5].

Постановку задачи можно обобщить, считая, что параметры нагрузки в (1.1) не фиксированы точно, а лишь не превышают определенной величины P, и усилия σ_x, σ_y с равной вероятностью и независимо друг от друга принимают любые значения из промежутка $[0, P]$. При этом также требуется найти форму Г и функцию $G(s)$, доставляющие минимум наибольшему по всем допустимым нагрузкам значению U (1.2).

$$\min_{\Gamma, G(\,)} \max_{p, q} U(p, q); \quad 0 \le p, q \le P \tag{1.4}$$

Здесь обозначена зависимость функционала от текущих значений параметров p, q.

В [1] отмечено, что для подобных задач возможны два варианта решения. В первом существует «наихудшая» нагрузка, рассчитанная на которую конструкция оптимальна и для всех остальных нагрузок. Во втором такой нагрузки нет, и конструкция, оптимальная в «целом», не оптимальна ни для какой нагрузки в отдельности.

К первому из них относится и рассматриваемый случай. Наихудшей является симметричная нагрузка $\sigma_x = \sigma_y = P$ и, следовательно, окружность, подкрепленная стержнем постоянной толщины оптимальна также и в смысле (1.4).

Для доказательства заметим, что при любых фиксированных Г и $G(s)$ функция $U(p, q)$ — положительно определенная квадратичная форма своих аргументов.

$$U(p, q) = a_1p^2 + a_{12}pq + a_2q^2; \quad a_1, a_2 > 0 \tag{1.5}$$

Пусть величины p, q растут от произвольных начальных значений p_0, q_0 из $[0, P]$ пропорционально безразмерному параметру t: $p = tp_0$, $q = tq_0$, $t \ge 1$, тогда, в силу однородности

$$U(tp_0, tq_0) = t^2U(p_0, q_0) \ge U(p_0, q_0)$$

откуда следует, что при данных Г и $G(s)$

$$\max_{p, q} U(p, q) = \max\{\max_q U(P, q), \max_p U(p, P)\}$$

Согласно (1.5) $U(P, q)$, как функция от q, может достигать максимума на отрезке $[0, P]$ только в его концах. Аналогично для $U(p, P)$. Поэтому

$$\max_{p,q} U(p, q) = \max\{U(P, 0),\ U(0, P),\ U(P, P)\} \tag{1.6}$$

Обозначим теперь значение функционала (1.2) для круглого отверстия и стержня постоянной толщины через $W(p, q)$. Упоминавшийся результат работы [5] записывается в виде

$$\min_{\Gamma(G_0)} U(P, P) = W(P, P) \tag{1.7}$$

Величины $W(P, P)$ (всестороннее растяжение пластинки) и $W(P, 0) = W(0, P)$ (одноосное растяжение) вычислены в [4]

$$W(P, P) = \frac{4c(1-(1-\nu)\lambda)^2}{(1+(1+\nu)\lambda)^2}$$

$$W(P, 0) = \frac{c(1-(1-\nu)\lambda)^2}{(1+(1+\nu)\lambda)^2} + \frac{12c\lambda^2}{(1+(3+\nu)\lambda)^2} + \frac{\varkappa c(1+(1+\nu)\lambda)^2}{(1+(3+\nu)\lambda)^2}$$

$$c = \frac{4\pi R_0^2 P^2(1+\nu)}{Eh}, \quad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

R_0 – радиус отверстия, $\lambda = G_0(EhR_0)^{-1}$ — относительная жесткость кольца.

Непосредственно проверяется, что для $\nu > 0$ и всех $\lambda > 0$

$$W(P, P) \geqslant W(P, 0)$$

Следовательно, по (1.6)

$$\max_{p,q} W(p, q) = W(P, P) \tag{1.8}$$

Доказательство оптимальности круглого отверстия со стержнем постоянной толщины завершается цепочкой неравенств, следующих из (1.6)—(1.8)

$$\max_{p,q} U(p, q) \geqslant U(P, P) \geqslant W(P, P) = \max_{p,q} W(p, q), \quad 0 \leqslant p, q \leqslant P$$

2. Рассмотрим теперь под нагрузкой (1.1) пластинку, ослабленную совокупностью n неподкрепленных отверстий с границей $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, свободной от внешних усилий.

В этом случае (1.2) содержит в правой части только первое слагаемое, для удобства преобразованное к виду [6]

$$U = \frac{h}{2E} \iint_S (I_1^2 + 2(1+\nu) I_2)\, dx dy \tag{2.1}$$

здесь I_1, I_2—инварианты тензора напряжений возмущенного состояния.

