

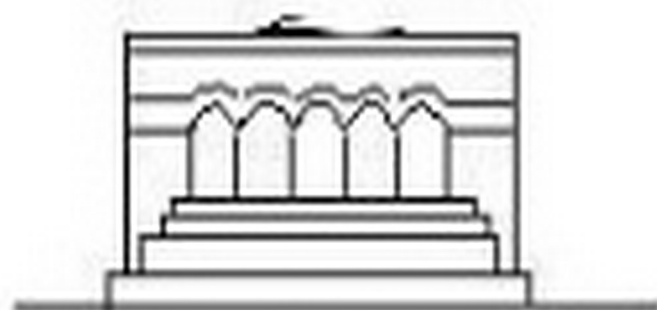
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1986

УДК 539.3.01

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ БАЛКИ

АГАЛОВЯН Л. А., ХАЧАТРЯН А. М.

Работа посвящена определению и анализу напряженно-деформированного состояния слоистой анизотропной полосы-балки, слои которой в плоскости полосы обладают анизотропией общего вида. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [1, 2]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [2—5]. О рамках применимости каждой модели или гипотезы можно судить, имея точное решение или асимптотическое поведение решения соответствующей трехмерной задачи.

М. И. Гусейн-Заде методом асимптотического интегрирования [6] трехмерных уравнений теории упругости исследовала напряженно-деформированное состояние слоистой пластинки, составленной из произвольного числа упругих изотропных слоев, жестко соединенных друг с другом. Дана классификация задач в зависимости от величины отношения модулей упругости слабых и несущих слоев [7, 8].

В настоящей работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче. Найдена связь полученного решения с решением по классической теории слоистых балок. Показано, что применимость классической теории существенно зависит как от отношений упругих коэффициентов отдельно взятого слоя, в частности, от $E^{(n)}/G^{(n)}$, так и от отношений модулей упругости различных слоев и их толщин. Важно отметить также, что эти факторы проявляют себя не раздельно, а в общем комплексе.

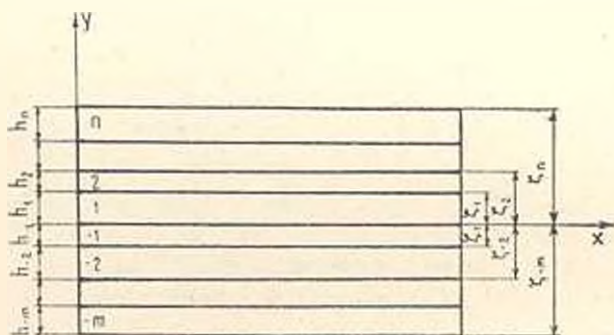
1. Постановка задачи и общее решение

Рассматривается плоская задача для анизотропной слоистой полосы длиной a и толщиной $2h$, на продольных сторонах которой заданы значения напряжений, а на торцах $x=0, a$ — произвольные пока условия. Считается, что слои имеют различные толщины h_n , коэффициенты упругости $\alpha_j^{(n)}$. Нумерацию слоев ведем от линии Ox , используя для слоев, расположенных под этой линией, отрицательные номера. Полоса состоит из $n+m$ слоев (фиг. 1).

Условия на лицевых линиях $\xi = \xi_n$ и $\xi = \xi_{-m}$ будут задаваться следующим образом:

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{a}{h} X^{\pm}(x), \quad \sigma_y = -Y^{\pm}(x) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_n, \xi_{-m} \quad (1.1)$$

Заранее никакие ограничения на упругие свойства не накладываются, они будут выявлены в ходе получения и анализа асимптотического решения. Это позволяет, во-первых, получить известные уравнения и соотношения классической теории, соответствующие гипотезе недеформируемых нормалей, выявить возможный вклад анизотропии при применении этой гипотезы, во-вторых, выделять асимптотически те главные члены и отношения, на которые в первую очередь следует обратить внимание при уточнении результатов по классической теории; указать предельные случаи, когда классическая теория не применима.



Фиг. 1

Чтобы решить сформулированную краевую задачу, будем использовать асимптотический метод [6]. Вводится безразмерная система координат $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$, после преобразования соответствующих уравнений теории упругости анизотропного тела, получается система, содержащая малый параметр $\epsilon = h/a$ при старших производных. Эта система сингулярно возмущенная, и ее решение складывается из двух типов решений—внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи ищется в виде [6—10]

$$Q^{(k)} = \epsilon^{-q} \sum_{s=0}^S \epsilon^s Q^{(k,s)} \quad (1.2)$$

где $Q^{(k)}$ —любое из напряжений или безразмерных перемещений $U^{(k)} = u^{(k)}/a$, $V^{(k)} = v^{(k)}/a$, k —номер слоя. Целое число q выбирается следующим образом [6, 9, 10]:

$$q = 2 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, U^{(k)}, q = 1 \text{ для } \sigma_y^{(k)}, q = 3 \text{ для } V^{(k)}, q = 0 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3), получим систему, решив которую, будем иметь

$$V^{(k)} = w^{(k)}(\xi) + v^{(k)}(\eta)$$

$$\begin{aligned}
 U^{(ks)} &= -\frac{dw^{(ks)}}{d\xi} \zeta + u^{(ks)} + u^{*(ks)}, \quad \sigma_{xy}^{(ks)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(ks)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 w^{(ks)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xy}^{*(ks)} \\
 \sigma_{xy0}^{(ks)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 w^{(ks)}}{d\xi^2} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u^{(ks)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xy0}^{(ks)} + \sigma_{xy}^{*(ks)} \\
 \sigma_y^{(ks)} &= -\frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 w^{(ks)}}{d\xi^2} \frac{\zeta^3}{6} + \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u^{(ks)}}{d\xi^2} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{d\sigma_{xy0}^{(ks)}}{d\xi} \zeta + \sigma_{y0}^{(ks)} + \sigma_y^{*(ks)}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $w^{(ks)}$, $u^{(ks)}$, $\sigma_{xy0}^{(ks)}$ и $\sigma_{y0}^{(ks)}$ — неизвестные пока функции от ξ и подлежат определению, а величины со звездочками — известные функции, которые по сути не отличаются от соответствующих формул для однослойной анизотропной полосы [10], лишь соответствующие величины приобретают индекс k , указывающий номер слоя.

Удовлетворив граничным условиям (1.1), а также условиям контакта на линиях раздела $\zeta = \zeta_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1, -1, -2, \dots, -m+1$), все величины можно выразить через перемещения $u^{(ns)}$ и $w^{(ns)}$, а для определения этих получаются следующие уравнения:

$$C \frac{d^2 u^{(ns)}}{d\xi^2} + K \frac{d^2 w^{(ns)}}{d\xi^2} = p^{(s)} \quad (1.5)$$

$$D \frac{d^4 w^{(ns)}}{d\xi^4} + K \frac{d^3 u^{(ns)}}{d\xi^3} = q^{(s)} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k-1}) \\
 D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^3 - \zeta_{k-1}^3) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^3 - \zeta_{-k-1}^3) \\
 K &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k-1}^2)
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Обобщенные нагрузки $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 p^{(s)} &= -(X^{(s)} + X^{(-s)}) + \sum_{n=1}^n (\sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_k) - \sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_{k-1})) - \sum_{k=1}^m (\sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k}) - \\
 &\quad - \sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k-1})) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^2 V^{(s)}(\zeta_j)}{d\xi^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k-1}^2) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 V^{(s)}(\zeta_j)}{d\xi^2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^2 V^{(-s)}(\zeta_{-j})}{d\xi^2} \right] - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^2 U^{(s)}(\zeta_j)}{d\xi^2} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k-1}) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 U^{(-s)}(\zeta_j)}{d\xi^2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^2 U^{(s)}(\zeta_{-j})}{d\xi^2} \right]
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
q^{(s)} = & Y^{+(s)} + Y^{-(s)} + \frac{dX^{+(s)}}{d\xi} z_n + \frac{dX^{-(s)}}{d\xi} z_{-m} - \\
& - \sum_{k=1}^n (\sigma_y^{*(ks)}(z_k) - \sigma_y^{*(ks)}(z_{k-1})) + \sum_{k=1}^m (\sigma_y^{*(-ks)}(z_{-k}) - \sigma_y^{*(-ks)}(z_{-k+1})) - \\
& - \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\sigma_{xy}^{*(ks)}(z_k)}{d\xi} z_k - \frac{d\sigma_{xy}^{*(ks)}(z_{k-1})}{d\xi} z_{k-1} \right) - \\
& - \sum_{k=1}^m \left(\frac{d\sigma_{xy}^{*(-ks)}(z_{-k})}{d\xi} z_{-k} - \frac{d\sigma_{xy}^{*(-ks)}(z_{-k+1})}{d\xi} z_{-k+1} \right) + \\
& + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(s)}} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^3 V^{*(js)}(z_j)}{d\xi^3} - \\
& - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(s)}} (z_{-k}^3 - z_{-k+1}^3) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^3 V^{*(js)}(z_j)}{d\xi^3} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^3 V^{*(-js)}(z_{-j})}{d\xi^3} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(s)}} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^2 U^{*(js)}(z_j)}{d\xi^2} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(s)}} (z_{-k}^2 - z_{-k+1}^2) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 U^{*(js)}(z_j)}{d\xi^2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^2 U^{*(-js)}(z_{-j})}{d\xi^2} \right]
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
V^{*(\pm ks)} &= v^{*(\pm(k+1),s)}(z_{\pm k}) - v^{*(\pm ks)}(z_{\pm k}) \\
U^{*(\pm ks)} &= u^{*(\pm(k+1),s)}(z_{\pm k}) - u^{*(\pm ks)}(z_{\pm k}) + \frac{dV^{*(\pm ks)}(z_{\pm k})}{d\xi} z_{\pm k}
\end{aligned} \quad (1.9)$$

$$z_k = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad z_{-k} = -\frac{1}{h} \sum_{i=m}^k h_{-i} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

$$X^{\pm(0)} = X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0$$

После удовлетворения условиям (1.1) также получается

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(ns)} &= X^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(ns)}(z_n) - \frac{1}{2a_{11}^{(s)}} \frac{d^3 w^{(ns)}}{d\xi^3} z_n^2 + \frac{1}{a_{11}^{(s)}} \frac{d^2 u^{(ns)}}{d\xi^2} z_n \\
\sigma_y^{(ns)} &= Y^{+(s)} + \frac{dX^{+(s)}}{d\xi} z_n - \sigma_y^{*(ns)}(z_n) - \frac{d\sigma_{xy}^{*(ns)}(z_n)}{d\xi} z_n - \\
& - \frac{1}{3a_{11}^{(s)}} \frac{d^3 w^{(ns)}}{d\xi^3} z_n^3 + \frac{1}{2a_{11}^{(s)}} \frac{d^3 u^{(ns)}}{d\xi^3} z_n^2
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Перемещения остальных слоев выражаются через $u^{(ns)}$ и $w^{(ns)}$ по формулам

$$\begin{aligned}
u^{(ks)} &= u^{(ns)} + \sum_{j=k}^{n-1} U^{*(js)}(z_j) \\
w^{(ks)} &= w^{(ns)} + \sum_{j=k}^{n-1} V^{*(js)}(z_j)
\end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

$$u^{(-ks)} = u^{(ns)} + \sum_{j=1}^{n-1} U^{(k,j)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{m-1} U^{(k,-j)}(\zeta_{-j}) \quad (1.11)$$

($k = 1, 2, \dots, m$)

$$w^{(-ks)} = w^{(ns)} + \sum_{j=1}^{n-1} V^{(k,j)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{m-1} V^{(k,-j)}(\zeta_{-j})$$

а используя (1.4) и условия контакта между слоями, для определения $\sigma_{xy0}^{(ks)}$ и $\sigma_{y0}^{(ks)}$ можно получить рекуррентные формулы.

Всегда можно координатную систему (линию отсчета) выбрать так, чтобы величина K обращалась в нуль, что равносильно условию

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2) \quad (1.12)$$

При выполнении условия приведения (1.12) уравнения (1.5) и (1.6) в нулевом приближении оказываются несвязанными. Так как $Q^{s(k0)} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -m$), то $u^{(k0)} = u^{(n0)}$, $w^{(k0)} = w^{(n0)}$ при любом k . Это значит, что при $s=0$ все расчетные формулы (1.4) совпадают с теми, что получаются, если принять гипотезу Бернулли-Эйлера для всего пакета в целом [1]. Последующие приближения уточняют классическую теорию. Величина вносимой поправки, следовательно, и применимость гипотезы плоских сечений зависит от порядка величин $p^{(s)}$ и $q^{(s)}$, зависящих не только от изменяемости внешней нагрузки, но и от отношений упругих коэффициентов и толщины слоев. Ниже, для двухслойных и трехслойных балок, более конкретно, выявляется влияние этих факторов.

2. Двухслойная балка из ортотропных материалов

В уравнениях и расчетных формулах п. 1, полагая $n=1$, $m=2$, получим все необходимые данные для двухслойной балки. Пусть верхний слой характеризуется упругими коэффициентами a_{ij} , нижний слой — a'_{ij} и имеют толщины, равные h_1 и h_{-1} , соответственно. Тогда перемещения $u^{(1s)}$ и $w^{(1s)}$ будут определяться из уравнений (1.5) и (1.6), где жесткости C , D и K вычисляются по формулам

$$C = E_1(\zeta_1 - \zeta_{-1}) - E'_1(\zeta_{-1} - \zeta_{-1}), \quad D = 1/3 [E_1(\zeta_1^3 - \zeta_{-1}^3) - E'_1(\zeta_{-1}^3 - \zeta_{-1}^3)] \quad (2.1)$$

$$K = 1/2 [-E_1(\zeta_1^2 - \zeta_{-1}^2) + E'_1(\zeta_{-1}^2 - \zeta_{-1}^2)]$$

Здесь

$$\zeta_1 = \frac{h_1 - h_0}{h}, \quad \zeta_{-1} = -\frac{h_0}{h}, \quad \zeta_{-1} = -\frac{h_0 + h_{-1}}{h} \quad (2.2)$$

h_0 — расстояние линии раздела слоев от координатной оси Ox . Условие приведения (1.12) дает

$$h_0 = \frac{E_1 h_1^2 - E'_1 h_{-1}^2}{2(E_1 h_1 + E'_1 h_{-1})} \quad (2.3)$$

Обобщенные нагрузки определяются следующим образом:

$$p^{(0)} = -(X^+ + X^-), \quad q^{(0)} = Y^+ + Y^- + \frac{dX^+}{d\xi} \xi_1 + \frac{dX^-}{d\xi} \xi_{-1} \\ p^{(1)} = q^{(1)} = 0 \quad (2.4)$$

Выражения для $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ из-за громозкости не приводятся. Отметим, что они являются функциями от отношений упругих модулей E_1/E_1^* , E_2/G_{12} , E_1^*/G_{12} и толщин слоев h_1/h_{-1} .

Введем следующие обозначения:

$$\frac{h_1}{h_{-1}} = \varepsilon^2, \quad \frac{E_1}{E_1^*} = \varepsilon^3, \quad \frac{E_2}{G_{12}} = \varepsilon^1, \quad \frac{E_1^*}{G_{12}} = \varepsilon^{11} \quad (2.5)$$

Тогда $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ будут содержать слагаемые вида

$$\varepsilon^2, \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2}, \varepsilon^3 \frac{dq^{(0)}}{d\xi}, \varepsilon^4 \frac{d^3 p^{(0)}}{d\xi^3}, \varepsilon^5 \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (2.6)$$

Если $\varepsilon_1 > 0$, то соответствующая поправка мала и ею можно пренебречь (считается, что изменяемость нагрузки невелика), а если какой-либо $\varepsilon_i < 0$, то поправку необходимо учитывать. При этом, при $\varepsilon_i \leq -2$ величина поправки от второго приближения будет иметь такой же порядок, что и первое приближение. Это будет свидетельствовать о том, что асимптотика (1.3) становится несправедливой, как и гипотеза плоских сечений.

Конкретнее, обобщенные нагрузки $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ есть суммы, состоящие из слагаемых, имеющих такие порядки

$$p^{(2)} = O\left(\sum_{k=0}^3 (\varepsilon^{1k} + \varepsilon^{12k})\right) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2} + O\left(\sum_{k=0}^4 (\varepsilon^{1k} + \varepsilon^{12k})\right) \frac{dq^{(0)}}{d\xi} \\ q^{(2)} = O\left(\sum_{k=0}^4 (\varepsilon^{1k} + \varepsilon^{12k})\right) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2} + O\left(\sum_{k=0,2,4,5} (\varepsilon^{13k} + \varepsilon^{14k})\right) \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (2.7)$$

В табл. 1–2 приведены значения δ_{ik} и θ_{ik} при возможных значениях комбинаций α и β для главных членов обобщенных нагрузок $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$. Пусть

$$\lambda = \min\{\delta_{ik}\}, \quad \mu = \min\{\theta_{ik}\} \quad (2.8)$$

Учет второго приближения асимптотического разложения позволяет определить напряженно-деформированное состояние с точностью $O(\varepsilon^{2+\min\{\lambda, \mu\}})$. Если λ, μ неотрицательные числа, то классическая теория даст приемлемый результат. При $-1 \leq \lambda, \mu < 0$ классическую теорию можно применять, но она теперь даст правильный результат при малых значениях ε , в противном случае необходимо вычислять второе приближение. При $-2 < \lambda, \mu < -1$ учет второго приближения становится обязательным, а это значит, что в (1.4) величины со звездочками отличны от нуля, то есть гипотеза плоских

Таблица 1

		$\bar{\sigma}_{1k}$ ($k=0, 1, 2, 3$)	$\bar{\sigma}_{2k}$ ($k=0, 1, 2, 3$)	$\bar{\sigma}_{3k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	$\bar{\sigma}_{4k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)
1	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \geq 0$	γ	$\gamma_1 - \beta$	γ	$\gamma_1 - \beta$
2	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta \geq 0$	$\gamma - 2(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 - \beta + (k-2)(\alpha + \beta)$	$\gamma - 3(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 - \beta + (k-3)(\alpha + \beta)$
3	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta < 0$	$\gamma + 4\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (4-k)\alpha$	$\gamma + 5\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (5-k)\alpha$
4	$\alpha < 0, \alpha + \beta \geq 0, 2\alpha + \beta \geq 0$	$\gamma - (4-k)\alpha$	$\gamma_1 - 4\alpha - \beta$	$\gamma - (5-k)\alpha$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$
5	$\alpha < 0, \alpha + \beta \geq 0, 2\alpha + \beta \leq 0$	$\gamma + \beta - (k-2)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 2(\alpha + \beta)$	$\gamma + \beta - (k-3)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 3(\alpha + \beta)$
6	$\alpha < 0, \alpha + \beta \leq 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	$\gamma + \beta$	γ_1

Таблица 2

		$\bar{\theta}_{1k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	$\bar{\theta}_{2k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	$\bar{\theta}_{3k}$ ($k=0, 2, 4, 5$)	$\bar{\theta}_{4k}$ ($k=0, 2, 4, 5$)
1	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \geq 0$	γ	$\gamma_1 - \beta$	γ	$\gamma_1 - \beta$
2	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \leq 0, 2\alpha + \beta \geq 0, 3\alpha + 2\beta \geq 0$	$\gamma - (\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + (k-1)(\alpha + \beta) - \beta$	$\gamma - 2(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + (k-2)(\alpha + \beta) - \beta$
3	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \leq 0, 2\alpha + \beta \geq 0, 3\alpha + 2\beta < 0$	$\gamma - 4\alpha - 3\beta$	$\gamma_1 + (k-4)(\alpha + \beta)$	$\gamma - 5\alpha - 4\beta$	$\gamma_1 + (k-5)(\alpha + \beta)$
4	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta \leq 0$	$\gamma + 4\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (4-k)\alpha$	$\gamma + 5\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (5-k)\alpha$
5	$\alpha < 0, \alpha + \beta \geq 0, 2\alpha + \beta \geq 0$	$\gamma - (4-k)\alpha$	$\gamma_1 - 4\alpha - \beta$	$\gamma - (5-k)\alpha$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$
6	$\alpha < 0, \alpha + \beta \geq 0, 2\alpha + \beta < 0, 3\alpha + 2\beta \geq 0$	$\gamma - (k-4)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 4\alpha + 3\beta$	$\gamma - (k-5)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 5\alpha + 4\beta$
7	$\alpha < 0, \alpha + \beta \geq 0, 2\alpha + \beta < 0, 3\alpha + 2\beta \leq 0$	$\gamma - (k-1)(\alpha + \beta) + \beta$	$\gamma_1 + \alpha + \beta$	$\gamma - (k-2)(\alpha + \beta) + \beta$	$\gamma_1 + 2(\alpha + \beta)$
8	$\alpha < 0, \alpha + \beta < 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	$\gamma + \beta$	γ_1

сечений перестает быть справедливой, но для расчета проходит итерационный метод. При $\min(\lambda, \mu) \ll -2$ (сверхсильная анизотропия) величина вносимой поправки от второго приближения будет иметь больший или равный порядок по сравнению с исходным приближением.

