ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ МНОГОУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

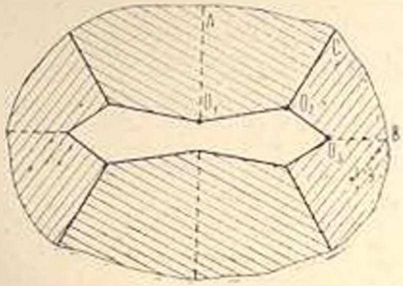
БАБЛОЯН А. А., ТАДЕВОСЯН Р. Г.

Исследованию напряженного состояния бесконечных клиновидных областей посвящены работы [1—11] и др.

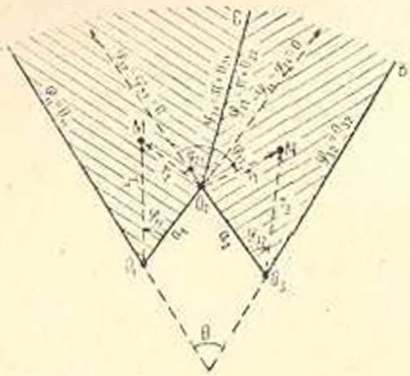
Методом «кусочно-однородных» решений Б. М. Нуллер рассмотрел задачу для составных M-образных областей, имеющих три угловые точки, когда линия контакта имеет определенное направление. Аналогичные задачи для составных тел, когда исследуемое тело имеет две или три угловые точки с раствором $k\pi/2$ ($k=1, 2, 3$), рассматривались в работах [3, 4] и др.

В работах [1, 2, 7] приводятся решения задач для составных клиновидных областей, имеющих две (внутренние или внешние) угловые точки с произвольным раствором углов, причем линия раздела различных материалов проходит через вершины углов под произвольным направлением. Все эти задачи решались методом, предложенным в [2], сущность которого состоит в следующем: вводятся две системы полярных координат с центрами, совпадающими, соответственно, с угловыми точками. Применяя принцип «обобщенной» суперпозиции и точно удовлетворяя условиям контакта двух материалов, задача сводится к решению регулярных интегральных уравнений, а затем—к бесконечным системам алгебраических уравнений. Используемый метод позволяет получить искомые напряжения около угловых точек с выделенными характерными особенностями.

1°. В данной работе приводится решение задачи теории упругости для симметрично собранной плоскости, ослабленной многоугольным от-



Фиг. 1



Фиг. 2

верстием (фиг. 1). Отверстие имеет n $(n=1, 2, \ldots)$ осей симметрии и $4n$ сторон, которые попарно равны между собой. В силу симметрии задачу будем решать только для заштрихованной M-образной части составной области (фиг. 2), удовлетворяя при этом условиям симметрии на лучах O_1A и O_3B:

$$\tau_{r\varphi}^{(k)}=0, \quad V_{\varphi}^{(k)}=0, \quad (k=1, 2) \tag{1.1}$$

Пусть модуль Юнга и коэффициент Пуассона для первого материала будут E_1, ν_1, а для второго — E_2, ν_2. Принимается, что по лучу O_2C материалы сцеплены друг с другом

$$\sigma_{\varphi}^{(1)}=\sigma_{\varphi}^{(2)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)}=\tau_{r\varphi}^{(2)}, \quad U_r^{(1)}=U_r^{(2)}, \quad V_{\varphi}^{(1)}=V_{\varphi}^{(2)} \tag{1.2}$$

На отрезках O_1O_2 и O_2O_3 заданы напряжения в виде интегрируемых функций

$$\sigma_{\varphi}^{(k)}=f_{k1}, \quad \tau_{r\varphi}^{(k)}=f_{k2}, \quad (k=1, 2) \tag{1.3}$$

Как известно [8], рассматриваемая задача сводится к определению бигармонической внутри области функции F, удовлетворяющей условиям (1.1) — (1.3).

Введем четыре системы полярных координат (r_1, φ_{11}), (r_2, φ_{21}), (r_2, φ_{22}), (r_3, φ_{32}) с центрами соответственно в точках O_1, O_2, O_3, O (фиг. 2).

Решение поставленной задачи ищем в виде

$$F=\begin{cases} F_1 & \text{внутри первого материала} \\ F_2 & \text{внутри второго материала} \end{cases} \tag{1.4}$$

Каждую из функций F_k $(k=1, 2)$ представим в виде суммы двух интегралов Меллина

$$F_k=\sum_{n=k}^{k+1} F_{nk}(r_n, \bar{\varphi}_{nk})=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=k}^{k+1}\int_{L_n} \Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_{nk})r_n^{1-s}\,ds$$

$$\bar{\varphi}_{11}=\varphi_{11}, \quad \bar{\varphi}_{21}=\varphi_{21}-\pi, \quad \bar{\varphi}_{22}=\varphi_{22}-\pi, \quad \bar{\varphi}_{32}=\varphi_{32} \tag{1.5}$$

(Здесь и в дальнейшем первый индекс указывает вершину угла, внутри которой функция F_{nk} бигармонична, а второй индекс указывает материал).

L_n—прямые, параллельные мнимой оси комплексной плоскости s

$$(s=c_n+iy, \quad -\infty<y<+\infty, \quad \varepsilon-1<c_n<0, \quad \varepsilon>0)$$

Функции Φ_{nk} удовлетворяют уравнению

$$\Phi^{IV}(s, \bar{\varphi})+2(s^2+1)\Phi''+(s^2-1)^2\Phi=0 \tag{1.6}$$

следовательно, их можно представить в виде

$$\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_{nk})=A_{nk}(s)\cos(s-1)\bar{\varphi}_{nk}+B_{nk}\sin(s-1)\bar{\varphi}_{nk}+C_{nk}\cos(s+1)\bar{\varphi}_{nk}+$$
$$+D_{nk}\sin(s+1)\bar{\varphi}_{nk} \tag{1.7}$$

Из фиг. 2 следует, что углы φ_{nk} изменяются в пределах: для первого материала $0 \leqslant \varphi_{11} \leqslant \theta_{11}$, $\theta_{21} \leqslant \varphi_{21} - \pi = \bar{\varphi}_{21} \leqslant 0$; для второго материала $\theta_{22} \leqslant \varphi_{22} - \pi = \bar{\varphi}_{22} \leqslant 0$, $0 \leqslant \varphi_{32} \leqslant \theta_{32}$ и имеют место неравенства

$$\theta_{11} + \theta_{32} \leqslant 2\pi, \quad \theta_{21} + \theta_{22} \leqslant 2\pi, \quad \theta_{11} - \theta_{21} \geqslant \pi, \quad \theta_{32} - \theta_{22} \geqslant \pi \tag{1.8}$$

2°. Требуем, чтобы функции F_{11} и F_{12} на отрезках O_1O_2 и O_2O_3 соответственно удовлетворяли условиям (1.3), а функции F_{21} и F_{22} на этих же отрезках удовлетворяли условиям свободного края, аналогичным однородным условиям. В дальнейшем целесообразно вместо неизвестных функций, входящих в (1.7), вводить новые неизвестные X_{pk}, Y_{nk} ($p = 1, 3$; $n, k = 1, 2$)

$$\xi C_{pk} \Delta_p = -a_k^{\xi} (\bar{\alpha}_{pk}^- X_{p1} + \alpha_{pk}^- X_{p2} + \bar{f}_{p1} S_p^- + \bar{f}_{p2} C_p^-)$$

$$\xi D_{pk} \Delta_p = a_k^{\xi} (\bar{\beta}_{pk}^+ X_{p1} + \beta_{pk}^+ X_{p2} - \bar{f}_{p1} C_p^+ + \bar{f}_{p2} S_p^+)$$

$$\xi C_{2k} \Delta_2 = a_2^{\xi} (M_{2k}^- Y_{11} + N_{2k}^- Y_{12} + Q_{2k}^- Y_{21} + P_{2k}^- Y_{22})$$

$$\xi D_{2k} \Delta_2 = a_2^{\xi} (N_{2k}^+ Y_{11} + M_{2k}^- Y_{12} + P_{2k}^+ Y_{21} + Q_{2k}^+ Y_{22})$$

$$\xi [(\xi - 1) B_{pk} + (\xi + 1) D_{pk}] = a_k^{\xi} \bar{f}_{p2}(\xi)$$

$$\xi (\xi - 1)(A_{pk} + C_{pk}) = a_k^{\xi} \bar{f}_{p1}(\xi)$$

$$(\xi - 1) B_{2k} + (\xi + 1) D_{2k} = 0, \quad A_{2k} + C_{2k} = 0. \left(n = 1, 2; \quad p = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 3, & k = 2 \end{cases} \right) \tag{2.1}$$

При этом граничные условия (1.3) удовлетворяются тождественно. Здесь введены следующие обозначения:

$$E_m M_{2k}^{\pm}(\xi) = \pm (-1)^m (E_m \tilde{\alpha}_{2k}^{\pm} \delta_m^{\mp} - E_m \beta_{2k}^{\pm} C_{2m}^{\mp} - E_k \alpha_{2k}^{\pm} \gamma_m)$$

$$E_m N_{2k}^{\pm}(\xi) = (-1)^m (E_m \tilde{\beta}_{2k}^{\pm} \delta_m^{\pm} + E_m \bar{\alpha}_{2m}^{\pm} C_{2m}^{\pm} - E_k \beta_{2k}^{\pm} \gamma_m)$$

$$E_2 E_k Q_{2k}^{\pm}(\xi) = (-1)^{m+1} [E_k^2 (\alpha_{2k}^{\pm} \delta_m^{\pm} + \beta_{2k}^{\pm} C_{2m}^{\mp}) - E_2 E_m \bar{\alpha}_{2k}^{\pm} \bar{\Delta}_m]$$

$$E_2 E_k P_{2k}^{\pm}(\xi) = \pm (-1)^m [E_k^2 (\beta_{2k}^{\pm} \delta_m^{\mp} - \alpha_{2k}^{\pm} C_{2m}^{\pm}) - E_2 E_m \bar{\beta}_{2k}^{\pm} \bar{\Delta}_m]$$

$$S_p^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) = \mp 2 (\sin 2\xi\theta_{pk} \pm \sin 2\theta_{pk})$$

$$C_p^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) = 4 [\sin^2(\xi\theta_{pk} + \pi/4 \mp \pi/4) - \sin^2\theta_{pk}]$$

$$\alpha^{\pm}(\xi, \theta) = (1 \mp \xi) [\cos(\xi - 1)\theta - \cos(\xi + 1)\theta]$$

$$\beta^{\pm}(\xi, \theta) = (1 \pm \xi) \sin(\xi + 1)\theta + (1 \mp \xi) \sin(\xi - 1)\theta$$

$$\bar{\alpha}^{\pm}(\xi, \theta) = (1 + \nu) \alpha^{\pm} + 4 \cos(\xi + 1)\theta$$

$$\bar{\beta}^{\pm}(\xi, \theta) = (1 + \nu) \beta^{\pm} - 4 \sin(\xi + 1)\theta$$

$$C_{2k}^{\pm}(\xi, \theta_{2k}) = \sin 2\xi\theta_{2k} \pm \xi \sin 2\theta_{2k}$$

$$\bar{\Delta}_k(\xi, \theta_{2k}) = \sin^2 \xi\theta_{2k} - \xi^2 \sin^2 \theta_{2k}$$

$$\gamma_k(\xi, \theta_{2k}) = (1 + \nu_k)^2 \bar{\Delta}_k - 4(1 + \nu_k) \sin^2 \xi\theta_{2k} + 4$$

$$\delta_k^{\pm}(\xi, \theta_{2k}) = (1 + \nu_k) \bar{\Delta}_k - 2(\sin^2 \xi\theta_{2k} \pm \xi \sin^2 \theta_{2k})$$

$$\delta=\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2},\quad \delta_k=\frac{4}{\delta E_k},\quad \left(p=\begin{cases}1, & k=1\\ 3, & k=2\end{cases}\right) \tag{2.2}$$

$$\Delta_p(\xi)=4C_{2k}^{*}(\xi,\theta_{pk})$$

$$\Delta_2(\xi)=4\{\delta E_1E_2[\delta\tilde\Delta_1\tilde\Delta_2+4(\tilde\Delta_1\sin^2\xi\theta_{22}/E_1-\tilde\Delta_2\sin^2\xi\theta_{21}/E_2)]+$$
$$+4(E_1\tilde\Delta_1/E_2+E_2\tilde\Delta_2/E_1)-8[\cos(\theta_{21}-\theta_{22})\xi\sin\xi\theta_{21}\sin\xi\theta_{22}-$$
$$-\xi\cos(\theta_{21}-\theta_{22})\sin\theta_{21}\sin\theta_{22}]\} \tag{2.3}$$

Функции $\bar f_{pk}(\xi)$ определяются по формулам

$$\bar f_{pk}(\xi)=a_k^{-\xi}\int\limits_0^{a_k} f_{pk}(r_p)\,r_p^{\xi}dr_p \tag{2.4}$$

Удовлетворяя условиям симметрии (1.1) и условиям контакта (1.2), после ряда преобразований для определения новых неизвестных функций получим следующие сингулярные интегральные уравнения:

$$X_{pk}(s)-\int\limits_{L_2}[Y_{21}(\xi)K_{1m}^{(l(k))}(s,\xi)+Y_{21}K_{1m}^{(l(k)+1)}+Y_{22}K_{1m}^{(l(k)+2)}+Y_{22}K_{1m}^{(l(k)+3)}]d\xi=0$$

$$Y_{nk}(s)+\int\limits_{L_1}[X_{11}K_{1n}^{(l(k))}+X_{12}K_{1n}^{(l(k)+1)}]d\xi+\int\limits_{L_3}[X_{31}K_{1n}^{(l(k)+2)}+X_{32}K_{1n}^{(l(k)+3)}]d\xi=F_{nk}(s)$$

$$\left(l(1)=1,\ l(2)=5;\ p=1,\ 3;\ n,\ k=1,\ 2;\ m=\begin{cases}1, & p=1\\ 2, & p=3\end{cases}\right) \tag{2.5}$$

Ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K_{nk}^{(j)}(s,\xi)=\frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i\Delta_q(\xi)}k_{nk}^{(j)}(s,\xi)\left(\frac{a_k}{a_2}\right)^{\xi},\quad (j=1\div 8) \tag{2.6}$$

(n, $k=1$, 2; q принимает значение 1, 2 или 3 соответственно линии L_1, L_2 или L_3 интегрирования).

Здесь $B(s,\xi)$ — бета-функция, а функции $k_{nk}^{(j)}$ определяются по формулам

$$k_{11}^{(k)}(s,\xi)=(-1)^{k+1}(\alpha_{2k}^{+}\tilde\alpha_{pk}^{-}-\beta_{2k}^{-}\tilde\beta_{pk}^{+}),\quad k_{11}^{(k+2)}=(-1)^{k}(\alpha_{2k}^{+}\alpha_{pk}^{-}+\beta_{2k}^{-}\beta_{pk}^{+})$$

$$k_{11}^{(j+4)}=\frac{1}{s-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{2k}}k_{11}^{(j)}$$

$$k_{12}^{(k)}=(-1)^{k}[\bar E_k(\alpha_{2k}^{+}\tilde\alpha_{pk}^{-}+\beta_{2k}^{-}\tilde\beta_{pk}^{+})+\alpha_E(\tilde\alpha_{pk}^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}-\tilde\beta_{pk}^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k_{12}^{(k+2)}=(-1)^{k}[\bar E_k(\alpha_{2k}^{+}\alpha_{pk}^{-}+\beta_{2k}^{-}\beta_{pk}^{+})+\alpha_E(\alpha_{pk}^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}-\beta_{pk}^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k_{12}^{(k+4)}=(-1)^{k+1}[\bar E_k(\alpha_{2k}^{-}\tilde\beta_{pk}^{+}-\beta_{2k}^{+}\tilde\alpha_{pk}^{-})+\alpha_E(\tilde\alpha_{pk}^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}+\tilde\beta_{pk}^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k_{12}^{(k+6)}=(-1)^{k+1}[\bar E_k(\alpha_{2k}^{-}\beta_{pk}^{+}-\beta_{2k}^{+}\alpha_{pk}^{-})+\alpha_E(\alpha_{pk}^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}+\beta_{pk}^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$k_{2k}^{(1)}=\beta_{pk}^{+}M_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}N_{2k}^{+},\quad k_{2k}^{(2)}=\beta_{pk}^{+}Q_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}P_{2k}^{+}$$

$$k_{2k}^{(3)}=\beta_{pk}^{+}N_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}M_{2k}^{+},\quad k_{2k}^{(4)}=\beta_{pk}^{+}P_{2k}^{-}+\alpha_{pk}^{-}Q_{2k}^{+}$$

$$k_{2k}^{(5)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(1)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(6)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(2)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(7)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(3)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$k_{2k}^{(8)}=(1+\nu_k)k_{2k}^{(4)}+4[\sin(s+1)\varepsilon_{pk}-\cos(s+1)\varepsilon_{pk}]$$

$$\bar{E}_k=(1+\nu_k)E_2/E_k,\quad \alpha_E=4E_2/E_k$$

$$\varepsilon_{k1}=\theta_{k1}-(-1)^{k-1}\pi,\quad \varepsilon_{m2}=\theta_{m2}-(-1)^{m-1}\pi$$

$$(k=1,\ 2;\quad m=2,\ 3;\quad j=1\div 4) \tag{2.7}$$

Свободные члены системы (2.5) выражаются через функции (2.2) и (2.4) следующим образом:

$$F_{nk}(s)=-\int_{\gamma_1}[\tilde{f}_{11}(\xi)F_{nk}^{(1)}(s,\xi)+\tilde{f}_{12}F_{nk}^{(3)}]d\xi-\int_{\gamma_2}[\tilde{f}_{21}F_{nk}^{(5)}+\tilde{f}_{22}F_{nk}^{(6)}]d\xi \tag{2.8}$$

Здесь

$$F_{nk}^{(j)}(s,\xi)=\frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)}f_{nk}^{(j)}(s,\xi)\left(\frac{a_k}{a_p}\right),\quad (j=1\div 8,\ k=1,\ 2)$$

$$f_{11}^{(k)}(s,\xi)=(-1)^{k+1}(\beta_{2k}^{-}C_p^{-}-\alpha_{2k}^{+}S_p^{-})$$

$$f_{11}^{(k+2)}=(-1)^k(\beta_{2k}^{-}S_p^{+}+\alpha_{2k}^{+}C_p^{-}),\quad f_{12}^{(j)}=\frac{1}{s-1}\frac{d}{d\varepsilon_{2k}}f_{11}^{(j)} \tag{2.9}$$

$$f_{21}^{(k)}=(-1)^k[\bar{E}_k(\alpha_{2k}^{+}S_p^{-}-\beta_{2k}^{-}C_p^{+})+\alpha_E(S_p^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}+C_p^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{21}^{(k+2)}=(-1)^k[\bar{E}_k(\alpha_{2k}^{+}C_p^{-}+\beta_{2k}^{-}S_p^{+})+\alpha_E(C_p^{-}\cos(s+1)\varepsilon_{2k}-S_p^{+}\sin(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{22}^{(k+4)}=(-1)^k[\bar{E}_k(\beta_{2k}^{+}S_p^{-}+\alpha_{2k}^{-}C_p^{+})-\alpha_E(S_p^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}-C_p^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

$$f_{22}^{(k+6)}=(-1)^k[\bar{E}_k(\beta_{2k}^{+}C_p^{-}-\alpha_{2k}^{-}S_p^{+})-\alpha_E(C_p^{-}\sin(s+1)\varepsilon_{2k}+S_p^{+}\cos(s+1)\varepsilon_{2k})]$$

В формулах (2.7) и (2.9) первые множители зависят только от аргументов (s, ε), а вторые—от (ξ, θ). Если аргумент в одном множителе задан в явном виде, то второй множитель зависит только от (ξ, θ).

Систему уравнений (2.5) путем исключения неизвестных Y_{nk} (n, $k=1,2$) или неизвестных X_{pk} ($p=1$, 3; $k=1$, 2), как это сделано в работе [1], можно привести к двум неизвестным регулярным системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из-за громоздких формул и уравнений эти системы здесь не приводятся.

Если неизвестные функции представить в виде рядов Фурье по приведенным, ортогональным на линии L_p, многочленам Чебышева-Эрмита

$$X_{pk}(\xi)=\Gamma(1+\xi)\sum_{q=0}^{\infty}X_{pk}^{(q)}\bar{H}_q(\xi),\quad Y_{nk}(\xi)=\Gamma(1+\xi)\sum_{q=0}^{\infty}Y_{nk}^{(q)}\bar{H}_q(\xi) \tag{2.10}$$

то систему (2.5) можно привести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений

$$X_{pk}^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}\left[A_{2m.l(k)}^{(q.l)}Y_{11}^{(q)}+A_{2m.l(k)+2}^{(q.l)}Y_{21}^{(q)}+A_{2m.l(k)+1}^{(q.l)}Y_{12}^{(q)}+A_{2m.l(k)+3}^{(q.l)}Y_{22}^{(q)}\right]=0$$

$$Y_{nk}^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}\left[A_{1n.l(k)}^{(q.l)}X_{11}^{(q)}+A_{1n.l(k)+2}^{(q.l)}X_{12}^{(q)}+A_{1n.l(k)+1}^{(q.l)}X_{31}^{(q)}+A_{1n.l(k)+3}^{(q.l)}X_{32}^{(q)}\right]=F_{nk.l}$$

где (2.11)

$$A_{nk.h}^{(q.l)}=(-1)^{l+1}\int\limits_{L_v}\int\limits_{L_w}\Gamma(s-\xi+1)H_l(s)H_q(\xi)\exp[(s-c)^2]\frac{K_{nk}^{(h)}(s,\xi)}{\Delta_v(\xi)}\,ds\,d\xi$$

$$F_{nk.l}=(-1)^{l+1}i\int\limits_{L_v}F_{nk}(s)H_l(s)\exp[(s-c)^2]\Gamma^{-1}(1+s)ds$$

$$\left(v=\begin{cases}1, & n=1 \text{ и } k=1\\ 2, & n=2\\ 3, & n=1 \text{ и } k=2\end{cases}\quad w=\begin{cases}1, & n=2 \text{ и } k=1\\ 2, & n=1\\ 3, & n=2 \text{ и } k=2\end{cases};\quad h=1\div 8;\ l=0,1\ldots\right)$$

(2.12)

Возможно, что система (2.11) не регулярна. Но исключением неизвестных X_{pk} (Y_{nk}) и преобразованием системы получим новую вполне регулярную систему для определения неизвестных Y_{nk} (X_{pk}).