Варьирование функционала (2.1) с подвижной границей, расширенного по Лагранжу за счет заданной площади каждого отверстия, приводит к условию стационарности на Γ

$$I_1+2(1+\nu)\,I_2=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

С учетом того, что компоненты возмущенного состояния отличаются от исходного на слагаемые (1.1) и, что по условиям нагружения, на Г верно соотношение

$$\sigma_s=I_1=p+q$$

где σ_s—нормальное напряжение в направлении касательной к контуру. (2.2) приводится к условию равнопрочности

$$\sigma_s=p+q \tag{2.3}$$

Следует отметить, что условие (2.3) получается и при варьировании (2.1) с подынтегральным выражением более общего вида

$$I_1^2+aI_2 \tag{2.4}$$

лишь бы сохранялась положительная определенность (2.4) в каждой точке $(S+\Gamma)$. Так, $a=3$ отвечает интегральному критерию Мизеса [6]—энергии формоизменения возмущенного состояния. При этом уравнения Эйлера и естественные краевые условия с учетом зависимостей Бельтрами [6] сводятся к тождеству $I_1=0$ в $(S+\Gamma)$, согласованному [1] с (2.3).

Как оптимальные по этому критерию в его локальной форме, контуры (2.3) изучались ранее. В ряде случаев найдена их форма из решения краевой задачи теории функций [7, 8].

Пусть теперь параметры p, q из (1.1) принимают любые значения в промежутках $[0, P]$ и $[0, Q]$ соответственно. Докажем, что равнопрочные контуры (2.3) оптимальны и в смысле (1.4).

Результат (2.3) переписывается в виде

$$U(P, Q)\geqslant W(P, Q) \tag{2.5}$$

где $W(p, q)$—значение функционала (2.1) для равнопрочных контуров. Теперь для доказательства по схеме п. 1 необходимо установить, что

$$\max_{p,q} W(p, q)=W(P, Q) \qquad 0\leqslant p\leqslant P, \quad 0\leqslant q\leqslant Q \tag{2.6}$$

то есть, что

$$W(P, 0), \quad W(0, Q)\leqslant W(P, Q) \tag{2.7}$$

Величины, входящие в (2.7), можно вычислить по теореме Клапейрона [6] как половину работы внешних сил $A(p, q)$ на соответствующих перемещениях возмущенного состояния. Поскольку силы действуют на бесконечности, то

$$A(p, q)=h\lim_{R\to\infty} R\int_0^{2\pi}(pu\cos\theta+qv\sin\theta)d\theta \tag{2.8}$$

Здесь R—радиус достаточно большой окружности с центром в начале координат. Величины u, v в любой точке $(S+\Gamma)$ с аффиксом $t=x-iy$ находятся в виде [6]

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(t)-\overline{t\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)} \qquad 2\mu(1+\nu)=E \tag{2.9}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — потенциалы возмущенного состояния, убывающие на бесконечности. Подстановка (2.9) в (2.8) дает после несложных преобразований

$$4\mu A(p,q)=\pi h[\varkappa\alpha(p-q)-\beta(p+q)] \tag{2.10}$$

α, β — вычеты на бесконечности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно. В силу симметрии задачи по осям координат они действительны.

Величины $W(P,0)$, $W(0,Q)$ и $W(P,Q)$ подсчитываются явно. Для этого силовое граничное условие, при произвольных p,q имеющее вид [6]

$$\varphi(t)+\overline{t\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=-\frac{p+q}{2}t-\frac{q-p}{2}\bar{t}$$

интегрируется порознь по $d\bar{t}$ и dt вдоль l.

$$\int_l \varphi(t)\,d\bar{t}+\int_l \overline{t\varphi'(t)}d\bar{t}+\int_l \overline{\psi(t)}d\bar{t}=-\frac{p+q}{2}\int_L t\,d\bar{t}-\frac{q-p}{2}\int_L \bar{t}\,d\bar{t} \tag{2.11}$$

$$\int_L \varphi(t)dt+\int_L t\overline{\varphi'(t)}dt+\int_L \overline{\psi(t)}dt=-\frac{p+q}{2}\int_L t\,dt-\frac{q-p}{2}\int_L \bar{t}\,dt \tag{2.12}$$

Неравные нулю слагаемые в правых частях (2.11)—(2.12) по известной формуле [9] пропорциональны площади D всех отверстий. Первый интеграл в левой части (2.11) и аналогичные находятся с помощью конформного отображения области S на стандартную область Z переменного ξ — внешность n разрезов, параллельных оси X.