Для таких случаев асимптотика (1.3), следовательно, по-прежнему классическая теория, не применимы.

Из табл. 1, 2, в частности, следует:

а) для слоистой полосы, имеющей несильно отличающиеся друг от друга модули Юнга ($\beta \approx 0$), вне зависимости от значения параметров α , то есть относительных толщин слоев, $\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1)$, что означает, что применимость классической теории, как это имело место для однослойной полосы [9, 10], в этом случае сильно зависит от отношений собственных модулей отдельных слоев E_1/G_{12} , E_1/G_{12}^* .

б) если слои имеют толщины одинакового порядка ($\alpha \approx 0$), то $\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta)$ при $\beta > 0$, $\lambda = \mu = \min(\gamma + \beta, \gamma_1)$ при $\beta < 0$. Это означает, что применимость классической теории зависит не только от отношений E_1/G_{12} , E_1/G_{12}^* , но и в большей степени от E_1/E_2 .

в) если сильный по отношению модуля Юнга слой имеет малую толщину по сравнению со слабым (для определенности $\alpha > 0$, $\beta < 0$), то

$$\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \geq 0$$

$$\lambda = \min(\gamma - 2(\alpha + \beta), \gamma_1 + \alpha) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad 2\alpha + \beta > 0$$

(2.9)

$$\mu = \min(\gamma - (\alpha + \beta), \gamma_1 + 3\alpha + 2\beta) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad 2\alpha + \beta > 0, \quad 3\alpha + 2\beta \geq 0$$

$$\mu = \min(\gamma - 4\alpha - 3\beta, \gamma_1) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad 2\alpha + \beta > 0, \quad 3\alpha + 2\beta \leq 0$$

$$\lambda = \min(\gamma + 4\alpha + \beta, \gamma_1 + \alpha), \quad \mu = \min(\gamma + 4\alpha + \beta, \gamma_1) \quad \text{при} \quad 2\alpha + \beta \leq 0$$

Из (2.9) вытекает, что при малых по абсолютной величине значениях γ, γ_1 , (например, если слои изотропные), величины λ и μ тоже малы по абсолютной величине, и классическая теория может нарушаться только при $|\beta| > 4\alpha + \gamma + 2$, что для реальных материалов может выполняться только при $\alpha < 1$, то есть когда толщины слоев не резко отличаются друг от друга. При $\alpha > 1$ (случай накладки) условие $|\beta| > 4\alpha + \gamma + 2$ может выполняться лишь в весьма частных случаях, тогда опасность связана с величиной γ_1 .

г) если слабый слой имеет меньшую толщину, чем сильный слой (для определенности $\alpha < 0$, $\beta < 0$), то $\lambda = \mu = \min(\gamma + \beta, \gamma_1)$, откуда следует, что для материалов, имеющих $\gamma \ll -1$, классическая теория, как правило, даст неверный результат.

Численный анализ конкретной конструкции подтверждает вышеизложенные рассуждения. Например, для двухслойной балки, состоящей из боропластика ($E_1 = 2,4 \cdot 10^5$ мн/м², $G_{12} = 0,054 \cdot 10^5$ мн/м²) и

органопластика ($E_1 = 0,054 \cdot 10^5$ мн/м², $G_{12} = 0,02 \cdot 10^5$ мн/м²) [11], в зависимости от заранее фиксированного значения α , эти параметры выглядят следующим образом:

$$1) \quad \alpha = 0,1, \quad \beta = -1,647, \quad \gamma = -1,681, \quad \gamma_1 = -0,426$$

$$\lambda = \mu = \gamma = -1,681 \text{ при } \alpha + \beta \geq 0; \quad \lambda = \mu = \gamma + \beta = -3,328 \text{ при } \alpha = 0$$

$$\lambda = \mu = \gamma + 4\alpha + \beta = -0,920 \text{ при } \alpha = 0,602 \quad (h_1/h_{-1} = 0,25)$$

$$2) \quad \alpha = 0,05, \quad \beta = -1,266, \quad \gamma = -1,292, \quad \gamma_1 = -0,327$$

$$\lambda = \mu = -2,558 \text{ при } \alpha = 0; \quad \lambda = \mu = -1,292 \text{ при } \alpha + \beta \geq 0$$

$$\lambda = \mu = -0,707 \text{ при } \alpha = 0,463 \quad (h_1/h_{-1} = 0,25)$$

3. Симметрично собранный трехслойный прямоугольник из ортотропных материалов

В уравнениях и расчетных формулах п. 1, полагая $n = m = 2$, а также принимая

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(-1)} = a_{ij}', \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(-2)} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2; i = j = 6),$$

$$a_{i6}^{(1)} = a_{i6}^{(-1)} = a_{i6}^{(2)} = a_{i6}^{(-2)} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad h_1 = h_{-1}, \quad h_2 = h_{-2} \quad (3.1)$$

получим все необходимые уравнения и расчетные формулы трехслойной ортотропной балки. В частности, перемещения $u^{(2)}$ и $w^{(2)}$ будут определяться из уравнений (1.5) и (1.6), при этом, жесткости вычисляются следующим образом:

$$C = 2[E_1 \zeta_1 + E_1(1 - \zeta_1)], \quad K = 0, \quad D = 2/3[E_1 \zeta_1^3 + E_1(1 - \zeta_1^3)] \quad (3.2)$$

где

$$\zeta_1 = -\zeta_{-1} = h_1/h, \quad \zeta_2 = -\zeta_{-2} = 1, \quad h = h_1 + h_2 \quad (3.3)$$

В силу симметрии, задачи растяжения-сжатия и изгиба такой балки распадаются на самостоятельные задачи. Обобщенные нагрузки равны

$$p^{(0)} = 1/2(X^+ + X^-), \quad p^{(1)} = 0$$

$$q^{(0)} = \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-) + \frac{1}{2}\left(\frac{dX^+}{d\xi} - \frac{dX^-}{d\xi}\right), \quad q^{(1)} = 0 \quad (3.4)$$

Нагрузки $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$, как в случае двухслойной балки, можно представить в виде:

$$p^{(2)} = O(\sum_k \epsilon^{\delta_k}) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2}; \quad q^{(2)} = O(\sum_k \epsilon^{\delta_k}) \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (3.5)$$

Значения δ_k и θ_k приведены в табл. 3—4.

Таблица 3

		δ_k ($k=0, 2, 3$)	θ_k	θ_{k+2} ($k=2, 3$)
1	$\alpha > 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	γ
2	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0$	$\gamma - \alpha$	$\gamma_1 - (\alpha + \beta)$	$\gamma - (\alpha + \beta)$
3	$\alpha < 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma + (\alpha + \beta) - k\alpha$	$\gamma_1 - 2\alpha$	$\gamma - (k-1)\alpha$
4	$\alpha < 0, \alpha + \beta < 0$	$\gamma - k\alpha$	$\gamma_1 - \beta - 3\alpha$	$\gamma - \beta - k\alpha$

		b_k ($k=0, 1, 3, 5$)	b_2	b_{k+5} ($k=1, 3, 5$)
1	$\alpha > 0, \alpha + \beta \geq 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	$\gamma_1 - 2\beta$
2	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \leq 0$	$\gamma - \alpha$	$\gamma_1 - (\alpha - \beta)$	$\gamma_1 - \alpha - 3\beta$
3	$\alpha < 0, 3\alpha + \beta > 0$	$\gamma + (3\alpha - \beta) - kx$	$\gamma_1 - 2\alpha$	$\gamma_1 - 2\beta - (k-3)x$
4	$\alpha < 0, 3\alpha - \beta < 0$	$\gamma - kx$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$	$\gamma_1 - 3\beta - kx$

Пусть

$$\delta = \min \{\delta_k\}, \quad \theta = \min \{\theta_k\} \quad (3.6)$$

Из табл. 3-4, в частности, следует

а) при $\beta \leq 0$ ($E_1 \approx E_1'$)

$$\delta = \theta = \min(\gamma, \gamma_1) \quad \text{при } \alpha \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1 - 3\alpha), \quad \theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \alpha) \quad \text{при } \alpha \leq 0$$

б) при $\alpha \approx 0$ ($h_1 \approx h_2$)

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1), \quad \theta = \min(\gamma + \beta, \gamma_1 - 2\beta) \quad \text{при } \beta \geq 0$$

$$\delta = \theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta) \quad \text{при } \beta \leq 0 \quad (3.8)$$

в) при $\alpha > 0, \beta < 0$

$$\delta = \theta = \min(\gamma + \beta, \gamma_1) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\delta = \theta = \min(\gamma - \alpha, \gamma_1 - (\alpha + \beta)) \quad \text{при } \alpha + \beta \leq 0$$

г) при $\alpha < 0, \beta > 0$

$$\delta = \min(\gamma - \alpha, \gamma_1 - 2\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0, \quad 2\alpha + \beta \geq 0$$

$$\delta = \min(\gamma + \alpha + \beta, \gamma_1 - 2\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0, \quad 2\alpha + \beta \leq 0$$

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta - 3\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta \leq 0 \quad (3.10)$$

$$\theta = \min(\gamma + \beta + 3\alpha, \gamma_1 + 2\alpha - 2\beta) \quad \text{при } 3\alpha + \beta \geq 0$$

$$\theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \alpha - 3\beta) \quad \text{при } 3\alpha + \beta \leq 0$$

Основные выводы, сделанные в п. 2 для двухслойной балки, справедливы и для трехслойной балки. Здесь также при уточнении теории трехслойной балки, как и следовало ожидать, в первую очередь необходимо учитывать сдвиговые факторы в каждом слое и отношение модулей Юнга различных слоев.

В заключение заметим, что решением внутренней задачи можно составить достаточно полное представление о напряженном состоянии на расстоянии зоны затухания краевых эффектов (пограничный слой) от торцов $x=0, a$. Чтобы удовлетворить условиям при $x=0, a$, необходимо иметь также решение типа пограничного слоя. Изучение пограничного слоя и его сравнение с решением внутренней задачи осуществляется как в [6, 10, 12].

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀԵՄԱՆԻ ԼԱՐՎԱԾԱՑԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ
ՎԻՃԱԿԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Լ. Ա. ԱԳԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է անիզոտրոպ շերտավոր հեծանի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակի որոշման և վերլուծության հարցը: Շերտերը իրենց հարթության մեջ օժտված են բնդհանուր անիզոտրոպիայով: Խնդրի լուծումը առիմպուտիկ մեթոդով քննվում է երկրորդ և չորրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, որոնք համապատասխանում են շերտավոր հեծանի դասական տեսության բերված դործակիցներով հավասարումներին:

Կախված առաձգական գործակիցների և շերտերի հաստությունների հարաբերություններից, ցույց է տրված, երբ է կիրառելի դասական տեսությունը, երբ այն կիրառելի չէ, բայց կարելի է սղտվել խտրացիոն պրոցեսից և երբ նրանցից ոչ մեկը կիրառելի չէ:

THE ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF AN
ANISOTROPIC SANDWICH-TYPE BEAM

L. A. AGALOVIAN, A. M. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The determination of stress-strain state in an interior problem for the anisotropic sandwich-type beam is considered. Each layer of the beam is assumed to be a general anisotropic one.

By means of the asymptotic method the solution of the problem is reduced to the solution of two differential equations of the second and fourth orders corresponding to the classical equations of the sandwich-type beams by reduced rigidities.

Depending on the ratio of elastic coefficients and thicknesses of layers the following were brought to light: In cases when the classical theory is applicable; when the iteration process is applicable; when both the classical theory and iteration process are not applicable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 447 с.
4. Григорюк Э. И., Козан Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек.—ПМ, 1972, т. 8, вып. 6, с. 3—17.
5. Никитин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1973. 131 с.
6. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластины методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.

7. Гусейн-Заде М. И. Построение теории изгиба слоистых пластинок.—Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин.—М.: Наука, 1966. с. 367—378.
8. Гусейн-Заде М. И. К построению теории изгиба слоистых пластинок.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, с. 232—243.
9. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы.—Уч. записки ЕГУ, 1977. № 1, с. 22—30.
10. Хачатрян Ш. М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 6, с. 19—32.
11. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Гетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов.—3-е изд., перераб. и доп.—Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
12. Гусейн-Заде М. И. Напряженное состояние пограничного слоя для слоистых пластинок. Труды VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 638—643.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
30.XII.1983

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

МОВСИСЯН Л. А.

Со времени появления первой работы [1] по устойчивости стержней и цилиндрических оболочек при импульсивной нагрузке накопилось большое количество исследований. Не считая численных работ [2—5 и др.], где в линейной или нелинейной постановке изучается процесс возрастания прогибов, все аналитические работы можно разделить на две группы. Для работ первой группы [1, 6 и др.] характерным является то, что распространением продольных волн пренебрегают, то есть по всей длине стержня принимается одинаковая сжимающая сила. Во второй группе работ (начиная с [7]), как будто это учитывается, однако, при рассмотрении уравнения устойчивости изучается только часть стержня за фронтом продольной волны и получается своего рода стержень переменной длины, причем переменность условная, так как время входит как параметр. То, что неоднородностью сжимаемой силы при медленных скоростях нагружения можно пренебречь, как, например, в [6], очевидно. Скорость упругой волны $a = \sqrt{E/\rho}$ для материалов типа стали и дюралюминия имеет порядок 5 км/сек и за период колебаний по основной форме шарнирно опертой незагруженной балки (прямоугольного сечения $l = 25h = 1\text{ м}$) упругая волна успевает 500 раз отразиться. Однако, если прилагается большая нагрузка или если стержень нагружается с большой скоростью, он теряет устойчивость задолго до того, как продольная волна сможет хоть несколько раз отразиться; понятно, что сжимающую силу однородной принять нельзя, то есть вместо точного выражения $\sigma = E\nu/a$ при $0 \leq x \leq at$ и $\sigma = 0$ при $at < x < l$ для $at < l$ нельзя принять $\sigma = E\nu/l$, где ν — скорость движения конца стержня). Как показано в [8], для упругой балки при $\nu/a > 10^{-2}$ предположение однородности сжимающей силы приводит уже к неверным результатам. С другой стороны, например, для вышеуказанных материалов $\nu/E = 10^{-3}$ ($\nu/E = \nu/a$ при первом прохождении упругой волны), то есть для реальных материалов при интенсивных нагружениях помимо неоднородности сжимающей силы должны быть учтены также пластические деформации.

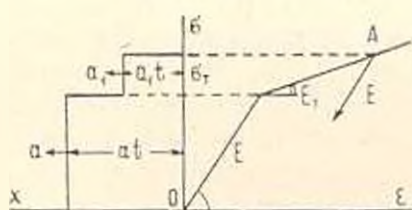
В настоящей работе изучается устойчивость стержня при ударных нагрузках в упругопластической постановке. Учитывается процесс распространения и отражения продольных волн, а также волны разгрузки в случае, когда нагружение осуществляется в конечном промежут-

ке времени. Определяется критическое время (критическая длина) потери устойчивости.

1. Пусть имеется идеально прямой стержень постоянного сечения, один конец которого закреплен (в продольном направлении), а к другому концу мгновенно прикладывается постоянное напряжение (или другой конец ударяется бесконечной массой со скоростью v , или этот конец движется в сторону первого с такой же скоростью [6, 8]), превышающее предел пропорциональности, точка A на фиг. 1. Будем принимать, что материал стержня подчиняется линейному упрочнению и характеризуется соответственно постоянными E и E_1 до и после предела текучести.

Напряженное состояние такого стержня известно. Пока примем, что в общем виде имеем выражение сжимающего напряжения $\sigma(x, t)$ и займемся решением уравнения устойчивости. Уравнение устойчивости (уравнение возмущенного движения) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{E} J \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma F \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь все обозначения общепринятые, только следует отметить, что в зависимости от начального напряженного состояния изгибная жесткость $\bar{E}J$ будет переменной. Примем ее, как и σ , произвольной, но известной, и в каждой задаче их будем конкретизировать. Пусть балка на концах шарнирно оперта,

то есть

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=l \quad (1.2)$$

Решение (1.1) будем искать в виде ряда, удовлетворяющего условиям (1.2)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad (1.3)$$

Представив произвольные пока $\bar{E}$ и σ также в виде рядов

$$\bar{E} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \cos \lambda_k x \quad (1.4)$$

и производя некоторые преобразования в (1.1), для неизвестных получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}(t) f_k = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Здесь

$$2pFa_{mk} = \begin{cases} \lambda_m^2 [D_m^2(2b_0 - b_{2m}) + F(2c_0 + c_{2m})], & m = k \\ \lambda_m \lambda_k [J \lambda_m \lambda_k (b_{m-k} - b_{m+k}) + F(c_{m-k} + c_{m+k})], & m \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Возможны два пути для дальнейшего исследования. Если об устойчивости стержня судить, исходя из условий допускаемых перемещений, то система (1.5) во много удобнее для численного интегрирования (задача с начальными условиями), чем уравнение (1.1). При упругой постановке таким образом была решена задача в [8], а в [4] численно решалось (1.1).

Но, чтобы быть верным классическому понятию устойчивости, необходимо определить некоторый критический параметр. Таковым в рассматриваемой задаче является критическая длина потери устойчивости, или, что то же самое, критическое время. В отличие от статической потери устойчивости, где для заданной длины стержня определяется критическая сила, при ударе вопрос ставится следующим образом: для заданной силы найти критическую длину потери устойчивости, или длину распространения продольной волны, при которой возможна потеря устойчивости.

Критическое время для (1.5) (укороченная система) можно получить, исходя из понятия устойчивости для конечного интервала времени (например, [9]). Однако, помимо чисто технических трудностей, в этой области имеется такой произвол в выборе начальной области и допустимых значений, что уместно привести слова: «Ни одна из известных постановок задач по устойчивости на конечном промежутке времени не заняла сейчас доминирующего положения. Более того, нет еще ощущения неактуальности поиска новых вариантов определений понятия устойчивости на конечном промежутке времени» [9].

Здесь мы критическое время будем определять как время, при котором «мгновенная частота» (1.5) равна нулю, т. е. считается, что критическая длина потери устойчивости эта такая длина распространения волны, при которой, если сообщить продольному движению изгибное возмущение, то оно неограниченно может возрасти [10]. Являясь обобщением динамического критерия потери устойчивости для статических задач [11] на случай ударных нагрузок, он, во-первых, очень просто приводит к результатам, и что самое главное объясняет все экспериментально наблюдаемые факты.

