

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXXVIII, № 4

1984

## Խմբագրական կոլեգիա

Կ Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրիկա), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԻՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՏԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

## Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Դ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւ (ոթ. սեկրետար), Յ. Դ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Դ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԴԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ (զաւ. ոթ. ռեդակտոր), Վ. Դ. ՄԻՏԱՐՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Դ. Տ. ՏԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԴԱԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Մ. ԴԱՐԱՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Մ. Լ. ԴԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Վ. ՓԼԱՐԺՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ:

**Բ Ո Վ Ա Ն Գ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն**

էջ

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

Մ. Պ. Իոսոֆեևիա, Բ. Պ. Օվսյանկին, Ա. Վ. Սմիրնով—Նախնական ժամկետները սահմանող բազմապրոցեստրային սլանների մասին . . . . . 147

Պ. Է. Մելիք-Աղստյան—Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների S-մատրիցների տեսության մասին . . . . . 151

Ա. Հ. Դալույան—Բառերի բացառելիության մասին . . . . . 156

**ՄԻՆԵՐԱՆԻԿԱ**

Գ. Յու. Իրմուլենկո, Վ. Վ. Կոլոկոլչիկով—Անհամասեռ ծերացող մարմինների համար առաձգամածուցիկության գլխավոր խորանարդային տեսության խնդիրների լուծման մասին 159

Ն. Խ. Հաբուրյունյան, Ա. Գ. Իրոզդով, Վ. Բ. Կուլմանովսկի—Մերացող առաձգամածուցիկ միջավայրում գտնվող գլանային խողովակի կայունության մասին . . . . . 165

**ՖԻԶԻԿԱ**

Գ. Մ. Սեդրակյան, Կ. Վ. Պապոյան, Գ. Ա. Վարդանյան—Քվանտային բյուրեղում ձայնի կլանման մասին . . . . . 170

**ԷԼԵԿՏՐՈՍՏԵՆԻԿԱ**

Հ. Կ. Դավրյան, Գ. Ք. Քարամյան, Ռ. Հ. Հաբուրյունյան—Ֆոտովառելիքային էլեմենտների աշխատանքի սկզբունքները . . . . . 174

**ՕՒՏԱԿԱՐ ՀԱՆԱԾՈՆՆԵՐ**

Ա. Կ. Սաղարեյան—Պղինձ-մոլիբդենային երակիկ-հատիկային հանքայնացման նոր տիպը Սեան—Ամասիայի կառուցվածքամետաղածնային մարզում . . . . . 178

**ՏԵԿՏՈՆԻԿԱ**

Ս. Ն. Նուգալերյան, Ս. Ռ. Ասլանյան—Նախախցևան—Ղափանի անդրգոտիական բեկվածքը . . . . . 182

**ՁԻՋԻՈՂՈՒԹԻԱ**

Ա. Հ. Բունտիկյան, Հ. Պ. Քոստյան—Կամրջի ծածկի ցանցաձև զոյացության նեյրոնների էլեկտրաֆիզիոլոգիական առանձնահատկությունների մասին . . . . . 187

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>МАТЕМАТИКА</b>	
<i>М. П. Дорофеева, Б. П. Овсянкин, А. В. Смирнов</i> —О многопроцессорных расписаниях, соблюдающих директивные сроки . . . . .	147
<i>П. Э. Мелик-Адамян</i> —К теории S-матриц канонических дифференциальных операторов . . . . .	151
<i>А. Г. Далалян</i> —Об исключаемости слов . . . . .	156
<b>МЕХАНИКА</b>	
<i>Г. Ю. Ермоленко, В. В. Колокольчиков</i> —О решении задач главной кубической теории вязкоупругости для неоднородно-стареющих тел . . . . .	159
<i>Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский</i> —Об устойчивости цилиндрической трубы в стареющей вязкоупругой среде . . . . .	165
<b>ФИЗИКА</b>	
<i>Д. М. Седракян, К. В. Папоян, Г. А. Вурданян</i> —О поглощении звука в квантовом кристалле . . . . .	170
<b>ЭЛЕКТРОТЕХНИКА</b>	
<i>О. К. Давтян, Г. Г. Карамян, Р. Г. Арутюнян</i> —О принципах работы фототопливных элементов . . . . .	174
<b>ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ</b>	
<i>А. К. Сагателян</i> —Новый тип прожилково-вкрапленного медно-молибденового оруденения в Севано-Амасийской структурно-металлогенической зоне . . . . .	178
<b>ТЕКТОНИКА</b>	
<i>С. Н. Назаретян, С. Р. Асланян</i> —Нахичеван-Кафанский трансзональный разлом . . . . .	182
<b>ФИЗИОЛОГИЯ</b>	
<i>А. О. Бантикян, О. П. Косоян</i> —К электрофизиологическим особенностям нейронов ретикулярного ядра покрышки моста . . . . .	187

## C O N T E N T S

## MATHEMATICS

- |  | P.  |
|--|-----|
| <i>M. P. Dorofeeva, B. P. Ovsjankin, A. V. Smirnov</i> —On multiprocessor schedules with due dates . . . . . | 147 |
| <i>P. E. Melik-Adamian</i> —On the <i>S</i> -matrices theory of canonical differential operators. . . . .    | 151 |
| <i>A. H. Dalatian</i> —On avoidance of words . . . . .   | 156 |

## MECHANICS

- |  |     |
|--|-----|
| <i>G. U. Ermolenko, V. V. Kolocolchikov</i> —On the solution of the problems of principal cubic theory of viscoelasticity for nonhomogeneous aging bodies. . | 159 |
| <i>N. Kh. Arutunian, A. D. Drozdov, V. B. Kolmanovski</i> —On stability of cylindrical pipe in aging viscoelastic medium. . . . .                            | 165 |

## PHYSICS

- |   |     |
|---|-----|
| <i>D. M. Sedrakian, K. V. Papoyan, G. A. Vardanian</i> —On the sound absorption in quantum crystals . . . . . | 170 |
|---|-----|

## ELECTRICITY

- |   |     |
|---|-----|
| <i>H. K. Davtian, G. G. Karamian, R. H. Arutyunian</i> —On the principle of the work of photo-fuel cells. . . . . | 174 |
|---|-----|

## FOSSIL MINERALS

- |  |     |
|--|-----|
| <i>A. G. Saghatelian</i> —A new type of porphyr-copper with molybdenic ores in the Sevan — Amasia structural metallogenic zones. . . . . | 178 |
|--|-----|

## TECTONICS

- |   |     |
|---|-----|
| <i>S. N. Nazaretian, S. R. Aslanian</i> —The Nakhichevan-Khaphan transzoning fault. . . . . | 182 |
|---|-----|

## PHYSIOLOGY

- |  |     |
|--|-----|
| <i>A. H. Bantkyan, H. P. Kosoyan</i> —About the electrophysiological properties of nucleus reticularis tegmenti pontis neurons . . . . . | 187 |
|--|-----|

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 19.03.1984 г. Подписано к печати 7.06.1984 г.  
 ВФ 04292. Бумага № 1, 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист 4,2.  
 Учет.-изд. 3,37 л. Тираж 415. Заказ 228. Издат. 6190.  
 Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24г, II эт., I к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,  
 пр. Маршала Баграмяна, 24 г.  
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.854.2

МАТЕМАТИКА

М. П. Дорофеева, Б. П. Овсянкин, А. В. Смирнов

О многопроцессорных расписаниях, соблюдающих директивные сроки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 6/XII 1982)

Рассматривается вопрос построения расписаний для решения на многопроцессорной вычислительной системе, состоящей из  $M$  идентичных процессоров, множества задач  $S = \{z_i(b_i, f_i, t_i) : i = \overline{1, N}\}$ , где  $t_i$  — время решения, а  $b_i$  и  $f_i$  — директивные сроки начала и окончания решения задачи  $z_i$ . Предполагается, что любая задача одновременно может решаться лишь на одном из процессоров, в процессе ее решения допускаются прерывания и все числа  $b_i$ ,  $f_i$  и  $t_i$  целые.

Если для любой задачи  $z_i \in S$  выполнено условие  $0 < t_i \leq f_i - b_i$ , то множество задач  $S$  назовем  $GM$ -системой.

Известны различные методы построения некоторых допустимых расписаний для такого рода систем (<sup>1</sup>). В настоящей работе описано множество всех допустимых расписаний для данной  $GM$ -системы.

Пусть задачи занумерованы по неубыванию  $f_i$ . Обозначим минимальное из чисел  $b_i$  через  $a$ , а максимальное из чисел  $f_i$  — через  $T$ .

Назовем расписанием  $P(t) = (P_1(t), \dots, P_M(t))$  для  $GM$ -системы  $S$ , состоящей из задач  $z_1, \dots, z_N$ ,  $M$  кусочно-постоянных и непрерывных справа функций  $P_k(t)$ , которые заданы на интервале  $[a, T]$ , могут принимать значения  $0, \dots, N$ , причем все точки разрыва целые числа и если  $P_j(t) = i$  при некотором  $t$  и  $i \neq 0$ , то  $P_l(t) \neq i$ ,  $j, l = \overline{1, N}$ .

Расписание  $P(t)$  назовем допустимым, если для любого  $i \in \{1, \dots, N\}$  суммарная длина интервалов, на которых функции  $P_k(t)$  принимают значение  $i$ , равна  $t_i$ , причем  $P_k^{-1}(i) \subseteq [b_i, f_i]$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Через  $\mathcal{P}(S)$  обозначим множество всех допустимых расписаний для  $GM$ -системы  $S$ .

Если  $\sum_{i=1}^N t_i = M(T - a)$ , то  $GM$ -систему  $S$  назовем полной. Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь полные  $GM$ -системы (<sup>2</sup>).

Для любого  $a < \beta < T$  положим

$$M^\beta(S) = \sum_{z_k \in S} m_k^\beta,$$

где  $m_k^\beta = \max\{\min\{t_k, \beta - f_k + t_k\}, 0\}$ ,  $z_k \in S$ .

Из определения числа  $M^\beta(S)$  следует

Лемма 1. Для существования допустимого расписания для  $GM$ -системы  $S$  необходимо выполнение условия

$$M^\beta(S) \leq M(\beta - a) \quad \forall \beta: a < \beta < T.$$

Пусть  $P(t)$  является допустимым расписанием для  $GM$ -системы  $S$ , тогда для любого  $a < \beta < T$  через  $LP_\beta(t)$  обозначим функцию, определенную на интервале  $[a, \beta]$ , совпадающую при  $t \in [a, \beta)$  с функцией  $P(t)$  и непрерывную слева в точке  $\beta$ , а через  $RP_\beta(t)$  — функцию, определенную на интервале  $[\beta, T]$  и совпадающую на этом интервале с  $P(t)$ .

Лемма 2. Пусть  $P(t)$  является допустимым расписанием для  $GM$ -системы  $S$ , тогда для любого  $a < \beta < T$  существует единственный целочисленный вектор  $x(\beta) = (x_1(\beta), \dots, x_N(\beta))$ , удовлетворяющий следующим условиям:

$$x_k(\beta) = 0 \quad \forall k: b_k > \beta, \quad (1)$$

$$0 \leq x_k(\beta) \leq \min\{t_k - m_k^\beta, \beta - b_k - m_k^\beta\} \quad \forall k: b_k < \beta, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^N x_k(\beta) = M(\beta - a) - M^\beta(S), \quad (3)$$

$$\sum_{f_k < \beta} m_k^{f_i} + \sum_{f_k > \beta} \max\{0, m_k^\beta + x_k(\beta) - \beta + f_i\} \leq M(f_i - a) \quad \forall i: f_i < \beta, \quad (4)$$

$$\sum_{f_k > \beta} \max\{0, m_k^{f_i} - m_k^\beta - x_k(\beta)\} \leq M(f_i - \beta) \quad \forall i: f_i > \beta. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть  $LS(\beta) = \{z_k(\bar{b}_k, \bar{f}_k, \bar{t}_k)\}$ , где  $LS(\beta)$  содержит все задачи  $z_k \in S$ , которым на интервале  $[a, \beta]$  при расписании  $P(t)$  отводится  $\bar{t}_k$  процессорного времени и  $\bar{b}_k = b_k$ ,  $\bar{f}_k = \min\{f_k, \beta\}$ , а  $RS(\beta) = \{z_k(\hat{b}_k, \hat{f}_k, \hat{t}_k)\}$ , где  $RS(\beta)$  содержит все задачи  $z_k \in S$ , которые еще не решены к моменту времени  $\beta$  при расписании  $P(t)$ , причем  $\hat{b}_k = \max\{b_k, \beta\}$ ,  $\hat{f}_k = f_k$ , а  $\hat{t}_k$  равно времени, которое необходимо для решения задачи  $z_k$  в интервале  $[\beta, T]$ . Учитывая лемму 1, для  $z_k \in LS(\beta)$  имеем  $\bar{t}_k = m_k^\beta + x_k(\beta)$ , где  $x_k(\beta)$  — неотрицательные целые числа. Положим  $x_k(\beta) = 0$ , если  $z_k \notin LS(\beta)$ . Ясно, что вектор  $x(\beta) = (x_1(\beta), \dots, x_N(\beta))$  удовлетворяет условиям (1) — (3) и, значит,  $LS(\beta)$  и  $RS(\beta)$  являются полными  $GM$ -системами, причем функции  $LP_\beta(t)$  и  $RP_\beta(t)$  являются соответственно допустимыми расписаниями для этих систем.

По лемме 1 имеем

$$M^{f_i}(LS(\beta)) \leq M(f_i - a) \quad \forall i: f_i < \beta,$$

$$M^{f_i}(RS(\beta)) \leq M(f_i - \beta) \quad \forall i: f_i > \beta,$$

откуда получаем соответственно соотношения (4) и (5).

Целочисленный вектор  $x(\beta)$ , являющийся решением системы неравенств (1) — (5), назовем вектором добавочной нагрузки интервала  $[a, \beta]$ .

Любой вектор добавочной нагрузки  $x(\beta)$  задает полные  $GM$ -системы  $LS(\beta)$  и  $RS(\beta)$ , которые определяются так же, как и выше.

Пусть  $\beta_0, \dots, \beta_n$  — различные директивные сроки начала решения задач  $GM$ -системы  $S$ , занумерованные в порядке возрастания. Будем считать, что  $n > 0$  (случай  $n = 0$  рассмотрен в (2)).

Введем понятие  $S$ -дерева для  $GM$ -системы  $S$ , предполагая, что корень дерева имеет нулевой уровень.

Назовем  $S$ -деревом для данной  $GM$ -системы  $S$  дерево, каждый узел  $A$  которого помечен парой  $(LS_A, RS_A)$ , где  $LS_A$  и  $RS_A$  некоторые  $GM$ -системы, причем корень дерева помечен  $(S, S)$ , а любой узел  $A$  уровня  $p < n$  имеет  $k(A)$  потомков, где  $k(A)$  — число различных векторов добавочной нагрузки интервала  $[\beta_p, \beta_{p+1}]$  для  $GM$ -системы  $RS_A$  и  $i$ -ый потомок помечен  $(LS^i(\beta_{p+1}), RS^i(\beta_{p+1}))$ ,  $i = \overline{1, k(A)}$ .

Из определения следует, что множество путей длины  $n$  в  $S$ -дереве определяется последовательностями

$$(S, S), (LS^{k_1}(\beta_1), RS^{k_1}(\beta_1)), \dots, (LS^{k_n}(\beta_n), RS^{k_n}(\beta_n))$$

при  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{K}$ , где  $\mathcal{K}$  — некоторое конечное множество, причем  $GM$ -системы  $LS^{k_i}(\beta_i)$  и  $RS^{k_i}(\beta_i)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , являются ограниченными (т. е. все задачи имеют одинаковые директивные сроки начала решения (2)) и удовлетворяют условиям теоремы о существовании допустимых расписаний для ограниченных  $GM$ -систем (2). Следовательно, известны, причем непустые, множества всех допустимых расписаний для каждой из этих систем (2).

Обозначим через  $\pi_k(S)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , множество функций  $P(t)$ , определяемых соотношением

$$P(t) = \begin{cases} LP_{\beta_i}(t), & t \in [\beta_{i-1}, \beta_i), \quad i = \overline{1, n}, \\ RP_{\beta_n}(t), & t \in [\beta_n, T], \end{cases} \quad (6)$$

где  $LP_{\beta_i}(t) \in \mathcal{P}(LS^{k_i}(\beta_i))$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $RP_{\beta_n}(t) \in \mathcal{P}(RS^{k_n}(\beta_n))$ .

Нетрудно видеть, что любая из этих функций  $P(t)$  является допустимым расписанием для  $GM$ -системы  $S$ . Таким образом, справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** *Имеет место соотношение  $\pi_k(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ .*

**Теорема.** *Множество всех допустимых расписаний для  $GM$ -системы  $S$  определяется соотношением*

$$\mathcal{P}(S) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \pi_k(S). \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть  $P(t)$  — допустимое расписание для  $GM$ -системы  $S$ . Согласно лемме 2 для  $GM$ -системы  $S$  существует единственный  $x(\beta_1)$  — вектор добавочной нагрузки интервала  $[\beta_0, \beta_1]$ , а для  $GM$ -систем  $LS(\beta_1)$  и  $RS(\beta_1)$  существуют допустимые расписания  $LP_{\beta_1}(t)$  и  $RP_{\beta_1}(t)$  соответственно.

Применяя лемму 2 ровно  $n$  раз, причем на  $p$ -ом шаге при  $p > 1$  к  $GM$ -системе  $RS(\beta_{p-1})$ , получим некоторый путь длины  $n$  в  $S$ -дереве и представим  $P(t)$  в виде (6). Следовательно, учитывая лемму 3, получаем (7).

Всесоюзный научно-исследовательский и  
проектно-конструкторский институт  
комплексной автоматизации нефтяной и  
газовой промышленности

Մ. Պ. ԴՈՐՈՅԵՆՎԱ, Բ. Պ. ՕՎՍՅԱՆՅԻՆ, Ա. Վ. ՍՄԻՐՆՈՎ

### Նախնական ժամկետները պահպանող բազմապրոցեստորային պլանների մասին

Սույն աշխատանքում դիտարկվում է տրված ժամանակներով և լուծման սկզբի և ավարտի նախատեսված ժամկետներով խնդիրների մի համակարգի նկարագրված է խնդիրների այդպիսի համակարգի լուծման բոլոր  $\beta$ -ուլլատրելի դասացուցակների բաղմությունը համասեռ բազմապրոցեստորային հաշվողական սխեմեմի վրա ընդհատումների  $\beta$ -ուլլատրելիության դեպքում:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. С. Танаев, В. В. Шкурба, Введение в теорию расписаний, Наука, М., 1975.
- <sup>2</sup> М. П. Дорофеева, В. П. Овсянкин, В. М. Шпенёв, в сб.: Проблемы разработки автоматизированных систем управления и средств автоматизации нефтяной и газовой промышленности, Киев, 1982.