После решения уравнений (2.5) или (2.11) искомые напряжения будем вычислять по формулам [8]. Например, приведем выражения нормального напряжения σ_r в точках отрезка O_1O_2 ($\bar\varphi_{11}=\varphi_{21}=0$; $r_1+r_2=a_1$) и касательного контактного напряжения $\tau_{r\theta}$, действующего на луче O_2C

$$\sigma_r^{(l)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}s[(s-1)(A_{11}+C_{11})+4C_{11}]r_1^{-s-1}ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}s[(s-1)(A_{21}+C_{21})+4C_{21}]r_2^{-s-1}ds \tag{2.13}$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}s\Phi_{21}'(s,\theta_{21})r_2^{-s-1}ds-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\left[\frac{1}{2}\Phi_{11}''(s,\bar\varphi_{11})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-s^2)\Phi_{11}(s,\bar\varphi_{11})\right]\sin2(\theta_{21}-\bar\varphi_{11})-s\Phi_{11}'(s,\bar\varphi_{11})\cos2(\theta_{21}-\bar\varphi_{11})\right\}r_1^{-s-1}ds$$

$$\bar\varphi_{11}=\operatorname{arctg}(r_2\sin\theta_{21}/(r_2\cos\theta_{21}-a_1)),\quad r_1\sin\bar\varphi_{11}+r_2\sin\theta_{21}=0$$

Определив неизвестные функции X_{pk} и Y_{nk} ($p=1,3$; $n,k=1,2$), функции $A_{pk},\ldots,D_{pk}$ и $A_{2k},\ldots,D_{2k}$ будем определять по формуле (2.1). После чего по формуле (2.13) будут вычислены напряжения. Интегралы, входящие в (2.13) будем вычислять при помощи теории вычетов. Например, если на границе тела, вдали от вершины O_2 действуют сосредоточенные силы или моменты, то все полюсы подынтегральных функций (кроме, может быть, точек $s=0, \pm 1$) будут простыми и поэтому напряжения (2.13) при $r_n < a_n$ $(n=1, 2)$ представляются в виде

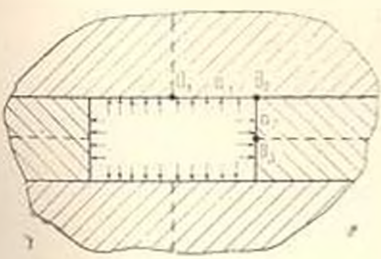
$$a_1 a_2 \sigma_r^{(1)} = \sum_{n=1}^{2} \left[\sum_{(\mathrm{Re}\,\zeta_{nk}<0)} A_{nk}^{(1)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{\zeta_{nk}+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^{(2)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{-k+1} \right]$$

$$a_1 a_2 \tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{2} \left[\sum_{(\mathrm{Re}\,\zeta_{nk}<0)} A_{nk}^{(3)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{\zeta_{nk}+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}^{(4)} \left(\frac{a_n}{r_n}\right)^{-k+1} \right] \tag{2.14}$$

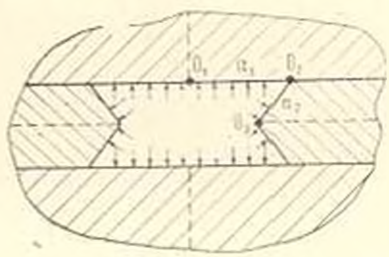
где коэффициенты $A_{nk}^{(j)}$ $(j=1 \div 4)$ определяются по известным формулам простых вычетов и зависят известным образом [8] от углов γ_n, θ_{nk}, упругих постоянных и внешней нагрузки. Вторые суммы появляются из-за того, что, как следует из (2.5), все неизвестные функции имеют полюсы в точках $s=-k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Если, хотя бы, одно из соотношений $a_n/r_n < 1$ $(n=1, 2)$, то вид второй формулы (2.14) будет меняться.

3°. В качестве численного примера рассмотрена задача о контакте двух полуплоскостей из одинаковых материалов (E_1, ν_1) и двух симметрично расположенных полубесконечных полос (E_2, ν_2) постоянной толщины. При этом отверстие в составной плоскости имеет вид: 1) прямоугольника (фиг. 3), 2) вогнутого симметричного многоугольника (фиг. 4); 3) выпуклого симметричного многоугольника (фиг. 5). Внешняя нагрузка приложена на берегах отверстия в виде равномерного давления интенсивности P. При вычислениях принято

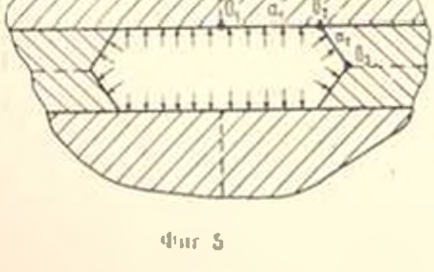
$$\nu_1 = 0{,}3, \quad \nu_2 = 0{,}25, \quad E_1/E_2 = 2, \quad 2a_1 = a_2 = 2$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

При вычислениях бесконечные системы (2.14) сначала приведены к регулярным видам, которые затем решены методом последовательных приближений. При этом во всех рассмотренных случаях сумма модулей коэффициентов при неизвестных не превышает значения 0,33.

В табл. I приводятся значения некоторых первых корней целых функций $\Delta_1(\xi)$, $\Delta_2(\xi)$ и $\Delta_3(\xi)$.

Таблица 1

	Δ_1	Δ_3	Δ_2
1	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	0,6450 1,9989 ± 0,3009 i 2,9958 ± 0,3041 i 3,9998 ± 0,3239 i 4,9999 ± 0,3243 i 5,9999 ± 0,3248 i
2	совпадает с первым случаем	2,7396 ± 1,1190 6,8452 ± 1,6816 10,8856 ± 1,9702 14,9080 ± 2,1673 18,9225 + 2,3174 22,9327 − 2,4368	0,7454 ± 0,4170 i 1,9731 ± 0,2216 i 3,1953 ± 1,1062 i 3,9998 ± 0,3231 i 4,5571 ± 1,2417 i 4,9953 + 0,3167 i
3	совпадает с первым случаем	0,5450 1,6292 ± 0,2312 2,9718 ± 0,3739 4,3104 ± 0,4554 5,6471 ± 0,5136 6,9829 ± 0,5591	0,8394 1,9735 ± 0,2302 i 3,0067 ± 0,3006 i 4,0000 ± 0,3244 i 4,9947 ± 0,3269 i 5,9988 ± 0,3331 i

В табл. 2 приводятся значения интенсивностей напряжений σ_φ около точки O_2 при разных направлениях площадки, на которой действует σ_φ. При первых пяти значениях φ площадка находится в первом материале, а при остальных—во втором.

Таблица 2

Коэффициенты интенсивности контактного напряжения

1		2		3	
φ	K_φ	φ	K_φ	φ	K_φ
60°	0,030	60°	0,084	60	0,024
85°	0,125	85	0,248	85	0,087
105°	0,213	105°	0,347	105	0,143
130	0,225	130	0,485	130°	0,154
180°	0,254	180	0,564	180	0,158
60	0,161	90	0,483	30	0,112
45	0,038	60	0,342	20°	0,094
30	0,013	30°	0,045	10	0,012

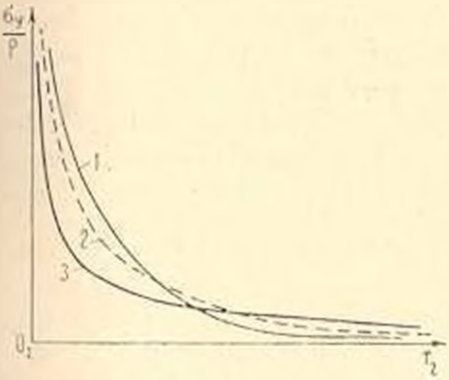
В табл. 3 приведены значения некоторых первых коэффициентов $A_{nk}^{(3)}$ ($n=1, 2, 3$; $k=1$) разложения (2.14) нормального контактного напряжения σ_φ, действующего около угловой точки O_2.

Таблица 3

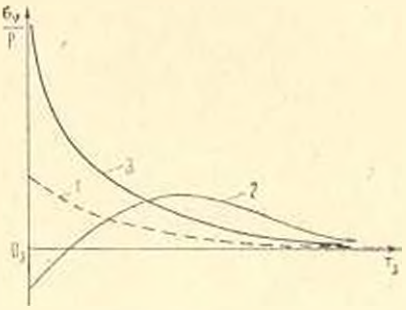
Коэффициенты разложения $A_{nk}^{(j)}$ ($n=1, 2, 3$; $k=1$) контактного напряжения σ_y

1	2	3
0,254	0,548−0,174i	0,158
−0,165+0,118i	−0,318−0,109i	0,047−0,019i
−0,079+0,028i	0,212−0,074i	−0,012−0,009i

Вычисления показывают, что наибольшая концентрация контактного напряжения σ_y для рассмотренных случаев возникает, если отверстие имеет вид, указанный на фиг. 4.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 приведены графики распределения напряжения σ_y, действующего на одной из осей симметрии O_3B. Вычисления показывают, что появление угловой точки существенно отражается на распределении напряжения σ_y в непосредственной близости от точки O_3.

Как видно из табл. 2, максимальный коэффициент интенсивности $(K_y) = |A_{21}^{(1)}|$ при особенности получается на площадках контакта двух материалов. На других площадках в этой же точке O_2 коэффициенты интенсивности напряжения σ_2 уменьшаются по мере приближения к границам.

ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԽՆԴԻՐ

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ռ. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է տարբեր նյութերից երկու հատված սեպերի համար առաձգականության հարթ կոնտակտային խնդիրը, որոնք միացված են այնպես, որ կազմում են երկու վերջավոր և երկու կիսաանվերջ կողմեր ունեցող անվերջ տիրույթ (նկ. 1)։ Տիրույթի վերջավոր կողմերի վրա տրված են լարումները, իսկ նրա մնացած եզրերի վրա բավարարվում են սիմետրիայի պայմանները։

Խնդիրը լուծված է Մելլինի ձևափոխության կիրառմամբ ընդհանրացված սուպերպոզիցիայի մեթոդով։ Խնդրի լուծումը բերվել է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Դիտարկված են թվային օրինակներ։

PROBLEM FOR THE COMPOSED PLANE, WEAKENED BY THE POLYGOHAL HOLE

A. A. BABLOYAH, R. G. TADEVOSIAN

S u m m a r y

The plane contact problem of the theory of elasticity has been considered for double truncated wedges of warious material linked so as to make an infinite area with two finite and two semi-infinite sides (Fig. 1). The stresses are given on the finite sides of the area and on the other sides the conditions of symmetry are satisfied. The problem is solved by means of the method of generalized superposition with the use of Mellin transform. The problem is reduced to quasi-complete regular infinite systems of linear algebraic equations. Numerical exemples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев.—Докл. АН Арм. ССР, 1977, т. *65*, №5.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев.—Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. *62*, № 1.
3. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко-защемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.—Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболоч. и пласт., М.: Наука, 1970.
4. *Злагин А. Н., Уфлянд Я. С.* Осесимметричная контактная задача о вдавливании упругого цилиндра в упругий слой.—ПММ, 1976, т. *40*, вып. 1.
5. *Нуллер Б. М.* О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. *120*
6. *Нуллер Б. М.* О новых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. *124*.
7. *Тадевосян Р. Г.* Плоская задача для бесконечного составного клина.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. *36*, №6.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—Л.: Наука, 1967.
9. *Bogy D. B.* The plane Solution for loined Dissimilar Elastic Semi-Strips under, Tension—J. of Appl. Mech., 1975, v. 42 (Tr. ASSME, vol. 97), Ser. E, 93.
10. *Westman R. A.* Geometrical Effects in Adhesive Joints. Intern. Journ. Eng. Sci. 1975, vol. 13, 369—391.
11. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача для соединения из трех полуполос из различных материалов и для плоскости с отверстием в виде многоугольника.—Тезисы докладов, Всесоюз. конф. по теории упругости. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1979.

Ленинаканский педагогический институт
им. М. Налбандяна

Республиканский Вычислительный Центр МСХ АрмССР

Поступила в редакцию
2.III. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ПОЛУПЛОСКОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПО ГЛУБИНЕ

АЙЗИКОВИЧ С. М., АЛЕКСАНДРОВ В. М.

Изучается влияние неоднородности основания на распределение контактных напряжений под круглым штампом и его осадку, определяются контактные напряжения под полосовым штампом на неоднородном основании. Задачи поставлены в связи с проблемой расчета фундаментов на химически закрепленных насыпных или просадочных грунтах (круглая жесткая плита, ленточный фундамент).

1. Методы решения основных краевых задач теории упругости для многослойных оснований хорошо разработаны. Для произвольных же непрерывно-неоднородных по глубине сред здесь приходится преодолевать значительные трудности, так как необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В связи с этим в большинстве известных работ рассматривались контактные задачи для специальных зависимостей свойств среды от глубины (степенная, экспоненциальная, линейная). Но при этих зависимостях есть точки среды, в которых модуль упругости обращается в нуль или бесконечность, что неестественно для многих практических задач.

В общем случае произвольной непрерывной неоднородности в ряде работ применялся приближенный подход, основанный на замене непрерывно-неоднородной среды многослойным пакетом [1, 2, 3].

Следует заметить, что метод аппроксимации произвольной непрерывно-неоднородной среды многослойным пакетом не всегда дает удовлетворительные результаты и нуждается в дополнительном обосновании [4].

Смешанные задачи для многослойного (двухслойного) основания рассматривались в работах [1—3, 5—13] и других. При построении решения интегрального уравнения в указанных работах использовались методы: а) коллокации по чебышевским узлам; б) сведения к линейной системе путем аппроксимации полиномом регулярной части ядра интегрального уравнения; в) асимптотический (метод больших λ); г) сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и решения его методом механических квадратур, то есть использовались методы эффективные для достаточно больших значений λ (λ—отношение толщины слоя к полуширине (радиусу) штампа).

Заметим, что трансформанты ядер интегральных уравнений непрерывно-неоднородных сред и многослойных отличаются по свойствам, поэтому и структура их решений в общем случае различается. Ниже изложим способ численного построения трансформанты ядра для непрерывно-неоднородных по глубине полупространства и полуплоскости [14] и методы решения возникающих интегральных уравнений как для слоистых, так и непрерывно-неоднородных по глубине сред. Будем рассматривать следующие задачи: задачу 1—плоскую задачу о вдавливании недеформируемого штампа в неоднородную полуплоскость и задачу 2—осесимметричную задачу о вдавливании недеформируемого кругового штампа в неоднородное полупространство. Полагаем, что неоднородное полупространство (полуплоскость) представляет неоднородный слой (полосу), сцепленный с однородным полупространством (полуплоскостью), для непрерывно-неоднородной среды и пакет слоев (полос), сцепленный с однородным полупространством (полуплоскостью), для дискретно-неоднородной. На границе между неоднородным слоем (полосой) и однородным полупространством (полуплоскостью) предполагаем выполненными условия сопряжения по напряжениям и перемещениям. Требуется определить распределение контактных напряжений под штампом, связь между вдавливающей силой и осадкой штампа (задача 2).

Математически постановка задач 1—2 запишется следующим образом.

Задача 1. Коэффициенты Ляме Λ и M полуплоскости с глубиной y изменяются по закону:

$$1.\ \Lambda=\Lambda_0(y),\quad M=M_0(y),\quad 0\geqslant y\geqslant -H$$

$$2.\ \Lambda=\Lambda_1=\Lambda_0(-H),\ M=M_1=M_0(-H),\ -H>y>-\infty \tag{1.1}$$

Граничные условия следующие:

$$y=0,\quad \tau_{xy}^{(1)}=0,\quad \begin{cases} \sigma_y^{(1)}=0, & |x|>a \\ v^{(1)}=-[\alpha+\beta x-\gamma(x)]=f(x), & |x|\leqslant a \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha+\beta x$—перемещение штампа под действием силы P и момента M, $\gamma(x)$—форма основания штампа

$$y=-H:\ \tau_{xy}^{(1)}=\tau_{xy}^{(2)},\quad \sigma_y^{(1)}=\sigma_y^{(2)},\quad u^{(1)}=u^{(2)},\ v^{(1)}=v^{(2)} \tag{1.3}$$

u и v—смещения вдоль осей ox и oy соответственно. При $(|x|,\ -y)\to\infty$ напряжения в полуплоскости исчезают. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_y^{(1)}=-q(x);\quad (y=0,\quad |x|\leqslant a) \tag{1.4}$$

и связь между P, M и α, β при условии $\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi)d\xi=P$

Задача 2. Коэффициенты Ляме $\Lambda(z)$ и $\mathrm{M}(z)$ полупространства с глубиной z изменяются по закону (1.1). Граничные условия имеют вид:

$$z=0, \quad \tau_{zr}=\tau_{z\varphi}=0, \quad \begin{cases} \sigma_z=0, & r>a \\ w=-\delta(r)=-[\delta-\psi(r)], & r\leqslant a \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь δ—перемещение штампа в направлении оси z, $\psi(r)$—форма поверхности основания штампа. При $(r, -z)\to\infty$ напряжения исчезают

$$z=-H: \sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{zr}^{(1)}=\tau_{zr}^{(2)}, \quad w_z^{(1)}=w_z^{(2)}, \quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)}$$

Требуется определить перемещение штампа и распределение нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^{(1)}=-q(r); \quad (z=0; \quad r\leqslant a)$$

Задача 1 сводится к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\int_{0}^{\infty} L(u)|u|^{-1}\cos ut\, du\, d\xi=\pi\theta_0\tilde{f}(x), \quad |x|\leqslant 1; \quad t=\frac{\xi-x}{\lambda}; \quad q(\xi)=\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) \tag{1.6}$$

$$f(x)=\tilde{f}(xa^{-1}); \quad \theta(y)=2\mathrm{M}(y)[\Lambda(y)+\mathrm{M}(y)][\Lambda(y)+2\mathrm{M}(y)]^{-1}; \quad \theta_0=\theta(0)$$

Интегральное уравнение для задачи 2 имеет вид:

$$\int_{0}^{1}\tau(\rho)\rho d\rho\int_{0}^{\infty} L(u)J_0\left(\frac{ur}{\lambda}\right)J_0\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right)du=\lambda\theta_0\bar{\delta}(r), \quad r\leqslant 1 \tag{1.7}$$

Здесь $\lambda=H/a$, H—толщина слоя, a—полуширина (задача 1) или радиус (задача 2) штампа, $q(r)=\tau(ra^{-1})$, $\bar{\delta}(r)=\delta(ra^{-1})$.

Выражение для $L(u)$ получаем из уравнений равновесия, использовав преобразование Фурье для задачи 1 (соответственно Ханкеля, для задачи 2, $z=y$)

$$L(u)=d_1(u)a_1^{(2)}(u)+d_2(u)a_2^{(3)}(u); \quad \bar{a}_i(u, y)=(a_i^{(1)}(u), a_i^{(2)}(u), a_i^{(3)}(u), a_i^{(4)}(u))$$

$$i=1, 2$$

Векторы $\bar{a}_i(u, y)$, $(i=1, 2)$ находятся численно из следующих задач Коши при фиксированном u:

$$d\bar{a}_i/dy=\bar{A}\bar{a}_i-|u|\bar{a}_i, \quad -H\leqslant y\leqslant 0, \quad i=1, 2$$

$$1. \ \bar{a}_1(u, y)=(1, u, 1, u); \quad (y=-H)$$

$$2. \ \bar{a}_2(u, y)=\left(uy, u^2y+u, \frac{-\Lambda+3\mathrm{M}}{\Lambda+\mathrm{M}}+uy, u\left(\frac{\Lambda+3\mathrm{M}}{\Lambda+\mathrm{M}}+uy+1\right)\right)$$

$$(y=-H)$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^2(2\mathrm{M}+\Lambda)\mathrm{M}^{-1} & -\mathrm{M}'\mathrm{M}^{-1} & -u\mathrm{M}'\mathrm{M}^{-1} & -u(\mathrm{M}+\Lambda)\mathrm{M}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u\Lambda'(2\mathrm{M}+\Lambda)^{-1} & u(\mathrm{M}+\Lambda)(2\mathrm{M}+\Lambda)^{-1} & u\mathrm{M}(2\mathrm{M}+\Lambda)^{-1}(2\mathrm{M}'+\Lambda')(2\mathrm{M}+\Lambda)^{-1} & \end{pmatrix}$$

Функции $d_1(u)$ и $d_2(u)$ определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$d_1[a_1^{(2)}+ua_1^{(3)}]+d_2[a_2^{(2)}+ua_2^{(3)}]=0$$

$$d_1\{-\Lambda ua_1^{(1)}+(\Lambda+2M)a_1^{(4)}\}+d_2\{-\Lambda ua_2^{(1)}+(\Lambda+2M)a_2^{(4)}\}=\theta_0 u; \quad (y=0)$$

Трансформанты ядер $L(u)$ обладают следующими свойствами [4]:

$$L(u)=A+B|u|+O(u^2), \; (u\to 0); \; A=\lim_{y\to\infty}\theta(0)\theta^{-1}(y) \tag{1.8}$$

$$L(u)=1+D|u|^{-1}+O(u^{-2}), \quad (u\to\infty); \quad B, D-\text{const} \tag{1.9}$$

при условиях:

$$\min_{y\in(0,-\infty)}\theta(y)=c_1>0; \quad \max_{y\in(0,-\infty)}\theta(y)=c<\infty; \; \lim_{y\to-\infty}\theta(y)=\text{const} \tag{1.10}$$

Для многослойных сред свойства функций податливости, аналогичные (1.8), отмечены в работе [15]. Свойства (1.8) означают, что значение $L(0)$ не зависит от того, каким образом изменяются модули упругости в слое от $y=0$ до $y=-H$, а определяется только их значениями при $y=0$ и $y=-H$. Графически это будет выглядеть так, что если множество кривых, описывающее некоторые законы изменения $\theta(y)$ с глубиной, имеют одинаковые значения на поверхности полупространства и на глубине H, то графики соответствующих трансформант $L(u)$ задач 1 и 2 будут выходить из одной общей точки $L(0)=\theta(0)\theta^{-1}(-H)$ и сходиться в одну точку $L(\infty)=1$.