Кстати, такую точку зрения отстаивает и В. М. Даревский [12—13] более десяти лет и критическое время, определенное таким образом, трактуется как время для рассматриваемого состояния, для изменения которого потребуется значительно меньше внешнего воздействия, чем в другой момент времени. Следует отметить, что если неоднородность сжимающей силы не учесть, или более обще уравнение начального состояния не решать точно с начальными и граничными условиями, то такой критерий кроме эйлеровой силы ничего нового не дает.

Итак, критическое время будем определять как наименьший корень уравнения

$$\det \|a_{mk}(t)\| = 0 \quad (1.7)$$

Что касается форм потери устойчивости, то они не будут отдельные гармоники, хотя бы не совпадающие со статическими, как часто утверждают, а определятся рядом (1.3), причем для различных критических времен формы потери устойчивости различные.

2. Теперь приступим к рассмотрению конкретных задач и определению коэффициентов b_k и c_k . Будем изучать две задачи: когда на конце стержня мгновенно прикладывается нагрузка σ_0 , которая в дальнейшем поддерживается постоянной и вторую задачу, когда прилагается прямоугольный импульс продолжительностью $\bar{b}$ (случай удара бесконечной массой или движение конца с постоянной скоростью можно получить отсюда).

Картина напряженного состояния, в общем, известна [14, 15]. От ударяемого конца распространяются две волны (фиг. 1): упругая волна движется со скоростью $a = \sqrt{E/\rho}$ и напряжение за ее фронтом есть $\sigma = \sigma_0$ и пластическая волна — со скоростью $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$ с напряжением за фронтом $\sigma = \sigma_0$, то есть будем иметь

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} \sigma_0, T & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_0, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq at \\ 0, E & \text{при } at \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.1)$$

Выражения (2.1) верны для $t \leq l/a$. После отражения волны последняя будет уже распространяться со скоростью a_1 и картина напряженно-деформированного состояния будет такова:

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} \sigma_0, T & \text{при } 0 \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_0, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq l - a_1(t - l/a) \\ \sigma_1, T & \text{при } l - a_1(t - l/a) \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение (2.2) верно в интервале $l/a \leq t \leq t_1$. Здесь $\sigma_1 = \sigma_0(1 + a_1/a) -$ значение напряжения в отраженной части, $t_1 = l(a + 3a_1)/2aa_1$ — время встречи отраженной волны с пластической волной с напряжением σ_0 , T — приведенный модуль или модуль Кармана. В той части стержня, где уже имеется пластическая зона, при рассмотрении уравнения устойчивости функцию $\bar{E}(x, t)$ можно приближенно принять равной T , как это принято в литературе, например, при статических [2] и динамических [16] задачах, а в упругой части — $\bar{E} = E$.

Мы будем изучать устойчивость стержня вплоть до t_1 .

Распределение напряжений для двух моментов времени приведено на фиг. 2.

Соответственно с (2.1) и (2.2) коэффициенты b_k и c_k для обоих случаев определяются формулами

$$b_0 = E + (T - E)\tau, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} (T - E) \sin k\pi\tau$$

$$c_k = \tau[\sigma_0\sqrt{\lambda} + \sigma_1(1 - \sqrt{\lambda})] \quad (2.3)$$

$$c_h = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 (\sin k\pi\tau - \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda}) \}$$

$$b_0 = T, \quad b_h = 0, \quad c_0 = \sigma_0 \tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 [1 - \tau \sqrt{\lambda} + \lambda(\tau - 1)] \quad (2.4)$$

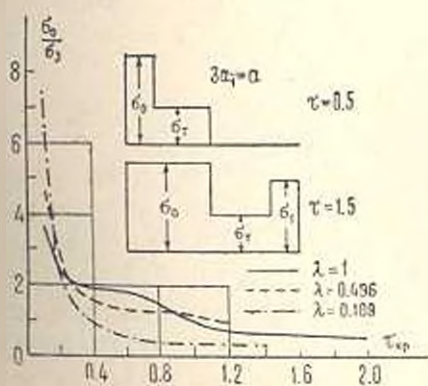
$$c_h = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda} + \sigma_1 [(-1)^h \sqrt{\lambda} \sin k\pi(\tau - 1) \sqrt{\lambda} - \sin k\pi\tau \sqrt{\lambda}] \}$$

Здесь $\lambda = E_1/E$, $\tau = at/l$ и (2.3) верно при $0 \leq \tau \leq 1$, а (2.4) — при $1 \leq \tau \leq (1 + 3\sqrt{\lambda})2\sqrt{\lambda}$.

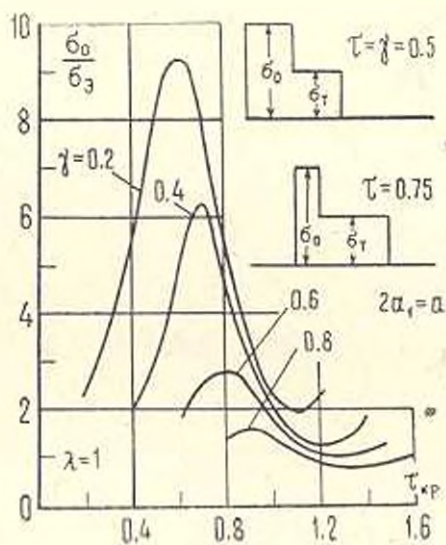
Для второй задачи, когда действует прямоугольный импульс с продолжительностью $\theta < l/a$, момент удаления нагрузки вызывает волну разгрузки, также распространяющуюся со скоростью a и картина напряженного состояния и выражение $\bar{E}(x, t)$ для $t \leq \theta$ будут, как в предыдущей задаче, а для $\theta \leq t \leq l/a$:

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} 0, E & \text{при } 0 \leq x \leq a(t - \theta) \\ \sigma_0, T & \text{при } a(t - \theta) \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_1, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq at \\ 0, E & \text{при } at \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.5)$$

Для двух моментов времени распределения напряжений показаны на фиг. 3.



Фиг. 2



Фиг. 3

После отражения $t \geq l/a$

$$\sigma, \bar{E} = \begin{cases} 0, E & \text{при } 0 \leq x \leq a(t - \theta) \\ \sigma_0, T & \text{при } a(t - \theta) \leq x \leq a_1 t \\ \sigma_1, T & \text{при } a_1 t \leq x \leq l - a_1(t - l/a) \\ \sigma_1, T & \text{при } l - a_1(t - l/a) \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6)$$

Последние выражения верны для $t = \min(t_1, t_2)$, где t_2 — время, при котором волна разгрузки достигает фронта пластической волны — $t_2 = a\delta/(a - a_1)$.

Здесь коэффициенты b_k и C_k определяются формулами

$$b_0 = (1 - \gamma)E + \gamma T, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} |\sin k\pi(\tau - \gamma) - \sin k\pi\tau| (E - T)$$

$$c_0 = \sigma_0[\tau(\sqrt{\lambda} - 1) + \gamma] + \sigma_1\tau(1 - \sqrt{\lambda}) \quad (2.7)$$

$$c_k = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 |\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} - \sin k\pi(\tau - \gamma)| + \sigma_1 (\sin k\pi\tau - \sin k\pi\tau\sqrt{\lambda}) \}$$

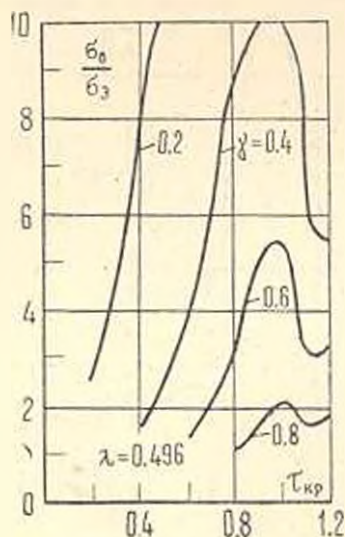
$$b_0 = E(\tau - \gamma) + T(1 - \tau + \gamma), \quad b_k = \frac{2}{k\pi} (E - T) \sin k\pi(\tau - \gamma)$$

$$c_0 = \sigma_0(\tau\sqrt{\lambda} + \gamma - \tau) + \sigma_1(1 - \tau\sqrt{\lambda} + \tau - \lambda) \quad (2.8)$$

$$c_k = \frac{2}{k\pi} \{ \sigma_0 |\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} - \sin k\pi(\tau - \gamma)| - \sigma_1 [\sin k\pi\tau\sqrt{\lambda} +$$

$$+ (-1)^{k+1}\sqrt{\lambda} \sin k\pi\sqrt{\lambda}(\tau - 1)] \}$$

Формулы (2.7) верны при $\gamma \leq \tau \leq \min(1, \tau_1)$, а (2.8) — при $1 \leq \tau \leq \min(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 = \tau(t_1)$, $\gamma = a\delta/l$.



Фиг. 4

3. В качестве примера возьмем двутавровый стержень — $T = 2EE_1/(E + E_1)$ из дюралюминия D16T [2] с данными $\tau_1/E = 0,2667 \cdot 10^{-2}$. Для λ взяты три значения $\lambda = 1$ (упругий случай), $\lambda = 0,496$ и $\lambda = 0,1093$.

Известно, что для многих материалов предел текучести зависит от скорости деформирования. В данной работе эта зависимость не учитывается, как и в [14, 15]. Приведенное решение можно рассматривать как для материалов, для которых нет такой зависимости.

Кривые безразмерного критического напряжения σ_0/σ_3 ($\sigma_3 = E/l^2/\pi^2/F$) для первой задачи в зависимости от безразмерного критического времени $\tau_{кр}$ приведены на фиг. 2.

Аналогичные кривые для второй задачи для случаев $\lambda = 1$ и $\lambda = 0,496$ приведены на фиг. 3 и 4 ($F/l^2/\pi^2/F = 120$).

По этим кривым можно определить, когда (на каком расстоянии) произойдет потеря устойчивости при заданном напряжении. Как видно из графиков, учет пластических деформаций не однозначным об-

разом определяет тенденцию критического напряжения в сторону увеличения и уменьшения. Это и понятно. Там, где уже пластическая зона, изгибная жесткость уменьшается, но, с другой стороны, приложенная максимальная нагрузка передается не по всей длине этой зоны, а только на части $0 \leq x \leq a_1 l$.

Если вместо заданного напряжения на конце производится удар бесконечной массой со скоростью v , или край движется в сторону другого края с такой же скоростью и требуется определить критическую длину при заданной скорости, то σ_0 в предыдущих соотношениях должно быть заменено

$$\sigma_0 = \sqrt{EE_1} \frac{v}{a} - \tau_1 (1 - 2\lambda + \sqrt{\lambda}) \quad (3.1)$$

Приведенные графики показывают, во-первых, каким образом стержень может нести нагрузку выше эйлеровой и не терять устойчивости, и во-вторых, что потеря устойчивости при ударе носит локальный характер. При этом, как хорошо видно, если при определенной силе она не происходит у ударяемого конца, то при той же силе может произойти у другого конца после отражения волны. Потеря устойчивости не может произойти локально в средней части стержня.

В заключение необходимо сделать еще пару замечаний.

Вместо приведенного модуля T можно было использовать касательный модуль E_1 в уравнении устойчивости там, где пластическая зона.

Уравнение (1.1) имеет разрывные коэффициенты при первых двух слагаемых и стоит сказать, по-видимому, несколько слов о законности приведенного решения. В случае, когда терпит разрыв только второй коэффициент, можно доказать сходимость процесса определения собственных значений или нормальность определителя (1.7). При разрыве в первом коэффициенте этого делать невозможно и только численный эксперимент доказывает сходимость процесса. Стоит также провести сравнение с задачами, решенными обычным путем: путем решения для различных частей непрерывности коэффициентов и последующим сопряжением. В работе [10] рассматривается устойчивость упругой балки при продольном ударе вышеприведенным способом. Оттуда, как частный случай, получается решение задачи статической устойчивости частично сжатой балки. Значения критической силы, определенные таким образом во втором приближении (детерминант второго порядка) и обычным образом [17], для статической устойчивости упругой балки, нагруженной продольной силой посередине, одинаковые — $P_{cr} = 18,7 EJ/l^2$.

В [18] рассмотрена задача другого типа, когда жесткость стержня претерпевает разрыв, и в частности, когда на разных половинах стержня жесткости отличаются в четыре раза, критическая сила, определенная при двучленном приближении, от точного значения отличается $\approx$ на 4%.

ՀԱՐԱՎԱԾԱՑԻՆ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ԴԵՊԲՈՒՄ ԱՌԱՋԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ
ՉՈՂԻ ԿԱՑՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Դիտարկվում է ձողի կայունությունը հարվածի դեպքում ընդունելով, որ նյութը ենթարկվում է դժային ամրապնդման: Հաշվի է առնվում ինչպես երկայնական ալիքների տարածումը և անդրադառնալն, այնպես էլ բևեռացման ալիքն իմպուլսային բևեռավորման դեպքում:

ON THE STABILITY OF ELASTIC-PLASTIC BARS FOR IMPACT LOADS

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The present paper takes into consideration the stability of bars upon impact in assumption that the material is submitted to linear hardening.

The propagation and reflection of longitudinal waves as a process are taken into account as well as unloaded waves during impulse loading.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем.—Докл. АН СССР, 1949, 64, № 6, с. 779—782.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Eugene Sevin, On the elastic bending of columns due to dynamic axial force including effects of axial inertia.—J. Appl. Mechanics, series E, 1960, Vol. 27, № 4, pp. 125—131.
5. Ari-Gur J., Weller T. and Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact.—Int. J. Solids Structures, 1982, Vol. 18, № 7, pp. 616—641.
6. Гоф Н. Динамика устойчивости упругих колонн. Механика. Сб. переводов иностранной пер. лит., 1952, № 3, с. 117—128.
7. Джерард Дж. и Беккер Г. Поведение стержней при внезапном воздействии скорости. Механика. Сб. переводов иностранной пер. лит., 1953, № 2, с. 135—139.
8. Мовсисян Л. А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, № 1, с. 38—50.
9. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале. ВИНТИ, Итоги науки и техники. Общая механика, М.: 1976, т. 3, с. 43—124.
10. Мовсисян Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.—Докл. АН АрмССР, 1969, т. 49, № 3, с. 124—130.
11. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.
12. Даревский В. М. Устойчивость оболочки при динамической нагрузке. Труды Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 224—225.

13. Даревский В. М. Критерий устойчивости мгновенного состояния упругого тела при динамической нагрузке. XIII Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Таллин, 1983, т. 11, с. 47—52.
14. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд. лит. по строительству, 1976. 448 с.
15. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Госиздат, 1961. 399 с.
16. Корнев В. М., Маркин А. В., Яковлев И. Я. Развитие динамических форм выпучивания упругопластических стержней при интенсивном нагружении.—ЖПМТФ, 1980, № 3, с. 121—126.
17. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1967. 552 с.
18. Иовисян Л. А. Об устойчивости термочувствительных цилиндрических оболочек и пластин.—Механика, Межауз. сб. научных трудов, из-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 75—80.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.XI.1983

УДК 539.383

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ПРЕДНАПРЯЖЕННЫЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ

ПОРОШИН В. С.

Рассматривается несжимаемая упругая среда, когда взаимно однозначная связь между напряжениями и деформациями имеет нелинейный характер [1]. Ставится контактная задача для физически нелинейного упругого слоя, преднапряженного сжимающими (растягивающими) равномерно распределенными на бесконечности усилиями p_1 и p_2 , направленными параллельно границе слоя. Проанализировано влияние преднапряжения на основные характеристики контактной задачи, когда величины p_1 и p_2 мало отличаются одна от другой.

1. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой расположим на верхней грани слоя конечной толщины h , а ось z направим вниз. Допустим, что слой, лежащий без трения на жестком основании, нагружен равномерно распределенными на бесконечности сжимающими (растягивающими) усилиями $\sigma_x^0 = -p_1$ и $\sigma_y^0 = -p_2$. Затем в слой P вдавливается абсолютно жесткий штамп. Будем считать, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, определяемого соотношениями

$$u^0 = A_1^0 x, \quad v^0 = A_2^0 y, \quad w^0 = -(A_1 + A_2)z \\ \sigma_x^0 = -p_1, \quad \sigma_y^0 = -p_2, \quad \sigma_z^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \quad (1.1)$$

Связь между постоянными A_1^0 , A_2^0 и p_1 , p_2 может быть найдена из уравнений нелинейно упругого тела [1], которые представим в форме (массовые силы отсутствуют)

$$\varepsilon_x = \psi(\sigma_x - \sigma), \quad \varepsilon_y = \psi(\sigma_y - \sigma), \quad \varepsilon_z = \psi(\sigma_z - \sigma) \\ \gamma_{xy} = 2\psi\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = 2\psi\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = 2\psi\tau_{yz}, \quad \sigma = 0 \\ \sigma = 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \sigma = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \psi = \psi(\tau) \\ \tau = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \\ \partial\sigma_{xi}/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z = 0, \dots \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \quad (1.2)$$

а именно: $A_1^0 = 1/3 \psi(\tau_0) (p_2 - 2p_1)$, $A_2^0 = 1/3 \psi(\tau_0) (p_1 - 2p_2)$, где $\tau_0 = [1/3(p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2)]^{1/2}$.

Отметим, что предположение о несжимаемости материала слоя не принципиально и принято в целях упрощения выкладок.

Обозначая малые возмущения напряжений, деформаций и перемещений через $\sigma_x^*, \dots, \sigma_y^*, \dots, u^*, v^*, w^*$ и разыскивая решение уравнений (1.2) в форме

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^*, \dots; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x^*, \dots \\ u &= u^0 + u^*, \quad v = v^0 + v^*, \quad w = w^0 + w^*\end{aligned}\quad (1.3)$$

в результате линеаризации указанных уравнений относительно возмущений, будем иметь [2]

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{6lD^2 + m(A^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* - \frac{mAB}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* - \frac{mBC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \sigma_y^* &= -\frac{mAB}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* + \frac{6lD^2 + m(B^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* - \frac{mAC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \sigma_z^* &= -\frac{mBC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* - \frac{mAC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* + \frac{6lD^2 + m(A^2 + B^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy}^*/2l, \quad \tau_{xz}^* = \tau_{xz}^*/2l, \quad \tau_{yz}^* = \tau_{yz}^*/2l, \quad \sigma^* = 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Сюда еще нужно добавить уравнения равновесия и уравнения связи между деформациями и перемещениями Коши, записанные со звездочками. В (1.4) обозначено

$$l = \psi(\tau_0) > 0, \quad m = \tau_0 \psi'(\tau_0) \geq 0 \\ A = p_1 - 2p_2, \quad B = p_2 - 2p_1, \quad C = p_1 + p_2, \quad D^2 = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2\quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в уравнения равновесия и затем выражая деформации через перемещения, получим аналог уравнений Ламе

$$\begin{aligned}x_1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + x_0 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) + x_2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} + x_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} &= 0 \\ x_0 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) + x_4 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + x_2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + x_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} &= 0 \\ x_2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) + x_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} + x_3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z} + x_5 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial z} &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{2l}, \quad x_1 = \frac{6lD^2 + m(A^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_2 = \frac{3lD^2 + m(3D^2 - AB)}{6l(l+m)D^2} \\ x_3 &= \frac{3lD^2 + m(3D^2 - BC)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_4 = \frac{6lD^2 + m(B^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \\ x_5 &= \frac{3lD^2 + m(3D^2 - AC)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_6 = \frac{6lD^2 + m(A^2 + B^2)}{6l(l+m)D^2}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Добавляя к (1.6) условие несжимаемости

$$\partial u^* / \partial x + \partial v^* / \partial y + \partial w^* / \partial z = 0\quad (1.7)$$

будем иметь систему четырех уравнений для определения u^* , v^* , w^* и σ^* .