УДК 517.98

МАТЕМАТИКА

П. Э. Мелик-Адамян

К теории S-матриц канонических дифференциальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 11/II 1983)

Пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство,  $[\mathcal{H}]$  — кольцо линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathcal{H}$ , и  $\mathcal{Y}$  — оператор в  $\mathcal{H}$ , со свойствами  $\mathcal{Y}^* = -\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Y}^2 = -I$ . Операторы  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{Y})$  являются взаимно дополнительными ортогональными

проекторами на собственные подпространства  $\mathcal{H}_{\pm} = \{h \in \mathcal{H}; \mathcal{Y}h = \pm ih\}$ , так что  $\mathcal{Y} = iP_+ - iP_-$ , причем предполагается, что  $\dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$ .

Обозначим через  $H(r)$ ,  $(0 \leq r < \infty)$  — операторнозначную функцию со свойствами: 1)  $H(r)$  принимает строго положительные значения  $\forall r \in [0, \infty)$ ; 2)  $H(r)$  дифференцируема в том смысле, что имеет мес-

то представление  $H(r) = I + \int_0^r \frac{dH(t)}{dt} dt$ , где  $\frac{dH(t)}{dt}$  — сильно измеримая

функция, интегрируемая по Бохнеру на  $[0, \infty)$ ; 3)  $H(r)$  —  $\mathcal{Y}$ -унитарна, т. е.  $H(r)\mathcal{Y}H(r) = \mathcal{Y}$ .

Через  $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  обозначим гильбертово пространство сильно измеримых на  $[0, \infty)$  векторных функций (со значениями из  $\mathcal{H}$ ) со скалярным произведением

$$(x, y)_H = \int_0^{\infty} (H(r)x(r), y(r))dr = \int_0^{\infty} (H^{\frac{1}{2}}(r)x(r), H^{\frac{1}{2}}(r)y(r))dr.$$

В  $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  рассмотрим минимальный симметрический оператор  $\mathcal{L}_0$ , задаваемый дифференциальным выражением

$$H^{-1}(r)\mathcal{Y} \frac{d}{dr} \tag{1}$$

на области определения  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_0)$ , состоящей из финитных  $(x(0)=0, x(r)=0$  при  $r > R_r)$  абсолютно непрерывных функций  $x(r)$  таких, что

$$H^{-1}(r)\mathcal{Y} \frac{dx(r)}{dr} \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}). \tag{2}$$

Как и в (1), можно показать, что каждое самосопряженное расширение  $\mathcal{L}_k$  оператора  $\mathcal{L}_0$  определяется дифференциальным выражением (1) и областью определения  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_k)$ , состоящей из абсолютно непре-

рванных функций, удовлетворяющих условию (2) и граничному условию

$$x(0) = P_K x(0). \quad (3)$$

Здесь  $P_K$  — проектор на гипермаксимальное  $(I\mathcal{Y})$ -нейтральное подпространство  $\mathcal{H}_K = \{h \in \mathcal{H}; KP_+h = P_-h\}$ ,  $K$  — произвольный частично изометрический оператор ( $K^*K = P_+$ ,  $KK^* = P_-$ ), существующий в силу  $\dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$ .

Настоящая заметка посвящена рассмотрению некоторых вопросов теории  $S$ -матриц для оператора  $\mathcal{L}_K$ . Основные положения спектральной теории и теории  $S$ -матриц для оператора  $\mathcal{L}_K$  изучались в (2,3) в случае, когда функция  $H(r)$  удовлетворяет условиям, отличным от наших. Этим обусловлен различный характер возмущений, рассматриваемых в (2,3) и здесь, поэтому в части, относящейся к теории  $S$ -матрицы, мы следуем работе (4).

1. Пусть  $E(r, \lambda)$  — операторное решение (оператор Коши) задачи

$$H^{-1}(r)\mathcal{Y} \frac{dE(r, \lambda)}{dr} = \lambda E(r, \lambda), \quad E(0, \lambda) = I, \quad \text{Im} \lambda = 0, \quad (4)$$

которое единственным образом определяется из интегрального уравнения

$$E(r, \lambda) = H^{-\frac{1}{2}}(r) e^{-\mathcal{Y}\lambda r} \left( I + \int_0^r e^{\mathcal{Y}\lambda s} \frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds} E(s, \lambda) ds \right). \quad (5)$$

Функция  $E(r, \lambda)$   $\mathcal{Y}$ -унитарна при  $\text{Im} \lambda = 0$ . Для функции  $\mathcal{A}(r, \lambda) = e^{\mathcal{Y}\lambda r} H^{\frac{1}{2}}(r) E(r, \lambda)$  имеем

$$\mathcal{A}(r, \lambda) = I + \int_0^r e^{\mathcal{Y}\lambda s} \frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds} H^{-\frac{1}{2}}(s) e^{-\mathcal{Y}\lambda s} \mathcal{A}(s, \lambda) ds. \quad (6)$$

Из положительности функции  $H(r)$  следует единственность решения операторного уравнения  $H^{-\frac{1}{2}}(r)X(r) + X(r)H^{-\frac{1}{2}}(r) = H^{-1}(r) \frac{dH(r)}{dr} H^{-1}(r)$

(см. (5)), поэтому имеет место  $\frac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr} H^{-\frac{1}{2}}(r) = H^{-\frac{1}{2}}(r) \frac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}$  и

уравнение (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}(r, \lambda) = I + \int_0^r e^{2\mathcal{Y}\lambda s} \frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds} H^{-\frac{1}{2}}(s) \mathcal{A}(s, \lambda) ds. \quad (7)$$

Поскольку функция  $\frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds} H^{-\frac{1}{2}}(s)$  суммируема, то существует предел  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{A}(r, \lambda) = \mathcal{A}(\lambda)$ , представимый в виде

$$\mathcal{A}(\lambda) = I + \int_0^{\infty} e^{\mathcal{Y}\lambda t} \Gamma(t) dt, \quad \Gamma(t) \in L_1(0, \infty; [\mathcal{H}]). \quad (8)$$

Как и  $E(r, \lambda)$ , функция  $A(\lambda)$  является  $\mathcal{Y}$ -унитарной. Из представления (8) следует, что функции  $P_{\pm}A(\lambda)$  формулами

$$P_{\pm}A(\lambda) = P_{\pm} + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t} P_{\pm} \Gamma(t) dt, \quad \lambda \in \Pi_{\pm} \quad (9)$$

аналитически продолжаются соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости  $\Pi_{\pm}$ . Рассмотрим операторную функцию  $\Delta_K(\lambda) = [(P_K A^*(\lambda) A(\lambda) P_K) |_{\mathcal{H}_K}]^{-1}$  и пусть  $\Delta(\lambda) = 2P_+ \Delta_K(\lambda) P_+$ . Обозначим через  $L_2^{(\lambda)}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$  гильбертово пространство сильно измеримых на  $(-\infty, \infty)$  векторных функций со значениями из  $\mathcal{H}_+$  и скалярным произведением  $(f, g)_{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta(\lambda) f(\lambda), g(\lambda)) d\lambda$ . Обозначим  $\Phi(r, \lambda) =$

$= \sqrt{2} H^{-\frac{1}{2}}(r) E(r, \lambda) P_K P_+$ . Формулами

$$f(\lambda) = \text{l.i.m}_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \Phi^*(r, \lambda) H(r) x(r) dr, \quad x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}), \quad (10)$$

$$x(r) = \text{l.i.m}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \Phi(r, \lambda) \Delta(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) \in L_2^{(\lambda)}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$$

определяются взаимно-обратные изометрические отображения соответственно пространств  $L_2^{(H)}$  на  $L_2^{(\lambda)}$  и  $L_2^{(\lambda)}$  на  $L_2^{(H)}$ , переводящие друг в друга оператор  $\mathcal{L}_K$  и оператор умножения на независимую переменную, т. е. этими формулами определяется спектральное представление оператора  $\mathcal{L}_K$ .

2. В пространстве  $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  определим самосопряженный оператор  $\mathcal{L}_K^0$  дифференциальным выражением  $H^{-1}(r) \mathcal{Y} \frac{d}{dr} +$

$+ H^{-\frac{1}{2}}(r) \mathcal{Y} \frac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}$  на множестве абсолютно непрерывных функций

$(r)$ , удовлетворяющих условию (3) и таких, что  $H^{-1}(r) \mathcal{Y} \frac{dx(r)}{dr} +$

$+ H^{-\frac{1}{2}}(r) \mathcal{Y} \frac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr} x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ .

Оператор  $\mathcal{L}_K$  будем рассматривать как возмущенный относительно  $\mathcal{L}_K^0$ . Обозначив через  $E_0(r, \lambda) = H^{-\frac{1}{2}}(r) e^{-\mathcal{Y}\lambda r}$  оператор Коши, отвечающий оператору  $\mathcal{L}_K^0$ , аналогично формулам (10) можно построить спектральное представление оператора  $\mathcal{L}_K^0$  со спектральной плотностью  $\Delta_0(\lambda) = I |_{\mathcal{H}_+}$ . Используя спектральные представления операторов  $\mathcal{L}_K^0$  и  $\mathcal{L}_K$ , можно доказать существование волновых операторов

$$W_{\pm}(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(i\mathcal{L}_K t) \exp(-i\mathcal{L}_K^0 t).$$

**Теорема 1.** Оператор рассеяния  $S(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0) = W_+^*(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0) W_-(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)$  существует, и в спектральном представлении невозмущенного оператора  $\mathcal{L}_K^0$  его действие определяется формулами

$$(S(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)x)(r) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \Phi_0(r, \lambda) S(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \Phi_0^*(r, \lambda) x(r) dr,$$

$$\text{где } \Phi_0(r, \lambda) = \sqrt{2} H^{-1}(r) e^{-\mathcal{Y}\lambda r} P_K P_+, \quad S(\lambda) = S_-(\lambda) S_+^{-1}(\lambda), \quad \text{а} \quad S_{\pm}(\lambda) = \\ = \mathcal{P}_+ P_K P_{\pm} \mathcal{A}(\lambda) P_K P_{\pm}.$$

Из формул (9) следует, что функции  $S_{\pm}(\lambda)$  представимы в виде

$$S_{\pm}(\lambda) = I_{\pm} + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t} C_{\pm}(t) dt, \quad C_{\pm}(t) \in L_1(0, \infty; [\mathcal{H}_+]), \quad (11)$$

где  $I_{\pm}$  — единичный оператор в  $\mathcal{H}_+$ . Функция  $S(\lambda)$  унитарна, что следует из легко проверяемого соотношения

$$\Delta(\lambda) = (S_{\pm}^*(\lambda) S_{\pm}(\lambda))^{-1}. \quad (12)$$

3. Пусть  $\mathcal{U}(t) = \exp(i\mathcal{L}_K t)$ ,  $(-\infty < t < \infty)$  — группа унитарных операторов, порожденная самосопряженным оператором  $\mathcal{L}_K$ . Тогда функция  $x(r, t) = \mathcal{U}(t)x(r)$  является решением задачи Коши

$$-i \frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = H^{-1}(r) \mathcal{Y} \frac{\partial x(r, t)}{\partial r}, \quad x(r, 0) = x(r), \quad (0 \leq r < \infty, -\infty < t < \infty). \quad (13)$$

Покажем, что к группе  $\mathcal{U}(t)$  применима схема теории рассеяния Лакса—Филлипса (6). Метод Лакса—Филлипса предполагает, что в пространстве  $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  существуют подпространства  $D_{\pm}$  (называемые уходящим и приходящим), обладающие свойствами

$$\text{I) } \mathcal{U}(\pm t) D_{\pm} \subset D_{\pm}, \quad t > 0, \quad \text{II) } \bigcap_{t > 0} \mathcal{U}(\pm t) D_{\pm} = \{0\},$$

$$\text{III) } \overline{\bigcup_t \mathcal{U}(t) D_{\pm}} = L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}).$$

Для выделения подпространств  $D_{\pm}$  заметим, что поскольку имеют место соотношения (12), то функция  $g(\lambda) = S_{\pm}^{*-1}(\lambda) f(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$  при  $f(\lambda) \in L_2^{(H)}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$ . Обозначив  $\Phi_{\pm}(r, \lambda) = \Phi(r, \lambda) S_{\pm}^{-1}(\lambda)$ , из формул (10) получим два различных спектральных представления оператора  $\mathcal{L}_K$  в  $L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$ , определяемые формулами

$$g(\lambda) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^R \Phi_{\pm}^*(r, \lambda) H(r) x(r) dr, \quad x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}), \quad (14_{\pm})$$

$$x(r) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \Phi_{\pm}(r, \lambda) g(\lambda) d\lambda, \quad g(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+).$$

Обозначим через  $H_{\pm}^{\pm}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+) \subset L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$  классы голоморфных в  $\Pi_{\pm}$  векторных функций  $f_{\pm}(\lambda)$ , представимых в виде

$$f_{\pm}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in L_2(0, \infty; \mathcal{H}_+), \quad \lambda \in \Pi_{\pm}.$$

Если в качестве уходящего и приходящего подпространств относи-

тельно группы операторов умножения на  $e^{i\lambda t}$  в  $L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_\pm)$  выбраны подпространства  $H_\pm^\pm(-\infty, \infty; \mathcal{H}_\pm)$ , то для них выполнение соотношений I)–III) очевидно. Обозначим через  $D_\pm \subset L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  образы подпространств  $H_\pm^\pm(-\infty, \infty; \mathcal{H}_\pm)$  при отображениях (14 $_{\pm}$ ). Поскольку эти отображения изометричны и группа  $U(t)$  ими переходит в группу операторов умножения на  $e^{i\lambda t}$ , то отсюда следуют соотношения I)–III) и для подпространств  $D_\pm$ . Подпространства  $D_\pm$  допускают и внутреннюю характеристику. Именно, используя свойства функций  $S_\pm(\lambda)$ , в частности, их представимость формулами (11), можно доказать, что справедлива

**Теорема 2.** *Подпространства  $D_\pm$  совпадают с подпространствами начальных данных задачи Коши (13) таких, что отвечающие им решения обращаются в нуль соответственно при  $t > r$ ,  $t > 0$  и  $-t > r$ ,  $t < 0$ .*

Отображения (14 $_{\pm}$ ) называются уходящим и приходящим спектральными представлениями группы  $U(t)$ . Методом Лакса–Филлипса матрица рассеяния определяется как оператор, переводящий уходящий представитель функции  $x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  в его приходящий представитель. Из формул (14 $_{\pm}$ ) и унитарности функции  $S(\lambda)$  следует, что это соответствие осуществляется функцией  $S(\lambda) = S_-(\lambda)S_+^{-1}(\lambda)$ .

Ереванский государственный университет

Պ. Է. ՄԵԼԻԿ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների  $S$ -մատրիցների տեսության մասին

Աշխատանքը նվիրված է  $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$  տարածության մեջ (1)–(3) բանաձևերով որոշված ինքնահամալույծ  $\mathcal{L}_K$  կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների  $S$ -մատրիցների տեսության որոշ հարցերին: Ընթացիկում է. որ  $H(r)$  օպերատորարժեք ֆունկցիան օժտված է 1)–3) հատկություններով:

Ցույց է տրված, որ  $\mathcal{L}_K$  օպերատորի համար գոյություն ունեն  $S$ -մատրիցները՝ սահմանված ինչպես ալիքային օպերատորների օգնությամբ, այնպես էլ կարս–Ֆրիդպսի մեթոդով:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Փ. Յ. Мелик-Адамян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 6 (1977).  
<sup>2</sup> В. М. Адамян, М. Т. Яворский, ДАН АрмССР, т. 56, № 2 (1973). <sup>3</sup> М. Т. Яворский, Функциональный анализ. Межвуз. сб., Ульяновск, 1981. <sup>4</sup> П. Э. Мелик-Адамян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 11, № 4 (1976). <sup>5</sup> Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970. <sup>6</sup> П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния. Мир, М., 1971.

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

А. Г. Даялян

Об исключаемости слов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/II 1983)

Пусть  $X$  есть слово в алфавите  $\Omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Слово  $E$  в алфавите  $\Psi_m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  назовем словом вида  $X$ , если  $E$  есть результат подстановки вместо букв слова  $X$  некоторых непустых слов в алфавите  $\Psi_m$ , причем вместо одинаковых букв подставляются одинаковые слова. Следуя <sup>(1)</sup> дадим

Определение. Слово  $X$  в алфавите  $\Omega_n$  называется исключаемым в алфавите  $\Psi_m$ , если в алфавите  $\Psi_m$  существует такое бесконечное множество различных слов, что никакое из них не содержит подслова вида  $X$ .

Слово  $X$  <sup>(1)</sup> в алфавите  $\Omega_n$  называется дублированным, если каждая буква  $x_i$  при  $1 \leq i \leq n$  входит в  $X$  минимум два раза. Слово  $X$  в алфавите  $\Omega_n$  назовем тройным, если каждая буква  $x_i$  при  $1 \leq i \leq n$  входит в  $X$  минимум три раза.

В настоящей работе будут доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Каждое дублированное слово исключается в алфавите  $\Psi_3$ .

Утверждение 2. Каждое дублированное слово в алфавите  $\Omega_n$ , где  $n \geq 6$ , исключается в алфавите  $\Psi_3$ .

Утверждение 3. Каждое тройное слово в алфавите  $\Omega_n$ , где  $n \geq 4$ , исключается в алфавите  $\Psi_2$ .

Пусть  $X$  есть слово в алфавите  $\Omega_n$ , причем буква  $x_i$  входит в слово  $X$  ровно  $r_i$  раз при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Будем считать, что  $r = \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} \geq 2$ . (Очевидно, что если  $r = 2$ , то слово  $X$  дублированное, и если  $r = 3$ , то  $X$  — тройное.)