Замечание 1.1. В случае, если рассматривать не неоднородную полуплоскость (полупространство), а полосу (слой), лежащую на жестком основании, то в этом случае $L(0)=0$. Этим свойством обладают и все типы оснований, для которых $\theta(-H)=\infty$, $(H\to\infty)$. В данной работе не будут затрагиваться методы решения таких задач. Далее будут строиться методы решения классов интегральных уравнений, для которых имеют место свойства (1.8), (1.9), причем $A\neq 0$. К таким уравнениям приводят контактные задачи как для непрерывно-неоднородного, так и многослойного полупространства (полуплоскости), причем законы изменения коэффициентов Ляме удовлетворяют условиям (1.10).

Замечание 1.2. Условия (1.10) являются также достаточными для того, чтобы можно было применить схему численного построения $L(u)$, основанную на том, что, хотя бы начиная с достаточно больших значений глубины H, можно построить точное или асимптотическое [14, 16, 17] общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводят уравнения равновесия в результате применения к ним преобразования Фурье (задача 1) или Ханкеля (задача 2).

2. Некоторые аппроксимации $L(u)$.

Обозначим:

$$L_0(u)=1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I} b_i(\exp(-\varkappa_i|u|)+\exp(-\bar{\varkappa}_i|u|)); \qquad L_+^{M}(u)=\sum_{k=1}^{M} c_k|u|(u^2+D_k^2)^{-1} \tag{2.1}$$

$$L_N(u)=\prod_{i=1}^{N}(u^2+A_i^2)(u^2+B_i^2)^{-1};\quad (B_i-B_k)(A_i-A_k)\neq 0;\quad (i\neq k) \tag{2.2}$$

Имеем при $u\to 0$

$$L_0(u)=1+\sum_{j=1}^{L} b_j-\sum_{j=1}^{L} b_j(x_j+\bar{x}_j)\,|u|+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L} b_j(x_j^2+\bar{x}_j^2)u^2+O(|u^3|) \tag{2.3}$$

$$L_\Sigma^M(u)=\sum_{k=1}^{M} c_k D_k^{-2}|u|+O(|u|^3);\ L_N(u)=\prod_{i=1}^{N} A_i^2B_i^{-2}+O(u^2) \tag{2.4}$$

при $u\to\infty$

$$L_0(u)=1+0(\exp(-\varkappa u)),\quad \varkappa=\min(\operatorname{Re}\varkappa_j);\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ L \tag{2.5}$$

$$L_\Sigma^M=\sum_{j=1}^{M} c_k|u|^{-1}+0(|u|^{-3});\quad L_N(u)=1+0\,(u^{-2}) \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$L_1(u)=L_0(u)+L_\Sigma^M(u);\quad L_2(u)=L_N(u)+L_\Sigma^M(u) \tag{2.7}$$

Покажем, что выражениями вида (2.7) можно аппроксимировать $L(u)$ со свойствами (1.8), (1.9). Для этого используем лемму [18, 19].

Лемма 2.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси функция $\varphi(u)$ обращается в нуль на бесконечности Тогда она допускает приближение в $C(-\infty,\infty)$ рядами из функций вида $\varphi_k(u)=(u^2+D_k^2)^{-1}$.

Выберем постоянные b_j ($j=1,\ldots,L$), A_i, B_i ($i=1,\ldots,N$) в (2.3), (2.4) так, чтобы

$$1+\sum_{j=1}^{L} b_j=A,\quad \prod_{i=1}^{N} A_i^2B_i^{-2}=A \tag{2.8}$$

Рассмотрим функции

$$L_\Sigma^1(u)=[L(u)-L_0(u)]|u|^{-1};\quad L_\Sigma^2(u)=[L(u)-L_N(u)]|u|^{-1} \tag{2.9}$$

На основании свойств (1.8), (1.9) и (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) и условий (2.9) следует, что $L_\Sigma^1(u)$ и $L_\Sigma^2(u)$ удовлетворяют условиям леммы 2.1. Это означает, что справедливо представление

$$L_\Sigma^1(u)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(u^2+D_k^2)^{-1};\quad L_\Sigma^2(u)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(u^2+\bar{D}_k^2)^{-1} \tag{2.10}$$

то есть имеет место

Теорема 2.1. При условии, что трансформанта ядра интегрального уравнения $L(u)$ обладает свойствами (1.8), (1.9), она допускает аппроксимацию выражениями вида (2.7)

3. Асимптотические решения задачи 1.

а) Метод больших λ ($\lambda\geqslant 2$).

Используя [20], на основании (1.9) видим, что ядро уравнения (1.6)

$$k(t)=\int\limits_0^\infty L(u)u^{-1}\cos utdu;\quad L(u)=1+c_1u^{-1}+c_2u^{-2}+c_3u^{-3}+O(u^{-4}),\ (u\to\infty)$$

$$t=\frac{\xi-x}{\lambda}\tag{3.1}$$

с точностью до бесконечной постоянной имеет следующую структуру:

$$k(t)=-\ln|t|+a_{10}|t|+a_{11}t^2\ln|t|+a_{21}|t|^3+a_{31}t^4+O(t^4\ln|t|)\tag{3.2}$$

Здесь $c_1,\ c_2,\ c_3$ — постоянные, $a_{10}=\frac{\pi}{2}c_1;\ a_{11}=\frac{1}{2}c_2;\ a_{21}=\frac{1}{12}\pi c_3$

$$a_{31}=\frac{3}{4}c_2+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty|u^2-uL(u)+c_1u+c_2(1-e^{-u})|u^{-3}du$$

Для ядра вида (3.2) в [20] доказано, что при $\lambda\geqslant2$ решение имеет вид

$$\varphi(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\omega_{mn}(x)\lambda^{-m}\ln^n\lambda\tag{3.3}$$

Функции $\omega_{mn}(x)$, выраженные через коэффициенты a_{ij}, приведены в [20]. Таким образом, из (3.3) видно, что для больших λ в общем случае неоднородности основания асимптотическое решение представимо рядом по степеням λ^{-1} и $\ln\lambda$ в отличие от многослойного основания, где решение имеет вид ряда по степеням λ^{-2} [6].

б) Метод функционального параметра ($\lambda\geqslant1$).

Рассмотрим уравнение (1.6) с $L(u)=L_1(u)$ из (2.7). Дифференцируя обе части (1.6) по x, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left\{\lambda t^{-1}+\frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{L}b_j\left[\frac{t}{t^2+x_j}+\frac{t}{t^2+x_j^2}\right]+\frac{\pi}{2\lambda}\sum_{k=1}^{M}c_k\exp(-|t|D_k)\,\mathrm{sign}\,t\right\}d\xi=$$

$$=2\pi\theta f'(x),\ |x|\leqslant1\tag{3.4}$$

Введем параметр $\tau=\sqrt{0{,}25\lambda^2+1}-0{,}5\lambda$.

Для построения решения оказываются полезными разложения:

$$\frac{s}{s^2+\lambda^2}=\sum_{n=2,4,6}^\infty\tau^n\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1}\frac{(n-1-k)!(-1)^{\frac{1}{2}n-k+1}}{k!(n-1-2k)!}s^{n-2k-1}=\sum_{i=1}^\infty a_i\tau^{2i}\tag{3.5}$$

$$a_1=s,\quad a_2=2s-s^3;\quad a_3=s^5-4s^3-3s,\ \ldots,$$

$$\frac{\pi}{2\lambda}\sum_{k=1}^{M}c_k\exp\left(-\frac{|s|}{\lambda}D_k\right)\mathrm{sign}\,s=\sum_{k=1}^{M}\left[\frac{1}{2}\pi c_k\,\mathrm{sign}\,(s)\tau-\frac{1}{2}\pi c_kD_ks\tau^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\pi c_k+\frac{1}{4}\pi c_kD_k^2s^2\right)\mathrm{sign}(s)\tau^3-\pi c_kD_ks\left(1+\frac{1}{12}D_k^2s^2\right)\tau^4+O(\tau^5)\right]$$

Решение (3.4) ищем в виде

$$\varphi(\xi)=\sum_{i=0}^\infty\varphi_i(\xi)\tau^i\tag{3.6}$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную последовательность уравнений, из которых определяются $\varphi_i(\xi)$, $(i=1, 2, \ldots)$.

Этот метод для ряда задач гидродинамики позволил получить решение для всего диапазона значений характерного геометрического параметра. Для рассматриваемых интегральных уравнений в связи с более сложной структурой ядра такого результата добиться не удается, хотя диапазон применимости этого метода несколько шире, чем метода «больших λ». Использование аналитической аппроксимации трансформанты ядра вида (2.7) позволяет использовать метод для произвольного закона неоднородности вида (1.1), когда трансформанта ядра $L(u)$ строится численно.

Для контроля точности асимптотических формул может быть использован метод ортогональных полиномов или метод коллокации по чебышевским узлам. Метод коллокации по чебышевским узлам ($\lambda \geqslant 1$) [22, 23] удобно применять к уравнению (1.6), преобразованному к виду (3.4). Реализация метода производится аналогично [22]. Представление ядра интегрального уравнения в виде (3.4) позволяет значительно уменьшить время решения задачи на ЭВМ, так как на основании теоремы 2.1 можно показать, что величина $\varepsilon(t)<\varepsilon_0$

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|L(u)-1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L}b_j(\exp(-\varkappa_j|u|)-\exp(-\bar{\varkappa}_j|u|))+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\frac{c_k|u|}{u^2+D_k^2}\Big|\frac{\sin ut}{\lambda}\,du$$

при надлежащем выборе коэффициентов аппроксимации в выражении (2.7), где ε_0 — наперед заданная малая величина и ею можно пренебречь.

в) Двухстороннее асимптотическое решение задачи I при малых и больших значениях λ $(\lambda\to 0,\ \lambda\to\infty)$.

В работе [24] доказаны существование и единственность решения интегрального уравнения задачи I при $L(u)$ вида (2.2). Представим правую часть уравнения (1.6) в виде ряда Фурье (не нарушая общности, считаем $f(x)$ — четная функция), имеем

$$\pi\theta_0 f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\pi x$$

Используя метод работы [25], получим выражение для напряжений [24]

$$\tau(x)=P\pi^{-1}(1-x^2)^{-0.5}+\sum_{l=1}^{N}C_l\Phi(A_l\lambda^{-1}, x)-\sum_{k=1}^{\infty}a_k k\pi L_N^{-1}(k\pi)F(k\pi, x)$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi(A, x)=-\frac{I_1(A)}{\sqrt{1-x^2}}+A\int\limits_x^1\frac{I_0(A)\operatorname{ch}A(\alpha-x)-I_1(A)\operatorname{sh}A(\alpha-x)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha$$

$$F(l, x) = -\frac{J_1(l)}{\sqrt{1-x^2}} + l\int\limits_x^1 \frac{J_0(l)\cos l(\alpha-x)+J_1(l)\sin l(\alpha-x)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha$$

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} C_i S\left(\frac{A_i}{\lambda};\ \frac{B_k}{\lambda}\right) + PK_0\left(\frac{B_k}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{B_k}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m m\pi}{L_N(m\pi)} Z\left(m\pi;\ \frac{B_k}{\lambda}\right) = 0 \quad (3.7)$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

$$S(A; B) = [AI_0(A)K_1(B) + BI_1(A)K_0(B)](A^2-B^2)^{-1}$$

$$Z(m; B) = [mJ_0(m)K_1(B) + J_1(m)BK_0(B)](B^2+m^2)^{-1}$$

Очевидно, система (3.7) разрешима, если A_i, B_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ удовлетворяют условиям (2.2).

В общем случае $L(u)$ вида (2.7) решение уравнения (1.6) строится методом последовательных приближений. Перепишем уравнение (1.6) через операторы в виде

$$\Pi_N\varphi + \Sigma_M\varphi = f \tag{3.8}$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $L(u)$, принадлежащей классу A, будем также обозначать через A_i, B_i. В (3.8 оператор Π_N соответствует в уравнении (1.6) функции $L(u)$ вида (2.2), а $\Sigma_M - L(u)$ вида $L_1^M(u)$ в (2.1). Не нарушая общности, полагаем $M = 1$, имеем

$$\Sigma_1\varphi \overset{\text{Def}}{=} c\pi D^{-1}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\exp\left(-\frac{D}{\lambda}|\xi - x|\right)d\xi \tag{3.9}$$

Представим $\Sigma_1\varphi$ в виде ряда

$$\Sigma_1\varphi = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos k\pi x \tag{3.10}$$

Коэффициенты C_k находятся по формулам

$$c_k = \frac{4\pi c\lambda^{-1}}{D^2\lambda^{-2}+(k\pi)^2}\left|(-1)^{k+1}\exp\left(-\frac{D}{\lambda}\right)\int\limits_0^1 \varphi(\xi)\operatorname{ch}\frac{D}{\lambda}\xi\,d\xi + \int\limits_0^1 \varphi(\xi)\cos k\pi\xi\,d\xi\right|$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.11}$$

Используя (3.11), получим следующие оценки:

$$\max_{x\in(-1,1)} |\Sigma_1(\varphi)\sqrt{1-x^2}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|c_k| \leqslant \lambda M^*, \quad \lambda\to 0 \quad (\lambda < \lambda^*) \tag{3.12}$$

$$\max_{x\in(-1,1)} |\Sigma_1(\varphi)\sqrt{1-x^2} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|c_k| < \lambda^{-1}M^0, \ \lambda\to\infty \ (\lambda > \lambda^0) \tag{3.13}$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ. Из (3.12) и (3.13) следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [26]. На основании этого, применяя к уравнению

$$\tau+\Pi_N^{-1}\Sigma_M\tau=\Pi_N^{-1}f \tag{3.14}$$

принцип Банаха сжатых отображений, можно получить доказательство существования и единственности решения уравнения (3.8) [24] при $0<\lambda<\lambda^*$ и $\lambda>\lambda^0$, где λ^* и λ^0—некоторые фиксированные значения.

Лемма 3.1 [2.7]. Пусть $f(x)$—непрерывная периодическая функция, обладающая абсолютно интегрируемой производной (которая может и не существовать в отдельных точках). Тогда ряд Фурье для $f'(x)$ может быть получен из ряда Фурье функции $f(x)$ почленным дифференцированием.

Применим лемму 3.1 к выражениям (3.9), (3.10), имеем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} c_k k\pi \sin k\pi x=\frac{c\pi}{\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{D}{\lambda}|\xi-x|\right)\operatorname{sign}|\xi-x|\,d\xi \tag{3.15}$$

Используя неравенство Бесселя, получим из (3.15) оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k k\pi)^2<\left(\frac{c\pi^2}{\lambda}\right)\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{D}{\lambda}|\xi-x|\right)\operatorname{sign}|\xi-x|\right)^2 dx\leqslant\frac{c^*}{\lambda^2} \tag{3.16}$$

где c^* не зависит от λ. Данная оценка представляет интерес при больших λ.

Замечание 3.1. При численной реализации значительного расширения диапазона применимости изложенного метода по λ можно добиться путем улучшения приближения $L(u)$ за счет функций вида (2.2).

Данный метод показал себя наиболее эффективным из всех рассмотренных выше.

4. Асимптотические решения задачи 2.

а) Единственность решения задачи 2.

Лемма 4. Если функции $L(u)$ являются трансформантами ядер интегральных уравнений задачи 2, то для всех $u\in(0,\infty)$ имеют место неравенства

$$0<c_1=\min_{z\in(0,-H)}\theta(z)\theta^{-1}(-H)\leqslant L(u)\leqslant\max_{z\in(0,-H)}\theta(z)\theta^{-1}(-H)=c_2<\infty \tag{4.1}$$

Справедливость леммы 4.1 нетрудно установить, используя для рассматриваемых задач соотношения (1.16).

Теорема 4.1 Если имеют место условия леммы 4.1, то в $L_p(-1,1)$ $(2>p>1)$ интегральные уравнения, соответствующие задаче 2, не могут иметь более одного решения.

Доказательство следует непосредственно из результатов работ [28,29].

б) Асимптотическое решение при больших значениях λ $(\lambda\geqslant 2)$. Используя соотношения

$$T(\alpha)=\int_{0}^{1}\tau(\rho)J_0(\alpha\rho)\rho d\rho;\quad \tau(r)=\int_{0}^{\infty}T(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha \tag{4.2}$$

(1.7) можно переписать в виде парного уравнения

$$\int\limits_0^\infty T(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(\gamma r)d\gamma=\theta_0\bar{\delta}(r),\ (r\leqslant 1);\qquad \int\limits_0^\infty T(\gamma)J_0(\gamma r)\gamma d\gamma=0,\quad (r>1)\tag{4.3}$$

С помощью операторов

$$U_1^t\varphi(r)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{r\varphi(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr;\quad U_2^t\varphi(r)=\int\limits_t^\infty\frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-t^2}}dr\tag{4.4}$$

представим (4.3) в виде

$$\int\limits_0^\infty T(\gamma)L(\lambda\gamma)\cos\gamma t d\gamma=g(t);\ (t\leqslant 1);\ \int\limits_0^\infty T(\gamma)\cos\gamma t=0,\ (t>1);\quad g(t)=\theta_0 U_1^t\bar{\delta}(r)\tag{4.5}$$

Преобразуя (4.5) аналогично [30], получим следующее уравнение относительно вспомогательной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)-\frac{1}{\pi\lambda}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)P\left(\frac{t-\lambda}{\lambda}\right)d\tau+g(t),\quad |t|\leqslant 1\tag{4.6}$$

$$\tau(r)=-\frac{2d}{\pi dr}r\int\limits_r^1\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau\sqrt{\tau^2-r^2}};\quad P(y)=\int\limits_0^\infty[1-L(u)]\cos uydu;\quad y=\frac{t-\tau}{\lambda}\tag{4.7}$$

Выясним структуру ядра $P(y)$. Из (1.8), (1.9) имеем

$$M(\gamma)=L(\gamma)-1=(A-1)+B\gamma+C\gamma^2+0(\gamma^3),\quad (\gamma\to 0)\tag{4.8}$$

$$M(\gamma)=(L(\gamma)-1)=D\gamma^{-1}+E\gamma^{-2}+J\gamma^{-3}+0(\gamma^{-4}),\quad (\gamma\to\infty)\tag{4.9}$$

На основании свойств (4.8), (4.9), используя [20], для $P(y)$ получим следующее асимптотическое представление:

$$P(y)=D\ln|y|+\frac{\pi E}{2}|y|-a_{30}-\frac{J}{2}y^2\ln|y|+a_{31}y^2\tag{4.10}$$

$$a_{30}=\int\limits_0^\infty\frac{[L(u)-1]u-D(1-e^{-u})}{u}du;\quad a_{31}=\frac{3}{4}J-\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty[Du^2-$$

$$-u^3(L(u)-1)+Eu+J(1-e^{-u})]\frac{du}{u}$$

Отсюда вытекает, что решение уравнения (4.6) следует искать в виде

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\varphi_{mn}(t)\lambda^{-m}\ln^n\lambda\tag{4.11}$$

Подставляя (4.10), (4.11) в (4.6) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln\lambda$ в правой и левой частях (4.6), получим рекуррентные соотношения для нахождения $\varphi_{mn}(t)$, из которых определяется выражение для контактных напряжений, так под плоским штампом ($\psi(r)=0$, b (1, 5)):

$$\tau(r)=\frac{2\theta_0\delta}{\pi\sqrt{1-r^2}}\left\{1-\frac{2D}{\pi}\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{2a_{30}}{\pi}\frac{1}{\lambda}+\frac{\ln\lambda}{\lambda}\left[\frac{8Da_{30}}{\pi^2}+\frac{2D^2}{\pi^2}(2\ln 2-1)\right]\right\}+$$

$$+\frac{2\theta_0\delta}{\pi}\left[\left(\frac{D}{\pi\lambda}-\frac{D^2\ln\lambda}{\pi^2\lambda^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(r)}{(2k-1)}+0(\lambda^{-2})\right)\right]$$

$$f_1(r)=t-st^{-1};\quad f_2(r)=\frac{1}{3}t^3+2st-s^2t^{-1};\ f_3(r)=\frac{1}{5}t^5+\frac{7}{2}st^3+\frac{1}{2}s^2t-s^3t^{-1}$$

$$f_4(r)=\frac{1}{7}t^7+\frac{4}{5}st^5+2s^2t^3+4s^3t-s^4t^{-1},\ \ldots\ t=(1-r^2)^{1/2},\ s=r^2$$

Связь перемещения с приложенной силой имеет вид

$$P=4a\,\theta_0\delta\left|1-\frac{2D}{\pi}\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\frac{c^*}{\lambda}-\frac{4Dc^*}{\pi}\frac{\ln\lambda}{\lambda}+0(\lambda^{-2})\right|;\ c^*=\frac{D}{\pi}(2\ln 2-1)-\frac{2d_{30}}{\pi}$$

Для построения решения задачи 2 также может быть использован метод ортогональных многочленов. Решение задачи в этом случае отыскивается в виде двойного ряда по четным полиномам Лежандра.