Решение системы уравнений (1.6), (1.7) для слоя в предположении затухания величин u^* , v^* , w^* и σ^* при $\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$ ищем в форме двойных интегралов Фурье [3]

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ v^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ w^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ \sigma^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (1.8)$$

при этом относительно трансформант Фурье $U(\alpha, \beta; z)$, $V(\alpha, \beta; z)$, $W(\alpha, \beta; z)$ и $\Sigma(\alpha, \beta; z)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} x_0 U'_z - ix_3 \alpha W'_z - (x_1 \alpha^2 + x_0 \beta^2) U - x_2 \alpha \beta V - i \alpha \Sigma &= 0 \\ x_0 V'_z - ix_3 \beta W'_z - (x_0 \alpha^2 + x_4 \beta^2) V - x_2 \alpha \beta U - i \beta \Sigma &= 0 \\ x_0 W'_z - ix_3 \alpha U'_z - ix_3 \beta V'_z - x_0 \gamma^2 W + \Sigma'_z &= 0 \\ W'_z - i \alpha U - i \beta V &= 0 \quad (\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Исследование уравнений (1.9) показывает, что система уравнений (1.6), (1.7) является системой эллиптического типа, а общее решение уравнений (1.9) имеет вид (черточка сверху означает комплексно-сопряженную величину)

$$U = \mathcal{A}_1 \text{sh} \gamma z + \mathcal{A}_2 \text{ch} \gamma z + \{A, a\} (\mathcal{A}_3 \text{sh} \alpha z + \mathcal{A}_4 \text{ch} \alpha z) + \{A, \bar{a}\} (\mathcal{A}_5 \text{sh} \bar{\alpha} z + \mathcal{A}_6 \text{ch} \bar{\alpha} z)$$

$$V = -\frac{p_1 \beta}{p_2 \alpha} (\mathcal{A}_1 \text{sh} \gamma z + \mathcal{A}_2 \text{ch} \gamma z) + \{B, a\} (\mathcal{A}_3 \text{sh} \alpha z + \mathcal{A}_4 \text{ch} \alpha z) + \\ + \{B, \bar{a}\} (\mathcal{A}_5 \text{sh} \bar{\alpha} z + \mathcal{A}_6 \text{ch} \bar{\alpha} z)$$

$$W = i \frac{\alpha}{\gamma} \frac{p_1 - p_2}{p_2} (\mathcal{A}_1 \text{ch} \gamma z + \mathcal{A}_2 \text{sh} \gamma z) + \{C, a\} (\mathcal{A}_3 \text{ch} \alpha z + \mathcal{A}_4 \text{sh} \alpha z) + \\ + \{C, \bar{a}\} (\mathcal{A}_5 \text{ch} \bar{\alpha} z + \mathcal{A}_6 \text{sh} \bar{\alpha} z)$$

$$\underline{\Sigma} = \mathcal{A}_3 \text{sh} \alpha z + \mathcal{A}_4 \text{ch} \alpha z + \mathcal{A}_5 \text{sh} \bar{\alpha} z + \mathcal{A}_6 \text{ch} \bar{\alpha} z$$

$$\mathcal{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu(\alpha, \beta), \quad \nu = 1, 2, \dots, 6$$

$$\{A, \Lambda\} = \frac{12}{x_0} (\Lambda^2 - a^2 - C_2 \beta^2) X^{-1}, \quad \{B, \Lambda\} = \frac{12}{x_0} (\Lambda^2 - C_2 x^2 - \beta^2) X^{-1}$$

$$\{C, \Lambda\} = -(\Lambda^2 \gamma^2 - a^4 - C_1 \alpha^2 \beta^2 - \beta^4) (x_0 \Lambda X)^{-1}$$

$$X = \Lambda^4 - C_4 \Lambda^2 x^2 - C_5 \Lambda^2 \beta^2 + C_6 a^4 + 2C_7 x^2 \beta^2 + C_8 \beta^4$$

$$C_1 = (x_1 - 2x_2 + x_4) x_0^{-1}, \quad C_2 = -(x_2 - x_1 - x_4 + x_5) x_0^{-1}$$

$$C_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_5) x_0^{-1}, \quad C_4 = (x_0 + x_1 - x_3) x_0^{-1}, \quad C_5 = (x_0 + x_4 - x_5) x_0^{-1}$$

$$C_6 = (x_1 - x_3) x_0^{-1}, \quad C_7 = l(l+m)^{-1}, \quad C_8 = (x_4 - x_5) x_0^{-1}$$

$$a = \{1/2 [(a_1 - 1)x^2 + (a_2 - 1)\beta^2] +$$

$$+ 1/2 l \sqrt{a_1(2 - a_1)x^4 + [a_2 - 2(1 - a_1)(1 - a_1)]x^2\beta^2 + a_2(2 - a_2)\beta^4}\}^{1/2}$$

$$a_1 = 3 \frac{lD^2 + mp_2(p_2 - p_1)}{(l+m)D^2}, \quad a_2 = 3 \frac{lD^2 + mp_1(p_1 - p_2)}{(l+m)D^2}$$

$$a_3 = 3 \frac{l}{l+m}, \quad a_4 = \frac{2lD^2 - m(p_1^2 - 4p_1p_2 + p_2^2)}{(l+m)D^2} \quad (1.10)$$

2. Предположим, что сжимающие (растягивающие) усилия p_1 и p_2 мало отличаются одно от другого, то есть

$$p_1 = p(1 + \chi), \quad p_2 = p(1 - \chi) \quad (2.1)$$

Далее с помощью формул (1.10) получим асимптотическое (с точностью до членов $O(\chi^2)$) решение следующей вспомогательной задачи о равновесии слоя:

$$w^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{xx}^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0$$

$$\tau_{xz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_z^*(x, y, 0) = -q(x, y) \quad (2.2)$$

Здесь также возмущения напряжений $\sigma_x^*, \dots$ и $q(x, y)$ стремятся к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Записав граничные условия (2.2) в трансформантах Фурье и удовлетворяя им, найдем вид функций $\mathcal{E}_i(\alpha, \beta)$ в (1.10), и затем, отбрасывая члены порядка χ^2 и выше, получим

$$w^*(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi l} \iint \gamma^{-1} L(\alpha, \beta; h) Q(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

$$L(\alpha, \beta; h) = \frac{\text{ch} k \gamma h - \cos \omega \gamma h}{\text{sh} k \gamma h + k \omega^{-1} \sin \omega \gamma h} \times$$

$$\times \left| 1 - \chi \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\text{sh} k \gamma h + k \omega^{-1} (2 + \omega^2) \sin \omega \gamma h}{\text{sh} k \gamma h + k \omega^{-1} \sin \omega \gamma h} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2} \right|$$

$$k = \sqrt{\frac{4l+m}{l+m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3m}{l+m}}, \quad 0 = k/2l \quad (2.3)$$

Здесь $Q(\alpha, \beta)$ — трансформанта Фурье функции $q(x, y)$. Удовлетворяя теперь с помощью (2.3) граничным условиям контактной задачи (Ω — конечная область контакта)

$$\begin{aligned} w^*(x, y, h) &= 0, \quad \tau_{xz}^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0 \\ \tau_{xz}^*(x, y, 0) &= 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0); \quad \sigma_z^*(x, y, 0) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) \\ w^*(x, y, 0) &= f(x, y) = |\delta + \alpha x + \beta y - g(x, y)| \quad ((x, y) \in \Omega) \\ \sigma_z^*, \dots &\rightarrow 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.4)$$

получим относительно неизвестного контактного давления $q(x, y)$, с точностью до членов порядка χ^2 , следующее интегральное уравнение:

$$\iint_{\Omega} K(\xi - x, \eta - y; h) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 2\pi\theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

$$K(\xi, \eta; h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1} L(\alpha, \beta; h) \exp[i(\xi\alpha + \eta\beta)] d\alpha d\beta \quad (2.5)$$

Здесь функция $L(\alpha, \beta; h)$ определяется второй формулой (2.3), $\delta + \alpha x + \beta y$ — жесткое перемещение штампа, $g(x, y)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

Переходя в уравнении (2.5) к пределу $h \rightarrow \infty$, получим интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для преднапряженного физически нелинейного упругого полупространства, которому после преобразования ядра [4] можно придать вид

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} + \chi \frac{\omega^2}{k^2} \frac{(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{3/2}} \right\} q(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = 2\pi\theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегральное уравнение (2.6) отличается от интегрального уравнения (3.3) [5] лишь значением контактной жесткости θ и величиной коэффициента ω^2/k^2 . Для того, чтобы перейти от уравнения (3.3) [5] к уравнению (2.6), достаточно сделать следующую замену величин:

$$2G/N(\nu) \rightarrow \theta, \quad L(\lambda)/N(\lambda) \rightarrow \omega^2/k^2 \quad (2.7)$$

На основании вышесказанного решение интегрального уравнения (2.6) для плоского наклонного эллиптического в плане штампа будет даваться формулами (3.4), (3.5) [5], в которых только следует сделать замену (2.7).

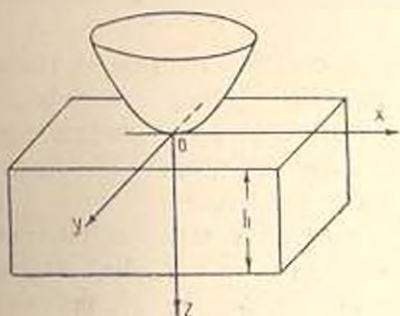
Также, для неплоского эллиптического в плане штампа с центром в начале координат, у которого главные направления поверхности основания в точке касания со слоем совпадают с осями x, y (фиг. 1), решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условию равновесия штампа, будет иметь вид (3.6), (3.7) [5]. Отыскивая решение системы (3.7) [5] в виде [5]

$$e^3 = e_0^2 + \chi e_1^2 + \dots \quad (2.8)$$

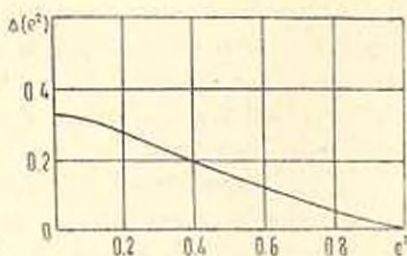
с точностью до членов порядка χ^2 , найдем

$$e_1^2 = -4 \frac{\omega^3}{\Delta^3} \Delta(e_0^2)$$

$$\Delta(e^2) = \frac{(1-e^2)[E^2 - (1-e^2)K^2]}{K(2E-K)(1-e^2) - E(3E-2K)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x) = 1/3 \quad (2.9)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $K=K(e)$ и $E=E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. График функции $\Delta(e^2)$ представлен на фиг. 2.

Можно заключить, что увеличение преднапряжения вдоль одной из осей приводит к «вытягиванию» эллиптической области контакта в том же направлении, причем чем меньше эксцентриситет площадки контакта, тем сильнее проявляется этот эффект.

Автор благодарен В. М. Александрову за постановку задачи и внимание к работе.

ՆԱԽԱԼԱՐՎԱԾ ՅՈՋԻՎՈՐՆՆ ՈՉ ԳԻՄԱՑԻՆ ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ ԳՐՈՇՄԻ ԶՆՇՈՒՄԸ

Վ. Ս. ԳՈՐՈՇԻՆ

Ս. Ս. ՓԻՆՓՈՒՄ

Դիտարկվում է շերտի կողերին դուգաճև, երկու փոխուղղահայաց առանցքների ուղղությամբ տարրեր, անվերջում համասարաչափ բաշխված ճիգերով նախապես լարված ֆիզիկական ոչ գծային առաձգական շերտի կոնտակտային խնդիրը։ Առաջին մոտավորությամբ հաստատված է լրիվ անալոգ նախալարված ֆիզիկական ոչ գծային առաձգական կիսատարածությունում դրոշմի ճնշման և նախալարված երկրաչափական ոչ գծային առաձգական կիսատարածության կոնտակտային խնդիրների համար։

Ցույց է տրված, որ պլանում ոչ հարթ էլիպտական դրոշմի համար մի առանցքի ուղղությամբ սկզբնական լարումների մեծացումը բերում է նույն ուղղությամբ կոնտակտի էլիպտական տիրույթի ձգման։

STAMP PENETRATION IN AN INITIALLY STRESSED PHYSICAL NONLINEAR ELASTIC LAYER

V. S. POROSHIN

S u m m a r y

The contact problem for a physical nonlinear elastic layer initially stressed with forces uniformly distributed over an infinite body has been treated; the forces differ along two mutually perpendicular axes and are parallel to the layer boundaries.

At the first approximation, an equivalence of the problem of stamp penetration into the initially stressed (stresses differ along two mutually orthogonal axes) semispace with physical nonlinearity, with the problem of prestressed (nonuniformly along two mutually orthogonal axes) semispace with geometrical nonlinearity has been established.

It has been shown that for a nonplane elliptic stamp an increase in the initial stresses along one of the axes leads to "stretch" of the elliptic contact domain in the same direction; herein, the less the contact area eccentricity the stronger the effect is manifested.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1979. 318 с.
2. Гузи А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 272 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 544 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М.: Наука, 1970. 343 с.
5. Филиппова Л. М. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.—ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1080—1084.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
4.1.1984

УДК 539.3.01:533.6.013.422

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К ЗАДАЧЕ
О ФЛАТТЕРЕ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ЖИՈՂԵՐ Ռ. Ռ. ԿԱԴԱՐՄԵՏՈՎ Ռ. Մ.

Асимптотический метод [1] нашел широкое применение в задачах о собственных колебаниях и устойчивости при потенциальных внешних силах пластин и оболочек, а также в задачах динамики при широкополосных внешних воздействиях. В [2] метод применен к задаче о флаттере пластин. В данной работе асимптотический метод применяется к задаче о сверхзвуковом флаттере ортотропной цилиндрической оболочки. Показана вычислительная устойчивость уравнения стыковки и приведены результаты параметрического исследования задачи.

1. Отнесем срединную поверхность цилиндрической оболочки радиуса R , длины L и толщины h к системе координат x_1, x_2 , совпадающей с линиями главных кривизн. Будем считать, что главные направления упругости ортотропного материала оболочки совпадают с координатными линиями. В направлении, противоположном x_1 , оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V . Предположим, что давление внутри оболочки равно давлению в невозмущенном потоке газа. Избыточное аэродинамическое давление на колеблющуюся оболочку будем учитывать по линейному приближению поршневой теории с поправкой Крумхаара на кривизну срединной поверхности. В случаях, когда применение этой теории требует дополнительного обоснования, рассматриваемую задачу следует трактовать как модельную. Ставится задача об исследовании устойчивости невозмущенной формы равновесия оболочки. Эта задача должна формулироваться как задача с начальными данными. Для упругих систем с дискретным спектром собственных частот, как известно [3], достаточно исследовать элементарные движения оболочки в окрестности невозмущенной формы

$$\sum_{m=1}^3 L_{jm} \left(u_m + \gamma \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) - (1 - \alpha_1^2) \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \delta_j \left(\gamma \frac{\partial u_j}{\partial t} - \beta \frac{\partial u_j}{\partial x} + \alpha_2 u_j \right) \right] = 0$$

$$(j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь $u_j(x, \theta, t)$ — компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности и введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$x = \frac{x_1}{R}, \quad \theta = \frac{x_2}{R}, \quad \bar{t} = \Omega_0 t, \quad \beta = \frac{x p_\infty R V}{c_\infty E_1 h}, \quad \alpha_R = \frac{x p_\infty R}{2 E_1 h}$$

$$\epsilon_0 = \frac{x p_\infty R}{c_\infty h} (\rho E_1)^{-1/2}, \quad \gamma = \epsilon + \epsilon_0, \quad l = \frac{L}{R}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$$

$\eta, \epsilon, \epsilon_0$ — безразмерные параметры внутреннего, внешнего и аэродинамического демпфирования соответственно, ρ — плотность материала оболочки, x — показатель политропы, p_∞, c_∞ — давление и скорость звука в невозмущенном потоке. Дифференциальные операторы L_{jkl} имеют вид [4]

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_3 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (\gamma_1 d_1 + d_2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{22} = -L_{31} = \gamma_1 d_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22} = d_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mu^4 \left(4d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

$$L_{33} = -L_{32} = d_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - \mu^4 \left[(\gamma_1 d_1 + 4d_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial \theta} + d_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^3} \right]$$

$$L_{32} = -d_1 - \mu^4 \left[\frac{\partial^1}{\partial x^4} + 2(\gamma_1 d_1 + 2d_2) \frac{\partial^1}{\partial x^2 \partial \theta^2} + d_1 \frac{\partial^1}{\partial \theta^4} \right]$$

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12 R^2}, \quad d_1 = \frac{E_2}{E_1}, \quad d_2 = \frac{G}{E_1}, \quad d_3 = d_2 (1 - d_1 \gamma_1^2)$$

E_1, E_2, G, γ_1 ($\gamma_2 = E_2 \gamma_1 / E_1$) — упругие постоянные материала оболочки.

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить краевыми условиями. Рассмотрим, например, случай жесткого защемления круговых кромок оболочки

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (x=0, x=l) \quad (1.2)$$

Параметр скорости флаттера β_* оболочки является наименьшим из тех значений β , для которых задача (1.1), (1.2) имеет решения, соответствующие колебаниям с вещественной частотой.

Использование схемы точного решения задачи (1.1), (1.2) приводит, как известно, к исследованию определителя восьмого порядка с комплексными элементами и содержащего экспоненты с отрицательными и положительными действительными частями, соответствующие частным решениям по пространственной переменной. При значительных удлинениях $l \gg 5$ вычисление определителя становится численно неустойчивым процессом и даже может привести к исчезновению порядков или переполнению разрядной сетки. Стабилизировать процесс вычислений определителя нормировкой строк или столбцов принципиально невозможно. При таких удлинениях или существенном демпфировании колебаний задача эффективно решается с использованием концепции динамического краевого эффекта [1] и асимптотического метода, на ней основанного.

Порождающее решение системы (1.1) примем в виде

$$\begin{aligned}
u_1^0 &= [C_1 \chi_1(ik_1) \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \chi_2(ik_2) \exp(i(k_2 x - \omega t))] \cos n\theta \\
u_2^0 &= [C_1 \psi_1(ik_1) \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \psi_2(ik_2) \exp(i(k_2 x - \omega t))] \sin n\theta \\
u_3^0 &= [C_1 \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \exp(i(k_2 x - \omega t))] \cos n\theta
\end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\chi_\alpha(ik_\alpha) = D_1(ik_\alpha)/D(ik_\alpha), \quad \psi_\alpha(ik_\alpha) = D_2(ik_\alpha)/D(ik_\alpha)$$

$$\operatorname{Im} \omega = 0, \quad \operatorname{Re} k_\alpha < 0, \quad \operatorname{Im} k_\alpha > 0$$

$$D = \left[k_\alpha^2 + \frac{(1-d_1 v_1^2) \omega^2}{1-i\gamma \omega} + d_2 n^2 \right] \left[d_3(1+4\mu^4) k_\alpha^2 + d_1(1+\mu^4) n^2 + \right. \\
\left. + \frac{(1-d_1 v_1^2) \omega^2}{1-i\gamma \omega} \right] - (v_1 d_1 + d_3)^2 n^2 k_\alpha^2$$

$$D_1 = d_1 v_1 k_\alpha \left[d_3(1+4\mu^4) k_\alpha^2 + d_1 n^2(1+\mu^4) + \frac{(1-d_1 v_1^2) \omega^2}{1-i\gamma \omega} \right] - \\
- (v_1 d_1 + d_3) n i k_\alpha [k_\alpha^2 n \mu^4 (v_1 d_1 + 4d_3) + n(d_1 + \mu^4 n^2 d_1)]$$

$$D_2 = \left[k_\alpha^2 + \frac{(1-d_1 v_1^2) \omega^2}{1-i\gamma \omega} + n^2 d_3 \right] [k_\alpha^2 n \mu^4 (v_1 d_1 + 4d_3) + n(d_1 + \mu^4 n^2 d_1)]$$

$$(\alpha=1, 2; n=1, 2, \dots)$$

Решение (1.3) представляет собой суперпозицию двух волн с неизвестными волновыми числами k_α и частотой ω , распространяющихся в направлении потока и амплитуды которых экспоненциально убывают с возрастанием x . Это решение будет удовлетворять системе (1.1), если волновые числа удовлетворяют уравнению

$$\sum_{m=0}^8 p_m(ik_\alpha)^{8-m} = 0 \quad (\alpha=1, 2) \quad (1.4)$$

Явные выражения для коэффициентов p_m здесь не приводим.