$$t=\omega(\xi),\quad d\bar{t}=\overline{\omega'(\xi)}d\bar{\xi},\quad d\bar{\xi}=d\xi$$

На оптимальной границе верно соотношение [7]

$$-2\psi_0\omega'(\xi)=(P+Q)\,\overline{\omega'(\xi)}$$

$\psi_0(\xi)$ голоморфна в Z, при $\xi\to\infty$, $2\psi_0(\xi)=(Q-P)+0(1)$, следовательно

$$d\bar{t}=-2\psi_0(\xi)\frac{\omega'(\xi)}{P+Q}d\xi \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в (2.11), (2.12) после несложных преобразований приводит к линейной алгебраической системе относительно α и β

$$\begin{gathered}2m\alpha+\beta=-\frac{p+q}{2\pi}D;\qquad m=\frac{Q-P}{Q+P}\\ (1+m^2)\alpha+m\beta=-\frac{q-p}{2\pi}D\end{gathered} \tag{2.14}$$

Полагая в (2.14) поочередно $p=P$, $q=0$ и $p=0$, $q=Q$, получаем соответственно:

$$\alpha_1 = \frac{PD(1+m)}{2\pi(1-m^2)}; \quad \beta_1 = -\frac{PD(1+m)^2}{2\pi(1-m^2)}$$

$$\alpha_2 = \frac{QD(m-1)}{2\pi(1-m^2)}; \quad \beta_2 = -\frac{QD(1-m)^2}{2\pi(1-m^2)} \tag{2.15}$$

Вычеты не зависят явно от связности n области. В частном случае $n=1$ выражения (2.15) можно найти из решения [6] прямой задачи для эллиптического отверстия. Из (2.10), (2.15) следует, что

$$W(P, 0) = \frac{\pi hP}{8\mu}(\varkappa\alpha_1 - \beta_1) = \frac{P^2Dh(1+m)(\varkappa+m+1)}{16\mu(1-m^2)}$$

$$W(0, Q) = -\frac{\pi hQ}{8\mu}(\varkappa\alpha_2 + \beta_2) = \frac{Q^2Dh(1-m)(\varkappa-m+1)}{16\mu(1-m^2)}$$

$$W(P, Q) = -\frac{\pi(P+Q)h(\beta_1+\beta_2)}{8\mu} = \frac{(P+Q)^2Dh}{16\mu}$$

В последней формуле учтено, что $Q\alpha_1 + P\alpha_2 = 0$.

Анализ полученных выражений показывает, что неравенство (2.7) при $\varkappa \leqslant 2$ $(3\nu \geqslant 1)$ справедливо для любых значений P и Q, а при $2 < \varkappa \leqslant 3$ $(0 \leqslant 3\nu < 1)$ — лишь для P, Q, удовлетворяющих дополнительному соотношению

$$\left|\frac{P-Q}{P+Q}\right| \leqslant \frac{\varkappa - \sqrt{\varkappa^2+4\varkappa-12}}{2}$$

С учетом этого ограничения оптимальность равнопрочных контуров в смысле (1.4) следует из (2.5), (2.6)

$$\max_{p,q} U(p, q) \geqslant U(P, Q) \geqslant W(P, Q) = \max_{p,q} W(p, q)$$

$$0 \leqslant p \leqslant P, \quad 0 \leqslant q \leqslant Q$$

ՁԳՎՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԱՆՑՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՈՒԺԵՂԱՑՈՒՄԸ ԲԱՌԵՐԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ

Ս. Բ. ՎԻԳԴԵՐԳԱՈՒԶ

Ամփոփում

Դիտարկված է փոփոխական կտրվածքով անմոմենտ ձողով (առաձգական եզրով) ուժեղացված կամայական անցքով սալ։ Սալի անվերջում ձգող հաստատուն նշանով, ճիգերը ճշգրիտ հայտնի չեն և միայն հաստատունով սահմանափակ են վերևից։ Փնտրվում է անցքի ձևը և ձողի կոշտության փոփոխման օրենքը, որը օպտիմալացնում է սալի լարվածային վիճակը ամբողջությամբ վերցրած բեռների բոլոր դասերի համար։

Օպտիմալության կրիտերիա հանդիսանում է սալի դեֆորմացիայի լրացուցիչ պոտենցիալ էներգիայի մինիմումը։ Հաստատված է, որ օպտիմալ հան-