в) Двухстороннее асимптотическое решение задачи 2 при малых и больших значениях λ ($\lambda\to 0$, $\lambda\to\infty$).

Пусть $L(u)$ имеет вид

$$L(\lambda\gamma)=(\gamma^2+A^2\lambda^{-2})\,(\gamma^2+B^2\lambda^{-2})^{-1}\qquad(4.12)$$

Тогда, учитывая, что при $\varepsilon\to 0$, $J_0(\varepsilon r)\to 1$, уравнение (4.5) для случая соответствующего плоскому штампу, можно переписать:

$$\int_0^{\infty}T_1(\gamma)\frac{\gamma^2+A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2+B^2\lambda^{-2}}\cos\gamma t\,d\gamma=\theta_0\delta\cos\varepsilon t,\ \ (0<t<1);\ \int_0^{\infty}T_1(\gamma)\cos\gamma t\,d\gamma=0,\ (t>1)$$

(4.13)

Введем обозначение

$$p(t)=\int_0^{\infty}T(\gamma)\cos\gamma t\,d\gamma\qquad(4.14)$$

Из (4.14) с учетом четности $p(x)$ получим:

$$p(x)=c_2\operatorname{ch}A\lambda^{-1}x+c_1(B^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2)(A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2)\cos\varepsilon t,\quad c_1=\theta_0\delta\qquad(4.15)$$

Используя (4.15), (4.13) можно записать:

$$\int_0^{\infty}T_1\cos\gamma t\,d\gamma=c_2\operatorname{ch}\frac{A}{\lambda}x+c_1\frac{B^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}{A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}\cos\varepsilon t,\ (0\leqslant t\leqslant 1);\ \int_0^{\infty}T_1\cos\gamma t\,d\gamma=0,(t>1)$$

Обращая преобразование Фурье, получим

$$T_1(u)=C_1 2\pi^{-1}(B^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2)(A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2)^{-1}(u\sin u\cos\varepsilon-\varepsilon\sin\varepsilon\cos u)(u^2-\varepsilon^2)^{-1}+$$

$$+c_2 2\pi^{-1}(u\sin u\operatorname{ch}A\lambda^{-1}+A\lambda^{-1}\cos u\operatorname{sh}A\lambda^{-1})(u^2+A^2\lambda^{-2})^{-1}$$

Постоянная c_1 определяется из условия, что $T_\varepsilon(u)$ должно удовлетворять исходному уравнению (4.13)

$$c_\varepsilon(B\lambda^{-1}\,\mathrm{ch}\,A\lambda^{-1}+A\lambda^{-1}\mathrm{sh}\,A\lambda^{-1})(B^2\lambda^{-2}+A^2\lambda^{-2})^{-1}+$$
$$+c_1(B\lambda^{-1}\cos\varepsilon-\varepsilon\sin\varepsilon)(A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2)^{-1}=0$$

Формулу для напряжений преобразуем к более удобному виду. Используя равенство Парсеваля, получим

$$\tau_\varepsilon(r)=$$
$$=\frac{2\theta_0\delta}{\pi}\left\{L^{-1}(\lambda\varepsilon)\left[\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-r^2}}+\varepsilon\int_r^1\frac{\sin t\varepsilon\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]+\frac{c_\varepsilon}{c_1}\left[\frac{\mathrm{ch}\,A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}}-A\lambda^{-1}\int_r^1\frac{\mathrm{sh}\,A\lambda^{-1}t\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]\right\}$$

$$\tau(r)=\lim_{\varepsilon\to 0}\tau_\varepsilon(r)=2\theta_0\delta\pi^{-1}\left\{L^{-1}(0)\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}+c_0\left[\frac{\mathrm{ch}\,A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}}-A\lambda^{-1}\int_r^1\frac{\mathrm{sh}\,A\lambda^{-1}t\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]\right\}$$

$$c_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_\varepsilon}{c_1}$$

Связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет следующий вид:

$$P=4\pi a\theta_0[L^{-1}(0)+c_0A^{-1}\lambda\,\mathrm{sh}\,A\lambda^{-1}]\delta$$

Определение 4.1. Будем говорить, что абсолютно интегрируемая на отрезке [0,1] функция $f(x)$ удовлетворяет условию M_0, если имеет место разложение Фурье-Бесселя

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kJ_0(\mu_kx);\quad \sum_{k=1}^{\infty}|b_k\mu_k|\leqslant M_f^0(-1,1)<\infty \tag{1.16}$$

где $M_f^0(-1,1)$ — некоторая постоянная, μ_k, $(k=1,2,\ldots)$ — нули функции $J_0(x)$. При $L(u)$ вида (2.2) для правой части уравнения (1.7)

$$\bar\delta(r)=\delta(1+f(r));\quad (0\leqslant r\leqslant 1)$$

где $f(r)$ удовлетворяет условию M_0, выражение для распределения контактных напряжений имеет вид

$$\tau(r)=\frac{2\theta_0\delta}{\pi}\left[L_N^{-1}(0)\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}+\sum_{i=1}^{N}C_i\psi\left(r,\frac{A_i}{\lambda}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}b_jL^{-1}(\lambda\mu_j)\varphi(r;\mu_j)\right] \tag{4.17}$$

$$\psi(r;A)=\frac{\mathrm{ch}\,A}{\sqrt{1-r^2}}-A\int_r^1\frac{\mathrm{sh}\,At\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}};\quad \varphi(r,\varepsilon)=\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-r^2}}+\varepsilon\int_r^1\frac{\sin t\varepsilon\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}C_i\alpha\left(\frac{B_k}{\lambda};\frac{A_i}{\lambda}\right)+L_N^{-1}(0)\lambda B_k^{-1}+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\beta\left(\frac{B_k}{\lambda};\mu_j\right)=0,\ k=1,2,\ldots,N$$

$$\alpha(B, A)=(B\operatorname{ch}A-A\operatorname{sh}A)(B^2-A^2)^{-1};\ \beta(B; A)=$$
$$=(B\cos A-A\sin A)L_N^{-1}(\lambda A)(B^2+\lambda^2A^2)^{-1} \qquad (4.18)$$

Система (4.18) однозначно разрешима, если A_i; B_k удовлетворяют условиям (2.2). В данном случае связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид

$$P=4\pi a\theta_0\left[L^{-1}(0)+\sum_{i=1}^{N}C_iA_i^{-1}\lambda\operatorname{sh}A_i\lambda^{-1}+\sum_{j=1}^{\infty}b_jL_N^{-1}(i\lambda\mu_j)\mu_j^{-1}\sin\mu_j\right]$$

В общем случае, когда $L(u)$ имеет вид (2.7), решение уравнения (1.7) строится методом последовательных приближений.

Реализуется он так же, как и в задаче 1, при этом оператор, соответствующий $\Sigma_M\tau$ в (3.8), имеет вид $(M=1)$:

$$\Sigma_1\tau=\int_0^1\tau(\rho)\rho\left[\int_0^{\infty}\frac{c\lambda^{-1}\gamma}{\gamma^2+D^2\lambda^{-2}}J_0(\gamma r)J_0(\gamma\rho)d\gamma\right]d\rho=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0(\mu_kr)$$

Коэффициенты a_k находятся по следующим формулам:

$$a_k=\frac{2c\lambda^{-1}}{J_1^2(\mu_k)(\mu_k^2+D^2\lambda^{-2})}\left[\int_0^1\tau(\rho)\rho J_0(\rho\mu_k)d\rho-\mu_kJ_1(\mu_k)K_0\left(\frac{D}{\lambda}\right)\int_0^1\tau(\rho)\rho I_0\left(\frac{\rho D}{\lambda}\right)d\rho\right]$$
$$(4.19)$$

Используя (4.19), получим следующие оценки:

$$\max_{r\in(-1,1)}\left|\Sigma_1(\tau)\sqrt{1-r^2}\right|\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\leqslant\lambda M^*,\quad\lambda\to0\ (\lambda<\lambda^*) \qquad (4.20)$$

$$\max_{r\in(-1,1)}\left|\Sigma_1(\tau)\sqrt{1-r^2}\right|\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\leqslant\lambda^{-1}\ln\lambda\, M^0,\quad\lambda\to\infty\ (\lambda>\lambda^0) \qquad (4.21)$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ.

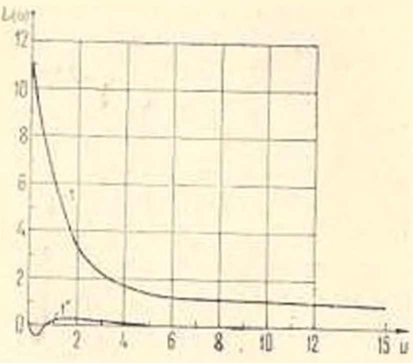
Из (4.20), (4.21) следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [26]. Применяя к уравнению вида (3.11) принцип Банаха сжатых отображений, можно получить доказательство существования и единственности решения уравнения (1.7) [24] при $0<\lambda<\lambda^*$ и $\lambda>\lambda^0$, где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения.

5. В качестве примера рассмотрим задачу 2 в случае, когда модуль Юнга $E(z)$ меняется по закону

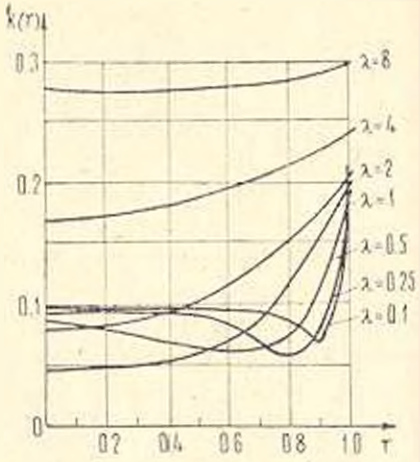
$$E(z)=E_0f(z),\ z\in(0,-1),\ E(z)=E_0(-1),\ z\in(-1,-\infty)$$
$$f(z)=1{,}1+\sin0{,}5\,sz\pi,\quad s=1$$

при постоянном коэффициенте Пуассона ($\nu=1/3$). Напоминаем, что коэффициенты Ляме Λ и M связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями [31].

$$\Lambda=E\nu(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1};\quad M=0{,}5E(1+\nu)^{-1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведен график $L_s(u)$ при $s=1$ (кривая 1). Кривая 1' соответствует разности между точным и аппроксимирующим значением трансформанты вида (2.2). На фиг. 2 приведены графики величины $k(r)=\sigma_{\text{н}}(r)\,\sigma_0^{-1}(r)$, характеризующей распределение контактных нормальных напряжений под штампом с плоским основанием на неоднородном основании $\sigma_{\text{н}}(r)$ по сравнению с однородным $\sigma_0(r)$ при различных значениях λ, $\sigma_0(r)$ — распределение контактных напряжений под штампом для однородного полупространства при $E=E_0(0)$. Значения $\sigma_{\text{н}}(r)$ найдены двухсторонним асимптотическим методом при $s=1$.

ԸՍՏ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ս. Մ. ԱՅԶԻԿՈՎԻՉ, Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է կլոր դրոշմի տակ կոնտակտային լարումների բաշխման և նրա հատվածքի վրա հիմքի անհամասեռության ազդեցությունը, որոշված են անհամասեռ հիմքի վրա շերտային դրոշմի տակ կոնտակտային լարումները։ Դրված խնդիրների լուծումը կառուցված է ասիմպտոտիկ մեթոդներով։ Մասնավորապես, ամենաէֆեկտիվը դրսևորել է իրեն երկկողմանի ասիմպտոտիկ մեթոդը, որը թույլ է տալիս ստանալ այդ խնդիրների լուծումները բնութագրող երկրաչափական պարամետրի ինչպես մեծ, այնպես էլ փոքր արժեքների համար։

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF CONTACT PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR NONHOMOGENEOUS WITH DEPTH HALF-SPACE AND HALF-PLANE

S. M. AYZIKOVITCH, V. M. ALEKSANDROV

Summary

The influence of inhomogeneity of the soil base on the distribution of contact stresses under the circular plate and its displacements has been studied and the contact stresses under the strip plate on the nonhomogeneous foundation have been determined. Solutions of the posed problems are obtained by asymptotic methods. In particular the two-sided asymptotic method is the most effective. It allows us to obtain the solutions of these problems for big and small values of the characteristic geometric parameter.

The problems are posed in connection with the problem of the evaluation of foundations on chemically stabilized fill-up and slumping soils (rigid circular plate, strip foundation).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин В. С.* Задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Сообщ. по прикл. матем., вып. 4.
2. *Никишин В. С.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Сообщ. по приклад. матем., вып. 3.
3. *Шевляков Ю. А., Наумов Ю. А., Чистяк В. И.* К расчету неоднородных оснований.—ПМ, 1968, т. 4, вып. 9.
4. *Айзикович Ю. М., Александров В. М.* О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству.—ДАН СССР, 1982, т. 266, № 1.
5. *Александрова Г. П.* Об одной, решаемой в замкнутом виде, контактной задаче теории упругости для цилиндрического тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1968, № 2.
6. *Александрова Г. П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании.—Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 1.
7. *Вилков В. Н.* Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп.—Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1968, № 4.
8. *Егоров К. Е.* Распределение напряжений и перемещений в двухслойном основании ленточного фундамента и свайные и естественные основания. Сб. № 10 Трудов НИСа треста глубинных работ, 1936.
9. *Ильман В. М., Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием.—Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5.
10. *Коган Б. И.* Давление жесткого штампа на двухслойное основание.—Тр. Харьковского автомоб. дор. ин-та, 1954, вып. 17.
11. *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Упругая деформация неоднородного многослойного пакета при неполном контакте его слоев.—ДАН СССР, сер. А, 1977, № 7.
12. *Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* Контактная задача для многослойного основания.—ПМ, 1962, т. 8, вып. 5.
13. *Chen W. T., Engel P. A.* Impact and contact stress analysis in multilayer elastic media. 13-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Books of abstracts, Moscow, 1972.

14. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд. Ростовского университета, 1983. 264 с.
15. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания. Сб. «Устойчивость и прочность элементов конструкций». Днепропетровск: 1973, с. 24 - 44.
16. *Коддингтон Э. Л., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
17. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
18. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
19. *Бабешко В. А.* Асимптотические свойства решений некоторых двухмерных интегральных уравнений.—ДАН СССР, 1972, т. *206*, №5.
20. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотические решения одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел.—ПММ, 1967, т. *31*, вып. 4.
21. *Панченков А. Н.* Теория потенциала ускорений. Новосибирск: Наука, 1975.
22. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1962, №5.
23. *Каландия А. И.* Математические методы двухмерной упругости. М.: Наука, 1973.
24. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения некоторых классов парных интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине.—ПММ, 1982, т. *46*, №1.
25. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений.—ДАН СССР, 1973, т. *210*, №1, с. 55-58.
26. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
27. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.–Л.: ГОНТИ, 1939.
28. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.—ПММ, 1971, т. *35*, вып. 1.
29. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач.—ДАН СССР, 1974, т. *217*, №4.
30. *Александров В. Н., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера-Фока.—ПММ, 1972, т. *36*, вып. 3.
31. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Институт проблем механики АН СССР
НИИ механики и прикладной математики РГУ

Поступила в редакцию
5.VII. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 534.1

О ДИНАМИКЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ТИПА «ЦИКЛОН» С УЧЕТОМ ЕГО УПРУГИХ СВОЙСТВ

ГУКАСЯН А. А., ГРУДЕВ А. И.

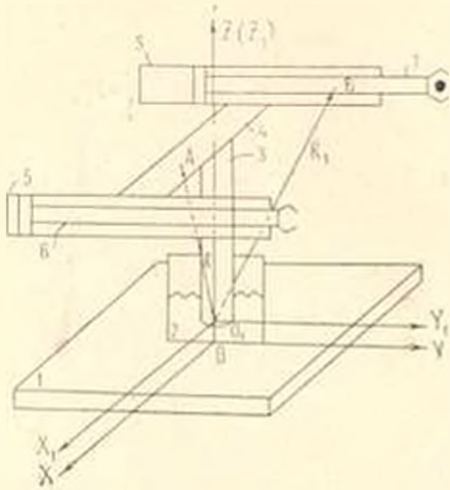
При исследовании движения манипуляторов обычно используется механическая модель абсолютно твердых тел. Однако в ряде случаев упругость конструкции манипулятора существенно влияет на точность выполнения рабочих операций и должна учитываться при разработке системы управления.

В последнее время появился ряд работ советских и зарубежных авторов, посвященных проблемам упругой податливости манипуляторов [1—9]. Экспериментальные исследования упругих характеристик промышленных роботов, выполненные в Институте проблем механики АН СССР, показали, что основное влияние на точность позиционирования рабочего органа (схвата) оказывает упругая податливость шарниров, соединительных узлов конструкции манипулятора [8, 9]. В настоящей работе исследуется влияние упругой податливости соединительного узла на динамические характеристики промышленного робота типа «Циклон».

1. Рассматривается механическая модель манипулятора с тремя степенями свободы, кинематическая схема которого близка к схеме промышленного робота «Циклон» (фиг. 1). Манипулятор состоит из неподвижного основания 1, стойки 2, вертикально ориентированного вала 3, горизонтально ориентированного плеча 4, направляющих цилиндров 5, неподвижной стрелы 6, подвижной стрелы 7 со схватом. Направляющие цилиндры жестко связаны с валом посредством плеча. Основание, стойка, вал, плечо, направляющие цилиндры и стрелы считаются абсолютно твердыми телами. Стрела 6 может без трения перемещаться в горизонтальном направляющем цилиндре. Соединительный узел между стойкой и валом, допускающий перемещение вала в вертикальном направлении, обладает упругой податливостью. Манипулятор имеет три степени подвижности, отвечающие перемещению вала в вертикальном направлении, его повороту вокруг вертикальной оси и перемещению стрелы вдоль направляющей.

Для описания движения рассматриваемой механической системы введем следующие прямоугольные правые системы координат: $OXYZ$, связанную с неподвижным основанием, ось OZ которой совпадает с осью вращения вала 3; вращающуюся систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$, ось O_1Z_1 которой совпадает с осью вращения вала, а оси O_1X_1 и O_1Y_1

связаны с подвижным валом и лежат в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.



Фиг. 1. Кинематическая схема промышленного робота «Циклон».

Указанным выше степеням подвижности соответствуют обобщенные координаты: $z(t)$ – расстояние между точками O и O_1, $\varphi(t)$ – угол поворота вала вокруг оси OZ, $l(t)$ – расстояние от центра масс стрелы 7 до плоскости $O_1X_1Z_1$.

Управление системой осуществляется при помощи момента M относительно оси вращения вала, силы F_2, вертикально направленной и приложенной к валу, и силы F_1, приложенной к стреле и направленной вдоль ее продольной оси.

Введем следующие обозначения: m – суммарная масса системы: вал, плечо, направляющие цилиндры, неподвижная стрела 6; m_1 – масса стрелы 7: R – радиус-вектор центра масс системы 3–6 (точка A), заданный в системе $O_1X_1Y_1Z_1$; R_1 – радиус-вектор центра масс стрелы (точка B), заданный в той же системе координат; c – жесткость соединительного узла, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – углы поворота системы 3–7, обусловленные упругой податливостью узла, относительно осей OX и OY соответственно; I – суммарный момент инерции системы 3–6 относительно начала координат O_1; J' – момент инерции стрелы 7 относительно ее центра масс B; ω – вектор мгновенной угловой скорости системы 3–6 в проекциях на оси координат системы $O_1X_1Y_1Z_1$.

Матрица перехода от системы координат $OXYZ$ к системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$ имеет вид

$$D=\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\varphi & \cos\beta\sin\varphi & -\sin\beta \\ -\sin\varphi\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi & \cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi & \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\sin\beta\cos\varphi & -\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\beta\sin\varphi & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

В неинерциальной системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$ векторы ω, R, R_1 имеют следующие координатные представления:

$$\omega=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\beta\,\dot\varphi+\dot\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta\,\dot\varphi+\cos\alpha\,\dot\beta \\ \cos\alpha\cos\beta\,\dot\varphi-\sin\alpha\,\dot\beta \end{pmatrix};\quad R=\begin{pmatrix} r_{x_1} \\ r_{y_1} \\ r_{z_1} \end{pmatrix};\quad R_1=\begin{pmatrix} a \\ l(t) \\ b \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Точка в (1.1) и в дальнейшем означает производную по времени t.

Кинетическую энергию системы 3–6 с учетом (1.1) можно представить в следующем виде [10]:

$$T_1 = \frac{m v_{0_1}^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega, J\omega) = \frac{m}{2}(v_{0_1} + \omega \times R)^2 + \frac{1}{2}(\omega, J\omega) \tag{1.2}$$

где v_{0_1}—скорость точки O_1 в системе $OXYZ$. J—тензор инерции системы 3—6 относительно точки А.