Через  $\gamma_m(l)$  обозначим количество слов длины  $l$  в алфавите  $\Psi_m$ , которые не содержат подслов вида  $X$ . Через  $\beta_{l_1, l_2, \dots, l_n}(l)$  обозначим количество слов длины  $l$  в алфавите  $\Psi_m$ , которые при вычеркивании последней буквы не содержат подслов вида  $X$ , но сами содержат подслово вида  $X$ , причем это подслово получается из слова  $X$  подстановкой вместо буквы  $x_i$  некоторого слова длины  $l_i$  в алфавите  $\Psi_m$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \gamma_m(l) &\geq \gamma_m(l-1)m - \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n < l} \beta_{l_1, l_2, \dots, l_n}(l) = \\ &= \gamma_m(l-1)m - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=l} \beta_{l_1, l_2, \dots, l_n}(l) \right). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что

$$\beta_{l_1, l_2, \dots, l_n}(l) \leq \gamma_m \left( l - \sum_{i=1}^n r_i l_i \right) m^{l_1} m^{l_2} \dots m^{l_n},$$

$$\gamma_m(l) \geq \gamma_m(l-1)m - \sum_{j=n}^l \left( \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=j} \gamma_m \left( l - \sum_{i=1}^n r_i l_i \right) m^{l_1+l_2+\dots+l_n} \right).$$

Всякому  $m$  мы сопоставим некоторое число  $\alpha$ ,  $\sqrt[n]{m} < \alpha < m$ , такое, что индукцией по  $l$  можно будет доказать соотношение  $\gamma_m(l) \geq \alpha \gamma_m(l-1)$ . Очевидно, что база индукции верна при  $\sqrt[n]{m} < \alpha < m$ . Допустим, что утверждение верно при любых натуральных числах, меньших  $l$ . По индуктивному предположению

$$\gamma_m \left( l - \sum_{i=1}^n r_i l_i \right) \leq \gamma_m \left( l - r \sum_{i=1}^n l_i \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{j=n}^l \left( \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=j} \gamma_m \left( l - \sum_{i=1}^n r_i l_i \right) m^{l_1+l_2+\dots+l_n} \right) \leq \\ & \leq \sum_{j=n}^l \left( \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=j} \gamma_m \left( l - r \sum_{i=1}^n l_i \right) m^{l_1+l_2+\dots+l_n} \right) = \sum_{i=n}^l \binom{i-1}{n-1} \gamma_m(l-ri) m^i, \end{aligned}$$

где  $\binom{i-1}{n-1}$  есть число сочетаний из  $i-1$  по  $n-1$  и равно количеству всевозможных упорядоченных наборов целых положительных чисел  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  таких, что  $l_1 + l_2 + \dots + l_n = i$ . По индуктивному предположению  $\gamma_m(l-1) \geq \alpha^{r(i-1)} \gamma_m(l-ri)$ .

Значит

$$\begin{aligned} \gamma_m(l) & \geq \gamma_m(l-1) \left( m - \alpha \sum_{i=n}^l \binom{i-1}{n-1} \left( \frac{m}{\alpha^r} \right)^i \right) \geq \\ & \geq \gamma_m(l-1) \left( m - \alpha \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \left( \frac{m}{\alpha^r} \right)^i \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при  $\alpha > \sqrt[n]{m}$  и  $r \geq 2$  ряд  $\sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \left( \frac{m}{\alpha^r} \right)^i$  сходится.

Вычислим сумму ряда  $\sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} x^i$  при  $0 < x < 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} x^i & = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-n+1)}{(n-1)!} x^i = \\ & = \frac{\left( \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} \right)^{(n-1)} x^n}{(n-1)!} = \frac{\left( \frac{1}{1-x} \right)^{(n-1)} x^n}{(n-1)!} = \frac{x^n}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

Значит

$$\gamma_m(l) \geq \gamma_m(l-1) \left( m - \frac{\alpha m^n}{(\alpha^r - m)^n} \right).$$

Для завершения доказательства надо найти такие значения  $m$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $r$ , чтобы выполнялось неравенство

$$m - \frac{am^n}{(a^r - m)^n} \geq a.$$

Нетрудно убедиться, что при  $m = 4$ ,  $r = 2$ ,  $n \geq 3$ ,  $a = \sqrt[3]{12}$ ;  
 $m = 3$ ,  $r = 2$ ,  $n \geq 6$ ,  $a = 2\sqrt[3]{2}$ ;  $m = 2$ ,  $r = 3$ ,  $n \geq 4$ ,  $a = \sqrt[3]{6}$   
 соответствующие неравенства выполняются. Отсюда непосредственно следуют утверждения 2 и 3.

Для завершения доказательства утверждения 1 достаточно заметить, что любое дублированное слово в алфавите  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$  содержит квадрат некоторого слова, а слово  $x_1^2$  исключается в алфавите  $\Psi_3$  (2).

Вычислительный центр  
 Академии наук Армянской ССР  
 и Ереванского государственного  
 университета

## Ա. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

### Բառերի բացառելիության մասին

$\Omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  այբուբենի  $X$  բառը կոչվում է բացառելի (1)  
 $\Psi_m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  այբուբենում, եթե  $\Psi_m$  այբուբենում գոյություն ունի տարրեր բառերի այնպիսի անվերջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը չի պարունակում ենթաբառ, որը ստացվում է  $X$  բառի տառերի փոխարեն  $\Psi_m$  այբուբենի որոշ ոչ դատարկ բառերի տեղադրումից:  $X$  բառը կոչվում է կրկնօրինակված, եթե յուրաքանչյուր  $x_i$  տառը  $1 \leq i \leq n$  դեպքում  $X$  բառում պարունակվում է մինիմում երկու անգամ և եռօրինակված, եթե յուրաքանչյուր  $x_i$  տառը  $1 \leq i \leq n$  դեպքում  $X$  բառում պարունակվում է մինիմում երեք անգամ:

Այս աշխատանքում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր կրկնօրինակված բառ բացառելի է շորս տառանի այբուբենում, յուրաքանչյուր կրկնօրինակված բառ ավելի քան հինգ տառից բաղկացած այբուբենում բացառելի է երեքտառանի այբուբենում և յուրաքանչյուր եռօրինակված բառ ավելի քան երեք տառից բաղկացած այբուբենում բացառելի է երկտառանի այբուբենում:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. F. McNulty, Pacific Journ. of Math., v. 85 № 2 (1979). <sup>2</sup> A. Thue, Norske Vid. Selek. Skr., I Mat. Nat. Kl., Christiania, 7 (1906).

УДК 539.376

МЕХАНИКА

Г. Ю. Ермоленко, В. В. Колокольчиков

О решении задач главной кубической теории вязкоупругости  
 для неоднородно-стареющих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 7/1 1983)

Рассмотрим класс материалов, для которых справедлива главная кубическая теория вязкоупругости <sup>(1,2)</sup>. Если элементы вязкоупругого тела изготовлены в различные моменты времени, то возраст материала в таком теле неоднороден и зависит от пространственных координат <sup>(3)</sup>. Пусть элемент с координатами  $r$  изготовлен в момент времени  $\tau^*(r)$ . Тогда краевая задача для такого неоднородно-стареющего вязкоупругого тела может быть описана уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{u_{i,j} + u_{j,i}\}; \quad t_* \equiv t - \tau^*(r); \\ e_{ij}(t) &= \frac{s_{ij}(t)}{2G(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{ij}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^t K_2(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau) s_{mn}(\tau) s_{ij}(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_{ii}(t) &= \frac{\sigma_{ii}(t)}{3K(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_3(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \sigma_{ii}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{ij}(t) n_j &= P_i(t), \quad x \in S_\sigma; \quad u_i = u_i^0(t), \quad x \in S_u. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций,  $X_i$ ,  $u_i$  — компоненты массовых сил и вектора перемещений;  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  — компоненты девиаторов напряжений и деформаций;  $G(t)$ ,  $K(t)$  — сдвиговой и объемный модули;  $P_i$  — поверхностные силы, заданные на поверхности  $S_\sigma$ , а  $u_i^0$  — перемещения, заданные на поверхности  $S_u$ ;  $K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$ ,  $K_2(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$ ,  $K_3(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$  — ядра интегральных операторов.

Определяющие соотношения теории вязкоупругости для неоднородно-стареющих тел в линейной области описываются уравнениями Н. Х. Арутюняна <sup>(4)</sup>:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_{ii}(t) = \frac{\sigma_{ii}(t)}{3K(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_3(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))\sigma_{ii}(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Здесь (\*)  $K_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [1/G(t_*) + \omega(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))]$ ;

$\omega(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))$  — мера ползучести на сдвиг. Формулы (2) с такими ядрами разрешимы в квадратурах, т. е. (\*):

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G(t_*)e_{ij}(t) + \int_{\tau_0}^t \text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))e_{ij}(\tau)d\tau; \\ \sigma_{ii}(t) &= 3K(t_*)\varepsilon_{ii}(t) + \int_{\tau_0}^t \text{Res}_2(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))\varepsilon_{ii}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ G(\tau-\tau^*(r)) - \gamma\varphi(\tau-\tau^*(r)) \times \right. \\ &\quad \left. \times G^2(\tau-\tau^*(r)) \exp(\eta(\tau-\tau^*(r))) \int_{\tau-\tau^*(r)}^{\tau-\tau^*(r)} \exp(-\eta(z))dz \right], \end{aligned}$$

причем

$$\eta(\tau-\tau^*(r)) = \int_{\tau_0}^{\tau-\tau^*(r)} \left[ \gamma(1+\varphi(\tau-\tau^*(r)))G(\tau-\tau^*(r)) - \frac{G'(\tau-\tau^*(r))}{G(\tau-\tau^*(r))} \right] d\tau.$$

Запишем (2) в виде

$$\begin{aligned} e_{ij}(t) &= - \int_{\tau_0}^t \left[ K_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) - \frac{\partial(t-\tau)}{2G(t_*)} \right] s_{ij}(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))s_{ij}(\tau)d\tau, \\ \varepsilon_{ii}(t) &= \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{\partial(t-\tau)}{3K(t_*)} - K_3(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \right] \sigma_{ii}(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} K_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))\sigma_{ii}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ядра  $K_1^0$  и  $K_3^0$  предполагаются равными нулю вне интервала интегрирования  $\tau_0 \div t$ .

Представим (3) следующим образом:

$$s_{ij} = \int_{\tau_0}^t [\text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) + 2G(t_*)\partial(t-\tau)]e_{ij}(\tau)d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \text{Res}_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) e_{11}(\tau) d\tau; \\
\sigma_{11}(t) &= \int_{\tau_0}^t [ \text{Res}_3(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) + K'(t_*) \delta(t - \tau) ] \varepsilon_{11}(\tau) d\tau = \\
&= \int_{\tau_0}^t \text{Res}_3^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau, \quad (5)
\end{aligned}$$

где ядра  $\text{Res}_1^0$  и  $\text{Res}_3^0$  равны нулю вне интервала  $\tau_0 \div t$ .

Из равенств (4) и (5) следует:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K_1^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \text{Res}_1^0(\tau - \tau^*(r), \tau' - \tau^*(r)) d\tau &= \delta(t - \tau'), \\
\int_0^\infty K_3^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \text{Res}_3^0(\tau - \tau^*(r), \tau' - \tau^*(r)) d\tau &= \delta(t - \tau'). \quad (6)
\end{aligned}$$

Здесь  $\delta(t - \tau')$  — дельта-функция Дирака.

**Теорема 1.** Краевая задача (1) с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}
e_{11}(t) &= \int_0^\infty K_1^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{11}(\tau) d\tau + \int_0^\infty K_2^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau) \times \\
&\times s_{mn}(\tau) s_{11}(\tau) d\tau; \quad \varepsilon_{11}(t) = \int_0^\infty K_3^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \sigma_{11}(\tau) d\tau \quad (7)
\end{aligned}$$

интегральным преобразованием с ядром  $\text{Res}_1^0(\tau' - \tau^*(r), t - \tau^*(r))$  при условии, что выполняются равенства.

$$K_2^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) = K_2'(\tau - \tau^*(r)) K_1^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r));$$

$$K_3^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) = K_3'(\tau - \tau^*(r)) K_1^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)),$$

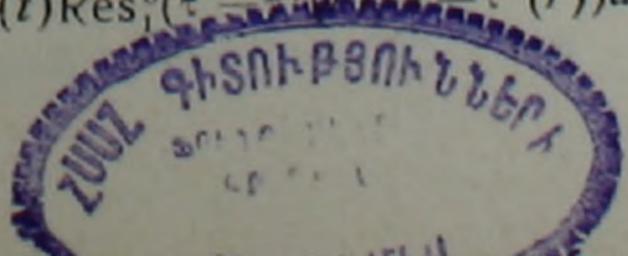
сводится к задаче для неоднородного кубически нелинейного упругого материала.

**Доказательство.** Умножая определяющее соотношение (7) на  $\text{Res}_1^0(\tau' - \tau^*(r), t - \tau^*(r))$ , интегрируя по времени  $t$ , согласно (6) будем иметь:

$$\begin{aligned}
e_{11}^{(*)}(\tau') &= s_{11}(\tau') + K_2'(\tau' - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau') s_{mn}(\tau') s_{11}(\tau'); \\
\varepsilon_{11}^{(*)}(\tau') &= K_3'(\tau' - \tau^*(r)) \sigma_{11}(\tau'). \quad (8)
\end{aligned}$$

Преобразуя краевые условия в перемещения и соотношения Коши:

$$\varepsilon_{11}^{(*)}(\tau') = \int_0^\infty \varepsilon_{11}(t) \text{Res}_1^0(\tau' - \tau^*(r), t - \tau^*(r)) dt = \frac{1}{2} \{u_{1,1}^{(*)} + u_{1,1}^{(*)}\},$$



$$u_{i,j}^{(0)} = \int_0^t u_{i,j}(t) \text{Res}_0(\tau' - \tau^*(r), t - \tau^*(r)) dt, \quad (9)$$

в образах преобразований будем иметь краевую задачу для неоднородно-стареющего упругого кубически нелинейного материала:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii,j} + X_i &= 0; \quad \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \{u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}\}; \\ e_{ij}^{(0)}(\tau') &= s_{ij}(\tau') + K_2(\tau' - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau') s_{mn}(\tau') s_{ij}(\tau); \\ \varepsilon_{ii}^{(0)}(\tau') &= K_3(\tau' - \tau^*(r)) \varepsilon_{ii}(\tau'); \\ \sigma_{ij} n_j &= P_i, \quad x \in S_\sigma; \quad u_i^{(0)} = u_i^{0(0)}, \quad x \in S_u. \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе кубически нелинейной неоднородно-стареющей балки. Балка изгибается противоположными моментами  $\pm M(t)$ , приложенными к ее торцам. Боковая поверхность свободна от нагрузок. Краевая задача для данного случая в соответствии с теоремой 1 определяется формулами (10). Согласно (10) решения — напряжения исходной вязкоупругой задачи и фиктивно упругой задачи (10) совпадают. Поэтому разница между вязкоупругой задачей (1) и фиктивно упругой задачей (10) будет заключаться только в деформациях и перемещениях.

Уравнения равновесия и краевые условия задачи (10) и исходной вязкоупругой задачи будут удовлетворены, если решения выбраны в виде

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \quad \sigma_{xx} = -\frac{M(t)}{J} y. \quad (11)$$

Здесь  $J$  — момент инерции поперечного сечения.

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{M(t)y}{JE(t - \tau^*(r))} + \int_{\tau_0}^t y \frac{M(t)}{J} K_E(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^t \frac{M^2(\tau)}{J^2} y^3 K_{2E}^0(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения совместности деформаций выполняются приближенно. На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей  $\varepsilon_{xx}$  от  $x$  и  $y$  для различных моментов нагружения и наблюдения в случае  $M(t) = M_0$ , причем  $M_0/J = 1 \text{ кгс/см}^2$ . Функция  $K_E(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$  согласно (3) равна  $\frac{\partial}{\partial \tau} \{1/E(\tau - \tau^*(r)) + C(t, \tau, \tau^*(r))\}$ , причем  $E(\tau - \tau^*(r)) = E_0 \{1 - \exp[-\beta(\tau - \tau^*(r))]\}$ , а  $C(t, \tau, \tau^*(r)) = \{C_1 + A_1/|\tau - \tau^*(r)|\} \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\}$ . Постоянные для бетона составляют:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,975 \cdot 10^{-5} (\text{кгс/см}^2)^{-1}, \quad A_1 = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ сут./}(\text{кгс/см}^2), \\ \gamma &= 0,03 \text{ сут.}^{-1}, \quad E_0 = 2,6 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2, \quad \beta = 0,206 \text{ сут.}^{-1} \end{aligned}$$

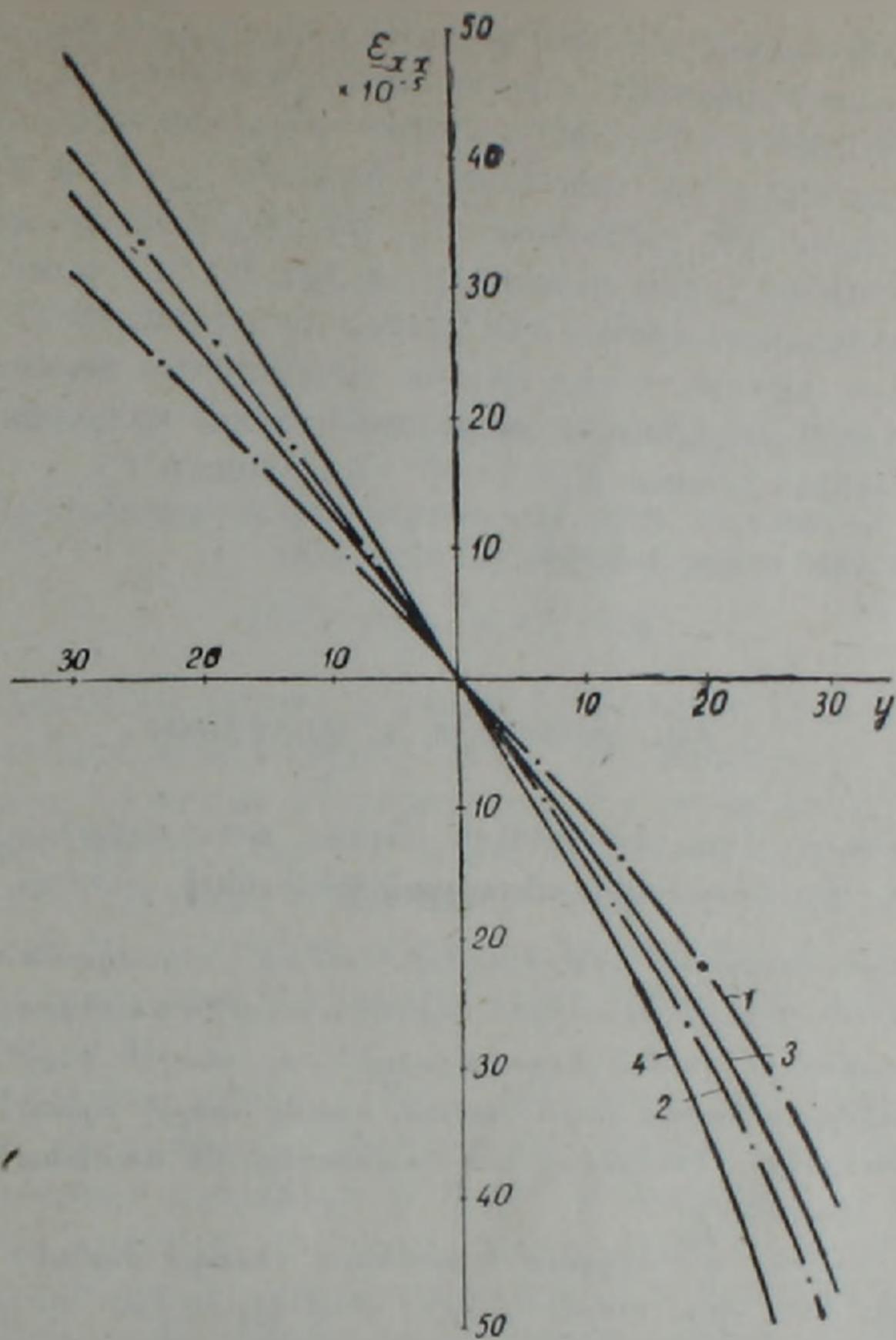


Рис. 1. График деформации балки  $\epsilon_{xx}$  в зависимости от  $u$  для  $x=0$  (— · —),  $x=5\text{м}$  (—); 1— $x=0$ ,  $\tau_0=20$ ,  $t=50$  сут.; 2— $x=0$ ,  $\tau_0=20$ ,  $t=80$  сут.; 3— $x=500$  см.,  $\tau_0=20$ ,  $t=50$  сут.; 4— $x=500$  см.,  $\tau_0=20$ ,  $t=80$  сут.