2. В соответствии с основной идеей асимптотического метода [1] порождающее решение (1.3) должно быть скорректировано у каждой из кромок решениями типа динамического краевого эффекта. Скорректированные решения должны удовлетворять граничным условиям и при удалении от кромок во внутреннюю область срединной поверхности должны стремиться к порождающему решению. Будем искать решения системы (1.1) в окрестности кромок в виде

$$u_j(x, \theta, t) = U_j(x) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

После подстановки решения (2.1) в (1.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U_j(x)$. Частными решениями этой системы являются $\{\chi_m(r_m) \exp(r_m x), \psi_m(r_m) \exp(r_m x), \exp(r_m x)\}$ ($m=1, 2, \dots, 8$), где r_m — корни характеристического уравнения

$$\sum_{m=0}^6 p_m r^{6-m} = 0 \quad (2.2)$$

Это уравнение, как следует из (1.4), имеет два корня $r_1 = ik_1$, $r_2 = ik_2$, соответствующие порождающему решению (1.3). Поэтому полином левой части (2.2) должен нацело делиться на квадратный трехчлен $r^2 - i(k_1 + k_2)r - k_1 k_2$. Условие обращения в нуль остатка от деления дает два уравнения

$$F_1(k_1, k_2, \omega, \beta) = p_7 + i(k_1 + k_2)q_6 + k_1 k_2 q_5 = 0 \quad (2.3)$$

$$F_2(k_1, k_2, \omega, \beta) = p_8 + k_1 k_2 q_6 = 0 \quad (2.4)$$

Здесь зависимость от других параметров задачи явно не подчеркивается. Приравнявая нулю частное, получим уравнение

$$\sum_{m=0}^6 q_m r^{6-m} = 0 \quad (2.5)$$

$$q_0 = p_0, \quad q_1 = i(k_1 + k_2)p_0$$

$$q_m = p_m + i(k_1 + k_2)q_{m-1} + k_1 k_2 q_{m-2} \quad (m = 2, 3, \dots, 6) \quad (2.6)$$

корни которого соответствуют решениям типа динамического краевого эффекта. При однородных граничных условиях динамический краевой эффект будет невырожденным, если три корня уравнения (2.5) расположены левее корней ik_n , а три корня лежат в правой полуплоскости. Установим невырождение динамических краевых эффектов для состояний, соответствующих неосесимметричному флаттеру ($\omega \neq 0$, $n \geq 1$). Милый параметр $\mu^2 = h^2/(12R^2)$ входит в качестве множителя в коэффициент p_0 , а следовательно, и в q_0 . Выясним асимптотику при $\mu \rightarrow 0$ корней уравнения (2.5). Для этого умножим обе части этого уравнения на μ^2 и выполним замену переменной $r = z\mu$. Величина β имеет порядок, не меньший, чем $\beta = O(\mu^{1+\epsilon_1})$, $\epsilon_1 > 0$. Тогда уравнение нулевого приближения относительно z имеет двукратный нулевой корень и четыре ненулевых. Последним соответствующее уравнение относительно r :

$$d_3 \left[\mu^4 r^4 + d_1(1 - d_1 v_1^2) - (1 - d_1 v_1^2) \frac{d_1 \omega - z_R + \omega^2}{1 - i \gamma \omega} \right] = 0 \quad (2.7)$$

Корни этого уравнения близки к так называемым „большим корням“ в задачах статики оболочек, если параметр частоты флаттера ω мал. Обозначим через r_3 , r_4 корни уравнения (2.7), лежащие в левой полуплоскости, а через r_5 , r_6 — в правой. Асимптотику при $\mu \rightarrow 0$ для других корней уравнения (2.5) можно получить из соотношения

$$(d_3 \mu^4 r^4 + q_1)(r^2 + a_1 r + a_2) = q_0 r^6 + \dots + q_5 r + q_6$$

Приравнявая коэффициенты в обеих частях при одинаковых степенях r , найдем с точностью до $O(\mu^4)$ выражения для a_1 и a_2 . Окончательное суждение о невырождении динамического краевого эффекта связано с расположением корней уравнения

$$r^2 + i(k_1 + k_2)r - n^2 \left[2\gamma_1 d_1 + 4d_3 + \frac{d_1}{d_2} + d_3 - \left(\gamma_1 \frac{d_1}{d_2} + 1 \right)^2 d_3 \right] + \\ + \frac{1 + d_3}{d_2} \frac{\omega^2}{1 - i\eta\omega} - k_1^2 - k_2^2 - k_1 k_2 = 0. \quad (2.8)$$

Пусть r_+ — корень уравнения (2.8), расположенный в левой полуплоскости, а r_- — в правой.

3. Рассмотрим кромку $x=0$ и построим скорректированное решение у этой кромки в виде

$$u_1(x|0; \theta, t) = [C_1 \chi_1(ik_1) \exp(ik_1 x) + C_2 \chi_2(ik_2) \exp(ik_2 x) + \\ + \sum_{m=3}^5 C_m \chi_m(r_m) \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \cos n\theta \\ u_2(x|0; \theta, t) = [C_1 \psi_1(ik_1) \exp(ik_1 x) + C_2 \psi_2(ik_2) \exp(ik_2 x) + \\ + \sum_{m=3}^5 C_m \psi_m(r_m) \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \quad (3.1)$$

$$u_3(x|0; \theta, t) = [C_1 \exp(ik_1 x) + C_2 \exp(ik_2 x) + \sum_{m=3}^5 C_m \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

где $\text{Re} r_m < 0$ ($m=3, 4, 5$). Удовлетворяя граничным условиям (1.2), получим систему алгебраических уравнений:

$$C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = -C_1 \\ ik_2 C_2 + r_3 C_3 + r_4 C_4 + r_5 C_5 = -ik_1 C_1 \\ \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 + \gamma_4 C_4 + \gamma_5 C_5 = -\gamma_1 C_1 \\ \psi_2 C_2 + \psi_3 C_3 + \psi_4 C_4 + \psi_5 C_5 = -\psi_1 C_1$$

Из этой системы находим

$$C_2 = \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1, \quad C_3 = \frac{\Delta_3^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1, \quad \dots, \quad C_5 = \frac{\Delta_5^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1 \quad (3.2)$$

$$\Delta^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(0)} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_5 \\ \psi_3 & \psi_4 & \psi_4 & \psi_5 \end{vmatrix}, \dots \quad (3.3)$$

Тогда выражения (3.1) принимают вид

$$u_1(x|0; \theta, t) = C_1 \left[\gamma_1 \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \gamma_2 \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \gamma_m \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta \\ u_2(x|0; \theta, t) = C_1 \left[\psi_1 \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \psi_2 \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \psi_m \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \quad (3.4)$$

$$u_2(x|0; \theta, t) = C_1 \left[\exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

Итак, скорректированное решение у кромки $x=0$ удовлетворяет граничным условиям и стремится к порождающему решению (3.2) при $x \rightarrow \infty$. Таким же путем построенное решение у кромки $x=l$ будет иметь вид

$$u_1(x|l; \theta, t) = C_1 \left[\gamma_1 \exp(ik_1 x) + \gamma_2 \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \gamma_m \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

$$u_2(x|l; \theta, t) = C_1 \left[\psi_1 \exp(ik_1 x) + \psi_2 \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \psi_m \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \quad (3.5)$$

$$u_3(x|l; \theta, t) = C_1 \left[\exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \right. \\ \left. + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

$$\Delta^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & r_6 & r_7 & r_8 \\ \gamma_2 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \\ \psi_1 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(0)} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & r_6 & r_7 & r_8 \\ \gamma_1 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \\ \psi_1 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{vmatrix}, \dots \quad (3.6)$$

Решения (3.4) и (3.5), построенные у противоположных кромок, «стыкуем» во внутренней области. Для этого приравняем одноименные компоненты решений с точностью до слагаемых, соответствующих динамическим краевым эффектам. В результате получаем уравнение стыковки

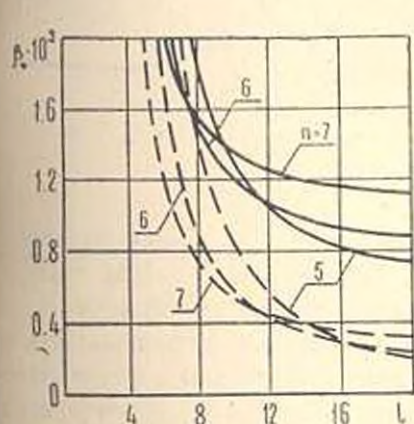
$$F_3(k_1, k_2, \omega, \beta) \equiv \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} - \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) = 0 \quad (3.7)$$

Стыковка производных любого порядка du^n/dx^m от компонент скорректированных решений приводит к тому же уравнению. Определители в (3.7) имеют вид (3.3) и (3.6). Их элементы не содержат экспонент. Кроме того, относительная длина оболочки l входит только в показатель экспоненциального множителя в уравнении (3.7). И умножается она на разность волновых чисел порождающего решения. Для других типов закрепления кромок оболочки определители (3.3) и (3.6) будут содержать другие степени корней. Для отыскания неизвестных параметров скорости β , частоты ω , флаттера и комплексных волновых чисел k_1, k_2 получена система трех уравнений (2.3), (2.4) и (3.7), решая которую

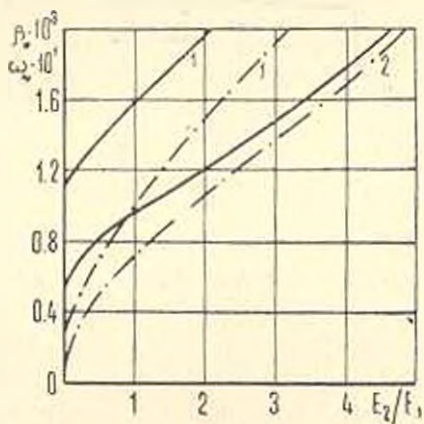
равносильная системе шести вещественных уравнений. При этом из уравнений (2.7) и (2.8) имеем явные выражения для корней r_m ($m = 3, 4, \dots, 8$).

Отметим еще следующий факт. Левая часть уравнения (3.7) имеет предел при $l \rightarrow \infty$, только если $ik_1 = ik_2$. В этом случае значение предела левой части равно нулю и (3.7) превращается в тождество. Поэтому критические значения параметров скорости и частоты флаттера для полубесконечной оболочки при наличии задней кромки определяются из условия существования кратных корней уравнения (2.2). Подобный вывод справедлив и для пластин [2].

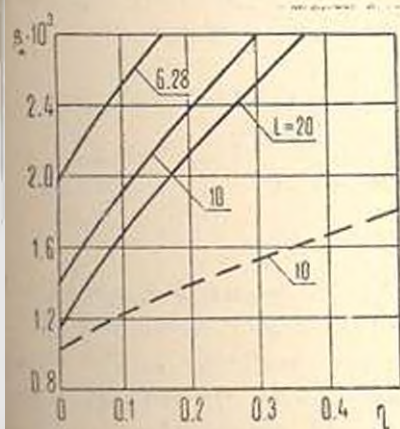
4. Ниже приводятся результаты вычислений для защемленной оболочки с параметрами $R/h = 150$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_p/E_1 = 0,82 \cdot 10^{-6}$ и $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$. При этом корни характеристического уравнения (2.2) находились численным методом, а параметры скорости β_* и частоты ω_* флаттера получались из уравнения стыковки (3.7), равносильного двум вещественным уравнениям. Искомые параметры должны доставлять нулевой минимум абсолютной величине левой части (3.7). Минимизация осуществлялась численным методом Нелдера-Мида.



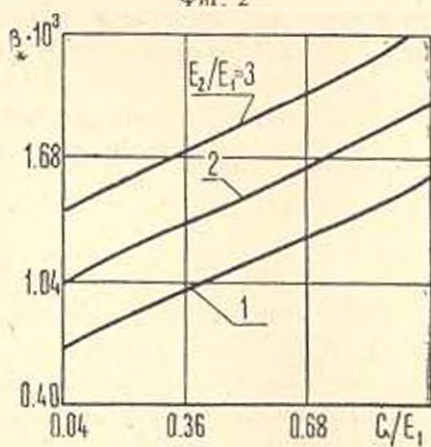
Фиг. 1



Фиг. 2

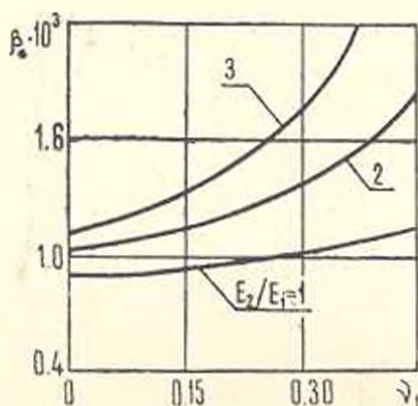


Фиг. 3

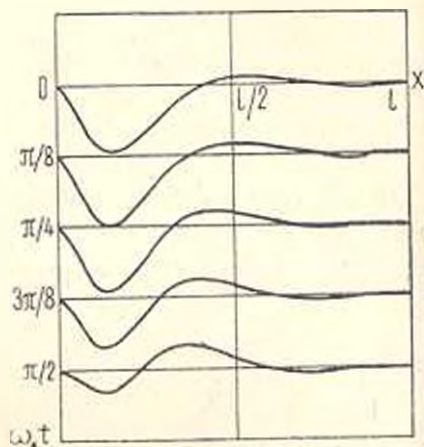


Фиг. 4

На фиг. 1 показаны зависимости параметра скорости флаттера от длины оболочки l для различных значений n числа волн в окружном направлении ($\tau=0$, $G/E_1=0,38$). Сплошные линии соответствуют $E_2/E_1=2$, штриховые — $E_2/E_1=0,02$. С увеличением длины оболочки уменьшается число волн в окружном направлении, соответствующих границе области флаттера. На фиг. 2 представлено влияние параметра E_2/E_1 на величины β_* (сплошные линии) и ω_* (штрих-пунктирные линии). Кривые 1 отвечают случаю $n=7$, $l=6,28$, кривые 2 — $n=6$, $l=10$ ($G/E_1=0,38$). Влияние параметра внутреннего демпфирования



Фиг. 5



Фиг. 6

на величину параметра скорости флаттера при различных значениях l показано на фиг. 3 для $n=7$, $E_2/E_1=2$, $G/E_1=0,38$. Штриховая кривая соответствует изотропной оболочке. Зависимости β_* от параметров G/E_1 и γ_1 при различных значениях E_2/E_1 показаны на фиг. 4 и 5 ($l=10$, $n=7$, $\tau=0$). На фиг. 6 показаны сечения плоскостью $\psi=0$ "формы" движения оболочки на границе области устойчивости для нормального прогиба $u_3(x, \theta, t) = \text{Re}\{U_3(x)\exp(-i\omega t)\}\cos n\theta$ при различных значениях $\omega_* t$ при $l=10$, $\tau=0,26$, $n=7$, $E_2/E_1=2$, $G/E_1=0,38$. Движение имеет характер бегущей волны.

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԴԱՆԱՅԻՆ ԽԱՂԱՆԹԻ ՅԼԱՏՆԻ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻՎ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Կ. Ի. ԺԵՆԺԵՐ, Ի. Մ. ԿԱԴԱՐՄԵՏՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա տրվում է շրջանային դաճանային թաղանթի գերձայնային ֆլատերի խնդրի լուծումը: Ցույց է տրվում մեծ երկարությամբ թաղանթների դեպքում կցման հավասարումների հաշվելի կայունությունը: Հետադրությամբ է ֆլատերի արագություն և հաճախականության վրա նյութի անկողտրոպիայի պարամետրերի և ներքին դեֆորմացիայի ազդեցությունը:

AN ASYMPTOTIC METHOD APPLIED TO FLUTTER OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

N. I. ZHINZHER, I. M. KADARMETOV

S u m m a r y

In the paper the solution of supersonic flutter problems of a circular cylindrical shell is given on the basis of Bolotin's dynamic edge effect method. The influence of anisotropic parameters, internal damping and length of the shell on the value of velocity and frequency of the flutter has been investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек.—ПММ, 1960, т. 24, № 5.
2. Жинзжер Н. И. Динамические краевые эффекты при аэроупругих колебаниях пластин. В кн.: V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике, Алма-Ата, 1981. Аннот. докладов.—Алма-Ата: Наука, 1981.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
28.III 1983

УДК 534.014.1

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗОМ

АБРАМЯН Л. В.

Рассмотрены свободные колебания прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки конечной сдвиговой жесткости. Пластика по контуру свободно оперта и имеет прямой разрез вдоль одной из осей симметрии. Система координат выбрана так, что ось OX проходит через разрез ($c < x \leq a$) (фиг. 1).

Целью работы является определение низших частот колебаний рассматриваемой пластинки, которые, как известно [1], с достаточной точностью могут быть найдены и без учета инерции вращения.

В работе [2] исследованы в классической постановке колебания указанной пластинки, изготовленной из изотропного материала.

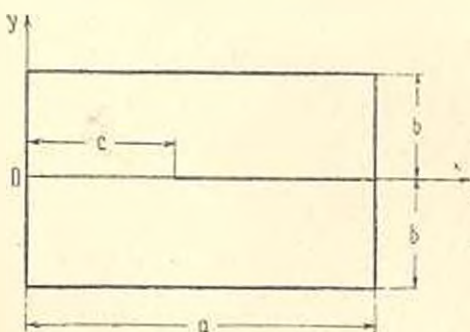
Уравнения свободных колебаний рассматриваемой пластинки можно представить в следующем виде [3]:

$$D\Delta\Delta w + \rho h(1-k\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\Phi - \frac{2}{k(1-\nu)}\Phi = 0; \quad k = \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{G}{G'} \quad (1)$$

Здесь сохранены обозначения, принятые в [3], причем $\Phi(x, y)$ — новая искомая функция, через которую функции сдвига φ и ψ представляются следующим образом:

$$\varphi = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \frac{12}{h^3} k \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{12}{h^3} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\psi = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \frac{12}{h^3} k \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{12}{h^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$



Фиг. 1

Граничные условия пластинки следующие:

$$w = M_x = \psi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a \quad (3)$$

$$w = M_y = H = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b \quad (4)$$

где

$$M_x = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \right.$$

$$\left. -k(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \right] + k(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - k \left[1 - k(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] Z$$

$$M_y = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - k(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w \right] - \\ - k(1-\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y} - k \left[1 - k(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] Z \\ H = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} + k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w \right) - k(1-\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \Phi - k^2(1-\nu) \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y}$$

Формы колебаний пластинки ищутся по методу Фурье в виде тригонометрических рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \omega t; \quad \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \omega t \quad (5)$$

удовлетворяющих условиям (3).