Кинетическая энергия движения стрелы 7 имеет следующий вид:

$$T_2 = \frac{m_1 v_R^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega, J'\omega) = \frac{m_1}{2}(v_{0_1} + R_1 + \omega \times R_1)^2 + \frac{1}{2}(\omega, J'\omega) \tag{1.3}$$

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы равна сумме потенциальных энергий сил тяжести и упругих сил, обусловленных упругой податливостью соединительного узла

$$\Pi = (m_1 + m)gz + m_1 g r_{y_1} \sin\alpha + mgl \sin\alpha + (m r_{x_1} + m_1 a) g \sin\beta + \frac{c}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \tag{1.4}$$

Предполагается, что углы поворота $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, обусловленные упругой податливостью соединительного узла, суть малые величины порядка ε^2, жесткость узла велика (порядка ε^{-2}, $\varepsilon \ll 1$), а управляющий момент $M(t)$, силы $F_1(t)$, $F_2(t)$—величины порядка единицы.

Поставим следующую задачу управления системой 3—7. Пусть задан закон изменения $\varphi(t)$, $z(t)$, $l(t)$ для жесткой модели манипулятора, который реализуется двигателями. Таким образом, управление задано кинематически. Требуется найти движение упругого манипулятора, а также управляющие силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ и момент $M(t)$, обеспечивающие заданные ($\varphi(t)$, $z(t)$, $l(t)$) движения для упругого манипулятора.

Уравнения колебания стрелы 7 манипулятора, составленные в форме Лагранжа [10], относительно переменных $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с учетом вышеуказанных предположений о малости $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ можно представить в следующем матричном виде:

$$\frac{d}{dt}[A(t)\dot{\Psi}(t)] + C\Psi(t) + B(t) = 0 \tag{1.5}$$

где $A(t)$—симметрическая матрица размерности 2×2, C—диагональная матрица жесткости соединительного узла:

$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$; $\Psi(t)$; $\dot{\Psi}(t)$; $B(t)$—векторы с компонентами

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix};\quad \dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix};\quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

где компоненты вектора $B(t)$ являются заданными и определяющимися из динамики жесткой модели манипулятора.

Для решения уравнения (1.5) сделаем следующую замену переменных:

$$\Psi(t) = \varepsilon^2 \Psi_*(t), \quad C = \varepsilon^{-2} C_*, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.7}$$

где $\Psi_*(t) \sim 1$, $C_* \sim 1$; а также введем „быстрое" время τ, $t=\varepsilon\tau$, $t \sim 1$. Подставляя (1.7) в (1.5), получим

$$\frac{d}{dt}\left[A(t)\varepsilon^2\dot{\Psi}_*(t)\right]+C_*\Psi_*(t)+B(t)=0 \tag{1.8}$$

Решения уравнения (1.8) в первом приближении ищем согласно [1] в виде

$$\Psi_*=\overline{\Psi}_*(t)+\Theta(\tau) \tag{1.9}$$

Слагаемое $\overline{\Psi}_*(t)$ описывает медленно изменяющиеся квазистатические смещения, для которых характерное время изменения порядка единицы, то есть порядка времени выполнения операции манипулятора. Быстро изменяющееся слагаемое $\Theta(\tau)$ описывает упругие колебания стрелы, частота которых порядка ε^{-1}. Подставим (1.9) в уравнение (1.8) и, опуская члены порядка $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\{C_*\overline{\Psi}_*(t)+B(t)\}+\left\{\frac{d}{d\tau}\left[A(t)\frac{d}{d\tau}\Theta(\tau)\right]+C_*\Theta(\tau)\right\}=0 \tag{1.10}$$

Первые фигурные скобки в (1.10) заключают выражения, не зависящие от τ, а вторые скобки объединяют быстрые слагаемые, зависящие от τ. Потребуем, чтобы каждое из выражений в фигурных скобках (1.10) равнялось нулю. При этом используется произвол, который содержится в представлении решения в виде (1.9), так что оба слагаемых (1.9) определяются однозначно.

Приравнивая нулю выражение в первых фигурных скобках (1.10), получим

$$\overline{\Psi}_*(t)=-C_*^{-1}B(t) \tag{1.11}$$

Выражение (1.11) определяет квазистатические упругие смещения стрелы манипулятора.

Приравнивая нулю выражение во вторых фигурных скобках (1.10), получим уравнение

$$\frac{d}{d\tau}\left[A(t)\frac{d}{d\tau}\Theta(\tau)\right]+C_*\Theta(\tau)=0 \tag{1.12}$$

Система дифференциальных уравнений (1.12) описывает колебания механической системы с медленно изменяющимися параметрами. Такие системы исследовались при помощи асимптотического метода усреднения [11]. Асимптотическое решение первого приближения системы (1.12) представляется в виде разложения по нормальным колебаниям [1,2].

Собственные частоты колебаний системы (1.12) определяются решением характеристического уравнения

$$\det\left[C_*-\omega^2A(t)\right]=0 \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) имеет два положительных корня

$$\omega_1^2=\{c(a_{11}+a_{22})+c[(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2]^{1/2}\}/2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$$

$$\omega_2^2=\{c(a_{11}+a_{22})-c[(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2]^{1/2}\}/2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) \tag{1.14}$$

Амплитудные векторы X^i ($i=1, 2$), отвечающие частотам ω_i, суть ненулевые решения однородных систем алгебраических уравнений

$$[C_*-\omega_i^2A(t)]X^i=0 \tag{1.15}$$

Ненулевые решения (1.15) имеют следующий вид:

$$X^i=\begin{pmatrix} \omega_i^2 \\ \dfrac{c-\omega_i^2a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix}, \quad i=1,\ 2 \tag{1.16}$$

Искомое асимптотическое решение первого приближения системы (1.12) имеет вид

$$\Theta(\tau)=\sum_{i=1}^{2} X^ik_i\cos\gamma_i \tag{1.17}$$

где амплитуды k_i и фазы γ_i определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dk_i}{d\tau}=-\frac{\varepsilon k_i}{2m_i(t)\omega_i(t)}\,\frac{d[m_i(t)\omega_i(t)]}{dt};\quad \frac{d\gamma_i}{d\tau}=\omega_i(t) \tag{1.18}$$

Здесь введено обозначение: $m_i(t)=(A(t)X^i,\ X^i)$, $i=1,\ 2$. Интегрируя выражение (1.18) при фиксированном t, получим

$$k_i=k_{i0}\left|\frac{m_i(0)\omega_i(0)}{m_i(t)\omega_i(t)}\right|^{1/2};\quad \gamma_i=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\omega_i(t_1)dt_1+\gamma_{i0},\quad i=1,\ 2 \tag{1.19}$$

Используя представления (1.7) и (1.9), произвольные постоянные k_{i0} и γ_{i0} можно определить из системы алгебраических уравнений

$$\overline{\Psi}_*(0)+\sum_{i=1}^{2} X^i(0)k_{i0}\cos\gamma_{i0}=\varepsilon^{-2}\Psi(0),\quad -\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2} X^i(0)\omega_i(0)k_{i0}\sin\gamma_{i0}=\varepsilon^{-2}\dot{\Psi}(0) \tag{1.20}$$

где $\Psi(0)$ и $\dot{\Psi}(0)$ предполагаются заданными в начальный момент времени $t=0$. Из (1.20) следует, что начальные данные должны иметь следующие порядки малости: $\Psi(0)\sim\varepsilon^2$, $\dot{\Psi}(0)\sim\varepsilon$. Определители систем (1.20) не равны нулю в силу линейной независимости векторов X^i, поэтому системы (1.20) разрешимы относительно постоянных k_{i0}, γ_{i0}, $i=1,\ 2$.

Управляющие силы F_1, F_2 и момент M при заданных $\varphi(t)$, $l(t)$, $z(t)$ и $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определяются из уравнения Лагранжа, описывающего движение рассматриваемой механической системы. Углы $\alpha(t)$, $\beta(t)$, силы F_1, F_2 и момент M состоят из двух слагаемых „медленных" или квазистатических и „быстрых". Медленные слагаемые могут быть вычислены на основе жесткой модели. Для расчета быстрых слагаемых требуется определить собственные упругие колебания манипулятора.

2. Рассматривается движение манипулятора «Циклон» в вертикальной плоскости и колебания стрелы относительно оси OX, то есть $\varphi=0$; $\beta(t)=0$; $l(t)=\text{const}$; $z=z(t)$; $\alpha=\alpha(t)$.

Формулы (1.11), определяющие квазистатическое упругое смещение, принимают в этом случае вид

$$\bar{\alpha}_*(t)=-c_*^{-1}b_1(t) \tag{2.1}$$

где $b_1(t)=mr_{y_1}\ddot{z}+m_1l\ddot{z}+m_1gl+mgr_{y_1}$ — заданная функция времени, определяемая из жесткой модели манипулятора. Уравнение (1.12), описывающее упругие колебания стрелы манипулятора, в рассматриваемом случае является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого при начальных условиях $t=0: \alpha_*(0)=(mgr_{y_1}+m_1gl)/c_*;\ \dot{\alpha}_*(0)=0$ имеет вид

$$\Theta(\tau)=A\sin(\omega\tau+\psi) \tag{2.2}$$

Здесь $A=(mr_{y_1}+m_1l)\ddot{z}(0)/c_*$; $\omega=(c_*/a_{11})^{1/2}$, $\psi=\dfrac{\pi}{2}$

$$a_{11}=I_{11}+m_1(b^2+l^2)+J_{11}' \tag{2.3}$$

Для натурного образца промышленного робота «Циклон-3Б» компоненты матрицы жесткости C с точностью до 15% определяются из статического эксперимента [8,9]. В данном случае

$$c_*=2.8\cdot 10^4 \text{ н.м} \tag{2.4}$$

Измеряя геометрические характеристики частей робота 3—7 и считая по известным формулам массы всех частей и положение центра масс [10], получаем

$$m_i=v_i\rho_i;\quad R=\sum_{i=3}^{n} r_i m_i \Big/ \sum_{i=3}^{n} m_i;\quad n=7 \tag{2.5}$$

где v_i — объем каждой части, ρ_i — плотность материала, R — радиус-вектор центра масс системы 3—6, r_i — радиус-вектор центра масс каждой части.

В результате расчетов получим

$$m=93 \text{ кг},\ m_1=6.3 \text{ кг},\ R=(-2,\ 5,\ 45) \text{ см},\ R_1=(31,\ 84,\ 52) \text{ см} \tag{2.6}$$

Считая собственную частоту упругих колебаний по формуле (1.13), получим $\nu=\omega/2\pi=7$ гц.

Вертикальное движение жесткой модели манипулятора можно задавать следующим образом. Уравнение вертикального движения имеет вид

$$(m+m_1)\ddot{z}=F_2-(m+m_1)g$$

Обозначим $[F_2-(m_1+m)g]/(m+m_1)=\Phi$, получим:

$$z = \Phi; \quad |\Phi| \leqslant \Phi_0 \tag{2.7}$$

Законы изменения Φ можно задавать различными способами. Некоторые стандартные законы изменения ускорений представлены на фиг. 2.

Изменение ускорений, представленных сплошными линиями, описывается следующим образом:

$$\Phi = \begin{cases} 2\Phi_0 t/T; & 0 \leqslant t < T/2 \\ 2\Phi_0 (T-t)/T; & T/2 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{2.8}$$

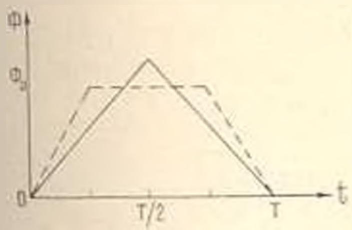
где $T = 2(\Delta z/\Phi_0)^{1/2}$; $\Delta z = z_T - z_0$.

Для промышленного робота «Циклон» время вертикального движения $T = 0{,}6$ с, максимальное перемещение по вертикали $\Delta z = 0{,}2$ м, а максимальное ускорение равно $\Phi_0 \simeq 2{,}22$ м/с^2.

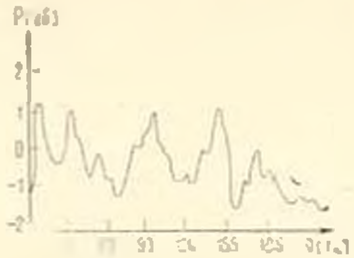
Квазистатическое упругое смещение $\bar{a}_*(t)$, определяемое из (2.1) с учетом (2.4), (2.6)—(2.8), можно представить в следующем виде:

$$\bar{a}_*(t) = -\frac{1}{c_*}(m_1 l + m r_{y_1}) - \frac{1}{c_*}(m_2 l + m r_{y_2}) \begin{cases} 2\Phi_0 t/T; & 0 \leqslant t < \dfrac{T}{2} \\ 2\Phi_0 (T-t)/T; & \dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{2.9}$$

Все величины, входящие в (2.9), определены.



Фиг. 2. Законы изменения ускорений вертикального движения стрелы манипулятора «Циклон».



Фиг. 3. Спектр мощности упругих колебаний в вертикальной плоскости.

Для рассматриваемого случая (движение в вертикальной плоскости и колебания стрелы относительно оси OX) приведем результаты динамического экспериментального исследования, которые подробно описаны в работе [8]. В результате экспериментов получены спектры мощности упругих колебаний в вертикальной плоскости (фиг. 3). Из спектра видно, что низшая резонансная частота упругих колебаний схвата робота «Циклон» с точностью до определения компонент матрицы жесткости C и инерционных характеристик (массы манипулятора, центра масс, момента инерции) равна расчетному значению, которое приведено выше.

Сложный характер полученного спектра колебаний объясняется взаимодействием многих факторов: упругостью конструкции манипулятора, влиянием демпферов, ограничителей движения, устанавливаемых в конечных положениях, податливостью прокладок между поршнями и цилиндрами, влиянием воздушной подушки приводов и другими.

Заключение. Предложенный подход в работах [1, 2] и полученные общие формулы для описания динамики упругого манипулятора (n-звенного) при некоторых конкретных предположениях (углы упругой податливости малы, жесткость манипулятора велика, управляющие силы и моменты конечны), описывают динамику ПР типа «Циклон» с учетом его упругих свойств. В случае кинематического управления асимптотическим методом разделения движений получены замкнутые формулы, определяющие квазистатические упругие смещения и быстрые упругие колебания стрелы манипулятора. Приведены результаты экспериментального исследования (статического и динамического) для ПР типа «Циклон» [8]. Результаты экспериментального исследования для рассматриваемого частного случая ($n=2$) сравнимы (в рамках приближенной принятой модели манипулятора) с результатами расчетов.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за постановку задачи, а также Л. Д. Акуленко и Н. Н. Болотника за полезные замечания.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ «ՑԻԿԼՈՆ» ՄՈԴԵԼԻ ԱՐԴՅՈՒՆԱԲԵՐԱԿԱՆ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՆ

Ա. Ա. ԳՈՒԿԱՍՅԱՆ, Ա. Ի. ԳՐՈՒԴԵՎ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է «Ցիկլոն» մոդելի արդյունաբերական մանիպուլյատորի միացման օղակի առաձգական ենթարկվողության ազդեցությունը նրա դինամիկական բնութագրիչների վրա։ Մանիպուլյատորը ունի երեք ազատության աստիճան, որը համապատասխանում է լիսեռի ուղղաձիգ առանցքի ուղղությամբ շարժմանը, նրա պտույտին ուղղաձիգ առանցքի շուրջը և սլաքի շարժմանը ուղղորդի ուղղությամբ։

Կինեմատիկական ղեկավարման դեպքում շարժման անջատման ասիմպտոտիկական եղանակով ստացված են փակ լուծումներ, որոնք որոշում են քվազիստատիկ առաձգական տեղափոխությունները և մանիպուլյատորի սլաքի արագ առաձգական տատանումները։ Բերված են «Ցիկլոն» մոդելի արդյունաբերական մանիպուլյատորի փորձնական (ստատիկ և դինամիկ) հետազոտությունների արդյունքները։

ON THE DYNAMICS OF AN INDUSTRIAL ROBOT OF „TZICKLON" TYPE

A. A. GUKASIAN, A. I. GRUDYEV

S u m m a r y

The influence of the elasticity of the joint of the industrial manipulating robot „Tzicklon" on its dynamics is investigated. The manipulator has three degrees of freedom which correspond to the vertical translation of the spindle, its rotation about the vertical axis and the translation of the arm along the guide.

In case of kinematic control formulae for determining quasistatic elastic displacements and fast oscillations of the arm of the manipulator are obtained in closed form by means of asympthotic methods. Expressions for additional control forces and torques taking into account elastic properties of the system are obtained. Some results of experimental investigation of elastic properties of the robot „Tzicklon" are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981. №5, с. 142—152.
2. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, №4, с. 101—113.
3. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими свойствами.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, №5, с. 131—141.
4. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управляемом вращении упругого стержня.—ПММ. 1982. т. *46*, вып. 4, с. 587—595.
5. *Гукасян А. А.* Исследование управляемых движений упругого манипулятора с тремя степенями подвижности.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. 36, № 3, с. 13—20.
6. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, №5. с. 33—41.
7. *Вукобратович М., Поткоњак В.* Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, №5, с. 131—141.
8. *Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Вешников В. Б., Самосян К. В., Степанов В. П., Шушко Д. А.* Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт №231. ИПМ АН СССР. М.: 1984.
9. *Гукасян А. А.* Экспериментальные исследования упругих и жесткостных характеристик механизмов промышленных роботов. Тезисы докл. Всесоюзной школы молодых ученых и специалистов по проблемам оптимизации в машиностроении. Харьков—Алушта: Изд-во Харьковского политехнического ин-та, 1983, с. 11.
10. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980.
11. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1960.

Институт проблем механики АН СССР,
Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
6.I. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 539.3

О ПОДКРЕПЛЕНИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ РАЗРЕЗАМИ, РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

ИВАНЕНКО О. А., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

Решение ряда задач о подкреплении анизотропных пластин упругими ребрами или накладками и обзор работ в этом направлении можно найти в книге [1].

Подкрепление анизотропных и изотропных пластин регулярной системой включений рассмотрено в [2]. Аналогичные задачи для пьезокерамической полуплоскости содержатся в [3].

Постановка электрических и механических граничных условий на трещине в пьезоэлектрике обсуждалась в работе [4].

В настоящей статье рассматривается модель кусочно-однородной среды, представляющей собой пьезокерамическую матрицу, армированную регулярной системой ленточных включений. При этом допускается наличие в матрице дефектов типа трещин. На основе решения указанной задачи электроупругости проводится осреднение пьезоупругих свойств такой регулярной структуры.

Приводятся результаты расчетов контактных усилий и усилий во включении, а также коэффициентов интенсивности напряжений и осредненных пьезомодулей.

1. Модель пьезокерамической матрицы с регулярчой системой включений. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизическим осям координат xyz неограниченную пьезокерамическую матрицу (керамика $PZT-4$, $PZT-5$ [5]), предварительно поляризованную вдоль оси z и армированную двоякопериодической системой одинаковых ленточных включений. Предположим, что включения непрерывно скреплены с матрицей, выполнены из упругого диэлектрика и работают лишь на растяжение-сжатие, а в среде имеют место средние механические напряжения $\langle\sigma_1\rangle$, $\langle\tau_{13}\rangle$, $\langle\sigma_3\rangle$ и электрическое поле, характеризуемое компонентами среднего вектора напряженности $\langle E_1\rangle$, $\langle E_3\rangle$.

В этом случае в матрице возникают сопряженные сингулярные поля электрических и механических величин, которые можно выразить в терминах функции комплексного переменного [3, 4] по формулам

$$\sigma_x = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \gamma_k \mu_k^2 \Phi_k'(z_k); \quad \varphi = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \Phi_k(z_k)$$

$$\sigma_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \gamma_k \Phi_k'(z_k); \quad \Phi_k'(z_k) = d\Phi_k(z_k)/dz_k$$

$$\tau_{xz} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \gamma_k\mu_k\Phi_k'(z_k); \quad z_k = x + \mu_k z \qquad (1.1)$$

$$U = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} p_k\Phi_k(z_k); \quad W = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\Phi_k(z_k)$$

$$E_x = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k\Phi_k'(z_k); \quad E_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k\mu_k\Phi_k'(z_k)$$

$$D_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\mu_k\Phi_k'(z_k); \quad D_z = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\Phi_k'(z_k)$$

Здесь μ_k, γ_k, λ_k, p_k, q_k, r_k определены в [3, 4], $\Phi_k(z_k)$—искомые аналитические функции комплексного переменного z_k.

Условия совместности деформаций системы матрица-включения имеют вид

$$0{,}5(\varepsilon_x^+ + \varepsilon_x^-) = \varepsilon_x^0, \quad \varepsilon_x^0 = \frac{(1+\mu_0)(1-2\mu_0)}{(1-\mu_0)E_0\delta_0}N \qquad (1.2)$$

где N—внутреннее погонное усилие в сечении ленты, перпендикулярном оси Ox; E_0, μ_0, δ_0—соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина включения.

Решение поставленной задачи (1.2) разыскиваем в виде

$$\Phi_k'(z_k) = B_k + \frac{b_k}{2\pi i}\int_{-l}^{l} g(x)\zeta(x - z_k)\,dx \qquad (1.3)$$

Здесь $g(x)$—интенсивность контактных усилий, $\zeta(z_k)$—дзета-функция Вейерштрасса [6], построенная на периодах $\omega_{1k} = \omega_1$, $\omega_{2k} = \mathrm{Re}\,\omega_2 + \mu_k \mathrm{Im}\,\omega_2$; ω_k $(k = 1, 2)$—основные периоды структуры (фиг. 1). Константы b_k определены в [3] при $\omega = 0$, $\rho = 0$, $P = 2\pi$, $A_k = b_k$. B_k определяются из условий, чтобы представления (1.3) обеспечивали существование в структуре заданных средних компонент электрических и механических величин.

Фиг. 1

Условие равновесия включения имеет вид

$$\int_{-l}^{l} g(x)\,dx = 0 \qquad (1.4)$$

С учетом (1.4) и свойств дзета-функции Вейерштрасса, можно показать, что представления (1.3) обеспечивают квазипериодичность перемещений и потенциала электрического поля в структуре. Следовательно, условия совместности деформаций (1.2) достаточно выполнить лишь на включении, находящемся в основном параллелограмме периодов.