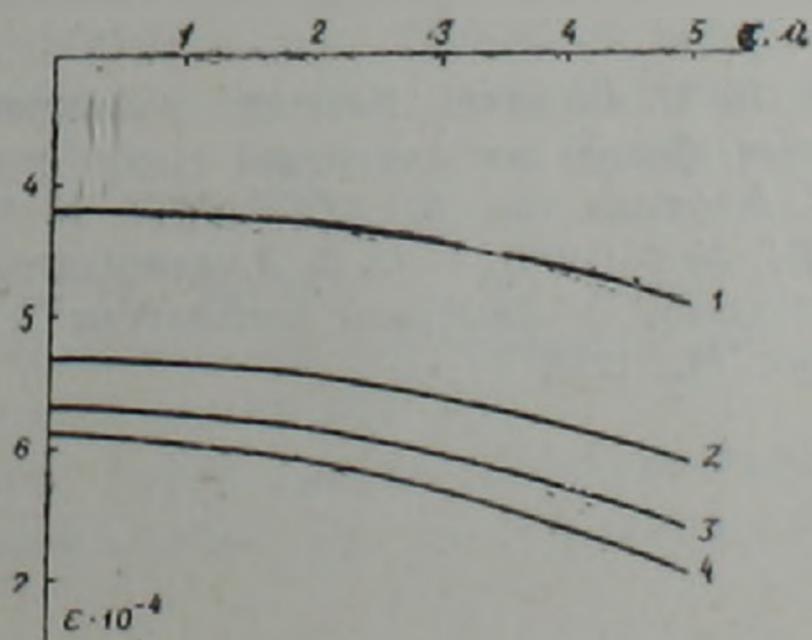


Рис. 2. График деформации балки  $\epsilon_{xx}$  в зависимости от  $x$  для  $y=30$  см и момента, нагружения 20 суток: 1— $\tau_0=20$ ,  $t=50$  сут.;  $y=30$  см; 2— $\tau_0=20$ ,  $t=80$  сут.,  $y=30$  см; 3— $\tau_0=20$ ,  $t=110$  сут.,  $y=30$  см; 4— $\tau_0=20$ ,  $t=140$  сут.,  $y=30$  см

Длина балки составляет 5 м, а сечение — квадрат со стороной 60 см. Балка изготавливается с постоянной скоростью за 10 дней, наращиваясь по оси  $x$ . На рис. 1 изображена зависимость деформации  $\varepsilon_{xx}$  от координаты  $y$  для моментов загрузки  $\tau_0 = 20$  и 50 суток для различных моментов наблюдения  $t$ . На рис. 2 изображены зависимости деформации  $\varepsilon_{xx}$  от координаты  $x$  для тех же моментов нагружения и наблюдения, причем при растяжении согласно (5) считается, что связь  $\sigma - \varepsilon$  линейна, а при сжатии — кубически нелинейна. Коэффициент пропорциональности ядра кубически нелинейного и ядра линейного выбран равным  $K'_3 = 3 \cdot 10^{-4}$  по данным (5).

Куйбышевский государственный  
университет

#### Գ. ՅՈՒ. ԵՐՄՈՒՆՆԿՈ. Վ. Վ. ԿՈՒՆՎՈՂՉԻԿՈՎ

Անհամասեռ ծեփացող մարմինների համար առաձգամածուցիկության  
գլխավոր խորանարդային տեսության խնդիրների լուծման մասին

Անհամասեռ ծեփացող մարմինների համար առաձգամածուցիկության  
գլխավոր խորանարդային տեսության եզրային խնդիրը ինտեգրալ ձևափոխու-  
թյան կիրառումով բերվում է խորանարդային ոչ գծային կեղծ առաձգակա-  
նության նյութերի այնպիսի դասի համար, որտեղ որոշիչ արտահայտություն-  
ների օպերատորների կորիզները բազմապատկելի են ժամանակի միևնույն  
ֆունկցիայի նկատմամբ:

Որպես օրինակ դիտարկվում է բետոնյա հեծանի ծոման վերաբերյալ  
խնդիրը, երբ ծող բեռը ուժազույգերի ձևով կիրառված է հիմքերի վրա:  
Ընդունվում է, որ հեծանի նյութը ձգման ժամանակ իրեն պահում է որպես  
գծային, իսկ սեղման ժամանակ՝ որպես ոչ գծային:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, Механика полимеров, № 3, 1965. <sup>2</sup> А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термовязкоупругости, Наука, М., 1970. <sup>3</sup> Н. Х. Арутюнян, Изв. АН СССР. МТТ, № 3, 1976. <sup>4</sup> Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 231, № 3 (1976). <sup>5</sup> С. В. Александровский, Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести, Стройиздат, М., 1973.

УДК 539.376

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский

Об устойчивости цилиндрической трубы в стареющей  
 вязкоупругой среде

(Представлено 16/XII 1983)

Исследуется устойчивость длинной упругой трубы, находящейся внутри стареющей вязкоупругой среды. Установлены условия устойчивости, формулируемые непосредственно в терминах характеристик трубы и реологических свойств среды. Подобные задачи представляют интерес при изучении устойчивости обсадных труб и подземных сооружений (1-3). В случае, когда среда упругая, задача об устойчивости обсадных труб рассматривалась в (4). Работа примыкает к исследованиям (5-8).

1. *Постановка задачи.* Пусть стареющая вязкоупругая среда занимает все трехмерное пространство. Координаты точек среды в декартовой системе координат  $O x_1 x_2 x_3$  обозначены  $(x_1, x_2, x_3)$ . Из среды вырезан цилиндр  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , радиус которого без ограничения общности можно принять равным единице. В получившееся отверстие вставлена круглая упругая труба, внешний радиус которой равен единице. После этого в момент времени  $t=0$  на бесконечности среды приложены сжимающие усилия постоянной интенсивности  $P$ , а к внутренней поверхности трубы — усилия  $g = (g_1, g_2, 0)$ , причем как  $P$ , так и  $g$  направлены перпендикулярно оси трубы. Кроме того усилия  $g$  статически эквивалентны нулю. Предполагается, что труба жестко сцеплена с окружающей ее средой. Под действием усилий  $P$  и  $g$  как в трубе, так и в среде реализуется плоское деформированное состояние

$$u_3 = \omega_3 = 0, \quad u_1 = u_1(t, \rho, \theta), \quad u_2 = u_2(t, \rho, \theta), \quad \omega_1 = \omega_1(t, \theta), \quad \omega_2 = \omega_2(t, \theta).$$

Здесь  $u_i$  и  $\omega_i$  проекции вектора перемещений среды и трубы на оси цилиндрической системы координат  $O\rho\theta x_3$ .

*Определение.* Труба называется устойчивой, если для любого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что из неравенства  $|g_1(\theta)| + |g_2(\theta)| < \delta(\epsilon)$  вытекает оценка

$$|\omega_1(t, \theta)| + |\omega_2(t, \theta)| < \epsilon, \quad t \geq 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

2. *Уравнение для прогибов трубы.* Считается, что труба представляет собой упругую цилиндрическую оболочку бесконечной длины и постоянной толщины  $h \ll 1$ . Перемещения срединной поверхности трубы малы по сравнению с  $h$ . Компоненты  $\epsilon_{ij}$  тензора деформаций связаны с компонентами  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений в системе координат  $O\rho\theta x_3$  соотношениями

$$\varepsilon_{jl} = E_0^{-1} [(1 + \nu_0) \delta_{jl} - \nu_0 \delta_{jl} \sigma].$$

Здесь  $E_0$ ,  $\nu_0$  — постоянные модуль упругости и коэффициент Пуассона материала трубы,  $\sigma = \sigma_{jj}$ ,  $\delta_{jl}$  — символ Кронекера, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть  $N$  нормальное усилие,  $Q$  перерезывающая сила и  $M$  изгибающий момент, т. е.

$$N = \int_{1-h}^1 \sigma_{22} d\rho, \quad Q = \int_{1-h}^1 \sigma_{12} d\rho, \quad M = \int_{1-h}^1 \sigma_{22} \left( \frac{h}{2} + 1 - \rho \right) d\rho.$$

Элемент трубы единичной высоты и толщины  $h$  интерпретируется как тонкий упругий стержень. Используя уравнения равновесия элемента трубы ((<sup>9</sup>), с. 421), получаем, что с точностью  $O(h)$

$$\omega_1 = -\partial \omega_2 / \partial \theta, \quad D [\partial^6 \omega_2 / \partial \theta^6 + 2 \partial^4 \omega_2 / \partial \theta^4 + \partial^2 \omega_2 / \partial \theta^2] + q [\partial^4 \omega_2 / \partial \theta^4 + \partial^2 \omega_2 / \partial \theta^2] + q_2 - \frac{\partial q_1}{\partial \theta} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость трубы; интенсивность суммарных усилий, приложенных к элементу трубы и направленных вдоль оси  $O\rho$ , обозначена через  $q + q_1$ , а направленных вдоль оси  $\theta$  — через  $q_2$ . При этом  $q$  есть не зависящее от  $\theta$  нормальное давление, а  $q_1$  и  $q_2$  — величины порядка  $O(h)$ .

Граничные условия для уравнения (2.1) имеют вид

$$\partial^j \omega_2 / \partial \theta^j |_{\theta=0} = \partial^j \omega_2 / \partial \theta^j |_{\theta=2\pi}; \quad j=0, 1, \dots, 5. \quad (2.2)$$

Отметим, что  $q_1 = q_2 = 0$  при  $g=0$ . Если  $g=0$  и нормальное давление  $q$  меньше эйлерова критического значения  $q_c$ , то прогиб  $\omega_2 = 0$ . Значит, в силу (2.1) и  $\omega_1 = 0$ . В этом случае  $M = Q = 0$ . Таким образом, при  $q < q_c$ ,  $q_1 = q_2 = 0$  в трубе возникает только постоянное нормальное усилие  $N = -q$ , уравновешивающее внешнее усилие  $p$ . Для того чтобы замкнуть уравнения (2.1), (2.2), необходимо определить  $q_1$ ,  $q_2$  в зависимости от  $\omega_2$ . Это сделано в следующем пункте.

3. *Напряженно-деформированное состояние среды.* Обозначим в этом пункте через  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  компоненты тензоров напряжений и деформаций среды в системе координат  $O\rho\theta x_3$ . Поскольку большинство природных материалов при объемной деформации ведут себя упруго (<sup>10</sup>), примем, что среднее напряжение  $\sigma = \sigma_{jj}/3$  и средняя объемная деформация  $\varepsilon = \varepsilon_{jj}/3$  связаны соотношением  $\varepsilon = (1 - 2\nu)E^{-1}\sigma$ , где  $E$ ,  $\nu$  — постоянные модуль упругости и коэффициент Пуассона материала среды. Девикторы  $\varepsilon_{ij}$ ,  $s_{ij}$  тензоров деформаций и напряжений рассматриваемой среды удовлетворяют реологическому соотношению

$$s_{ij} = E(1 + \nu)^{-1} (I - R) e_{ij}. \quad (3.1)$$

Здесь  $I$  — тождественный оператор,  $R$  — оператор релаксации с ядром  $r(t, \tau)$

$$R e_{ij} = \int_0^t r(t, \tau) e_{ij} d\tau.$$

Используя (3.1) и тот факт, что задача рассматривается в рам-

ках плоской деформации, уравнения состояния среды можно представить в виде

$$(I-R)\varepsilon_{ij} = (1+\nu)E^{-1}[\sigma_{ij} - (\nu\sigma_0 + (1+\nu)K_1\sigma_0)\delta_{ij}],$$

$$\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad I+K_1 = (I - (1-2\nu)R/3)^{-1}. \quad (3.2)$$

Введем функцию Эри  $F$  по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \quad (3.3)$$

Из (3.2) и уравнений совместности деформаций вытекает, что функция Эри  $F$  удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 F = 0 \quad (3.4)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при } \rho = \infty, \quad (3.5)$$

$$u_1 = -\partial \omega_2 / \partial \theta, \quad u_2 = \omega_2. \quad (3.6)$$

Представим  $F$  в виде  $F = F^0 + F^1$ , где  $F_0$  удовлетворяет уравнению (3.4), граничному условию (3.5) и нулевому граничному условию (3.6), а  $F^1$  удовлетворяет уравнению (3.4), граничному условию (3.6) и нулевому граничному (3.5).

Обозначим через  $\sigma_{ij}^0$  и  $\sigma_{ij}^1$  напряжения, определяемые формулами (3.3) при  $F = F^0$  и  $F = F^1$ .

Используя явный вид решения уравнения (3.4) в симметричном случае <sup>(1)</sup> и соотношения (3.3), получаем

$$\sigma_{11}^0 = -p(1 + A(t)\rho^{-2}), \quad \sigma_{22}^0 = -p(1 - A(t)\rho^{-2}),$$

$$\sigma_{12}^0 = 0, \quad A(t) = 1 - 2(3\nu I + (1-2\nu)R)(3I - (1-2\nu)R)^{-1} \cdot 1,$$

где  $R \cdot 1$  функция, равная действию оператора  $R$  на единицу.

Для определения компонент  $\sigma_{ij}^1$  используется комплексное представление напряжений. Используя модифицированные результаты <sup>(2)</sup>, можно показать, что

$$\sigma_{11}^1(t, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)(S + S_1)(b_n(t)\cos n\theta - a_n(t)\sin n\theta),$$

$$\sigma_{12}^1(t, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)(S_1 - S)(a_n(t)\cos n\theta + b_n(t)\sin n\theta). \quad (3.8)$$

Здесь  $S_1 = \mu(I - R)$ ,  $S = \mu x^{-1}(I + R_1)(I - R)$  постоянная  $x = 3 - 4\nu$  и положено

$$I + R_1 = [I - 4(1 + \nu)(3 - 4\nu)^{-1}K_1]^{-1}, \quad \mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}.$$

Формулы (3.7) при  $\rho = 1$  и (3.8) определяют воздействие на трубу со стороны среды. Это воздействие сводится к касательному уси-

лю интенсивности  $\varepsilon_2$  и нормальному давлению интенсивности  $-\sigma_{11} = -\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_1$ . При этом в уравнении (2.1) усилия  $q, q_1, q_2$  равны

$$q = -\varepsilon_{11}^0, \quad q_1 = g_1 - \varepsilon_1, \quad q_2 = g_2 + \varepsilon_2, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  определяются формулами (3.7) при  $\rho = 1$  и (3.8).

4. *Условия устойчивости.* Опишем способ получения условий устойчивости. Разложим функцию  $\omega_2(t, \theta)$  в ряд Фурье

$$\omega_2(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) \cos n\theta + b_n(t) \sin n\theta). \quad (4.1)$$

Подставим это разложение в уравнение равновесия (2.1), домножим обе части либо на  $\cos n\theta$ , либо на  $\sin n\theta$  и проинтегрируем по  $\theta$  в пределах  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . В результате получим систему уравнений, определяющих коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  в (4.1).

Оценивая решения этих уравнений и используя разложение (4.1), получаем различные условия устойчивости цилиндрической формы трубы. Приведем некоторые из них. Пусть  $(I + R_1)(I - R) = (I - R_2)$ . Ядра  $r$  и  $r_2$  операторов  $R$  и  $R_2$  удовлетворяют условиям ( $l_i(t, \tau)$  — непрерывные функции)

$$\|r\| = \sup_{t \geq 0} \int_0^t |r(t, s)| ds < 1, \quad \|r_2\| < 1, \quad (4.2)$$

$$r(t, \tau) = l_0(t, \tau)(t - \tau)^{-\beta_1} + l_1(t, \tau),$$

$$r_2(t, \tau) = l_2(t, \tau)(t - \tau)^{-\beta_2} + l_3(t, \tau).$$

Введем в рассмотрение число

$$\gamma(r, r_2) = \min_n n^{-2} [Dn^2(n^2 - 1) + \mu(1 - \|r\|)(n - 1) + \mu\lambda^{-1}(1 - \|r_2\|)(n + 1)], \quad n \geq 2.$$

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия (4.2) для ядер  $r$  и  $r_2$ . Тогда труба устойчива, если  $\rho < (1 + A(t))^{-1} \gamma_1(r, r_2)$  при всех  $t \geq 0$ .

**Теорема 4.2.** Пусть существуют такие функции  $r^0(t, \tau), r_2^0(t, \tau)$ , удовлетворяющие условиям (4.2), что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \int_T^t \left| \int_T^s |r(t, s) - r^0(t, s)| ds + \int_T^s |r_2(t, s) - r_2^0(t, s)| ds \right| = 0.$$

Тогда труба устойчива, если  $\rho < (1 + A(t))^{-1} \gamma_1(r^0, r_2^0)$  при всех  $t \geq 0$ .

**Замечание.** Пусть уравнение состояния среды вместо (3.2) имеет вид

$$\sigma_{ij} = E(1 + \nu)^{-1} (I - R) [\varepsilon_{ij} + 3\nu(1 - 2\nu)^{-1} \delta_{ij} \varepsilon],$$

что соответствует случаю, когда ядра ползучести и релаксации сдвиговой и объемной деформации равны.

Тогда  $R_1 = K_1 = 0$  и условие устойчивости трубы в теореме 4.1 будет  $\rho < (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \gamma_1(r, 0)$ , а в условиях теоремы 4.2  $\rho < (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \gamma_1(r^0, 0)$ .

Отметим, что эти условия устойчивости являются необходимыми и достаточными.

Институт проблем механики АН СССР  
Московский автомеханический институт

Հայկական ՍՍՀ 'ԳԱ ակադեմիկոս' Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Դ. ԴՐՈՋԴՐՈՎ,  
Վ. Բ. ԿՈՂՄԱՆՈՎՍԿԻ

Սերացող առաձգամածուցիկ միջավայրում գտնվող գլանային խողովակի  
կայունության մասին

Դիտարկվում է ժերացող առաձգամածուցիկ միջավայրում գտնվող երկար  
առաձգական խողովակի կայունությունը: Սահմանվել են կայունության պայ-  
մանները, որոնք ձևակերպված են անմիջականորեն խողովակի որոշիչների և  
միջավայրի ռեոլոգիական հատկությունների տերմիններով:

Նման խնդիրների լուծումը հետաքրքրություն է ներկայացնում ընդ-  
գետնյա կառուցվածքների և խողովակների կայունությունն ուսումնասիրելու  
ժամանակ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> А. Н. Гузь, Основы теории устойчивости горных выработок. Наукова думка, Киев, 1977. <sup>2</sup> М. Т. Алимжанов, Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород, Наука, Алма-Ата, 1982. <sup>3</sup> В. Т. Глушко, Проявление горного давления в глубоких шахтах. Наукова думка, Киев, 1971. <sup>4</sup> М. Я. Леонов, В. В. Панисюк, Изв. АН СССР. ОТН, № 5 (1954). <sup>5</sup> Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ДАН СССР, т. 258, № 6 (1981). <sup>6</sup> Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ПММ, т. 43, вып. 4 (1979). <sup>7</sup> Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ПММ, т. 45, вып. 6 (1981). <sup>8</sup> А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский, В. Д. Потапов, ДАН АрмССР, т. 78, № 3 (1984). <sup>9</sup> А. Р. Ржаницын, Устойчивость равновесия упругих систем. Гостехиздат, М., 1955. <sup>10</sup> В. А. Пальмов, Успехи механики, т. 3, вып. 3 (1980). <sup>11</sup> Л. И. Седов, Механика сплошной среды. Т. 2, Наука, М., 1976. <sup>12</sup> Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, М., 1954.