դիսանում է հաստատուն կոշտությամբ ձողով ուժեղացած կլոր անցքը։ Դիտարկված է նաև որոշ ուժեղացած անցքերով սալ։ Այդ դեպքերում օպտիմալ են հանդիսանում հավասարամուր անցքերը։

OPTIMUM REINFORCEMENT AROUND A HOLE IN A STRETCHED PLANE FOR A CERTAIN RANGE OF LOADS

S. B. VIGDERGAUZ

Summary

An infinite plate with arbitrary hole stiffened with an absolutely flexible rod (an elastic thread) of variable section is considered. The fixed-sign forces stretching the plate at infinity have only upper estimation with a given constant rather than being exactly determined. The form of hole and the law of variation of rod rigidity optimizating the strained state of the plate for the range of loads as a whole are explored. The minimum of additional (due to the hole and reinforcement) potential energy of plate deformation is chosen as a criterion of optimality. The round hole with the rod of constant rigidity has been found to be optimum. The plate with several free holes is also considered. In this case the so-called equal-strong holes have been demonstrated to provide the optimum.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимальное проектирование в одномерных задачах изгиба для фиксированных и подвижных нагрузок.—Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5, с. 113—123.
3. *Баничук Н. В.* Об одной игровой задаче оптимизации упругих тел.—Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 497—499.
4. *Михайловский Е. И., Чаунин М. П.* Рациональное подкрепление кругового отверстия в растягиваемой плоской пластине.—Проблемы прочности, 1978, № 1, с. 37—39.
5. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем.—ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 905—915.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
7. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости.—ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963—979.
8. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости.—ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 566—569.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1972. 556 с.

НИИЛПЭО «Электросила»
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
9.I.1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

ДРОЗДОВ А. Д.

В работе получены условия устойчивости армированных стержней, изготовленных из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала, при учете сдвиговых деформаций. Устойчивость исследована при произвольном ядре релаксации материала и различных типах закрепления концов стержня. Определение устойчивости на бесконечном интервале времени соответствует определению устойчивости по Ляпунову.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изгиб прямолинейного стержня длины l, изготовленного из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Стержень имеет две оси симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через продольную ось и ось симметрии. Обозначим через S площадь поперечного сечения стержня, а через J—его момент инерции. Введем ось $0x$, направленную вдоль продольной оси в недеформированном состоянии. Возраст материала стержня в окрестности точки x относительно элемента материала в окрестности точки 0 обозначим через $\rho(x)$. Функция ρ кусочно-непрерывная и ограниченная.

В момент времени $t_0 \geqslant 0$ к стержню приложена внешняя нагрузка, состоящая из сжимающей силы P и распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q(x)$. Деформации сжатия ε_1 и сдвига ε_2 связаны с соответствующими напряжениями σ_1 и σ_2 соотношениями [1]

$$\sigma_1 = E(I - R_1)\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = 2G(I - R_2)\varepsilon_2 \tag{1.1}$$

Здесь E—постоянный модуль упруго-мгновенной деформации, G—постоянный модуль сдвига, I—единичный оператор, R_1, R_2—операторы релаксации при сжатии и сдвиге

$$R_j\varepsilon = \int_{t_0}^{t} r_j(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\varepsilon(\tau, x)d\tau, \quad (j=1, 2)$$

где r_1, r_2—соответствующие ядра релаксации.

Предположим, что удлинения, сдвиги и углы поворота элемента стержня малы, так что их квадратами можно пренебречь. Обозначим через $w_1(t, x, z)$, $w_2(t, x, z)$ продольное и поперечное смещения точек стержня, находящихся на расстоянии z от продольной оси. Согласно гипотезе прямых нормалей [2]

$$w_1 = u(t, x) + z\gamma(t, x), \quad w_2 = y(t, x) \tag{1.2}$$

Здесь u—продольное смещение точек оси стержня, y—прогиб стержня, γ—угол поворота нормали к продольной оси. Из соотношений (1.2) получим

$$\varepsilon_1 = u' + z\gamma', \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\gamma + y'), \quad y' = \partial y/\partial x \tag{1.3}$$

Обозначим через M изгибающий момент, через Q_0—перерезывающую силу, а через Q—проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к сечению, на перпендикуляр к продольной оси в недеформированном состоянии

$$M = -\int_S \sigma_1 z\,ds, \quad Q_0 = -\int_S \tau_1 ds, \quad Q = Q_0 + Py' \tag{1.4}$$

Здесь ds—элемент площади сечения стержня.