Подставляя (5) в (1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$W_m^{IV} - 2W_m'' \left(\lambda^2 - \frac{k h}{2D} \rho \omega^2 \right) + \left[\lambda^4 - \rho \frac{h \omega^2}{D} (1 + k \lambda^2) \right] W_m = 0 \quad (6) \\ F_m'' - \left[\lambda^2 + \frac{2}{k(1-\nu)} \right] F = 0; \quad \lambda = m\pi/a$$

Общие решения полученных уравнений в зависимости от величины параметра m будут

$$W_m(y) = C_m^{(3)} \operatorname{sh} k_2 y + C_m^{(4)} \operatorname{ch} k_2 y + \begin{cases} C_m^{(1)} \sin k_1 y + C_m^{(2)} \cos k_1 y, & (1 \leq m \leq m_1) \\ C_m^{(1)} \operatorname{sh} k_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{ch} k_1 y, & (m > m_1) \end{cases} \quad (7) \\ F_m(y) = C_m^{(5)} \operatorname{sh} k_3 y + C_m^{(6)} \operatorname{ch} k_3 y$$

где

$$k_1 = \begin{cases} \left[V \sqrt{\rho \frac{h \omega^2}{D} \left(1 + \rho \frac{k^2 h \omega^2}{4D} \right)} - \left(\lambda^2 - \rho \frac{k h \omega^2}{2D} \right) \right]^{1/2} & (1 \leq m \leq m_1) \\ \left[-V \sqrt{\rho \frac{h \omega^2}{D} \left(1 + \rho \frac{k^2 h \omega^2}{4D} \right)} + \left(\lambda^2 - \rho \frac{k h \omega^2}{2D} \right) \right]^{1/2} & (m > m_1) \end{cases} \quad (8) \\ k_2 = \left[V \sqrt{\rho \frac{h \omega^2}{D} \left(1 + \rho \frac{k^2 h \omega^2}{4D} \right)} + \left(\lambda^2 - \rho \frac{k h \omega^2}{2D} \right) \right]^{1/2}, \quad k_3 = \left[\lambda^2 + \frac{2}{k(1-\nu)} \right]^{1/2}$$

Здесь m_1 — целая положительная величина, зависящая от параметров пластинки.

Постоянные интегрирования $C_m^{(1)} - C_m^{(6)}$ определяются из граничных условий пластинки на краю $y=b$ (4) и условий вдоль оси OX . И так как формулировка последних зависит от формы колебаний пластинки, то симметричные и антисимметричные колебания рассмотрены в отдельности.

1. *Симметричные колебания.* Условия вдоль оси $y=0$ будут

$$\partial w / \partial y = N_y = H = 0, \quad (0 \leq x \leq c) \quad (9)$$

$$M_y = N_y = H = 0, \quad (c \leq x \leq a)$$

$$\text{где} \quad N_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k \frac{\partial Z}{\partial y}$$

(и здесь надо полагать $Z = -\rho h \partial^2 w / \partial t^2$).

После удовлетворения условиям (4) и (9) получаем следующие парные уравнения:

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)} \cos k_1 b \frac{A}{B} \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(2)} \operatorname{ch} k_1 b \frac{A}{B} \sin \frac{m\pi}{a} x = 0, \quad (0 \leq x \leq c) \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)} \cos k_1 b \frac{C}{B} \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(2)} \operatorname{ch} k_1 b \frac{C}{B} \sin \frac{m\pi}{a} x = 0, \quad (c \leq x \leq a)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (M_2 - M_1) [k_1 (H_3 N_2 - N_3 H_2) + k_2 (H_1 N_3 - H_3 N_1)] \\ B &= \frac{M_2}{\operatorname{sh} k_3 b} (H_1 N_2 - H_2 N_1) + (M_1 - M_2) (H_3 N_2 - H_2 N_3) \times \begin{cases} \sin k_3 b & (1 \leq m \leq m_1) \\ \operatorname{sh} k_3 b & (m > m_1) \end{cases} \\ C &= M_3 (N_1 H_2 - H_1 N_2) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} k_3 b} \left(\frac{M_2}{\operatorname{ch} k_2 b} - \frac{M_1}{\cos k_1 b} \right) + \frac{M_1 - M_2}{\operatorname{th} k_3 b} \right] + \\ &+ (M_1 - M_2) \left[\frac{M_1 (H_3 N_2 - H_2 N_3)}{\operatorname{ctg} k_1 b} + \frac{M_2 (N_3 H_1 - H_3 N_1)}{\operatorname{cth} k_2 b} \right], \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (11) \\ C &= M_3 (N_1 H_2 - H_1 N_2) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} k_3 b} \left(\frac{M_2}{\operatorname{ch} k_2 b} - \frac{M_1}{\cos k_1 b} \right) + \frac{M_1 - M_2}{\operatorname{th} k_3 b} \right] + \\ &+ (M_1 - M_2) \left[\frac{M_1 (H_3 N_2 - H_2 N_3)}{\operatorname{cth} k_1 b} + \frac{M_2 (N_3 H_1 - H_3 N_1)}{\operatorname{cth} k_2 b} \right], \quad (m > m_1) \end{aligned}$$

и соотношения

$$\begin{aligned} C_m^{(1)} &= C_m^{(2)} \frac{(M_2 - M_1)(H_3 N_2 - H_2 N_3)}{B} \times \begin{cases} \cos k_1 b & (1 \leq m \leq m_1) \\ \operatorname{ch} k_1 b & (m > m_1) \end{cases} \\ C_m^{(3)} &= C_m^{(1)} \frac{N_2 H_1 - H_3 N_1}{H_3 N_2 - H_2 N_3} \\ C_m^{(4)} &= C_m^{(1)} \left\{ \operatorname{sh} k_2 b (M_2 - M_1) (N_3 H_1 - H_3 N_1) + \right. \\ &+ \left. \frac{M_2}{\operatorname{sh} k_3 b} (N_1 H_2 - H_2 N_1) [(M_2 - M_1)(H_2 N_3 - H_3 N_2) \operatorname{ch} k_2 b]^{-1} \right\} \quad (12) \\ C_m^{(5)} &= C_m^{(1)} \operatorname{cth} k_3 b \frac{H_1 N_2 - H_2 N_1}{H_3 N_2 - H_2 N_3}; \quad C_m^{(6)} = C_m^{(1)} \frac{H_2 N_1 - N_3 H_1}{H_3 N_2 - H_2 N_3} \end{aligned}$$

В (11) и (12) введены следующие обозначения:

$$H_1 = (1 - \nu)(k N_1 - D k_1) \lambda; \quad H_2 = (1 - \nu)(k N_2 - D k_2) \lambda; \quad H_3 = 1 + k \lambda^2 (1 - \nu)$$

$$M_1 = D \left\{ \omega^2 + k \left[\lambda^2 (1 - \nu) - \rho \frac{h \omega^2}{D} (1 + k \lambda^2) \right] \pm k_1^2 [1 + k \lambda^2 (1 - \nu)] \right\}$$

$$M_2 = D \left\{ \omega^2 + k \left[\lambda^2 (1 - \nu) - \rho \frac{h \omega^2}{D} (1 + k \lambda^2) \right] - k_2^2 [1 + k \lambda^2 (1 - \nu)] \right\}$$

$$M_3 = \lambda k k_3 (1 - \nu)$$

$$N_1 = k_1 D \left(i^2 - \rho \frac{k h}{D} \omega^2 \pm k_1^2 \right); \quad N_2 = k_2 D \left(i^2 - \rho \frac{k h}{D} \omega^2 - k_2^2 \right); \quad N_3 = \lambda$$

(В выражениях M_1 ; N_1 в двойном знаке „+“ соответствует случаю $1 \leq m \leq m_1$).

Вводя теперь обозначения

$$X_m = C_m^{(2)} \frac{1}{m} \frac{C}{B} \times \begin{cases} \cos k_1 b & (1 \leq m \leq m_1) \\ \operatorname{ch} k_1 b & (m > m_1) \end{cases} \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{\pi x}{a}; \quad \beta = \frac{\pi c}{a}$$

После некоторых преобразований парные уравнения (10) приводим к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m (1 - N_m) \sin mx = 0 \quad (0 \leq x \leq \beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x_m \sin mx = 0 \quad (\beta < x \leq \pi)$$

где

$$N_m = 1 - m \frac{A}{C}$$

Для выяснения поведения N_m при $m \rightarrow \infty$ разложим выражения k_i (8), входящие в N_m , в степенные ряды, сохраняя в них первые два члена. Прделав указанную процедуру, получим

$$k_1 = \lambda \left(1 - \frac{k h \omega^2}{2 D i^2} \rho - \frac{1}{2 k i^2} \right); \quad k_2 = \lambda \left(1 + \frac{1}{2 k i^2} \right), \quad k_3 = \lambda \left(1 + \frac{1}{k (1 - \nu) i^2} \right) \quad (15)$$

Используя (15), можно показать, что N_m при возрастании m имеет экспоненциальный порядок убывания

$$N_m \approx \exp \left(-m \frac{2\pi b^2}{a} \right) \quad (16)$$

Здесь это не показано потому, что хотя это и элементарно, но весьма громоздко.

В дальнейшем парные уравнения (14) сводятся, как показано в [2], к следующей бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m - X_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

где

$$a_{nm} = \frac{m}{2(n^2 - m^2)} \{ (n-m) [P_{m-1}(\cos \beta) P_{n-1}(\cos \beta) - P_m(\cos \beta) P_n(\cos \beta)] + \\ + (n+m) [P_{n-1}(\cos \beta) P_m(\cos \beta) + P_n(\cos \beta) P_{m-1}(\cos \beta)] \} \\ a_{nn} = \frac{1}{4} \{ 2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + P_{n-1}^2(\cos \beta) - P_n^2(\cos \beta) - \\ - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta) [\cos \beta P_k(\cos \beta) - P_{k+1}(\cos \beta)] \}$$

Для существования нетривиальных решений коэффициентов необходимо, чтобы определитель бесконечной системы (17) равнялся нулю. Из этого условия и определяются собственные частоты. Можно показать, что при условии (16) указанный определитель нормальный. Это позволяет использовать для определения частот метод редукции.

2. *Антисимметричные колебания.* В этом случае условия по оси $y=0$ будут

$$\begin{aligned} w = M_y = H = 0 \quad (0 \leq x \leq c) \\ N_y = M_y = H = 0 \quad (c \leq x \leq a) \end{aligned} \quad (18)$$

Удовлетворяя условиям (18) и (4), получаем

$$\begin{aligned} C_m^{(3)} = 0; \quad C_m^{(4)} = -C_m^{(2)}, \quad C_m^{(2)} = C_m^{(2)} \frac{D}{M_3} \times \begin{cases} -(k_1^2 + k_2^2) & (1 \leq m \leq m_1) \\ (k_1^2 - k_2^2) & (m > m_1) \end{cases} \\ C_m^{(2)} = C_m^{(1)} \frac{M_3}{A \operatorname{ch} k_3 b} \times \begin{cases} \operatorname{sh} k_1 b \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{tg} k_2 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) & (1 \leq m \leq m_1) \\ \operatorname{sh} k_1 b \left(\frac{H_1 M_3}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{H_2 M_3}{\operatorname{th} k_2 b} \right) & (m > m_1) \end{cases} \\ C_m^{(3)} = -\frac{1}{M_2 \operatorname{sh} k_1 b} \times \\ \times \begin{cases} C_m^{(1)} M_1 \operatorname{sh} k_1 b + C_m^{(2)} [M_1 \cos k_1 b - M_2 \operatorname{ch} k_2 b - (M_1 - M_2) \operatorname{ch} k_3 b] \\ C_m^{(1)} M_1 \operatorname{sh} k_1 b + C_m^{(2)} [M_1 \operatorname{ch} k_1 b - M_2 \operatorname{ch} k_2 b - (M_1 - M_2) \operatorname{ch} k_3 b] \end{cases} \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \operatorname{sh} k_1 b \frac{M_2 - M_1}{M_2} \left| 1 + \frac{M_3}{A} \left(\frac{\cos k_1 b}{\operatorname{ch} k_2 b} - 1 \right) \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} - \frac{H_2 M_2}{\operatorname{th} k_2 b} \right) \right| \sin \frac{m\pi}{a} x + \\ + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(1)} \operatorname{sh} k_1 b \frac{M_2 - M_1}{M_2} \left| 1 + \frac{M_3}{A} \left(\frac{\operatorname{ch} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - 1 \right) \left(\frac{H_1 M_3}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) \right| \times \\ \times \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (0 \leq x \leq c) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} k_1 b}{M_3} \left| \frac{N_2 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} - \frac{N_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} - \frac{1}{A} \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) \right| \times \\ \times \left\{ (M_1 - M_2) \left(\frac{M_2 N_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{M_1 N_2}{\operatorname{th} k_2 b} \right) - M_2 \left[\frac{M_2 N_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{\cos k_1 b}{\operatorname{ch} k_2 b} \left(\frac{N_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{N_1 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} \Big) \Big] \Big| \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} k_1 b}{M_2} \left[\frac{N_1 M_2}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{N_2 M_2}{\operatorname{th} k_2 b} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{A} \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{H_2 M_2}{\operatorname{th} k_2 b} \right) \right] (M_1 - M_2) \left(\frac{M_2 N_3}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{M_3 N_2}{\operatorname{th} k_2 b} \right) - \\
& - M_3 \left[\frac{M_2 N_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{\operatorname{ch} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} \left(\frac{N_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} - \frac{N_1 M_2}{\operatorname{th} k_1 b} \right) \right] \Big| \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (c \leq x \leq a)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= (M_1 - M_2) \left(\frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) - M_3 \frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \\
&- \left[M_3 \frac{\cos k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} \left(\frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} + \frac{H_1 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} \right) \right] \quad (1 \leq m \leq m_1) \\
&- \left[M_3 \frac{\operatorname{ch} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} \left(\frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} - \frac{H_1 M_2}{\operatorname{th} k_1 b} \right) \right] \quad (m > m_1)
\end{aligned}$$

Дифференцируя дважды по x первое из уравнений (19) и выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям первого пункта, опять приходим к системе (14). Для N_m в этом случае имеем

$$\begin{aligned}
N_m &= 1 - \frac{m^2}{M_2 \operatorname{th} k_3 b} \left\{ (k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) + M_3 \left[\left(\frac{\cos k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - 1 \right) \times \right. \right. \\
&\times \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{tg} k_1 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) + \frac{\cos k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} \left(\frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} - \frac{H_1 M_2}{\operatorname{ctg} k_1 b} \right) - \left. \frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} \right] \Big\} \times \\
&\times \left[\frac{M_2 (H_2 N_1 - N_2 H_1)}{\operatorname{tg} k_1 b} - \frac{M_1 (H_2 N_2 - N_3 H_2)}{\operatorname{th} k_2 b} + \frac{M_3 (H_2 N_1 - N_2 H_1)}{M_1 - M_2} \times \right. \\
&\times \left. \left[M_1 \frac{\operatorname{cth} k_2 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - M_2 \frac{\operatorname{ctg} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - (M_1 - M_2) \frac{\operatorname{cth} k_1 b}{\operatorname{tg} k_1 b} \right] \right]^{-1} \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (20) \\
N_m &= 1 - \frac{m^2}{M_2 \operatorname{th} k_3 b} \left\{ (k_2^2 - k_1^2) \left(\frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) + M_3 \left[\left(\frac{\operatorname{ch} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - 1 \right) \times \right. \right. \\
&\times \left(\frac{H_1 M_2}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} \right) + \frac{\operatorname{ch} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} \left(\frac{H_2 M_1}{\operatorname{th} k_2 b} - \frac{H_1 M_2}{\operatorname{cth} k_1 b} \right) - \left. \frac{H_2 M_2}{\operatorname{ch} k_3 b} \right] \Big\} \times \\
&\times \left[\frac{M_2 (H_2 N_1 - N_2 H_1)}{\operatorname{th} k_1 b} - \frac{M_1 (H_2 N_2 - N_3 H_2)}{\operatorname{th} k_2 b} + \frac{M_3 (H_2 N_1 - N_2 H_1)}{M_1 - M_2} \times \right. \\
&\times \left. \left[M_1 \frac{\operatorname{cth} k_2 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - M_2 \frac{\operatorname{cth} k_1 b}{\operatorname{ch} k_3 b} - (M_1 - M_2) \frac{\operatorname{cth} k_2 b}{\operatorname{th} k_1 b} \right] \right]^{-1} \quad (m > m_1)
\end{aligned}$$

И в этом случае, используя (15), можно показать, что N_m при $m \rightarrow \infty$ имеет экспоненциальный порядок убывания.

3. Численные результаты. В таблице приведены первые безразмерные основные частоты $100 \omega (\rho h^3/D)^{1/2}$ колебаний пластинок с параметрами $h/b=0,1$; $\nu=0,25$; $G/G'=2$ с разным отношением сторон a/b и разной длиной разреза $\left(\beta=0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi \right)$. В каждой клет-

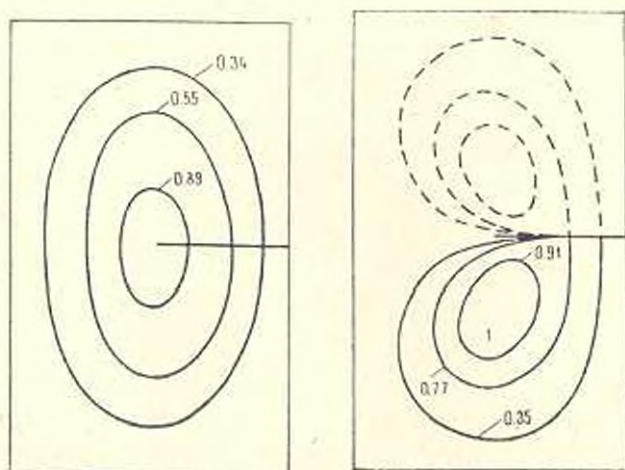
ке таблицы сверху помещена частота, соответствующая симметричной форме колебаний, а снизу — антисимметричной. Там же приведены порядки определителей, при решении которых получены соответствующие собственные частоты с достаточной точностью (расхождение результатов двух последних итераций не превышает 1 %).

Сопоставление приведенных результатов с частотами, найденными в [2], показывает, что последние всегда больше и что это расхождение результатов с увеличением β растет.

Таблица

a/b	Порядок опред.	$\beta=0$	$\beta=\frac{\pi}{4}$	$\beta=\frac{\pi}{2}$	$\beta=\frac{3\pi}{4}$	$\beta=\pi$
0.1	4	54.883	51.972 55.404	55.211 58.066	55.355 60.262	55.375 60.525
0.6	4	27.244	27.340 27.750	27.587 30.540	27.733 33.318	27.753 33.671
0.8	4	16.572	16.674 17.047	16.924 19.764	17.072 22.996	17.092 23.396
1	10 8	11.398	11.513 11.668	11.779 13.720	11.932 17.527	11.950 18.483
1.5	10 8	6.045	6.185 6.240	6.513 7.747	6.709 12.193	6.732 13.557
2	10 8	4.031	4.195 4.208	4.590 5.447	4.842 10.005	4.871 11.828
3	10 8	2.415	2.514 2.626	3.117 3.304	3.488 7.227	3.531 10.600

Как видно из таблицы, с уменьшением длины разреза (увеличение β) собственные частоты увеличиваются, причем частоты антисимметричных форм увеличиваются более резко.



Фиг. 2. а) симметричная форма
б) антисимметричная форма

В том случае, когда разрез проходит по всей длине пластинки ($\beta=0$), рассматриваемая пластинка делится на две пластинки с тремя шарнирно опертыми и одним свободным краем, граничные условия которых вдоль свободных краев при симметричных и антисимметричных колебаниях совпадают. Поэтому для обеих форм колебаний в этом случае получаются одни и те же частоты, которые при $\beta \neq 0$ разветвляются на симметричные и антисимметричные; и чем больше β , тем больше разница между этими частотами.