УДК 532.132

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Д. М. Седракян, К. В. Папоян,  
 Г. А. Варданян

### О поглощении звука в квантовом кристалле

(Представлено 16/II 1983)

В квантовых кристаллах нарушается основное предположение о совпадении числа атомов и узлов кристаллической решетки из-за больших величин амплитуд нулевых колебаний по сравнению с постоянной решеткой (<sup>1</sup>). Вследствие этого квантовый кристалл (например,  $He^3$ ,  $He^4$  примеси атомов водорода в кристаллах тяжелых металлов и т. д.) может быть представлен как набор квазичастиц, движущихся в дискретном пространстве решетки (<sup>2,3</sup>). Движение квазичастиц обусловлено квантовым туннелированием атомов из одного узла в любой другой узел решетки. Образуется энергетическая зона, ширина которой  $\Delta$  пропорциональна вероятности туннелирования. Внутри этой зоны квазичастицы характеризуются квазимпульсом  $p$  и энергией  $\varepsilon(p)$ . При определенных условиях, когда в эквивалентных барьерах совпадают величины энергетических уровней, квантовое туннелирование является когерентным. Это обуславливает появление сверхтекучего движения в кристалле (<sup>4</sup>). При этом перенос массы осуществляется двумя способами: сверхтекучим потоком при неподвижных узлах решетки и нормальным движением, связанным со смещением узлов решетки. Эти два вида движения приводят к новому гидродинамическому описанию системы квазичастиц (<sup>4,5</sup>). В этой связи представляет интерес также изучение кинетических процессов (теплопроводность, поглощение звука и т. д.), с помощью которых можно выяснить те или иные специфические свойства квантового кристалла и вычислить соответствующий кинетический коэффициент.

В настоящей работе вычислен коэффициент поглощения высокочастотного продольного звука в квантовом кристалле, когда последний описывается уравнениями, приведенными в (<sup>7</sup>), в которых следует учесть также наличие газа фононов. Вопрос о том, являются ли фононы квазичастицами, с помощью которых можно было бы описать тепловые свойства сверхтекучего кристалла, обсуждался сравнительно давно (см., например, обзор (<sup>6</sup>)), и получен положительный ответ. Хотя фононный механизм поглощения звука может быть и не единственным, мы рассмотрим только его и тем самым в интеграле столкновений учтем только фононные процессы рассеяния в приближении времени релаксации. Предполагаем, что одновременно с условием  $\omega\tau \gg 1$  ( $\omega$  — частота звука,  $\tau$  — время релаксации для тепловых

фононов) имеет место также известное условие  $\hbar\omega > \Delta E$ , где  $\Delta E$  неопределенность в энергии фонона, обусловленная конечностью времени жизни, кроме того частота звука должна удовлетворять условию  $\hbar\omega < \Delta$ .

Для вывода уравнений движения среды, следуя (7), запишем закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_{ik}^s v_{sk} + \rho_{ik}^n v_{nk} + \sum_{\alpha} \int N p_i d\vec{p} \right\} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

где  $\rho_{ik}^n$ ,  $v_{nk}$  и  $\rho_{ik}^s$ ,  $v_{sk}$  — плотность и скорость нормальной и сверхтекучей частей соответственно,  $N$  — функция распределения неравновесных фононов,  $p_i$  — квазиимпульс фонона, а суммирование идет по поляризации. Тензор упругих напряжений при наличии фононов, вообще говоря, неизвестен, но при  $T=0$  он должен совпадать с обычным тензором,

$\vec{v}_n = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ , где  $\vec{u}$  вектор смещения. К уравнению (1) нужно присоединить уравнение непрерывности и кинетическое уравнение для функции распределения фононов.

Запишем плотность среды в виде (7)

$$\rho_k = \rho(1 - u_{kk}) - \rho_0 \eta', \quad (2)$$

где  $\rho_k$  — плотность квантового кристалла,  $\eta'$  — квантовая дилатация,  $u_{kk} \equiv \text{div } u$ , причем  $\rho = \rho_0(1 - \eta_0)$ , где  $\eta_0$  есть значение квантовой дилатации при  $T=0$ . Сверхтекучая скорость связана с дилатацией посредством соотношений (7)

$\eta' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $v_{sk} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ , где параметр  $\beta$  характеризует квантовое туннелирование атомов. Уравнение непрерывности тогда запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho(1 - u_{kk}) - \rho_0 \eta' \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho_{ik}^s v_{sk} + \rho_{ik}^n \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{\alpha} \int N p_i d\vec{p} \right\} = 0, \quad (3)$$

из которого в линейном приближении получим:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \rho_{ik}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{\alpha} \int N p_i d\vec{p} = -\rho_{ik}^s \frac{\partial u_{ik}}{\partial t}. \quad (4)$$

Далее, пользуясь тождеством (8)

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{N p_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{N p_i \frac{\partial H}{\partial p_k}} + N \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0,$$

в котором черточка означает интегрирование по импульсам, а гамильтониан фонона

$$H = \varepsilon(p) + \vec{p} \left( \vec{v}_s - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

Уравнение (1) приведем к виду

$$\rho_{ik}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \beta \rho_{ik}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sigma_{ik} - \sum_{\alpha} \int N p_i \frac{\partial H}{\partial p_k} d\vec{p} - \sum_{\alpha} \int N \frac{\partial H}{\partial x_i} d\vec{p} \right\} = 0. \quad (6)$$

В принятом нами приближении последний член можно не учитывать.  
Кинетическое уравнение для фононов

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \{HN\} = J(N)$$

с помощью гамильтониана (5) в приближении времени релаксации запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{f}{\tau} = \left( \frac{\partial N_0}{\partial p_i} \nabla_i \right) \left[ \beta (p_k \nabla_k \varphi) - \left( p_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \right], \quad (7)$$

где  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) = N(\vec{r}, \vec{p}, t) - N_0(p)$  есть неравновесная добавка к функции распределения.

Уравнения (4), (6), (7) составляют замкнутую систему, описывающую распространение упругих возмущений в сверхтекучем кристалле. Тензор  $\sigma_{ik}$  здесь определяется аналогично (8,9) и для случая продольного звука имеет вид

$$\sigma_{ik} = (\lambda + 2\mu) u_{ee} \delta_{ik} + \beta \rho^s \eta' \delta_{ik} + \sum_{\vec{n}} \int f \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_a} (\vec{n} \times (\vec{p} \times \vec{n})) d\vec{p}$$

( $\vec{n}$  — единичный вектор направления распространения волны).

В случае изотропной среды, в которой распространяется продольный звук со скоростью  $C_e$ , полученная система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \frac{\rho^s}{\rho^n} \beta \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c_e^2 \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho^n} \sum_{\vec{a}} \int \left( \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \vec{p}} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right) (\vec{n} \cdot \vec{p}) \vec{n} d\vec{p} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \beta \frac{\rho^s}{\rho_0} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{\rho_0} \sum_{\vec{a}} \int \left( p_a \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right) d\vec{p} = - \frac{\rho^s}{\rho_0} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{f}{\tau} = \left[ \beta (\vec{p} \cdot \nabla \varphi) \left( \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \vec{p}} \nabla \right) - \left( \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \vec{p}} \nabla \right) \left( \vec{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_a}.$$

Совместное решение этих уравнений в случае, когда входящие в них величины изменяются пропорционально  $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , приводит к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} & \left( -\omega^2 + k^2 c_e^2 - \frac{i\omega}{\rho^n} A \right) \left( -\omega^2 + \beta \frac{\rho^s}{\rho_0} k^2 + i \frac{\beta}{\rho_0} \frac{k}{c_e} A \right) - \\ & - \left( \frac{\rho^s}{\rho^n} \beta \omega k - \frac{ik\beta}{\rho^n} A \right) \left( \frac{\rho^s}{\rho_0} \omega k + \frac{i\omega}{\rho_0 c_e} A \right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$A \approx -2\pi k^2 c_e^2 \sum_{\vec{a}} \int_0^{\infty} \frac{p^4 dp}{(2\pi \hbar)^3} \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_a} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{-i(\omega - kv_a x) + 1/\tau}.$$

Если учесть только вклад продольных фононов, то из (8) в предельном случае  $\omega \tau \gg 1$  для коэффициента поглощения и величины

перенормировки скорости продольного звука получаем (при  $\varepsilon(\rho) = c_e \rho(1 - \gamma \rho^2)$ ):

$$\alpha = \frac{\pi^4 \omega}{60 \rho^n c_e^2 h^3} \frac{c_s^2 + c_e^2}{c_e^2 - c_s^2 \left(1 - 2 \frac{\rho_s}{\rho_n}\right)} \left(\frac{kT}{c_e}\right)^4; \quad (9)$$

$$\delta c_e = \frac{\pi^2}{30 h^3} \frac{c_s^2 + c_e^2}{\rho_n c_e^2 - \rho_0 c_s^2} \left(\frac{kT}{c_e}\right)^4 \ln \frac{2}{27 \gamma} \left(\frac{c_e}{kT}\right)^2, \quad (10)$$

где  $c_s' = \beta \frac{\rho_s}{\rho_0}$ .

Таким образом, в сверхтекучем кристалле коэффициент поглощения продольного звука зависит как от сверхтекучей и нормальной плотностей, так и от параметра квантовой дилатации. Как видно из формулы (9), поглощение звука при увеличении плотности растет и в точке  $\rho_s = \rho_n$  примерно в два раза больше, чем в обычном кристалле при той же температуре (9).

Происходит также увеличение величины  $\delta c_e$ , связанное с учетом квантовой дилатации.

Экспериментальное измерение величин  $\alpha$  и  $\delta c_e$  дает возможность определить характер квантовой дилатации и плотность  $\rho^s$  при различных температурах.

Ереванский государственный университет  
Кировоаканский педагогический институт

Հայկական ՍՍՀ ԳՍ քղրակից-անդամ Գ. Մ. ՍԵՒՐԱԿՅԱՆ, Կ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Գ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

### Քվանտային բյուրեղում ձայնի կլանման մասին

Բավական ցածր ջերմաստիճաններում քվանտային բյուրեղում գոյութուն ունի երկու արագություն՝ գերհոսելին պայմանավորված է նրանով, որ մասնիկների թիվը հավասար չէ հանգույցների թվին և նորմալ արագությունը պայմանավորված է ցանցի հանգույցների շեղումով: Համապատասխանաբար բյուրեղի խտությունը նույնպես բաղկացած է գերհոսելի և նորմալ մասերից:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրված է երկայնական ձայնի կլանման երևույթը ալյուպիտի միջավայրում: Ցույց է տրված, որ կլանման գործակիցը գերհոսելի խտության մեծացման հետ աճում է: Այդ փաստը կարելի է կիրառել փորձնական ճանապարհով քվանտային բյուրեղը բնորոշող պարամետրերը չափելու համար:

Ստացված է նաև բանաձև ձայնի արագության, փոփոխության համար:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> А. Ф. Андреев, Н. М. Лифшиц, ЖЭТФ, т. 56, 2157 (1969). <sup>2</sup> Dawid N. Lowy, Chia Wei Woo, Proc. of the 14-th Intern. Conf. of LTP, Finland, 1975. <sup>3</sup> Ф. Л. Брук, К. И. Кугель, Астрофизика, т. 12, вып. 2 (1976). <sup>4</sup> А. Ф. Андреев, Е. П. Башкин, ЖЭТФ, т. 69, вып. 1 (6) (1975). <sup>5</sup> Г. А. Варданян, Д. М. Седракян, ЖЭТФ, т. 81, вып. 5 (11) (1981). <sup>6</sup> Квантовые кристаллы, под ред. В. С. Вонсовского, Мир, М., 1974. <sup>7</sup> А. М. Косевич, Физическая механика реальных кристаллов, Научно-думка, Киев, 1981. <sup>8</sup> И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, Наука, М., 1972. <sup>9</sup> Д. М. Седракян, К. В. Папоян, Изв. АН АрмССР. Физика, т. 12, вып. 5 (1977).

УДК 621.472 : 621.383.5

## ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

О. К. Давтян, Г. Г. Карамян, Р. Г. Арутюнян

## О принципах работы фототопливных элементов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Носифьяном 21/VII 1983)

Идея создания фототопливных элементов (ФТЭ) впервые была предложена одним из авторов, О. К. Давтяном (1). Как следует из названия, эти элементы относятся к электрохимическим преобразователям фотоэнергии в электрическую. Существует и другой вид преобразователей энергии света—так называемые «фотоэлектролизеры» (2).

Последние, хотя и имеют некоторое сходство с ФТЭ, связанное с действием фотоэлектрода в электролите, однако в основном существенно отличаются от них. Кроме того «фотоэлектролизеры» характеризуются низким коэффициентом полезного действия.

Фототопливные элементы представляют собой определенное сочетание фотоэлектрода, который является полупроводником *n*- или *p*-типа, с такими газовыми электродами, как водородный, кислородный, воздушный и газогалоидные. Фотоэлектрод и газовый электрод, погруженные в электролит, образуют гальваническую пару. Одновременно с процессом фотолиза на фотоэлектроде при его освещении лучами солнца или других источников с соответствующей энергией и прохождения тока через внешнюю цепь происходит перенос газообразных продуктов фотолиза от фотоэлектрода к газовому электроду (через газовый канал ФТЭ), а также перенос ионов сквозь электролит в виде электрохимической миграции. При этом в системе происходит полная регенерация исходного вещества фотолиза в результате окислительно-восстановительных процессов с генерацией электрического тока во внешней цепи.

1. В зависимости от типов электродных пар могут быть созданы различные варианты фототопливных элементов. Каждый вид ФТЭ характеризуется возможностью сочетания того или иного фотоэлектрода (с данным фотокатализатором) с соответствующим газовым электродом. Эта возможность определяется величиной и, самое главное, знаком фотогальванического потенциала освещаемого фотоэлектрода относительно электролита.

Определение зависимости величины и знака фотопотенциала от типа проводимости фотокатализатора и от концентрации свободных носителей *n*- или *p*-типов, генерируемых в полупроводнике при освещении, можно произвести на основании теории распределения потенциала на границе раздела электролит—полупроводник (3,4).

Исходными уравнениями являются уравнение Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho(x) \quad (1)$$

и бoльцмановское уравнение распределения концентрации свободных зарядов (электронов и дырок) по величинам электрического потенциала

$$f(\varphi) = \exp[\pm e_0(\varphi - \varphi_B)/kT]. \quad (2)$$

В этих уравнениях величина

$$\rho(x) = e_0[-n(x) + p(x) + N_D - N_A] \quad (3)$$

представляет собой плотность заряда в точке  $x$  у поверхности внутри электрода в диффузионной области носителей;  $n(x)$ ,  $p(x)$ ,  $N_D$  и  $N_A$  — концентрации электронов, дырок, донорных и акцепторных уровней соответственно;  $\varphi$  является электрическим потенциалом в той же точке на оси  $x$ , перпендикулярной границе раздела, а  $\varphi_B$  — потенциал в глубине недиффузной области полупроводника. При этом полупроводник и электролит находятся в областях  $x > 0$  и  $x < d_0$  соответственно, где  $d_0$  — толщина слоя Гельмгольца;  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды и  $e_0$  — элементарный заряд.

Согласно соотношениям (2) и (3) уравнение Пуассона (1) можно привести к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \left[ p^0 e^{-\frac{e_0(\varphi - \varphi_B)}{kT}} - n^0 \cdot e^{\frac{e_0(\varphi - \varphi_B)}{kT}} + N_D - N_A \right]. \quad (4)$$

Здесь  $p^0$  и  $n^0$  концентрации дырок и электронов в глубине полупроводника вне области пространственного заряда.

Интегрируя уравнения (4) при граничных условиях  $\varphi = \varphi_B$  и  $d\varphi/dx = 0$  и производя ряд преобразований, получим следующее уравнение:

$$\frac{d\Phi}{di_p} = -\frac{e^\Phi + e^{-\Phi} - 2}{i_p^0 \left\{ -\lambda^{-2} \left[ \left( 1 - \lambda^2 \frac{i_p}{i_p^0} \right) e^\Phi - 1 \right] + \left( 1 - \frac{i_p}{i_p^0} \right) e^{-\Phi} - 1 \right\}}. \quad (5)$$

Здесь  $\Phi = e_0(\varphi_s - \varphi_B)/kT$ ;  $i_p = -e_0 D_p \frac{\Delta p}{L_p}$ ;  $i_p^0 = e_0 D_p \frac{p^0}{L_p}$ ;  $\lambda = (p^0/n^0)^{\frac{1}{2}}$ ;

$D_p$  — коэффициент диффузии дырок  $p$  в квазинейтральной области;  $L_p$  — толщина области, в которой концентрация дырок отличается от равновесного значения  $p^0$ ,  $\Delta p = p - p^0$  и  $\varphi_s$  — потенциал на поверхности полупроводника.

Из этого уравнения вытекают интересные следствия. При катодной поляризации, когда  $\Phi \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{d\Phi}{di_p} \rightarrow -\frac{1}{i_p^0}$ , а при анодной поля-

ризации, когда  $\Phi \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{d\Phi}{di_p} \rightarrow \frac{\lambda^2}{i_p^0}$ .