Подставим выражения (1.1), (1.3) в соотношения (1.4)

$$\begin{aligned} M &= -EJ(I - R_1)\gamma' \\ Q &= -GS(I - R_2)(\gamma + y') + Py' \end{aligned} \tag{1.5}$$

В квазистатическом приближении уравнения равновесия элемента стержня в изогнутом положении имеют вид [3]

$$M' = Q - Py', \quad Q' = q \tag{1.6}$$

Подставляя выражения (1.5) в равенства (1.6), получим систему уравнений для определения прогиба стержня при учете деформации сдвига

$$EJ[(I - R_1)\gamma']' = GS(I - R_2)(\gamma + y'), \quad [-GS(I - R_2)(\gamma + y') + Py']' = q \tag{1.7}$$

Определение. Стержень называется устойчивым по Ляпунову на бесконечном интервале времени, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sup_x |q(x)| < \delta$ следует оценка $\sup_{t,x} |y(t, x)| < \varepsilon$, $(x \in [0, l]$, $t \geq t_0)$.

Цель работы—получение условий на величину сжимающей силы P, при которых стержень устойчив. В случае, когда деформацией сдвига можно пренебречь, аналогичная задача исследована в [4].

В дальнейшем предполагаем, что $P < GS$ и выполнены условия:

1) существует такая функция $r_1^{(1)}(t, \tau)$, что для любого $x \in [0, l]$

$$0 \leq r_1(t + \rho(x), \tau - \rho(x)) \leq r_1^{(1)}(t, \tau), \quad t_0 \leq \tau < t$$

$$|r_1^{(1)}| = \sup_t \int_{t_0}^{t} r_1^{(1)}(t, \tau)\,d\tau < 1$$

2) функция $r_1^{(1)}(t, \tau)$ допускает представление

$$r_1^{(1)} = \varphi_1(t, \tau) + \varphi_2(t, \tau)(t - \tau)^{-\alpha_1}$$

где функции φ_1, φ_2 непрерывны по t, τ и $0 < \alpha_1 < 1$.

2. *Устойчивость консольного стержня.* Пусть один конец стержня жестко защемлен, а другой свободен

$$y(t, 0)=\gamma(t, 0)=0, \quad M(t, l)=Q(t, l)=0 \tag{2.1}$$

Из второго равенства (1.6) и (2.1) найдем

$$Q=-N(x), \quad N=\int_x^l q d\xi \tag{2.2}$$

Подставим это выражение в (1.5) и разрешим полученное соотношение относительно y'

$$y'=(1-\alpha)^{-1}[I-(1-\alpha)^{-1}R_2]^{-1}\,[N/(GS)-(I-R_2)\gamma], \quad \alpha=P/(GS) \tag{2.3}$$

Из (1.7), (2.2), (2.3) получим

$$\begin{gathered}[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}[I+\alpha(1-\alpha)^{-1}(I-(1-\alpha)^{-1}R_2)^{-1}R_2]\gamma+\\ +(1-\alpha)^{-1}[I+\alpha(1-\alpha)^{-1}(I-(1-\alpha)^{-1}R_2)^{-1}R_2]N_1\\ n=GS/(EJ), \quad N_1=N/(EJ)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Граничные условия для уравнения (2.4) имеют вид

$$\gamma(t, 0)=0, \quad \gamma'(t, l)=0 \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда эффектом ползучести при сдвиге можно пренебречь ($R_2=0$). Тогда уравнение (2.4) можно записать в виде

$$[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}\gamma+(1-\alpha)^{-1}N_1 \tag{2.6}$$

Умножим соотношение (2.6) на $\gamma(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2.5), получим

$$\begin{gathered}J_1^2(t)=n\alpha(1-\alpha)^{-1}J_0^2(t)+\int_0^l \gamma' R_1\gamma' dx-(1-\alpha)^{-1}\int_0^l N_1\gamma dx\\ J_j^2(t)=\int_0^l \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\gamma(t, x)\right|^2 dx, \quad (j=0,\ 1)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Оценим второе и третье слагаемое в правой части (2.7) с помощью неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\int_0^l \gamma' R_1\gamma' dx\right| \leqslant J_1(t)\int_{t_0}^{t} r_1^{(1)}(t, \tau)J_1(\tau)d\tau \tag{2.8}$$

$$\left|\int_0^l N_1\gamma dx\right| \leqslant KJ_0(t), \quad K^2=\int_0^l N_1^2 dx$$