Можно показать также, что представления (1.3) обеспечивают непрерывную продолжимость через включение перемещений, касательной компоненты вектора напряженности и нормальной составляющей вектора электрической индукции. Касательные напряжения τ_{xz} терпят скачок, определяемый формулой

$$\tau_{xz}^{+}-\tau_{xz}^{-}=-g(x) \tag{1.5}$$

Подставляя предельные значения функции (1.3) в условие совместности деформаций (1.2), приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-l}^{l}\frac{g(x)dx}{x-x_0}+\int_{-l}^{l}g(x)H(x,x_0)dx+\lambda\int_{x_0}^{l}g(x)dx=M$$

$$aH(x,x_0)=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k}{2\pi i}\left[p_k\zeta_k(x-x_0)-\frac{p_k}{x-x_0}+xQ_k\right]$$

$$a\lambda=\frac{(1+\mu_0)(1-2\mu_0)}{(1-\mu_0)E_0\delta_0};\quad a=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{p_kb_k}{2\pi i} \tag{1.6}$$

$$aM=-a_{16}\langle\sigma_1\rangle-\frac{a_{12}-S_{44}}{2}\langle\sigma_2\rangle+a_{22}\langle E_2\rangle$$

$$Q_k=\frac{2\pi i(a_{16}\bar{\omega}_2\mu_k-a_{66}\omega_k)}{\omega_1|\omega_2|\sin\alpha}-p_k\frac{\delta_{1k}}{\omega_1}$$

$$\alpha=\arg\omega_2;\quad \delta_{1k}=2\zeta\left(\frac{\omega_{1k}}{2}\right)$$

Здесь a_{ik}, S_{44} определены в [3].

Для фиксации однозначного решения (1.6) в классе h_0 [7] к нему необходимо присоединить дополнительное условие (1.4). На этом построение алгоритма закончено.

2. *Учет дефектов типа трещин в матрице.* Предположим теперь, что матрица ослаблена двоякопериодической системой одинаковых туннельных вдоль оси Oy разрезов L (фиг. 1), на берегах которых заданы компоненты вектора напряжений $X_n^{\pm}$, $Z_n^{\pm}$, одинаковые в конгруентных точках, и также, что главный вектор этих усилий, действующих на обоих берегах разреза, равен нулю.

Кроме условий (1.2) необходимо выполнить краевые условия на берегах разрезов

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}[\Phi_k(t_k)]^{\pm}=W_n^{\pm}\quad(n=1,2)$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}\{[\Phi_k(t_k)]^{+}-[\Phi_k(t_k)]^{-}\}=0\quad(n=3,4) \tag{2.1}$$

где $W_n^{\pm}$ $(n=1,2)$, α_{nk} $(n=1,2,3,4)$ определены в [4], последние два условия в (2.1) вытекают из непрерывной продолжимости касательной составляющей вектора напряженности и нормальной компоненты вектора индукции электрического поля через L.

Искомые функции представим в виде

$$\Phi_k^{*}(z_k) = B_k + \frac{b_k}{2\pi i}\int_{-l}^{l} g(x)\zeta(x - z_k)\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\omega_k(t)\zeta(t_k - z_k)\,dt_k$$

$$t_k = \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t; \quad t \in L \tag{2.2}$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют наличию включений, а последнее — наличию разрезов. $g(x)$, $\omega_k(t)$ — искомые функции.

Подставляя предельные значения функций (2.2) в краевые условия (2.1) и равенство (1.2), приходим к смешанной системе интегральных и алгебраических уравнений

$$\int_{-l}^{l}\frac{g(x)dx}{x - x_0} + \int_{-l}^{l} g(x)H(x, x_0)dx + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\int_{L}\omega_k(t)G(t_k, x)dt_k + \lambda\int_{x_0}^{l} g(x)dx = M$$

$$\int_{-l}^{l} g(x)H_n^{*}(x, t_{k0})dx + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_{nk}^{0}}{2\pi i}\int_{L}\frac{\omega_k(t)dt_k}{t_k - t_{k0}} +$$

$$+ 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\int_{L}\omega_k(t)G_n^{*}(t, t_{k0})dt_k = F_n(t_0) \quad (n = 1, 2)$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}^{0}\omega_k(t_0) = W_n(t_0) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

$$\sigma G(t_k, x_0) = \frac{1}{2\pi i}\left[p_k\zeta(t_k - x_0) + Q_k t_k\right]$$

$$H_n^{*}(x, t_{k0}) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k}{2\pi i}\left[\alpha_{nk}^{0}\zeta(x - t_{k0}) - \beta_{nk}^{0}x\right]$$

$$G_n^{*}(t_k, t_{k0}) = \frac{\alpha_{nk}^{0}}{2\pi i}\left[\zeta(t_k - t_{k0}) - \frac{1}{t_k - t_{k0}}\right] - \frac{\beta_{nk}^{0}}{2\pi i}t_k$$

$$\beta_{nk}^{0} = \alpha_{nk}^{0}\frac{\delta_{1k}}{\omega_1} - \gamma_{nk}2\pi i\frac{\cos\varphi_0}{H\omega_1}\delta_k^{1}$$

$$W_1(t) = X_n^{+} + X_n^{-}; \quad W_3(t) = 0 \tag{2.3}$$

$$W_2(t) = -(Z_n^{+} + Z_n^{-}); \quad W_4(t) = 0$$

$$F_1(t) = 0{,}5(X_n^{+} - X_n^{-}) - (\langle\sigma_1\rangle\cos\psi + \langle\tau_{13}\rangle\sin\psi)$$

$$F_2(t) = -0{,}5(Z_n^{+} - Z_n^{-}) + (\langle\tau_{13}\rangle\cos\psi + \langle\sigma_3\rangle\sin\psi)$$

Здесь $\alpha_{nk}^{0} = \alpha_{nk}(\psi_0)$; ψ, ψ_0 — углы наклона положительной нормали к левому берегу разреза в точках t и t_0 соответственно к оси Ox; δ_n^{k} — символ Кронекера.

К системе (2.3) добавляем статическое условие на ребре (1.4) и условия однозначности перемещений

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{nk}\int_{l}^{\,} \omega_k(t)\,dt_k=0 \quad (n=1,\ 2)$$

$$p_{1k}=p_k;\ p_{2k}=q_k \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{2.4}$$

Условия (1.4), (2.4) однозначно фиксируют решение системы (2.3) $\omega_k(t)$, $g(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ в классе h_0 функций, неограниченных на концах линии интегрирования.

3. *Осреднение пьезоэлектрических свойств регулярной пьезокерамической структуры.* Следуя работе [2], построим макромодель рассматриваемой структуры. Под этим будем понимать однородную пьезоэлектрическую среду, уравнения состояния которой совпадают с законом связи средних компонент механических напряжений и напряженности электрического поля со средними значениями деформаций и компонент вектора индукции в структуре.

В силу того, что представления (2.2) обеспечивают квазипериодичность полей механических перемещений и потенциала электрического поля в структуре, проблему осреднения заданной структуры можно решить точно.

При переходе от произвольной точки структуры к конгруентной ей механические перемещения получают постоянное приращение, которое, с одной стороны, выражается через средние значения механических деформаций, а с другой—через приращения аналитических функций $\Phi_k(z_k)$. На основании этого имеем

$$\langle\varepsilon_1\rangle=\frac{1}{\omega_1}2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} p_k\Delta_1\Phi_k(z_k),\quad \langle\varepsilon_2\rangle=\frac{1}{H}2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\left[\Delta_2\Phi_k(z_k)-\frac{h}{\omega_1}\Delta_1\Phi_k(z_k)\right]$$

$$\langle\gamma_{12}\rangle=\frac{1}{H}2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} p_k\left[\Delta_2\Phi_k(z_k)-\frac{h}{\omega_1}\Delta_1\Phi_k(z_k)\right]+\frac{1}{\omega_1}2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\Delta_1\Phi_k(z_k) \tag{3.1}$$

$$\Delta_n\Phi_k(z_k)=\Phi_k(z_k+\omega_{nk})-\Phi_k(z_k)\quad (n=1,\ 2)$$

$$H=|\omega_2|\sin\alpha;\quad h=|\omega_2|\cos\alpha$$

Здесь $\langle\varepsilon_1\rangle$, $\langle\varepsilon_2\rangle$, $\langle\gamma_{12}\rangle$—средние деформации регулярной структуры.

Введем средние значения вектора индукции электрического поля по формулам

$$\langle D_2\rangle=\frac{1}{\omega_1}\int_{z}^{z+\omega_1} D_2\,dx \tag{3.2}$$

$$\langle D_n\rangle=\langle D_1\rangle\sin\alpha-\langle D_2\rangle\cos\alpha=\frac{1}{|\omega_2|}\int_{z}^{z+\omega_2}(D_1\sin\alpha-D_2\cos\alpha)\,dS$$

Используя (1.1), получим

$$\langle D_1\rangle=\frac{1}{H}\,2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\left|\Delta_2\Phi_k(z_k)-\frac{h}{\omega_1}\Delta_1\Phi_k(z_k)\right|$$

$$\langle D_3\rangle=-\frac{1}{\omega_1}\,2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\Delta_1\Phi_k(z_k) \tag{3.3}$$

С другой стороны, приращения функций $\Phi_k(z_k)$ находим из (2.2) с учетом свойств сигма-функции Вейерштрасса

$$\Delta_n\Phi_k(z_k)=B_k\omega_{nk}+\Lambda_k\delta_{nk}\quad(n=1,\ 2)$$

$$\Lambda_k=\frac{b_k}{2\pi i}\int_{-l}^{l}xg(x)dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}t_k\omega_k(t)dt_k \tag{3.4}$$

Здесь функционалы Λ_k построены на решениях уравнений (2.3). Подставляя (3.4) в (3.1) и (3.3), приходим к соотношениям

$$\langle\varepsilon_1\rangle=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}p_kB_k+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_{1k}}{\omega_1}p_k\Lambda_k$$

$$\langle\varepsilon_3\rangle=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\mu_kB_k+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_{1k}\mu_kH-2\pi i}{H\omega_1}q_k\Lambda_k$$

$$\langle\gamma_{13}\rangle=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}(p_k\mu_k+q_k)B_k+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\delta_{1k}}{\omega_1}q_k+\frac{\delta_{1k}\mu_kH-2\pi i}{H\omega_1}p_k\right)\Lambda_k \tag{3.5}$$

$$\langle D_1\rangle=2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\mu_kB_k+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_{1k}\mu_kH-2\pi i}{H\omega_1}r_k\Lambda_k$$

$$\langle D_3\rangle=-2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_kB_k-2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_{1k}}{\omega_1}r_k\Lambda_k$$

Учитывая механические и электрические условия на сторонах параллелограмма периодов и вводя стандартные решения системы (2.3) по формулам

$$g(x)=g_1(x)\langle\sigma_1\rangle+g_2(x)\langle\sigma_3\rangle+g_3(x)\langle\tau_{13}\rangle+g_4(x)\langle E_1\rangle+g_5(x)\langle E_3\rangle$$

$$\omega_k(t)=\omega_k^{(1)}(t)\langle\sigma_1\rangle+\omega_k^{(2)}(t)\langle\sigma_3\rangle+\omega_k^{(3)}(t)\langle\tau_{13}\rangle+ \tag{3.6}$$

$$+\,\omega_k^{(4)}(t)\langle E_1\rangle+\omega_k^{(5)}(t)\langle E_3\rangle$$

получаем уравнения состояния макромодели

$$\langle\varepsilon\rangle=\langle S\rangle\langle\sigma\rangle;\quad\langle S\rangle=\|\langle S_{ij}\rangle\|\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 5)$$

$$\langle\varepsilon\rangle=\begin{bmatrix}\langle\varepsilon_1\rangle\\\langle\varepsilon_3\rangle\\\langle\gamma_{13}\rangle\\\langle E_1\rangle\\\langle E_3\rangle\end{bmatrix};\qquad\langle\sigma\rangle=\begin{bmatrix}\langle\sigma_1\rangle\\\langle\sigma_3\rangle\\\langle\tau_{13}\rangle\\\langle D_1\rangle\\\langle D_3\rangle\end{bmatrix}$$

$$\langle S_{ij}\rangle=S_{ij}^{*}-\frac{1}{H\omega_1}\,2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}B_{ik}\Lambda_k^{(j)}$$

$$B_{1k}=a_{13}\gamma_k-a_{14}\gamma_k\mu_k;\quad B_{2k}=a_{23}\gamma_k\mu_k^{-1}$$

$$\Delta_k^{(j)}=b_k\int_{-l}^{l} xg_j(x)dx+\int_L t_k\omega_k^{(j)}(t)dt_k$$

$$S_{11}^{*}=S_{11}-S_{13}^{2}S_{11}^{-1};\quad S_{12}^{*}=S_{12}-S_{12}S_{13}S_{11}^{-1}$$

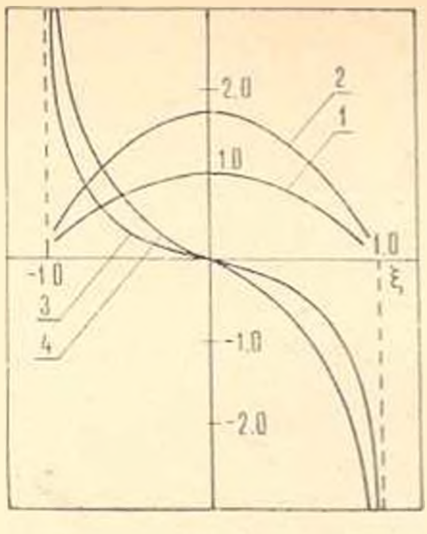
$$S_{13}^{*}=S_{14}^{*}=S_{23}^{*}=S_{24}^{*}=S_{35}^{*}=S_{45}^{*}=0$$

$$S_{15}^{*}=d_{31}-d_{33}S_{13}S_{11}^{-1};\quad S_{22}^{*}=S_{33}-S_{13}^{2}S_{11}^{-1}$$

$$S_{25}^{*}=d_{33}-d_{11}S_{13}S_{11}^{-1};\quad S_{33}^{*}=S_{44};\quad S_{34}^{*}=d_{15}$$

$$S_{44}^{*}=\varepsilon_{11};\quad S_{55}^{*}=\varepsilon_{33}-d_{33}^{2}S_{11}^{-1};\quad S_{ij}^{*}=S_{ji}^{*}$$

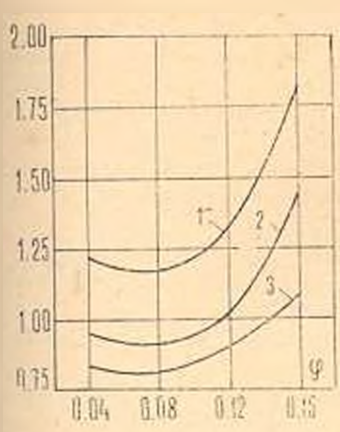
4. *Результаты счета.* Система уравнений (2.3), (1.4), (2.4) была реализована численно по схеме типа Мультоппа. В качестве примера рассматривалась квадратная решетка с периодами $\omega_1=2$, $\omega_2=2l$, с системой прямолинейных включений шириной $2l$, когда в пределах каждой ячейки имеется одна трещина с поперечным сечением в виде дуги окружности $x=10\cos\frac{1+\beta}{2}\psi-9$, $z=10\sin\frac{1+\beta}{2}\psi$, $-1\leq\beta\leq1$.



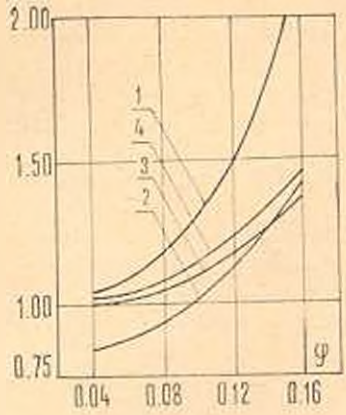
Фиг. 2

На фиг. 2 представлены результаты расчетов относительных усилий в ребре $\langle N\rangle=N/(\langle\sigma_1\rangle l)$ (кривая 1 соответствует $L=0{,}2$, кривая 2 — $L=0{,}8$, $2L$ — длина трещины) и относительного контактного усилия $\langle g(x)\rangle=+g(x)/\langle\sigma_1\rangle$ (кривая 3 соответствует $L=0{,}2$, кривая 4 — $L=0{,}8$) при $\langle\sigma_1\rangle\neq0$, $\langle\sigma_2\rangle=\langle\tau_{12}\rangle=\langle E_1\rangle=\langle E_2\rangle=0$, $\iota=0$, $l=0{,}4$; $x=\xi l$, $-1\leq\xi\leq1$.

Графики на фиг. 3 иллюстрируют изменение относительных величин $\langle\sigma_n\rangle=\frac{\sigma_n}{\langle\sigma_1\rangle}\sqrt{\frac{2\rho}{L}}$ (кривая 1), $\langle\sigma_S\rangle=\frac{\sigma_S}{\langle\sigma_1\rangle}\sqrt{\frac{2\rho}{L}}$ (кривая 2), $\langle E_S\rangle=\frac{E_S}{\langle\sigma_1\rangle}\sqrt{\frac{2\rho}{L}}\frac{\varepsilon_{11}}{d_{33}}$ (кривая 3) на продолжении за вершину трещины h в функции от параметра ρ. Видно, что при увеличении длины трещины, когда перемычка между конгруентными трещинами уменьшается, относительный коэффициент интенсивности $\langle\sigma_n\rangle$ существенно растет, кроме того, кривые на фиг. 3 подтверждают явление разгрузки, обычно имеющее место при взаимном влиянии трещин.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 представлены результаты расчетов осредненных параметров структуры. Графики 1, 2 иллюстрируют изменение макропараметра $\langle S_{11}\rangle/S^*_{11}$, графики 3, 4—$\langle S_{33}\rangle/S^*_{33}$. Графики 1, 3, и 2, 4 построены при $l=0{,}2$ и $0{,}8$ соответственно. Остальные макропараметры практически не изменяются. Из результатов видно, что увеличение длины разреза существенно уменьшает жесткость структуры в направлении оси Ox. Это объясняется тем, что при выбранных параметрах разрезы приблизительно прямолинейны и ориентированы вдоль оси Oz.

ԲԱՐԱԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՆԵՐԻ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ ՃԵՂՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՄԻԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Օ. Ա. ԻՎԱՆԵՆԿՈ, Լ. Ա. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

Ամփոփում

Կառուցված է թունելային ճաքերի տիպի դեֆեկտներով թուլացված պյեզոկերամիկական մատրիցայով կոմպոզիցիոն նյութի ժապավենի մոդելը: Լուծված են այդպիսի կառուցվածքով պյեզոառաձգական հատկությունների միջինացման մասին նոր խնդիրներ: Բերված են հաշվարկի արդյունքները:

THE REINFORCEMENT OF PIEZOCERAMIC MATRIX SLACKENED BY SECTIONS BY A REGULAR SYSTEM OF THIN ELASTIC INCLUSIONS

O. A. IVANENKO, L. A. FILSHTINSKY

Summary

A model has been created for a tape-shaped composite material with a matrix attached, the latter being slackened by tunnel crack type defects.

New problems of smoothing the piezoelastic properties of such a structure have been solved and calculation results surveyed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванского госуниверситета, 1976. 536 с.
2. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами.—ПМ, 1979, т. *15*, № 1, с. 24—30.
3. *Белокопытова Л. В., Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.* Передача нагрузки от упругого ребра к полубесконечной пьезокерамической пластинке.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. *34*, №5, с. 41—50.
4. *Белокопытова Л. В., Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.* Сопряженные электрические и механические поля в пьезоупругих телах с разрезами или включениями. Харьков: Динамика и прочность машин, 1981, вып. 34, с. 16—21.
5. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Физическая акустика (Под ред У. Мезона, ч. А. 1). М.: Мир, 1966. 592 с.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 511 с.

Сумский филиал Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 10.VI. 1983.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 539.3

К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ПОДКРЕПЛЕННЫХ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

ЮРИНЕЦ В. Е.

1. Исследуем неоднородную ортотропную полубесконечную пластину, несимметрично подкрепленную по всей длине прямолинейного края упругим элементом постоянного сечения. Подкрепляющий элемент нагружен внешними нормальными N, тангенциальными T и перерезывающими P усилиями, а также моментами M. Со стороны упругого элемента на торец пластины будут передаваться соответствующие контактные усилия $N^{(0)}$, $T^{(0)}$, $P^{(0)}$ и моменты $M^{(0)}$. Таким образом, для контура контакта имеют место условия равенства перемещений подкрепляющего элемента и пластины и справедливы соотношения

$$(\sigma_y)_{y=0}=N^{(0)}, \quad (\tau_{xy})_{y=0}=T^{(0)}, \quad (M_y)_{y=0}=M^{(0)}, \quad \left(N_y+\frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0}=P^{(0)} \tag{1.1}$$

При наличии эксцентриситета подкрепления ($\zeta_0\neq 0$) независимо от вида нагружения пластина испытывает обобщенное плоское напряженное и изгибное состояния, вследствие чего необходимо решать комплексную задачу сопряжения для нахождения контактных усилий и моментов.

Предположим, что коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 для материала пластины постоянные, а модули упругости E_1, E_2 и модуль сдвига G являются дифференцируемыми функциями декартовой координаты y и меняются с глубиной по закону

$$E_1=E_1^{(0)}\exp[-f(y)], \quad E_2=E_2^{(0)}\exp[-f(y)], \quad G=G^{(0)}\exp[-f(y)] \tag{1.2}$$

где $f(y)$ — определенно положительная дифференцируемая функция.