Эти свойства уравнения (5) являются весьма важной характеристикой полупроводниковых фотокатализаторов. Действительно, согласно нашим исследованиям многие полупроводники  $n$ -типа в растворах электролитов имеют отрицательный потенциал, близкий к потенциалу

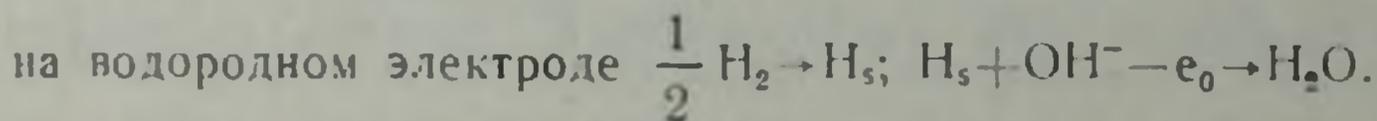
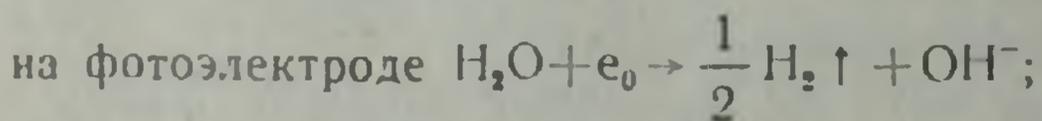
кислородного электрода, а полупроводники *p*-типа в тех же условиях обладают положительным потенциалом, близким к потенциалу водородного электрода. Эти свойства в основном относятся к полупроводникам ионного типа. Приобретение же полупроводниковым электродом положительного или отрицательного потенциала эквивалентно анодной или катодной поляризации. Таким образом, на основании настоящего теоретического исследования и экспериментальных данных можно сделать важное заключение. При облучении фотонами соответствующей длины волны потенциал фотоэлектрода с катализатором *n*-типа должен расти в отрицательной области, а потенциал фотоэлектрода с катализатором *p*-типа — в положительной области.

Этот вывод привел к разработке фототопливных элементов.

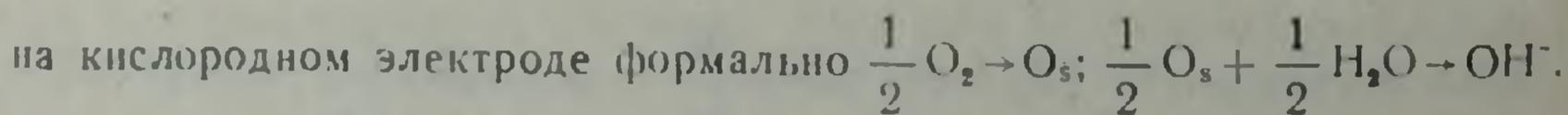
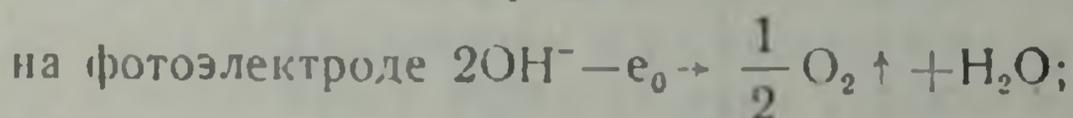
2. Фототопливный элемент с водородным электродом выполняется в виде гальванической пары этого электрода с фотоэлектродом, имеющим положительный (относительно водородного) потенциал; при этом фотокатализаторами должны быть полупроводники *p*-типа, в том числе подходящие окислы переходных металлов с избытком кислорода или недостатком металла. А для ФТЭ с кислородным и газогазоидным электродами соответствующий фотоэлектрод должен иметь катализатор *n*-типа, при этом газовый электрод в данном растворе электролита обладает положительным потенциалом относительно фотоэлектрода при освещении последнего.

Электрохимические процессы, совершающиеся на границе электрод—электролит в ФТЭ, можно представить в следующем виде:

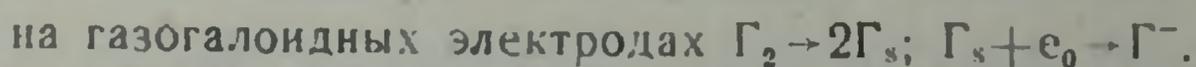
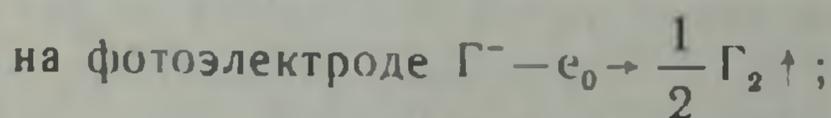
I. В фотоводородном ФТЭ:



II. В фотокислородном ФТЭ:



III. В фотогазогазоидных ФТЭ:



В этих реакциях индекс „s“ означает хемосорбированное состояние газа.

Газовые электроды ФТЭ изготавливаются на основе принципа гидрофобности или перепада давлений между электродом и электролитом, а также известных конструкций и технологии мембранных электродов.

В процессе освещения фотоэлектрода солнечными лучами (или лучами из других источников) возрастает отрицательный или положительный электрический потенциал фотоэлектрода относительно электролита и газового электрода и вследствие этого происходит фотолит

электролита при снятии электрического тока через внешнюю нагрузку. При этом выделившийся на фотоэлектроре газ переносится к газовому электроду через специальный газовый канал; одновременно из фотоэлектрода переносятся положительные или отрицательные ионы посредством электрохимической миграции через электролит. В процессе генерации электроэнергии молекулы хемосорбированного газа на поверхности газового электрода, захватывая электроны от электродной массы или отдавая их ей, переходят в раствор и в конечном итоге образуют исходное вещество фотолиза. В результате процесса фотолиза на фотоэлектроре и электрохимического окисления или восстановления продуктов фотолиза на газовом электроде между этими электродами устанавливается разность потенциалов с протеканием стационарного электрического тока.

Согласно предварительным данным испытаний ФТЭ при облучении немонахроматическим светом их к. п. д. превышает 5%, а удельная мощность сильно зависит от активности фотоэлектрода и катализаторов газовых электродов, от энергии и интенсивности падающего излучения, а также от температуры.

Армянское отделение  
Всесоюзного научно-исследовательского  
института источников тока

Հ. Կ. ԴԱՎԹՅԱՆ, Գ. Գ. ՔԱՐԱՄՅԱՆ, Ռ. Հ. ՀԱՐՈՒՅՈՒՆՅԱՆ

### Ֆոտովառելիքային էլեմենտների աշխատանքի սկզբունքները

Մեր կողմից կատարված տեսական և էքսպերիմենտալ հետազոտությունների հիման վրա հաստատված է, որ համապատասխան էներգիա ունեցող ֆոտոնառազայթման ազդեցությունը էլեկտրոլիտի մեջ խորասուզված n-կամ p-տիպի կատալիզատորներով ֆոտոէլեկտրոդի վրա բերում է էլեկտրոդային պոտենցիալի աճման էլեկտրոլիտի նկատմամբ համապատասխանորեն բացասական և դրական տիրույթներում: Այդ եզրակացությունը թույլ է տալիս ստեղծել նոր տիպի ֆոտովառելիքային էլեմենտներ, որոնք իրենցից ներկայացնում են ֆոտոէլեկտրոդի n-կամ p-տիպի կատալիզատորով և համապատասխան զազային էլեկտրոդի դալվանական զուգակցում:

### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> О. К. Давтян, Авторское свидетельство, заявка № 3361591/24—07(166721) с присоединением заявки № 3439151, 1981 г. <sup>2</sup> А. Fujishima, К. Honda, Bull. Chem. Soc. Japan, v. 44, 1148 (1970). <sup>3</sup> С. G. B. Garret, W. H. Bratton, Phys. Rev., v. 99, 376 (1955). <sup>4</sup> E. O. Johnson, Phys. Rev., v. 111, 153 (1958).

УДК 553.43(479.25)

ПОЛЕЗНЫЕ ИСКОПАЕМЫЕ

А. К. Сагателян

**Новый тип прожилково-вкрапленного медно-молибденового оруденения в Севано-Амасийской структурно-металлогенической зоне**

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Габриеляном 4/VII 1983)

Новый для Севано-Амасийской зоны тип прожилково-вкрапленного медно-молибденового оруденения установлен в результате проведенных Управлением геологии АрмССР на Анкадзорском рудном поле геологопоисковых работ. Рудное поле расположено в пределах Базумского структурного блока, являющегося одной из составных частей указанной зоны. (1).

В геологическом строении рудного поля принимают участие образования Сисимаданской вулканогенной толщи среднеэоценового возраста, представленные андезитами, дацитами, риолитами и их пирокластами со штоками и дайками диабазов и ксенолитами известняков.

Интрузивные комагматы Сисимаданской вулканогенной толщи представлены гранитоидами Сисиберд-Геджалинского интрузива, в строении которого принимают участие гранодиориты, монцодиориты, кварцевые диориты, кварцевые монцониты.

В целом среднеэоценовые магматические породы Анкадзорского рудного поля представляют собой последовательно дифференцированный ряд пород известково-щелочной серии, слагающих вулканоплутонический комплекс, характерными особенностями которого являются: а) принадлежность большинства пород к нормальному петрохимическому типу при превалирующей роли натрия по сравнению с калием; б) совпадение основных петрохимических характеристик на диаграмме естественных ассоциаций А. Н. Заварицкого с зонами известково-щелочных ассоциаций типа Мартиники-Иллоустонского парка; в) наличие в поздних фазах интрузива пород с превалирующим значением калия по сравнению с натрием либо их равными отношениями.

В структурном отношении Анкадзорское рудное поле представляет собой заключенный между региональными разломами клинообразный тектонический блок, разбитый поперечными и диагональными нарушениями на ряд микроблоков, в пределах которых локализируются отдельные месторождения и рудопроявления. Рудоконтролирующими структурами являются ограничивающие рудное поле с северо-востока и юго-запада Анкадзорский и Сисибердский разломы, рудолокализуемыми—широко развитые в пределах рудного поля разрывные нарушения высоких порядков в основном северо-западной ориентировки (2).

Рудовмещающей является Сисимаданская вулканогенная толща. Как показали исследования, слагающие ее породы характеризуются отсутствием геохимической специализации на медь и другие халькофильные элементы.

Основным морфологическим типом рудных тел являются штокверки прожилково-вкрапленных руд, в составе которых на отдельных участках устанавливаются также жильные, массивные и гнездовые руды. Оконтуриваются штокверковые тела в зонах прожилково-вкрапленных руд исключительно по результатам опробования и в зависимости от выбранных кондиций могут существенно изменяться в размерах. Оруденение в штокверках относится к неравномерному и весьма неравномерному. Форма штокверков в зависимости от факторов локализации оруденения вытянутая или трубчатая, что обусловлено характером проявления рудолокализирующих разрывных нарушений; специфика внутреннего строения штокверков определяется физико-механическими свойствами вмещающих пород.

На всех месторождениях и рудопроявлениях околорудные серицитовые метасоматиты и медная минерализация наложены на фации роговиков, скарнов, вторичных кварцитов и пропиллитов, что в отличие от существующих подразделений месторождений Анкадзорского рудного поля на скарновые и колчеданные (<sup>3-5</sup>) позволяет говорить о едином генетическом типе медного оруденения, сформированного в ходе постинтрузивной гидротермальной деятельности. Отличительной чертой оруденения наряду с представляющими практический интерес содержаниями меди являются повышенные содержания в рудах молибдена—до сотых долей процента, установленные практически на всех месторождениях и проявлениях рудного поля.

Типизация по минеральному составу, морфологии и текстурно-структурным особенностям позволяет в пределах рудного поля выделить следующие типы руд: 1) скарновые—гранат-магнетит-гематитовые; 2) серноколчеданные—пиритовые; 3) медно-молибденовые—пирит-халькопирит-молибденитовые; 4) полиметаллические—сфалерит-галенит-баритовые.

Промышленный интерес представляет парагенезис пирит-халькопирит-молибденитового состава, в отдельных случаях представленный биминеральной пирит-халькопиритовой ассоциацией.

Основным минеральным парагенезисам соподчинены второстепенные парагенезисы. В частности, с пирит-халькопирит-молибденитовым парагенезисом наблюдается второстепенный парагенезис линнента, висмутита и виттихенита.

Оруденение Анкадзорского рудного поля сопровождается широким спектром ореолообразующих геохимических элементов-индикаторов, соответствующим вещественному составу рудных тел. Первичные ореолы развиты согласно с рудолокализирующими нарушениями, конформны с рудными телами и отчетливо трассируют рудоносные зоны по падению и простиранию. Ореолы характеризуются отчетливо проявленной вертикальной зональностью, отражающей зональность рудных тел и представленной следующим рядом от надрудных элементов

к подрудным: барий, серебро, свинец, цинк, медь, молибден, кобальт, висмут, вольфрам, олово.

Оруденение Анкадзорского рудного поля эпигенетично относительно Сисиберд-Геджаллинской интрузии и рудовмещающих вулканитов. Время формирования оруденения относится к верхам среднего эоцена, что соответствует позднегеосинклинальному этапу развития Севано-Амасийской структурно-металлогенической зоны.

Особенностью оруденения Анкадзорского рудного поля являются присущие ему черты, характерные как для медно-порфировых месторождений—повышенные содержания в рудах молибдена и наличие в них молибденита, штокверковый характер оруденения, слабое развитие в рудах пирротина, ассоциация с породами кали-натрового состава, формирование после внедрения полнокристаллических гранитоидов, так и колчеданных—приуроченность к вулканогенной эвгеосинклинали, широкое участие в составе вулканоплутонического комплекса пород существенно натрового состава, большое количество в рудах сфалерита, отсутствие в пределах рудного поля порфировых интрузивов, отсутствие ортоклазитов, калиевых пропиллитов, преобладание филлизитов, широкое распространение предрудных вторичных кварцитов.

Отмеченные особенности позволяют рассматривать оруденение Анкадзорского рудного поля как промежуточное звено между колчеданными и меднопорфировыми месторождениями.

Установление нового для Севано-Амасийской структурно-металлогенической зоны типа медно-молибденового оруденения может в отличие от сложившихся представлений (6) явиться основой для пересмотра металлогенического потенциала указанной зоны.

Центральная геохимическая экспедиция

#### Ա. Կ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

Պղինձ-մոլիբդենային Երակիկ-հատիկային հանքայնացման նոր տիպը  
Սևան—Ամասիայի կառուցվածքամետաղածնային մարզում

Պղինձ-մոլիբդենային Երակիկ-հատիկային հանքայնացումը հայտնաբերված է Բաղումի կառուցվածքային դանդաղացում, Հանքածորի հանքային դաշտում և հանդիսանում է նոր հանքայնացման տիպ Սևան—Ամասիայի կառուցվածքամետաղածնային դոտու համար:

Հանքածորի հանքային դաշտի կառուցվածքը ներկայացված է սահմանափակված ռեգիոնալ բեկվածքների միջև սեպածն տեկտոնիկ բլոկով, որը մասնահատված է ավելի մանր բլոկների, որոնց մեջ տեղադրված են առանձին հանքավայրեր և երևակումներ:

Հանքատար հանդիսանում է Սիսիմադանի հրաբխածին շերտախումբը, որի բազալգրյալ ապառները, բնորոշվում են երկրաբանական մասնագիտացման բացակայությամբ պղնձի և ուրիշ խալկոֆիլ էլեմենտների նկատմամբ:

Հանքային մարմինների հիմնական մորֆոլոգիական տիպ հանդիսանում

են Երասխիկ-հատիկային շտուկներները, որոնց կազմում Երևան են դալիս նաև Երակային, զանգվածային և բնածե հանքանյութերը:

Հանքայնացման բնորոշ հատկանիշն է պղնձի պրակտիկ հետաքրքրություն ունեցող պարունակությունների հետ համատեղ, մոլիբդենի զգալի պարունակությունները՝ մինչև տոկոսի հարյուրերորդական մասերը:

Հանքանյութի հիմնական միներալային խմբավորումը ներկայացված է պիրիտ—խալկոպիրիտ—մոլիբդենի պարագենէզիսով:

Հանքաձորի պղինձ—մոլիբդենային հանքայնացումը ըստ իրեն բնորոշ հատկանիշների ներկայացնում է իրենից անցողիկ տիպ կոլչեդենային հանքավայրերից դեպի պղինձ—պորֆիրային հանքավայրերը:

Նոր պղինձ—մոլիբդենային հանքայնացման հայտնաբերումը Սևան—Ամասիայի մարզում կարող է հիմք ծառայել նշված մարզի մետաղածին պոտենցիալը վերանայելու:

#### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> Օ. Ա. Саркисян, И. К. Волчанская, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 26, № 4 (1973). <sup>2</sup> А. К. Сагателян, Тез. докл. Всесоюзной конф. молодых ученых, посвященной пятидесятилетию Кавказского ин-та минерального сырья, Тбилиси, 1979. <sup>3</sup> И. Г. Магакьян, Алавердский тип оруденения и его руды, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1947. <sup>4</sup> Б. С. Вардапетян, Закономерности распределения медного оруденения на территории Армянской ССР, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1965. <sup>5</sup> Э. М. Мадатян, Геология и металлогения Севано-Амасийской зоны, Айастан, Ереван, 1973. <sup>6</sup> И. Г. Магакьян, в кн.: Закономерности размещения полезных ископаемых. Т. 3, Изд-во АН СССР, М., 1960.

УДК 552.32 : 550.83

ТЕКТОНИКА

С. Н. Назаретян, С. Р. Асланян

## Нахичеван-Кафанский трансзональный разлом

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Габриеляном 24/V 1983)

После зангезурских землетрясений 1968 г. на юге территории Армянской ССР были проведены геофизические и геологические исследования с целью определения тектонического положения очаговых зон. Получены новые данные о существовании и активности субширотного разлома вдоль реки Охчи. Именно с тектонической активностью этого разлома ряд специалистов связывал сильные землетрясения 9 июня и 1 сентября 1968 г. О наличии указанного разлома в пределах территории Армянской ССР свидетельствуют геологические (<sup>1-4</sup>), магнитометрические (<sup>5-7</sup>), сейсмологические (<sup>8-11</sup>) и другие данные. Некоторые авторы на основе магнитометрических и тектонических данных прослеживали данный разлом на территории Нахичеванской АССР по направлению к г. Джульфе (<sup>5,2</sup>). Однако существуют разногласия о расположении и категории разлома.

В данной работе на основе имеющихся геофизических материалов авторы уточняют положение регионального разлома вдоль реки Охчи, прослеживают его на запад по направлению г. Нахичеван—г. Маку (Иран), определяют элементы залегания и дают краткую геолого-геофизическую характеристику разлома.

Разлом по направлению г. Маку—г. Нахичеван—р. Охчи—г. Кафан, или кратко Нахичеван-Кафанский разлом, четко выделяется по аэромагнитным данным как граница резкой смены знака, интенсивности, морфологии и простирания магнитных аномалий (рис. 1). Севернее разлома аномальное магнитное поле имеет в основном интенсивное положительное, а южнее—интенсивное отрицательное значение. Если простирание осей магнитных аномалий на северном «магнитном блоке» преимущественно общекавказское, то на южном блоке—субширотное.

С высотой аэромагнитной съемки меняется характер аномального магнитного поля по обе стороны разлома. Если только по рис. 1, а трудно точно определить местоположение и ориентацию разлома, так как переходная зона от северного «магнитного блока» к южному имеет довольно большую ширину и относительно сильно влияние локальных положительных магнитных аномалий, то на рис. 1, б и в решение этого вопроса облегчено благодаря появлению высокоградиентной зоны  $\Delta T_a$  в субширотном направлении. Такая картина изменения магнитного поля с высотой съемки говорит о глубинном характере границы раздела «магнитных блоков».

К сожалению, вышеуказанные съемки проведены только на территории Армянской ССР, и мы не имели возможности проследить Нахичеван-Кафанский разлом по магнитным данным на территории Азербайджанской ССР.