Обозначим через U множество непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условиям $v(0)=v'(l)=0$. Положим

$$\lambda=\inf_v \left|\int_0^l (v')^2dx\right| \left|\int_0^l v^2dx\right|^{-1}, \quad v\in U$$

Согласно неравенству Рэлея [5], $\lambda=\pi^2/(4l^2)$ есть минимальное положительное собственное значение краевой задачи $v''+\lambda v=0$, $v(0)=v'(l)=0$. Из определения величины λ следует оценка

$$J_0^2\leqslant\lambda^{-1}J_1^2 \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.7)—(2.9) получим

$$[1-n\alpha\lambda^{-1}(1-\alpha)^{-1}]J_1(t)\leqslant\int_{t_0}^t r_1^{(1)}(t,\tau)J_1(\tau)d\tau+K[\lambda^{1/2}(1-\alpha)]^{-1}$$

откуда найдем

$$[1-|r_1^{(1)}|-n\alpha\lambda^{-1}(1-\alpha)^{-1}]J_1^0(t)\leqslant K[\lambda^{1/2}(1-\alpha)]^{-1}, \quad J_1^0(t)=\sup_\tau J_1(\tau), \quad t_0\leqslant\tau\leqslant t \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.5) следует, что существует такая постоянная $C>0$, что

$$|y(t,x)|\leqslant C[J_1^0(t)+K] \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.10), (2.11) следует

Теорема 1. Пусть

$$P<\lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1+\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{2.12}$$

Тогда стержень устойчив.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда необходимо учитывать ползучесть как при сжатии, так и при сдвиге. Введем оператор R, определенный по формуле $R=\alpha(1-\alpha)^{-1}[I-(1-\alpha)^{-1}R_2]^{-1}R_2$. Ядро этого оператора обозначим через $r(t,\tau)$. Предположим, что выполняются условия:

1) существует такая функция $r^{(1)}(t,\tau,\alpha)$, что для любых $t>t_0$, $x\in[0,l]$, $\alpha\in(0,1)$

$$|r(t+\varphi(x),\tau+\varphi(x))|\leqslant r^{(1)}(t,\tau,\alpha), \quad |r^{(1)}|<\infty$$

2) функция $r^{(1)}(t,\tau,\alpha)$ допускает представление

$$r^{(1)}=\varphi_1(t,\tau,\alpha)+\varphi_2(t,\tau,\alpha)(t-\tau)^{-\nu}$$

где функции φ_1, φ_2 непрерывны по t, τ и $0<\nu<1$.

Запишем уравнение (2.4) в виде

$$[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}(I+R)\gamma+(1-\alpha)^{-1}(I+R)N_1 \tag{2.13}$$

Умножим равенство (2.13) на $\gamma(t,x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2.5), получим

$$J_1^2(t) = \int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx + n\alpha(1-\alpha)^{-1}\left[J_0^2(t) + \int_0^l \gamma R \gamma\, dx \right] -$$

$$-(1-\alpha)^{-1} \int_0^l \gamma(I+R) N_1 dx \tag{2.14}$$

Оценим величины, входящие в правую часть (2.14) с помощью неравенства Коши-Буняковского и (2.9)

$$\left| \int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx \right| \leqslant J_1(t) \int_{t_0}^t r_1^{(1)}(t, \tau) J_1(\tau) d\tau$$

$$\left| \int_0^l \gamma R \gamma\, dx \right| \leqslant \lambda^{-1} J_1(t) \int_{t_0}^t r^{(1)}(t, \tau, \alpha) J_1(\tau) d\tau \tag{2.15}$$

$$\left| \int_0^l \gamma(I+R) N_1 dx \right| \leqslant K\lambda^{-1/2}(1+|r^{(1)}|) J_1(t)$$

Из (2.14), (2.15) следует соотношение

$$[1-n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}] J_1(t) \leqslant \int_{t_0}^t [r_1^{(1)}(t, \tau) + n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1} r^{(1)}(t, \tau, \alpha)] J_1(\tau) d\tau +$$

$$+K(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1/2}(1+|r^{(1)}|)$$

Из этого неравенства получим

$$[1-|r_1^{(1)}|-n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}(1+|r^{(1)}|)] J_1^0(t) \leqslant K(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}(1+|r^{(1)}|) \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.11), (2.16) следует

Теорема 2. Пусть $\alpha(1-\alpha)^{-1}(1+|r^{(1)}|) < \lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)$. Тогда стержень устойчив.