На фиг. 2 в виде линий равных прогибов приведены первые формы симметричных и антисимметричных колебаний, полученные для пластинки с отношением сторон $a/b=0,8$ при $\beta=\pi/2$. Цифры на кривых показывают отношение прогиба на данной линии к максимальному прогибу пластинки.

ՀԱՂՔՈՎ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱԼԻ ԱՋԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա. Վ. ԱՅՐԱՋԱՄՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է սահմանափակված կողմերով կոշտությամբ ունեցող ազատ հենված ուղղանկյուն տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի սեփական տատանումները, երբ սալն ունի ճեղք սիմետրիայի առանցքներից մեկի ուղղությամբ: Ընդհանուր առմամբ նույն առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ և ոչ սիմետրիկ տատանումները դիտարկվում են առանձին-առանձին: Տատանումների հաճախականությունների որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցայի սեփական արժեքները գտնելուն: Կատարված է թվային հետազոտություն:

THE FREE VIBRATIONS OF A TRANSVERSAL ISOTROPIC PLATE WITH A CUT

L. V. ABRAMIAN

S u m m a r y

The free vibrations of free supported along the sides of a rectangular transversal isotropic plate with finite shear stiffness with the right cut along the longitudinal axis of symmetry are considered. The symmetric and antisymmetric forms of vibration in relation to the axis with the cut are differentiated.

The question of determining the frequency of vibrations are reduced to the computing of the eigenvalues of matrix of coefficients of an infinite system of linear homogeneous equations. Numerical results are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
2. Абрамян Л. В., Мовсисян Л. А. Свободные колебания прямоугольной пластинки с разрезом.—Докл. АН АрмССР, 1981, т. 73, № 4.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Физматгиз, 1967.

Ленинakanский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
2.XII.1983

УДК 539.375

ДВИЖЕНИЕ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ СТУПЕНЧАТОЙ НАГРУЗКИ ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ УПРУГИМИ МОДУЛЯМИ

БЫКОВЦЕВ Г. И., КОЛОКОЛЬЧИКОВ А. В., КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

Рассмотрим упругое полупространство, для которого связь напряжения σ_{ij} с деформациями ϵ_{ij} имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1)$$

где δ_{ij} — символы Кронекера, а относительно упругих параметров Ламе λ и μ предполагается их зависимость от возраста τ стареющего материала в соответствии с моделью Н. Х. Арутюняна [1]

$$\lambda = \lambda_\infty + (\lambda_0 - \lambda_\infty) \exp(-\beta\tau), \quad \mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp(-\beta\tau) \quad (2)$$

Здесь $\lambda_0, \mu_0, \lambda_\infty, \mu_\infty$ — значения параметров Ламе в возрасте $\tau=0$ и $\tau=\infty$, а $1/\beta$ — время старения. Плотность материала также предполагается изменяющейся с возрастом τ

$$\rho = \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) \exp(-\beta\tau) \quad (3)$$

Старение вызывается изменением структуры и состояния материала, которое сопутствует движению нагрузки. Оно может сопровождаться разрывом связей, охрупчиванием окрестности приложения нагрузки, неоднородным разогревом полупространства, излучением от движущейся нагрузки. Введем декартову систему координат с центром в начале движущейся нагрузки. Ось x направим по поверхности полупространства по движению нагрузки, ось y перпендикулярна поверхности полупространства и направлена во внешнюю его сторону. Полярный угол α в плоскости принимает значение $\alpha=0$ на поверхности под равномерно распределенной нагрузкой P и значение $\alpha=\pi$ на свободной части поверхности. Рассмотрим автомодельное изменение моделей и плотности, сопутствующее движению нагрузки. Тогда возраст материала τ будет зависеть от полярного угла α .

Пусть α_0 — минимальное значение угла α , не подверженного старению. Максимальное старение будет в плоскости приложения нагрузки при $\alpha=0$. При постоянной скорости распространения в глубину полупространства процесса старения зависимость возраста материала τ от угла α — линейная

$$\tau = a(\alpha - \alpha_0), \quad a = \text{const} \quad (4)$$

Заметим, что модель (2) — (4) описывает неоднородное старение, происходящее в одном и том же материале. Впервые такой важный класс задач был рассмотрен в работе [2].

Ниже ограничимся для простоты случаем малого старения

$$|1 - \lambda_{\infty}/\lambda_0| \ll 1, \quad |1 - \mu_{\infty}/\mu_0| \ll 1, \quad |1 - \rho_{\infty}/\rho_0| \ll 1 \quad (5)$$

Уравнения движения и формулы Коши имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \partial v_i / \partial t = 0, \quad v_i = \partial u_i / \partial t \quad (6)$$

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (7)$$

Граничные условия в отсутствие трения запишутся так:

$$\sigma_{ij} n_j = -P n_i, \quad n_i(0, 1, 0) \quad x < 0, \quad y = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad y = 0, \quad x > 0; \quad x = x_1 - ct, \quad y = x_2, \quad z = x_3 \quad (9)$$

Здесь c — постоянная скорость движения нагрузки, а x_1 — координата, связанная с полупространством. В задаче плоского деформирования, удовлетворяющей (8), (9), решение будем искать в виде, удовлетворяющем условиям

$$v_3 = 0, \quad e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (10)$$

Рассмотрим процесс установившегося деформирования. Следуя [3—5], где приводится решение упругой задачи, найдем автомодельное решение для стареющего полупространства, когда все искомые величины зависят только от угла $\alpha = \arctg(y/x)$, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\sin^2 \alpha}{y} \lambda_i \frac{d}{d\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c \sin^2 \alpha}{y} \frac{d}{d\alpha}, \quad \lambda_i = \lambda_{11} \operatorname{ctg} \alpha - \lambda_{11} \quad (11)$$

С учетом (11) уравнение движения (6) примет вид

$$\lambda_i \lambda_j - \rho c v_i = 0 \quad (12)$$

Здесь и ниже штрихом обозначается дифференцирование по α . Модель (2) — (4) допускает автомодельное решение. Дифференцируя (1) по α , с учетом (11), второго равенства (6), а также формул Коши (7), получим

$$c \sigma'_{ij} = \lambda_i \lambda_j (\lambda + \mu) v_k' + \lambda_i (\mu v_j)' + \lambda_j (\mu v_i)' \quad (13)$$

где λ и μ по (2) — (4) зависят от угла α .

Подставляя (13) в (12), найдем, что

$$\lambda_i \lambda_j [(\lambda + \mu) v_k]' + (\mu v_i)' / \sin^2 \alpha - \rho c v_i = 0 \quad (14)$$

Будем находить решение в случае малого старения (5) методом возмущений, ограничиваясь первым приближением. По (5) малыми параметрами являются λ'/λ_0 , μ'/μ_0 , $(\rho - \rho_0)/\rho_0$. В нулевом приближении соотношение (14) записывается в форме

$$(\lambda + \mu) \lambda_i \lambda_j v_k^{(0)'} + \mu v_i^{(0)'} / \sin^2 \alpha - \rho c^2 v_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Здесь $v_i^{(0)}$ — нулевое приближение скоростей перемещений. Приравни-

вая нулю определитель системы (15) относительно неизвестных $v_1^{(0)}$ и $v_2^{(0)}$, получим два значения углов $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, определяющие фронты продольной и поперечной волны

$$\sin \alpha_1 = c_1/c, \quad c_1^2 = [\lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1)]/\rho(\alpha_1) \quad (16)$$

$$\sin \alpha_2 = c_2/c, \quad c_2^2 = \mu(\alpha_2)/\rho(\alpha_2) \quad (17)$$

Для углов α , не равных α_1 и α_2 , определитель однородной системы (15) не равен нулю, а потому для них решение (15) тривиально

$$v_i^{(1)} = 0 \quad \alpha \neq \alpha_1, \quad \alpha \neq \alpha_2 \quad (18)$$

Заметим, что (16) и (17) являются уравнениями с неявной зависимостью от углов для определения α_1 и α_2 с учетом зависимостей (2) — (4) от α параметров $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$ и плотности $\rho(\alpha)$.

При решении (16) и (17) появляется необходимость в последовательных приближениях. В нулевом приближении

$$\alpha_1^{(0)} = \arcsin(c_1^{(0)}/c), \quad (c_1^{(0)})^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0 \quad (19)$$

$$\alpha_2^{(0)} = \arcsin(c_2^{(0)}/c), \quad (c_2^{(0)})^2 = \mu_0/\rho_0 \quad (20)$$

В первом приближении находим из (16), (17), (19), (20), (2) — (5)

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= \arcsin(c_1^{(1)}/c), \quad \alpha_2^{(1)} = \arcsin(c_2^{(1)}/c) \\ (c_1^{(1)})^2 &= [\lambda(\alpha_1^{(1)}) + 2\mu(\alpha_1^{(1)})]/\rho(\alpha_1^{(1)}); \quad (c_2^{(1)})^2 = \mu(\alpha_2^{(1)})/\rho(\alpha_2^{(1)}) \\ \lambda(\alpha_1^{(1)}) &= \lambda_\infty + (\lambda_0 - \lambda_\infty) \exp\{-\beta a[\alpha_1^{(1)} - \alpha_0]\} \\ \mu(\alpha_1^{(1)}) &= \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp\{-\beta a[\alpha_1^{(1)} - \alpha_0]\} \\ \rho(\alpha_1^{(1)}) &= \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) \exp\{-\beta a[\alpha_1^{(1)} - \alpha_0]\} \\ \mu(\alpha_2^{(1)}) &= \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp\{-\beta a[\alpha_2^{(1)} - \alpha_0]\} \\ \rho(\alpha_2^{(1)}) &= \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) \exp\{-\beta a[\alpha_2^{(1)} - \alpha_0]\} \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (16) и (17) могут быть решены с учетом (2) — (4) графически. На плоскости $x = x_1$ скачки напряжений и скоростей выражаются через интенсивность разрыва ω и нормаль к поверхности $x = x_1$ разрыва $v_1^{(1)}$ по формулам [7]:

$$-c_1(\alpha_1)[\sigma_{11}] = \omega(\lambda(\alpha_1)\varepsilon_{11} + 2\mu(\alpha_1)\varepsilon_{11}^{(1)}), \quad [v_1] = \omega v_1^{(1)} \quad (22)$$

а на плоскости $x = x_2$ — через нормаль к поверхности $x = x_2$ разрыва $v_2^{(2)}$ по формулам [7]

$$-c_2(\alpha_2)[\sigma_{22}] = \mu(\alpha_2)\{[v_1]v_1^{(2)} + [v_2]v_2^{(2)}\}, \quad [v_1]v_1^{(2)} = 0 \quad (23)$$

где $c_2(\alpha_2)$ определено по (17), а $\mu(\alpha_2)$ определяется при помощи второго равенства (2) и (4) при $\alpha = \alpha_2$. Используя условия на скачках (22), (23), условия (18), условия $v_{ij}^{(0)} = 0$ при $x = x_1$, $x \neq x_2$, получаемые из (13) в нулевом приближении, и граничные условия (8), (9), найдем скорости перемещений в нулевом приближении в двух зонах

$$v_1^{(0)} = c_1 P A^{-1} \sin \alpha_1, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \quad (24)$$

$$v_2^{(0)} = -c_1 P A^{-1} \cos \alpha_1, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$$

$$v_1^{(0)} = c_1 P A^{-1} \sin \alpha_1 - c_2 P A^{-1} \frac{\mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2}{\mu(\alpha_2) \cos 2\alpha_2}, \quad 0 < \alpha < \alpha_2 \quad (25)$$

$$v_2^{(0)} = -c_1 P A^{-1} \cos \alpha_1 - c_2 P A^{-1} \frac{\mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 \sin \alpha_2}{\mu(\alpha_2) \cos 2\alpha_2}, \quad 0 < \alpha < \alpha_2$$

$$A = \lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1) \cos^2 \alpha_1 + \mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 \operatorname{tg} 2\alpha_2 \quad (26)$$

Определим из (14) производные скоростей $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ в первом приближении. Имеем систему

$$\delta_k \delta_k (\lambda + \mu) v_k^{(1)} + \mu v_1^{(0)} / \sin^2 \alpha - \rho c^2 v_1^{(1)} = \delta_k \delta_k (\lambda' + \mu') v_k^{(0)} - \mu' v_1^{(0)} / \sin^2 \alpha \quad (27)$$

Решение системы (27) запишется так:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= \Delta_1 / \Delta, \quad v_2^{(1)} = \Delta_2 / \Delta, \quad \delta_k v_k^{(0)} = -v_1^{(0)} + (\operatorname{ctg} \alpha) v_2^{(0)} \\ \Delta &= | -1 + (\lambda + 2\mu) / (\rho c^2 \sin^2 \alpha) | - 1 + \mu / (\rho c^2 \sin^2 \alpha) | \\ \rho c^2 \Delta_1 &= | (\lambda' + \mu') \delta_k v_k^{(0)} - \mu' v_1^{(0)} / \sin^2 \alpha | - 1 + \mu / (\rho c^2 \sin^2 \alpha) | - \\ &= [(\lambda + \mu) \mu' / (\rho c^2 \sin^2 \alpha)] (v_1^{(0)} \operatorname{ctg}^2 \alpha + v_2^{(0)} \operatorname{ctg} \alpha), \quad \alpha \neq \alpha_1, \quad \alpha \neq \alpha_2 \\ \rho c^2 \Delta_2 &= | -(\lambda + \mu) \mu' / (\rho c^2 \sin^2 \alpha) | (v_1^{(0)} + \operatorname{ctg} \alpha v_2^{(0)}) + \\ &+ (1 - \mu / (\rho c^2 \sin^2 \alpha)) | \operatorname{ctg} \alpha (\lambda' + \mu') \delta_k v_k^{(0)} + \mu' v_2^{(0)} / \sin^2 \alpha | \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $v_1 = \sin \alpha_1$, $v_2 = -\cos \alpha_1$, $v_3 = 0$, то из второго равенства (22), а также из (28) получим поле скоростей в первой зоне после первого скачка при $\alpha = \alpha_1$ в первом приближении

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= -\omega \sin \alpha_1 + \int_{\alpha_1}^{\alpha} (\Delta_1 / \Delta) d\alpha, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \\ v_2^{(1)} &= -\omega \cos \alpha_1 + \int_{\alpha_1}^{\alpha} (\Delta_2 / \Delta) d\alpha, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \end{aligned} \quad (29)$$

где Δ_1 , Δ_2 , Δ определяются равенствами (28), (24), (26). Перепишем формулу (13) для $\sigma_{ij}^{(1)}$ в первом приближении:

$$c \sigma_{ij}^{(1)} = c B_{ij} = \delta_{ij} \delta_k (\lambda \Delta_k / \Delta + \lambda' v_k^{(0)}) + \delta_i (\mu \Delta_j / \Delta + \mu' v_j^{(0)}) + \delta_j (\mu \Delta_i / \Delta + \mu' v_i^{(0)}) \quad (30)$$

Напряжения в первой зоне после первого скачка определяются после интегрирования по α (30) с использованием первого условия (22) на скачке $\alpha = \alpha_1$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = [\omega / c_1(\alpha_1)] [\lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1) \sin^2 \alpha_1] + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{ij} d\alpha$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = [\omega/c_1(\alpha_1)] [\lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1)\cos^2\alpha_1] + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{22} d\alpha \quad (31)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \lambda(\alpha_1)\omega/c_1(\alpha_1)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = -[\omega/c_1(\alpha_1)] \mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{12} d\alpha, \quad \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$$

Интегрирование первых двух равенств (28) от α_2 до α с учетом определения скачка и значений скоростей (29) при $\alpha = \alpha_2$ находим поле скоростей во второй зоне после второго скачка в первом приближении

$$v_1^{(1)} = -\omega \sin \alpha_1 - [v_1^{(1)}]_2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha} (\Delta_1'/\Delta) d\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_2 \quad (32)$$

$$v_2^{(1)} = \omega \cos \alpha_1 - [v_2^{(1)}]_2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha} (\Delta_1/\Delta) d\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_2$$

Здесь $[v_i^{(1)}]_2$ — скачок через $\alpha = \alpha_2$, а Δ_1 , Δ_2 , Δ определяются по формулам (28) и по формулам (24), (25) в первой и второй зонах.

Напряжения во второй зоне после скачка $0 < \alpha < \alpha_2$ определяются интегрированием (30) от α_2 до α . Постоянные интегрирования находятся при помощи первого условия на скачке (23) и значений (31) напряжений перед вторым скачком ($\alpha = \alpha_2 + 0$). В результате получим в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= [\omega/c_1(\alpha_1)] [\lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1)\sin^2\alpha_1] + 2\mu(\alpha_2) [v_1^{(1)}]_2 (\sin \alpha_2)/c_2(\alpha_2) + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{11} d\alpha \\ \sigma_{22}^{(1)} &= [\omega/c_1(\alpha_1)] [\lambda(\alpha_1) + 2\mu(\alpha_1)\cos^2\alpha_1] - 2\mu(\alpha_2) [v_2^{(1)}]_2 (\cos \alpha_2)/c_2(\alpha_2) + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{22} d\alpha \\ \sigma_{33} &= \omega \lambda(\alpha_1)/c_1(\alpha_1) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = -[\omega/c_1(\alpha_1)] \mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 + [\mu(\alpha_2)/c_2(\alpha_2)] ([v_2^{(1)}]_2 \sin \alpha_2 - [v_1^{(1)}]_2 \cos \alpha_2) + \int_{\alpha_1}^{\alpha} B_{12} d\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_2$$

Для определения интенсивности скачка ω и скачков $[v_1^{(1)}]_2$ и $[v_2^{(1)}]_2$ воспользуемся вторым условием (23) и граничными условиями (8). Тогда

$$\begin{aligned} \omega &= c_1(\alpha_1) A^{-1} \left\{ -P + \operatorname{tg} 2\alpha_2 \int_{\alpha_1}^0 B_{12} d\alpha - \int_{\alpha_1}^0 B_{22} d\alpha \right\} \\ |v_1^{(1)}| &= \frac{c_2(\alpha_2) \cos \alpha_2}{\mu(\alpha_2) \cos 2\alpha_2} \left\{ \mu(\alpha_2) \sin 2\alpha_1 A^{-1} (P - \operatorname{tg} 2\alpha_2 \int_{\alpha_1}^0 B_{12} d\alpha + \int_{\alpha_1}^0 B_{22} d\alpha) + \int_{\alpha_1}^0 B_{12} d\alpha \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

$$[v_2^{(1)}] = \frac{c_2(\alpha_2) \sin \alpha_2}{\mu(\alpha_2) \cos 2\alpha_2} \left\{ \mu(\alpha_1) \sin 2\alpha_1 A^{-1} \left(P + \operatorname{tg} 2\alpha_2 \int_0^{\alpha_1} B_{12} d\alpha - \int_0^{\alpha_1} B_{22} d\alpha \right) - \int_0^{\alpha_1} B_{12} d\alpha \right\}$$

Формулы (29), (31), (32), (33) с учетом обозначений (34) для ω , $[v_1^{(1)}]$, $[v_2^{(1)}]$, (28) для Δ_1 , Δ_2 , Δ , (30) для B_{ij} , (24) для $v_i^{(0)}$ в первой зоне, (25) для $v_i^{(0)}$ во второй зоне, (26) для A и (21) для первого приближения α_1 , α_2 , а также $c_1(\alpha_1)$, $c_2(\alpha_2)$, $\lambda(\alpha_1)$, $\mu(\alpha_1)$, $\mu(\alpha_2)$ дают решение поставленной задачи в первом приближении.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\lambda_0/\lambda_\infty = \mu_0/\mu_\infty = \rho_0/\rho_\infty \quad (35)$$

Вместо (2)–(4) можно пользоваться кусочно-линейной моделью старения

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_\infty + (\lambda_0 - \lambda_\infty) \alpha / \alpha_0 & 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ \lambda_0 & \alpha \geq \alpha_0 \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \alpha / \alpha_0 & 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ \mu_0 & \alpha \geq \alpha_0 \end{cases} \quad (36)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) \alpha / \alpha_0 & 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ \rho_0 & \alpha \geq \alpha_0 \end{cases}$$

Здесь α_0 — минимальный угол, до которого не достигает процесс старения. При выполнении (35), (36)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\rho_0} \mu = \frac{\lambda_0}{\rho_0} \rho \quad (37)$$

В этом случае формулы для скоростей и напряжений упрощаются, так как тогда

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(0)}, \quad c_1 = c_1^{(0)}, \quad c_2 = c_2^{(0)}$$

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho} = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0}, \quad \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda_0 - \lambda_\infty}{\alpha_0}, \quad u' = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\alpha_0} \quad (38)$$

В качестве примера рассмотрим старение, возникающее в процессе движения нагрузки, связанное с деструкцией контактирующего с нагрузкой слоя. При высокоскоростном ударе эксперимент показывает, что в материале от интенсивной ударной волны происходит диспергирование, деструкция, оплавление, выгорание материала. В расчете ограничимся малым уменьшением (10%) модулей и плотности материала из-за деструкции в области контакта с нагрузкой ($\alpha=0$)

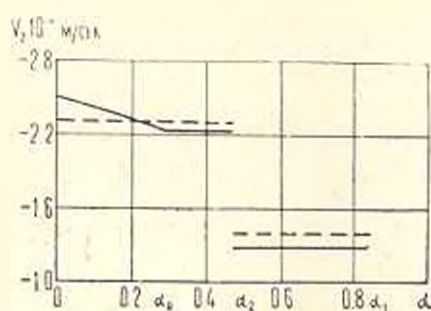
$$(\lambda_0 - \lambda_\infty) / \lambda_\infty \cong (\mu_0 - \mu_\infty) / \mu_\infty \cong (\rho_0 - \rho_\infty) / \rho_\infty \cong 0,1 \quad (39)$$

Так как деструкция затухает в глубину полупространства, то при $\alpha > 0$ деструкция меньше, чем при $\alpha=0$ и для малой деструкции (39) справедлива кусочно-линейная модель (36). Кроме того, согласно [6] в (36) полагается $\alpha_0 = \arcsin(0,4 c_1/c)$.