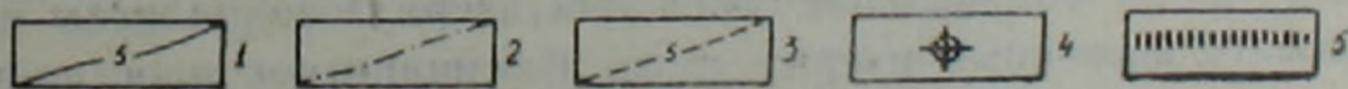
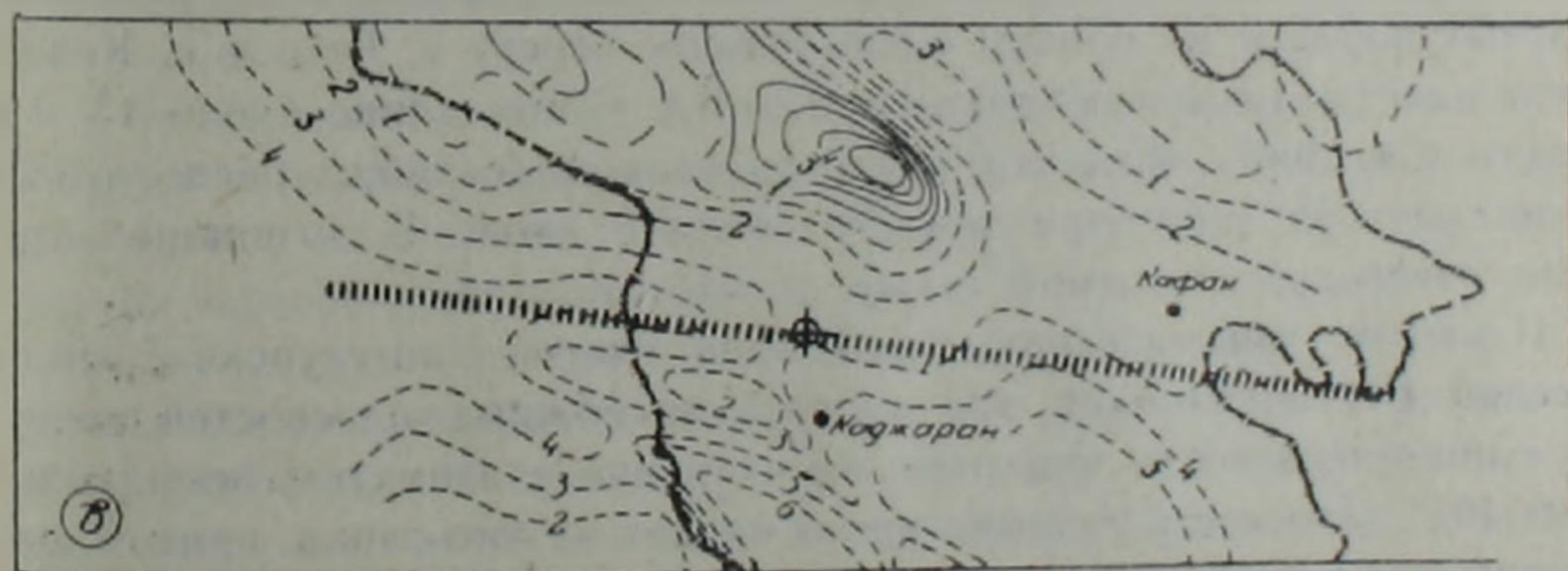
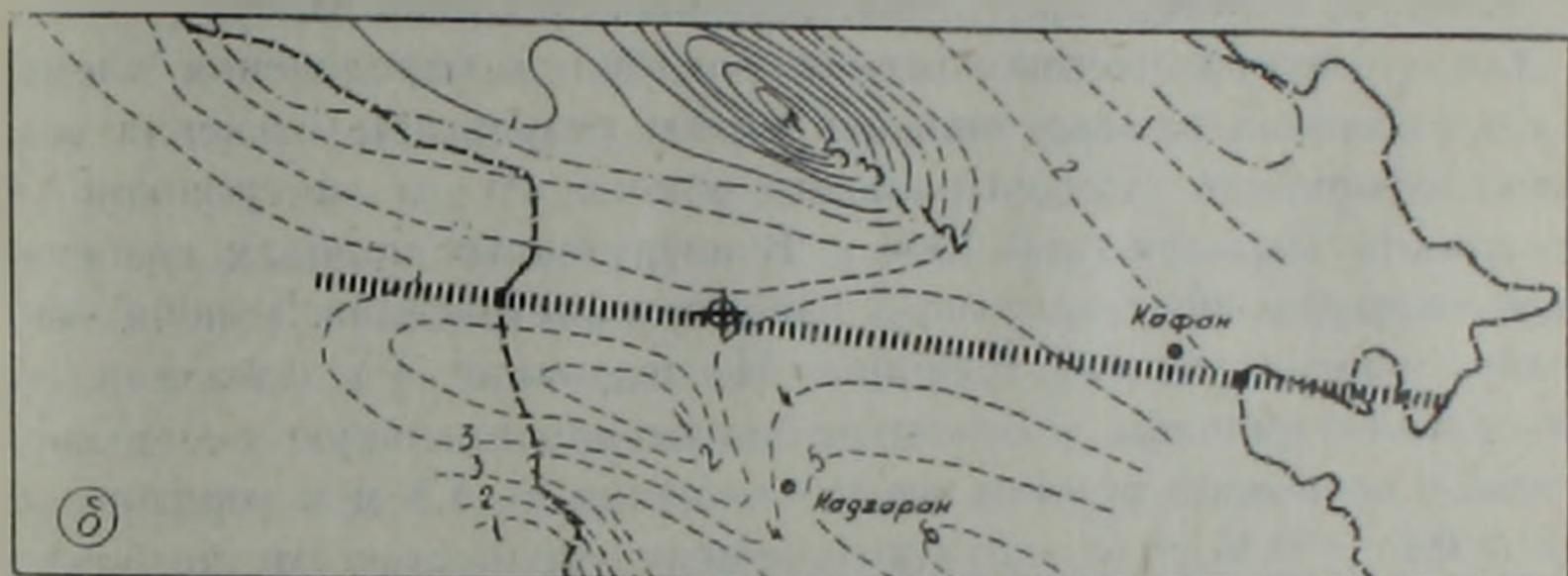
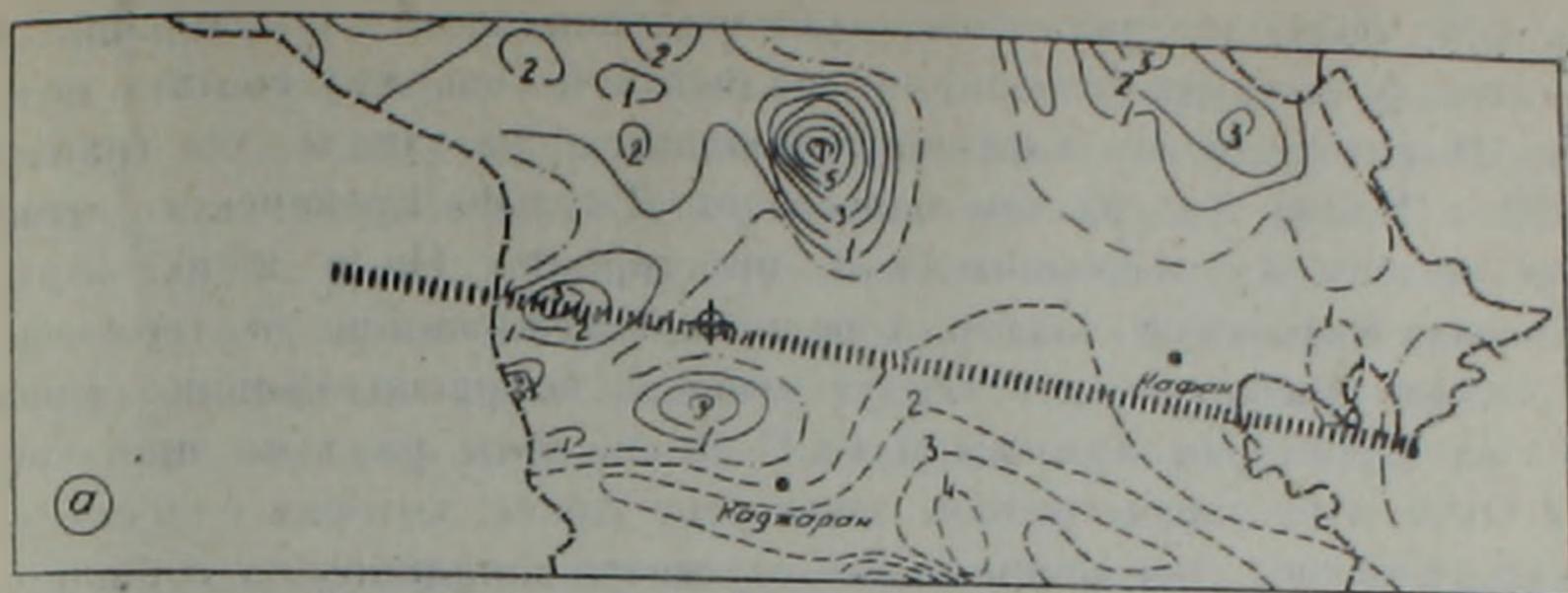


Рис. 1. Проявление Нахичеван-Кафанского разлома в аномальном магнитном поле при а—высоте съемки 1000—1200 м с обтеканием рельефа; б—абсолютной высоте съемки 4200 м; в—абсолютной высоте съемки 1000 м. Изодинами в миллиэрстедах (по Г. А. Сироткину и С. А. Самойлюку): 1—положительные; 2—нулевые; 3—отрицательные; 4—эпицентр Зангезурского землетрясения 1968 г.; 5—фрагмент Нахичеван-Кафанского трансзонального разлома по комплексу геолого-геофизических данных

Разлом устанавливается также по гравиметрическим данным, но он проявляется на разных участках по-разному. Это говорит о дифференцированности разлома по простиранию, т. е. он имеет кусочно-непрерывный характер. На территории Нахичеванской АССР Нахичеван-Кафанский субширотный разлом проявляется в виде градиентной зоны локального характера с горизонтальным градиентом 1,5 мгл/км. По обе стороны градиентной зоны меняется простирание осей локаль-

ных аномалий силы тяжести, что также считается признаком существования разлома. На территории Армянской ССР разлом выделяется только по расположению локальных гравиметрических аномалий, так как поле имеет сложное строение. Здесь разлом пересекает региональную зону больших градиентов субмеридионального простирания, и на таком фоне трудно говорить о градиентной зоне, ему соответствующей. Почти такая же картина наблюдается на западе, на границе СССР и Ирана, где разлом пересекает Джульфа-Ереванскую региональную зону  $\Delta g$  общекавказского простирания. Но в обоих местах Нахичеван-Кафанский разлом хорошо прослеживается по геоморфологическим признакам, и в первую очередь по расположению речной сети: на территории Армянской ССР вдоль зоны разлома протекает река Охчи, а на западе разлом сечет реку Аракс, которая с места пересечения меняет свое направление от северо-западного на субширотное. Далее до г. Маку вдоль зоны разлома течет река Маку.

Для уточнения местоположения разлома и определения элементов его залегания важное значение имеют результаты изучения остаточных деформаций эпицентрального района (1) и афтершоков (10) зангезурских землетрясений 1968 г. В интрузивных породах трапещевидного контура эпицентрального района землетрясения 9 июня образовались многочисленные трещины. Исследования (1) показали, что образованные трещины в основном имеют вертикальную поверхность разрыва с величиной вертикального смещения до 1,8 м и горизонтального от 0,1 до 0,35 см. Сдвиговые смещения полностью отсутствовали. Была зафиксирована одна крупная зияющая трещина в интрузивных скальных породах на правом возвышенном берегу г. Гехи у с. Кейпашен с максимальным раскрытием 0,3—0,4 м при длине около 15 м и азимуте СЗ—300°. Эпицентр землетрясения 1 сентября располагался внутри контура эпицентра землетрясения 9 июня. В возникших трещинах сдвиговых смещений также не наблюдалось.

Изучение динамических параметров очагов зангезурских землетрясений (11) показывает, что из двух возможных плоскостей подвижек одна имеет почти широтное простирание с азимутом вектора падения 197°. Плоскость разрыва круто падает на юго-запад, притом южное крыло имеет направление движения вверх. Специалисты считают, что наиболее вероятный разрыв имеет близширотное простирание. Об этом свидетельствует также изучение миграции афтершоков. По 150 точно определенным гипоцентрам афтершоков глубина фокальной (разрывной) области нарушений имеет субвертикальное расположение и глубину до 6—7 км. Эпицентральная зона протяженностью 9 км и шириной до 3 км была вытянута в близширотном направлении.

Таким образом, наличие остаточных деформаций на поверхности земли служит хорошим репером для установления местоположения широтного разлома. По вышеприведенным данным можно предположить также, что плоскость разлома имеет субвертикальное расположение при ширине зоны раздробления 3 км. Если учитывать, что глубина гипоцентра основного толчка оценивается в 10—15 км, а разлом имеет большое протяжение и характеризуется геофизическими признаками регионального характера, можно говорить о глубинном разломе.

Об этом свидетельствуют также геологические данные, на основе которых разлом отнесен к категории трансзональных глубинных разломов (4).

Разлом фрагментарно выделяется также по геологическим данным. Так на участке с. Гехи—с. Ханага он датируется тектонически (4), а вдоль реки Охчи—по магматическим, тектоническим признакам и по интенсивным гидротермальным изменениям пород (3). В пределах Армянской ССР описанный разлом является границей блоков и расчленяет крупный блок субмеридионального направления на более мелкие. Разлом относится к типу взбросо-сдвигов. В районе крепости Давидбек установлено горизонтальное перемещение по разлому более чем на 300 м, причем северный блок относительно южного намного приподнят (3).

В апреле 1968 г. на западном продолжении Нахичеван-Кафанского разлома в районе г. Маку произошло сильное землетрясение с интенсивностью 7 баллов. После этого, как уже было отмечено, произошли зангезурские землетрясения на восточном фрагменте разлома, а в течение того же года наблюдались 4 землетрясения с энергетическим классом 9 и 10 между этими очаговыми зонами. Необходимо отметить, что до этих событий в течение минимум 5 лет в пределах зоны разлома не было заметных сейсмических сотрясений (или была очень низкая активность). Основываясь на миграции эпицентров землетрясений в относительно короткий промежуток времени, мы склонны думать, что эти землетрясения связаны с активностью Нахичеван-Кафанского разлома, а основное вспарывание разрыва проходило с запада на восток.

Остановимся еще на одной важной особенности проявления сейсмичности вдоль указанного разлома. Изучение токийского землетрясения 1923 г. и землетрясения в Сан-Франциско 1906 г. показывает, что их афтершоковая активность продолжается очень долго, по некоторым сведениям до сих пор (12). Совершенно иная картина наблюдается после зангезурского землетрясения 1968 г. Здесь основная афтершоковая активность быстро затухала (во всяком случае за 3 года), после чего в эпицентральной зоне до 1975 г. были зарегистрированы лишь три относительно сильных толчка с  $K=9$ . Это говорит о том, что накопленные в земной коре напряжения быстро снимались. Если учесть, что перед сильным толчком было сейсмическое затишье, то получается, что образование разрывов происходило очень быстро. Такой процесс подготовки и протекания землетрясения создает благоприятные условия для его прогнозирования с помощью геофизических методов.

Таким образом, на основании вышесказанного можно заключить, что в проявлении сейсмичности Зангезура особое место занимает трансзональный разлом по направлению Нахичеван—Кафан. Его можно отнести к категории глубинных. Зона разлома, по всей вероятности, имеет близвертикальное расположение с шириной зоны раздробления пород около 3 км.

Предполагается, что сильные землетрясения г. Маку и Зангезура



УДК 612.827 612.822.3

ФИЗИОЛОГИЯ

А. О. Бантикян, О. П. Косоян

### К электрофизиологическим особенностям нейронов ретикулярного ядра покрышки моста

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 8/VI 1983)

Для выяснения сложных механизмов кортико-мозжечковых взаимоотношений, обеспечивающих разнообразные двигательные процессы, были подвергнуты анализу особенности активности нейронов коры больших полушарий, мозжечка и ядер ствола мозга. Было показано, что строго координированное функциональное взаимодействие коры больших полушарий и мозжечка во многом достигается благодаря деятельности предмозжечковых структур, которые будучи связанными, иногда двусторонне, с мозжечком, получают также и корковые сигналы (1-2). В этом отношении уникальную роль играет ретикулярное ядро покрышки моста Бехтерева, эфферентные нейроны которого проецируются только в структуры мозжечка, через его среднюю ножку (3-6). Рядом морфологических работ показано, что ретикуло-пункто-мозжечковые нейроны, проецирующиеся в мозжечок, дают обильные аксонные коллатерали в центральные ядра мозжечка (7-10). Показано наличие также обратной проекции из центральных ядер мозжечка в ядро Бехтерева (11-14). Наряду с этим недостаточно исследованы функциональные характеристики указанных связей. В настоящей работе проведен электрофизиологический анализ проекции эфферентных нейронов ядра Бехтерева в структуры мозжечка.

Опыты проводили на 38 взрослых кошках, наркотизированных нембуталом (40—50 мг/кг, внутривенно). Для отведения активности нейронов ядра Бехтерева использовали вентральный подход к стволу мозга. Раздражающие вольфрамовые биполярные электроды стереотаксически вводили в контралатеральные центральные ядра мозжечка (промежуточное, зубчатое и фасцигальное ядра), в верхнюю и среднюю ножки мозжечка. Внутриклеточное отведение активности отдельных нейронов ядра Бехтерева осуществляли с помощью стеклянных микроэлектродов, заполненных 3 М раствором хлористого калия или 2 М раствором цитрата калия. После каждого эксперимента производили метку пунктов отведения и раздражения и местоположение кончиков электродов контролировали гистологически.

Была зарегистрирована активность 266 нейронов. Из них 202 нейрона могли быть антидромно активированы на раздражение структур мозжечка. У 91 нейрона антидромные потенциалы действия (ПД) со скрытым периодом 0,15—1,4 мс (рис. 2, А) были отведены на стимуляцию средней ножки мозжечка. В отличие от нейронов медиального собственного ядра моста большое количество нейронов ядра Бехтере-

ва (51 клетка) отвечало антидромно также и на раздражение верхней ножки мозжечка. У 36 нейронов антидромные ПД со скрытым периодом 0,2—1,7 мс возникали только на стимуляцию верхней ножки мозжечка (рис. 2, Б).