Приведенное выше условие устойчивости можно записать в виде

$$P < \lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1+|r^{(1)}|+\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{2.17}$$

3. Устойчивость шарнирно опертого стержня. Пусть концы стержня шарнирно закреплены

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0, \quad \gamma'(t, 0) = \gamma'(t, l) = 0 \tag{3.1}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда ползучестью при сдвиге можно пренебречь ($R_2=0$). Из соотношений (1.7) получим

$$\gamma' = -(1-\alpha)y'' - q_1, \quad q_1 = 2q/(GS) \tag{3.2}$$

Продифференцируем первое равенство (1.7) по x и подставим в него выражение (3.2)

$$[(I-R_1)y'']'' = -n\alpha(1-\alpha)^{-1}y''+(1-\alpha)^{-1}[nq_1-((I-R_1)q_1)''] \tag{3.3}$$

Умножим соотношение (3.3) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая (3.1), (3.2), получим

$$Y_2^2(t)=\int_0^l y''R_1y''dx+n\alpha(1-\alpha)^{-1}Y_1^2(t)+(1-\alpha)^{-1}\left[n\int_0^l q_1 y dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^l y''(I-R_1)q_1\,dx\right] \tag{3.4}$$

$$Y_j^2(t)=\int_0^l\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}y(t,x)\right|^2dx,\quad (j=1,\ 2)$$

Обозначим через U множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условию $v(0)=v(l)=0$. Положим

$$\lambda=\inf\left[\int_0^l(v'')^2dx\,\Big|\int_0^l(v')^2dx\right]^{-1},\quad v\in V$$

Согласно неравенству Рэлея [5], $\lambda=\pi^2l^{-2}$ есть минимальное положительное значение краевой задачи $v^{IV}(x)+\lambda v''(x)=0$, $v(0)=v(l)=0$, $v''(0)=v''(l)=0$. Из определения величины λ следует оценка $Y_1^2(t)\leqslant\leqslant\lambda^{-1}Y_2^2(t)$. Слагаемые в правой части соотношения (3.4) оценим с помощью неравенства Коши-Буняковского аналогично (2.8). Получим, что при $\alpha(1-\alpha)^{-1}<\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)$ справедливо соотношение

$$Y_2(t)\leqslant C_1K_1,\quad K_1^2=\int_0^l q_1^2dx \tag{3.5}$$

где постоянная $C_1>0$ не зависит от интенсивности поперечной нагрузки. Из граничных условий (3.1) и неравенства Коши-Буняковского найдем

$$|y(t,\ x)|\leqslant 2l^{3/2}Y_2(t) \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5), (3.6) следует

Теорема 3. Пусть

$$P<\lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1+\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{3.7}$$

Тогда стержень устойчив.

4. *Устойчивость стержня с жестко защемленными концами.* Пусть концы стержня жестко защемлены

$$y(t,0)=y(t,l)=0,\quad \gamma(t,0)=\gamma(t,l)=0 \tag{4.1}$$

и ползучестью при сдвиге можно пренебречь ($R_2=0$). Из соотношений (3.2), (4.1) найдем

$$
\begin{gathered}
y'(t,x)=(1-\alpha)^{-1}\left[N_2+\left(l^{-1}\int\limits_0^l\gamma dx-\gamma\right)\right]\\
N_2(x)=l^{-1}\int\limits_0^l(l-\xi)q_1d\xi-\int\limits_0^x q_1d\xi
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Из (4.2) и первого равенства (1.7) следует соотношение

$$
[(I-R_1)\gamma']'=(1-\alpha)^{-1}\left(-n\alpha\gamma+nl^{-1}\int\limits_0^l\gamma dx+nN_2\right) \tag{4.3}
$$

Умножим (4.3) на $\gamma(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (4.1), получим

$$
\begin{gathered}
J_1^2(t)+n(l(1-\alpha))^{-1}\left(\int\limits_0^l\gamma dx\right)^2=\int\limits_0^l\gamma' R_1\gamma' dx+n\alpha(1-\alpha)^{-1}J_0^2(t)-\\
-n(1-\alpha)^{-1}\int\limits_0^l N_2\gamma dx
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Обозначим через U множество непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условиям $v(0)=v(l)=0$. Положим

$$
\lambda(\alpha)=\inf\nolimits_v\left[\int\limits_0^l(v')^2dx+a\left(\int\limits_0^l vdx\right)^2\right]\left(\int\limits_0^l v^2dx\right)^{-1},\quad a=n[l(1-\alpha)(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1}
$$