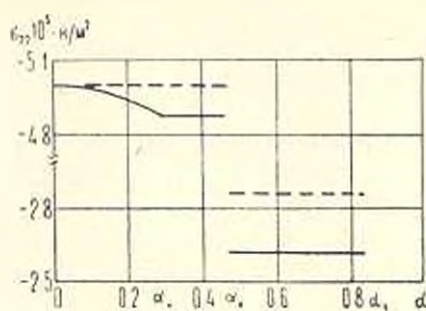
Влияние старения из-за деструкции численно иллюстрируется на

примере распространения ударных волн от нагрузки $P=5 \cdot 10^5$ н/м² в тяжелом флинтгласе, для которого принято [8]

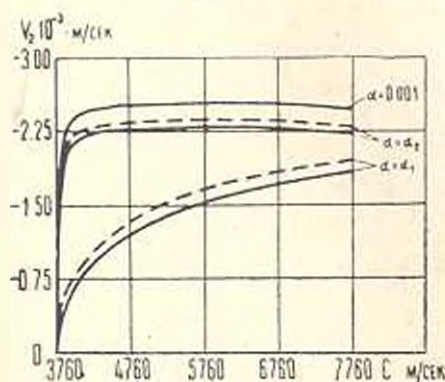
$$\rho_0 = 5,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, c_1^{(0)} = 3760 \text{ м/с}, c_2^{(0)} = 2220 \text{ м/с} \quad (40)$$



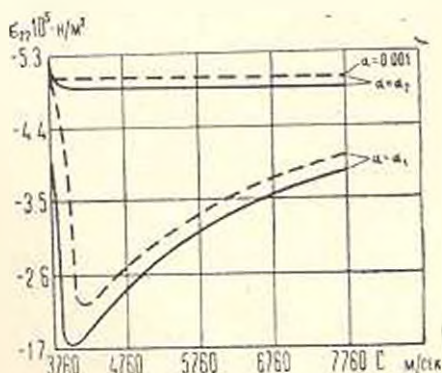
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1 и 2 изображены зависимости скоростей $v_2^{(1)}$ и напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ в первом приближении от угла α , определяющего координату в зонах за скачком напряжений при $c=5010$ м/с. На фиг. 3 и 4 приводятся зависимости от скорости c движения нагрузки величин $v_2^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(1)}$ при трех значениях угла $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ и $\alpha = 0,001$. На всех четырех фигурах пунктиром изображены соответствующие зависимости в отсутствии старения от деструкции. На фиг. 4 для $\alpha = 0,001$ сплошная линия совпадает с пунктирной.

Вычисления показали, что отклонение $v_2^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(1)}$ в материале со старением и без старения достигает 9% при $\alpha = \alpha_1$ и $c = 5010$ м/с, что согласуется с допущением (39). В зоне с трещинами $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ нормальные к поверхности скорости и напряжения убывают непрерывно с ростом α . После второго скачка для $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и после первого скачка $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$ их значения постоянны и меньше, чем в среде без трещин. Интересно, что для этих углов α модули и плотность такие же, как и в среде без дефектов, а наличие дефектов в зоне сразу под подвижной нагрузкой уменьшает напряжения и скорости вдали от нагрузки. Скорость v_2 непосредственно в дефектной зоне под подвижной нагрузкой несколько выше, чем в среде без трещин. Из графиков фиг. 4 видно, что

для скоростей движения нагрузки с, равной и несколько большей скорости продольной волны c_2 напряжения σ_2 с ростом α от 0 до α_2 растут и увеличиваются на 3% от значения нагрузки на границе. Увеличение напряжений объясняется ростом модулей с уменьшением концентрации трещины при изменении угла α от границы полупространства. При больших скоростях движения нагрузки увеличения напряжений с глубиной не происходит.

ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ՄՈԴՈՒԼՆԵՐՈՎ ԿՐԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԲՆՈՒ ԳՆՐՉԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ՇԱՐԺՈՒՄԸ

Գ. Ի. ԲԻԿՈՎՏԵՎ, Ա. Վ. ԿՈԼՈԿՈԼՉԻԿՈՎ, Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈԼՉԻԿՈՎ

Ա մ ֆ ո փ ո լ

Դիտարկվում է աստիճանային բնոր աղղեցության տակ փոփոխվող առաձգական մոդուլներով կիսատարածության դեֆորմացիայի խնդիրը: Բեռը շարժվում է զերձայնային արագությամբ: Բեռնավորման գոտում գրգռումների մեթոդով կառուցվում է ավտոմոդելային լուծումը: Մոտացված է առաջին մոտավորությամբ լարումների և արագությունների համար արտահայտություններ հաշվի առնելով ձևացումը տարրեր դեպքերի համար:

STEP LOAD MOVING WITH SUPERSEISMIC VELOCITY ON THE HALF-SPACE WITH CHANGEABLE ELASTIC MODULES

G. I. BIKOVTSSEV, A. V. KOLOKOLCHIKOV, V. V. KOLOKOLCHIKOV

S u m m a r y

The problem of deformation of half-space with changeable elastic modules produced by step load is considered. The load moves with superseismic velocity. Automodel solution in the loading area is constructed by the reductive perturbation method. The formulas for stresses and velocities in the first-order approximation for various cases having into account ageing are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. В кн.: «Механика в СССР за 50 лет», т. 3. М.: Наука, 1963.
2. Арутюнян Н. Х. Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел.—ДАН СССР, т. 231, № 3, 1976.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
4. Снеддон Н. Н., Берри Д. Классическая теория упругости. М.: Физматгиздат, 1961.
5. Cole J. D., Huth J. H. Stresses produced in a half-space by moving loads.—J. Appl. Mech. 1958, 25.
6. Николаевский В. Н. Динамическая прочность и скорость разрушения. В кн.: Механика. Новое в зарубежной науке, № 26. Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981.
7. Быковцев Г. И., Вэрвейко Н. Д. О распространении волн в упруговязко-пластической среде.—МТТ, 1966, № 4.
8. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. И. К. Киколина. М.: Атомиздат, 1976, стр. 66—86.

Куйбышевский госуниверситет

Поступила в редакцию
12.V.1983

УДК 539.3:637.634

ОДНОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГАСПАРЯН А. Е.

Нелинейные магнитоупругие волны исследовались в работах [1—4].

Здесь исследуется распространение одномерных нелинейных магнитоупругих волн в идеально проводящей среде. Введением малого параметра нелинейная задача приводится к системе нелинейных уравнений, которая имеет точное решение. Показывается, что влияние нелинейности возмущенного магнитного поля приводит к возникновению ударных магнитоупругих волн. Обнаружено, что чем больше величина вектора напряженности внешнего магнитного поля, тем слабее искажение профиля магнитоупругой волны.

Пусть идеально проводящая неограниченная среда находится во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности. Волновой процесс в этой среде будет описываться следующими уравнениями магнитоупругости [1—5]:

$$C_t^2 \Delta U + (C_t^2 - C_l^2) \text{grad div } U + \frac{1}{4\pi\rho} (\text{rot } H) \times H = \frac{\partial U}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \times H \right) \quad (1)$$

Здесь C_t и C_l — скорости упругих поперечных и продольных волн, ρ — плотность среды, U — вектор смещения, H — возмущенное магнитное поле.

Предположено, что задача линейна относительно упругих перемещений и учитывается только нелинейность, связанная с возмущенным магнитным полем.

В дальнейшем рассматривается одномерная задача, то есть все искомые величины зависят только от координат x и t .

Представляя возмущенное магнитное поле в виде [5]

$$H = H_0 + h \quad (H_0 = \text{const})$$

и предполагая, что внешнее постоянное магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения одномерной магнитоупругой волны ($H_0 = H_0 k$), из системы нелинейных уравнений (1) получим

$$C_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{i}{4\pi\rho} \left(h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_3 \frac{\partial h_2}{\partial x} + H_0 \frac{\partial h_3}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial h_3}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial U_1}{\partial t} \right) - H_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial t} \quad (2)$$

Внешнее магнитное поле и учет нелинейности возмущенного магнитного поля не влияют на распространение поперечных упругих волн.

Таким образом, имеем систему нелинейных уравнений (2), откуда должны определить неизвестные функции U_1 , h_1 и h_2 .

В безразмерном виде введем обозначений

$$x^* = \frac{x}{x_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad \frac{x_0}{t_0 C_1} = 1, \quad h_2^* = \frac{h_2}{H_0}, \quad h_3^* = \frac{h_3}{H_0}, \quad R_H = \frac{V_A^2}{C_1^2}$$

$$V_1^* = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}, \quad V_1^* = \frac{1}{C_1} V_1, \quad V_1 = \frac{\partial U_1}{\partial t}, \quad W_1^* = W_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x}$$

систему нелинейных уравнений (2) приведем к виду (где индекс * опущен)

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} - R_H \left(h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_3 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_3}{\partial x} \right) = \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (h_2 V_1), \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (h_3 V_1) - \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial t} \quad (3)$$

Представляя решение линеаризованной системы уравнений (3) в виде плоской монохроматической волны $A \exp\{i(kx - \omega t)\}$, для определения фазовой скорости $V_p = \omega/k$ получим соотношения

$$V_p = \pm \sqrt{1 + R_H}$$

Введением преобразования координат [2, 3]

$$\xi = \varepsilon(x - V_p t), \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

где $\varepsilon = O(k)$ — малый безразмерный параметр, решение приведенной нелинейной системы представляется в виде разложения по малому параметру ε [1, 3, 6] при условии, что решение системы в нулевом приближении совпало с решением линейной задачи. В таком случае искомая нелинейная задача приводится в первом приближении к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial \tau} + R_H h_{21} \frac{\partial h_{31}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h_{21}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (V_{11} h_{31}) = 0 \quad (4)$$

Можно проверить, что система нелинейных уравнений (4) допускает решения следующего типа:

$$h_{21} = \sqrt{\frac{2}{R_H}} V_{11}, \quad \frac{\partial V_{11}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{11}^2}{\partial \xi} = 0 \quad (5)$$

или

$$V_{11} = \sqrt{\frac{R_H}{2}} h_{21}, \quad \frac{\partial h_{21}}{\partial \tau} + \sqrt{\frac{R_H}{2}} \frac{\partial h_{21}^2}{\partial \xi} = 0 \quad (6)$$

Нелинейные уравнения (5) и (6) устанавливают, что сигналы, несущие значения V_{11} и h_{11} , перемещаются, соответственно, со скоростью $2V_{11}$ и $\sqrt{2R_H} h_{11}$.

Здесь будем исследовать решения уравнения (5), а решение уравнения (6) получится аналогичным образом.

Нелинейное уравнение первого порядка (5) имеет точное решение, которое имеет следующий вид (в неявном виде) [7, 8]:

$$V_{11} = f(\xi - 2V_{11}\tau), \quad V_{11} = V_{11}(\xi, \tau) \quad (7)$$

где f — произвольная функция и определяется начальным условием $V_{11}(\xi, 0) = f(\xi)$ (при $\tau = 0$).

Таким образом, если в начальный момент времени задана форма волны, то ее искажение вследствие нелинейных эффектов в последующие моменты времени описывается выражением (7). Многозначность решения (7) устраняется введением разрывов, то есть ударных волн, которые сохраняют площадь под кривой в соответствии с формулой (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_{11}(\xi, \tau) d\xi = \text{const} \quad (8)$$

Формула (8) дает закон сохранения, полученный для возмущений, исчезающих достаточно быстро при $|\xi| \rightarrow \infty$, которая получается из уравнения (5) интегрированием по всем значениям ξ .

Теперь возвращаясь к прежним безразмерным параметрам, из решения (7) получим

$$\bar{U}(x, t) = \Phi\{x - [\sqrt{1 + R_H} + \sqrt{2R_H} \bar{U}(x, t)]t\} \quad (9)$$

где

$$\bar{U}(x, t) = \frac{1}{C_1} \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

Для решения уравнения (6) получим

$$h_{11}(x, t) = \psi\{x - [\sqrt{1 + R_H} + \sqrt{2R_H} h_{11}(x, t)]t\} \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) показывают, что относительно неподвижной системы координат возмущение среды и возмущение магнитного поля в среде движутся, соответственно, со скоростями

$$u_1(x, t) = \sqrt{1 + R_H} + \sqrt{2R_H} \bar{U}(x, t) \quad (11)$$

$$h_3(x, t) = \sqrt{1 + R_H} + \sqrt{2R_H} h_{11}(x, t) \quad (12)$$

Формула (11) показывает, что скорость перемещения точек профиля одномерной магнитоупругой волны неодинакова.

Исследования решения (9), аналогично исследованию работы [10], в частности, при $x = 0$, $\bar{U}(x, t) = \bar{U}_0 \sin \omega t$, показывают, что искажения профиля магнитоупругой волны тем сильнее, чем больше параметр $\chi_0 = U_0(1 + R_H)^{-1/2}$. Поэтому χ_0 (которое зависит от напря-

женности внешнего магнитного поля) может служить мерой нелинейности магнитоупругого волнового процесса. При известном $\tilde{U}_0$ можно сказать, что чем больше напряженность внешнего магнитного поля, тем слабее искажение профиля магнитоупругой волны.

При распространении одномерных нелинейных магнитоупругих волн возникает ударная волна, профиль которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x - [\sqrt{1 + R_H} + 2\tilde{U}(x, t)]t &= \text{const} \\x - [\sqrt{1 + R_H} + \sqrt{2R_H}h_{31}(x, t)]t &= \text{const}\end{aligned}$$

Расстояние, откуда начинается возникновение ударной магнитоупругой волны для решения (9), определяется следующей формулой:

$$\tilde{x} = \frac{1 + R_H}{2\omega\tilde{U}_0} = \frac{\lambda}{4\pi} \chi^{-2} \quad (13)$$

где

$$\chi = \frac{\tilde{U}(x, \eta)}{\sqrt{1 + R_H}}, \quad \eta = t - \frac{x}{\sqrt{1 + R_H}}$$

Отсюда следует, что на длине $\tilde{x}$ укладывается $(2\pi\chi)^{-1}$ длин волн. Амплитуда разрыва определяется из формулы

$$\frac{\tilde{U}_p(\theta)}{\tilde{U}_0} = \pi[1 + \theta(x)]^{-1}, \quad \theta(x) = \frac{2\omega\tilde{U}_0}{\sqrt{1 + R_H}} x$$

Аналогично формулам (13) и (14) можно искать и формулы для решения (10)

$$\begin{aligned}\tilde{x} = \frac{1 + R_H}{\sqrt{2R_H} \omega \tilde{h}_0} = \frac{\lambda}{\sqrt{8R_H} \pi} \chi^{-1}, \quad \chi = \frac{\tilde{h}_0(x, \eta)}{\sqrt{1 + R_H}} \\ \frac{\tilde{h}_p(\theta)}{\tilde{h}_0} = \pi[1 + \theta(x)]^{-1}, \quad \theta(x) = \frac{\sqrt{2R_H} \omega \tilde{h}_0}{1 + R_H} x\end{aligned}$$

ԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՄԻԱԶԱՓ ՈՉ ԳՈԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ՊԵՐՄԵԱԿԱՆ ԱՆԻՔՆԵՐԸ

Հ. Ե. ԿԱՍՊԱՐՅԱՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Աշխատանքում դիտարկվում է միաչափ ոչ դժային մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը իզոալական հաղորդիչ տարածությունում լայնական մագնիսական դաշտի հաշվառումով: Ցույց է տրվում, որ միայն զրգոված մագնիսական դաշտի ոչ դժայինության հաշվառումը բերում է հարվածային ալիքների առաջացման: Ստացվել է, որ ինչքան մեծ է մագնիսական դաշտի լարվածությունը, այնքան ավելի թույլ է մագնիսաառաձգական ալիքի ճակատի աղավաղումը:

ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR MAGNETOELASTIC WAVES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

A. E. GASPARIAN

S u m m a r y

In the paper the motion of one-dimensional nonlinear magnetoelastic waves of a perfect conducting medium in a transverse magnetic field is considered.

It has been shown that the nonlinearity of a perturbation magnetic field brings to the rise magnetoelastic shock waves.

It has been revealed that the more the value of the external magnetic field strength vector the less is the shape distortion of the magnetoelastic wave.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Поспелов Л. А.* Нелинейные магнитоупругие волны.—ПММ, 1963, вып. 5, с. 939—941.
2. *Donato A.* The Burger's Equation in Magneto-thermo-elasticity with one-dimensional Deformation.—ZAMP, 27, 2, p. 281—284.
3. *Гаспарян А. Е.* Об одной задаче распространения магнитоупругой нелинейной волны.—Уч. записки ЕГУ, Ереван, 1983, № 3, с. 42—46.
4. *Селезов И. Т., Петров В. П.* Решение задачи о неустановившихся волнах в электропроводящем упругом полупространстве.—В кн.: Численно-аналитические методы решения задач теплопроводности и электродинамики (Ин-т математики АН УССР) — Киев: Изд-во Наукова думка, 1979, с. 155—158.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Бедубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М.: Наука, 1977. 272 с.
6. *Найфе А.* Методы возмущения. М.: Мир, 1976. 546 с.
7. *Курант Г., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны М.: ИЛ, 1960. 426 с.
8. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
9. Нелинейные волны, под ред. С. Лейбовича и А. Сиббаса. М.: Изд-во Мир, 1977. 320 с.
10. *Руденко О. В., Солуян С. Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6.XII.1984