Раздражение центральных ядер мозжечка также приводило к антидромной активации нейронов ядра Бехтерева. Так, на рис. 1, А по-

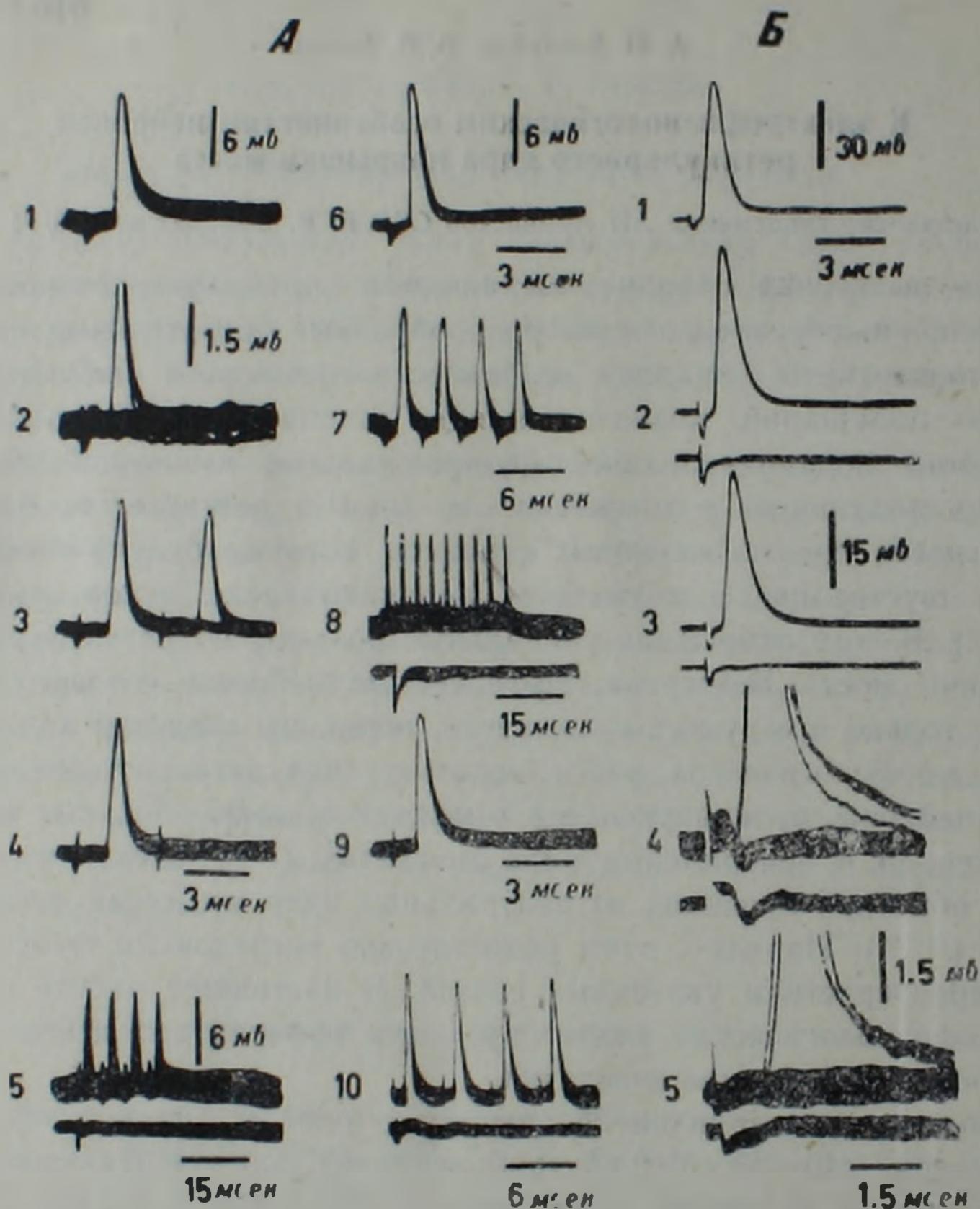


Рис. 1. Антидромная активация нейронов ядра Бехтерева, вызванная раздражением структур мозжечка. А и Б—два разных нейрона. А, 1—5—стимуляция верхней ножки мозжечка одиночным надпороговым (1), строго пороговыми (2) импульсами, двойными импульсами с разными интервалами (3, 4) и импульсами частотой в 300 Гц (5). А, 6—8—стимуляция промежуточного ядра мозжечка надпороговыми импульсами (6), импульсами частотой в 250 (7) и 400 (8) Гц. А, 9—10—стимуляция зубчатого ядра мозжечка одиночным надпороговым импульсом (9) и импульсами частотой в 250 Гц (10). Нижняя запись на А, 5, 8, 10—потенциал поля после выхода микроэлектрода из клетки. Б—стимуляция одиночными импульсами верхней (1), средней (2) ножек мозжечка, его зубчатого, промежуточного и фастигиального ядер. Нижняя запись на Б, 2—5—потенциал поля после выхода микроэлектрода из клетки.

Здесь и на рис. 3 потенциалы зарегистрированы при наложении 5—40 пробегов луча с частотой 1—5 Гц. Использовался усилитель постоянного тока

казан антидромно активируемый нейрон на раздражение верхней ножки мозжечка, его зубчатого и промежуточного ядер. Зарегистрированные ПД были оценены как антидромные, поскольку они характеризовались следующими особенностями: 1) коротким и фиксированным скрытым периодом; 2) отсутствием каких-либо синаптических потенциалов; 3) коротким рефрактерным периодом (в среднем 0,7—0,8 мс) на парное раздражение и 4) способностью воспроизводить ПД при частоте стимуляции порядка 300—500 Гц.

На рис. 1, Б дан пример антидромной активации другого нейрона ядра Бехтерева на раздражение верхней и средней ножек мозжечка, его промежуточного, зубчатого и фастигиального ядер. Вышеприведенные критерии и в этом случае служили основой для антидромной идентификации. Стимуляция зубчатого ядра мозжечка вызывала антидромную активацию у 61 нейрона ядра Бехтерева. Возникающие ПД выявлялись со скрытым периодом 0,15—1,2 мс (рис. 2, А). При испы-

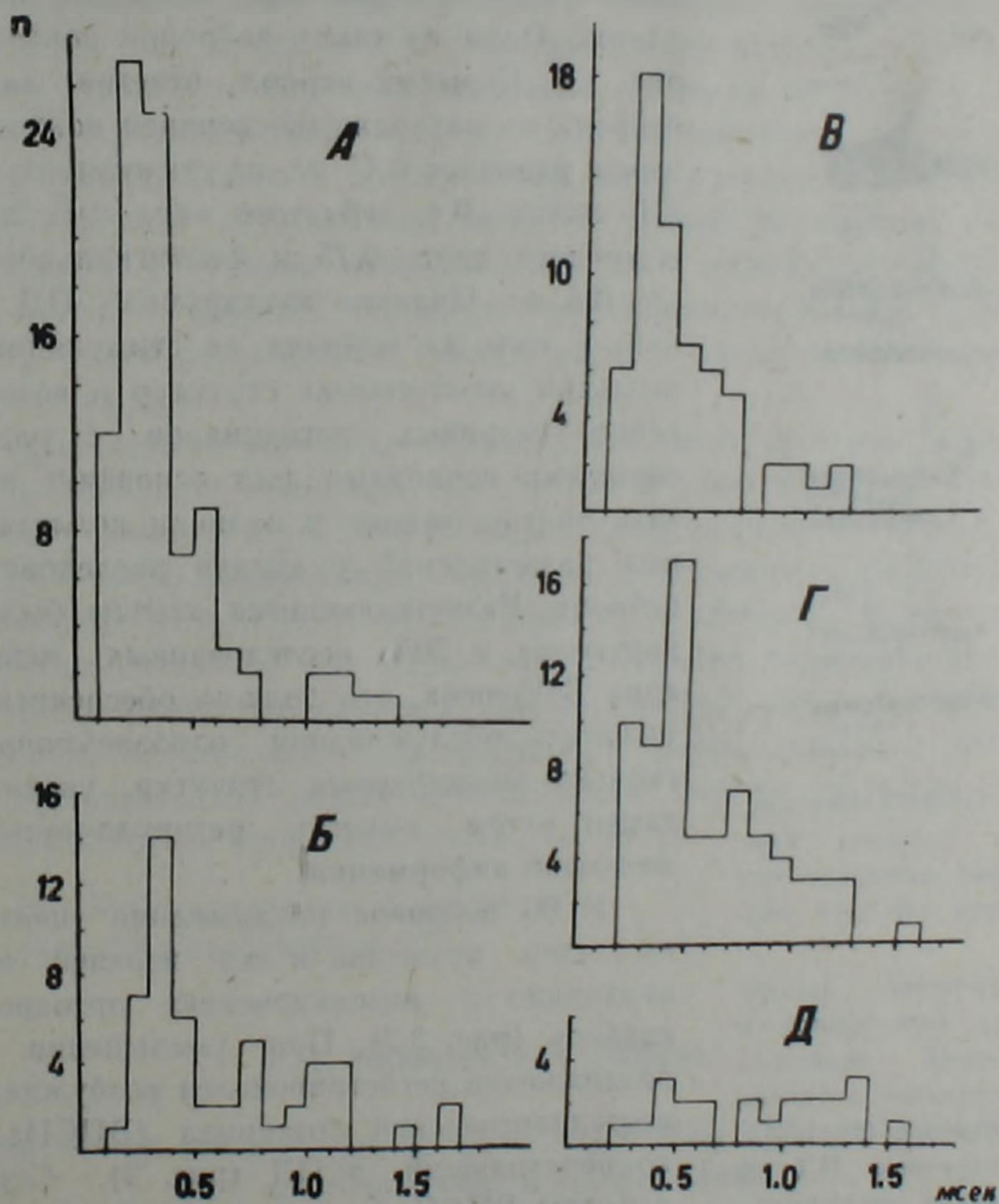


Рис. 2. Гистограммы распределения скрытых периодов антидромных потенциалов действия нейронов ядра Бехтерева, вызванных раздражением средней (А), верхней (Б) ножек мозжечка, его зубчатого (В), промежуточного (Г) и фастигиального (Д) ядер.

По оси абсцисс время в мс; по оси ординат—количество нейронов (n)

тании центральных ядер мозжечка наибольшее количество нейронов реагировало на раздражение промежуточного ядра мозжечка (72 клетки). Скрытые периоды ответов колебались в пределах 0,25—1,6 мс (рис. 2, Г). Только 22 нейрона отвечали антидромной активацией на раздражение фастигиального ядра мозжечка (скрытый период ответов составлял 0,2—1,6 мс) (рис. 2, Д).

Было показано, что часть исследованных нейронов могла быть антидромно активирована из разных структур мозжечка. Так, 17,3% из 202 исследованных нейронов антидромно активировались при раздражении средней и верхней ножек мозжечка. 9,8% нейронов реагировали на

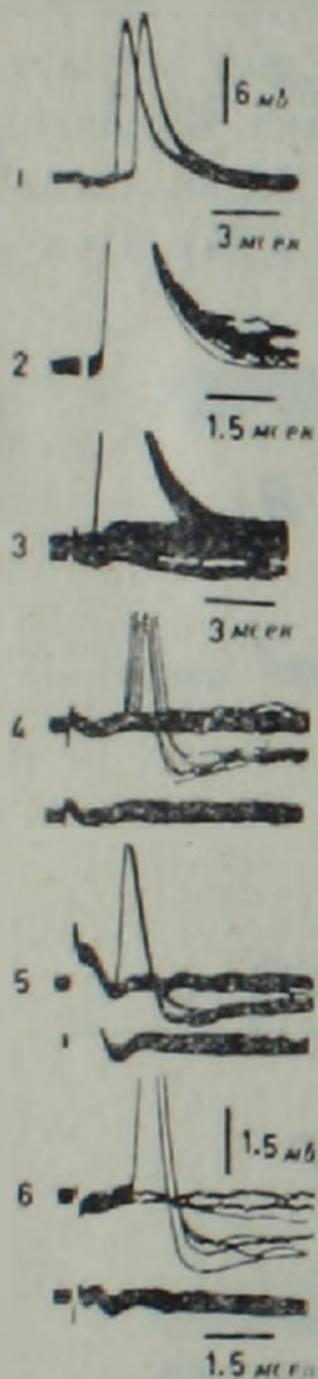


Рис. 3. Синаптическая активация нейронов ядра Бехтерева, вызванная раздражением структур мозжечка.

Конкурентное взаимодействие антидромной и ортодромной активации на раздражение зубчатого ядра мозжечка (1). ВПСП и ортодромные ПД на раздражение промежуточного ядра мозжечка (2, 3 и 6), фастигиального (4) и зубчатого ядра мозжечка (5). Нижняя запись на 3—6 потенциал поля после выхода микроэлектрода из клетки

раздражение обеих ножек мозжечка, его зубчатого и промежуточного ядер. Интерес представляют те нейроны ядра Бехтерева, которые реагировали на стимуляцию всех пяти испытанных структур мозжечка. Они составляли 4,9% исследованных нейронов, или 10 клеток. Один из таких нейронов показан на рис. 1, Б. Скрытый период ответов данного нейрона на раздражение верхней ножки мозжечка равнялся 0,45 мс, на стимуляцию средней ножки—0,4, зубчатого ядра—0,5, промежуточного ядра—0,75 и фастигиального ядра—0,8 мс. Наличие антидромных ПД у одного и того же нейрона на стимуляцию нескольких мозжечковых структур и возникновение указанных потенциалов с разными скрытыми периодами дает основание высказать предположение о наличии коллатеральных разветвлений у аксона исследованного нейрона. Разветвляющиеся аксоны были обнаружены у 50% исследованных нейронов ядра Бехтерева, что должно обеспечить возможность обслуживания одновременно несколько мозжечковых структур, увеличивая таким путем емкость ретикуло-пункто-мозжечковой информации.

У 96 нейронов раздражение центральных ядер мозжечка и его верхней ножки приводило к возникновению ортодромных спайков (рис. 3, 2). При уменьшении силы раздражения регистрировался возбуждающий постсинаптический потенциал (ВПСП), легко переходящий в ПД (рис. 3). Скрытые периоды ВПСП у данного нейрона при раздражении промежуточного ядра мозжечка равнялись 0,8—0,9 мс, фастигиального ядра—1,2 и зубчатого ядра—1,1 мс. Полученный материал позволяет предположить, что зарегистрированные ВПСП имели моносинаптическую природу.

Ортодромная активация нейронов ядра Бехтерева наблюдалась у 48 клеток на стимуляцию зубчатого ядра мозжечка, 37 клеток — верхней ножки мозжечка, 14 — промежуточного и 7 — фастигиального ядер мозжечка. Заслуживает внимания тот факт, что в 21% случаев в нейронах ядра Бехтерева имела место их ортодромная активация при раздражении промежуточного и зубчатого ядер мозжечка; 14,9% нейронов отвечали синаптической активацией на раздражение промежуточного и фастигиального ядер мозжечка; 13,9% клеток реагировали ортодромной активацией на раздражение зубчатого и фастигиального ядер, а в 12,6% случаев в нейронах ядра Бехтерева имела место их ортодромная активация при раздражении верхней ножки мозжечка и его промежуточного, зубчатого, фастигиального ядер, что указывает на выраженные конвергентные свойства мозжечково-понтинного входа.

У 32 нейронов ядра Бехтерева стимуляция верхней ножки мозжечка и его центральных ядер привела к сочетанной анти- и ортодромной активации. Как правило это наблюдалось при изменении силы раздражения. Пример такого типа активации приведен на рис. 3, 1. Изменение силы раздражения приводит к конкурентному взаимодействию между антидромным и ортодромным возбуждением. Это свидетельствует о наличии двусторонней связи не только на ядерном (<sup>2,7</sup>), но и на нейронном уровне между мозжечком и ядром Бехтерева. Такая связь должна служить структурно-функциональной основой для описанной ранее реверберации импульсации в пределах понто-мозжечкового круга (<sup>2</sup>).

Приведенный материал показал, что ретикуло-пonto-мозжечковая система обладает высокими емкостными и информационными возможностями, демонстрируя выраженные дивергентные свойства аксонов ретикуло-пonto-мозжечковых нейронов и большую конвергенцию синаптических входов на те же нейроны из различных структур мозжечка. Было показано, что мозжечково-петальная информация из ядра Бехтерева может передаваться как по средней, так и верхней ножке мозжечка, и установлено на нейронном уровне наличие реципрокной двусторонней связи между центральными ядрами мозжечка и ретикулярным ядром покрывки моста Бехтерева.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели  
Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ԲԱՆՏԻՎՅԱՆ, Հ. Պ. ԳՈՍՈՅԱՆ

Կամրջի ծածկի ցանցածն գոյացության նեյրոնների էլեկտրաֆիզիոլոգիական առանձնահատկությունների մասին

Ներկայացված նյութը ցույց է տալիս, որ ցանցային-կամրջա-ուղեղիկային համակարգն օժտված է մեծ տարողունակությամբ և ինֆորմատիվ հնարավորություններով: Այն դրսևորում է նեյրոնների արտահայտված տարամիտում, միաժամանակ ցանցային-կամրջա-ուղեղիկային նույն նեյրոնների նկատմամբ առկա է սինապտիկ մուտքերի լայն համամի-

տում: Յույց է տրվել, որ Բեխտերևի կորիզը օպտացործում է ուղեղիկի վերին  
ոտիկը կենտրոնախույս ազդանշանների հաղորդման համար: Հայտնաբերվել  
է ուղեղիկի կենտրոնական կորիզների և Բեխտերևի կորիզի միջև նեյրոնային  
մակարդակով իրադործվող երկուստեք կապը:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> J. Bloedel, *Progress in Neurobiology*, v. 2, 1—68 (1973). <sup>2</sup> G. I. Allen, N. Tsukahara, *Physiol. Rev.*, 54, 957—1006 (1974). <sup>3</sup> A. Brodal, J. Jansen, *J. Comp. Neurol.*, 84, 1, 31—118 (1946). <sup>4</sup> S. T. Kitai, J. D. Koosis, T. Kiyohara, *Exp. Brain Res.*, 24, 195—309 (1976). <sup>5</sup> M. Yamamoto, *Neuroscience*, 12, 25—34 (1979). <sup>6</sup> D. G. Rüegg, M. Wisendanger, *Physiol.*, 9, 147, 745—757 (1975). <sup>7</sup> H. M. Gerrit, S. Voogd, *Neurosci Lett.*, suppl—1, 145 (1978). <sup>8</sup> Y. H. Hoddevik, *Anat. Embryol.*, 153, 227—242 (1978). <sup>9</sup> J. J. L. Van de Vant, J. Voogd, *Acta morph. neurol-scand.*, 19, 61—62 (1981). <sup>10</sup> M. Gerrit, J. Voogd, *Acta morph. neurol-scand.*, 19, 56—57 (1981). <sup>11</sup> A. Brodal, A. M. Lacerda, J. Destombes e. a., *Exp. Brain Res.*, 16, 140—160 (1972). <sup>12</sup> A. Brodal, G. Szikla, *Brain Res.*, 39, 337—351 (1972). <sup>13</sup> F. Walberg, O. Pompeiano, L. E. Westrum e. a., *J. Comp. Neurol.*, 119, 187—199 (1962). <sup>14</sup> W. Tsukahara, T. Bando, *Brain Res.*, 33, 233—237 (1971).