Введение функции $f(y)$ в экспоненту не нарушает общности постановки задачи, так как, вводя некоторую определенно положительную дифференцируемую функцию $f^*(y)$ при помощи соотношения $f(y)=-[\ln f^*(y)]$, в выражениях (1.2) можно избавиться от экспоненты.

Используя соотношения Гука для ортотропной пластины, условия равновесия, условия совместности [1] и выражения (1.2), запишем дифференциальное уравнение для некоторой функции $L(x, y)$

$$\frac{\partial^6 L}{\partial x^2\,\partial y^4}+2f'\,\frac{\partial^5 L}{\partial x^2\,\partial y^3}+(f'^2+f'')\,\frac{\partial^4 L}{\partial x^2\partial y^2}+\left(\frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}}-2\nu_1\right)\frac{\partial^6 L}{\partial x^4\partial y^2}+$$

$$+f'\left(\frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}}-2\nu_1\right)\frac{\partial^5 L}{\partial x^4\partial y}+\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}\,\frac{\partial^6 L}{\partial x^6}-\nu_1(f'^2+f'')\,\frac{\partial^4 L}{\partial x^4}=0 \qquad (1.3)$$

где компоненты тензора напряжений задаются выражениями [2]

$$\sigma_x=\frac{\partial^4 L}{\partial x^2\,\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^4 L}{\partial x^4},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^4 L}{\partial x^3\,\partial y} \qquad (1.4)$$

Таким же образом выведем дифференциальное уравнение для нахождения функции прогибов $w_2(x,y)$ пластины

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4}-2f'\,\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}+(f'^2-f'')\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+2\left[\nu_1+2(1-\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial y^2}-$$

$$-2f'\left[\nu_1+2(1-\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2\partial y}+\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}\,\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+\nu_1(f'^2-f'')\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=0 \qquad (1.5)$$

Для упрощения проведения численных расчетов конкретных задач путем перехода к безразмерным величинам введем взаимосвязь между модулями упругости и модулем сдвига пластины при помощи соотношения

$$G^{(0)}=\frac{E_1^{(0)}}{2(p_0^2+\nu_1)}\qquad\left(p_0^2=\sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}}\right) \qquad (1.6)$$

В области изображений Фурье уравнения (1.3), (1.5) имеют вид

$$\frac{d^4\Theta}{dy^4}-2f'\,\frac{d^3\Theta}{dy^3}+(f'^2+f''-2p_0^2\lambda^2)\frac{d^2\Theta}{dy^2}-2p_0^2\lambda^2 f'\,\frac{d\Theta}{dy}+$$

$$+\lambda^2[\lambda^2 p_0^4+\nu_1(f'^2+f'')]\Theta=0 \qquad (1.7)$$

$$\frac{d^4\overline{w}_2}{dy^4}-2f'\,\frac{d^3\overline{w}_2}{dy^3}+(f'^2-f''-2p_0^2\lambda^2)\,\frac{d^2\overline{w}_2}{dy^2}+2p_0^2\lambda^2\,\frac{d\overline{w}_2}{dy}+$$

$$+\lambda^2[\lambda^2 p_0^4-\nu_1(f'^2-f'')]\overline{w}_2=0 \qquad (1.8)$$

причем

$$\Theta(\lambda,y)=\lambda^4\overline{L}(\lambda,y) \qquad (1.9)$$

Следовательно, задача обобщенного плоского напряженного состояния и задача изгиба для неоднородных ортотропных неограниченных в направлении оси x пластин сводится к решению краевых задач линейных дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8) при соответствующих граничных условиях.

2. Если дифференциальные уравнения (1.7), (1.8) имеют решение, то эти уравнения можно представить в виде

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}-\alpha(y)\frac{d}{dy}-\beta(y)\right]\left[\frac{d^2F}{dy^2}+\gamma(y)\frac{dF}{dy}+\delta(y)F\right]=0 \qquad (2.1)$$

где $F=\Theta$ для уравнения (1.7) и $F=\overline{w}_2$ для уравнения (1.8).

Независимые коэффициенты α, β, γ, δ можно определить из системы уравнений

$$\alpha+\gamma=\varphi_1(y),\quad 2\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\gamma+\beta+\delta=\varphi_2(y)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dy^2}+2\frac{d\delta}{dy}+\alpha\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\delta+\beta\gamma=\varphi_3(y),\quad \frac{d^2\delta}{dy^2}+\alpha\frac{d\delta}{dy}+\beta\delta=\varphi_4(y) \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_1(y)=2f',\quad \varphi_2(y)=f'^2+f''-2p_0^2\lambda^2$$

$$\varphi_3(y)=-2p_0^2\lambda^2 f',\quad \varphi_4(y)=\lambda^4p_0^4+\nu_1\lambda^2(f'^2+f'') \tag{2.3}$$

для задачи обобщенного плоского напряженного состояния

$$\varphi_1(y)=-2f',\quad \varphi_2(y)=f'^2-f''-2p_0^2\lambda^2$$

$$\varphi_3(y)=2p_0^2\lambda^2f',\quad \varphi_4(y)=\lambda^4p_0^4-\nu_1\lambda^2(f'^2-f'') \tag{2.4}$$

для задачи изгиба.

С помощью системы уравнений (2.2) можно найти в явном виде коэффициенты α, β, γ, δ для некоторых частных случаев $f(y)$, когда дифференциальные уравнения (1.7), (1.8) представляется возможным записать в виде (2.1).

Предположим, что $f(y)$ функция вида

$$f(y)=-\ln(g+ky)^s \tag{2.5}$$

где g, k, s — постоянные.

Для функции (2.5) из системы уравнений (2.2) с учетом (2.3) находим

$$\alpha=\frac{k(1-s)}{g+ky},\quad \beta=-p_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}-\frac{k^2(1+s)}{(g+ky)^2}$$

$$\gamma=-\frac{k(1+s)}{g+ky},\quad \delta=-p_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky} \tag{2.6}$$

На основании полученных соотношений (2.6) уравнение (1.7) запишем в виде

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}-\frac{k^2(1+s)}{(g+ky)^2}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}\right]\Theta\right\}=0 \tag{2.7}$$

Следуя изложенной методике, аналогично уравнение (1.8) представим в виде

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}+\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{d^2\overline{w}_2}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\overline{w}_2}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}\right]\overline{w}_2\right\}=0 \tag{2.8}$$

В общем случае решение дифференциальных уравнений (2.7), (2.8) сводится к решению уравнений

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}\right]\Theta=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2\overline{w}_2}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\overline{w}_2}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(p_0^2-\nu_1 s)}}{g+ky}\right]\overline{w}_2=0 \tag{2.10}$$

которые подстановками

$$\Theta=\Psi^{\frac{1+s}{2}}W(\Psi),\quad \overline{w}_2=\Psi^{\frac{1-s}{2}}W(\Psi),\quad \Psi=\frac{2p_0\lambda}{k}(g+ky) \tag{2.11}$$

сводятся к уравнениям Уиттекера [3]. Окончательно для функций Θ и $\overline{w}_2$ имеем

$$\Theta=y_0^{\frac{s+1}{2}}\left[C_1W_{n,m}(\Psi)+C_2W_{-n,m}(\Psi)+C_3W_{n,m}(-\Psi)+C_4W_{-n,m}(-\Psi)\right] \tag{2.12}$$

$$\overline{w}_2=y_0^{\frac{1-s}{2}}\left[B_1W_{\varkappa,\mu}(\Psi)+B_2W_{-\varkappa,\mu}(\Psi)+B_3W_{\varkappa,\mu}(-\Psi)+B_4W_{-\varkappa,\mu}(-\Psi)\right] \tag{2.13}$$

где C_j, B_j $(j=\overline{1,4})$ — произвольные функции параметра λ, подлежащие определению из граничных условий; $W_{\pm n,m}(\pm\Psi)$, $W_{\pm\varkappa,\mu}(\pm\Psi)$ — функции Уиттекера

$$y_0=g+ky;\quad n=\frac{1}{2}\sqrt{(1+s)(p_0^2-\nu_1 s)};\quad m=1+\frac{s}{2};\quad \varkappa=\frac{1}{2}\sqrt{(1-s)(p_0^2-\nu_1 s)}$$

$$\mu=1-\frac{s}{2} \tag{2.14}$$

В частности, при $n=0$, то есть, когда $s=-1$ или $\nu_1=p_0^2/s$, уравнения (2.9) совпадают и дают только два независимых решения. Так если $\nu_1\neq p_0^2/s$ и $s\neq-1$, то функцию Θ следует искать из уравнения

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-p_0^2\lambda^2\Theta=\Theta_0 \tag{2.15}$$

где Θ_0 — общее решение уравнения

$$\frac{d^2\Theta_0}{dy^2}+\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta_0}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2+\frac{k(1+s)}{g+ky}\right]\Theta_0=0 \tag{2.16}$$

Решая уравнения (2.16) и (2.15), получаем

$$\Theta=y_n^m\left\{C_1\left[I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int K_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-K_m(\Psi)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\right]+\right.$$
$$+C_2\left[K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\right]+$$
$$\left.+C_3I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)+C_4K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right\} \tag{2.17}$$

где $I_m(\Psi/2)$, $K_m(\Psi/2)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента I и II рода порядка m.

Когда $s=-1$, выражение для Θ имеет вид

$$\Theta=C_1e^{\frac{\Psi}{2}}+C_2e^{-\frac{\Psi}{2}}+C_3[e^{\frac{\Psi}{2}}\ln y_0-e^{-\frac{\Psi}{2}}\mathrm{Ei}^*(\Psi)]+C_4[e^{-\frac{\Psi}{2}}\ln y_0-e^{\frac{\Psi}{2}}\mathrm{Ei}(-\Psi)] \tag{2.18}$$

где $\mathrm{Ei}^*(\Psi)$, $\mathrm{Ei}(-\Psi)$ — интегральные показательные функции.

Аналогично, выражение для трансформанты функции прогиба $\bar{w}_2$ при $\nu_1=p_0^2/s$ и $s\neq 1$ будет вида (2.17), в котором m заменено на μ, а при $s=1$ — вида (2.18).

3. Предположим, для определенности, что $n\neq 0$ и $\varkappa\neq 0$. Тогда выражения для Θ и $\bar{w}_2$, ограниченные на бесконечности ($y\to\infty$), будут иметь вид

$$\Theta=y_0^{m-\frac{1}{2}}[C_1W_{n,m}(\Psi)+C_2W_{-n,m}(\Psi)] \tag{3.1}$$

$$\bar{w}_2=y_0^{\mu-\frac{1}{2}}[B_1W_{\varkappa,\mu}(\Psi)+B_2W_{-\varkappa,\mu}(\Psi)] \tag{3.2}$$

Используя соотношения Коши, условия равновесия и выражения (1.2), (1.4), (2.5), получаем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial^4L}{\partial x^2\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^4L}{\partial x^4}\right)$$

$$\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}=\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{1}{G}\right)\frac{\partial^4L}{\partial x^3\partial y}-\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4L}{\partial x^2\partial y^3}+\frac{ks}{E_1y_0}\left(\frac{\partial^4L}{\partial x^2\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^4L}{\partial x^4}\right) \tag{3.3}$$

Применяя к соотношениям (3.3) интегральное преобразование Фурье по переменной x, учитывая при этом выражения (1.6), (3.1), (3.2) и граничные условия (1.1), для точек контактирующего торца пластины имеем

$$(\lambda^2\bar{u}_2)_{y=0}=\frac{1}{\gamma_0E_2^{(0)}}(\gamma_1\bar{N}^{(i)}+i\lambda\gamma_2\bar{T}^{(i)}),\quad (\lambda^4\bar{v}_2)_{y=0}=\frac{1}{\gamma_0E_2^{(0)}}(\gamma_3\bar{N}^{(i)}+i\lambda\gamma_4\bar{T}^{(i)})$$

где (3.4)

$$\gamma_0=W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\left[2nW_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)-W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\right]+$$
$$+W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)$$

$$\gamma_1=[(p_0t_2+t_1t_{16}-p_0t_5-t_1t_{17})\lambda^2+k(p_0t_3+t_2t_{16}-p_0t_6-t_5t_{17})\lambda+k^2(t_3t_{16}-$$
$$-t_6t_{17})]W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)-[t_1\lambda^2+k(p_0t_4+t_2)\lambda+k^2(t_6+t_4t_{17})]\times$$
$$\times W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)+[t_1\lambda^2+k(p_0t_4+t_5)\lambda+k^2(t_6+t_4t_{16})]\times$$
$$\times W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right);\quad \gamma_2=[(t_5-t_2)\lambda+k(t_6-t_3)]W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\times$$

$$\times W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)+kt_5\left[W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)-W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\right];\ \gamma_3=[(p_0t_8+t_7t_{16}-p_0t_{13}-t_7t_{17})\lambda^3+k(p_0t_9+t_6t_{16}-t_{13}t_{17}-$$

$$-p_0t_{11})\lambda^2+k^2(p_0t_{10}+t_9t_{16}-p_0t_{15}-t_{14}t_{17})\lambda+k^3(t_{10}t_{16}-t_{15}t_{17})]\,W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)\times$$

$$\times W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)+[(p_0t_1-t_2)\lambda^3+k(p_0t_{16}+t_1t_{17}-t_8)\lambda^2+k^2(p_0t_{12}+t_{16}t_{17}-$$

$$-t_9)\lambda+k^3(t_{12}t_{17}-t_{10})]\,W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)+[(t_7-p_0t_1)\lambda^3+$$

$$+k(t_{13}-p_0t_{11}-t_1t_{16})\lambda^2+k^2(t_{14}-p_0t_{12}-t_{11}t_{16})\lambda-k^3(t_{18}t_{12}-t_{15})]\times$$

$$\times W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)-k^2\lambda(t_{11}-t_{10})\,W_{n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)$$

$$\gamma_4=[(t_{13}-t_8)\lambda^2+k(t_{14}-t_9)\lambda+k^2(t_{15}-t_{10})]\,W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)+$$

$$+(t_1\lambda^2+kt_{11}\lambda+k^2t_{12})\,W_{-n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)-(t_1\lambda^2+kt_{16}\lambda+$$

$$+k^2t_{12})\,W_{n,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right)W_{-n+1,m}\left(\frac{2p_0\lambda}{k}\right);\quad t_1=p_0^2-\nu_1;\quad t_2=p_0(2m-2n-1)$$

$$t_3=2m^2-2mn-2m+n+\frac{1}{2};\quad t_4=1-2m;\quad t_5=p_0(2m+2n-1)$$

$$t_6=2m^2+2mn-2m-n+\frac{1}{2};\quad t_7=p_0(p_0^2-\nu_1);\quad t_8=p_0^2\left(s-m+n+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\nu_1\left(m-n+\frac{1}{2}\right);\quad t_9=p_0[s(2m-2n-1)+6mn-4m^2-2n^2+6m-5n-2]$$

$$t_{10}=s\left(2m^2-2nm-2m+n+\frac{1}{2}\right)+4m^2n-4m^3+8m^2-6mn-5m+2n+1$$

$$t_{11}=-t_{16}=2p_0n;\quad t_{12}=s(2m-1)-4m^2+6n-2;\quad t_{13}=p_0^2\left(s-m+n+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\nu_1\left(m+n+\frac{1}{2}\right);\quad t_{14}=p_0[s(2m+2n-1)-4m^2+6m+5n-2n^2-6mn-2]$$

$$t_{15}=s\left(2m^2+2nm-2m-n+\frac{1}{2}\right)-8m^2+6mn-4m^3-4m^2n-5m-2n+1$$

$$t_{17}=n+m-\frac{1}{2};\quad t_{18}=m-n-\frac{1}{2}$$

Таким же путем, используя выражение (3.2) и граничные условия (1.1), запишем соотношения для трансформанты функции прогиба пластины $\bar w_2(\lambda, y)$ и ее первой производной для точек контура контакта с упругим элементом

$$(\bar w_2)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3 E_2^{(0)}\gamma_0}(\gamma_1 \bar P^{(0)} + \gamma_2 \bar M^{(0)}), \quad \left(\frac{d\bar w_2}{dy}\right)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3 E_2^{(0)}\gamma_0}(\gamma_3 \bar P^{(0)} + \gamma_4 \bar M^{(0)})$$

где $2h$ — толщина пластины; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — функции параметра λ, зависящие также от упругих, жесткостных и геометрических характеристик неоднородной ортотропной пластины, выражения которых ввиду большой громоздкости здесь не приведены.

4. Расчет упругого подкрепляющего элемента базируется на теории тонких криволинейных стержней. Используя результаты работы [4], уравнения для трансформант перемещений прямолинейного упругого элемента с учетом всех его упругих, жесткостных, геометрических характеристик и эксцентриситета подкрепления имеют вид

$$\lambda^3 \bar u_1 = \frac{2h\varepsilon_1}{g_2}\bar N^{(0)} + 2hi\lambda\left(\frac{1}{g_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{g_2} + \frac{\dot\varepsilon_0^2}{A}\right)\bar T^{(0)} - \frac{\dot\varepsilon_0}{A}\bar P^{(0)} - \frac{2h^*\varepsilon_1}{g_2}\bar N -$$
$$-2h^* i\lambda\left(\frac{1}{g_1} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\dot\varepsilon_0\dot\varepsilon_1}{A}\right)\bar T + \frac{\dot\varepsilon_0}{A}\bar P$$

$$\lambda^3 \bar v_1 = 2h\left(\frac{1}{g_2} - \frac{\lambda^2\dot\varepsilon_0^2}{C}\right)\bar N^{(0)} + 2hi\lambda\frac{\varepsilon_1}{g_2}\bar T^{(0)} + \frac{\lambda^2\varepsilon_1\dot\varepsilon_0}{C}\bar P^{(0)} + \frac{\lambda^2\varepsilon_1}{C}\bar M^{(0)} -$$
$$-2h^*\left(\frac{1}{g_2} + \frac{\lambda^2\dot\varepsilon_0\dot\varepsilon_1}{C}\right)\bar N + i\lambda\frac{2h^*\varepsilon_2}{g_2}\bar T + \frac{\lambda^2\varepsilon_2\dot\varepsilon_0}{C}\bar P - \frac{\lambda^2\varepsilon_1}{C}\bar M$$

$$\lambda^4 \bar w_1 = 2h\lambda^2\frac{\varepsilon_1\dot\varepsilon_0}{C}\bar N^{(0)} - 2hi\lambda\frac{\dot\varepsilon_0}{A}\bar T^{(0)} + \left(\frac{1}{A} + \frac{\lambda^2\varepsilon_1^2}{C}\right)\bar P^{(0)} + \frac{\lambda^2\varepsilon_1}{C}\bar M^{(0)} -$$
$$-2h^*\lambda^2\frac{\varepsilon_1\dot\varepsilon_1}{C}\bar N + 2h^* i\lambda\frac{\dot\varepsilon_0}{A}\bar T - \left(\frac{1}{A} + \lambda^2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{C}\right)\bar P - \frac{\lambda^2\varepsilon_1}{C}\bar M \qquad (4.1)$$

$$\lambda^2\frac{d\bar w_1}{dy} = 2h\frac{\dot\varepsilon_0}{C}\bar N^{(0)} + \frac{\varepsilon_1}{C}\bar P^{(0)} + \frac{1}{C}\bar M^{(0)} - 2h^*\frac{\dot\varepsilon_1}{C}\bar N + \frac{\varepsilon_2}{C}\bar P - \frac{1}{C}\bar M$$

где $2h^*$ — ширина подкрепляющего элемента; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — расстояния от нейтрального слоя (оси) до соответственно контактирующего и внешнего края подкрепляющего элемента; $\dot\varepsilon_0$ — расстояние между осью подкрепляющего элемента и срединной плоскостью пластины (эксцентриситет подкрепления); $h^* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — высота подкрепляющего элемента; $\dot\varepsilon_1$ — расстояние между осью подкрепляющего элемента и точкой приложения к нему внешней нормальной нагрузки; g_1, g_2, A, C — жесткости упругого элемента соответственно на растяжение, изгиб и кручение.

На основании условий равенства перемещений пластины и упругого элемента вдоль контура контакта, учитывая соотношения (3.4), (3.5) и (4.1), получаем систему четырех алгебраических уравнений относительно трансформант контактных усилий $\bar N^{(0)}, \bar T^{(0)}, \bar P^{(0)}$ и моментов $\bar M^{(0)}$.

Так, в случае нагружения подкрепляющего элемента внешней нормальной сосредоточенной силой N_0 при $\dot\varepsilon_1 = 0$, решая полученную систему уравнений и применяя формулы обращения Фурье, имеем

$$N^{(0)}(x)=-\frac{N_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)}\cos\lambda x\,d\lambda,\quad T^{(0)}(x)=-\frac{N_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{Q_2(\lambda)}{Q_0(\lambda)}\sin\lambda x\,d\lambda$$

$$P^{(0)}(x)=-\frac{N_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{Q_3(\lambda)}{Q_0(\lambda)}\cos\lambda x\,d\lambda,\quad M^{(0)}(x)=-\frac{N_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{Q_4(\lambda)}{Q_0(\lambda)}\cos\lambda x\,d\lambda \qquad (4.2)$$

где $Q_0(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, $Q_3(\lambda)$, $Q_4(\lambda)$ — соответствующие определители полученной системы алгебраических уравнений относительно трансформант контактных усилий и моментов.