Легко показать, что $\pi^2l^{-2}\leqslant\lambda(\alpha)\leqslant 4\pi^2l^{-2}$. Из определения величины λ и (4.4) следует неравенство

$$
\begin{gathered}
|r_1^{(1)}|J_1^2(t)+|1-n\alpha(\lambda(1-\alpha)(1-|r_1^{(1)}|))^{-1}|\left[(1-|r_1^{(1)}|)J_1^2(t)+n(l(1-\alpha))^{-1}\times\right.\\
\left.\times\left(\int\limits_0^l\gamma dx\right)^2\right]\leqslant\left|\int\limits_0^l\gamma' R_1\gamma' dx\right|+n(1-\alpha)^{-1}\left|\int\limits_0^l N_2\gamma dx\right|
\end{gathered}
$$

Оценим слагаемые в правой части этого соотношения аналогично (2.8). Получим, что при

$$
\alpha(1-\alpha)^{-1}<\lambda(\alpha)n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|) \tag{4.5}
$$

справедлива оценка

$$
J_0(t)\leqslant C_2K_2,\quad K_2^2=\int\limits_0^l N_2^2dx \tag{4.6}
$$

где постоянная $C_2>0$ не зависит от интенсивности поперечной нагрузки. Из соотношений (4.1), (4.2) и неравенства Коши-Буняковского вытекает оценка

$$|y(t, x)| \leqslant l^{1/2}(1-\alpha)^{-1}[2J_0(t)-K_2] \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) следует

Теорема 4. Пусть выполняется неравенство (4.5). Тогда стержень устойчив.

5. Устойчивость армированного стержня. Пусть стержень изготовлен из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала и армирован упругим материалом. Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии. Арматура расположена симметрично относительно этих осей. Площадь поперечного сечения арматуры равна S_a, а момент инерции равен J_a. Напряжения и деформации в арматуре удовлетворяют закону Гука $\sigma_1 = E_a \varepsilon_1$, $\sigma_2 = 2G_a \varepsilon_2$, где E_a, G_a — постоянный модуль упругой деформации и постоянный модуль сдвига армирующего материала.

Условия устойчивости армированного стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня, у которого модуль упруго-мгновенной деформации равен E, модуль сдвига равен G, площадь поперечного сечения равна $S_0 = (GS + G_a S_a)/G$, момент инерции равен $J_0 = (EJ + E_a J_a)/E$, а ядра релаксации при сжатии и сдвиге имеют вид $\beta_1 r_1$ и $\beta_2 r_2$, где $\beta_1 = J/J_0$, $\beta_2 = S/S_0$

6. Некоторые замечания.

1) Если деформацией сдвига можно пренебречь ($G = \infty$), то условия устойчивости (2.12), (2.17), (3.7), (1.5) принимают вид

$$P < \lambda EJ(1 - |r_1^{(1)}|) \tag{6.1}$$

2) Пусть существует такое предельное ядро релаксации $r_1^0(t, \tau)$ что $|r_1^0| < 1$ и при $t_1 \to \infty$ равномерно по $t \geqslant t_1$

$$\lim \int_{t_1}^{t} \sup_x |r_1(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) - r_1^0(t, \tau)| d\tau = 0$$

Тогда в условиях теорем 1, 2, 3, 4 можно заменить норму ядра $r_1^{(1)}$ на норму предельного ядра релаксации r_1^0. Условие устойчивости стержня при отсутствии деформации сдвига (6.1) в этом случае переходит в условие устойчивости, полученное в [4].

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и ценные замечания.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՔԻ ԿՈՇՏՈՒԹՅՈՒՆՈՎ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Դ. ԴՐՈԶԴՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված են անհամասեռ-ծերացող առաձգամածուցիկ նյութից պատրաստված ամրանավորված ձողի կայունության պայմանները *սահքային դեֆորմացիաների հաշվառման դեպքում։ Կայունությունը հետազոտված է նյութի կամայական կորիզի ռելաքսացիայի և ձողի ծայրերի տարբեր տիպի ամրակցումների դեպքում։ Կայունության որոշումը ժամանակի անվերջ միջակայքի կայունության որոշմանը։*

STABILITY OF VISCO-ELASTIC BEAMS WITH FINITE DISPLACEMENT RIGIDITY

A. D. DROZDOV

S u m m a r y

In the paper conditions of stability of beams from aging visco-elastic material have been obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно-стареющих сред.—Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
3. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
4. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.—Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 78, № 3, с. 117—121.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Московский автомеханический
институт

Поступила в редакцию
17.I.1984