Пример. Рассмотрим неоднородную ортотропную полубесконечную пластину и подкрепляющий упругий элемент прямоугольного сечения $b^*\times 2h^*$ со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками:

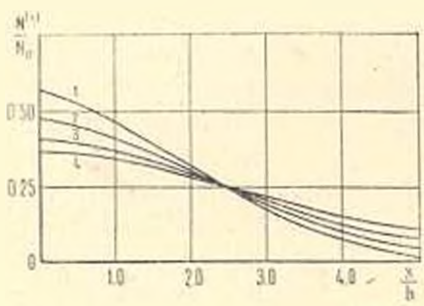
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=h;\quad \nu_1=\nu^*=0{,}3;\quad b^*=2h;\quad \varkappa_0=\varkappa_1=0;\quad g_1=2h^*b^*E^*$$

$$g_2=\frac{1}{6}E^*h^*b^{*3};\quad \frac{2h^*}{2h}=2{,}5;\quad \frac{E^*}{E_1^{(0)}}=2{,}0;\quad C=\frac{0{,}249E^*h^*b^{*3}}{1+\nu^*} \qquad (4.3)$$

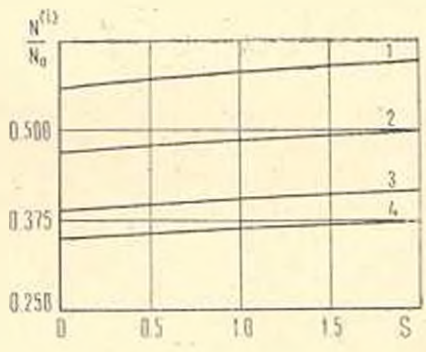
$$A=\frac{2}{3}E^*b^*h^{*3};\quad g=1;\quad k=0{,}1\ \text{м}^{-1}$$

где E^*, ν^* — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона подкрепляющего элемента.

Упругий элемент нагружен сосредоточенной сжимающей силой N_0, приложенной в плоскости его оси. Функции Уиттекера представлялись в виде асимптотических рядов [5]. Численный расчет контактных усилий по формулам (4.2) проводился на ЭВМ ЕС—1022 по методу Гаусса с точностью до 10^{-3} знака.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведена зависимость нормальных контактных усилий $N^{(0)}$ от координаты x, направленной вдоль центральной плоскости пластины, при $s=0$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $E_1^{(0)}/E_2^{(0)}=0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ 3{,}0$.

Зависимость $N^{(0)}$ от параметра s, характеризующего степень неоднородности материала пластины, изображена на фиг. 2 при $x=0$ и $E_1^{(0)}/E_2^{(0)}=0{,}5$; 1,0; 2,0; 3,0 (кривые 1, 2, 3, 4).

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԷԼԵՄԵՆՏՈՎ ԱՄՐԱՑՎԱԾ, ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Վ. Ե. ՅՈՒՐԻՆԵՑ

Ամփոփում

Ստացված են անհամասեռ օրթոտրոպ սալի ընդհանրացած հարթ լարվածային վիճակը և ծռումը բնութագրող ընդհանուր դիֆերենցիալ հավասարումները և գտնված են նրանց մի քանի լուծումները։ Հետազոտված է առաձգական էլեմենտի և անհամասեռ օրթոտրոպ առաձգական հատկությունները աստիճանային օրենքով փոփոխվող սալի կոնտակտային փոխազդեցությանը։

THE DEFINITION OF TENSE STATE OF INHOMOGENEOUS ORTHOTROP PLATES STRENGTHENED BY ELASTIC ELEMENT

V. E. YURYNETS

Summary

Common differential equations describing generalised plane strained state and bending of inhomogeneous orthotrop plates are derived and some of their solutions are given. Contact interaction of elastic element with inhomogeneous orthotrop plate, elastic properties of which change according to the law of degree has been studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат, 1967. 355 с.
2. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред.—ПММ, 1971, т. 35, №5, с. 853—860.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
4. *Мартынович Т. Л., Юринец В. Е., Божидарник В. В.* Контактное взаимодействие неоднородной полубесконечной пластины с несимметрично подкрепляющим упругим элементом.—ПМ, 1981, т. 17, №1, с. 77—85.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1100 с.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступила в редакцию
16.V. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 3, 1986 Механика

УДК 678.620:178

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

САРКИСЯН Н. Е.

Одним из принципиальных преимуществ современных композитных материалов является возможность усиления их механических свойств в направлении, в котором ожидается воздействие расчетной нагрузки. Такое усиление свойств материала (например, прочности), при сохранении неизменными других технологических факторов (тип связующего, волокна и т. д.), достигается доведением объемного содержания наполнителя до оптимальной величины и укладкой в нужном направлении большего числа волокон (усилением степени армирования).

Экспериментальному исследованию выбора оптимального содержания стекла и влияния степени ортогонального армирования на прочность и деформативность стеклопластиков посвящено множество работ [1]. Сравнительно мало изучен этот вопрос применительно к длительной прочности и ползучести [2] и, особенно, условиям циклического нагружения [3—6].

Между тем, актуальность подобных исследований очевидна в том аспекте, что параметры армирования, оптимальные для работы композита в условиях кратковременного нагружения, могут оказаться не совсем оптимальными при циклическом воздействии нагрузки, то есть, как отмечается в [7], оптимизация предела прочности стеклопластиков еще не означает оптимизацию их усталостной прочности.

Возможность такого положения впервые была установлена в экспериментальном исследовании [3], где рассматривалось влияние на усталостную прочность процентного содержания стекловолокон, укладываемых параллельно линии действия нагрузки. Некоторые результаты из этой работы приведены в табл. 1, где значения предела прочности испытанного материала на кратковременное статическое растяжение и сжатие нами взяты из обзора [7].

В соответствии с полученными в работе [3] данными стеклопластики, в которых все волокна уложены параллельно линии действия нагрузки, проявляют высокую прочность на растяжение и сжатие при однократном нагружении или при нескольких циклах до разрушения, но их усталостная прочность быстро падает с увеличением числа циклов до разрушения. Вместе с тем, добавка небольшого процента волокон в направлении, перпендикулярном к основному направлению армирования, или добавление чередующихся слоев под небольшим углом к оси нагрузки, приводило к заметному повышению усталостной прочности стеклопластика.

Ниже исследуем влияние степени ортогонального армирования на усталостную прочность ориентированных стеклопластиков с учетом типа связующего и вида осевой деформации.

Испытывались ориентированные стеклопластики типа СВАМ на эпокси-фенольном и бутвар-фенольном связующем, с укладкой волокон в двух ортогональных направлениях 1:1 и 5:1.

Методики проведения испытаний и статистической обработки экспериментальных данных освещены в работах [5, 6, 8].

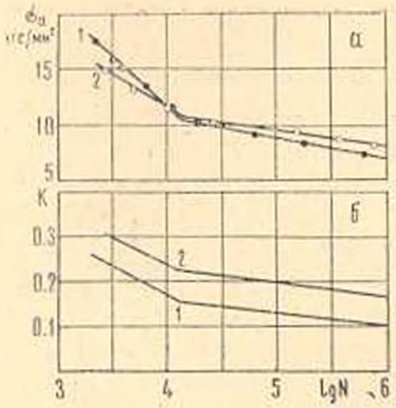
Как известно, исследование механических свойств желательно проводить на образцах, изготовленных из материала одной партии. При длительных испытаниях изменение «возраста» образцов в одной серии от 1 до 2 лет практически неизбежно. В наших опытах стеклопластики на эпокси-фенольном связующем в момент испытания были в «возрасте» 1—2 лет, а из СВАМ 1:1 и СВАМ 5:1 на связующем БФ-4 соответственно 5 и 10 лет. Исследование влияния старения на статическую прочность и деформативность стеклопластиков типа СВАМ показало, что после двух лет хранения образцов в комнатных условиях «возраст» материала практически перестает влиять на предел прочности и модуль упругости стеклопластика [9]. Старение практически не меняет также и усталостную прочность стеклопластика СВАМ [10]. В настоящей работе сериям усталостных испытаний непосредственно предшествовало определение статической прочности стеклопластиков. Поэтому анализ усталостных кривых в координатах $K-\lg N$ позволяет в неискаженном виде рассмотреть влияние степени ортогонального армирования на изменение усталостной прочности стеклопластиков.

На фиг. 1—3 приведены кривые Велера, иллюстрирующие влияние степени ортогонального армирования на абсолютное значение и коэффициент K усталостной прочности стеклопластиков типа СВАМ.

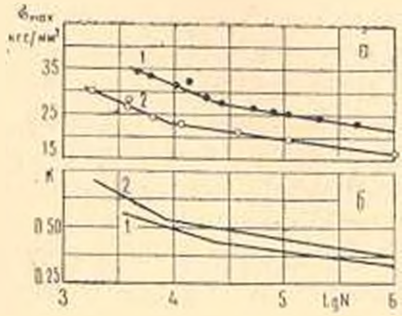
Для серии образцов на эпокси-фенольном связующем характерно снижение циклической прочности в направлении укладки большего числа волокон по сравнению с ортогонально равнопрочно армированным стеклопластиком. На это явление количественно влияет также и вид деформации. При симметричном растяжении-сжатии значения усталостной прочности СВАМ 1:1 и СВАМ 5:1 мало отличаются (фиг. 1), в то время как в случае пульсирующего растяжения прочность СВАМ 5:1 продолжает оставаться выше, чем прочность стеклопластика типа СВАМ 1:1 (фиг. 2).

Таким образом, в рассматриваемых здесь усталостных испытаниях стеклопластиков на эпокси-фенольном связующем наблюдается качественно та же картина, что и в [3]. Уместно отметить, что в указанной работе также испытывались стеклопластики на эпоксидном связующем.

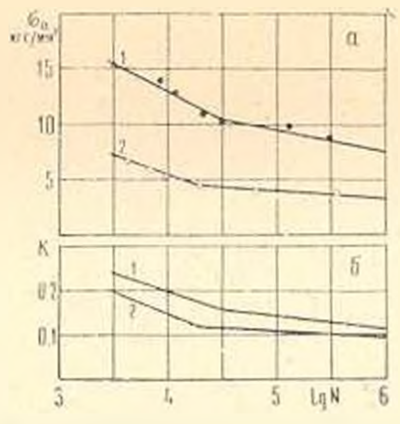
С точки зрения влияния типа связующего представляют интерес кривые Велера, приведенные на фиг. 3. Из этих кривых видно, что при том же симметричном цикле осевой деформации прочность СВАМ



Фиг. 1. Усталостная диаграмма стеклопластика на эпокси-фенольном связующем при симметричном растяжении-сжатии. 1.—СВАМ 5 : 1, 2.—СВАМ 1 : 1.



Фиг. 2. Усталостная диаграмма стеклопластика на эпокси-фенольном связующем при пульсирующем растяжении. 1.—СВАМ 5 : 1, 2.—СВАМ 1 : 1.



Фиг. 3. Усталостная диаграмма стеклопластика на бутвар-фенольном связующем при симметричном растяжении-сжатии 1.—СВАМ 5 : 1. 2.—СВАМ 1 : 1.

5:1 на бутвар-фенольном связующем неизменно выше, чем усталостная прочность композита на основе того же связующего, но при ортогонально равнопрочной укладке волокон. Это связано с различиями в адгезионной прочности между эпокси- и бутвар-фенольными связующими и стекловолокном и в механических характеристиках самих связующих. Адгезионная прочность смолы БФ-4 примерно в 1,5 раза ниже, чем эпокси-фенольного связующего как в абсолютном значении, так и по отношению к пределу прочности стеклопластика на растяжение. Этим предопределен существенно низкий предел прочности СВАМ 1:1 на смоле БФ-4. Прочность же СВАМ 5:1 в направлении «5» не устушает прочности того же композита на эпокси-фенольном связующем потому, очевидно, что прочность композиции определяется не только прочностью адгезионной связи, но и свойствами (прочностью) армирующих волокон, которых в том же направлении в этом случае несколько раз больше.

В табл. 2 приведены значения усталостной прочности и коэффициента К стеклопластиков на базе 10^6 циклов нагружения. Эти данные свидетельствуют о том, что повышение степени ортогонального армирования композита в каком-либо направлении путем укладки в этом направлении большего числа волокон, являющееся одним из способов повышения кратковременной прочности, в отношении усталостной прочности может явиться не только неэффективным, но и в определенных случаях может стать причиной ее существенного снижения. Так, для стеклопластика на эпокси-фенольном связующем укладка волокон 5:1 по сравнению 1:1 увеличивает статическую кратковременную прочность на растяжение и сжатие почти в 1,5 раза в то время как, например, при $N = 10^6$ циклов усталостная прочность в отнулевом растяжении увеличивается лишь на 25%, а на симметричное растяжение-сжатие даже уменьшается на 20%. Коэффициент усталостной прочности в обоих случаях уменьшается соответственно на 18 и 11%.

Иную картину представляет усталостное поведение стеклопластика на бутвар-фенольном связующем. Эта же укладка волокон приводит к повышению не только статической прочности, но и усталостной прочности композита на симметричный цикл растяжения-сжатия. Причем повышение усталостной прочности оказывается даже относительно больше, чем увеличение предела прочности (соответственно в 2,2 и 1,8 раза).

Таблица 1

Зависимость усталостной прочности от содержания стекла параллельно направлению нагрузки и угла ориентации волокон

Содержание стекла, вес. %	Содержание стекла параллельно направлению нагрузки, %	Угол ориентации волокон относительно нагрузки, град	Предел прочности при растяжении $\sigma_{вр}$, кгс/мм²	Предел прочности при сжатии $\sigma_{вс}$, кгс/мм²	Усталостная прочность на базе 10^7 циклов $\sigma_у$, кгс/мм²	Коэффициент усталостной прочности К на базе 10^7 циклов	
						$\sigma_у/\sigma_{вр}$	$\sigma_у/\sigma_{вс}$
65,4	100	0	84,3	62,6	17,5	0,21	0,28
65,5	85	0,90	81,8	58,4	20,5	0,25	0,35
66,9	71	0,90	74,8	56,9	19,7	0,26	0,35
67,6	—	±5	82,0	65,1	25,2	0,31	0,39
64,9	—	±10	67,6	59,8	18,5	0,27	0,31
64,6	—	±15	62,7	58,7	14,0	0,22	0,24
63,0	—	±5	71,0	58,3	21,7	0,31	0,37
74,3	—	±5	94,6	73,5	23,4	0,25	0,32

Можно указать на целый ряд известных факторов, могущих быть причиной снижения усталостной прочности ортогонально неравнопроч-

Таблица 2

Зависимость усталостной прочности стеклопластиков от степени ортогонального армирования, вида деформации и типа связующего

Тип связующего стеклопластика	Укладка волокон	Кратковременный предел прочности, кгс/мм²		Коэф. асимметрии цикла напряжений r	Усталостная прочность на базе 10⁶ циклов, кгс/мм²	Коэффициент усталостной прочности K на базе 10⁶ циклов		Температура разогрева при разрушении, °C
		$\sigma_{вр}$	$\sigma_{вс}$			$\frac{\sigma_r}{\sigma_{вр}}$	$\frac{\sigma_r}{\sigma_{вс}}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Эпокси фенольное	1:1	48,00±0,55	36,05±0,80	−1	8,15±0,50	0,17±0,01	0,23±0,01	79,0±2,0
"	5:1	67,35±0,90	49,50±2,50	−1	6,95±0,85	0,10±0,01	0,14±0,02	10,0±1,0
"	1:1	43,10±3,25	—	0	16,85±1,40	0,39±0,03	—	120,0±2,5
"	5:1	64,10±4,05	—	0	21,30±1,45	0,33±0,02	—	125,0±3,0
Бутвар-фенольное	1:1	35,80±1,00	28,90±0,50	−1	3,25±0,30	0,09±0,01	0,11±0,01	67,5±1,5
"	5:1	65,75±1,80	—	−1	7,55±0,60	0,11±0,01	—	57,5±3,0

Примечание. Для значений прочности стеклопластика на кратковременное растяжение и сжатие ($\sigma_{вр}$ и $\sigma_{вс}$) указано средне квадратическое отклонение, а для усталостной прочности—отклонение от среднего значения, соответствующее доверительному интервалу при вероятности 95%, рассчитанное по распределению Стьюдента.

В столбцах 6 и 7 при пульсирующем растяжении дано максимальное напряжение цикла и значение отношения $\sigma_{max}/\sigma_{вр}$.

ных стеклопластиков. Это, в частности, плотная укладка волокон в одном направлении, приводящая к возникновению концентрации деформаций и напряжений. Уменьшение объемного содержания связующего в направлении действия нагрузки может приводить и к снижению межслоевой сдвиговой прочности композита в этом направлении.

Рассмотрим возможность влияния циклического разогрева на изменение прочности ортогонально неравномерно армированного стеклопластика, имея в виду, в частности, убывание адгезионной прочности полимерного связующего к стекловолокну по мере возрастания температуры [11].

В основных испытаниях настоящей работы температура циклического разогрева измерялась на поверхности образцов. С целью установления связи между температурой разогрева внутри и на поверхности образца были поставлены специальные опыты. При этом придерживались методики, предложенной в [12]. Термопары помещались в два симметрично расположенных относительно продольной оси образца отверстия диаметром ~ 1 мм. Длина отверстия составляла примерно половину ширины рабочей части или толщины образца. Как показали опыты, отверстия указанных размеров снижали прочность на статическое растяжение не более, чем на 2,7%. При пульсирующем растяжении и симметричном растяжении-сжатии такие отверстия не влияли и на усталостную прочность стеклопластиков.

Отношение значений температуры разогрева T внутри и на поверхности образцов, на линейном участке зависимости T—N, в течение времени до 0,8—0,9 $\cdot N_p$ (N_p—число циклов до разрушения) является постоянным и при толщине образца, например, 10 мм составляет $\sim 1{,}20$. На стадии перед разрушением образца это отношение возрастает до 1,35.

В табл. 2 приведены среднеарифметические значения температуры разогрева внутри композита перед разрушением образца. При симметричном растяжении-сжатии СВАМ 1:1 и 5:1 на смоле БФ-4 температуры разогрева довольно близки, а для стеклопластика на эпокси-фенольном связующем при укладке волокон 5:1 температура даже в 2 раза ниже. Эти данные указывают на то, что циклический разогрев не может быть причиной наблюдаемого факта более низкой усталостной прочности композита в направлении укладки большего числа волокон.

Такое заключение можно обосновать и тем, что температурное падение прочности стеклопластиков СВАМ 1:1 и СВАМ 5:1 при статическом растяжении и сжатии не зависит от укладки волокон [13]. Кроме того, отношение модулей упругости при заданной высокой и нормальной температуре меняется с изменением температуры для ортогонально равнопрочного стеклопластика даже в большей мере, чем для однонаправленного стеклопластика [14].

Вывод. Установлено, что усиление степени ортогонального армирования стеклопластика в каком-либо направлении путем укладки в этом направлении большего числа волокон, являющееся одним из способов повышения статического предела прочности, в отношении усталостной прочности может быть неэффективным и даже привести к ее существенному снижению.

ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՎԱԾ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻԿՆԵՐԻ ՀՈԳՆԱԾԱՅԻՆ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Սահմանված է, որ կախված մի շարք գործոններից (լարումների ցիկլի ասիմետրիա, խեժի տարատեսակ և այլն) ապակեպլաստիկների օրթոգոնալ ամրանավորման ուժեղացումը մի ուղղությամբ ոչ միայն կարող է չլինել նյութի հոգնածային ամրության բարձրացման արդյունավետ եղանակ, այլև դառնալ նրա զգալի թուլացման պատճառ։

THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE DIRECTED FIBER-GLASS REINFORCED PLASTICS FATIGUE STRENGTH

N. E. SARKISIAN

Summary

Depending on certain factors (asymmetry of stress cycle, type of synthetic resins, etc.) it has been established that the intensification of fiber-glass reinforcements in any direction may not be an effective means of material fatigue strength increase. It has been shown that it maybe the reason of essential decrease of material fatigue strength.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреевская Г. Д.* Высокопрочные ориентированные стеклопластики. М.: Наука, 1966. 370 с.
2. *Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А.* Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1971. 240 с.
3. *Boller K. H.* Resume of Fatigue Characteristics of Reinforced Plastic Laminates Sybjected to Axial Loading.—In: Fatigue an interdisciplinary approach Proceedings of the 10 th Sagamore Army Materials Research Conference. 1964, p. 325—341.
4. *Smith T. R., Owen M. J.* Fatigue properties of RP.—Modern Plastic, 1969, v. 46, № 4, p. 124—126, 128, 132.
5. *Саркисян Н. Е.* Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВАМ при циклическом осевом нагружении.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 6, с. 54—63.
6. *Саркисян Н. Е.* Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков типа СВАМ.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, №2, с. 59—70.

7. *Браутман Л.* Армированные волокнами пластики.—В кн.: Современные композиционные материалы. М.. Мир. 1976. с. 114—505.
8. *Саркисян Н. Е.* Усталостные свойства ортогонально армированного неравнопрочного стеклопластика.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29. № 1. с. 67—74.
9. *Мартиросян М. М.* Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВАМ при растяжении с учетом ориентации волокон.—Механика полимеров, 1965, № 6, с. 20—29.
10. *Саркисян Н. Е.* О влиянии термической обработки на усталостные свойства нетканого стеклопластика.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1972, т. 25, № 5, с. 71—76.
11. *Лаврентьев В. В., Горбаткина Ю. А., Хархардин С. Н., Абрамов Г. А.* Изучение адгезии полимеров к стеклянным волокнам в широком интервале температур.—В кн.: Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. М.: Наука, 1967, с. 59—64.
12. *Олдырев П. П.* Температура разогрева и разрушение пластмасс при циклическом деформировании.—Механика полимеров, 1967, № 3, с. 483—492.
13. *Квасников Е. Н., Зверев А. Н.* Исследование механических характеристик стеклопластиков типа СВАМ в условиях пониженных и повышенных температур.—В кн.: Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. М.: Наука, 1967, с. 211—215.
14. *Гуменюк В. С., Крицук А. А., Лосицкий В. Н.* Исследование влияния температуры на механические свойства силовых стеклопластиков.—В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, Киев: Наукова думка, вып. 4, 1967, с. 155—159.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
7.II. 1984